LỜI GIỚI THIỆU

Bài giảng Vật lý hạt cơ bản được biên soạn cho các Sinh viên ngành Sư phạm Vật lý năm thứ 4 trường Đại học Cần Thơ. Vật lý hạt cơ bản là môn học nghiên cứu về các hạt nhỏ nhất cấu tạo nên vật chất và tương tác giữa chúng.

Cấu trúc của bài giảng được bố trí như sau:

Chương 1 giới thiệu về lịch sử phát hiện, phân loại các hạt cơ bản, và các nhóm đa tuyến. Chương 2 giới thiệu về các trường lượng tử tự do là trường ứng với các hạt tự do thông qua các toán tử sinh, huỷ hạt... Chương 3 giúp sinh viên có một cái nhìn ban đầu về tương tác giữa các hạt thông qua các khái niệm về Lagrangian tương tác, ma trận tán xạ,... Chương 4 trình bày lí thuyết trường gauge, khảo sát sự phá vỡ đối xứng tự phát và cơ chế Higgs để xây dựng một trường gauge có khối lượng mô tả quá trình tương tác yếu. Chương 5 giới thiệu mô hình Weinberg-Sallam thống nhất tương tác điện từ-yếu, lí thuyết thống nhất lớn, lí thuyết dây, lí thuyết M trong xu hướng thống nhất cả 4 loại tương tác: điện-từ, yếu, mạnh và hấp dẫn.

Phần Bài tập giúp sinh viên có được kĩ năng tính toán cũng như củng cố lại các kiến thức đã được học.

Thời gian giảng dạy môn học là 30 tiết (2 đơn vị học trình) nên để có thể nắm được các vấn đề tốt trên lớp, sinh viên cần phải đọc bài giảng trước ở nhà và tham khảo các tài liệu có liên quan đến bài giảng.

Bài giảng chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Mong được sự góp ý của các thầy cô và các bạn sinh viên về nội dung cũng như cách trình bày của bài giảng.

Cần Thơ, tháng 09 năm 2007

Huỳnh Anh Huy

Mục lục

Chương 1

ĐẠI CƯƠNG VỀ HẠT CƠ BẢN

Trong chương này ta điểm qua những phần chính của vật lý hạt cơ bản.

1.1 MỞ ĐẦU

a. Vài nét về lịch sử

Hạt cơ bản đầu tiên được tìm thấy là electron e^- (Thomson, 1897): sau khi nghiên cứu kĩ tính chất của tia âm cực. Thomson đã khẳng định rằng tia này chính là chùm các hạt mang điện tích âm giống nhau - đó là các hạt e^-.

Trước đó, vào năm 1900 Planck khi nghiên cứu hiện tượng bức xạ của vật đen tuyệt đối đã đưa ra khái niệm lượng tử ánh sáng (sau này được gọi là photon γ), và vào năm 1905 Einstein đã vận dụng khái niệm này và giải thích thành công hiệu ứng quang điện. Thí nghiệm trực tiếp chứng tỏ sự tồn tại của photon đã được tiến hành bởi Millikan vào những năm 1912-1915 và Compton vào năm 1922.

Năm 1911 Rutherford đã khám phá ra hạt nhân nguyên tử và sau đó (năm 1919) đã tìm thấy trong thành phần hạt nhân có hạt proton p với khối lượng bằng 1840 lần khối lượng electron, và điện tích dương về mặt trị số đúng bằng điện tích electron. Thành phần khác của hạt nhân, hạt neutron n, được Heisenberg và Ivanenko đề xuất trên lí thuyết và đã được Chadwick tìm thấy trong thực nghiệm tương tác của hạt α với nguyên tố Be vào năm 1932. Hạt n có khối lượng gần bằng hạt p, nhưng không mang điện tích. Bằng việc phát hiện ra hạt neutron n các nhà vật lý đã hoàn thành việc khám phá ra các thành phần cấu tạo nên nguyên tử và do đó cấu tạo nên thế giới vật chất.

Cũng cần nói thêm là trong vật lý hạt cơ bản, với tư cách là một chuyên ngành độc lập trong vật lý học, được người ta xem như bắt đầu không phải từ lúc phát hiện ra e^- mà là từ việc phát hiện ra hạt neutron n.

Năm 1930 để giải thích sự hao hụt năng lượng trong hiện tượng phân rã β, Pauli đã giả thiết sự tồn tại của hạt neutrino ν, hạt này mãi đến năm 1953 mới thực sự được tìm thấy (Reines, Cowan). Hạt neutrino không có khối lượng, không điện tích và tương tác rất yếu với vật chất.

Từ những năm 30 đến đầu những năm 50 việc nghiên cứu hạt cơ bản liên quan chặt chẽ với việc nghiên cứu tia vũ trụ. Năm 1932, trong thành phần của tia vũ trụ Anderson đã phát hiện ra hạt positron e^+, là phản hạt của electron e^- và là phản hạt đầu tiên được tìm thấy trong thực nghiệm. Sự tồn tại của positron e^+ đã được tiên đoán bằng lí thuyết bởi Dirac trước đó ít lâu, trong những năm 1928-1931.

Năm 1936 Anderson và Neddermeyer đã tìm thấy trong tia vũ trụ các hạt $\mu^\pm$, có khối lượng lớn hơn khối lượng electron khoảng 200 lần, nhưng lại rất giống e^-, e^+ về các tính chất khác. Năm 1947 cũng trong tia vũ trụ nhóm nghiên cứu của Powell đã phát hiện ra các hạt meson $\pi^\pm$, có khối lượng khoảng 274 lần khối lượng electron. Hạt π có một vai trò đặc biệt quan trọng trong tương tác giữa các nuclon (proton, neutron) trong hạt nhân nguyên tử và đã được Yukawa tiên đoán bằng lí thuyết từ năm 1935.

Cuối những năm 40 - đầu những năm 50 là giai đoạn phát hiện ra các hạt lạ, những hạt đầu tiên (meson $K^\pm$, hạt λ) được tìm thấy trong tia vũ trụ, còn những hạt tiếp theo được tìm trong các máy gia tốc, là kết quả các quá trình tán xạ (va chạm) của các hạt p hay e^- ở năng lượng cao. Từ những năm 50 trở đi các máy gia tốc là công cụ chính để nghiên cứu hạt cơ bản. Ngày nay năng lượng đạt được đã lên đến hàng trăm GeV, và trong tương lai không xa, hàng ngàn GeV (tức hàng TeV)

Máy gia tốc proton p với hạt nặng vài GeV đã giúp khám phá ra các phản hạt nặng: phản proton (năm 1955), phản neutron (năm 1956), phản sigma (năm 1960), v.v... Năm 1964 người ta phát hiện ra hạt hyperon nặng nhất: hạt omega Ω^-, với khối lượng gần gấp đôi khối lượng hạt proton. Trong những năm 60 người ta còn khám phá ra rất nhiều hạt không bền gọi là các hạt cộng hưởng, với khối lượng hầu hết lớn hơn khối lượng proton. Đại bộ phận các hạt cơ bản biết được hiện nay (vào khoảng 350 hạt) là các hạt cộng hưởng.

Vào năm 1962 người ta phát hiện 2 loại hạt neutrino khác nhau: loại đi kèm với electron ν_E và loại đi kèm với hạt μ là ν_μ.

Năm 1974 hai nhóm nghiên cứu riêng rẽ do Tinh và Richter lãnh đạo tìm thấy hạt J/ψ, có khối lượng khoảng 3-4 lần khối lượng proton và thời gian sống đặc biệt lớn hơn hạt cộng hưởng. Hạt này mở đầu cho một họ hạt mới - các hạt duyên - được phát hiện lần lượt kể từ năm 1976. Năm 1977, lại một hạt mới nữa, hạt upsilon Υ, với khối lượng bằng cả chục lần khối lượng proton, khởi đầu cho họ các hạt đẹp được tìm thấy từ năm 1981.

Trước đó, vào năm 1975 người ta đã tìm thấy hạt τ, với tính chất rất giống hạt e, μ nhưng khối lượng lớn hơn nhiều. Sau đó ít lâu, loại neutrino thứ ba đi với nó, hạt ν_τ.

Mới đây nhất, vào năm 1983 tại phòng thí nghiệm CERN người ta đã tìm thấy các hạt boson vector trung gian $W^\pm$, Z dự kiến bởi lí thuyết trước đó ít lâu. Các hạt này có vai trò tương tự hạt photon γ, nhưng lại có khối lượng rất lớn, gấp cả trăm lần khối lượng proton.

b. Các kí hiệu

Toạ độ không thời gian: $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad x_0 = ct;\ x_1 = x;\ x_2 = y;\ x_3 = z.$

Các chỉ số trên và chỉ số dưới của tọa độ không thời gian liên hệ với nhau theo công thức:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad \text{và} \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

với $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ là tensor metric không - thời gian nhận các giá trị:

$$\eta^{00} = 1; \ \ \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1; \quad \text{và } \eta^{\mu\nu} = 0 \, (\mu \neq \nu)$$

$$\eta^{\mu\nu}.\eta_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1, & \text{với } \mu = \nu, \\ 0, & \text{với } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

Vector 3 chiều k được viết đậm: $\vec{k} = \mathbf{k}$

Tích vô hướng: $x.y = \eta^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = x_0 y_0 - \mathbf{xy}$

Các chỉ số được lặp lại được hiểu là lấy tổng theo chúng. Đạo hàm được viết tắt như sau:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \varphi_a, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu, \quad \Box = \partial^\mu \partial_\mu$$

c. Biến đổi Lorentz đồng nhất

Theo thuyết tương đối, tất cả các đại lượng vật lý phải tương tự nhau, liên quan với nhau qua phép biến đổi Lorentz được định nghĩa như sau:

$$x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu, \quad \text{với } \ det\Lambda = \pm 1. \tag{1.1}$$

trong đó

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 & \Lambda^2_0 & \Lambda^3_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 \\ \Lambda^0_2 & \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 \\ \Lambda^0_3 & \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix},$$

d. Lượng tử hóa lần thứ nhất và lượng tử hóa lần thứ hai

Sự lượng tử hoá lần thứ nhất: chuyển từ cơ học cổ điển sang cơ học lượng tử ("Hạt"→ "sóng") bằng cách thay thế các đại lượng vật lí thành các toán tử tuyến tính tự liên hợp thoả mãn các hệ thức bất định; trạng thái của hạt được mô tả bằng hàm sóng thoả phương trình Schrödinger.

∗ *Những thiếu sót:*

- Chưa đáp ứng yêu cầu của Thuyết tương đối: Các quá trình vật lý diễn ra như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính liên hệ với nhau qua phép biến đổi Lorentz. Thời gian t và không gian $\mathbf{r}$ đóng vai trò bình đẳng trong thuyết tương đối nhưng không bình đẳng trong phương trình cơ bản của Cơ học lượng tử:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t), \tag{1.2}$$

với Haminton $\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}, t)$.

- Tính "hạt" đưa vào lí thuyết một cách hiện tượng luận: bình phương hàm sóng tại một điểm tỉ lệ với xác suất tìm thấy hạt tại điểm đó ở thời điểm đã cho. Cơ học lượng tử không đủ khả năng mô tả các hạt chuyển hoá cho nhau (sinh hạt, huỷ hạt) vì cho rằng các hạt bảo toàn.

Do đó, cần xây dựng lí thuyết mới diễn tả được đồng thời hai tính chất "hạt" và "sóng", mô tả quá trình hạt sinh ra và mất đi.

Sự lượng tử hoá lần thứ hai: thay thế trạng thái diễn tả hàm sóng thành các toán tử, kết quả là trong sóng xuất hiện tính "hạt", tính gián đoạn, xuất hiện các hiện tượng sinh, huỷ hạt.

Mỗi hạt tương ứng với một trường, mỗi trường được mô tả bởi một hàm phụ thuộc vào toạ độ không thời gian gọi là hàm trường.

1.2 PHÂN LOẠI CÁC HẠT CƠ BẢN

Hạt cơ bản là những hạt nhỏ nhất không thể phân chia được. Dựa theo tương tác mà trước đây người ta phân loại các hạt theo hằng số tương tác.

Có 4 loại tương tác cơ bản:

- Tương tác mạnh (tương tác giữa các nuclon trong hạt nhân) với hằng số tương tác $\alpha_s \sim 1$
- Tương tác điện từ với hằng số tinh tế $\alpha_{em} \sim 1/137$
- Tương tác yếu với hằng số tương tác Fermi $G_F \sim \dfrac{10^{-5}}{M_p^2}$
- Tương tác hấp dẫn được thực hiện qua graviton với hằng số hấp dẫn Newton $G_N \sim \dfrac{5.9 \times 10^{-39}}{M_p^2}$. Tất cả các hạt có khối lượng đều tham gia tương tác này. Do khối lượng các hạt cơ bản quá nhỏ nên lực hấp dẫn không đáng kể và được coi như một vấn đề riêng biệt.

• Phân loại:

\+ Hạt vật chất:

- Hadron: tham gia tương tác mạnh là chủ yếu gồm 2 loại: Baryon (đây là các hạt Fermion: $p, n, \Sigma, \Xi, \Lambda, ...$) và Meson (là các hạt boson: $\pi^0, \pi^\pm, \eta$, các kaon,...)
- Lepton: không tham gia tương tác mạnh, chỉ tham gia tương tác yếu, điện từ, hấp dẫn gồm hai loại: Lepton mang điện ($e^\pm$,$\mu^\pm$,$\tau^\pm$) và Lepton trung tính (neutrino ν_e, ν_μ, ν_τ) chỉ tham gia tương tác yếu.

+ Hạt trường: truyền tương tác gồm: $G_\mu, W_\mu^\pm, Z^0, A_\mu, g_{\mu\nu}$

Tuy nhiên, trong vật lý hạt cơ bản, phân loại các trường quan trọng nhất là phân loại theo spin. Các hạt có spin nguyên tuân theo thống kê Bose-Einstein gọi là các Boson. Các hạt có spin bán nguyên tuân theo thống kê Fermi-Dirac gọi là các Fermion. Chú ý rằng tất cả các hạt có spin cùng loại có dạng Lagrangian tự do (sẽ nói ở mục sau) giống nhau và như vậy sẽ có hàm truyền với dạng cũng giống nhau. Dưới đây là một vài loại trường thông dụng trong vật lý hạt cơ bản hiện đại:

a. Trường vô hướng (spin=0)

Trường vô hướng được mô tả bằng hàm $\phi(x)$ bất biến với phép đảo toạ độ không gian:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x_0, -\mathbf{x}) = \phi(x_0, \mathbf{x}). \tag{1.3}$$

- Trường vô hướng thực mô tả hạt vô hướng trung hoà - không mang điện. Đó là các hạt σ trong mẫu Weinberg-Salam (WS), các hạt $\pi^0, K^0, ...$
- Trường vô hướng phức mô tả hạt vô hướng mang điện: $\pi^\pm, K^\pm, ...$

b. Trường vector (spin=1)

Trường vector có bốn thành phần $\varphi_\mu(x)$ thoả quy luật biến đổi:

$$\varphi_\mu(x) \to \varphi'_\mu(x) = \Lambda_\mu^\nu . \varphi_\nu(x). \tag{1.4}$$

Từ (1.4), ta có quy luật biến đổi các thành phần:

$$\varphi_0(x_0, -\mathbf{x}) = \varphi_0(x_0, \mathbf{x})$$

$$\varphi_i(x_0, -\mathbf{x}) = -\varphi_i(x_0, \mathbf{x})$$

Các hạt truyền tương tác như photon, $W^\pm, Z$ thuộc trường loại này.

c. Trường spinor (spin=1/2)

Trường spinor có bốn thành phần được mô tả bởi spinor Dirac $\psi_\alpha(x)$ còn có tên gọi fermion vì tuân theo thống kê Fermi-Dirac. Đây chính là các trường vật chất. Các spinor gồm: $e^\pm$, ν_e, $\mu^\pm$, ν_μ, $\tau^\pm$, ν_τ, các hạt quark và các hạt thuộc bát tuyến $SU(2)$ như p, n, $\Sigma^\pm$, Σ, Ξ^0, Ξ^-, Λ,... thoả quy luật:

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = \left\{ e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} \right\}_\alpha^\beta \psi_\beta(x), \tag{1.5}$$

với $\omega^{\mu\nu}$ là các thông số biến đổi và

$$\sum_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu]. \tag{1.6}$$

Ở đây, γ_μ là các ma trận Dirac:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{1.7}$$

Tuân theo các tính chất:

$$\gamma_0^+ = \gamma_0; \quad \gamma_i^+ = -\gamma_i; \quad \gamma_0^2 = 1; \quad \gamma_i^2 = -1; \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

d. Trường với spin=2

Được mô tả bởi tensor $h_{\mu\nu}(x)$. Graviton có khối lượng bằng 0, hạt truyền tương tác hấp dẫn là trường có spin = 2.

Trong vật lý hạt cơ bản, chúng ta chủ yếu làm việc với các trường có spin nhỏ như vô hướng, vector và spinor.

1.3 CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA HẠT CƠ BẢN

Các lepton chỉ tham gia tương tác yếu và tương tác điện từ (những hạt mang điện). Người ta gọi là tương tác yếu hoặc mạnh do lực tương tác. Trên thực tế điều này biểu hiện bằng thời gian sống: Dưới tác dụng của tương tác, các hạt sẽ phân rã và nếu tương tác càng mạnh thì thời gian sống càng nhỏ: Thời gian sống của tương tác yếu $\tau_W > 10^{-10}s$ (rất lâu), trong khi đó thời gian sống của tương tác mạnh $\tau_s < 10^{-23}s$. Proton phân rã theo tương tác siêu yếu $\sim 10^{30}$ năm.

Các quá trình rã chủ yếu do tương tác yếu và được phân thành 2 loại chính:

- Các quá trình lepton thuần tuý

$$\mu^- \to e^- + \widetilde{\nu}_e + \widetilde{\nu}_\mu$$
$$\nu_e + e^- \to e^- + \nu_e$$

Các quá trình lepton thuần túy rất đơn giản. Nếu có các hadron tham gian phải có tương tác mạnh và vấn đề trở nên phức tạp ở vùng năng lượng thấp.

Với việc xây dựng các máy gia tốc năng lượng cao, trong những năm gần đây, người ta càng nghiên cứu ngày càng nhiều τ lepton với các mode rã thuần túy lepton.

- Các quá trình có hadron tham gia

+ Rã lepton: meson → lepton

$$\pi^- \to e^- + \widetilde{\nu}_e,$$
$$\pi^- \to \mu^- + \widetilde{\nu}_\mu,$$
$$K^+ \to e^+ + \nu_e,$$
$$K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, ...$$

+ Rã bán lepton: hadron → hadron + lepton

$$n \to p + e^- + \widetilde{\nu}_e,$$
$$\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e,$$
$$K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e, ...$$

Một số quá trình tán xạ nhưng người ta cũng ghép vào loại này. Ví dụ:

$$\nu_e + n \to e^- + p,$$

$$\mu^- + p \to \nu_\mu + n$$

+ Rã không lepton: hadron → hadron

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^0,$$
$$\Sigma^+ \to p + \pi^0,$$
$$\Sigma^+ \to n + \pi^+, ...$$

Để giải thích các quá trình nêu trên, người ta đưa ra các số lượng tử: B, L, S, Y, I, I_3

a. Barion tích

Để mô tả các quá trình có barion tham gia, người ta đưa một số lượng tử mới là số Barion B. Số Barion của các hạt barion đều bằng 1 $(n, p, \lambda, \Sigma, \Xi, ...)$ của các phản hạt của chúng $(\widetilde{n}, \widetilde{p}, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\Xi}, ...)$ thì B đều bằng -1. Các quá trình trên đều tuân theo định luật bảo toàn số barion tích: Trong các quá trình biến đổi, tổng đại số các Barion không đổi $(\Delta B = 0)$

b. Isospin

Ta biết rằng tương tác giữa các nuclôn trong hạt nhân có một đặc tính là không phụ thuộc điện tích. Cụ thể tương tác giữa $p \leftrightarrow p, n \leftrightarrow n, p \leftrightarrow n$ là như nhau (nếu các nuclôn đó ở những trạng thái như nhau). Nói cách khác, trong tương tác hạt nhân hai hạt p và n là không phân biệt. Người ta cho rằng khối lượng của p khác khối lượng của n là do p có mang điện tích nghĩa là do tương tác điện từ tạo ra sự khác biệt. Như vậy, trong tương tác hạt nhân, người ta có thể coi p và n là hai trạng thái của cùng một hạt, tức là nuclôn (N). Nếu không để ý đến tương tác điện từ thì hai trạng thái đó tương ứng với cùng một khối lượng, do đó cùng một năng lượng. Nếu để ý đến tương tác điện từ thì hai trạng thái đó tương ứng với hai khối lượng khác nhau chút ít, do đó tương ứng với hai mức năng lượng gần nhau. Ta có thể so sánh tính chất này với tính chất của electron trong nguyên tử.

Nếu không để ý đến spin thì mỗi trạng thái electron trong nguyên tử tương ứng với cùng một mức năng lượng, nếu để ý đến spin thì mức năng lượng đó tách thành 2 mức gần nhau,tương ứng với hai trạng thái electron khác nhau về sự định hướng của mômen spin ($s_z = +\frac{\hbar}{2}$ và $s_z = -\frac{\hbar}{2}$). Đối với nuclon để tiện tính toán, người ta cũng đưa ra một đại lượng gọi là Isospin I. Ta đã biết nếu hệ có spin thông thường là s thì hệ có $2s+1$ trạng thái ứng với các hình chiếu khác nhau của spin. Tương tự nếu hệ có Isospin I thì hệ sẽ có $2I+1$ trạng thái ứng với giá trị khác nhau của Isospin trên một trục z nào đó.

Thành thử khái niệm Isospin cho phép ta mô tả các trạng thái điện khác nhau của cùng một hạt. Thí dụ nuclon có 2 trạng thái điện nghĩa là $2I+1=2$, do đó $I=\frac{1}{2}$, p và n là 2 trạng thái khác của nuclon khác nhau về hình chiếu I_3 của Isospin. Cụ thể là:

- p có $I_3 = +\frac{1}{2}$
- n có $I_3 = -\frac{1}{2}$

Đối với các hadron, GellMann-Nishijima đã đưa ra công thức sau đây, liên hệ giữa điện tích Q, hình chiếu Isospin I_3, số lạ S và số Barion B của mỗi hạt:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{(B+S)}{2} \tag{1.9}$$

ở đây, $Y = B + S$ được gọi là siêu tích, Q là điện tích tính theo đơn vị e. Thí dụ đối với proton:

$$Q = \frac{1}{2} + \frac{1+0}{2} = 1$$

đối với neutron: $Q = -\frac{1}{2} + \frac{1+0}{2} = 0$

c. Số lạ

Trong thực nghiệm, các meson K và các barion λ, Σ, Ξ và Ω (nhóm này tạo thành các hyperon) bao giờ cũng được tạo thành từng cặp trong tương tác mạnh gọi là hiện tượng tạo cặp liên hợp

Tuy nhiên, các hạt tạo thành này có thời gian sống lớn ($> 10^{-23}s$) chúng không phân huỷ bằng tương tác mạnh mà đặc trưng cho tương tác yếu.

Sự thiếu thuận nghịch này cùng với một số tính chất mới lạ khác, mà các hạt hyperon này có tên là những hạt lạ và đặc trưng bởi lượng tử số lạ S

Người ta tính số lạ bằng cách lấy 2 lần giá trị điện tích trung bình trong một đa tuyến rồi trừ đi cho số barion:

$$S = 2\bar{Q} - B \tag{1.10}$$

Những hadron nào có $S \neq 0$ đều được gọi là hadron lạ. Số lạ S chỉ bảo toàn trong tương tác mạnh và tương tác điện từ, không bảo toàn trong tương tác yếu.

d. Lepton tích

Gán cho các lepton một số lượng tử L gọi là số lepton:

- $L = 1$ cho tất cả các lepton $e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau$
- $L = -1$ cho tất cả các phản lepton $e^+, \widetilde{\nu_e}, \mu^+, \widetilde{\nu_\mu}, \tau^+, \widetilde{\nu_\tau}$

thì trong tất cả các quá trình số lepton được bảo toàn. Nghĩa là hiệu của số lepton ở trạng thái đầu L_i và trạng thái cuối L_f triệt tiêu:

$$\triangle L = L_f - L_i = 0$$

Nếu ta gán 3 loại lepton $L_a, a = e, \mu, \tau$ được gọi là số lepton thế hệ:

Lepton	L_e	L_μ	L_τ
$e^-; \nu_e$	+1	0	0
$\mu^-; \nu_\mu$	0	+1	0
$\tau^-; \nu_\tau$	0	0	+1

Thực nghiệm cho thấy, các số lepton thế hệ của electron và neutrino liên hợp với chính nó ν_e cũng như các số lepton của meson μ và neutrino liên hợp ν_μ , ... cũng bảo toàn, sự vi phạm là rất nhỏ. Thí dụ:

$$\begin{array}{lccccccc} & \mu^- & \rightarrow & e^- & + & \widetilde{\nu_e} & + & \nu_\mu \\ L_\mu: & 1 & & 0 & + & 0 & + & 1 \\ L_e: & 0 & & 1 & + & -1 & + & 0 \end{array}$$

Hệ quả của sự bảo toàn lepton thế hệ:

1. Các quá trình vi phạm số lepton xảy ra với xác suất rất nhỏ. Ví dụ: muon rã chủ yếu theo kênh rã thuần túy lepton.

2. Phân biệt các loại neutrino qua sự bảo toàn các lepton thế hệ.

   Vì các neutrino ν_e, ν_μ, ν_τ đều là các hạt có spin 1/2 không mang điện và có khối lượng rất nhỏ, nên để phân biệt các loại neutrino người ta phải dùng các phép thử dựa trên quy tắc bảo toàn lepton thế hệ:

$$\mu_a + X \to l_a + Y, \quad a = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \tag{1.11}$$

   trong đó X, Y là các vật thử. Nếu ở trạng thái cuối của (1.11) ta thu được lepton l_a gì ví dụ μ^- thì ta nói neutrino ở trạng thái đầu là ν_μ.

Một hệ quả rất đặc sắc của sự bảo toàn số baryon: proton là hạt bền vững $\tau_p \geq 10^{33}$ năm. Bởi vì proton là baryon với khối lượng nhỏ nhất. Tương tự như vậy: sự bảo toàn số lepton cho ta electron bền vững, bởi vì nó là lepton với khối lượng nhỏ nhất. Trường hợp của neutrino hơi khác do có sự trộn lẫn dẫn đến sự chuyển hóa.

1.4 CÁC ĐA TUYẾN SU(2)

a. Nhóm $SU(2)$

Nhóm $SU(2)$ là tổ hợp các ma trận 2x2, unita và có định thức bằng 1

$$SU(2) = \{A : \text{2x2} : AA^+ = A^+A = I, \, detA = 1\} \tag{1.12}$$

Bất kì phần tử nào của nhóm $SU(2)$ đều có thể được viết dưới dạng:

$$A(\omega) = e^{i\sum \omega_a I_a} \tag{1.13}$$

trong đó, $I_a = \dfrac{\tau_a}{2}$ là các vi tử đóng vai trò như isospin còn τ_a là ma trận Pauli thoả mãn hệ thức giao hoán:

$$\left[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2}\right] = i\epsilon_{abc}\frac{\tau_c}{2} \tag{1.14}$$

Hằng số ϵ_{abc} gọi là hằng số cấu trúc nhóm $SU(2)$. Dạng tường minh của các ma trận Pauli như sau:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{1.15}$$

b. Các đa tuyến $SU(2)$

Giả sử có n hạt nào đó, chúng tương ứng với n toán tử trường $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,... $\psi_n(x)$. Dưới tác động của nhóm $SU(2)$, nó biến đổi như sau:

$$\psi_i(x) \to \psi'_i(x) \equiv A\psi_i(x)A^{-1} = e^{-i\sum \omega_a M_a}\psi(x) \tag{1.16}$$

trong đó tham số biến đổi ω thực, $M_a(a = 1, 2, 3)$ là ma trận $n \times n$ thỏa mãn hệ thức:

$$[M_a, M_b] = i\epsilon_{abc}M_c$$

Thì n trường tạo thành một đa tuyến n chiều của nhóm biến đổi $SU(2)$.

Từ đó suy ra:

$$[I_a, \psi_i(x)] = -(M_a)_i^j\psi_j(x) \tag{1.17}$$

Dưới đây là một vài trường hợp:

- $M_a = 0, n = 1$: toán tử trường không đổi $\psi \to \psi' = \psi$. Ta có 1 hạt hay là một đơn tuyến.

$$[I_a, \psi] = 0 \tag{1.18}$$

- $M_a = \dfrac{\tau_a}{2}, n = 2$: Đây là trường hợp lưỡng tuyến hay còn gọi là biểu diễn cơ sở. Biểu diễn này là hàm có chỉ số dưới.

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

$$[I_a, \psi_i] = -\left(\frac{\tau_a}{2}\right)_i^j\psi_j \tag{1.20}$$

Suy ra:

$$[I_3, \psi_1] = -\left(\frac{\tau_3}{2}\right)_1^1\psi_1 = -\frac{1}{2}\psi_1, \tag{1.21}$$

và

$$[I_3, \psi_2] = -\left(\frac{\tau_3}{2}\right)_2^2\psi_2 = \frac{1}{2}\psi_2 \tag{1.22}$$

- *Ví dụ*: Lưỡng tuyến $\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$ có:

$$I_3 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{đối với } p, \\ \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{đối với } n. \end{cases} \tag{1.23}$$

- $(M_a)_b^c = -i\epsilon_{abc}, n = 3$. Đây là trường hợp tam tuyến.

Dạng tường minh của M_a như sau:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Hệ thức giao hoán trong trường hợp này là:

$$[I_a, \phi_b] = i\epsilon_{abc}\phi_c, \tag{1.25}$$

trong đó:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} [I_3, \phi_1] = i\phi_2, \\ [I_3, \phi_2] = -i\phi_1, \\ [I_3, \phi_3] = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Vậy, ϕ_3 là trạng thái riêng của I_3 và có thể đồng nhất với π^0. Để xây dựng các trạng thái vật lý khác ta đưa vào định nghĩa:

$$\phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{1.28}$$

$$\phi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{1.29}$$

Khi đó,

$$[I_3, \phi_+] = -\phi_+, \tag{1.30}$$

và

$$[I_3, \phi_-] = +\phi_-. \tag{1.31}$$

Như vậy, ϕ_+ và ϕ_- là hai trạng thái vật lý và ta đồng nhất với π^+ và π^-.

1.5 CÁC ĐA TUYẾN SU(3)

a. Nhóm SU(3)

Nhóm $SU(3)$ là tổ hợp các ma trận 3x3, unita và có định thức bằng 1

$$SU(3) = \{A : 3\text{x}3 : AA^+ = A^+A = I,\ detA = 1\} \tag{1.32}$$

Bất kì phần tử nào của nhóm $SU(3)$ đều có thể được viết dưới dạng:

$$A(\omega_a) = e^{i\sum \omega_a \frac{\lambda_a}{2}} \quad \text{với}\, a = 1, 2, ..., 8. \tag{1.33}$$

Các ma trận λ_a gọi là các ma trận Gell-Mann thoả mãn các hệ thức giao hoán sau:

$$[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \tag{1.34}$$

với $f_{123} = 1, f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{376} = \dfrac{1}{2}, f_{458} = f_{678} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dạng tường minh của các ma trận Gell-Mann:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Như trong trường hợp trước, việc xây dựng các đa tuyến hoàn toàn tương tự. Chúng ta hãy xét mô hình quark của Gell-Mann.

b. Tam tuyến quark $M_a = \dfrac{\lambda}{2}, n = 3$

Trong vật lý học hiện đại, người ta cho rằng các quark là hạt cơ bản. Việc mô hình chuẩn dựa trên mẫu Glashow-Weinberg-Salam và sắc động lực học lượng tử (QCD) đã kiểm chứng với độ chính xác rất cao chứng tỏ điều này. Các quark thực hiện biểu diễn cơ sở của nhóm $SU(3)$ (tam tuyến). Các vi tử của nhóm M_a tác động lên toán tử trường tuân theo hệ thức giao hoán:

$$[M_a, q_i] = -\frac{1}{2}(\lambda_a)_i^j q_j, \tag{1.35}$$

với $q_1 = q_u$, $q_2 = q_d$, $q_3 = q_s$.

Đồng nhất các toán tử isospin, siêu tích với các vi tử của nhóm $M_1 = I_1$, $M_2 = I_2$, $M_3 = I_3$, $M_8 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y$, ta có:

$$[I_{1,2,3}, q_3] = 0 \tag{1.36}$$

Vậy, q_3 là đơn tuyến của nhóm $SU(3)$ đồng vị.

Để biết siêu tích của các quark, ta xuất phát từ giao hoán tử:

$$[Y, q_i] = \frac{2}{\sqrt{3}}[M_8, q_i] = \frac{2}{\sqrt{3}}\big(-\frac{1}{2}\lambda_8\big)_i^j q_j = -\frac{1}{\sqrt{3}}\big(\lambda_8\big)_i^j q_j \tag{1.37}$$

Suy ra q_1 có siêu tích $Y = \frac{1}{3}$, q_2 có $Y = \frac{1}{3}$, và q_3 có $Y = -\frac{2}{3}$.

Để phù hợp với thực nghiệm, người ta thấy cần thiết phải đưa số lượng tử mới: số lạ S. Số lạ chỉ gán cho quark thứ ba q_3 và có mối liên hệ với số baryon $B = \frac{1}{3}$ như sau:

$$Y = B + S. \tag{1.38}$$

Từ công thức Gell-Mann-Nishijima, ta xác định được điện tích, siêu tích, số Barion và số lạ của các quark như sau:

quark	**I**	**I_3**	**Y**	**Q**	**B**	**S**
$u = q_1$	1/2	1/2	1/3	2/3	1/3	0
$d = q_2$	1/2	-1/2	1/3	-1/3	1/3	0
$s = q_3$	0	0	-2/3	-1/3	1/3	-1

c. Cấu trúc các hadron theo quark

Meson là trạng thái liên kết của quark và phản quark:

Hạt	K^+	K^0	π^+	π^0	π^-	K^0	K^-	η
Cấu tạo	$u\widetilde{s}$	$d\widetilde{s}$	$u\widetilde{d}$	$(u\widetilde{u}+d\widetilde{d})/\sqrt{2}$	$\widetilde{u}d$	$s\widetilde{d}$	$s\widetilde{u}$	$(u\widetilde{u}+d\widetilde{d})+2s\widetilde{s})/\sqrt{6}$
I	1/2			1		1/2		0
I_3	1/2	-1/2	1	0	-1	1/2	-1/2	0
Y	1			0		-1		0
S	0			0		-1		0

Barion là trạng thái liên kết của 3 quark:

Hạt	p	n	Σ^+	Σ^0	Σ^-	Ξ^0	Ξ^-	Λ
Cấu tạo	udu	udd	suu	$s(ud+du)/\sqrt{2}$	sdd	ssu	ssd	$s(ud-du)/\sqrt{2}$
I	1/2			1		1/2		0
I_3	1/2	-1/2	1	0	-1	1/2	-1/2	0
Y	1			0		-1		0
S	0			-1		-2		-1

- Với $n = 1, M_a = 0 \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x)$: đơn tuyến

- Với $n = 8, M_a = 8\text{x}8 \rightarrow \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_8(x)$: bát tuyến

Thực nghiệm chứng tỏ, 9 tổ hợp khả dĩ của quark và phản quark tạo thành bát tuyến và đơn tuyến:

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \tag{1.39}$$

d. Các màu của quark

Năm 1975, người ta đã phát hiện hàng loạt meson, nhóm SU(3) chưa đủ mô tả các hạt này, cần có các đối xứng bậc cao hơn.

Nhóm	SU(4)	SU(5)	SU(6)
Quark	c (charm)	b (bottom)	t (top)
Q	2/3	-1/3	2/3
Số lượng tử mới	c	b (beauty)	t (truth)

Từ công thức cấu tạo của hạt $\Omega^- = (sss)$ ta thấy 3 quark s ở cùng trạng thái. Như vậy, vi phạm nguyên lí Pauli. Để giải quyết vấn đề này, các quark phải có số lượng tử mới, đó là số màu. Có thể thấy rằng, các quark có 3 màu, toán tử quark phải có hai chỉ số $q_{i\alpha}$ trong đó $i = u, d, s, c, b, t$ là chỉ số vị còn $\alpha = r, b, g$ là chỉ số màu. Để hạn chế số hadron quan sát được, ta giả thiết các hadron phải không màu. Do đó, khi cấu thành các hadron, tổ hợp quark phải thoả quy tắc màu sau:

- Các baryon được cấu tạo từ 3 quark có 3 màu khác nhau.

- Các meson được cấu tạo từ quark và phản quark cùng màu nhưng màu thay đổi liên tục với xác suất như nhau.

Chương 2

CÁC TRƯỜNG TỰ DO

Trong chương này ta sẽ thảo luận những nét chính của hình thức luận Hamilton trong việc chuyển từ lí thuyết cổ điển sang lí thuyết lượng tử.

2.1 CƠ HỌC CỔ ĐIỂN VÀ HÌNH THỨC LUẬN HAMILTON

Trong cơ học cổ điển, một hệ được mô tả bởi Lagrangian là một hàm của toạ độ q_i và đạo hàm theo thời gian của chúng

$$L = L(q_i, \dot{q}_i), \qquad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}. \tag{2.1}$$

Phương trình chuyển động thoả điều kiện

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{2.2}$$

cho ta phương trình

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2.3}$$

Xung lượng tổng quát được định nghĩa:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2.4}$$

Hamiltonian của hệ là:

$$H(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{2.5}$$

Từ phương trình (2.3) và (2.5), ta có

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i}. \tag{2.6}$$

Biến thiên theo thời gian của đại lượng $A(p,q)$ có dạng:

$$\frac{dA(p,q)}{dt} = \sum\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}.\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i}.\frac{dp_i}{dt}\right) \equiv \{H, A\} \tag{2.7}$$

$\{H, A\}$ được gọi là móc Poisson cổ điển. Ta có ngay

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \tag{2.8}$$

Chuyển từ lí thuyết cổ điển sang lí thuyết lượng tử bằng cách thay các hàm số bởi toán tử và móc Poisson bằng giao hoán tử. Coi q_i và p_i là các toán tử thoả mãn giao hoán tử sau

$$\begin{aligned} &[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}, \\ &[q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Các đại lượng quan sát được trở thành các toán tử Hermitic, do đó

$$q_i = q_i^+, \quad p_i = p_i^+, \quad L = L^+, \quad H = H^+.$$

Ví dụ: Dao động tử điều hòa

$$L = L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2), \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}. \tag{2.10}$$

Do vậy

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q \tag{2.11}$$

Để phân tích bài toán trị riêng, ta đặt:

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip), \quad a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip). \tag{2.12}$$

Từ hệ thức giao hoán (2.9) ta có

$$[a, a^+] = 1. \tag{2.13}$$

Hơn nữa

$$a^+ a = \frac{1}{2}(q - ip)(q + ip) = \frac{1}{2}[q^2 + p^2 - i(pq - qp)] = H - \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

Định nghĩa toán tử số hạt

$$N = a^+ a,$$

ta có

$$H = N + \frac{1}{2} \tag{2.15}$$

Tác động của H vào trạng thái chân không và n hạt như sau

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= (n + \frac{1}{2})|n\rangle, \\ H|0\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2 HÌNH THỨC LUẬN LAGRANGE TRONG CHUYỂN ĐỘNG CỦA HẠT

Trong cơ học cổ điển, hạt được coi là hạt điểm (không có kích thước) có khối lượng m. Giả sử rằng ở thời điểm t nó ở vị trí $x(t)$. Nếu nó chuyển động trong cùng có thế năng là $V(x)$, khi đó định luật hai Newton nói rằng

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{dV}{dx} \tag{2.17}$$

trong đó F là lực tác động lên hạt. Nguyên lý tác dụng tối thiểu sẽ cho ta nhận được điều này. Lagrangian được định nghĩa như sau

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \tag{2.18}$$

trong đó T và V tương ứng là động năng và thế năng. Tác động S là

$$S = \int L dt, \tag{2.19}$$

trong đó tích phân lấy theo quỹ đạo từ t_1 đến t_2. Cụ thể hơn

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt. \tag{2.20}$$

Hạt sẽ chuyển động theo quỹ đạo mà tác động là cực tiểu. Ta sẽ chỉ ra rằng khi đó sẽ có định luật Newton.

Xét vi phân trên quỹ đạo

$$x(t) \to x'(t) = x(t) + a(t), \quad a \ll x. \tag{2.21}$$

Hạt có điểm đầu và cuối cố định $x(t_1), x(t_2)$, nên

$$a(t_1) = a(t_2) = 0 \tag{2.22}$$

Thay $x \to x'$, tác động S biến thiên

$$S \to S' = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{a})^2 - V(x + a)\right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{a} - [V(x) + aV'(x)]\right\} dt$$

$$= S + \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{x}\dot{a} - aV'(x)] dt$$

$$= S + \delta S$$

trong đó

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{x}\dot{a} - aV'(x)]dt, \qquad V'(x) \equiv \frac{dV(x)}{dx}. \tag{2.23}$$

Nếu S cực tiểu theo biến thiên của $x, \delta S = 0$. Ta biến đổi số hạng đầu tiên trong (2.23)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}\dot{a}dt = \dot{x}a|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} a\ddot{x}dt = -\int_{t_1}^{t_2} a\ddot{x}dt \tag{2.24}$$

Ta sử dụng điều kiện (2.22) ở bước cuối cùng. Ta có

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} [ma\ddot{x} + aV'(x)]dt = 0. \tag{2.25}$$

Do vậy:

$$m\ddot{x} = -V'(x) \tag{2.26}$$

chính là định luật Newton.

2.3 CƠ HỌC LƯỢNG TỬ TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Trong mục này chúng ta đưa các nét cơ bản của cơ học lượng tử tương đối tính. Xét sóng phẳng của hạt tự do

$$\psi = e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{2.27}$$

với $\mathbf{k}$ và ω tương ứng là vector truyền và tần số góc. Trong hệ tự nhiên $\hbar = c = 1$, chúng là xung lượng và năng lượng. Hàm sóng trong (2.27) là nghiệm của phương trình Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\Delta - m^2)\psi \tag{2.28}$$

mô tả hạt vô hướng (spin=0) tương đối tính. Để tiện theo dõi, ta viết lại phương trình trên

$$(\Box + m^2)\psi = 0, \tag{2.29}$$

trong dó $\Box = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta$

Thay (2.27) vào (2.28) ta có hệ thức

$$E^2 = p^2 + m^2. \tag{2.30}$$

Trường hợp phi tương đối tính $p \ll m$, ta có

$$E = m\sqrt{\frac{p^2}{m^2} + 1} = m + \frac{p^2}{2m}. \tag{2.31}$$

Khi đó hàm sóng mới tương đương có dạng

$$\phi = \frac{\psi}{e^{-imt}} = e^{i[\mathbf{pr} - \frac{p^2 t}{2m}]} \tag{2.32}$$

sẽ thỏa mãn phương trình Schrödinger mô tả hạt phi tương đối tính

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{i}{2m}\triangle\phi = 0 \tag{2.33}$$

Như vậy phương trình Schrödinger là giới hạn phi tương đối tính của phương trình Klein-Gordon.

Bây giờ ta tìm dạng hiệp biến của phương trình Klein-Gordon qua việc đưa vào định nghĩa

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{2.34}$$

Khi đó toán tử Klein-Gordon có dạng

$$\Box + m^2 = -P_\mu P^\mu + m^2. \tag{2.35}$$

Ta muốn tách toán tử Klein-Gordon thành tích của hai số hạng tuyến tính theo P_μ

$$\Box + m^2 = -(P - m)(P + m) \tag{2.36}$$

Để làm được điều này ta biểu diễn P theo hệ tuyến tính của P_μ như sau

$$P = P_\mu \gamma^\mu \tag{2.37}$$

Biến đổi tiếp theo ta có

$$P^2 = (P_\mu\gamma^\mu)(P_\nu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}P_\mu P_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{2.38}$$

Từ (2.38) ta có hệ thức cần thiết

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{2.39}$$

Như vậy, các γ^μ với chỉ số khác nhau phản giao hoán, nên không là số và chúng có thể chọn ở dạng ma trận 4 x 4. Khi đó chúng có tên gọi là các ma trận Dirac.

Bây giờ ta trở lại phương trình (2.29). Kết hợp với (2.36) ta có

$$(\gamma^\mu P_\mu + m)(\gamma^\nu P_\nu - m)\psi = 0 \tag{2.40}$$

Ta đòi hỏi ψ thỏa mãn một trong hai phương trình sau

$$\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\right)\psi(x) = 0, \quad \text{hoặc} \quad \left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi(x) = 0, \tag{2.41}$$

Thông thường người ta chọn phương trình thứ hai. Phương trình trên mô tả hạt có spin $\frac{1}{2}$ và có tên gọi là phương trình Dirac. Ta có kết luận: Nếu ψ thỏa mãn phương trình Dirac thì nó thỏa mãn phương trình Klein-Gordon và điều ngược lại không đúng.

2.4 PHƯƠNG TRÌNH EULER-LAGRANGE

Mọi hệ vật lý được miêu tả bởi hàm Lagrangian $\mathscr{L}(x)$:

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}\big(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)\big) \tag{2.42}$$

Dạng của Lagrangian rất phức tạp, tuỳ thuộc vào từng mô hình và cơ chế vật lý mà ta xét nhưng phải thoả mãn 1 số điều kiện bắt buộc:

- Lagrangian của trường phải là hàm thực:

$$\mathscr{L}^*(x) = \mathscr{L}(x) \tag{2.43}$$

  Hệ vật lý mô tả bởi Lagrangian thì toàn bộ kết quả là các đại lượng vật lý là các đại lượng thực nên hàm Lagrangian phải là hàm thực.

- Lagrangian thoả mãn nguyên lý bất biến tương đối tính:

$$\mathscr{L}'(x) = \mathscr{L}(x) \tag{2.44}$$

  Lagrangian là đại lượng không thay đổi với phép biến đổi Lorentz.

Tích phân hàm Lagrangian theo không thời gian được gọi là tác dụng:

$$S = \int \mathscr{L}(x)\, d^4(x) \quad \text{(tích phân 4 chiều)} \tag{2.45}$$

Nguyên lí tác dụng tối thiểu: Khi các trường thay đổi dạng, sự biến thiên của tác dụng vẫn bằng không:

$$\delta S = 0 \tag{2.46}$$

Từ đòi hỏi $\delta S = 0$, chúng ta nhận được phương trình Euler-Lagrangian là phương trình chuyển động của trường có dạng như sau:

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \varphi(x)} - \partial^\mu \left\{ \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta\big(\partial^\mu \varphi(x)\big)} \right\} = 0 \tag{2.47}$$

2.5 ĐỊNH LÍ N$\ddot{O}$ETHER'S

Định lí: Nếu tác dụng không thay đổi, tồn tại một dòng xác định bảo toàn.

$$\delta S = 0 \quad \text{thì } \partial_\mu j_i^\mu = 0 \tag{2.48}$$

Ví dụ 1: Dịch chuyển không thời gian $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$

Dòng trong trường hợp này chính là tenxơ năng xung lượng:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta(\partial^\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \mathscr{L}\, \eta_{\mu\nu} \tag{2.49}$$

Vectơ năng xung lượng 4 chiều:

$$P_\nu = \int_\infty T_{0\nu}\, d\mathbf{x} \tag{2.50}$$

Các thành phần không gian (P_1, P_2, P_3) xác định xung lượng $\mathbf{P}$ của trường, thành phần thời gian P_0 là năng lượng của trường.

Như vậy, ứng với phép dịch chuyển thời gian cho năng lượng bảo toàn, còn ứng với phép dịch chuyển không gian cho xung lượng bảo toàn.

Ví dụ 2: Đối với phép biến đổi pha: chỉ quay trường và giữ nguyên tọa độ

$$\varphi'(x) = e^{-i\theta q}\varphi(x), \quad \varphi'^*(x) = e^{i\theta q}\varphi^*(x), x'^\mu = x^\mu, \tag{2.51}$$

Dòng trong trường hợp này chính là của dòng điện từ:

$$j^{\mu(em)} = -iq(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*). \tag{2.52}$$

trong đó, q là điện tích của trường φ.

2.6 TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

a. Trường vô hướng thực

Mô tả hạt vô hướng trung hoà (không mang điện), với khối lượng m có một thành phần $\phi(x)$. Lagrangian tự do của nó như sau:

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \tag{2.53}$$

Thay (2.53) vào (2.47), ta thu được phương trình Euler-Lagrangian cho trường vô hướng:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0, \tag{2.54}$$

gọi là phương trình Klein-Gordon, trong đó $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$ là toán tử Dalamber.

Thay (2.53) vào (2.49), ta nhận được biểu thức cho tensor năng xung lượng cho trường vô hướng thực:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[(\partial_0 \phi)^2 + \vec{\nabla}\phi \vec{\nabla}\phi + m^2 \phi^2\right] \quad \text{và} \quad T_{0i} = \partial_0 \phi\, \partial_i \phi \tag{2.55}$$

Hàm trường $\phi(x)$ là nghiệm của phương trình Euler-Lagrangian (2.54) được viết dưới dạng khai triển Fourier như sau:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \Big\{ e^{-ikx} a(\mathbf{k}) + e^{ikx} a^+(\mathbf{k}) \Big\}, \tag{2.56}$$

trong đó $kx = k^\mu x_\mu$ và $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $a^+(\mathbf{k})$ và $a(\mathbf{k})$ là các toán tử sinh, hủy hạt có xung lượng $\mathbf{k}$ và khối lượng m.

Giao hoán giữa các toán tử sinh, huỷ hạt:

$$\begin{cases} \big[a(\mathbf{k}), a^+(\ell)\big] = \delta(\mathbf{k} - \ell), \\ \big[a(\mathbf{k}), a(\ell)\big] = 0. \end{cases} \tag{2.57}$$

Từ hàm trường $\phi(x)$ trong phương trình (2.56), ta có thể biểu diễn vectơ năng xung lượng 4 chiều qua các toán tử sinh, huỷ như sau:

$$P_\nu = \int d\mathbf{k} k_\nu \, a^+(\mathbf{k}) \, a(\mathbf{k}). \tag{2.58}$$

Dựa vào quy luật giao hoán (2.57), ta suy ra:

$$\begin{cases} \big[P_\mu, a(\mathbf{k})\big] = -k_\mu a(\mathbf{k}), \\ \big[P_\mu, a^+(\mathbf{k})\big] = k_\mu a^+(\mathbf{k}). \end{cases} \tag{2.59}$$

Xét trạng thái $|i(p)\rangle$ thoả: $\hat{P}_\mu |i(p)\rangle = p_\mu |i(p)\rangle$. Ta dễ dàng suy ra:

$$\hat{P}_\mu a(\mathbf{k}) |i(p)\rangle = (p_\mu - k_\mu) a(\mathbf{k}) |i(p)\rangle \tag{2.60}$$

Nhận xét, $|i(p)\rangle$ là trạng thái có xung lượng là p_μ trong khi $a(\mathbf{k})|i(p)\rangle$ là trạng thái có xung lượng là $p_\mu - k_\mu$. Do đó, ta có thể nói: $a(\mathbf{k})$ là toán tử hủy hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ và khối lượng m. Tương tự, ta cũng có $a^+(\mathbf{k})|i(p)\rangle$ là trạng thái có xung lượng $p_\mu + k_\mu$ nên $a^+(\mathbf{k})$ là các toán tử sinh hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ và khối lượng m.

- Sử dụng các toán tử sinh, huỷ để lập các trạng thái tuỳ ý hạt từ chân không

- Trạng thái 1 hạt xung lượng $\mathbf{k}$ tạo bởi toán tử sinh tác động lên chân không $|0\rangle$

$$|\mathbf{k}\rangle = [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} a^+(\mathbf{k}) |0\rangle \tag{2.61}$$

- Trạng thái 2, 3,... hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ được tạo bởi toán tử sinh tác động lên chân không $|0\rangle$

$$|\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle = [(2\pi)^3 2k_{10}]^{1/2} [(2\pi)^3 2k_{20}]^{1/2} a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) |0\rangle \tag{2.62}$$

Nhận xét: $|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle = |\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\rangle$, nghĩa là hạt trung hoà có $s = 0$ tuân theo phân bố Bose-Einstein (hàm đối xứng với phép hoán vị)

Sự hủy hạt (hạt ở trạng thái cuối):

$$\langle \ell| = \langle 0|a(\ell)[(2\pi)^3 2\ell_0]^{1/2} \tag{2.63}$$

Tích vô hướng 2 trạng thái:

$$\langle \ell|\mathbf{k}\rangle = [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}[(2\pi)^3 2\ell_0]^{1/2}\delta(\mathbf{k}-\ell) \tag{2.64}$$

Giao hoán giữa toán tử trường:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \Delta(x-y, m) \tag{2.65}$$

trong đó hàm truyền $\Delta(x-y,m)$ mô tả sự dịch chuyển từ tọa độ y tới tọa độ x có dạng:

$$\Delta(z,m) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^2}\left(e^{-ikz} - e^{ikz}\right) \tag{2.66}$$

b. Trường vô hướng phức

Hạt vô hướng mang điện (có 2 thành phần), được mô tả bởi trường vô hướng phức, có Lagrangian tự do như sau

$$\mathscr{L}(x) = \partial_\mu\phi^+(x)\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^+(x)\phi(x) \tag{2.67}$$

với m là khối lượng nghỉ của lượng tử trường.

Phương trình Euler-Lagrangian cho 2 thành phần $\phi(x)$ và $\phi^+(x)$ độc lập nhau:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0, \quad \text{và} \quad (\Box + m^2)\phi^+(x) = 0. \tag{2.68}$$

Các phương trình này là những phương trình Klein-Gordon.

Tensor năng xung lượng cho trường vô hướng mang điện:

$$T_{00} = \partial_0\phi^+\,\partial_0\phi + \vec{\nabla}\phi^+\vec{\nabla}\phi + m^2\phi^+\phi \;\; \text{và} \;\; T_{0i} = \partial_0\phi^+\,\partial_i\phi + \partial_0\phi\,\partial_i\phi^+ \tag{2.69}$$

Hàm trường $\phi(x)$ là nghiệm của phương trình Euler-Lagrangian (2.54) được viết dưới dạng khai triển Fourier như sau:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\Big\{e^{-ikx}a(\mathbf{k}) + e^{ikx}b^+(\mathbf{k})\Big\}, \\ \phi^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\Big\{e^{-ikx}b(\mathbf{k}) + e^{ikx}a^+(\mathbf{k})\Big\}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Nhận xét, nếu $\phi^+(x) = \phi(x)$, trường vô hướng tích điện quy về trường vô hướng thực.

Giao hoán giữa các toán tử $a(\mathbf{k})$, $a^+(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$, $b^+(\mathbf{k})$:

$$\begin{cases} \big[a(\mathbf{k}), a^+(\ell)\big] = \delta(\mathbf{k}-\ell), \\ \big[b(\mathbf{k}), b^+(\ell)\big] = \delta(\mathbf{k}-\ell), \\ \big[a(\mathbf{k}), a(\ell)\big] = \big[b(\mathbf{k}), b(\ell)\big] = \big[a(\mathbf{k}), b(\ell)\big] = ... = 0. \end{cases} \tag{2.71}$$

Biểu diễn vectơ năng xung lượng 4 chiều qua các hệ số khai triển như sau:

$$P_\nu = \int d\mathbf{k} k_\nu \Big\{ a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}) + b^+(\mathbf{k})\, b(\mathbf{k}) \Big\}. \tag{2.72}$$

Khác với trường vô hướng thực, trong trường vô hướng phức, ta đưa thêm vào 1 biến động lực mới là điện tích:

$$Q = \int d\mathbf{x}\, J_\mu^{(em)}, \tag{2.73}$$

với $J_\mu^{(em)}$ được gọi là dòng điện từ thoả định lí Nöether:

$$J_\mu^{(em)} = iq\Big(\phi^+\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi^+\phi\Big) \tag{2.74}$$

Biễu diễn Q qua các hệ số khai triển:

$$Q = q\int\ d\mathbf{k} \Big\{ a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}) - b^+(\mathbf{k})\, b(\mathbf{k}) \Big\}. \tag{2.75}$$

Dựa vào quy luật giao hoán (2.71), ta suy ra:

$$\begin{cases} \big[P_\mu, a(\mathbf{k})\big] = -k_\mu a(\mathbf{k}), \\ \big[P_\mu, a^+(\mathbf{k})\big] = k_\mu a^+(\mathbf{k}) \\ \big[P_\mu, b(\mathbf{k})\big] = -k_\mu b(\mathbf{k}), \\ \big[P_\mu, b^+(\mathbf{k})\big] = k_\mu b^+(\mathbf{k}). \end{cases} \tag{2.76}$$

Các hệ thức giao hoán giữa toán tử điện tích và toán tử sinh, hủy hạt:

$$\begin{cases} \big[Q, a(\mathbf{k})\big] = -qa(\mathbf{k}), \\ \big[Q, a^+(\mathbf{k})\big] = +qa^+(\mathbf{k}) \\ \big[Q, b(\mathbf{k})\big] = +qb(\mathbf{k}), \\ \big[Q, b^+(\mathbf{k})\big] = -qb^+(\mathbf{k}). \end{cases} \tag{2.77}$$

Xét trạng thái $|i(e)\rangle$ là trạng thái có điện tích e, nghĩa là: $Q|i(e)\rangle = e|i(e)\rangle$. Ta dễ dàng chứng minh được rằng: trạng thái $a(\mathbf{k})|i(e)\rangle$ là trạng thái có điện tích $(e-q)$, nghĩa là:

$$Qa(\mathbf{k})|i(e)\rangle = (e-q)a(\mathbf{k})|i(e)\rangle \tag{2.78}$$

Như vậy:

- $a^+(\mathbf{k})$ là các toán tử sinh hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ và điện tích $+q$.
- $a(\mathbf{k})$ là toán tử hủy hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ và điện tích $+q$.
- $b^+(\mathbf{k})$ là toán tử sinh phản hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ và điện tích $-q$.
- $b(\mathbf{k})$ là toán tử hủy phản hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ và điện tích $-q$.

Trạng thái một hạt với xung lượng $\mathbf{k}$ được tạo bởi toán tử sinh tác động lên chân không $|0\rangle$:

$$|\mathbf{k}\rangle = [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} a^+(\mathbf{k})|0\rangle \tag{2.79}$$

Trạng thái một phản hạt với xung lượng ℓ được tạo bởi toán tử sinh tác động lên chân không $|0\rangle$:

$$|\widetilde{\ell}\rangle = [(2\pi)^3 2\ell_0]^{1/2} b^+(\ell)|0\rangle \tag{2.80}$$

Sự hủy hạt:

$$\langle\mathbf{k}| = \langle 0|a(\mathbf{k})[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} \tag{2.81}$$

Sự hủy phản hạt:

$$\langle\widetilde{\ell}| = \langle 0|b(\ell)[(2\pi)^3 2\ell_0]^{1/2} \tag{2.82}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle = (2\pi)^3 a^+(\mathbf{k}_1)a^+(\mathbf{k}_2)|0\rangle \\
&|\mathbf{k}\widetilde{\ell}\rangle = (2\pi)^3 a^+(\mathbf{k})b^+(\ell)|0\rangle \\
&|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2...\mathbf{k}_n\widetilde{\ell}_1\widetilde{\ell}_2...\widetilde{\ell}_m\rangle = (2\pi)^{\frac{3}{2}(n+m)} a^+(\mathbf{k}_1)a^+(\mathbf{k}_2)...a^+(\mathbf{k}_n)b^+(\ell_1)b^+(\ell_2)...b^+(\ell_m)|0\rangle
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Tích vô hướng:

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbf{k}'|\mathbf{k}\rangle = [(2\pi)^3 2k_{10}]^{1/2}[(2\pi)^3 2k_{20}]^{1/2}\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \\
&\langle\widetilde{\ell}'|\widetilde{\ell}\rangle = [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}[(2\pi)^3 2\ell_0]^{1/2}\delta(\ell'-\ell) \\
&\langle\widetilde{\ell}|\mathbf{k}\rangle = 0 \\
&\langle\mathbf{k}|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle = 0
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Tổng quát:

$$\langle \mathbf{k'}_1\mathbf{k'}_2...\mathbf{k'}_r\widetilde{\ell'}_1\widetilde{\ell'}_2...\widetilde{\ell'}_s|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2...\mathbf{k}_n\widetilde{\ell}_1\widetilde{\ell}_2...\widetilde{\ell}_m\rangle \left| \begin{array}{l} = 0 \;\; \text{khi } r \neq n, \text{ hay } s \neq m \\ \\ \neq 0 \;\; \text{khi } r = n, \;\; s = m \end{array} \right. \tag{2.85}$$

Giao hoán giữa toán tử trường:

$$\begin{cases} [\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^+(y)] = 0 \\ \\ [\phi(x), \phi^+(y)] = \Delta(x - y, m) \end{cases} \tag{2.86}$$

2.7 TRƯỜNG VECTƠ

a. Trường vectơ mang điện

Lagrangian tự do có dạng

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}F^+_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2\varphi^+_\mu\varphi^\mu, \tag{2.87}$$

với $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu$ là tensor cường độ trường.

Phương trình Euler-Lagrangian:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2\varphi_\nu = 0, \quad \text{và} \quad \partial^\mu F^+_{\mu\nu} + m^2\varphi^+_\nu = 0. \tag{2.88}$$

Đưa vào điều kiện ràng buộc $\partial^\nu\varphi_\nu = 0$ ta suy ra phương trình Klein-Gordon cho trường vectơ:

$$(\Box + m^2)\varphi_\mu(x) = 0, \quad \text{và} \quad (\Box + m^2)\varphi^+_\mu(x) = 0. \tag{2.89}$$

Hàm trường dưới dạng khai triển Fourier:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^3\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\varepsilon_\mu(\mathbf{k},\lambda)\Big\{e^{-ikx}a(\mathbf{k},\lambda) + e^{ikx}b^+(\mathbf{k},\lambda)\Big\}, \\ \varphi^+_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^3\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\varepsilon_\mu(\mathbf{k},\lambda)\Big\{e^{-ikx}b(\mathbf{k},\lambda) + e^{ikx}a^+(\mathbf{k},\lambda)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.90}$$

với $\varepsilon_\mu(\mathbf{k},\lambda)$ là vectơ phân cực, λ là chỉ số phân cực.
và

$a^+(\mathbf{k},\lambda)$ là toán tử sinh hạt xung lượng $\mathbf{k}$, điện tích $+q$ và trạng thái spin λ

$a(\mathbf{k},\lambda)$ là toán tử hủy hạt xung lượng $\mathbf{k}$, điện tích $+q$ và trạng thái spin λ

$b^+(\mathbf{k},\lambda)$ là toán tử sinh phản hạt xung lượng $\mathbf{k}$, điện tích $-q$, trạng thái spin λ

$b(\mathbf{k}, \lambda)$ là toán tử hủy phản hạt xung lượng $\mathbf{k}$, điện tích $-q$, trạng thái spin λ

thoả các hệ thức giao hoán:

$$\begin{cases} \big[a(\mathbf{k},\lambda), a^+(\ell,\rho)\big] = \delta(\mathbf{k}-\ell)\delta_{\lambda\rho}, \\ \big[b(\mathbf{k},\lambda), b^+(\ell,\rho)\big] = \delta(\mathbf{k}-\ell)\delta_{\lambda\rho}, \\ \text{các giao hoán tử còn lại} = 0. \end{cases} \tag{2.91}$$

Trạng thái một hạt có xung lượng $\mathbf{k}$ và hình chiếu spin λ:

$$|\mathbf{k},\lambda\rangle = [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} a^+(\mathbf{k},\lambda)|0\rangle \tag{2.92}$$

Trạng thái một phản hạt có xung lượng $\mathbf{k}$ và hình chiếu spin λ:

$$|\widetilde{\mathbf{k}},\lambda\rangle = [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} b^+(\widetilde{\mathbf{k}},\lambda)|0\rangle \tag{2.93}$$

Tích vô hướng:

$$\langle\widetilde{\mathbf{k}'},\lambda'|\widetilde{\mathbf{k}},\lambda\rangle = [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}[(2\pi)^3 2\ell_0]^{1/2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'} \tag{2.94}$$

b. Trường vectơ trung tính

Trường vectơ trung tính là trường ứng với hạt trung hoà, với Lagrangian mô tả có dạng:

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\varphi_\mu\varphi^\mu, \tag{2.95}$$

Tương tự, đưa vào điều kiện ràng buộc $\partial^\nu\varphi_\nu = 0$ ta suy ra phương trình Klein-Gordon cho trường vectơ trung tính:

$$(\Box + m^2)\varphi_\mu(x) = 0. \tag{2.96}$$

Hàm trường dưới dạng khai triển Fourier:

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^{3}\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\varepsilon_\mu(\mathbf{k},\lambda)\Big\{e^{-i\mathbf{kx}}a(\mathbf{k},\lambda) + e^{i\mathbf{kx}}a^+(\mathbf{k},\lambda)\Big\}. \tag{2.97}$$

c. Trường điện từ

Là trường vectơ trung tính nhưng khối lượng hạt bằng không (photon). Hàm trường được kí hiệu: $A_\mu(x)$

Lagrangian mô tả trường:

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}. \tag{2.98}$$

Hàm trường dưới dạng khai triển Fourier:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^{3}\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\varepsilon_\mu(\mathbf{k},\lambda)\Big\{e^{-i\mathbf{kx}}a(\mathbf{k},\lambda) + e^{i\mathbf{kx}}a^+(\mathbf{k},\lambda)\Big\}. \tag{2.99}$$

trong đó:

$a^+(\mathbf{k}, \lambda)$ là toán tử sinh photon với xung lượng $\mathbf{k}$, trạng thái phân cực λ,

$a(\mathbf{k}, \lambda)$ là toán tử hủy photon với xung lượng $\mathbf{k}$, trạng thái phân cực λ.

thoả các hệ thức giao hoán:

$$\begin{cases} \big[a(\mathbf{k}, \lambda), a^+(\ell, \rho)\big] = -\delta(\mathbf{k} - \ell)\delta_{\lambda\rho}, \\ \\ \big[a(\mathbf{k}, \lambda), a(\ell, \rho)\big] = \big[a^+(\mathbf{k}, \lambda), a^+(\ell, \rho)\big] = 0. \end{cases} \tag{2.100}$$

Với trường điện từ, điều kiện $\partial^\mu A_\mu = 0$ không thích hợp vì mâu thuẫn với hệ thức giao hoán:

$$\big[A_\mu(x), A_\nu(x)\big] = -\eta_{\mu\nu}\Delta(x - y, 0) \tag{2.101}$$

Cải biến điều kiện Lorentz: Trung bình hoá mọi trạng thái vật lí khả dĩ bằng 0:

$$\langle i|\partial^\mu A_\mu(x)|i\rangle = 0. \tag{2.102}$$

Với điều kiện trên, trong tất cả các quá trình vật lý, chỉ có photon ngang ($\lambda = 1, 2$) mới cho đóng góp còn các photon dọc ($\lambda = 3$) và photon vô hướng ($\lambda = 0$) thì cho những đóng góp ngược dấu và khử lẫn nhau.

Biểu diễn vectơ năng xung lượng 4 chiều qua các hệ số khai triển như sau:

$$P_\nu = \sum_{\lambda=1,2} \int d\mathbf{k} k_\nu \, a^+(\mathbf{k}, \lambda) \, a(\mathbf{k}, \lambda). \tag{2.103}$$

2.8 TRƯỜNG SPINƠ

Đây là các trường vật chất mô tả bởi hàm trường 4 thành phần:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \tag{2.104}$$

Suy ra:

$$\psi^+(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^*(x) & \psi_2^*(x) & \psi_3^*(x) & \psi_4^*(x) \end{pmatrix} \tag{2.105}$$

Liên hệ chỉ số Dirac trên và chỉ số Dirac dưới của trường spinor:

$$\psi^{+\alpha}(x) = \psi_\alpha^*(x). \tag{2.106}$$

Lagrangian của trường spinor:

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\big(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - \partial^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\big) - m\bar{\psi}\psi \tag{2.107}$$

với $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$

Trong thực tế, người ta thường sử dụng Lagranian tự do kể đến các chỉ số Dirac α của trường spinor $\psi(x)$ có dạng sau:

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\big(\bar{\psi}^\alpha(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\partial^\mu\psi_\beta - \partial^\mu\bar{\psi}^\alpha(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\psi_\beta\big) - m\bar{\psi}^\alpha\psi_\alpha \tag{2.108}$$

Phương trình Euler-Lagrangian có dạng:

$$-i(\gamma_\mu)_\alpha^\beta\partial^\mu\psi_\beta + m\psi^\alpha = 0 \quad \text{và} \quad i\partial^\mu\bar{\psi}^\beta(\gamma_\mu)_\beta^\alpha + m\bar{\psi}^\alpha = 0 \tag{2.109}$$

Phương trình Euler-Lagrangian viết dưới dạng ma trận:

$$-i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + m\psi = 0 \quad \text{và} \quad i\partial^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{2.110}$$

Kí hiệu $\hat{\partial} = \gamma_\mu\partial^\mu$, từ (2.110), ta suy ra phương trình Dirac:

$$(-i\hat{\partial} + m)\psi = 0. \tag{2.111}$$

Tensor năng xung lượng:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\big(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\big) \tag{2.112}$$

Hàm trường thoả mãn phương trình Dirac có dạng:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\frac{m}{k_0}\sum_{s=1,2}\Big\{e^{-ikx}a(\mathbf{k},s)u_\alpha(\mathbf{k},s) + e^{ikx}b^+(\mathbf{k},s)v_\alpha(\mathbf{k},s)\Big\}. \tag{2.113}$$

với $u_\alpha(\mathbf{k},s)$ và $v_\alpha(\mathbf{k},s)$ là các spinor Dirac thoả phương trình:

$$(\hat{k} - m)u_\alpha(\mathbf{k},s) = 0, \quad \text{và} \quad (\hat{k} - m)v_\alpha(\mathbf{k},s) = 0. \tag{2.114}$$

Trong đó kí hiệu: $\hat{k} = \gamma^\mu k_\mu$.

Vectơ năng xung lượng:

$$P_\nu = \frac{i}{2}\int d\mathbf{k}\big(\psi^+\partial_\nu\psi - \partial_\nu\psi^+\psi\big) \tag{2.115}$$

Biểu diễn vectơ năng xung lượng qua các toán tử:

$$P_\nu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\frac{m}{k_0}k_\nu\sum_{s=1,2}\Big\{a^+(\mathbf{k},s)a(\mathbf{k},s) + b(\mathbf{k},s)b^+(\mathbf{k},s)\Big\}. \tag{2.116}$$

Từ quy luật giao hoán $\big[P_\mu,\, \psi_\alpha(x)\big] = -i\partial_\mu\psi_\alpha(x)$, ta suy ra:

$$\begin{cases} \big[P_\mu, a(\mathbf{k},s)\big] = -k_\mu a(\mathbf{k},s), \\ \big[P_\mu, a^+(\mathbf{k},s)\big] = k_\mu a^+(\mathbf{k},s) \\ \big[P_\mu, b(\mathbf{k},s)\big] = -k_\mu b(\mathbf{k},s), \\ \big[P_\mu, b^+(\mathbf{k},s)\big] = k_\mu b^+(\mathbf{k},s). \end{cases} \tag{2.117}$$

Phản giao hoán các toán tử sinh huỷ hạt:

$$\begin{cases} \{a(\mathbf{k},r),\ a^+(\mathbf{l},s)\} = \dfrac{k_0}{m}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{l})\delta_{rs}, \\ \\ \{b(\mathbf{k},r),\ b^+(\mathbf{l},s)\} = \dfrac{k_0}{m}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{l})\delta_{rs}, \\ \\ \{a(\mathbf{k},r),\ a(\mathbf{l},s)\} = ... = 0. \end{cases} \tag{2.118}$$

Điện tích:

$$Q = \int d\mathbf{x}\, J_0^{(em)}, \tag{2.119}$$

với $J_0^{(em)} = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$.

Biểu diễn qua các toán tử sinh, huỷ hạt:

$$Q = q\int d\mathbf{k}\frac{m}{k_0}\sum_{s=1,2}\Big\{a^+(\mathbf{k},s)a(\mathbf{k},s) - b^+(\mathbf{k},s)b(\mathbf{k},s)\Big\}. \tag{2.120}$$

Các hệ thức giao hoán giữa toán tử điện tích và toán tử sinh huỷ hạt:

$$\begin{cases} \big[Q, a(\mathbf{k},s)\big] = -qa(\mathbf{k},), \\ \\ \big[Q, a^+(\mathbf{k},s)\big] = +qa^+(\mathbf{k},s) \\ \\ \big[Q, b(\mathbf{k},s)\big] = +qb(\mathbf{k},s), \\ \\ \big[Q, b^+(\mathbf{k},s)\big] = -qb^+(\mathbf{k},s). \end{cases} \tag{2.121}$$

Giao hoán giữa toán tử trường:

$$\begin{cases} \big\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}^\beta(y)\big\} = \big(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\big)\Delta(x-y,m) = \big(i(\gamma^\mu)^\beta_\alpha\partial_\mu + m\delta^\beta_\alpha\big)\Delta(x-y,m) \\ \\ \big\{\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta(y)\big\} = 0. \end{cases} \tag{2.122}$$

Từ quy luật biến đổi Lorentz của trường spinor và tính chất của ma trận Dirac ta suy ra rằng:

- $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ giống như 1 đại lượng vô hướng.

- $\psi(x)\gamma_\mu\psi(x)$ giống như 1 đại lượng vectơ.

Người ta đưa thêm vào ma trận γ_5 sau:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.123}$$

Rõ ràng: $\gamma_5^+ = \gamma_5$; $\gamma_5^2 = 1$; $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$.

Ta cũng có thể suy ra các tính chất:

- $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ giống như 1 đại lượng giả vô hướng.
- $\psi(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$ giống như 1 đại lượng giả vectơ.

Vết của các ma trận:

$$Sp\gamma_\mu = 0$$

$$Sp\gamma_5 = 0$$

$$Sp\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\eta_{\mu\nu}$$

$$Sp\gamma_5\gamma_\mu = 0$$

$$Sp\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = 0$$

$$Sp\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0$$

$$Sp\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 4\big(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\big)$$

Chương 3

TƯƠNG TÁC GIỮA CÁC TRƯỜNG

3.1 LAGRANGIAN TƯƠNG TÁC

Các biểu thức Lagrangian được giới thiệu trong chương 2 là các Lagrangian mô tả trường tự do ứng với hạt tự do không chịu bất kì tác dụng nào. Thực tế, các hạt này không tồn tại riêng rẽ, do đó, để mô tả trường, ta phải tính đến tương tác của hạt với môi trường xung quanh. Khi ấy, Lagrangian mô tả có dạng:

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_{int}(x) \tag{3.1}$$

trong đó: $\mathscr{L}_0(x)$ là Lagrangian ứng với hạt tự do, $\mathscr{L}_{int}(x)$ là Lagrangian mô tả tương tác của hạt với môi trường xung quanh.

$\mathscr{L}_{int}(x)$ phụ thuộc vào mô hình tương tác nhưng phải thoã mãn 2 yêu cầu sau:

- Bất biến Lorentz: $\mathscr{L}_{int}(x') = \mathscr{L}_{int}(x)$.
- Đại lượng thực: $\mathscr{L}^+_{int}(x) = \mathscr{L}_{int}(x)$.

Các ví dụ:

- Hệ trường vô hướng tương tác với nhau:

$$\mathscr{L}_{int}(x) = g.\phi^2(x)$$

  g là hằng số tương tác.

- Hệ gồm 2 trường spinor và vô hướng tương tác với nhau:

$$\mathscr{L}_{int}(\phi, \psi) = k.\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x).$$

- Hệ gồm trường electron và photon:

$$\mathscr{L}_{int}(\psi, A_\mu) = e.\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x).$$

3.2 MA TRẬN TÁN XẠ

Ma trận tán xạ là một trong những khái niệm cơ bản của cơ học lượng tử được Heisenberg đưa ra vào năm 1943. Ma trận tán xạ chứa tất cả các thông tin về động lực học của hệ đang xét và có thể dùng nó để mô tả các quá trình tán xạ đàn tính, cũng như các quá trình biến đổi và sinh huỷ hạt.

Định nghĩa: S ma trận là tập hợp các đại lượng S_{fi} mô tả quá trình chuyển dời của hệ lượng tử từ trạng thái i sang trạng thái f khi các hạt tương tác với nhau hay tương tác với trường ngoài.

Giả sử ta có trạng thái $|\psi(t)\rangle$, sự biến đổi của trạng thái được mô tả bởi phương trình:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \mathscr{H}_{int}(t)|\psi(t)\rangle \tag{3.2}$$

trong đó $\mathscr{H}_{int}(t)$ là Haminton tương tác giữa các trường:

$$\mathscr{H}_{int}(t) = \int d\mathbf{x}\mathscr{H}_{int}(x) = \int d\mathbf{x}T_{00}^{(L_{int})} \tag{3.3}$$

Đưa vào toán tử $U(t_2, t_1)$ được định nghĩa bằng phương trình:

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle \tag{3.4}$$

Xét thời điểm xa vô cùng ở quá khứ $t_1 = -\infty$, các hạt xem như không tương tác với nhau:

$$|\psi(-\infty)\rangle = |\psi_i\rangle \tag{3.5}$$

Xét thời điểm xa vô cùng ở tương lai $t_2 = \infty$, các hạt xem như tự do:

$$|\psi(+\infty)\rangle = U(+\infty, -\infty)|\psi(-\infty)\rangle = U(+\infty, -\infty)|\psi_i\rangle \tag{3.6}$$

hay,

$$|\psi(+\infty)\rangle = S|\psi_i\rangle \tag{3.7}$$

trong đó ta định nghĩa:

$$S(t_1 = -\infty, t_2 = \infty) = U(t_2, t_1) \tag{3.8}$$

Trước thí nghiệm, hạt có trạng thái $|\psi(t)\rangle$, sau thí nghiệm, ta thu được trạng thái $|\psi(+\infty)\rangle = S|\psi_i\rangle$ là chồng chập những trạng thái ứng với những số lượng tử xác định nào đấy:

$$|\psi(+\infty)\rangle = \sum_f C_f|\psi_f\rangle \tag{3.9}$$

Xác suất chuyển dời từ $|\psi_i\rangle$ sang $|\psi_f\rangle$ sau khi đã có tương tác:

$$W_{i\to f} = |C_f|^2 \sim |\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2 \tag{3.10}$$

S được diễn tả dưới dạng:

$$S = P\Big\{e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}_{int}(t)dt}\Big\} \tag{3.11}$$

với P-toán tử Dyson: toán tử sắp xếp lại theo thứ tự thời gian. Tác dụng của P lên tích các toán tử là sắp xếp lại các toán tử đó theo thứ tự giảm dần với thời gian khi đi từ trái sang phải:

$$P\{A(t_1), A(t_2), ..., A(t_n)\} = A(t_1)A(t_2)...A(t_n), \tag{3.12}$$

trong đó: $t_1 > t_2 > ... > t_n$.

Do đó,

$$S = P\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2...\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\mathscr{H}_{int}(t_1)\mathscr{H}_{int}(t_2)...\mathscr{H}_{int}(t_n)\Big\} \tag{3.13}$$

Biến đổi S về dạng: $S = P\Big\{e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\mathscr{H}_{int}(x)}\Big\}$, ta thu được kết quả cuối cùng:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_2...\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_nP\big\{\mathscr{H}_{int}(x_1)\mathscr{H}_{int}(x_2)...\mathscr{H}_{int}(x_n)\big\} \tag{3.14}$$

3.3 ĐỊNH LÝ WICK

a. N-tích của toán tử trường

N-tích là một tích trong đó các toán tử thừa số sinh đứng bên trái thừa số huỷ nhưng mỗi lần chuyển hai toán tử Boson cho nhau thì không đổi dấu, khi chuyển hai toán tử Fermi cho nhau thì đổi dấu.

- Ví dụ: Gọi B, B^+: toán tử huỷ và sinh Boson; F, F^+: toán tử huỷ và sinh Fermion:

  $N(B_1B_2) = B_1B_2$

  $N(B_1B_2^+) = B_2^+B_1$

  $N(B_1^+B_2B_3^+) = B_1^+B_3^+B_2$

  $N(B_1F_1^+) = F_1^+B_1$

  $N(F_1F_2^+) = -F_2^+F_1$

  $N(B_1F_1B_2^+F_2F_3^+) = B_2^+F_3^+B_1F_1F_2$

- Tính chất:

$$\langle 0|N\{...\}|0\rangle = 0 \tag{3.15}$$

b. T-tích

T-tích là một tích trong đó các toán tử sắp xếp theo thứ tự giảm dần của thời gian nhưng cứ mỗi lần hoán vị 2 toán tử spinor cho nhau thì thêm thừa số σ_P

$$T\{A_1(t_1)A_2(t_2)...A_n(t_n)\} = \sigma_P P\{A_1(t_1)A_2(t_2)...A_n(t_n)\} \tag{3.16}$$

$\sigma_P = +1$ nếu số phép hoán vị là chẵn.

$\sigma_P = -1$ nếu số phép hoán vị là lẻ.

- Ví dụ:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \sigma_P P\{\phi(x)\phi(y)\} = \left| \begin{array}{ll} \phi(x)\phi(y) & (x_0 > y_0) \\ \phi(y)\phi(x) & (y_0 > x_0) \end{array} \right. .$$

$$T\{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)\} = \left| \begin{array}{ll} \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) & (x_0 > y_0) \\ -\psi_\beta(y)\psi_\alpha(x) & (y_0 > x_0) \end{array} \right.$$

c. Định lý Wick

Định lý Wick 1

T-tích của các toán tử bằng tổng các N-tích của chúng với mọi cách chứa các cặp đôi khả dĩ.

$$T[A(x).B(x)] = N[A(x).B(x)] + \overline{A(x).B(x)} \tag{3.17}$$

trong đó, cặp đôi được định nghĩa thông qua hệ thức:

$$\overline{A(x).B(x)} = \langle 0|T[A(x).B(x)]|0\rangle \tag{3.18}$$

- Liên hệ giữa cặp đôi và hàm truyền Feyman

$$\Delta_F(z,m) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\varepsilon\to+0} d^4k \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

- Trường vô hướng trung tính:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = i\Delta_F(x-y,m)$$

- Trường vô hướng mang điện:

$$\overline{\phi^+(x)\phi(y)} = \overline{\phi(y)\phi^+(x)} = i\Delta_F(x-y,m); \overline{\phi(x)\phi(y)} = \overline{\phi^+(x)\phi^+(y)} = 0$$

- Trường spinor:

$$\overline{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = \overline{\psi^{+\alpha}(x)\psi^{+\beta}(y)} = 0$$

$$\psi_\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y) = -\overline{\bar{\psi}^\beta(y)\psi_\alpha(x)} = i\big\{S_F(x-y,m)\big\}_\alpha^\beta$$

với

$$\big\{S_F(x-y,m)\big\}_\alpha^\beta = \big(i\hat{\partial}_z + m\big)_\alpha^\beta \Delta_F(z,m);$$

- Trường điện từ:

$$\overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} = -i\eta_{\mu\nu}\Delta_F(x-y,0)$$

- Cặp đôi hai trường khác nhau: $\overline{A(x)B(y)} = 0$

? *Khai triển các T-tích sau dưới dạng các N-tích và các cặp đôi:*

$T\{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\}$

$T\{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\}$

$T\{\phi^+(x)\phi(y)\bar{\psi}^\alpha(z)\psi_\beta(u)A_\mu(v)\}$

Định lí Wick 2

T-tích hỗn hợp có thể khai triển như T-tích bình thường nhưng khi đó phải loại đi các số hạng chứa các cặp đôi giữa các thừa số trong cùng một N-tích.

- *Ví dụ* : $T\{N(\varphi_1\varphi_2)N(\varphi_3\varphi_4)\} = N\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\} + \overline{\varphi_1\varphi_3}N\{\varphi_2\varphi_4\} + \overline{\varphi_1\varphi_4}N\{\varphi_2\varphi_3\} + \overline{\varphi_2\varphi_4}N\{\varphi_1\varphi_3\} + \overline{\varphi_2\varphi_3}N\{\varphi_1\varphi_4\} + \overline{\varphi_1\varphi_3}\;\overline{\varphi_2\varphi_4} + \overline{\varphi_1\varphi_4}\;\overline{\varphi_2\varphi_3}$

? *Khai triển các T-tích sau dưới dạng các N-tích và các cặp đôi:*

$$T\{N[\bar{\psi}^\alpha(x)\psi_\beta(x)A^\mu(x)]N[\bar{\psi}^\gamma(y)\psi_\delta(y)A^\nu(y)]\}$$

d. Ứng dụng định lí Wick

Ta có thể áp dụng định lí Wick để biễu diễn số hạng khai triển của S-ma trận.

Xét Lagrangian tương tác của trường điện từ:

$$\mathscr{L}_{int}(\psi, A_\mu) = e.N\{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)\} \tag{3.19}$$

viết dưới dạng N-tích để bảo đảm trung bình các đại lượng vật lý ở trạng thái chân không bằng 0.

Vì:

$$T^{(int)}_{\mu\nu} = \frac{\delta\mathscr{L}_{int}}{\delta(\partial^\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \mathscr{L}_{int}\eta_{\mu\nu} = -e.N\{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu\}\eta_{\mu\nu} \tag{3.20}$$

Suy ra:

$$T^{(\mathscr{L}_{int})}_{00} = -\mathscr{L}_{int} = -e.N\{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu\} \tag{3.21}$$

Vậy,

$$\mathscr{H}_{int}(x) = T^{(\mathscr{L}_{int})}_{00} = -\mathscr{L}_{int} = -e.N\{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu\} \tag{3.22}$$

Khi đó,

$$S = P\Big\{e^{i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\mathscr{L}_{int}(x)}\Big\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2...d^4x_n P\{\mathscr{L}_{int}(x_1)\mathscr{L}_{int}(x_2)...\mathscr{L}_{int}(x_n)\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n e^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2...d^4x_n P\{N\{\bar{\psi}(x_1)\gamma_{\mu_1}\psi(x_1)A^{\mu_1}(x_1)...\bar{\psi}(x_n)\gamma_{\mu_n}\psi(x_n)A^{\mu_n}(x_n)\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}$$

- $n = 0 : S^{(0)} = 1$

- $n = 1 : S^{(1)} = ie \int d^4x N\{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A^\mu(x)\}$

- $n = 2 : S^{(2)} = -\frac{1}{2}e^2 \int d^4x d^4y T\{N(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x))N(\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y))\}$
  $= -\frac{1}{2}e^2(\gamma_\mu)^\beta_\alpha(\gamma_\nu)^\delta_\gamma \int d^4x d^4y T\{N(\bar{\psi}^\alpha(x)\psi_\beta(x)A^\mu(x))N(\bar{\psi}^\gamma(y)\psi_\delta(y)A^\nu(y))\}$
- $n = 3 : ...$

3.4 GIẢN ĐỒ FEYNMAN

Xét ma trận tán xạ: $S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}$, trong đó: $S = \int d^4x_1...d^4x_n R^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n)$

$R^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n)$ là tổng của nhiều số hạng mà mỗi số hạng đều biễu diễn qua tích của các cặp đôi các toán tử trường và N-tích toán tử trường không bị cặp đôi.

Ta có thể biễu diễn số hạng trên dưới dạng giản đồ Feynman nếu sử dụng bảng đối ứng sau:

Ví dụ 1:

Các thừa số trong ma trận S	**Các thành phần trong giản đồ**
Hàm truyền photon $\overline{A_\mu(x)A_\nu(y)}$	Đường photon trong x y
Hàm truyền electron $\overline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y)}$	Đường electron trong x y
Toán tử trường photon $A_\mu(x)$	Đường photon ngoài x
Toán tử trường electron $\psi_\alpha(x)$	Đường electron ngoài x
Toán tử trường electron $\overline{\psi}_\alpha(x)$	Đường electron ngoài x
$e\gamma_\mu$ $e\overline{\psi}_\alpha(x)\gamma_\mu\psi_\alpha(x)A_\mu(x)$	Đỉnh x

Ví dụ 2: Tán xạ e^-, p

Chương 4

LÍ THUYẾT TRƯỜNG GAUGE

Hiện nay lí thuyết trường Gauge (trường chuẩn) đã trở thành một trong những cơ sở chính trong vật lý hạt cơ bản. Tất cả các tương tác thông dụng (mạnh, yếu, và điện từ) đã biết được mô tả bởi lí thuyết này.

4.1 TRƯỜNG GAUGE

a. Biến đổi Gauge U(1)

Xét biến đổi pha (biến đổi điện tích) của nhóm U(1)

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\omega q}\phi(x), \tag{4.1}$$

trong đó ω là một tham số.

- Với ω =const: Mọi Lagrangian bất biến dưới tác dụng của phép biến đổi này.
- Với $\omega = \omega(x)$: Lagrangian không bất biến.

Nhận xét: Để Lagrangian bất biến ta thay đạo hàm thông thường bằng đạo hàm hiệp biến D_μ:

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x) \tag{4.2}$$

trong đó A_μ là trường gauge. Để Lagrangian bất biến thì đạo hàm hiệp biến phải biến đổi tương tự như toán tử trường, nghĩa là:

$$D_\mu\phi \to (D_\mu\phi)' = e^{-i\phi\omega(x)q}D_\mu\phi \tag{4.3}$$

Từ đây, ta có quy luật biến đổi của trường chuẩn:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\omega(x) \tag{4.4}$$

- *Ví dụ 1:* Xét trường vô hướng tích điện $\phi(x)$

$$\mathscr{L}_0(\phi) = \partial^\mu \phi^+ \partial_\mu \phi - m^2 \phi^+ \phi \tag{4.5}$$

Để thu được Lagrangian bất biến, ta thay $\partial_\mu \to D_\mu$ được:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0(\phi) + \mathscr{L}_{int}(\phi, A_\mu) \tag{4.6}$$

với $\mathscr{L}_{int}(\phi, A_\mu) = iqA_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi^+\phi) + q^2A^\mu A_\mu \varphi^+\phi$ là Lagrangian tương tác trường ϕ và A_μ.

Để trọn vẹn, ta mô tả Lagrangian của hệ gồm ϕ và A_μ như sau:

$$\mathscr{L}(\phi, A_\mu) = \mathscr{L}_0(\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathscr{L}_{int}(\phi, A_\mu). \tag{4.7}$$

Nhận xét, $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ là bất biến nhưng $\frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu$ không bất biến. Do đó, các trường gauge là trường không có khối lượng (photon là hạt không có khối lượng).

- *Ví dụ 2:* Trường spinor mang điện q, Lagrangian của hệ $\mathscr{L}(\psi, A_\mu)$ có dạng

$$\mathscr{L}(\psi, A_\mu) = \mathscr{L}_0(\psi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \tag{4.8}$$

b. Biến đổi Gauge phi Albel

Giả sử ta có r hạt, mỗi hạt ứng với một trường $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...\varphi_r(x)$, các trường này biến đổi theo quy luật:

$$\varphi_i(x) \to \varphi_i'(x) = \left\{e^{-ig\sum_{a=1}^{p}\omega_a M_a}\right\}_i^j \varphi_j(x) \tag{4.9}$$

trong đó M_a là ma trận rxr tuân theo hệ thức giao hoán:

$$[M_a, M_b] = i.f_{abc}M_c \tag{4.10}$$

Tương tự, để Lagrangian là bất biến với phép biến đổi trên, ta thay đạo hàm thông thường ∂_μ bằng đạo hàm hiệp biến lập theo cách sau:

$$D_\mu\psi_i(x) = \partial_\mu\psi_i(x) - ig\sum_{a=1}^{p} A_{\mu a}(M_a)_i^j\psi_j \tag{4.11}$$

trong đó, ta đã đưa vào các trường gauge $A_{\mu a}(a = 1, 2, ..., p)$ đòi hỏi biến đổi theo quy luật sau:

$$A'_{\mu a}(x) = A_{\mu a}(x) - \partial_\mu\omega_a(x) \tag{4.12}$$

Đạo hàm hiệp biến cũng đòi hỏi phải biến đổi tương tự như toán tử trường, nghĩa là:

$$\Big(D_\mu\psi_i(x)\Big) = \left(e^{-ig\sum_{a=1}^{p}\omega_a M_a}\right)_i^j D_\mu\psi_j \tag{4.13}$$

4.2 SỰ PHÁ VỠ ĐỐI XỨNG TỰ PHÁT - CƠ CHẾ HIGGS

Các trường gauge không có khối lượng. Tương tác yếu là tương tác tầm gần nên hạt truyền tương tác phải có khối lượng. Do vậy, ta phải tìm cách cho trường gauge A_μ có khối lượng. Sự phá vỡ đối xứng tự phát và cơ chế Higgs sẽ giúp ta việc này.

a. Sự phá vỡ đối xứng tự phát

Sự phá vỡ đối xứng tự phát là hiện tượng Lagrangian còn bất biến với biến đổi gauge nhưng chân không (trạng thái cơ bản) là không bất biến với phép biến đổi gauge.

Người ta chứng minh rằng, trung bình chân không của toán tử trường là giá trị của trường cổ điển mà tại đó thế năng đạt cực tiểu. Trường vật lý là trường có trung bình chân không bằng 0. Chẳng hạn xét trường vô hướng ϕ mang điện, dưới tác dụng của phép biến đổi điện tích:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\omega q}\phi(x), \tag{4.14}$$

ta thu được:

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0 \tag{4.15}$$

Bây giờ, ta xét trường vô hướng $\phi(x)$ và trường gauge $A_\mu(x)$ được mô tả bởi Lagrangian toàn phần như sau:

$$\mathscr{L}(\phi, A_\mu) = D^\mu\phi^+ D_\mu\phi + \rho^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.16}$$

Lagrangian trên bất biến với phép biến đổi gauge:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-ig\omega(x)}\phi(x), \tag{4.17}$$

nhưng thế năng $V(\phi) = \rho^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2$ đạt cực tiểu tại:

$$\phi(x) = v = \frac{-iu}{\sqrt{2}}, \tag{4.18}$$

với $u = \sqrt{\dfrac{\rho^2}{\lambda}}$.

Do đó, toán tử trường ϕ có trung bình chân không là:

$$\langle 0|\phi(x)|\rangle = v \neq 0 \tag{4.19}$$

Điều này có nghĩa vi tử T_q tác dụng lên chân không khác 0: $T_q|0\rangle \neq 0$. Trường ϕ không phải là trường vật lý. Ta lập trường $F(x) = \phi(x) - v$ sao cho $\langle 0|\phi(x)|\rangle = 0$. Khi đó, trường $F(x)$ là trường vật lý.

Vì $F(x)$ là trường vô hướng tích điện (phức) nên ta có thể đặt:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varphi(x) - i\sigma(x)\big) \Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\varphi(x) - i(\sigma(x) + u)\big], \tag{4.20}$$

với $\varphi(x)$ và $\sigma(x)$ là các trường vô hướng trung tính.

Thay $\phi(x)$ vào phương trình (4.16), ta thu được:

$$\mathscr{L}(\phi, A_\mu) = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi^+\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma^+\partial^\mu\sigma - \sigma^2\rho^2 + \frac{g^2}{2}u^2A_\mu A^\mu + ... - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.21}$$

Như vậy, khi ta dịch chuyển toán tử trường thì xuất hiện trường gauge A_μ có khối lượng là $m_A = gu$, và tồn tại trường vô hướng trung tính φ không có khối lượng gọi tên là trường Goldstone.

Tổng quát hoá, sự phá vỡ đối xứng tự phát trong trường hợp nhóm đối xứng có n vi tử $T_1|0\rangle \neq 0$, $T_2|0\rangle \neq 0$, ..., $T_n|0\rangle \neq 0$ thì dẫn đến sự tồn tại n trường vô hướng trung tính không có khối lượng.

b. Cơ chế Higgs

Phá vỡ đối xứng tự phát đã xây dựng một trường gauge có khối lượng nhưng cũng đồng thời tạo ra một vướng mắc lớn là sự tồn tại trường Goldstone không khối lượng. Ta phải dùng cơ chế Higgs để giải quyết vướng mắc này.

Ta biễu diễn toán tử trường ban đầu dưới dạng khác:

$$\phi(x) = e^{i\varphi(x)/u}\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma + u)\right] \tag{4.22}$$

Thực hiện phép biến đổi:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\varphi(x)/u}\phi(x) \tag{4.23}$$

giống phép biến đổi gauge với $\omega = \varphi/(gu)$ ta thu được:

$$\phi(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}}[\sigma + u] \tag{4.24}$$

Để Lagrangian bất biến, trường gauge biến đổi theo quy luật sau

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{gu}\partial_\mu\varphi \tag{4.25}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\phi, A_\mu) = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \rho^2\sigma^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu)^2 + \frac{1}{2}g^2u^2A'^\mu A_\mu \\ + \frac{g^2}{2}\sigma[2u+\sigma]A'_\mu A'^\mu - \frac{\lambda}{4}[4u+\sigma]\sigma^3.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Lagrangian cho thấy rằng, trường A'_μ có khối lượng gu, trường Higgs σ có khối lượng $\sqrt{2}\rho$, trường φ đã biến mất. Người ta nói, các trường chuẩn A_μ đã "ăn" các Goldstone boson và trở nên có khối lượng.

Chương 5

MÔ HÌNH WEINBERG-SALAM

5.1 TƯƠNG TÁC YẾU

Lí thuyết tương tác vạn năng V-A Feymann, Gell Mann, Marshak và Sudarshan đã đưa Hamiltonian với hằng số tương tác duy nhất cho tất cả các tương tác yếu:

$$\mathscr{H} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu J^+_\mu, \tag{5.1}$$

trong đó, G_F được gọi là hằng số Fermi, J^μ được gọi là các dòng tương tác yếu có cấu trúc như sau:

$$J^\mu = J^{\text{had}}_\mu + j^{\text{lep}}_\mu \tag{5.2}$$

với,

$$j^{\text{lep}}_\mu = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\psi}^{(\nu_\ell)} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi^{(\ell)}(x) \tag{5.3}$$

Các dòng $j^{\text{lep}}_\mu, J^{\text{had}}_\mu$ là các dòng tương tác yếu của các lepton và các hadron. Dòng J^{had}_μ không có công thức tường minh nhưng có thể đoán nhận từ ý tưởng vật lí:

$$J^{\text{had}}_\mu = J^\mu_V - J^\mu_A \tag{5.4}$$

Các dòng vectơ J^μ_V bảo toàn: $\partial_\mu J^\mu_V = 0$. Các dòng trục không bảo toàn, chúng có dạng:

$$J^{\mu(\Delta S=0)}_A = c\phi_{\pi^+} \quad \text{và} \quad J^{\mu(\Delta S=1)}_A = c\phi_{K^+} \tag{5.5}$$

5.2 TƯƠNG TÁC ĐIỆN TỪ

Điện động lực học lượng tử suy ra từ nguyên lý bất biến gauge mà trong đó nhóm biến đổi là nhóm $U(1)$ một thông số ứng với phép biến đổi điện tích. Trường gauge là trường photon

Lagrangian mô tả tương tác điện từ giữa hadron và photon:

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = e J^{(\text{em})}_\mu A^\mu(x) \tag{5.6}$$

Trường hợp electron $J^{(\text{em})}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$

$$\mathscr{L}^{(\text{em})}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu(x) \tag{5.7}$$

- Xét quá trình tán xạ:

$$e^-(\mathbf{k}) + p(\mathbf{p}) \to e^-(\mathbf{k}') + p(\mathbf{p}')$$

Phần tử ma trận tán xạ:

$$T_{fi} = -\frac{e^2}{\mathbf{q^2}}\bar{U}(\mathbf{k}')\gamma_\mu U(\mathbf{k})\langle p(\mathbf{p}')|J_\mu^{(\mathrm{em})(0)}|p(\mathbf{p}')\rangle, \tag{5.8}$$

với $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ là xung lượng truyền, $U(\mathbf{k})$ là spinor Dirac của electron.

- Trường hợp không có tương tác mạnh

$$\langle p(\mathbf{p}')|J_\mu^{(\mathrm{em})}(0)|p(\mathbf{p}')\rangle = \bar{U}(\mathbf{p}')\gamma^\mu U(\mathbf{p}) \tag{5.9}$$

- Trường hợp có tương tác mạnh

$$\langle p(\mathbf{p}')|J_\mu^{(\mathrm{em})}(0)|p(\mathbf{p}')\rangle = \bar{U}(\mathbf{p}')\left\{\gamma_\mu F_1^p(t) + i\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^\nu F_2^p(t)\right\}M(\mathbf{p}) \tag{5.10}$$

trong đó $t = \mathbf{q}^2$, $\sigma_{\mu\nu} = \dfrac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ và $F_1^p(t)$, $F_2^p(t)$ là các thừa số dạng điện và dạng từ được xác định từ thực nghiệm. Chẳng hạn: $F_1^p(0) = 1$, $F_2^p(0) = \dfrac{\mu_p}{2M}$ với $\mu_p = 1,79$ đơn vị Magneton Bohr, M là khối lượng nuclon.

- Xét quá trình tán xạ:

$$e^- + n \to e^- + n$$

Cách làm tương tự: thay $p \to n$ nhưng:

$$F_1^n(0) = 0, \quad F_2^n(0) = \frac{\mu_n}{2M}$$

- Xét quá trình tán xạ:

$$e^-(\mathbf{k}) + \pi^+(\mathbf{p}) \to e^-(\mathbf{k}') + \pi^+(\mathbf{p}')$$

Phần tử ma trận tán xạ:

$$T_{fi} = -\frac{e^2}{\mathbf{q^2}}\bar{U}(\mathbf{k}')\gamma_\mu U(\mathbf{k})\langle \pi^+(\mathbf{p}')|J_\mu^{(\mathrm{em})}(0)|\pi^+(\mathbf{p}')\rangle, \tag{5.11}$$

- Trường hợp không có tương tác mạnh

$$\langle \pi^+(\mathbf{p}')|J_\mu^{(\mathrm{em})}(0)|\pi^+(\mathbf{p})\rangle = (\mathbf{p}' + \mathbf{p})_\mu \tag{5.12}$$

- Trường hợp có tương tác mạnh

$$\langle \pi^+(\mathbf{p}')|J_\mu^{(\mathrm{em})}(0)|\pi^+(\mathbf{p})\rangle = (\mathbf{p} + \mathbf{p}')_\mu F^\pi(t) \tag{5.13}$$

với $F^\pi(t)$ được gọi là thừa số dạng điện từ của π và cũng được xác định từ thực nghiệm, ví dụ: $F^\pi(0) = 1$.

5.3 MÔ HÌNH THỐNG NHẤT WEINBERG SALLAM

a. Mô hình chuẩn của Weinberg-Sallam

Trong tương tác yếu có 2 dòng mang điện:

$$J_\mu(x) = J_\mu^{\mathrm{hadr}}(x) + j_\mu^{\mathrm{lept}}(x) \quad \text{cần 2 vi tử} \tag{5.14}$$

Tương tác điện từ có dòng:

$$J_\mu^{(\mathrm{em})}(x) = \bar{\psi}^{(\ell)}(x)\gamma_\mu\psi^{(\ell)}(x) \quad \text{cần 1 vi tử} \tag{5.15}$$

Như vậy, để thống nhất tương tác điện từ, ta cần có 1 nhóm có 3 vi tử nên phải mở rộng ra $SU(2)_L(1)_Y$. Áp dụng cơ chế phá vỡ đối xứng tự phát, ta thu được Lagrangian tương tác toàn phần yếu + điện từ có dạng:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = \left(i\frac{g}{2\sqrt{2}}j_\mu^+ W_\mu + h\right) + i\frac{g}{2cos\theta_{\mathrm{w}}}j_\mu^0 Z_\mu^0 + ieJ_\mu^{\mathrm{em}}A_\mu \tag{5.16}$$

với,

$$Z_\mu^0 = cos\theta_{\mathrm{w}}b_{\mu 3} - sin\theta_{\mathrm{w}}a_\mu \tag{5.17}$$

$$A_\mu^0 = cos\theta_{\mathrm{w}}b_{\mu 3} - cos\theta_{\mathrm{w}}a_\mu \tag{5.18}$$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{2}(b_{\mu 1} \pm b_{\mu 2}) \tag{5.19}$$

trong đó: θ_{w} là góc Weinberg được định nghĩa:

$$cos\theta_{\mathrm{w}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4g'^2}} \tag{5.20}$$

$W^\pm$ và Z^0 là các hạt truyền tương tác yếu có khối lượng:

$$m_Z = \frac{m_{\mathrm{W}}}{cos\theta_{\mathrm{w}}} = \frac{gu}{2cos\theta_{\mathrm{w}}} \tag{5.21}$$

e và G liên hệ với nhau qua:

$$e = \frac{2gg'}{\sqrt{g^2 + 4g'^2}} \qquad G = \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_{\mathrm{W}}^2} \tag{5.22}$$

Thay số liệu vào, ta thu được: $m_W \approx 80\mathrm{GeV}$, $m_Z \approx 90\mathrm{GeV}$.

b. Phân loại lepton và quark trong mô hình W-S

Các hạt quark và lepton được chia thành 3 thế hệ như sau:

- Thế hệ 1: $(e, \nu_e); (u, d)$
- Thế hệ 2: $(\mu, \nu_\mu); (c, s)$
- Thế hệ 3: $(\tau, \nu_\tau); (t, b)$

Độ xoắn: bất kì trường χ thoả điều kiện:

$\gamma_5 \chi = -\chi$: có độ xoắn trái.

$\gamma_5 \chi = +\chi$: có độ xoắn phải.

- Phân loại lepton:

Để có dòng mang điện lepton dạng V-A, người ta sắp các hạt xoắn trái vào lưỡng tuyến của nhóm $SU(2)_L$ còn các hạt xoắn phải vào đơn tuyến như sau:
Lưỡng tuyến trái:

$$(\nu_e, e^-)_L; \quad (\nu_\mu, \mu^-)_L; \quad (\nu_\tau, \tau^-)_L$$

Đơn tuyến phải:

$$e_R^-, \quad \mu_R^-, \quad \tau_R^-$$

Cũng như nhóm $SU(2)$ đồng vị, công thức của toán tử điện tích:

$$Q = I_3 + \frac{Y_{\mathrm{w}}}{2} \tag{5.23}$$

Suy ra siêu tích yếu cho lưỡng tuyến trái và đơn tuyến phải là:

$$Y_{\mathrm{w}_L} = -1, \quad Y_{\mathrm{w}_R} = -2$$

- Phân loại quark:

Lưỡng tuyến trái:

$$(u, d_{\mathrm{c}})_L; \ (c, s_{\mathrm{c}})_L$$

trong đó: d_{c}, s_{c} là pha trộn của quark d và quark s:

$$d_{\mathrm{c}} = d.cos\theta_{\mathrm{c}} + s.sin\theta_{\mathrm{c}},$$

$$s_{\mathrm{c}} = -d.sin\theta_{\mathrm{c}} + s.cos\theta_{\mathrm{c}},$$

với $\theta_{\mathrm{c}} \approx 0,26$ rad: góc Cabbilo.

Suy ra siêu tích yếu cho lưỡng tuyến trái và đơn tuyến phải là:

$$(u, d_{\mathrm{c}})_L Y_{\mathrm{w}_L} = \frac{1}{3}$$

$$(c, s_{\mathrm{c}})_L Y_{\mathrm{w}_L} = \frac{}{3}$$

$$u_R Y_{\mathrm{w}_L} = \frac{4}{3}$$

$$(d_{\mathrm{c}})_R Y_{\mathrm{w}_L} = -\frac{2}{3}$$

$$c Y_{\mathrm{w}_L} = \frac{4}{3}$$

$$(s_{\mathrm{c}})_R Y_{\mathrm{w}_L} = -\frac{2}{3}$$

5.4 PHƯƠNG HƯỚNG THỐNG NHẤT TƯƠNG TÁC

a. Thống nhất lớn

1964, tương tác điện từ-yếu thống nhất dựa trên cơ sở nhóm gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. 1974, John Iliopoulos đề xuất mô hình chuẩn (SM) thống nhất tương tác điện từ + yếu + mạnh dựa trên nhóm gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

b. Lí thuyết dây

Hạt cơ bản có kích thước như những sợi dây. Dây chuyển động vạch ra 1 mặt trong không gian gọi là lá thế. Lí thuyết dây là lí thuyết động học trên lá thế.

Toạ độ mở rộng: $\chi^\mu(\tau, \sigma)$ với τ là thời gian riêng của sợi dây, σ là độ dài xác định vị trí từng điểm trên dây.

Để xác định lí thuyết dây hoàn chỉnh thì số chiều không gian là 10 trong đó có 6 chiều ngoại phụ co lại thành những vòng kín.

Có 5 loại lí thuyết dây thích hợp để bó gọn chiều ngoại phụ.

c. Lí thuyết M

Lí thuyết M là sự mở rộng của lí thuyết dây do tính đối ngẫu dây: kết hợp 2 tính chất tương phản nhau.

5 loại lí thuyết dây được xem là 5 trường hợp giới hạn của lí thuyết M.

Lí thuyết M bao gồm cả hấp dẫn có số chiều D=11.

Hiện nay lí thuyết M chưa hoàn thiện.

BÀI TẬP

1. Tính giao hoán tử:
$$[a(\mathbf{k}), (a^+(\ell))^n], \quad [(a(\mathbf{k}))^n, a^+(\ell)]$$

2. Tính xung lượng và điện tích của trường vô hướng tích điện của các trạng thái sau đây:
$$|\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}\rangle, \quad |\mathbf{k}\widetilde{\ell}\rangle, \quad |\widetilde{\ell}_{\mathbf{1}}\widetilde{\ell}_{\mathbf{2}}\rangle$$

3. Tính giá trị của các toán tử:
$$N = \int d\mathbf{k}a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \quad \widetilde{N} = \int d\mathbf{k}b^+(\mathbf{k})b(\mathbf{k})$$
trong các trạng thái của trường vô hướng tích điện:
$$|\mathbf{p_1}\mathbf{p_2}\rangle, \quad |\mathbf{p}\widetilde{\ell}\rangle, \quad |\widetilde{\ell}_{\mathbf{1}}\widetilde{\ell}_{\mathbf{2}}\rangle$$

4. Tính giá trị của toán tử F trong trường vô hướng tích điện
$$F = \mathbf{k}\left\{xa^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + yb^+(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\right\}$$
trong các trạng thái của trường vô hướng tích điện:
$$|\mathbf{p_1}...\mathbf{p_n}\widetilde{\ell}_1...\widetilde{\ell}_m\rangle$$

5. Chứng minh rằng biểu thức khai triển Fourier của trường vô hướng thoả mãn phương trình:
$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

6. Cho trường spinor, xác định giá trị của các toán tử:
$$N = \sum_{s=1,2}\int d\mathbf{k}a^+(\mathbf{k},s)a(\mathbf{k},s), \quad \widetilde{N} = \sum_{s=1,2}\int d\mathbf{k}b^+(\mathbf{k},s)b(\mathbf{k},s)$$
trong các trạng thái:
$$|\mathbf{p_1}r_1\mathbf{p_2}r_2\rangle, \quad |\mathbf{p}r\widetilde{\ell t}\rangle, \quad |\widetilde{\ell_1 t_1}\ \widetilde{\ell_2 t_2}\rangle$$

7. Xét trường ψ, chứng minh rằng:
   Từ phương trình Dirac: $(-i\gamma_\mu\partial^\mu + m)\psi = 0$, suy ra phương trình $(\Box + m^2)\psi = 0$

8. Cho trường spinor, chứng tỏ:
$$\bar{\psi}(x)\psi(x)$$
   là đại lượng vô hướng.

9. Tính:
$$Sp\hat{a}, \quad Sp\hat{a}\hat{b}\hat{c}, \quad Sp\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$$

10. Cho trường vô hướng trung tính, chứng minh:
$$[\phi(x), \phi(y)]\Big|_{x_0=y_0} = 0$$

11. Giả sử có lưỡng tuyến $SU(2)$ φ_i, ψ_i, chứng minh rằng:
$$\phi = \varphi^{+i}\psi_i$$
    là đơn tuyến.

12. Giả sử có 2 tam tuyến đồng vị $SU(2)$: φ_a, ψ_a, chứng minh rằng:
$$\phi = \varphi_a\psi_a$$
    là đơn tuyến.

Tài liệu tham khảo

[1] Đào Vọng Đức, "Bài giảng Lí thuyết Trường và Mô hình Chuẩn", *(2005)* .

[2] Đặng Văn Soa, "Đối xứng Chuẩn và Mô hình Thống nhất Điện Yếu", *NXB ĐH Sư phạm (2005).*

[3] Hoàng Ngọc Long, "Nhập môn Lí thuyết Trường và Mô hình Thống nhất Tương tác Điện Yếu", *NXB Khoa học và kĩ thuật (2003).*

[4] Hoàng Ngọc Long, "Cơ sở vật lý hạt cơ bản", *NXB Thống kê (2006).*

[5] Nguyễn Ngọc Giao, "Hạt cơ bản", *NXB Trường ĐH Khoa học tự nhiên (1999).*

[6] Nguyễn Xuân Hãn, "Cơ sở Lí thuyết Trường Lượng tử", *NXB ĐHQG Hà Nội (1998).*

[7] Michio Kaku, "Quantum Field Theory", *Oxford University Press (1993).*

[8] Stephen Gasiorowicz, "Elementary Particle Physics", *John WileySons (1966).*