Trao đổi trực tuyến tại:

www.mientayvn.com/chat_box_li.html

Chương 9

ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH

§9.1 TƯƠNG TÁC ĐIỆN – ĐỊNH LUẬT COULOMB

1 – Điện tích – định luật bảo toàn điện tích:

Từ xa xưa, con người đã biết hiện tượng một số vật sau khi cọ sát thì chúng có thể *hút* hoặc *đẩy nhau* và chúng *hút được các vật nhẹ*. Người ta gọi chúng là các *vật nhiễm điện* và phân biệt thành hai loại nhiễm điện *dương* và *âm*. Đầu thế kỉ XVII, người ta mới nghiên cứu lĩnh vực này như một ngành khoa học.

Các vật nhiễm điện có chứa *điện tích.* Trong tự nhiên, tồn tại hai loại điện tích: *dương* và *âm*. Điện tích chứa trong một vật bất kỳ luôn bằng số nguyên lần *điện tích nguyên tố* – điện tích có giá trị *nhỏ nhất* trong tự nhiên. Đơn vị đo điện tích là coulomb, kí hiệu là C. Giá trị tuyệt đối của điện tích được gọi là *điện lượng.*

- Điện tích của hạt electron là điện tích nguyên tố âm: $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C.
- Điện tích của hạt proton là điện tích nguyên tố dương: $+e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

Điện tích dương và điện tích âm có thể trung hoà lẫn nhau nhưng *tổng đại số các điện tích trong một hệ cô lập là không đổi* – đó là nội dung của định luật bảo toàn điện tích.

2 – Định luật Coulomb:

Các điện tích cùng dấu thì đẩy nhau, trái dấu thì hút nhau. Tương tác giữa các điện tích được gọi là tương tác điện.

Năm 1785, bằng thực nghiệm, Coulomb (nhà Bác học người Pháp 1736 – 1806) đã xác lập được biểu thức định lượng của lực tương tác giữa hai điện tích có kích thước rất nhỏ so với khoảng cách giữa chúng – gọi là *điện tích điểm,* đặt đứng yên trong chân không.

- **Phát biểu định luật:** *Lực tương tác giữa hai điện tích điểm đứng yên trong chân không có phương nằm trên đường thẳng nối hai điện tích đó, có chiều đẩy nhau nếu chúng cùng dấu và hút nhau nếu chúng trái dấu, có độ lớn tỉ lệ thuận với tích độ lớn của hai điện tích và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.*

- **Biểu thức**: $$F_o = k\frac{|q_1.q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\frac{|q_1.q_2|}{r^2} \qquad (9.1)$$

Trong đó: $k = \dfrac{1}{4\pi.\varepsilon_o} = 9.10^{9}\,(Nm^2/C^2)$ – là hệ số tỉ lệ;

$$\varepsilon_o = \frac{1}{36\pi.10^9} = 8{,}85.10^{-12}\ \text{(F/m)} \text{ – là hằng số điện.}$$

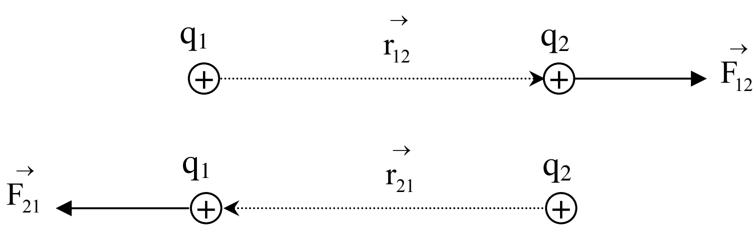
Trong chất điện môi đồng nhất và đẳng hướng, lực tương tác giữa các điện tích giảm đi ε lần so với lực tương tác trong chân không:

$$F = \frac{F_o}{\varepsilon} = k\frac{|q_1.q_2|}{\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\frac{|q_1.q_2|}{r^2} \qquad (9.2)$$

ε gọi là hệ số điện môi của môi trường đó. ε là đại lượng không thứ nguyên, có giá trị tùy theo môi trường, nhưng luôn lớn hơn 1. Bảng 9.1 cho biết hệ số điện môi của một số chất thông dụng.

Bảng 9.1: **Hệ số điện môi của một số chất**

Vật liệu	ε	Vật liệu	ε
Chân không	1	Rượu êtilic (20^oC)	25
Không khí	1,0006	Giấy	3,5
Dầu hỏa (20^oC)	2,2	Sứ	6,5
Dầu biến thế	4,5	Mica	5,5
Nước (20^oC)	80	Gốm titan	130
Ebônít	2,7 – 2,9	Thủy tinh	5 – 10



Hình 9.1: *Lực tương tác giữa 2 điện tích điểm*

Nếu gọi $\vec{r}_{12}$ là vectơ khoảng cách hướng từ q_1 đến q_2 thì lực do q_1 tác dụng lên q_2 được viết là:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1.q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2}.\frac{\vec{r}_{12}}{r} \qquad (9.3)$$

Tương tự, lực do q_2 tác dụng lên q_1 là:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1.q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2}.\frac{\vec{r}_{21}}{r} \qquad (9.4)$$

Tổng quát, lực do điện tích q_i tác dụng lên điện tích q_j là: $\vec{F}_{ij} = \dfrac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}_{ij}}{r}$ (9.5)

trong đó $\vec{r}_{ij}$ là vectơ khoảng cách hướng từ q_i đến q_j.

3 – Nguyên lý tổng hợp các lực tĩnh điện:

Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ lần lượt là các lực do điện tích q_1, q_2, …, q_n tác dụng lên q_o. Khi đó lực tổng hợp tác dụng lên q_o sẽ là:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (9.6)$$

Dựa vào nguyên lý này, người ta chứng minh được lực tương tác giữa hai quả cầu tích điện đều giống nhưng tương tác giữa hai điện tích điểm đặt tại tâm của chúng.

§9.2 ĐIỆN TRƯỜNG

1 – Khái niệm điện trường:

Định luật Coulomb thể hiện quan điểm *tương tác xa*, nghĩa là tương tác giữa các điện tích xảy ra tức thời, bất kể khoảng cách giữa chúng là bao nhiêu. Nói cách khác, vật tốc truyền tương tác là vô hạn.

Theo quan điểm *tương tác gần*, sở dĩ các điện tích tác dụng lực lên nhau được là nhờ một *môi trường vật chất đặc* biệt bao quanh các điện tích – đó là *điện trường*. Tính chất cơ bản của điện trường là tác dụng lực lên các điện tích khác đặt trong nó. Chính nhờ vào tính chất cơ bản này mà tá biết được sự ccó mặt của điện trường. Như vậy, theo quan điểm tương tác gần, hai điện tích q_1 và q_2 không trực tiếp tác dụng lên nhau mà điện tích thứ nhất gây ra xung quanh nó một điện trường và chính điện trường đó mới tác dụng lực lên điện tích kia. Lực này gọi là *lực điện trường*.

Khoa học hiện đại đã xác nhận sự đúng đắn của thuyết tương tác gần và sự tồn tại của điện trường. *Điện trường là môi trường vật chất đặc biệt, tồn tại xung quanh các điện tích và tác dụng lực lên điện tích khác đặt trong nó.*

2 – Vectơ cường độ điện trường:

Xét điểm M bất kì trong điện trường, lần lượt đặt tại M các điện tích điểm q_1, q_2, …, q_n (gọi là các điện tích thử), rồi xác định các lực điện trường $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, … , $\vec{F}_n$ tương ứng. Kết quả thực nghiệm cho thấy: tỉ số giữa lực tác dụng lên mỗi điện tích và trị số của điện tích đó là một đại lượng không phụ thuộc vào các điện tích thử mà chỉ phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong điện trường:

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = ... = \frac{\vec{F}_n}{q_n} = \overrightarrow{const}$$

Hằng vectơ đó đặc trưng cho điện trường tại điểm M cả về phương chiều và độ lớn, được gọi là vectơ cường độ điện trường tại điểm M, kí hiệu là $\vec{E}$.

Vậy:
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad (9.7)$$

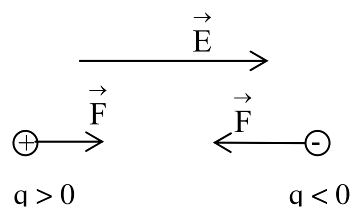
Vectơ cường độ điện trường tại một điểm là đại lượng đặc trưng cho điện trường tại điểm đó về phương diện tác dụng lực, có giá trị (phương, chiều và độ lớn) bằng lực điện trường tác dụng lên một đơn vị điện tích dương đặt tại điểm đó.

Đơn vị đo cường độ điện trường là vôn/mét (V/m).

Nếu $\vec{E}$ không đổi (cả về phương chiều lẫn độ lớn) tại mọi điểm trong điện trường thì ta có *điện trường đều*.

Nếu biết vectơ cường độ điện trường tại một điểm, ta sẽ xác định được lực điện trường tác dụng lên điện tích q đặt tại điểm đó:

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (9.8)$$



Hình 9.2: *Lực điện trường tác dụng lên điện tích q*

Nếu q > 0 thì $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{E}$; Nếu q < 0 thì $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{E}$.

3 – Vectơ cường độ điện trường gây bởi một điện tích điểm:

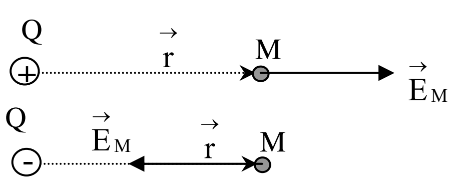
Khi một điện tích điểm Q xuất hiện, nó sẽ gây ra xung quanh nó một điện trường. Để xác định vectơ cường độ điện trường do điện tích điểm Q gây ra tại điểm M cách nó một khoảng r, ta đặt tại M điện tích thử q. Khi đó điện trường của Q sẽ tác dụng lực lên q một lực $\vec{F}$ xác định theo định luật Coulomb: $\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}.\frac{\vec{r}}{r}$. So sánh với (9.7), suy ra vectơ cường độ điện trường tại M do điện tích điểm Q gây ra là:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}.\frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}.\frac{\vec{r}}{r} \qquad (9.9)$$

Trong đó, $\vec{r}$ là vectơ bán kính hướng từ Q đến điểm M.

Nhận xét: Vectơ $\vec{E}$ có:

- ***Phương***: là đường thẳng nối điện tích Q với điểm khảo sát M
- ***Chiều***: hướng xa Q, nếu Q > 0 và hướng gần Q, nếu Q < 0.



Hình 9.3: *Cường độ điện trường gây bởi điện tích điểm*

- ***Độ lớn***: $E = k\dfrac{|Q|}{r^2} = \dfrac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (9.10)
- ***Điểm đặt***: tại điểm khảo sát M.
- Nếu bao quanh điện tích Q là môi trường điện môi đồng nhất, đẳng hướng, có hệ số điện môi ε thì cường độ điện trường giảm đi ε lần so với trong chân không:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_{ck}}{\varepsilon} = k\frac{Q}{\varepsilon r^2}.\frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2}.\frac{\vec{r}}{r} \qquad (9.11)$$

4 – Nguyên lý chồng chất điện trường:

Nếu các điện tích Q_1, Q_2, …, Q_n cùng gây ra tại điểm M các vectơ cường độ điện trường $\vec{E}_1, \vec{E}_2, ..., \vec{E}_n$, thì vectơ cường độ điện trường tổng hợp tại M là:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \qquad (9.12)$$

Để tính cường độ điện trường do một hệ điện tích phân bố liên tục trên một vật nào đó gây ra tại điểm M, ta chia nhỏ vật đó thành nhiều phần tử, sao cho mỗi phần tử mang một điện tích dq coi như một điện tích điểm. Khi đó phần tử dq gây ra tại điểm M vectơ cường độ điện trường:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{\varepsilon r^2}.\frac{\vec{r}}{r} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2}.\frac{\vec{r}}{r} \qquad (9.13)$$

và vectơ cường độ điện trường do toàn vật mang điện gây ra tại M là:

$$\vec{E} = \int_{\text{vật mang điện}} d\vec{E} \qquad (9.14)$$

* Trường hợp điện tích của vật phân bố theo chiều dài L, ta gọi $\lambda = \dfrac{dq}{d\ell}$ (9.15)

là *mật độ điện tích dài* (điện tích chứa trên một đơn vị chiều dài). Suy ra, điện tích chứa trên yếu tố chiều dài $d\ell$ là $dq = \lambda.d\ell$ và cường độ điện trường do vật gây ra là:

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\int_L \frac{\lambda d\ell}{r^3}.\vec{r} \qquad (9.16)$$

* Trường hợp điện tích của vật phân bố trên bề mặt S, ta gọi $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ (9.17)

là *mật độ điện tích mặt* (điện tích chứa trên một đơn vị diện tích). Suy ra, điện tích chứa trên yếu tố diện tích dS là $dq = \sigma dS$ và cường độ điện trường do vật gây ra là:

$$\vec{E} = \int_{(S)} d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{(S)} \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon r^3}.\vec{r} \qquad (9.18)$$

* Trường hợp điện tích của vật phân bố trong miền không gian có thể tích τ, ta gọi

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \qquad (9.19)$$

là *mật độ điện tích khối* (điện tích chứa trong một đơn vị thể tích). Suy ra, điện tích chứa trong yếu tố thể tích $d\tau$ là $dq = \rho.d\tau$ và cường độ điện trường do vật gây ra là:

$$\vec{E} = \int_{(\tau)} d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{(\tau)} \frac{\rho\, d\tau}{\varepsilon r^3}.\vec{r} \qquad (9.20)$$

Từ nguyên lý chồng chất điện trường, ta chứng minh được vectơ cường độ điện trường do một quả cầu tích điện đều gây ra tại những điểm bên ngoài quả cầu cũng được xác định bởi (9.9), song phải coi điện tích trên quả cầu như một điện tích điểm đặt tại tâm của nó.

5 – Một số ví dụ về xác định vectơ cường độ điện trường:

Ví dụ 9.1: Xác định vectơ cường độ điện trường do hệ hai điện tích điểm $Q_1 = Q_2 = Q$, đặt cách nhau một đoạn 2a trong không khí gây ra tại điểm M trên trung trực của đoạn thẳng nối Q_1, Q_2 , cách đoạn thẳng ấy một khoảng x. Tìm x để cường độ điện trường có giá trị lớn nhất.

<u>**Giải**</u>

Vectơ cường độ điện trường tại M là $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, với $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ là các vectơ cường độ điện trường do Q_1, Q_2 gây ra tại M. Do $Q_1 = Q_2$ và M cách đều Q_1, Q_2 nên từ (9.10) suy ra: $E_1 = E_2 = k\dfrac{|Q|}{\varepsilon r^2} = k\dfrac{|Q|}{\varepsilon(x^2 + a^2)}$.

Do đó: $$E = 2E_1\cos\alpha = \frac{k|Q|}{\varepsilon(x^2+a^2)}.\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k|Q|x}{\varepsilon(x^2+a^2)^{3/2}} \qquad (9.21)$$

Từ qui tắc hình bình hành suy ra $\vec{E}$ nằm trên trung trực của đoạn thẳng nối Q_1, Q_2 và hướng ra xa đoạn thẳng đó nếu $Q > 0$ (hình 9.4), hướng lại gần nếu $Q < 0$.

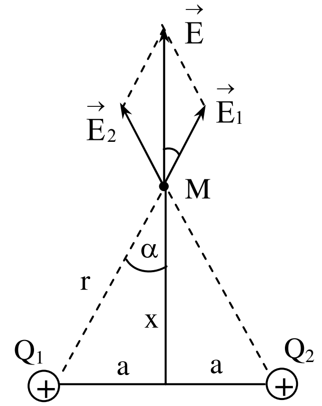
Để tìm được giá trị lớn nhất của E, ta có thể lấy đạo hàm (9.21) theo x rồi lập bảng biến thiên của E(x), từ đó suy ra giá trị lớn nhất. Hoặc có thể dùng bất đẳng thức Cauchy như sau: $x^2 + a^2 = x^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 \geq 3.\sqrt[3]{x^2.\frac{a^4}{4}}$

$$\Rightarrow (x^2 + a^2)^{3/2} \geq \left(27x^2.\frac{a^4}{4}\right)^{3/2} = 3\sqrt{3}\,\frac{a^2}{2}.x$$

$$\Rightarrow E = \frac{k\,|Q|\,x}{\varepsilon(x^2 + a^2)^{3/2}} \leq \frac{2k\,|Q|}{3\sqrt{3}\varepsilon a^2} = \text{const}$$

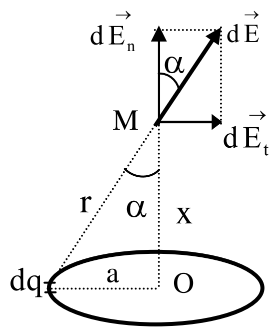
Vậy: $$E_{max} = \frac{2k\,|Q|}{3\sqrt{3}\varepsilon a^2}$$

khi $x^2 = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (9.22)



Hình 9.4

Ví dụ 9.2: Xác định vectơ cường độ điện trường do một vòng dây tròn, bán kính a, tích điện đều với điện tích tổng cộng Q, gây ra tại điểm M nằm trên trục của vòng dây, cách tâm vòng dây một đoạn là x. Từ kết quả đó hãy suy ra cường độ điện trường tại tâm vòng dây và tìm x để cường độ điện trường là lớn nhất.



Hình 9.5

Giải

Ta chia nhỏ vòng dây thành những phần tử rất nhỏ sao cho điện tích dq của mỗi phần tử ấy được coi là điện tích điểm và nó gây ra tại M vectơ cường độ điện trường có độ lớn: $dE = \frac{k.dq}{\varepsilon r^2}$. Vectơ $d\vec{E}$ được phân tích thành 2 thành phần: thành phần pháp tuyến $d\vec{E}_n$ song song với trục vòng dây và thành phần tiếp tuyến $d\vec{E}_t$ vuông góc với trục vòng dây.

Cường độ điện trường tổng hợp tại M là: $\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \int_L d\vec{E}_t + \int_L d\vec{E}_n$

Vì ứng với một phần tử dq, ta luôn tìm được phần tử dq' đối xứng với dq qua tâm O của vòng dây và do đó luôn tồn tại $d\vec{E}'$ đối xứng với $d\vec{E}$ qua trục của vòng dây. Từng cặp $d\vec{E}$ và $d\vec{E}'$ này có các thành phần tiếp tuyến triệt tiêu nhau. Do đó: $\int_L d\vec{E}_t = 0$ và $\vec{E} = \int_L d\vec{E}_n = \vec{n}_o.\int_L dE_n = \vec{n}_o.\int_L dE.\cos\alpha = \vec{n}_o.\int_L \frac{kdq}{\varepsilon r^2}.\frac{x}{r}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{n}_o.\frac{kx}{\varepsilon r^3}\int_L dq = \vec{n}_o.\frac{kx}{\varepsilon r^3}.Q = \vec{n}_o.\frac{kQx}{\varepsilon(a^2 + x^2)^{3/2}} \qquad (9.23)$$

Trong đó $\vec{n}_o$ là pháp vectơ đơn vị của mặt phẳng vòng dây - qui ước $\vec{n}_o$ luôn hướng xa tâm O.

Vậy: $\vec{E}$ luôn nằm trên trục vòng dây và hướng xa tâm O nếu Q > 0; hướng gần O nếu Q < 0 và có độ lớn:

$$E = \frac{k|Q|.x}{\varepsilon(a^2 + x^2)^{3/2}} \qquad (9.24)$$

Từ (9.24) suy ra, tại tâm O (x = 0) thì $E_o = 0$.

Để tìm giá trị lớn nhất của E ta p dụng bất đẳng thức Cauchy như ví dụ 9.1 và thu được kết quả:

$$E = \frac{k|Q|.x}{\varepsilon(a^2 + x^2)^{3/2}} \le \frac{k|Q|.x}{\varepsilon.3\sqrt{3}.x.\frac{a^2}{2}} = \frac{2k|Q|}{3\sqrt{3}.\varepsilon a^2}$$

Vậy:

$$E_{max} = \frac{2k|Q|}{3\sqrt{3}.\varepsilon a^2} \quad \text{khi } x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (9.25)$$

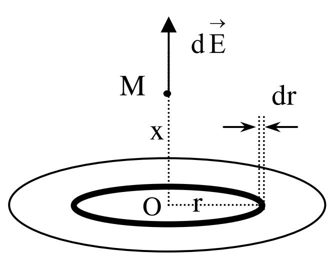
Mở rộng: Nếu a << x , nghĩa là điểm M ở rất xa vòng dây, hoặc vòng dây rất nhỏ, thì từ (9.24) $\Rightarrow E = \dfrac{k|Q|}{\varepsilon.x^2}$: vòng dây coi như một điện tích điểm đặt tại tâm O.

Ví dụ 9.3 Xác định vectơ cường độ điện trường do một đĩa phẳng, tròn, bán kính a, tích điện đều với mật độ điện tích mặt là σ, gây ra tại điểm M trên trục của đĩa, cách tâm đĩa một đoạn x. Từ đó suy ra cường độ điện trường gây bởi mặt phẳng tích điện rộng vô hạn.

Giải

Ta chia đĩa thành những hình vành khăn (coi như những vòng dây mảnh) có bề dày dr, bán kính r. Mỗi phần tử này gây ra tại M cường độ điện trường :

$$d\vec{E} = \vec{n}_o.\frac{kx.dQ}{\varepsilon(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{(xem ví dụ 9.2)}$$



Hình 9.6

trong đó dQ là điện tích chứa trên vòng dây. Gọi dS là diện tích của hình vành khăn thì dS = 2πrdr . Do đó dQ = σ.dS = σ.2πrdr. Suy ra cường độ điện trường do toàn đĩa tròn gây ra tại M là:

$$\vec{E} = \int_{\text{đĩa tròn}} d\vec{E} = \vec{n}_o.\frac{kx\sigma.2\pi}{\varepsilon}\int_0^a \frac{r.dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{n}_o.\frac{kx\sigma.2\pi}{\varepsilon}.\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = \vec{n}_o.\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_o}.\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \qquad (9.26)$$

Với $\vec{n}_o$ là pháp vectơ đơn vị của đĩa tròn. Qui ước $\vec{n}_o$ luôn hướng xa đĩa.

Vậy: $\vec{E}$ luôn nằm trên trục của đĩa, có chiều hướng xa đĩa nếu $\sigma > 0$ và hướng gần đĩa nếu $\sigma < 0$; có độ lớn:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_o}.\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \qquad (9.27)$$

Từ (9.27) suy ra:

- Khi $a \to \infty$ (đĩa trở thành mặt phẳng rộng vô hạn) thì $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_o}$ (9.28)

Vậy *điện trường gây bởi mặt phẳng tích điện đều, rộng vô hạn là điện trường đều.*

- Khi M rất xa đĩa, hoặc đĩa rất nhỏ (x >> a), ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} \Rightarrow E = \frac{\pi\sigma a^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o x^2} = \frac{kQ}{\varepsilon x^2} \qquad (9.29)$$

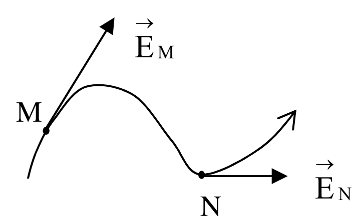
Toàn bộ đĩa coi như điện tích điểm đặt tại tâm O của nó.

§9.3 ĐƯỜNG SỨC ĐIỆN TRƯỜNG – ĐIỆN THÔNG

1 – Đường sức của điện trường:

a) ***Định nghĩa***: *Đường sức của điện trường là đường mà tiếp tuyến với nó tại mỗi điểm trùng với phương của vectơ cường độ điện trường tại điểm đó, chiều của đường sức là chiều của vectơ cường độ điện trường.*

Hệ đường sức là tập hợp các đường sức mô tả không gian có điện trường. Tập hợp các đường sức điện trường được gọi là *phổ đường sức điện trường* hay *điện phổ*. Điện phổ mô tả sự phân bố điện trường một cách trực quan.

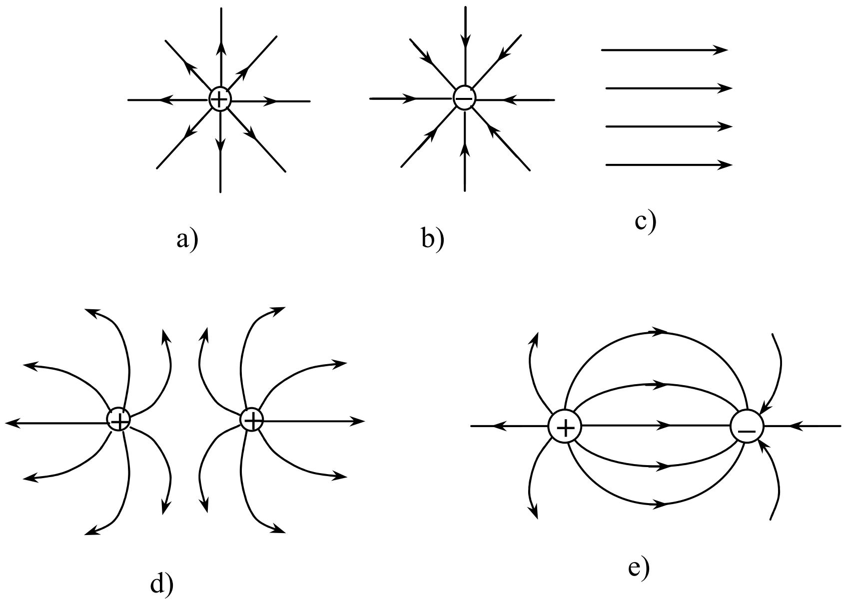


Hình 9.7: *Đường sức điện trường*

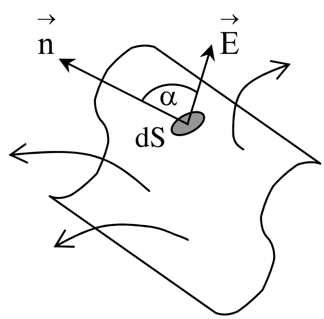
b) ***Tính chất***:

- *Qua bất kỳ một điểm nào trong điện trường cũng vẽ được một đường sức.*
- *Các đường sức không cắt nhau.* Vì nếu chúng cắt nhau thì tại giao điểm sẽ có 2 vectơ cường độ điện trường – điều này là vô lý.
- *Đường sức của điện trường tĩnh* không khép kín, đi ra từ điện tích dương, đi vào điện tích âm.

c) ***Qui ước vẽ***: *số đường sức xuyên qua một đơn vị diện tích dS* đủ nhỏ, đặt vuông góc với đường sức *bằng độ lớn của vectơ cường độ điện trường* tại điểm $M \in dS$. Từ qui ước đó suy ra: *nơi nào điện trường mạnh thì đường sức sẽ dày, nơi nào điện trường yếu thì đường sức sẽ thưa, điện trường đều thì các đường sức song song và cách đều nhau.* Hình 9.8 là một số dạng đường sức của điện trường. Từ đó ta thấy ở gần các điện tích, điện trường rất mạnh.



Hình 9.8: *Một số dạng đường sức điện trường:*
a) Điện tích dương; b) Điện tích âm; c) Điện trường đều
d) Hệ hai điện tích dương; e) Hệ điện tích dương và âm



Hình 9.9: *Điện thông*

2 – Điện thông:

Trong không gian có điện trường, xét một diện tích vi cấp dS đủ nhỏ sao cho sao cho diện tích dS được coi là phẳng và cường độ điện trường tại mọi điểm trên dS là không đổi. Ta định nghĩa đại lượng vô hướng:

$$d\Phi_E = E_n.dS = EdS.\cos\alpha = \vec{E}.d\vec{S} \qquad (9.30)$$

là *thông lượng điện trường (*hay *điện thông)* gởi qua diện tích vi cấp dS. Trong đó E_n là hình chiếu của vectơ cường độ điện trường lên pháp tuyến của dS; α là góc giữa $\vec{E}$ và pháp vectơ đơn vị $\vec{n}$ của dS; vectơ diện tích $d\vec{S} = dS.\vec{n}$.

Từ đó suy ra *điện thông* gởi qua một mặt (S) bất kỳ là:

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S EdS\cos\alpha = \int_S \vec{E}\,d\vec{S} \qquad (9.31)$$

Qui ước chọn pháp vectơ $\vec{n}$ như sau:

- Nếu mặt (S) là kín thì $\vec{n}$ hướng từ trong ra ngoài;
- Nếu (S) hở thì $\vec{n}$ chọn tuỳ ý.

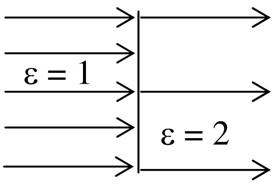
Như vậy, điện thông Φ_E gởi qua mặt (S) là một số đại số có thể âm, dương hoặc bằng không. Tuy nhiên $|\Phi_E|$ cho biết số đường sức điện trường xuyên qua mặt (S).

3 – Vectơ điện cảm – thông lượng điện cảm:

Thực nghiệm cho thấy, nếu điện trường trong chân không có cường độ E_o thì trong chất điện môi đồng nhất và đẳng hướng, cường độ điện trường giảm ε lần.

$$E = \frac{E_o}{\varepsilon} \qquad (9.32)$$

Như vậy, khi đi từ môi trường này sang môi trường khác thì đường sức điện trường sẽ bị gián đoạn tại mặt phân cách giữa hai môi trường. Điều này đôi khi bất lợi cho các phép tính về vi phân, tích phân.



Hình 9.10: *Đường sức bị gián đoạn tại mặt phân cách*

Khắc phục điều này, người ta xây dựng vectơ *điện cảm* $\vec{D}$ (còn gọi là vectơ cảm ứng điện, vectơ điện dịch): $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_o.\vec{E}$ (9.33)

Trong đó ε gọi là hệ số điện môi của môi trường. Trong chân không ε = 1, trong không khí ε ≈ 1, các môi trường khác thì ε > 1.

Thực ra công thức (9.33) chỉ đúng đối với các chất điện môi đẳng hướng, còn trong chất điện môi dị hướng, $\vec{D}$ và $\vec{E}$ có thể không cùng phương. Trong chương này, chỉ đề cập đến các chất điện môi đẳng hướng, vì thế $\vec{D} \uparrow\uparrow \vec{E}$ (đọc thêm chương 11 để hiểu rõ bản chất của $\vec{D}$).

Như vậy, ngoài việc mô tả điện trường bằng vectơ $\vec{E}$, người ta còn dùng vectơ $\vec{D}$ và tương tự, ta cũng có các khái niệm:

- *Đường cảm ứng điện*: là đường mà tiếp tuyến với nó tại mỗi điểm trùng với phương của $\vec{D}$. Các tính chất và qui ước vẽ các đường cảm ứng điện tương tự như đường sức.
- *Thông lượng điện cảm* (hay thông lương cảm ứng điện, điện dịch thông) gởi qua yếu tố diện tích dS và gởi qua mặt (S) là:

$$d\Phi_D = D_n.dS = DdS\cos\alpha = \vec{D}\,d\vec{S} \qquad (9.34)$$

$$\Phi_D = \int_S d\Phi_D = \int_S \vec{D}\,d\vec{S} \qquad (9.35)$$

§9.4 ĐỊNH LÍ OSTROGRADSKY – GAUSS (O – G)

1 – Thiết lập định lý:

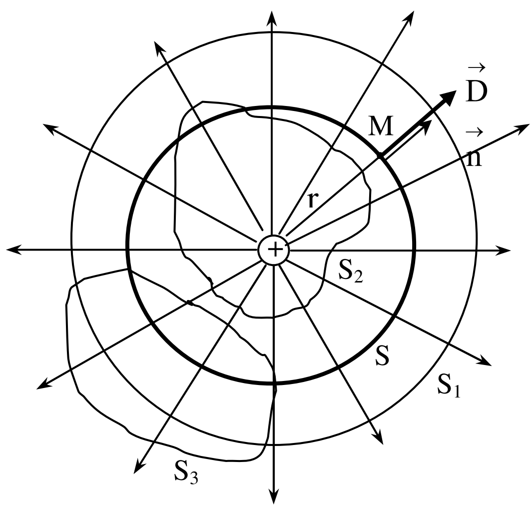
Xét điện tích điểm Q > 0. Bao quanh Q một mặt cầu (S), tâm là Q, bán kính r. Thông lượng điện cảm gởi qua mặt cầu này là: $\Phi_D = \oint_{(S)} d\Phi_D = \oint_{(S)} DdS\cos\alpha$. Do tính đối xứng cầu nên D = const tại mọi điểm trên mặt cầu và $\alpha = 0$ (vì pháp tuyến của mặt (S) luôn trùng với đường cảm ứng điện, xem hình 9.11). Do đó, thông lượng điện cảm gởi qua mặt kín (S) là: $\Phi_D = \oint_{(S)} DdS = D\oint_{(S)} dS = DS$

Mà $D = \varepsilon\varepsilon_o E = \varepsilon\varepsilon_o.\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$; $S = 4\pi r^2$

Suy ra: $\Phi_D = Q$ (9.36)

Nhận xét:

- Thông lượng điện cảm Φ_D gởi qua mặt cầu (S) không phụ thuộc vào bán kính r của mặt cầu. Suy ra đối với bất kì mặt cầu nào đồng tâm với (S), ví dụ (S_1), ta cũng có (9.36). Như vậy, trong khoảng không gian giữa hai mặt cầu (S) và (S_1), nơi không có điện tích, các đường cảm ứng điện là liên tục, không bị mất đi và cũng không thêm ra. Do đó, nếu xét mặt kín (S_2) bất kì bao quanh Q thì ta cũng có (9.36).



Hình 9.11: *Định lí O – G*

- Nếu có mặt kín (S_3) không bao quanh Q thì có bao nhiêu đường cảm ứng điện đi vào (S_3) thì cũng có bấy nhiêu đường cảm ứng điện đi ra khỏi (S_3), nên thông lượng điện cảm gởi qua (S_3) bằng không.

Tóm lại, thông lượng điện cảm gởi qua một mặt kín không phụ thuộc vị trí điện tích bên trong nó. Kết quả (9.36) cũng đúng cho cả trường hợp bên trong mặt kín chứa nhiều điện tích, phân bố bất kì, khi đó Q là tổng đại số các điện tích bên trong mặt kín.

2 – Phát biểu định lí O – G:

Thông lượng điện cảm gởi qua một mặt kín bất kỳ bằng tổng đại số các điện tích chứa trong mặt kín đó.

$$\Phi_D = \sum Q \quad \text{hay} \quad \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \sum Q_{\text{trong (S)}} \qquad (9.37)$$

Trong chân không thì $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$, nên ta có: $\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \dfrac{\sum Q_{\text{trong (S)}}}{\varepsilon_o}$ (9.38)

và định lý O – G còn được phát biểu là: *điện thông gởi qua một mặt kín bất kì bằng tổng đại số các điện tích bên trong mặt kín đó chia cho hằng số điện ε_o.*

3 – Dạng vi phân của định lí O – G:

(9.37) được gọi là dạng tích phân của định lí O – G. Trong trường hợp điện tích phân bố liên tục, ta có thể biểu diễn định lí O – G dưới dạng vi phân.

Muốn vậy, ta áp dụng một định lí trong giải tích, cũng có tên là định lí O – G, biến một tích phân mặt thành tích phân theo thể tích. Theo đó, vế trái của (9.37) được viết là:

$$\oint_S \vec{D}.d\vec{S} = \int_\tau \text{div}\,\vec{D}.d\tau \qquad (9.39)$$

Trong đó, τ là thể tích của không gian giới hạn bởi mặt kín (S) và $d\tau$ là yếu tố thể tích; div là một toán tử vi phân tác động lên một vectơ và trả về một vô hướng, trong hệ tọa độ Descartes, ta có:

$$\text{div}\,\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad (9.40)$$

Vì điện tích phân bố liên tục nên vế phải của (9.37) trở thành:

$$\sum Q_{\text{trong(S)}} = \int_\tau \rho d\tau \qquad (9.41)$$

Thay (9.39) và (9.41) vào (9.37), ta được: $\int_\tau \text{div}\,\vec{D}.d\tau = \int_\tau \rho d\tau$.

Suy ra :

$$\int_\tau (\text{div}\,\vec{D} - \rho) d\tau = 0 \qquad (9.42)$$

Vì (9.37) đúng với mặt kín (S) bất kì, nên (9.42) đúng với thể tích τ bất kì. Điều này chứng tỏ :

$$\text{div}\,\vec{D} - \rho = 0 \quad \text{hay} \quad \text{div}\,\vec{D} = \rho \qquad (9.43)$$

Trong môi trường đẳng hướng, ta có:

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (9.44)$$

(9.43), (9.44) là dạng vi phân của định lí O – G. Nó diễn tả mối quan hệ giữa vectơ điện cảm $\vec{D}$, vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ với mật độ điện tích ρ ở từng điểm trong điện trường.

4 – Vận dụng định lý O – G để tính cường độ điện trường:

Định lý O – G thường được sử dụng để tính cường độ điện trường của một số hệ điện tích phân bố *đối xứng không gian*, cụ thể là đối xứng cầu, đối xứng trụ và đối xứng phẳng. Các bước thực hiện:

- **Bước 1**: *Chọn mặt kín S (gọi là mặt Gauss) đi qua điểm khảo sát, sao cho việc tính thông lượng điện cảm* Φ_D *(*hoặc điện thông Φ_E*) được đơn giản nhất.* Muốn vậy, phải căn cứ vào dạng đối xứng của hệ đường sức để suy ra qũi tích những điểm có cùng độ lớn của vectơ điện cảm (hoặc vectơ cường độ điện trường) với điểm khảo sát.
- **Bước 2**: *Tính thông lượng điện cảm* Φ_D (hoặc điện thông Φ_E) *gởi qua mặt Gauss và tính tổng điện tích chứa trong (S).*
- **Bước 3**: *Thay vào (9.37) hoặc (9.38) suy ra đại lượng cần tính.*

Ví dụ 9.4: Xác định cường độ điện trường gây bởi khối cầu tâm O, bán kính a, tích điện đều với mật độ điện tích khối $\rho > 0$ tại những điểm bên trong và bên ngoài khối cầu.

Giải

Do tính đối xứng cầu nên hệ đường sức là những đường thẳng xuyên tâm và hướng xa tâm O, vì $\rho > 0$. Suy ra, các điểm có D = const nằm trên mặt cầu tâm O.

a) Xét điểm M nằm ngoài khối cầu:

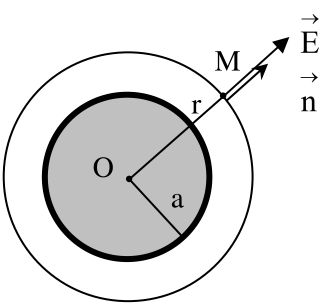
Bước 1: Chọn mặt (S) là mặt cầu tâm O, đi qua M.
Bước 2: Thông lượng điện cảm gởi qua mặt Gauss (S): $\Phi_D = \oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \oint_S D.dS = D\oint_S dS = DS_{Gauss}$

Với $D = \varepsilon\varepsilon_o E$; $S_{Gauss} = 4\pi r^2 \Rightarrow \Phi_D = \varepsilon\varepsilon_0 E.4\pi r^2$

Tổng điện tích chứa trong mặt Gauss:

$$Q = \sum Q_{trong\,(S)} = \int_\tau \rho d\tau = \rho.\tau = \rho.\frac{4}{3}\pi.a^3$$

với τ là thể tích khối cầu



Hình 9.12: *CĐĐT bên ngoài khối cầu*

Bước 3: Vì $\Phi_D = \sum Q_{trong\,(S)}$ nên $\varepsilon\varepsilon_o.E.4\pi r^2 = \frac{4}{3}\rho\pi a^3$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon\varepsilon_o r^2} = \frac{kQ}{\varepsilon r^2} \quad \text{hay ở dạng vectơ: } \vec{E} = \frac{kQ}{\varepsilon r^2}.\frac{\vec{r}}{r} \tag{9.45}$$

Mở rộng: đối với mặt cầu tích điện đều với điện tích tổng cộng Q thì (9.45) vẫn đúng. Vậy, một khối cầu hoặc một mặt cầu tích điện đều với điện tích Q thì điện trường mà nó gây ra xung quanh nó giống như điện trường gây bởi điện tích điểm Q đặt tại tâm khối cầu hoặc mặt cầu.

b) Xét điểm M bên trong khôi cầu:

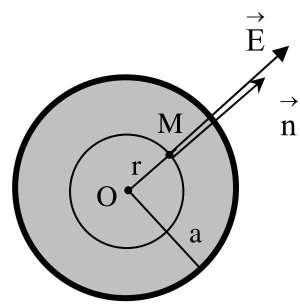
Tương tự ta cũng chọn mặt kín Gauss là mặt cầu, tâm O, bán kính r (r < a).

Điện thông gởi qua mặt Gauss là: $\Phi_D = 4\pi\varepsilon\varepsilon_o E.r^2$

Tổng điện tích chứa trong mặt Gauss là Q = $\rho.\tau = \rho.\frac{4}{3}\pi r^3$; với τ là thể tích không gian chứa trong mặt Gauss.

Suy ra: $E = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_o}$ hay $\vec{E}_{trong} = \frac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon\varepsilon_o}$ (9.46)

Mở rộng: Nếu điện tích chỉ phân bố trên mặt cầu (ví dụ vỏ cầu hoặc quả cầu kim loại) thì ρ = 0 nên trong lòng quả cầu E = 0, nghĩa là không có điện trường.



Hình 9.13: *CĐĐT bên trong khối cầu*

Nhận xét: Cường độ điện trường bên trong và bên ngoài khối cầu biến thiên theo hai qui luật khác nhau:

- Bên trong khối cầu, cường độ điện trường tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách r.
- Bên ngoài khối cầu, cường độ điện trường tỉ lệ nghịch với r^2.
- Ngay tại mặt cầu, cường độ điện trường đạt giá trị lớn nhất:

$$E_{max} = \frac{kQ}{\varepsilon a^2} = \frac{\rho a}{3\varepsilon\varepsilon_o} \tag{9.47}$$

- Các kết quả (9.45) và (9.46) vẫn đúng trong trường hợp quả cầu tích điện âm, khi đó vectơ cường độ điện trường hướng vào tâm O.

Ví dụ 9.5: Xác định phân bố cường độ điện trường gây bởi mặt phẳng rộng vô hạn, tích điện đều với mật độ điện tích mặt $\sigma > 0$.

<u>**Giải**</u>

Do điện tích phân bố đều trên mặt phẳng σ nên các đường sức vuông góc với mặt phẳng, hướng ra xa mặt phẳng σ. Qũi tích của những điểm có D = const là hai mặt phẳng đối xứng nhau qua mặt phẳng σ.

Bước 1: Chọn mặt Gauss (S) là mặt trụ có hai đáy song song, cách đều mặt phẳng σ và chứa điểm khảo sát M, có đường sinh vuông góc với mặt phẳng σ (hình 9.14).

Bước 2: Thông lượng điện cảm gởi qua mặt Gauss là:

$$\Phi_D = \oint_{(S)} \vec{D}.d\vec{S} = \int_{\text{xung quanh}} \vec{D}.d\vec{S} + \int_{\text{đáy trên}} \vec{D}.d\vec{S} + \int_{\text{đáy dưới}} \vec{D}.d\vec{S}$$

Vì ở mặt đáy, ta có D = const và $\vec{D} \uparrow\uparrow \vec{n}$; còn ở mặt xung quanh thì $\vec{D} \perp \vec{n}$, nên ta có: $\Phi_D = 0 + \int_{\text{Đáy trên}} DdS + \int_{\text{Đáy dưới}} DdS = 2D\int_{\text{đáy}} dS = 2DS_{\text{đáy}} = 2\varepsilon\varepsilon_o ES_{\text{đáy}}$

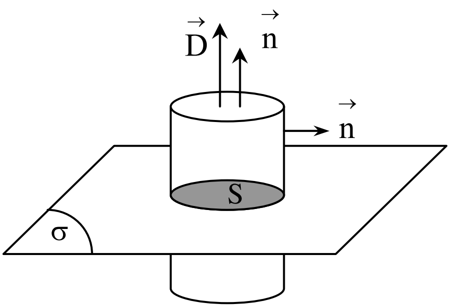
Mặt khác, tổng điện tích chứa trong mặt Gauss chính là tổng điện tích nằn trên tiết diện S do mặt (σ) cắt khối trụ. Ta có $Q = \sigma.S = \sigma.S_{\text{đáy}}$

Bước 3: Vì $\Phi_D = Q$ nên $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_o}$

Hay $$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_o}.\vec{n}_0 \qquad (9.48)$$

Trong đó, $\vec{n}_0$ là pháp vectơ đơn vị của mặt phẳng σ. Qui ước, $\vec{n}_0$ hướng ra xa mặt phẳng (σ).

Nhận xét: $\vec{E}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm khảo st, vậy điện trường do mặt phẳng tích điện đều gây ra là điện trường đều.



Hình 9.14: *CĐĐT do mặt phẳng tích điện, rộng vô hạn, gây ra.*

Trường hợp mặt phẳng tích điện âm (σ < 0) thì (9.48) vẫn đúng. Lúc đó $\vec{E}$ hướng lại gần (σ). Kết quả (9.48) phù hợp với (9.28), tuy nhiên phương pháp vận dụng định lí O – G thì đơn giản hơn nhiều.

§9.5 CÔNG CỦA LỰC ĐIỆN TRƯỜNG – ĐIỆN THẾ, HIỆU ĐIỆN THẾ

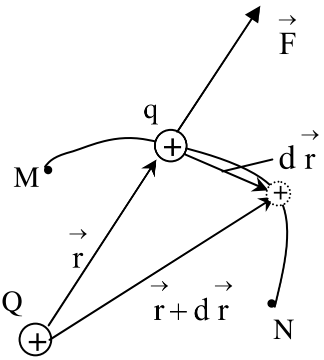
1 – Công của lực điện trường:

Giả sử điện tích điểm q di chuyển dọc theo đường cong (L) bất kỳ từ M đến N trong điện trường của điện tích điểm Q. Công của lực điện trường trên quãng đường này là (xem lại cách tính công ở §4.1):

$$A_{MN} = \int_{(L)} \vec{F}.d\vec{s} = \int_{(L)} q\vec{E}.d\vec{s} = \int_{(L)} q\frac{kQ}{\varepsilon r^3}\vec{r}.d\vec{r}$$

$$= k\frac{qQ}{\varepsilon}\int_{(L)}\frac{rdr}{r^3} = \int_{r_M}^{r_N}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad A_{MN} = q\left(\frac{kQ}{\varepsilon r_M} - \frac{kQ}{\varepsilon r_N}\right) \qquad (9.49)$$



Hình 9.15: *Tính công của lực điện trường*

Ta thấy công A_{MN} không phụ thuộc vào đường đi. Trong trường hợp tổng quát, khi điện tích q di chuyển trong điện trường tĩnh bất kì, ta cũng chứng minh được *công của lực điện trường không phụ thuộc vào hình dạng đường đi mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối*. Nếu (L) là đường cong kín thì A_{MN} = 0. Vậy lực điện trường tĩnh là lực *thế*.

2 – Lưu thông của vectơ cường độ điện trường:

Nếu kí hiệu ds là vi phân của đường đi dọc theo đường cong (L) thì công của lực điện trường được viết là:

$$\int_{(L)} \vec{E}d\vec{s} = \frac{A}{q} \qquad (9.50)$$

Ta gọi tích phân $\int_{(L)} \vec{E}d\vec{s}$ là lưu thông của vectơ cường độ điện trường dọc theo đường cong (L). Nếu (L) là đường cong kín thì:

$$\oint_{(L)} \vec{E}d\vec{s} = 0 \qquad (9.51)$$

Vậy: *lưu thông của vectơ cường độ điện trường dọc theo đường cong (L) bằng công của lực điện trường làm di chuyển một đơn vị điện tích dương dọc theo đường cong đó*. Và *lưu thông của vectơ cường độ điện trường dọc theo đường cong kín bất kỳ thì bằng không.* (9.49) và (9.50) thể hiện tính chất *thế* của điện trường tĩnh.

3 – Thế năng của điện tích trong điện trường:

Ta đã biết rằng, công của lực thế giữa hai điểm bất kì bằng độ giảm thế năng của vật giữa hai điểm đó (xem §4.5): $dA = \vec{F}d\vec{s} = -dW_t$.

Đối với lực điện trường $\vec{F} = q\vec{E}$ nên: $dW_t = -q\vec{E}d\vec{s}$ (9.52)

Suy ra, trong chuyển dời từ M đến N thì:

$$W_t(M) - W_t(N) = q\int_{MN}\vec{E}d\vec{s} = A_{MN} \quad (9.53)$$

Nếu qui ước gốc thế năng ở vô cùng ($W_t(\infty) = 0$) thì *thế năng của điện tích q tại điểm M trong điện trường là đại lượng bằng công của lực điện trường làm di chuyển điện tích q từ M ra xa vô cùng*:

$$W_t(M) = A_{M\infty} = q\int_{M\infty}\vec{E}d\vec{s} \quad (9.54)$$

Trong trường hợp tổng quát, thế năng sai khác nhau một hằng số cộng C. Giá trị của C tùy thuộc vào điểm mà ta chọn làm gốc thế năng. Vậy thế năng của điện tích q trong điện trường có dạng tổng quát là:

$$W_t(M) = -q\int\vec{E}d\vec{s} + C \quad (9.55)$$

Đối với điện trường do điện tích Q gây ra thì thế năng của điện tích q là:

$$W_t(M) = -q\int\vec{E}d\vec{s} + C = -q\int\frac{kQ}{\varepsilon r^3}\vec{r}d\vec{s} + C = \frac{kQq}{\varepsilon r} + C \quad (9.56)$$

với r là khoảng cách từ điện tích Q đến điểm M; $k = 9.10^9$ (Nm^2/C^2).

Đối với điện trường do hệ điện tích điểm $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ gây ra thì thế năng của điện tích q là:

$$W_t(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{kqQ_i}{\varepsilon r_{iM}} + C \quad (9.57)$$

trong đó r_{iM} là khoảng cách từ điện tích Q_i đến điểm M.

4 – Điện thế – hiệu điện thế:

a) ***Khái niệm***:

Đối với các trường *thế*, người ta xây dựng các *hàm thế*. Trong Cơ học, hàm thế của trường lực thế là thế năng. Nhưng trong Điện học, người ta chọn *hàm thế của điện trường là điện thế* .

Từ các công thức (9.5), (9.55), (9.56) và (9.57) suy ra, tỉ số $\frac{W_t}{q}$ không phụ thuộc vào điện tích thử q mà chỉ phụ thuộc vào các điện tích gây ra điện trường và vào vị trí của điểm khảo sát nên tỉ số đó đặc trưng cho điện trường tại điểm khảo sát và được gọi là điện thế của điện trường tại điểm khảo sát:

$$V = \frac{W_t}{q} \qquad (9.58)$$

Cũng như thế năng, điện thế là đại lượng vô hướng có thể dương, âm hoặc bằng không. Giá trị của điện thế tại một điểm phụ thuộc vào việc chọn điểm nào làm gốc điện thế. Trong lí thuyết, người ta chọn gốc điện thế ở vô cùng, khi đó điện thế tại điểm M trong điện trường có biểu thức: $V_M = \int_{M}^{\infty} \vec{E}\, d\vec{s}$ (9.59)

Trong trường hợp tổng quát, điện thế tại điểm M trong điện trường có biểu thức:

$$V = -\int \vec{E}\, d\vec{s} + C \qquad (9.60)$$

với C là hằng số phụ thuộc vào điểm chọn gốc điện thế. Trong thực tế, người ta thường chọn gốc điện thế ở đất.

Hiệu hai giá trị của điện thế tại hai điểm M, N trong điện trường gọi là hiệu điện thế giữa hai điểm đó: $U_{MN} = V_M - V_N$ (9.61)

Từ (9.53), (9.58) và (9.61) suy ra mối quan hệ giữa công của lực điện trường và hiệu điện thế: $A_{MN} = q(V_M - V_N) = qU_{MN}$ (9.62)

Vậy: *Công của lực điện trường trong sự dịch chuyển điện tích q từ điểm M đến điểm N trong điện trường bằng tích số của điện tích q với hiệu điện thế giữa hai điểm đó.*

Từ (9.50) v (9.62) ta cĩ: $U_{MN} = V_M - V_N = \frac{A_{MN}}{q} = \int_{M}^{N} \vec{E}\, d\vec{s}$ (9.62a)

Vậy: *Lưu thông của vectơ cường độ điện trường từ điểm M đến điểm N bằng hiệu điện thế giữa hai điểm đó.*

b) ***Điện thế do các hệ điện tích gây ra:***

Từ các phân tích trên, ta có các công thức tính điện thế:

- Do một điện tích điểm gây ra: $V = \frac{kQ}{\varepsilon r} + C$ (9.63)

  với r là khoảng cách từ điện tích Q đến điểm khảo sát.

- Do hệ điện tích điểm gây ra: $V = \sum V_i = \sum \frac{kQ_i}{\varepsilon r_i} + C$ (9.64) với r_i là khoảng cách từ điện tích Q_i đến điểm khảo sát.

- Để tính điện thế do hệ điện tích phân bố liên tục trong miền (Ω) gây ra, ta coi miền đó gồm vô số phần tử nhỏ, sao cho điện tích dq của các phần tử đó là những điện tích điểm. Mỗi điện tích điểm dq gây ra tại điểm khảo sát điện thế $dV = \dfrac{kdq}{\varepsilon r}$ và điện thế do toàn hệ gây ra là:

$$V = \int_\Omega dV = \int_\Omega \frac{kdq}{\varepsilon r} + C \qquad (9.65)$$

Trong đó r là khoảng cách từ yếu tố điện tích dq đến điểm khảo sát. Tùy theo dạng hình học của miền (Ω) mà dq được tính từ (9.15), (9.17) hoặc (9.19). Nếu chọn gốc điện thế ở vô cùng thì hằng số C trong (9.63), (9.64) và (9.65) sẽ bằng không.

c) Ý nghĩa của điện thế và hiệu điện thế:

Từ (9.62) suy ra Mặc dù giá trị điện thế phụ thuộc vào điểm chọn gốc điện thế, nhưng hiệu điện thế giữa hai điểm M, N bất kì không phụ thuộc vào việc chọn gốc điện thế. Mặt khác, khi U_{MN} càng lớn thì công của lực điện trường càng lớn.

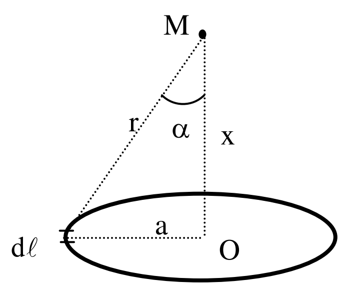
Vậy: *hiệu điện thế giữa hai điểm M, N trong điện trường đặc trưng cho khả năng thực hiện công của lực điện trường giữa hai điểm đó.*

Điện thế là đại lượng đặc trưng cho điện trường về mặt năng lượng.

Trong hệ SI, đơn vị đo điện thế và hiệu điện thế là vôn (V).

Ví dụ 9.6: Một vòng dây tròn bán kính a, tích điện đều với điện tích tổng cộng là Q, đặt trong không khí. Tính điện thế tại điểm M trên trục vòng dây, cách tâm vòng dây một đoạn x. Từ đó suy ra điện thế tại tâm vòng dây. Xét hai trường hợp: a) gốc điện thế tại vô cùng; b) gốc điện thế tại tâm O của vòng dây.

Ap dụng số: a = 5cm; x = 12 cm; $Q = -2{,}6.10^{-9}$ C.



Hình 9.16: *Tính điện thế do vòng dây tích điện gây* ra ra

Giải

Xét một yếu tố chiều dài $d\ell$ trên vòng dây. Gọi λ là mật độ điện tích dài thì điện tích chứa trong $d\ell$ là $dq = \lambda d\ell$.

Theo (9.65), điện thế tại M là: $V_M = \oint_L \dfrac{kdq}{\varepsilon r} + C = \dfrac{k\lambda}{\varepsilon}\oint_L \dfrac{d\ell}{r} + C$

Trong đó, tích phân lấy trên toàn bộ chu vi L của vòng dây.

Vì $r = \sqrt{a^2 + x^2} = \text{const}$ nên:

$$V_M = \frac{k\lambda}{\varepsilon r}\oint_L d\ell + C = \frac{k\lambda.2\pi a}{\varepsilon\sqrt{a^2+x^2}} + C = \frac{kQ}{\varepsilon\sqrt{a^2+x^2}} + C \quad (9.66)$$

a) Chọn gốc điện thế ở vô cùng. Suy ra khi $x \to \infty$ thì $V_M \to 0$.

Từ (9.66) suy ra C = 0. Vậy: $V_M = \dfrac{kQ}{\varepsilon\sqrt{a^2+x^2}}$ (9.67)

Thay số: $V_M = \dfrac{kQ}{\varepsilon\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{9.10^9.(-2,6.10^{-9})}{1.\sqrt{(5.10^{-2})^2+(12.10^{-2})^2}} = -180(V)$

(9.67) suy ra, điện thế tại tâm O của vòng dây là thấp nhất:

$$V_O = V_{min} = \frac{kQ}{\varepsilon a} = \frac{9.10^9.(-2,6.10^{-9})}{1.5.10^{-2}} = -468\ (V)$$

Hiệu điện thế giữa hai điểm OM: $U_{OM} = V_O - V_M = -288$ (V)

b) Chọn gốc điện thế tâm O. Suy ra khi x = 0 thì $V_M = V_o = 0$.

Từ (9.66) suy ra $C = -\dfrac{kQ}{\varepsilon a}$. Vậy: $V_M = \dfrac{kQ}{\varepsilon\sqrt{a^2+x^2}} - \dfrac{kQ}{\varepsilon a}$ (9.68)

Thay số ta được: $V_M = 288$ (V) và $U_{OM} = V_o - V_M = -288$ (V)

5 – Mặt đẳng thế:

Tập hợp các điểm trong điện trường có cùng điện thế tạo thành một mặt đẳng thế. Để tìm dạng của mặt đẳng thế, ta giải phương trình:

$$V(\vec{r}) = const = C \quad (9.69)$$

(9.69) xác định một họ các mặt đẳng thế. Với mỗi giá trị của C ta có một mặt đẳng thế trong họ.

Ví dụ: đối với điện trường do điện tích điểm Q gây ra thì phương trình (9.69) có dạng: $\dfrac{kQ}{\varepsilon r} = C \Rightarrow r = \dfrac{kQ}{\varepsilon C} = const$ (9.70)

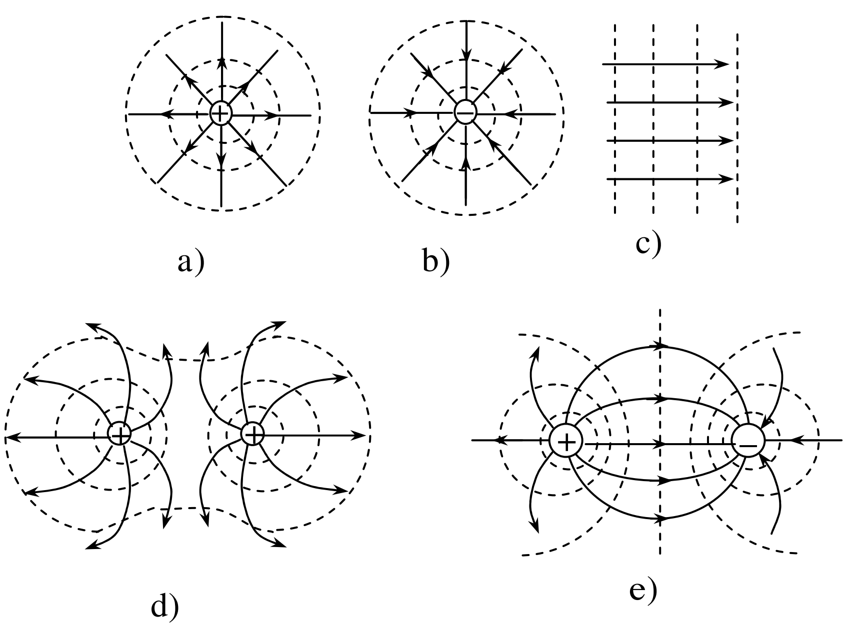
Vậy, các mặt đẳng thế là các mặt cầu, tâm Q.

Hình (9.17) biểu diễn các mặt đẳng thế của vài hệ điện tích khác nhau (đường nét đứt là giao của các mặt đẳng thế với mặt phẳng hình vẽ).

Qui ước vẽ mặt đẳng thế: vẽ các mặt đẳng thế sao cho *độ chênh lệch ΔV giữa hai mặt đẳng thế bất kỳ là như nhau*. Suy ra: nơi nào điện trường mạnh các mặt đẳng thế sẽ sít nhau; nơi nào điện trường yếu các mặt đẳng thế sẽ xa nhau; điện trường đều, các mặt đẳng thế là những mặt phẳng song song cách đều nhau.

Tính chất của mặt đẳng thế:

- *Các mặt đẳng thế không cắt nhau*. Vì nếu chúng cắt nhau thì tại giao điểm sẽ có hai giá trị khác nhau của điện thế (vô lý).
- *Khi điện tích di chuyển trên mặt đẳng thế thì lực điện trường không thực hiện công*. Thật vậy, nếu điện tích q di chuyển từ M đến N trên mặt đẳng thế thì công của lực điện trường là $A_{MN} = q(V_M - V_N)$. Mà $V_M = V_N$, vậy $A_{MN} = 0$.
- *Vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ tại mọi điểm trên mặt đẳng thế luôn vuông góc với mặt đẳng thế đó.* Thật vậy, giả sử điện tích q di chuyển trên mặt đẳng thế theo một đoạn $d\vec{s}$ bất kỳ, ta luôn có $dA = \vec{F}\,d\vec{s} = q\vec{E}\,d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s}$. Mà $d\vec{s}$ là vi phân đường đi theo một hướng bất, nên $\vec{E}$ phải vuông góc với mọi đường $d\vec{s}$ trên mặt đẳng thế – nghĩa là $\vec{E}$ phải vuông góc với mặt đẳng thế. Vậy, *đường sức điện trường phải vuông góc với mặt đẳng thế.*



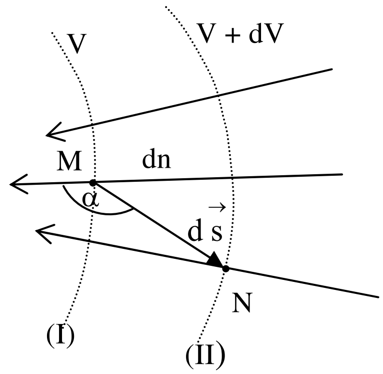
Hình 9.17: *Một số dạng mặt đẳng thế (nét đứt) gây bởi:*
a) Điện tích dương; b) Điện tích âm; c) Điện trường đều
d) Hệ hai điện tích dương; e) Hệ điện tích dương và âm

§9.6 LIÊN HỆ GIỮA CƯỜNG ĐỘ ĐIỆN TRƯỜNG VÀ ĐIỆN THẾ

Ta biết cường độ điện trường đặc trưng cho điện trường về phương diện tác dụng lực; còn điện thế đặc trưng cho điện trường về mặt năng lượng. Như vậy giữa cường độ điện trường và điện thế phải có mối quan hệ với nhau. Sau đây chúng ta sẽ tìm mối quan hệ đó.

Trong không gian có điện trường, lấy hai mặt đẳng thế sát nhau (I) và (II), mà điện thế có giá trị lần lượt là V và (V + dV). Giả sử điện tích q di chuyển từ điểm M $\in$ (I) đến điểm N $\in$(II) theo cung ds bất kỳ. Ta có công của lực điện trường là:

$$dA = q\vec{E}d\vec{s} \quad (*)$$



Hình 9.18: *Quan hệ giữa CĐĐT và điện thế.*

Mặt khác:

$$dA = q(V_M - V_N) = q[V - (V + dV)] = -qdV \quad (**)$$

So sánh (*) và (**) suy ra: $$\vec{E}d\vec{s} = Eds\cos\alpha = -dV \qquad (9.71)$$

với α là góc hợp bởi vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ và vectơ đường đi $d\vec{s}$.

Trường hợp 1: Nếu $d\vec{s}$ hướng về nơi có điện thế cao, nghĩa là dV > 0, thì từ (9.71) suy ra, góc $\alpha > 90^0$, nghĩa là $\vec{E}$ hướng về nơi có điện thế thấp.

Trường hợp 2: Nếu $d\vec{s}$ hướng về nơi có điện thế thấp, nghĩa là dV < 0, thì từ (9.71) suy ra, góc $\alpha < 90^0$, nghĩa là $\vec{E}$ cũng hướng về nơi có điện thế thấp.

Kết luận 1: *Vectơ cường độ điện trường luôn hướng theo chiều giảm của điện thế.*

Gọi $E_s = E\cos\alpha$ là hình chiếu của $\vec{E}$ lên phương của $d\vec{s}$ thì theo (9.71) ta có: $E_s.ds = E.ds.\cos\alpha = -dV$, hay: $$E_s = -\frac{dV}{ds} \qquad (9.72)$$

Kết luận 2: *Hình chiếu của vectơ cường độ điện trường lên một phương nào đó bằng độ giảm điện thế trên một đơn vị chiều dài theo phương đó.*

Nếu chiếu vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ lên ba trục Ox, Oy, Oz của hệ tọa độ Descartes thì ta có: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ (9.73)

Trong đó, $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ là đạo hàm riêng phần của hàm thế V đối với các biến x, y, z. Trong giải tích vectơ, (9.73) được viết dưới dạng:

$$\vec{E} = E_x.\vec{i} + E_y.\vec{j} + E_z.\vec{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}.\vec{k}\right) \qquad (9.74)$$

Hay: $$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \qquad (9.75)$$

trong đó vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}V$ gọi là gradien của điện thế V.

Kết luận 3: *Vectơ cường độ điện trường tại một điểm bất kì trong điện trường bằng và ngược dấu với gradien của điện thế tại điểm đó.*

Nếu xét theo phương đường sức của điện trường (M và N nằm cùng một đường sức) thì $E_s = E$ và MN nằm trên pháp tuyến của các mặt đẳng thế. Do đó ta viết ds = dn và ta có: $$E = -\frac{dV}{dn} \qquad (9.76)$$

Vì $E_s \le E$ nên từ (9.72) và (9.76) suy ra: $$\left|\frac{dV}{ds}\right| \le \left|\frac{dV}{dn}\right| \qquad (9.77)$$

Kết luận 4: *lân cận một điểm trong điện trường thì điện thế sẽ biến thiên nhanh nhất theo phương pháp tuyến của mặt đẳng thế (hay phương của đường sức điện trường vẽ qua điểm đó).*

Nếu gọi $\vec{n}_o$ là vectơ đơn vị hướng dọc theo chiều của đường sức điện trường thì ta có thể biểu diễn mối quan hệ giữa cường độ điện trường và điện thế bằng công thức: $$\vec{E} = -\frac{dV}{dn}.\vec{n}_o \qquad (9.78)$$

Đối với điện trường đều, nhân hai vế của (9.76) với dn, rồi lấy tích phân ta được: $$V_2 - V_1 = \int_{(1)}^{(2)} dV = -E\int_{(1)}^{(2)} dn = -E.d$$

Hay $$U_{12} = V_1 - V_2 = E.d \qquad (9.79)$$

trong đó d là khoảng cách giữa hai mặt đẳng thế đi qua điểm (1) và điểm (2) (hay khoảng cách giữa hai điểm đó tính dọc theo một đường sức điện trường).

Vận dụng mối quan hệ giữa cường độ điện trường và điện thế ta sẽ tính được cường độ điện trường nếu biết điện thế và ngược lại.

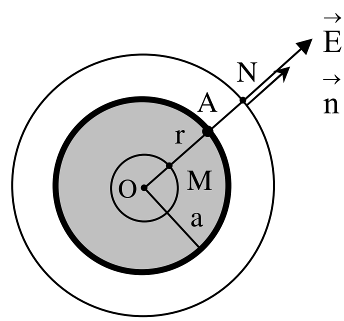
Ví dụ 9.7: Xác định điện thế gây bởi khối cầu tâm O, bán kính a, tích điện đều với mật độ điện tích khối $\rho > 0$ tại những điểm bên trong và bên ngoài khối cầu. Cho biết hệ số điện môi bên trong và bên ngoài khối cầu đều bằng 1. Xét 2 trường hợp: a) Chọn gốc điện thế ở vô cùng; b) chọn gốc điện thế tại tâm O.

Giải

Xét điểm M bên trong khối cầu. Cường độ điện trường tại M, theo (9.46) là:

$\vec{E}_{trong} = \dfrac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_o}$. Thay vào (9.78), ta có $\dfrac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} = -\dfrac{dV}{dn}.\vec{n}_o$ (*)

Vì đường sức hướng theo bán kính, nên $\vec{r}$ và $\vec{n}_o$ cùng phương với phương bán kính. Do đó:



Hình 9.19: *Sự phân bố điện thế bên trong và bên ngoài khối cầu tích điện*

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dn} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \Rightarrow \quad dV = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o} rdr$$

$$\Rightarrow \int_{V_O}^{V_M} dV = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\int_0^{r_M} rdr$$

$$\Rightarrow \quad V_M - V_O = -\frac{\rho r_M^2}{6\varepsilon_o} \qquad (9.80)$$

Tương tự, xét điểm N ở bên ngoài khối cầu, thay (9.45) vào (9.78) ta suy ra: $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{kQ}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{V_A}^{V_N} dV = -kQ\int_a^{r_M}\frac{dr}{r^2}$

$$\Rightarrow \quad V_N - V_A = kQ\left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{a}\right) \qquad (9.81)$$

trong đó V_A là điện thế tại điểm trên bề mặt khối cầu.

a) Trường hợp 1: chọn gốc điện thế tại vô cùng thì khi $r_N \to \infty; V_N \to 0$

$$(9.81) \Rightarrow \qquad V_A = \frac{kQ}{a} \qquad (9.82)$$

Thay (9.82) vào (9.81) ta tính được điện thế tại điểm N bên ngoài khối cầu:

$$V_N = \frac{kQ}{r_N} \quad \text{hay} \quad V_{ngoài} = \frac{kQ}{r} \tag{9.83}$$

Từ (9.80) suy ra, khi M trùng với A thì ta có:

$$V_A - V_O = -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} = -\frac{4}{3}\pi a^3.\rho.\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\frac{1}{2a} = -\frac{kQ}{2a}$$

Kết hợp với (9.82) suy ra: $V_O = \dfrac{3kQ}{2a}$ (9.84)

Thay (9.84) vào (9.80) ta có điện thế bên trong khối cầu là:

$$V_{trong} = \frac{3kQ}{2a} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_o} \tag{9.85}$$

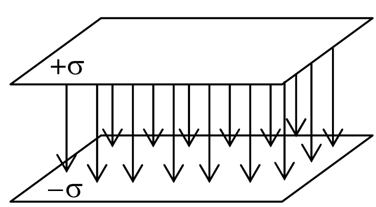
b) *Trường hợp 2:* chọn gốc điện thế tại tâm O thì $V_O = 0$. Từ (9.80) suy ra:

$$V_{trong} = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_o} \tag{9.86}$$

Do đó, điện thế tại mặt cầu là: $V_A = -\dfrac{\rho a^2}{6\varepsilon_o} = -\dfrac{kQ}{2a}$ (9.87)

Thay (9.87) vào (9.81) ta có: $V_{ngoài} = \dfrac{kQ}{r} - \dfrac{3kQ}{2a}$ (9.88)

Ví dụ 9.8: Xác định cường độ điện trường và điện thế gây bởi hai mặt phẳng song song, rộng vô hạn, cách nhau một khoảng d, tích điện đều với mật độ điện tích mặt là +σ và – σ. Cho biết hệ số điện môi của môi trường bao quanh hai mặt phẳng là ε. Chọn gốc điện thế ở mặt phẳng – σ.



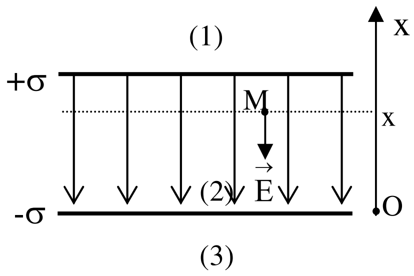
Hình 9.20: *Điện trường gây bởi 2 mặt phẳng rộng vô hạn, tích điện đều.*

Giải

Để xác định cường độ điện trường gây bởi hai mặt phẳng này, ta có thể vận dụng trực tiếp định lý O – G. Tuy nhiên có thể lập luận đơn giản dựa vào kết quả của ví dụ 9.5 như sau: Cường độ điện trường tại điểm M bất kỳ luôn là tổng hợp của hai điện trường do từng mặt phẳng gây nên: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Trong đó $\vec{E}_1$ là vectơ cường độ điện trường do mặt phẳng +σ gây ra, luôn hướng xa mặt phẳng này;

$\vec{E}_2$ là vectơ cường độ điện trường do mặt phẳng $-\sigma$ gây ra, luôn hướng gần mặt phẳng này. Vì $E_1 = E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_o}$ nên:

- Đối với những điểm nằm ngoài hai mặt phẳng (vùng (1) và (3)) thì E = 0.
- Đối với những điểm nằm giữa hai mặt phẳng thì $\vec{E}$ hướng từ $+\sigma$ sang $-\sigma$ và có độ lớn: $E = E_1 + E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_o}$



Hình 9.21

Vậy: *Điện trường trong khoảng giữa hai mặt phẳng là điện trường đều, có cường độ:*

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_o} \qquad (9.89)$$

Để tính điện thế, ta chọn trục Ox như hình (9.21). Ta có: $\vec{E} = -\dfrac{dV}{dn}.\vec{n}_o = \dfrac{dV}{dx}.\vec{i}$;

$\vec{i}$ là vectơ đơn vị hướng theo trục Ox ($\vec{i} \uparrow\downarrow \vec{n}_o$)

Suy ra : $\displaystyle\int_{V_O}^{V} dV = \int_0^x Edx \quad \Rightarrow V - V_O = Ex$

Vì chọn gốc điện thế ở mặt phẳng $-\sigma$ nên $V_O = 0$. Do đó:

$$V = Ex = \frac{\sigma x}{\varepsilon\varepsilon_o} \qquad (9.90)$$

Bên ngoài phía $-\sigma$, $E = 0 \Rightarrow V = const = V_{-\sigma} = 0$;

Bên ngoài phía $+\sigma$, $E = 0 \Rightarrow V = const = V_{+\sigma} = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_o}$

Hiệu điện thế giữa hai mặt phẳng là: $U = V_{+\sigma} - V_{-\sigma} = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_o}$ (9.91)

§9.7 BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA TĨNH ĐIỆN HỌC

Biết trước sự phân bố của điện tích, tìm sự phân bố của cường độ điện trường và điện thế. Và ngược lại, biết trước sự phân bố của cường độ điện trường hoặc điện thế, tìm sự phân bố của các điện tích. Đó là nội dung cơ bản của bài toán tĩnh điện học. Để giải bài toán này, ta sử dụng định lí O – G và mối quan hệ giữa cường độ điện trường và điện thế.

Giả sử trong môi trường đẳng hướng có hệ số điện môi ε, điện tích phân bố liên tục với mật độ điện tích khối ρ thì theo định lí O – G ở dạng vi phân, ta có :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_o} \qquad (*)$$

Mặt khác, theo mối quan hệ giữa cường độ điện trường và điện thế thì :

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \qquad (**).$$

Thay (**) vào (*), ta có : $-\mathrm{diV}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = \dfrac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$

Hay :
$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (9.92)$$

Nếu không có điện tích (ρ = 0) thì ta có : $\Delta V = 0$ (9.93)

(9.92) được gọi là phương trình Poisson, còn (9.93) được gọi là phương trình Laplace. Đó là hai phương trình cơ bản của tĩnh điện học. Trong đó toán tử Δ là toán tử vi phân cấp hai, được gọi là Laplacian hay toán tử Laplace. Trong hệ tọa độ Descartes, toán tử Δ có dạng :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (9.94)$$

Trong hệ tọa độ cầu, toán tử Δ có dạng :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta.\frac{\partial V}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} \qquad (9.95)$$

Như vậy, giải bài toán cơ bản của tĩnh điện học, thực chất là giải phương trình Poisson hoặc phương trình Laplace. Để nghiệm của các phương trình trên có ý nghĩa vật lý, ta phải có những điều kiện giới hạn, gọi là điều kiện biên. Khi đó phương trình cơ bản của tĩnh điện học sẽ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 9.9 : Trong chân không, điện thế phân bố theo qui luật $V = \dfrac{4yz}{x^2+1}$ (SI). Xác định điện thế, vectơ cường độ điện trường và mật độ điện tích tại điểm P(1, 2, 3).

Giải

- Điện thế tại P : $V_P = \dfrac{4.2.3}{1^2+1} = 12V$

- Vectơ cường độ điện trường tại P :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{8xyz}{(x^2+1)^2} = \frac{8.1.2.3}{(1^2+1)^2} = 12V/m$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4z}{x^2+1} = -\frac{4.3}{1^2+1} = -6V/m$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4y}{x^2+1} = -\frac{4.2}{1^2+1} = -4V/m$$

Vậy : $\vec{E} = (12, -6, -4)$ và $E = \sqrt{12^2+6^2+4^2} = 14V/m$

- Mật độ điện tích tại P tinh từ (9.92): $\rho = \varepsilon_0.\Delta V$

Mà : $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-8xyz}{(x^2+1)^2}\right) = \dfrac{8yz(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = \dfrac{8.2.3(3.1^2-1)}{(1^2+1)^3} = 12$

$\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{4z}{x^2+1}\right) = 0$; $\qquad \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{4y}{x^2+1}\right) = 0$

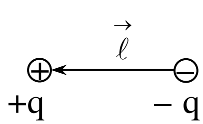
Thay vào (9.94) ta có : $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 12$

Vây : $\rho = \varepsilon_0.\Delta V = 8{,}85.10^{-12}.12 = 1{,}062.10^{-9} C/m^3$

§9.7 LƯỠNG CỰC ĐIỆN

1 – Định nghĩa :

Lưỡng cực điện là một hệ gồm hai điện tích điểm bằng nhau về độ lớn nhưng trái dấu, liên kết với nhau, đặt cách nhau một khoảng ℓ rất nhỏ so với những khoảng cách từ nó đến điểm ta xét (hình 9.22). Những vật thể vi mô thường có cấu trúc như những lưỡng cực điện. Ví dụ phân tử muối ăn NaCl là một lưỡng cực điện, gồm ion Na^+ và Cl^- .



Hình 9.22: *Lưỡng cực điện*

Đặc trưng cho tính chất điện của lưỡng cực, người ta dùng đại lượng *mômen lưỡng cực điện* hay *mômen điện* của lưỡng cực, được định nghĩa là :

$$\vec{p}_e = q\vec{\ell} \tag{9.96}$$

Trong đó $\vec{\ell}$ là vectơ hướng từ điện tích –q đến +q, có môdun bằng khoảng cách giữa –q và +q. Đường thẳng nối hai điện tích –q và +q gọi là *trục* của lưỡng cực điện.

2 – Vectơ cường độ điện trường gây bởi lưỡng cực điện :

Xét điểm M nằm trên mặt phẳng trung trực của lưỡng cực điện.Vectơ cường độ điện trường do lưỡng cực điện gây ra tại M là : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Trong đó $\vec{E}_1$,và $\vec{E}_2$ là vectơ cường độ điện trường do điện tích –q và +q gây ra tại M (hình 9.23).

Dễ thấy : $E_1 = E_2 = k\dfrac{q}{\varepsilon r_1^2}$

nên $E = 2E_1 \sin\alpha = 2k\dfrac{q}{\varepsilon r_1^2}\sin\alpha$

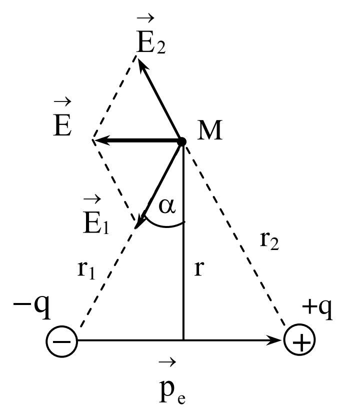
Mà : $\sin\alpha = \dfrac{\ell}{2r_1}$, $\ell \ll r$ nên $r_1 \simeq r$

Do đó : $$E = \frac{kq\ell}{\varepsilon r^3} = \frac{kp_e}{\varepsilon r^3} \tag{9.97}$$

hay ở dạng vectơ : $$\vec{E} = -\frac{k\vec{p}_e}{\varepsilon r^3} \tag{9.98}$$

với $k = 9.10^9$ Nm^2/C^2.

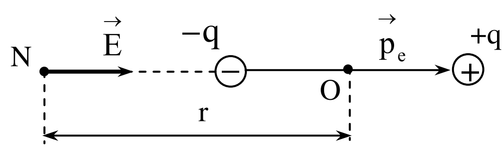
Vậy : *vectơ cường độ điện trường do lưỡng cực điện gây ra tại một điểm trên mặt phẳng trung trực của lưỡng cực điện luôn ngược chiều với vectơ mômen điện của lưỡng cực.*



Hình 9.23: *Vectơ cường độ điện trường tại điểm M trên mặt phẳng trung trực của lưỡng cực điện*

Tương tự ta cũng xác định được vectơ cường độ điện trường tại điểm N nằm trên trục của lưỡng cưc điện, các tâm O của lưỡng cực điện một khoảng r (hình 9,24) thì luôn cùng chiều với vectơ mômen lưỡng cực điện:

$$\vec{E} = \frac{2k\vec{p}_e}{\varepsilon r^3} \tag{9.99}$$



Hình 9.24: *Vectơ cường độ điện trường tại điểm N trên trục của lưỡng cực điện*

3 – Lưỡng cực điện đặt trong điện trường ngoài :

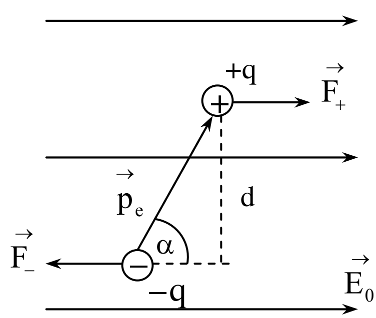
Giả sử đặt lưỡng cực điện vào điện trường đều, sao cho vectơ mômen điện $\vec{p_e}$ của lưỡng cực tạo với vectơ cường độ điện trường $\vec{E_0}$ một góc α. Khi đó điện trường tác dụng lên lưỡng cực điện hai lực ngược chiều: $\vec{F_+} = q\vec{E_0}$ và $\vec{F_-} = -q\vec{E_0}$ (hình 9.25). Tổng của hai lực này bằng không nên lưỡng cực điện không tịnh tiến trong điện trường. Tuy nhiên, hai lực $\vec{F_+}$ và $\vec{F_-}$ tạo thành một ngẫu lực làm lưỡng cực điện quay trong điện trường. Mômen của ngẫu lực là :

$$M = F_+d = qE_0\ell\sin\alpha = p_eE_0\sin\alpha \qquad (9.100)$$

Hay ở dạng vectơ : $\vec{M} = \vec{p_e} \times \vec{E_0}$ (9.101)

Vectơ $\vec{M}$ có phương của vuông góc với mặt phẳng chứa $\vec{p_e}$ và $\vec{E_0}$, chiều xác định theo qui tắc đinh ốc thuận (xem chương 0).

Dưới tác dụng của mômen ngẫu lực, lưỡng cực điện sẽ quay theo chiều sao cho vectơ $\vec{p_e}$ tới trùng với hướng của vectơ $\vec{E_0}$. Nếu lưỡng cực là cứng (ℓ không đổi), nó sẽ nằm cân bằng ở vị trí này. Nếu lưỡng cực là đàn hồi, nó sẽ bị biến dạng hoặc phân li nếu kém bền.



Hình 9.25: *Lưỡng cực điện đặt trong điện trường ngoài*

Trong trường hợp lưỡng cực điện đặt trong điện trường không đều, nó sẽ bị xoay đến vị trí sao cho vectơ $\vec{p_e}$ tới trùng với hướng của vectơ $\vec{E_0}$, sau đó lực điện trường sẽ kéo lưỡng cực điện tịnh tiến về phía điện trường mạnh.

Các kết quả trên đây được ứng dụng để giải thích hiện tượng phân cực điện môi, hiện tượng các vật nhẹ như mẩu giấy, bụi vải, ... bị hút vào các vật nhiễm điện và là nguyên lí hoạt động của lò nấu, nướng bằng sóng viba (xem *Cơ sở vật lý* tập 4 – David Halliday, dịch giả Đàm Trung Đồn).

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

9.1 So sánh lực hấp dẫn và lực tĩnh điện giữa các cặp hạt sơ cấp sau đây để rút ra những kết luận cần thiết : a) electron và electron ; b) electron và proton ; c) proton và proton. Biết khối lượng proton gấp 1840 lần khối lượng electron.

9.2 Theo giả thuyết của N.Bohr, electron trong nguyên tử Hydro chuyển động quang hạt nhân theo qũi đạo tròn có bán kính $r = 5,3.10^{-9}$ cm. Tính vận tốc góc, vận tốc dài và tần số vòng của electron.

9.3 Hòn bi sắt mang điện tích +2μC, vậy nó thừa hay thiếu bao nhiêu electron?

9.4 Hai quả cầu kim loại nhỏ giống hệt nhau, tích điện q_1, q_2, thì tương tác nhau một lực F. Nếu cho chúng chạm nhau rồi đưa về vị trí cũ thì lực tương tác bây giờ là bao nhiêu? Áp dụng số : $q_1 = +2\mu C$, $q_2 = -4\mu C$, F = 0,8N.

9.5 Hai quả cầu kim loại nhỏ giống nhau, được treo bởi hai sợi dây mảnh không dẫn điện vào một cùng một điểm. Tích cho một trong hai quả cầu thì chúng lệch nhau một góc $2\alpha = 10^0 14'$. Giải thích hiện tượng và tính điện tích của mỗi quả cầu, biết chiều dài dây treo là $\ell = 40$cm. Biết khối lượng mỗi qủa cầu là 100g.

9.6 Hai điện tích điểm $q_1 = -3.10^{-8}$ C và $q_2 = 1,2.10^{-7}$ C, đặt cách nhau một khoảng AB = 20cm trong không khí. Xác định vectơ cường độ điện trường tại điểm M, biết:

a) MA = MB = 10cm; b) MA = MB = AB

c) MA = 12 cm; MB =16cm d) MA = 10cm; MB = 30cm

e) Tìm điểm N mà tại đó cường độ điện trường triệt tiêu.

9.7 Trong một miền (Ω), điện tích phân bố với mật độ $\rho = \rho(\vec{r})$, Hãy viết biểu thức xác định vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ và điện thế V tại vị trí có vectơ bán kính $\vec{r}$. Cho hằng số điện môi ở trong và ngoài miền (Ω) đều bằng 1.

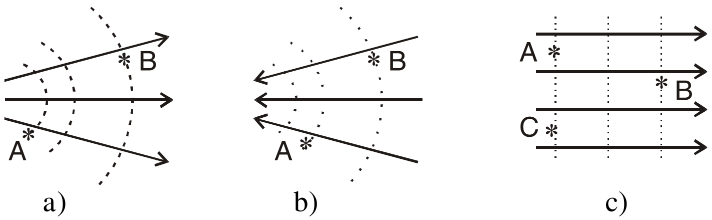
9.8 Điện thế của điện trường gây bởi một hệ điện tích có dạng: $V = a(x^2 + y^2) + bz^2$ trong đó a, b là các hằng số dương.

a) Xác định vectơ cường độ điện trường tại điểm M(x,y,z).
b) Những mặt đẳng thế có dạng như thế nào?

9.9 Một không gian mang điện với mật độ điện tích biến đổi theo qui luật $\rho = \rho_o/r$, trong đó ρ_o là hằng số và r là khoảng cách tính từ gốc toạ độ đến điểm khảo sát. Tính cường độ điện trường $\vec{E}$ và điện thế V theo $\vec{r}$ (không xét miền gần gốc toạ độ).

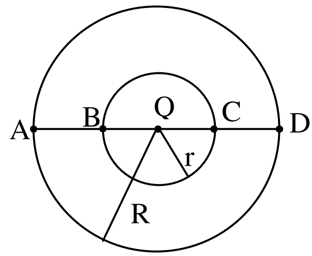
9.10 Sợi dây mảnh, thẳng, dài 2a, tích điện đều với mật độ điện dài $\lambda > 0$. Xác định vectơ cường độ điện trường và điện thế tại điểm M nằm trên mặt phẳng trung trực của sợi dây, cách sợi dây một đoạn h. Chọn gốc điện thế ở vô cùng.

9.11 So sánh cường độ điện trường và điện thế tại hai điểm A, B, C trong điện trường mô tả ở hình 9.26.



Hình 9.26

9.12 Một mặt phẳng thẳng đứng, rộng vô hạn, tích điện đều với mật độ điện mặt $\sigma = 8{,}85.10^{-6}$ C/m^2. Một quả cầu nhỏ khối lượng m = 1g, tích điện $q = 2.10^{-8}$ C, được treo vào điểm A ∈ mp(σ) bằng sợi dây rất mảnh, không dẫn điện. Tính góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng. (lấy g = 10m/s^2).



Hình 9.27

9.13 Một điện tích Q đặt tại tâm của hai đường tròn đồng tâm, bán kính r và R. Xét một đường thẳng qua tâm O cắt cả hai đường tròn tại các điểm A, B, C, D như hình (9.27).

a) Tính công của lực điện trường đã thực hiện khi điện tích q di chuyển từ B đến C và từ A đến D.

b) So sánh công của lực điện trường khi điện tích q di chuyển từ A đến C và từ D đến C.

c) Các kết quả trên có thay đổi không nếu q di chuyển giữa các điểm đó nhưng theo các cung tròn?

9.14 Đặt điện tích âm (-Q) tại gốc tọa độ trong mặt phẳng (Oxy). So sánh cường độ điện trường và điện thế tại A(5,0) và B(0, - 5). Suy ra công của lực điện trường khi điện tích +q di chuyển từ A đến B mang dấu âm hay dương ?

9.15 Sợi dây mảnh tích điện đều với mật độ điện dài λ được uốn thành cung tròn AB bán kính R, chắn góc ở tâm 2α . Xác định vectơ cường độ điện trường và điện thế tại tâm O của cung AB, chọn gốc điện thế ở vô cùng.

9.16 Hai sợi dây mảnh, rất dài, song song, cách nhau một khoảng 2a, tích điện trái dấu với mật độ điện dài là +λ và − λ . Xác định vectơ cường độ điện trường và điện thế V tại (Chọn gốc điện thế ở mặt phẳng trung trực của hai dây):

a) M nằm trên đoạn thẳng nối hai dây, vuông góc với hai dây, cách dây tích điện dương một đoạn x

b) N cách đều hai dây, cách mặt phẳng chứa hai dây một khoảng h.

9.17 Chỏm cầu có bán kính R, góc mở 2α, tích điện đều với mật độ điện mặt +σ. Xác định vectơ cường độ điện trường và điện thế tại tâm O của chỏm cầu. Chọn gốc điện thế ở vô cùng.

9.18 Hai vòng tròn tích điện đều, cùng bán kính R = 6cm , đồng trục, hai tâm O_1 và O_2 cách nhau một khoảng a = 8cm. Vòng thứ nhất tích điện $q_1 = +4\mu C$. Tính điện tích của vòng thứ hai, biết rằng, khi điện tích thử $q_0 = -1\mu C$ di chuyển từ O_1 đến O_2 thì động năng của nó tăng 0,6J.

9.19 Đặt nhẹ nhàng một điện tích điểm q = +2nC vào điện trường gây bởi sợi dây mảnh dài, tích điện đều thì thấy điện tích này di chuyển vào gần dây. Khi nó qua vị trí cách dây 4cm thì có động năng 0,015mJ. Xác định dấu và mật độ điện dài trên dây.

9.20 Đặt một lưỡng cực điện có mômen lưỡng cực $p_e = 6{,}24.10^{-30}$ Cm vào điện trường đều có cường độ E = 30kV/m sao cho $\vec{p}_e$ và $\vec{E}$ tạo với nhau một góc 30^0. Tính mômen làm quay lưỡng cực điện.