MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007

Please use the following citation format:

> Denis Auroux. *18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007*. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). http://ocw.mit.edu (accessed MM DD, YYYY). License: Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Note: Please use the actual date you accessed this material in your citation.

For more information about citing these materials or our Terms of Use, visit:
http://ocw.mit.edu/terms

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 6

Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

So, if you remember last time, we looked at parametric equations -- -- as a way of describing the motion of a point that moves in the plane or in space as a function of time of your favorite parameter that will tell you how far the motion has progressed. And, I think we did it in detail the example of the cycloid, which is the curve traced by a point on a wheel that's rolling on a flat surface.
Vì vậy, nếu bạn còn nhớ lần trước, chúng ta đã xét các phương trình tham số - - như một cách để mô tả chuyển động của một điểm trong mặt phẳng hoặc trong không gian như một hàm theo thời gian của tham số yêu thích của bạn mà sẽ cho bạn biết chuyển động đã tiến triển xa bao nhiêu. Và, tôi nghĩ rằng chúng ta đã xét nó một cách chi tiết qua ví dụ về các đường cycloid, là đường cong được tạo ra bởi một điểm trên một bánh xe đang quay trên bề mặt phẳng.

So, we have this example where we have this wheel that's rolling on the x-axis, and we have this point on the wheel. And, as it moves around, it traces a trajectory that moves more or less like this. OK, so I'm trying a new color. Is this visible from the back? So, no more blue. OK, so remember, in general, we are trying to find the position, so, x of t, y of t, maybe z of t if we are in space -- -- of a moving point along a trajectory.
À, chúng ta có ví dụ về bánh xe đang lăn trên trục x, và chúng ta có điểm này trên bánh xe. Và, khi nó di chuyển xung quanh, nó đánh dấu một quỹ đạo chuyển động hơi giống như thế này. Vâng, tôi sẽ dùng một màu mới. Màu này dễ thấy trên nền đen? À, không xanh thêm nữa. Vâng, vì vậy hãy nhớ, nói chung, chúng ta đang cố tìm vị trí, à, x (t), y (t), có thể là z (t) nếu chúng ta đang ở trong không gian - - của một điểm di chuyển dọc theo quỹ đạo.

And, one way to think about this is in terms of the position vector. So, position vector is just the vector whose components are coordinates of a point, OK, so if you prefer, that's the same thing as a vector from the origin to the moving point. So, maybe our point is here, P. So, this vector here -- This vector here is vector OP. And, that's also the position vector r of t. So, just to give you, again, that example -- -- if I take the cycloid for a wheel of radius 1,
Và, một cách để suy nghĩ về điều này là theo vector vị trí. Vì vậy, vector vị trí chỉ là vector mà các thành phần của nó là tọa độ của một điểm, vâng, vì vậy nếu bạn thích, đó là thứ tương tự như một vector từ gốc tọa độ đến điểm di chuyển. Vì vậy, có lẽ điểm của chúng ta ở đây, P. Vì vậy, vector này ở đây - ở đây vector này là vector OP. Và, đó cũng là vector vị trí r (t). Vì vậy, chỉ để cho bạn, một lần nữa, ví dụ đó - - nếu tôi chọn một đường cycloid của một bánh xe bán kính bằng 1,

and let's say that we are going at unit speed so that the angle that we used as a parameter of time is the same thing as time when the position vector, in this case, we found to be, just to make sure that they have it right, <t - sin(t),1-cos(t)>. OK, that's a formula that you should have in your notes from last time, except we had

theta instead of t because we were using the angle. But now I'm saying, we are moving at unit speed, so time and angle are the same thing.
và giả sử chúng ta sẽ chuyển động với tốc độ đơn vị để cho góc mà chúng ta sử dụng như một tham số của thời gian bằng thời gian khi vector vị trí, trong trường hợp này, chúng ta tìm thấy là, chỉ để đảm bảo rằng họ có nó đúng, <t-sin(t),1-cos(t)>. Vâng, đó là một công thức mà bạn nên có trong vở của bạn lần trước, ngoại trừ chúng ta có theta thay vì t vì chúng ta đã sử dụng góc. Nhưng bây giờ tôi sẽ nói, chúng ta đang di chuyển với tốc độ đơn vị, do đó, thời gian và góc bằng nhau.

So, now, what's interesting about this is we can analyze the motion in more detail. OK, so, now that we know the position of the point as a function of time, we can try to study how it varies in particular things like the speed and acceleration. OK, so let's start with speed. Well, in fact we can do better than speed. Let's not start with speed. So, speed is a number. It tells you how fast you are going along your trajectory.
Vì vậy, bây giờ, những gì thú vị về điều này là chúng ta có thể phân tích các chuyển động chi tiết hơn. Vâng, vì vậy, bây giờ chúng ta biết rằng vị trí của điểm là hàm của thời gian, chúng ta có thể thử nghiên cứu nó thay đổi như thế nào theo tốc độ và gia tốc. Vâng, vì vậy hãy bắt đầu với tốc độ. Vâng, quả thực, chúng ta có thể làm tốt hơn so với tốc độ. Khoan hãy bắt đầu với tốc độ. Vâng, tốc độ là một con số. Nó cho bạn biết bạn đang chuyển động nhanh như thế nào dọc theo quỹ đạo của bạn.

I mean, if you're driving in a car, then it tells you how fast you are going. But, unless you have one of these fancy cars with a GPS, it doesn't tell you which direction you're going. And, that's useful information, too, if you're trying to figure out what your trajectory is. So, in fact, there's two aspects to it. One is how fast you are going, and the other is in what direction you're going.
Ý tôi là, nếu bạn đang lái xe hơi, thì nó cho bạn biết bạn đang di chuyển nhanh như thế nào. Nhưng, nếu xe hơi của bạn không có GPS, nó không cho bạn biết hướng bạn đang đi. Và, đó cũng là thông tin hữu ích, nếu bạn đang cố tìm quỹ đạo của bạn. Vì vậy, quả thực, có hai khía cạnh của vấn đề. Một là bạn chuyển động nhanh như thế nào, và cái còn lại là hướng mà bạn chuyển động là hướng nào.

That means actually we should use a vector maybe to think about this. And so, that's called the velocity vector. And, the way we can get it, so, it's called usually V, so, V here stands for velocity more than for vector. And, you just get it by taking the derivative of a position vector with respect to time. Now, it's our first time writing

this kind of thing with a vector. So, the basic rule is you can take the derivative of a vector quantity just by taking the derivatives of each component.

Thực sự, điều đó có nghĩa là chúng ta nên sử dụng một vector có thể mô tả điều này. Và như vậy, vector đó được gọi là vector vận tốc. Và, cách chúng ta có thể nhận được nó, vâng, thông thường nó được gọi là V, do đó, V ở đây là kí hiệu của vận tốc chứ không phải vector. Và, bạn nhận được nó bằng cách lấy đạo hàm của vectơ vị trí theo thời gian. Bây giờ, đó là lần đầu tiên chúng ta viết các thứ bằng vector. Vì vậy, nguyên tắc cơ bản là bạn có thể lấy đạo hàm của một đại lượng vector chỉ bằng cách lấy đạo hàm của mỗi thành phần.

OK, so that's just dx/dt, dy/dt, and if you have z component, dz/dt. So, let me -- OK, so -- OK, so let's see what it is for the cycloid. So, an example of a cycloid, well, so what do we get when we take the derivatives of this formula there? Well, so, the derivative of t is 1- cos(t). The derivative of 1 is 0. The derivative of -cos(t) is sin(t). Very good. OK, that's at least one thing you should remember from single variable calculus.

Vâng, vì vậy, nó chính là dx / dt, dy / dt, và nếu bạn có thành phần z, dz / dt. Vì vậy, hãy để tôi - À,vâng - Vâng, vì vậy hãy xét trường hợp đối với các đường cycloid. Vì vậy, một ví dụ về đường cycloid, vâng, vì vậy chúng ta nhận được gì khi chúng ta lấy đạo hàm của công thức này ở đó? Vâng, như vậy, đạo hàm của t là 1 - cos (t). Đạo hàm của 1 bằng 0. Đạo hàm của-cos (t) bằng sin(t). Rất tốt. Vì vậy, ít ra đó là một điều mà bạn nên nhớ từ giải tích hàm một biến.

Hopefully you remember even more than that. OK, so that's the velocity vector. It tells us at any time how fast we are going, and in what direction. So, for example, observe. Remember last time at the end of class we were trying to figure out what exactly happens near the bottom point, when we have this motion that seems to stop and go backwards. And, we answered that one way. But, let's try to understand it in terms of velocity.

Hy vọng rằng bạn thậm chí có thể nhớ nhiều hơn thế. Vâng, vì vậy đó là vector vận tốc. Nó cho chúng ta biết tại bất kì thời điểm nào chúng ta sẽ di chuyển nhanh như thế nào, và theo hướng nào. Vì vậy, ví dụ, hãy quan sát. Hãy nhớ rằng ở cuối buổi học lần trước chúng ta đã cố tìm xem những gì sẽ xảy ra gần các điểm đáy, khi chúng ta có chuyển động này dường như dừng lại và đi về phía sau. Và, chúng ta đã trả lời điều đó theo một cách. Nhưng, hãy thử nghĩ về nó theo vận tốc.

What if I plug t equals 0 in here? Then, 1- cos(t) is 0, sin(t) is 0. The velocity is 0. So, at the time,at that particular time, our point is actually not moving. Of course, it's been moving just before, and it starts moving just afterwards. It's just the instant, at that particular instant, the speed is zero. So, that's especially maybe a counterintuitive thing, but something is moving. And at that time, it's actually stopped.

Sẽ như thế nào nếu tôi thế t bằng 0 vào đây? Thì, 1 - cos (t) bằng 0, sin (t) bằng 0. Vận tốc bằng 0. Vì vậy, cùng lúc, tại thời điểm cụ thể đó, điểm của chúng ta thực sự không chuyển động. Tất nhiên, nó đang chuyển động ngay trước đó, và nó bắt đầu chuyển động ngay sau đó. Chỉ là tức thời, vào thời điểm cụ thể đó, tốc độ bằng không. Vì vậy, đó có thể là thứ không trực giác, nhưng một cái gì đó đang chuyển động. Và tại thời điểm đó, nó thực sự dừng lại.

Now, let's see, so that's the vector. And, it's useful. But, if you want just the usual speed as a number, then, what will you do? Well, you will just take exactly the magnitude of this vector. So, speed, which is the scalar quantity is going to be just the magnitude of the vector, V. OK, so, in this case, while it would be square root of (1- cost)^2 sin^2(t), and if you expand that, you will get,

Bây giờ, hãy xét, vì vậy đó là vector. Và, nó hữu ích. Nhưng, nếu bạn muốn chỉ là tốc độ bình thường như một số, thì, bạn sẽ làm gì? Vâng, bạn sẽ chỉ cần lấy độ lớn của vector

này. Vì vậy, tốc độ, là đại lượng vô hướng sẽ chỉ là độ lớn của vector, V. Vâng, vì vậy, trong trường hợp này, trong khi nó sẽ bằng căn bậc hai của (1 - cost) ^ 2 sin ^ 2 (t), và nếu bạn khai triển nó, bạn sẽ nhận được,

let me take a bit more space, it's going to be square root of 1 - 2cos(t) cos^2(t) sin^2(t). It seems to simplify a little bit because we have cos^2 plus sin^2. That's 1. So, it's going to be the square root of 2 - 2cos(t). So, at this point, if I was going to ask you, when is the speed the smallest or the largest? You could answer based on that. See, at t equals 0, well, that turns out to be zero.
Cho tôi thêm chút khoảng trống, nó sẽ bằng căn bậc hai của 1 - 2cos (t) cos ^ 2 (t) sin ^ 2 (t). Có vẻ như đơn giản hơn một chút vì chúng ta có cos ^ 2 cộng sin ^ 2. Bằng 1. Vì vậy, nó sẽ là căn bậc hai của 2 - 2cos (t). Vì vậy, vào thời điểm này, nếu tôi hỏi bạn, khi nào tốc độ nhỏ nhất hoặc lớn nhất? Bạn có thể trả lời dựa trên điều đó. Xem nào, tại t bằng 0, vâng, cái đó hóa ra lại bằng không.

The point is not moving. At t equals pi, that ends up being the square root of 2 plus 2, which is 4. So, that's 2. And, that's when you're truly at the top of the arch, and that's when the point is moving the fastest. In fact, they are spending twice as fast as the wheel because the wheel is moving to the right at unit speed, and the wheel is also rotating. So, it's moving to the right and unit speed relative to the center so that the two effects add up, and give you a speed of 2.
Điểm không chuyển động. Tại t bằng pi, đại lượng đó sẽ bằng căn bậc hai của 2 cộng2, bằng 4. Vì vậy, nó bằng 2. Và, đó là khi bạn đang thực sự ở đỉnh vòm, và đó là khi điểm chuyển động nhanh nhất. Trong thực tế, chúng đang di chuyển nhanh hơn hai lần bánh xe vì bánh xe đang chuyển động với tốc độ đơn vị, và bánh xe cũng xoay. Vì vậy, nó di chuyển sang phải và với tốc độ đơn vị đối với tâm để hai hiệu ứng cộng nhau, và cho bạn một tốc độ bằng 2.

Anyway, that's a formula we can get. OK, now, what about acceleration? So, here I should warn you that there is a serious discrepancy between the usual intuitive notion of acceleration, the one that you are aware of when you drive a car and the one that we will be using. So, you might think acceleration is just the directive of speed. If my car goes 55 miles an hour on the highway and it's going a constant speed, it's not accelerating.
Dù sao đi nữa, đó là một công thức mà chúng ta có thể nhận được. Vâng, bây giờ, còn về gia tốc thì sao? Vâng, ở đây tôi nên cảnh báo bạn rằng có một sự khác biệt rõ rệt giữa các khái niệm trực quan thông thường về gia tốc, đó là cái mà bạn nhận thức được khi bạn lái xe và cái mà chúng ta sẽ dùng. Vì vậy, bạn có thể nghĩ rằng gia tốc là đạo hàm của tốc độ. Nếu xe của tôi đi 55 dặm một giờ trên đường cao tốc và với tốc độ không đổi, sẽ không có gia tốc.

But, let's say that I'm taking a really tight turn. Then, I'm going to feel something. There is some force being exerted. And, in fact, there is a sideways acceleration at that point even though the speed is not changing. So, the definition will take effect.
Nhưng, giả sử rằng tôi đang chạy ở một chổ ngoặt. Thì, tôi sẽ cảm thấy một cái gì đó. Có một lực nào đó đang tác dụng. Và, quả thực, có một gia tốc tại điểm đó mặc dù tốc độ không thay đổi. Vì vậy, định nghĩa sẽ áp dụng được.

The acceleration is, as a vector, and the acceleration vector is just the derivative of a velocity vector. So, even if the speed is constant, that means, even if a length of the velocity vector stays the same, the velocity vector can still rotate.

Gia tốc là, một vector, và vector gia tốc chỉ là đạo hàm của vector vận tốc. Vì vậy, cho dù tốc độ không đổi, có nghĩa là, ngay cả khi độ dài của vector vận tốc giữ nguyên, các vector vận tốc vẫn có thể xoay.

And, as it rotates, it uses acceleration. OK, and so this is the notion of acceleration that's relevant to physics when you find F=ma; that's the (a) that you have in mind here. It's a vector. Of course, if you are moving in a straight line, then the two notions are the same. I mean, acceleration is also going to be along the line, and it's going to has to do with the derivative of speed. But, in general, that's not quite the same.

Và, khi nó quay, sẽ có gia tốc. Vâng, và vì vậy đây là khái niệm gia tốc có liên quan đến vật lý khi bạn tìm thấy F = ma, đó là (a) mà bạn có trong tâm trí ở đây. Đó là một vector. Tất nhiên, nếu bạn đang di chuyển trên một đường thẳng, thì hai khái niệm như nhau. Ý tôi là, gia tốc cũng sẽ dọc theo đường thẳng, và độ lớn của nó sẽ là đạo hàm của tốc độ. Nhưng, nói chung, điều đó không phải lúc nào cũng đúng.

So, for example, let's look at the cycloid. If we take the example of the cycloid, well, what's the derivative of one minus cos(t)? It's sin(t). And, what's the derivative of sin(t)? cos(t), OK. So, the acceleration vector is <sin(t), cos(t)>. So, in particular, let's look at what happens at time t equals zero when the point is not moving. Well, the acceleration vector there will be zero from one.

Vì vậy, ví dụ, hãy xét các đường cycloid. Nếu chúng ta lấy ví dụ về các đường cycloid, vâng, đạo hàm của một trừ cos(t) là gì? Đó là sin(t). Và, đạo hàm của sin (t) là gì? cos (t), Vâng. Vì vậy, vectơ gia tốc là <sin(t), cos(t)>. Vì vậy, đặc biệt, chúng ta hãy xét những gì xảy ra tại thời điểm t bằng không khi điểm không di chuyển. Vâng, véc tơ gia tốc ở đó sẽ là không từ một.

So, what that means is that if I look at my trajectory at this point, that the acceleration vector is pointing in that direction. It's the unit vector in the vertical direction. So, my point is not moving at that particular time. But, it's accelerating up. So, that means that actually as it comes down, first it's slowing down. Then it stops here, and then it reverses going back up. OK, so that's another way to understand what we were saying last time that the trajectory at that point has a vertical tendency because that's the direction in which the motion is going to occur just before and just after time zero.

Vì vậy, điều đó có nghĩa là nếu tôi xét quỹ đạo của tôi tại điểm này, vector gia tốc đang chỉ về hướng đó. Nó là vectơ đơn vị theo hướng thẳng đứng. Vì vậy, điểm của tôi không chuyển động tại thời điểm cụ thể đó. Tuy nhiên, nó đang tăng tốc. Vì vậy, điều đó có nghĩa là thực sự khi nó đi xuống, đầu tiên nó sẽ chậm lại. Sau đó nó dừng lại ở đây, và sau đó nó sẽ trở lại quay ngược lên. Vâng, vì vậy đó là một cách khác để hiểu những gì chúng ta đã nói lần trước rằng quỹ đạo tại điểm đó có xu hướng thẳng đứng vì đó là hướng mà chuyển động sẽ xuất hiện ngay trước hoặc ngay sau thời điểm không.

OK, any questions about that? No. OK, so I should insist maybe on one thing, which is that, so, we can differentiate vectors just component by component, OK, and we can differentiate vector expressions according to certain rules that we'll see in a moment. One thing that we cannot do, it's not true that the length of dr dt, which is the speed, is equal to the length of dt. OK, this is completely false.

Vâng, có ai hỏi gì về điều đó không? Không. Vâng, vì vậy tôi cần nhấn mạnh một điều, đó là, vâng, chúng ta có thể lấy đạo hàm các vector theo các thành phần của nó, vâng, và chúng ta có lấy đạo hàm các biểu thức vector theo những quy tắc nào đó mà chúng ta sẽ thấy trong chốc lát. Một điều mà chúng ta không thể làm, độ dài của dr dt, là tốc độ, bằng

với chiều dài của dt là không đúng. Vâng, điều này hoàn toàn sai.

And, they are really not the same. So, if you have to differentiate the length of a vector, but basically you are in trouble. If you really, really want to do it, well, the length of the vector is the square root of the sums of the squares of the components, and from that you can use the formula for the derivative of the square root, and the chain rule, and various other things. And, you can get there.
Và, chúng thực sự không giống nhau. Vì vậy, nếu bạn phải lấy đạo hàm chiều dài của một vector, nhưng về cơ bản bạn đang gặp rắc rối. Nếu bạn thực sự, thực sự muốn làm điều đó, vâng, độ dài của vector bằng căn bậc hai của tổng của bình phương của các thành phần, và từ đó bạn có thể sử dụng công thức cho đạo hàm của căn bậc hai, và quy tắc hàm của hàm, và những thứ khác nữa. Và, bạn có thể đến được đó.

But, it will not be a very nice expression. There is no simple formula for this kind of thing. Fortunately, we almost never have to compute this kind of thing because, after all, it's not a very relevant quantity. What's more relevant might be this one. This is actually the speed. This one, I don't know what it means. OK. So, let's continue our exploration. So, the next concept that I want to define is that of arc length.
Tuy nhiên, nó sẽ không phải là biểu thức đẹp. Không có công thức đơn giản cho loại này. May mắn thay, chúng ta hầu như không bao giờ phải tính toán loại này bởi vì, rốt cuộc, nó không phải là một đại lượng thích hợp. Cái gì có thể thích hợp hơn cái này. Đây thực sự là tốc độ. Cái này, tôi không biết ý nghĩa của nó. Vâng. Vì vậy, hãy tiếp tục khám phá của chúng ta. Vì vậy, khái niệm tiếp theo mà tôi muốn định nghĩa là chiều dài cung.

So, arc length is just the distance that you have traveled along the curve, OK? So, if you are in a car, you know, it has mileage counter that tells you how far you've gone, how much fuel you've used if it's a fancy car. And, what it does is it actually integrates the speed of the time to give you the arc length along the trajectory of the car. So, the usual notation that we will have is (s) for arc length.
Vâng, chiều dài cung chỉ là khoảng cách mà bạn đã đi dọc theo đường cong, đúng không? Vì vậy, nếu bạn ở trong xe hơi, bạn biết, nó có một đồng hồ cho bạn biết bạn đã đi bao xa, bạn đã sử dụng bao nhiêu nhiên liệu nếu nó là một chiếc xe lạ mắt. Và, những gì nó thực sự làm là nó lấy tích phân tốc độ theo thời gian để cho bạn chiều dài cung dọc theo quỹ đạo của xe. Vì vậy, ký hiệu thông thường mà chúng ta sẽ dùng cho chiều dài cung là (s).

I'm not quite sure how you get an (s) out of this, but it's the usual notation. OK, so, (s) is for distance traveled along the trajectory. And, so that makes sense, of course,

we need to fix a reference point. Maybe on the cycloid, we'd say it's a distance starting on the origin. In general, maybe you would say you start at time, t equals zero. But, it's a convention. If you knew in advance, you could have, actually, your car's mileage counter to count backwards from the point where the car will die and start walking. I mean, that would be sneaky-freaky, but you could have a negative arc length that gets closer and closer to zero, and gets to zero at the end of a trajectory, or anything you want. I mean, arc length could be positive or negative. Typically it's negative what you are before the reference point, and positive afterwards.

Tôi không hoàn toàn chắc chắn làm thế nào bạn nhận được một (s) từ đây, nhưng đó là ký hiệu thông thường. Vâng, do đó, (s) là khoảng cách đi được dọc theo quỹ đạo này. Và, vì vậy điều đó có nghĩa, tất nhiên, chúng ta cần phải gắn điểm quy chiếu. Có lẽ trên đường cycloid, chúng ta muốn nói đó là khoảng cách bắt đầu ở gốc tọa độ. Nói chung, có thể bạn sẽ nói rằng bạn bắt đầu tại thời điểm, t bằng không. Nhưng, đó là một quy ước. Nếu bạn biết trước, bạn có thể có, trên thực tế, đồng hồ trên xe hơi của bạn để đếm ngược từ điểm mà chiếc xe sẽ chết và bắt đầu đi bộ. Ý tôi là, cái đó sẽ là sneaky-freaky, nhưng bạn có thể có chiều dài cung âm ngày càng tiến dần đến không, và đến không ở cuối quỹ đạo, hoặc bất cứ thứ gì bạn muốn. Ý tôi là, chiều dài cung có thể dương hoặc âm. Thông thường nó âm khi bạn ở trước điểm quy chiếu, và dương ở phía sau.

So, now, how does it relate to the things we've seen there? Well, so in particular, how do you relate arc length and time? Well, so, there's a simple relation, which is that the rate of change of arc length versus time, well, that's going to be the speed at which you are moving, OK, because the speed as a scalar quantity tells you how much distance you're covering per unit time. OK, and in fact, to be completely honest, I should put an absolute value here because there is examples of curves maybe where your motion is going back and forth along the same curve. And then, you don't want to keep counting arc length all the time. Actually, maybe you want to say that the arc length increases and then decreases along the curve. I mean, you get to choose how you count it. But, in this case, if you are moving back and forth, it would make more sense to have the arc length first increase, then decrease, increase again, and so on. So -- So if you want to know really what the arc length is, then basically the only way to do it is to integrate speed versus time. So, if you wanted to know how long an arch of cycloid is, you have this nice- looking curve; how long is it? Well, you'd have to basically integrate this quantity from t equals zero to 2 pi. And, to say the truth, I don't really know how to integrate that.

Vì vậy, bây giờ, làm sao để thiết lập mối liên hệ của các thứ mà chúng ta đã thấy ở đó? Vâng, do đó, đặc biệt là, làm thế nào để bạn thiết lập mối quan hệ giữa chiều dài cung và thời gian? Vâng, vì vậy, có một hệ thức đơn giản, đó là tốc độ thay đổi chiều dài cung theo thời gian, vâng, đó sẽ là tốc độ mà bạn đang di chuyển, Vâng, vì tốc độ là một đại lượng vô hướng cho bạn biết khoảng cách bạn đi được là bao nhiêu trên một đơn vị thời gian. Vâng, và trong thực tế, để được hoàn toàn trung thực, tôi nên đặt một dấu giá trị tuyệt đối ở đây vì có các ví dụ về các đường cong có lẽ ở đó chuyển động của bạn sẽ qua lại dọc theo cùng đường cong. Và sau đó, bạn không muốn tiếp tục tính chiều dài cung mọi lúc. Trên thực tế, có thể bạn muốn nói rằng, chiều dài cung tăng và sau đó giảm dọc theo đường cong. Ý tôi là, bạn có thể chọn cách bạn đếm nó. Nhưng, trong trường hợp này, nếu bạn đang di chuyển qua lại, sẽ có ý nghĩa hơn khi có chiều dài cung đầu tiên tăng lên, sau đó giảm, tăng trở lại, và vâng vâng. Vì vậy, - Vì vậy nếu bạn muốn biết chiều dài cung thực sự là gì, thì về cơ bản cách duy nhất để làm nó là tính tích phân tốc độ theo thời gian. Vì vậy, nếu bạn muốn biết một cung của đường cycloid dài bao nhiêu, bạn có đường cong đẹp này; nó dài bao nhiêu? Vâng, về cơ bản bạn phải lấy tích phân đại lượng này từ t bằng không đến 2 pi. Và, nói thật, tôi không biết cách lấy tích phân đó.

So, we don't actually have a formula for the length at this point. However, we'll see one later using a cool trick, and multi-variable calculus. So, for now, we'll just leave the formula like that, and we don't know how long it is. Well, you can put that into

your calculator and get the numerical value. But, that's the best I can offer. Now, another useful notion is the unit vector to the trajectory.
Vì vậy, chúng ta thực sự không có công thức cho chiều dài vào lúc này. Tuy nhiên, chúng ta sẽ thấy điều đó sau này sử dụng một thủ thuật, và giải tích hàm nhiều biến. Vì vậy, bây giờ, chúng ta sẽ để lại công thức như vậy, và chúng ta không biết nó dài bao nhiêu. Vâng, bạn có thể đưa nó vào máy tính của bạn và nhận được giá trị bằng số. Nhưng, đó là cái tốt nhất mà tôi có thể cung cấp. Bây giờ, một khái niệm hữu ích khác là vector đơn vị của quỹ đạo.

So, the usual notation is T hat. It has a hat because it's a unit vector, and T because it's tangent. Now, how do we get this unit vector? So, maybe I should have pointed out before that if you're moving along some trajectory, say you're going in that direction, then when you're at this point, the velocity vector is going to be tangential to the trajectory. It tells you the direction of motion in particular.
À, ký hiệu thông thường là T mũ. Nó có mũ vì nó là một vectơ đơn vị, và T vì nó nằm trên đường tiếp tuyến. Bây giờ, làm thế nào để chúng ta nhận được vector đơn vị này? Vì vậy, có lẽ tôi nên chỉ ra trước rằng nếu bạn di chuyển dọc theo quỹ đạo nào đó, giả sử rằng bạn đang đi theo hướng đó, thì khi bạn đang ở tại điểm này, vector vận tốc sẽ tiếp tuyến với quỹ đạo. Nó sẽ cho bạn biết hướng chuyển động cụ thể.

So, if you want a unit vector that goes in the same direction, all you have to do is rescale it, so, at its length becomes one. So, it's v divided by a magnitude of v. So, it seems like now we have a lot of different things that should be related in some way. So, let's see what we can say. Well, we can say that dr by dt, so, that's the velocity vector, that's the same thing as if I use the chain rule dr/ds times ds/dt.
Vì vậy, nếu bạn muốn có một vectơ đơn vị theo cùng một hướng, tất cả những gì bạn phải làm là thay đổi tỉ lệ nó, vâng, để chiều dài của nó trở thành một. Vì vậy, nó bằng v chia cho độ lớn của v. Vì vậy, bây giờ có vẻ như chúng ta có rất nhiều thứ khác nhau liên quan với nhau theo một cách nào đó. Vì vậy, hãy xem chúng ta có thể nói gì. Vâng, chúng ta có thể nói rằng dr dt, à, đó là vector vận tốc, đó là cùng một thứ như thể tôi sử dụng quy tắc dây chuyền dr/ds nhân ds / dt.

OK, so, let's think about this things. So, this guy here we've just seen. That's the same as the speed, OK? So, this one here should be v divided by its length. So, that means this actually should be the unit vector. OK, so, let me rewrite that. It's T

ds/dt. So, maybe if I actually stated directly that way, see, I'm just saying the velocity vector has a length and a direction. The length is the speed.

Vâng, vì vậy, chúng ta hãy xét điều này. Vì vậy, thẳng này ở đây chúng ta vừa thấy. Nó giống như tốc độ, đúng không? Vì vậy, ở đây cái này sẽ là v chia cho chiều dài của nó. Vì vậy, điều đó có nghĩa là thực tế đây sẽ là vector đơn vị. Vâng, vì vậy, hãy để tôi viết lại điều đó. Đó là T ds / dt. Vì vậy, có lẽ nếu tôi thực sự đã phát biểu trực tiếp như vậy, xem nào, tôi chỉ cần nói vector vận tốc có chiều dài và hướng. Chiều dài là tốc độ.

The direction is tangent to the trajectory. So, the speed is ds/dt, and the vector is T hat. And, that's how we get this. So, let's try just to see why dr/ds should be T. Well, let's think of dr/ds. dr/ds means position vector r means you have the origin, which is somewhere out there, and the vector r is here. So, dr/ds means we move by a small amount, delta s along the trajectory a certain distance delta s.

Hướng là tiếp tuyến với quỹ đạo này. Vì vậy, tốc độ là ds / dt, và vector là T mũ. Và, đó là cách mà chúng ta nhận được cái này. Vì vậy, hãy thử xét xem tại sao dr / ds sẽ bằng T. Vâng, hãy nghĩ về dr / ds. dr / ds nghĩa là vector vị trí r có nghĩa là bạn có gốc tọa độ, nó ở đâu đó ngoài đó, và vector r ở đây. Vì vậy, dr / ds có nghĩa là chúng ta di chuyển một lượng nhỏ, delta s dọc theo quỹ đạo một khoảng cách delta s nào đó.

And, we look at how the position vector changes. Well, we'll have a small change. Let me call that vector delta r corresponding to the size, corresponding to the length delta s. And now, delta r should be essentially roughly equal to, well, its direction will be tangent to the trajectory. If I take a small enough interval, then the direction will be almost tensioned to the trajectory times the length of it will be delta s, the distance that I have traveled. OK, sorry, maybe I should explain that on a separate board. OK, so, let's say that we have that amount of time, delta t. So, let's zoom into that curve. So, we have r at time t. We have r at time t plus delta t. This vector here I will call delta r. The length of this vector is delta s. And, the direction is essentially that of a vector. OK, so, delta s over delta t, that's the distance traveled divided by the time.

Và, chúng ta xét vector vị trí thay đổi như thế nào. Vâng, chúng tôi sẽ có một sự thay đổi nhỏ. Hãy để tôi gọi vector delta r đó tương ứng với kích thước, tương ứng với chiều dài delta s. Và bây giờ, về cơ bản delta r sẽ gần bằng, vâng, hướng của nó sẽ tiếp tuyến với quỹ đạo này. Nếu tôi phải mất một khoảng thời gian đủ nhỏ, thì hướng gần như được căng vào quỹ đạo nhân chiều dài của nó sẽ là delta s,khoảng cách mà tôi đã di chuyển. Vâng, xin lỗi, có lẽ tôi nên giải thích điều đó trên tấm bảng khác. Vâng, vì vậy, giả sử rằng chúng ta có khoảng thời gian , delta t. Vì vậy, chúng ta hãy phóng to đường cong đó. Vì vậy, chúng ta có r tại thời điểm t. Chúng ta có thời r tại thời điểm t cộng delta t. Tôi sẽ gọi Vector này ở đây là delta r. Chiều dài của vector này là delta s. Và, về cơ bản hướng là cái đó của vector. Vâng, vì vậy, delta s trên delta t, đó là khoảng cách đi được chia cho thời gian.

That's going to be close to the speed. And, delta r is approximately T times delta s. So, now if I divide both sides by delta t, I get this. And, if I take the limit as delta t turns to zero, then I get the same formula with the derivatives and with an equality. It's an approximation. The approximation becomes better and better if I go to smaller intervals. OK, are there any questions about this?

Nó sẽ gần bằng tốc độ. Và, delta r gần bằng T nhân delta s. Vì vậy, bây giờ nếu tôi chia cả hai vế cho delta t, tôi nhận được cái này. Và, nếu tôi lấy giới hạn khi delta t tiến về không, thì tôi nhận được cùng một công thức với các đạo hàm và với một sự tương đương. Đây là một phép gần đúng. Phép gần đúng sẽ ngày càng trở nên tốt hơn nếu tôi đi đến những khoảng thời gian nhỏ hơn. Vâng, có bất kì câu hỏi nào về điều này không?

Yes? Yes, that's correct. OK, so let's be more careful, actually. So, you're asking about whether the delta r is actually strictly tangent to the curve. Is that -- That's correct. Actually, delta r is not strictly tangent to anything. So, maybe I should draw

another picture. If I'm going from here to here, then delta r is going to be this arc inside the curve while the vector will be going in this direction, OK?
Đúng? Vâng, đúng vậy. Vâng, vì vậy chúng ta hãy cẩn thận hơn. Vâng, bạn đang hỏi về việc liệu các delta r có đúng là tiếp tuyến với đường cong hay không. Có phải như vậy – Điều đó chính xác. Quả thực, delta r là không tiếp xúc với bất cứ cái gì. Vì vậy, có lẽ tôi nên vẽ hình khác. Nếu tôi đi từ đây đến đây, thì delta r sẽ là cung này bên trong đường cong trong khi vector sẽ đi theo hướng này, đúng không?

So, they are not strictly parallel to each other. That's why it's only approximately equal. Similarly, this distance, the length of delta r is not exactly the length along the curve. It's actually a bit shorter. But, if we imagine a smaller and smaller portion of the curve, then this effect of the curve being a curve and not a straight line becomes more and more negligible. If you zoom into the curve sufficiently, then it looks more and more like a straight line.
Vì vậy, chúng không hoàn toàn song song với nhau. Đó là lý do tại sao nó chỉ gần bằng nhau. Tương tự , khoảng cách này, độ dài của delta r không chính xác bằng chiều dài dọc theo đường cong. Nó thực sự hơi ngắn hơn một chút. Nhưng, nếu chúng ta hình dung một phần nhỏ hơn và nhỏ hơn của đường cong, thì hiệu ứng này của đường cong là một đường cong và không phải là một đường thẳng ngày càng trở nên không đáng kể. Nếu bạn thu đường cong lại đủ nhỏ, thì nó có vẻ như ngày càng giống đường thẳng.

And then, what I said becomes true in the limit. OK? Any other questions? No? OK. So, what happens next? OK, so let me show you a nice example of why we might want to use vectors to study parametric curves because, after all, a lot of what's here you can just do in coordinates. And, we don't really need vectors. Well, and truly, vectors being a language, you never strictly need it, but it's useful to have a notion of vectors.
Và rồi, những gì tôi đã nói trở thành sự thật trong giới hạn. Đúng không? Các bạn có hỏi gì không? Không à? Vâng. Vì vậy, điều gì xảy ra tiếp theo? Vâng, vì vậy hãy để tôi chỉ cho bạn một ví dụ hay về lý do tại sao chúng ta dùng các vector để nghiên cứu các đường cong tham số bởi vì, rốt cuộc, rất nhiều thứ ở đây bạn chỉ có thể thực hiện trong các tọa độ. Và, chúng ta không thực sự cần vectơ. Vâng, và thật sự, vectơ trở thành một ngôn ngữ, bạn không bao giờ cần nó, nhưng rất hữu ích để có khái niệm vectơ.

So, I want to tell you a bit about Kepler's second law of celestial mechanics. So, that goes back to 1609. So, that's not exactly recent news, OK? But, still I think it's a very interesting example of why you might want to use vector methods to analyze motions. So, what happened back then was Kepler was trying to observe the motion

of planets in the sky, and trying to come up with general explanations of how they move.

Vâng, tôi muốn nói với bạn một chút về định luật thứ hai Kepler về cơ học thiên thể. Vì vậy, hãy quay lại năm 1609. Vâng, đó là không phải là tin tức gần đây, đúng không? Tuy nhiên, nhưng tôi vẫn nghĩ rằng đó là một ví dụ rất thú vị về lý do tại sao bạn cần sử dụng phương pháp vector để phân tích chuyển động. Vì vậy, những gì xảy ra là Kepler đang cố gắng quan sát chuyển động của các hành tinh trên bầu trời, và cố gắng đưa ra giải thích chung về việc chúng di chuyển như thế nào.

Before him, people were saying, well, they cannot move in a circle. But maybe it's more complicated than that. We need to add smaller circular motions on top of each other, and so on. They have more and more complicated theories. And then Kepler came with these laws that said basically that planets move in an ellipse around the sun, and that they move in a very specific way along that ellipse.

Trước ông ấy, người ta đã nói, vâng, chúng không thể di chuyển theo một vòng tròn. Nhưng có lẽ nó phức tạp hơn điều đó. Chúng ta cần phải thêm các chuyển động vòng tròn nhỏ hơn trên đỉnh của nhau, và v.v. Họ có lý thuyết nhiều hơn và phức tạp hơn. Và sau đó Kepler đưa ra định luật nói rằng về cơ bản các hành tinh chuyển động theo những quỹ đạo elip xung quanh mặt trời, và chúng chuyển theo những cách rất đặc biệt dọc theo elip đó.

So, there's actually three laws, but let me just tell you about the second one that has a very nice vector interpretation. So, what Kepler's second law says is that the motion of planets is, first of all, they move in a plane. And second, the area swept out by the line from the sun to the planet is swept at constant time. Sorry, is swept at constant rate. From the sun to the planet, it is swept out by the line at a constant rate.

Vì vậy, thực sự có ba định luật, nhưng hãy để tôi nói về định luật thứ hai có một diễn giải vector hay. Vì vậy, định luật thứ hai của Kepler nói rằng chuyển động của các hành tinh là, trước hết, chúng di chuyển trong mặt phẳng. Và thứ hai, đường nối từ mặt trời đến hành tinh quét được những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau. Xin lỗi, quét với tốc độ không đổi. Từ mặt trời đến hành tinh, nó được quét bởi đường thẳng với một tốc độ không đổi.

OK, so that's an interesting law because it tells you, once you know what the orbit of the planet looks like, it tells you how fast it's going to move on that orbit. OK, so let me explain again. So, this law says maybe the sun, let's put the sun here at the origin, and let's have a planet. Well, the planet orbits around the sun -- -- in some trajectory. So, this is supposed to be light blue. Can you see that it's different from white? No? OK, me neither.

OK, vì vậy đó là định luật lí thú vì nó cho bạn biết, một khi bạn biết quỹ đạo của hành tinh, nó cho bạn biết nó sẽ di chuyển trên quỹ đạo đó nhanh như thế nào. Vâng, tôi sẽ giải thích một lần nữa. Vì vậy, định luật này nói có thể mặt trời, chúng ta hãy đặt mặt trời ở đây tại gốc tọa độ, và một hành tinh. Vâng, quỹ đạo hành tinh xung quanh mặt trời - - theo một quỹ đạo nào đó. Vì vậy, đây được giả sử là màu xanh sáng. Bạn có thấy nó khác với màu trắng không? Không? Vâng, tôi cũng không.

[LAUGHTER] OK, it doesn't really matter. So, the planet moves on its orbit. And, if you wait for a certain time, then a bit later it would be here, and then here, and so on. Then, you can look at the amount of area inside this triangular wedge. And, the claim is that the amount of area in here is proportional to the time elapsed. So, in particular, if a planet is closer to the sun, then it has to go faster.

[Cười] Vâng, nó không thực sự quan trọng. Vì vậy, các hành tinh chuyển động trên quỹ đạo của nó. Và, nếu bạn chờ một thời gian nhất định, thì một chút sau đó nó sẽ ở đây, và rồi ở đây, và vâng vâng. Thì, bạn có thể thấy diện tích chứa bên trong nêm hình tam giác này. Và, phát biểu là lượng diện tích ở đây tỉ lệ với thời gian trôi qua. Vì vậy, đặc biệt, nếu một hành tinh gần với mặt trời hơn, thì nó sẽ chuyển động nhanh hơn.

And, if it's farther away from the sun, then it has to go slower so that the area remains proportional to time. So, it's a very sophisticated prediction. And, I think the way he came to it was really just by using a lot of observations, and trying to measure what was true that wasn't true. But, let's try to see how we can understand that in terms of all we know today about mechanics. So, in fact, what happens is that Newton, so Newton was quite a bit later.
Và, nếu nó ra xa mặt trời, thì nó sẽ chuyển động chậm hơn để diện tích vẫn còn tỉ lệ thuận với thời gian. Vì vậy, đó là một dự đoán rất tinh vi. Và, tôi nghĩ rằng cách ông ấy suy ra được điều đó là quan sát thật nhiều, và cố gắng đo những gì là đúng và không đúng. Nhưng, chúng ta hãy thử xem chúng ta có thể hiểu như thế nào theo tất cả những gì chúng ta biết hôm nay về cơ học. Vì vậy, quả thực, những gì xảy ra là Newton, vì vậy, Newton ra đời sau này.

That was the late 17th century instead of the beginning of the 17th century. So, he was able to explain this using his laws for gravitational attraction. And, you'll see that if we reformulate Kepler's Law in terms of vectors, and if we work a bit with these vectors, we are going to end up with something that's actually completely obvious to us now. At the time, it was very far from obvious, but to us now to completely obvious.
Đó là vào cuối thế kỷ 17 thay vì đầu thế kỷ 17. Vì vậy, ông ta đã có thể giải thích điều này bằng cách sử dụng các định luật vạn vật hấp dẫn của ông ấy. Và, bạn sẽ thấy rằng nếu chúng ta xét lại định luật Kepler theo vectơ, và nếu chúng ta làm việc một chút với các vectơ này, chúng ta sẽ kết thúc với những thứ hoàn toàn hiển nhiên với chúng ta bây giờ. Lúc này, nó còn chưa rõ ràng, nhưng bây giờ đối với chúng ta nó hoàn toàn rõ ràng.

So, let's try to see, what does Kepler's law say in terms of vectors? OK, so, let's think of what kinds of vectors we might want to have in here. Well, it might be good to think of, maybe, the position vector, and maybe its variation. So, if we wait a certain amount of time, we'll have a vector, delta r, which is the change in position vector a various interval of time. OK, so let's start with the first step.
Vì vậy, hãy thử xem, định luật Kepler nói gì theo các vectơ? Vâng, vì vậy, chúng ta hãy suy nghĩ về những loại vector nào mà chúng ta có thể muốn có ở đây. Vâng, có thể là tốt để nghĩ về, có thể, vector vị trí, và có thể sự biến đổi của nó. Vì vậy, nếu chúng ta chờ đợi một thời gian nhất định, chúng ta sẽ có một vector, delta r, đó là sự thay đổi của vector vị trí theo những khoảng thời gian khác nhau. Vâng, vì vậy hãy bắt đầu với bước đầu tiên.

What's the most complicated thing in here? It's this area swept out by the line. How do we express that area in terms of vectors? Well, I've almost given the answer by drawing this picture, right? If I take a sufficiently small amount of time, this shaded part looks like a triangle. So, we have to find the area of the triangle. Well, we know

how to do that now. So, the area is approximately equal to one half of the area of a parallelogram that I could form from these vectors.

Điều phức tạp nhất ở đây là gì? Đó là diện tích được quét bởi đường thẳng. Chúng ta biểu diễn diện tích đó theo các vector như thế nào? Vâng, tôi đã gần đưa ra câu trả lời bằng cách vẽ hình này, phải không? Nếu tôi chọn một khoảng thời gian đủ nhỏ, phần được tô này có dạng một tam giác. Vì vậy, tôi phải tìm diện tích của hình tam giác. Vâng, hiện tại chúng ta đã biết cách làm điều đó. Vâng, diện tích gần bằng một phần hai diện tích của hình bình hành hình thành từ những vector này.

And, the area of a parallelogram is given by the magnitude of a cross product. OK, so, I should say, this is the area swept in time delta t. You should think of delta t as relatively small. I mean, the scale of a planet that might still be a few days, but small compared to the other old trajectory. So, let's remember that the amount by which we moved, delta r, is approximately equal to v times delta t,

Và, diện tích hình bình hành là độ lớn của tích vector. Vâng,vì vậy, tôi nên nói, đây là diện tích được quét trong thời gian delta t. Bạn nên xem delta t tương đối nhỏ. Ý tôi là, quy mô của một hành tinh có thể là một vài ngày, nhưng nhỏ so với quỹ đạo cũ khác. Vì vậy, chúng ta hãy nhớ rằng lượng mà chúng ta đã di chuyển, delta r, gần bằng v nhân delta t,

OK, and just using the definition of a velocity vector. So, let's use that. Sorry, so it's approximately equal to r cross v magnitude times delta t. I can take out the delta t, which is scalar. So, now, what does it mean to say that area is swept at a constant rate? It means this thing is proportional to delta t. So, that means, so, the law says, in fact, that the length of this cross product r cross v equals a constant.

Vâng, và chỉ cần sử dụng định nghĩa vector vận tốc. Vì vậy, hãy sử dụng điều đó. Xin lỗi, vì vậy nó gần bằng độ lớn r nhân vector với v nhân delta t. Tôi có thể đưa delta t ra, nó là đại lượng vô hướng. Vì vậy, bây giờ, diện tích được quét với tốc độ không đổi có nghĩa là gì? Nó có nghĩa là cái này tỷ lệ với delta t. Vì vậy, điều đó có nghĩa là, vì vậy, định luật nói, trên thực tế, độ dài của tích vector r nhân v này bằng một hằng số.

OK, r cross v has constant length. Any questions about that? No? Yes? Yes, let me try to explain that again. So, what I'm claiming is that the length of the cross products r cross v measures the rate at which area is swept by the position vector. I should say, with a vector of one half of this length is the rate at which area is swept. How do we see that? Well, let's take a small time interval, delta t.

Vâng, v nhân vector với r có chiều dài không đổi. Có câu hỏi nào về điều đó không? Không có à? Vâng? Vâng, hãy để giải thích điều đó một lần nữa. Vì vậy, những gì tôi khẳng định là chiều dài tích vector r nhân vector với v đo tốc độ quét diện tích của vector vị trí. Tôi nên nói, với một vector bằng nửa chiều dài này là tốc độ mà diện tích được quét. Làm thế nào để chúng ta thấy điều đó? Vâng, chúng ta hãy lấy một khoảng thời gian nhỏ, delta t.

In time, delta t, our planet moves by v delta t, OK? So, if it moves by v delta t, it means that this triangle up there has two sides. One is the position vector, r. The other one is v delta t. So, its area is given by one half of the magnitude of a cross product. That's the formula we've seen for the area of a triangle in space. So, the area is one half of the cross product, r, and v delta t, magnitude of the cross product.

Theo thời gian, delta t, hành tinh của chúng ta chuyển động v delta t, đúng không? Vì vậy, nếu nó di chuyển v delta t, có nghĩa là tam giác này lên đến đó có hai cạnh. Một là vector vị trí, r. Cạnh kia là v delta t. Vì vậy, diện tích của nó bằng một nửa độ lớn của tích vector. Đó là công thức tính diện tích của tam giác trong không gian mà ta đã học. Vì vậy, diện tích bằng một nửa tích vector, r, và v delta t, độ lớn của tích vector.

So, to say that the rate at which area is swept is constant means that these two are

proportional. Area divided by delta t is constant at our time. And so, this is constant. OK, now, what about the other half of the law? Well, it says that the motion is in a plane, and so we have a plane in which the motion takes place. And, it contains, also, the sun. And, it contains the trajectory. So, let's think about that plane.
Vì vậy, nói tốc độ quét diện tích không đổi có nghĩa là hai cái này tỉ lệ thuận. Diện tích chia cho delta t là hằng số theo thời gian. Và như vậy, đây là hằng số. Vâng, bây giờ, còn về nửa kia của định luật thì sao? Vâng, nó nói rằng chuyển động ở trong mặt phẳng, và do đó chúng ta có một mặt phẳng ở đó chuyển động xảy ra. Và, nó cũng chứa, mặt trời. Và, nó chứa quỹ đạo. Vì vậy, hãy nghĩ về mặt phẳng đó.

Well, I claim that the position vector is in the plane. OK, that's what we are saying. But, there is another vector that I know it is in the plane. You could say the position vector at another time, or at any time, but in fact, what's also true is that the velocity vector is in the plane. OK, if I'm moving in the plane, then position and velocity are in there. So, the plane of motion contains r and v.
Vâng, tôi cho rằng các vector vị trí ở trong mặt phẳng. Vâng, đó là những gì chúng ta đang nói. Nhưng, còn có một vector khác mà tôi biết nó đang ở trong mặt phẳng. Bạn có thể nói vector vị trí tại một thời điểm khác, hoặc tại bất kỳ thời điểm nào, nhưng trên thực tế, những gì đúng là vector vận tốc ở trong mặt phẳng. Vâng, nếu tôi đang di chuyển trong mặt phẳng, thì vị trí và vận tốc là ở đó. Vì vậy, mặt phẳng chuyển động chứa r và v.

So, what's the direction of the cross product r cross v? Well, it's the direction that's perpendicular to this plane. So, it's normal to the plane of motion. And, that means, now, that actually we've put the two statements in there into a single form because we are saying r cross v has constant length and constant direction. In fact, in general, maybe I should say something about this. So, if you just look at the position vector, and the velocity vector for any motion at any given time, then together, they determine some plane.
Vì vậy, hướng của tích vector r với v là gì? Vâng, đó là hướng vuông góc với mặt phẳng này. Vì vậy, nó vuông góc với mặt phẳng chuyển động. Và, có nghĩa là, bây giờ, thực sự chúng ta đã đặt hai câu ở đó thành một hình thức duy nhất vì chúng ta đang nói r nhân vector với v có chiều dài và hướng không đổi. Quả thực, nói chung, có lẽ tôi nên nói đôi điều về việc này. Vâng, nếu bạn nhìn vào vector vị trí, và vector vận tốc cho bất kỳ chuyển động nào tại bất kỳ thời điểm cho trước, thì chúng cùng nhau xác định một mặt phẳng nào đó.

And, that's the plane that contains the origin, the point, and the velocity vector. If you want, it's the plane in which the motion seems to be going at the given time. Now, of course, if your motion is not in a plane, then that plane will change. It's, however, instant, if a plane in which the motion is taking place at a given time. And,

to say that the motion actually stays in that plane forever means that this guy will not change direction.

Và, đó là mặt phẳng chứa gốc tọa độ, điểm, và vector vận tốc. Nếu bạn muốn, đó là mặt phẳng, trong đó chuyển động có vẻ đang ở thời điểm nào đó. Bây giờ, tất nhiên, nếu chuyển động của bạn không ở trong mặt phẳng, thì mặt phẳng đó sẽ thay đổi. Tuy nhiên, nó là, tức thời, nếu mặt phẳng trong đó chuyển động xảy ra tại thời điểm nhất định. Và, nói chuyển động thực sự ở mặt phẳng đó mãi mãi có nghĩa là thẳng này sẽ không thay đổi hướng.

OK, so -- [LAUGHTER] [APPLAUSE] OK, so, Kepler's second law is actually equivalent to saying that r cross v equals a constant vector, OK? That's what the law says. So, in terms of derivatives, it means d by dt of r cross v is the zero vector. OK, now, so there's an interesting thing to note, which is that we can use the usual product rule for derivatives with vector expressions, with dot products or cross products.

Vâng, vì vậy - [cười] [vỗ tay] Vâng, như vậy, định luật thứ hai Kepler tương đương với việc phát biểu rằng r nhân vector với v bằng một vectơ không đổi, đúng không? Đó là nội dung định luật. Vì vậy, theo đạo hàm, nó có nghĩa là d trên dt của r nhân vector với v bằng vector không. Vâng, bây giờ, do đó, có một điều thú vị cần lưu ý, đó là chúng ta có thể sử dụng các quy tắc tích thông thường cho đạo hàm với các biểu thức vector, với tích vô hướng hoặc tích vector.

There's only one catch, which is that when we differentiate a cross product, we have to be careful that the guy on the left stays on the left. The guy on the right stays on the right. OK, so, if you know that uv prime equals u prime v plus uv prime, then you are safe. If you know it as u prime v cross v prime u, then you are not safe. OK, so it's the only thing to watch for. So, product rule is OK for taking the derivative of a dot product.

Chỉ có một sai lệch nhỏ, đó là khi chúng ta lấy đạo hàm tích vector, chúng ta phải cẩn thận thẳng ở bên trái vẫn nằm bên trái. Thẳng ở bên phải vẫn nằm bên phải. Vâng, vì vậy, nếu bạn biết rằng uv phẩy bằng u phẩy v cộng với uv phẩy, thì bạn được an toàn. Nếu bạn biết nó như là u phẩy v nhân vector với v phẩy u, thì bạn không an toàn. Vâng, do đó, đó là điều duy nhất cần quan tâm. Vì vậy, quy tắc tích là OK đối với việc lấy đạo hàm của tích vô hướng.

There, you don't actually even need to be very careful about all the things or the derivative of a cross product. There you just need to be a little bit more careful. OK, so, now that we know that, we can write this as dr/dt cross v plus r cross dv/dt, OK? Well, let's reformulate things slightly. So, dr dt already has a name. In fact, that's v. OK, that's what we call the velocity vector. So, this is v cross v plus r cross, what is dv/dt?

Ở đó, thực sự bạn thậm chí không cần phải quan tâm về tất cả các thứ hoặc đạo hàm của tích vector. Ở đó bạn chỉ cần cẩn thận một chút. Vâng,vì vậy, bây giờ chúng ta biết rằng, chúng ta có thể viết cái này như là dr / dt nhân vector với v cộng r nhân vector với dv/ dt, đúng không? Vâng, chúng ta hãy xét lại các thứ một cách nhẹ nhàng. Vì vậy, dr dt đã có tên. Quả thực, đó là v. Vâng, chúng ta gọi nó là vector vận tốc. Vì vậy, cái này bằng v nhân vector với v cộng r nhân vector với , dv/dt là gì ?

That's the acceleration, a, equals zero. OK, so now what's the next step? Well, we know what v cross v is because, remember, a vector cross itself is always zero, OK? So, this is the same r cross a equals zero, and that's the same as saying that the cross product of two vectors is zero exactly when the parallelogram of the form has no area. And, the way in which that happens is if they are actually parallel to each other.

Đó là gia tốc, a, bằng không. Vâng, vậy bây giờ bước tiếp theo là gì? Vâng, chúng ta biết v nhân vector với v là gì bởi vì, hãy nhớ, một vector nhân vector với chính nó luôn luôn bằng không, đúng không? Vì vậy, cái này giống như r nhân vector với a bằng không, và điều đó cũng giống như nói rằng tích vector của hai vectơ bằng không khi hình bình

hành được hình thành không có diện tích. Và, để điều đó xảy ra thì chúng phải song song với nhau.

So, that means the acceleration is parallel to the position. OK, so, in fact, what Kepler's second law says is that the acceleration is parallel to the position vector. And, since we know that acceleration is caused by a force that's equivalent to the fact that the gravitational force -- -- is parallel to the position vector, that means, well, if you have the sun here at the origin, and if you have your planets, well, the gravitational force caused by the sun should go along this line.
Vì vậy, điều đó có nghĩa là gia tốc song song với vị trí. Vâng, vì vậy, trên thực tế, nội dung của định luật Kepler thứ hai là gia tốc song song với vector vị trí. Và, bởi vì chúng ta biết rằng gia tốc gây ra do lực điều đó tương đương với lực hấp dẫn - - song song với vector vị trí, có nghĩa là, vâng, nếu bạn có mặt trời ở đây tại gốc tọa độ, và nếu bạn có các hành tinh của bạn, vâng, lực hấp dẫn gây ra do mặt trời sẽ đi dọc theo đường này.

In fact, the law doesn't even say whether it's going towards the sun or away from the sun. Well, what we know now is that, of course, the attraction is towards the sun. But, Kepler's law would also be true, actually, if things were going away. So, in particular, say, electric force also has this property of being towards the central charge. So, actually, if you look at motion of charged particles in an electric field caused by a point charged particle, it also satisfies Kepler's law, satisfies the same law.
Trong thực tế, định luật không nói nó sẽ hướng về mặt trời hay ra xa mặt trời. Vâng, bây giờ những gì chúng ta biết là, tất nhiên, sự hút hướng về mặt trời. Tuy nhiên, định luật Kepler cũng đúng, thực sự, nếu mọi thứ đi ra xa. Vì vậy, đặc biệt, giả sử, lực điện cũng có tính chất hướng về điện tích trung tâm. Vì vậy, trên thực tế, nếu bạn xét chuyển động của các hạt tích mang điện trong một điện trường gây ra bởi một điện tích điểm, nó cũng thõa mãn định luật Kepler, thõa mãn cùng một định luật.

OK, that's the end for today, thanks.
Vâng, đã hết giờ, cám ơn.