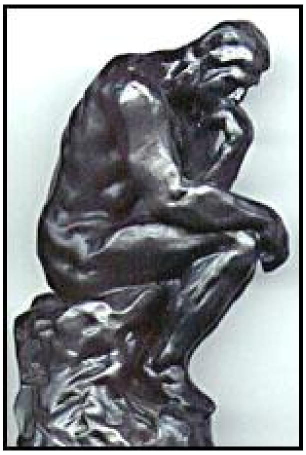
LÝ THUYẾT HẠT CƠ BẢN



Tư duy (Thinker)
(Rodin)

Đã từ lâu loài người thường đặt câu hỏi:

"Thế giới được tạo nên từ những thứ gì?"

và

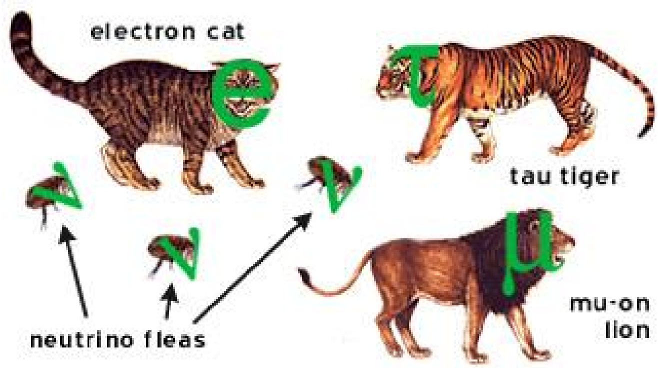
"Cái gì đã giữ chúng lại với nhau?"

Mục tiêu của Lý thuyết hạt cơ bản là trả lời cho câu hỏi này

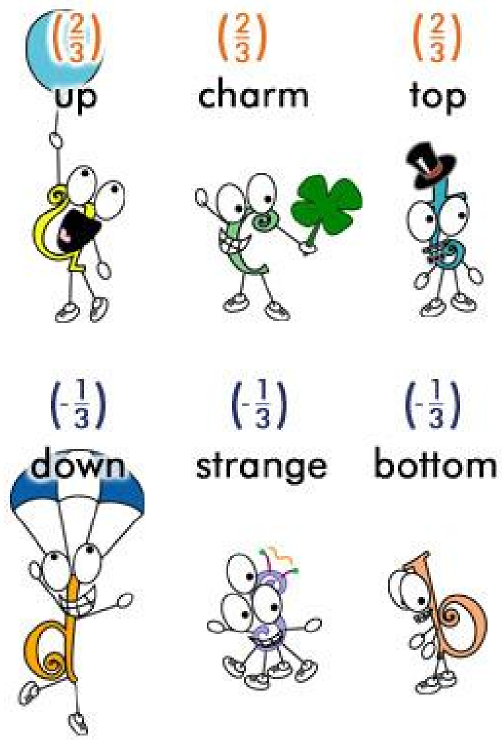
TS. PHẠM THÚC TUYỀN
HÀ NỘI-2004

THẾ GIỚI HẠT CƠ BẢN BAO GỒM

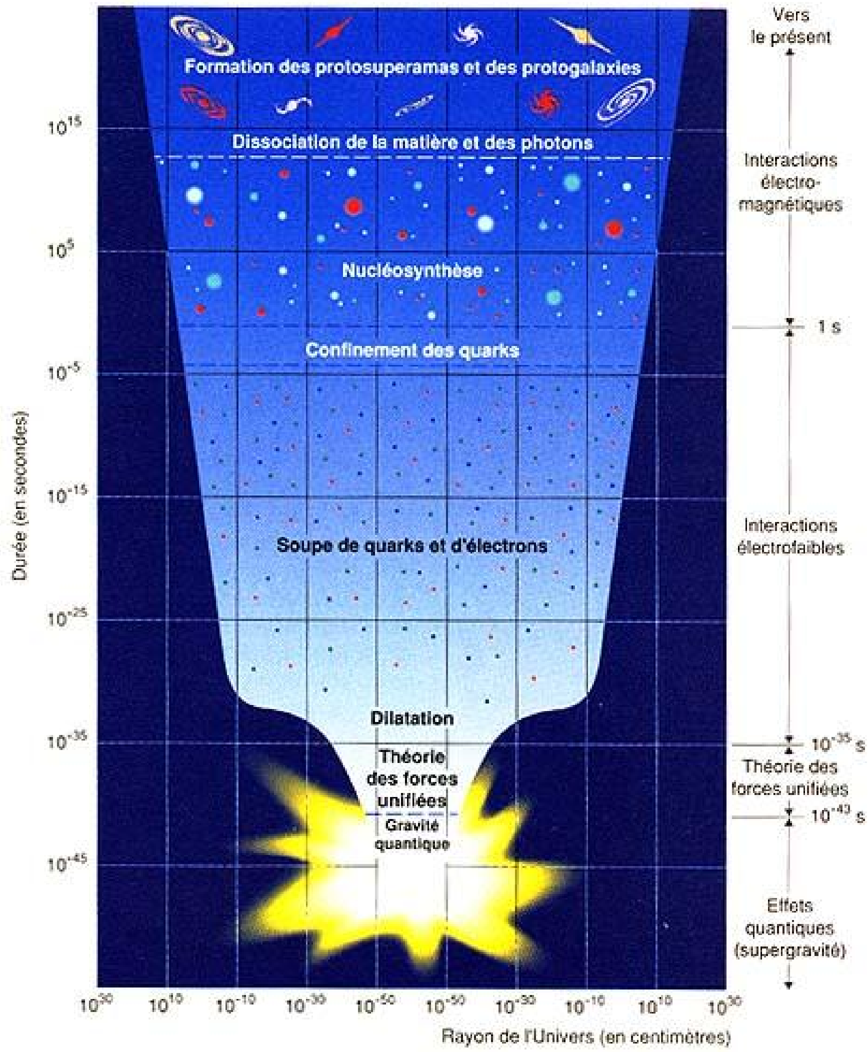
LEPTON



QUARK



SỰ TIẾN TRIỂN CỦA VŨ TRỤ
(TỪ SAU BIG BANG)



PHẦN I
VẬT LÝ HẠT CƠ BẢN

CHƯƠNG I
NHẬP MÔN

1. Hệ đơn vị

Ta sẽ dùng hệ đơn vị nguyên tử, trong đó $\hbar = c = 1$. Khi đó, các thứ nguyên của độ dài, thời gian, khối lượng, năng lượng, xung lượng sẽ được liên hệ với nhau bằng hệ thức sau đây:

$$[l] = [t] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{[E]} = \frac{1}{[p]}$$

Điện tích sẽ không có thứ nguyên. Điều này có thể suy ra từ định luật Coulomb:

$$[F] = \left[\frac{q^2}{l^2}\right] = \left[\frac{p}{t}\right] = \left[\frac{1}{l^2}\right]$$

Như vậy, hằng số cấu trúc tinh tế:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,03604(11)}$$

cũng không có thứ nguyên. Thứ nguyên của thế điện từ, điện từ trường, mật độ Lagrangean sẽ là:

$$[A_0] = [\vec{A}] = [m], \quad [\vec{E}] = [\vec{H}] = [m^2], \quad [L] = [m^4]$$

Thứ nguyên của trường boson và của trường fermion có thể suy ra từ thứ nguyên của mật độ Lagrangean:

$$[m^2 \varphi^* \varphi] = [m\bar{\psi}\psi] = [L] \;\Rightarrow\; [\varphi] = [m],\; [\psi] = [m^{3/2}]$$

Các yếu tích, mầu tích cũng giống như điện tích sẽ không có thứ nguyên.

Hằng số tương tác yếu 4-đường fermion sẽ có thứ nguyên là:

$$[G_F] = [m^{-2}]$$

Nó được suy ra từ thứ nguyên của trường fermion và của mật độ Lagrangean. Thứ nguyên của hằng số tương tác hấp dẫn cũng tương tự như vậy.

Tóm lại, ta chỉ cần một đơn vị đo duy nhất, mà sau đây ta chọn là đơn vị đo năng lượng. Đơn vị đo năng lượng thường dùng là electron-volt: eV. Nó là động năng mà điện tử thu được khi chuyển động dưới hiệu điện thế 1 volt:

$$1\ eV = 1,6021892(46).10^{-19}\, J$$

Vì vật lý hạt cơ bản là vật lý năng lượng cao, nên ta thường dùng bội của đơn vị này để đo năng lượng, đó là kilo, mega-, giga- và tera-electron-volt:

$$1\ TeV = 10^3\ GeV = 10^6\ MeV = 10^9\ keV = 10^{12}\ eV$$

Để chuyển giá trị một đại lượng từ hệ nguyên tử sang hệ đơn vị thông thường, ta dùng một số mốc giá trị quen biết. Khi đó, độ dài, thời gian và khối lượng giữa hai hệ đơn vị sẽ có sự liên hệ như sau:

$$\frac{\hbar}{m_p c} \approx 2.10^{-14} m, \qquad \frac{\hbar}{mc^2} \approx 7.10^{-25} s, \qquad m = 1,673.10^{-27} kg$$

Từ đó suy ra:

$$1\ GeV^{-1} \approx 0,7.19^{-24}\ s \approx 2.10^{-14}\ cm$$

Hằng số tương tác của hấp dẫn rất nhỏ so với hằng số tương tác yếu, cho nên, hầu hết các quá trình gây nên do tương tác hấp dẫn giữa các vi hạt đều có thể bỏ qua. Để dễ hình dung, ta so sánh hai hằng số đó:

$$G_N \approx 6,7.10^{-39}\hbar c^5\ GeV^{-2}$$

$$G_F \approx 1,2.10^{-5}\hbar^3 c^3\ GeV^{-2}$$

Nghĩa là trong hệ $\hbar = c = 1$, tương tác hấp dẫn yếu hơn tương tác yếu đến hơn 33 bậc.

2. Hạt cơ bản và các loại tương tác giữa chúng.

Hạt cơ bản, (còn gọi là hạt nguyên thuỷ, hạt sơ cấp – tiếng Anh là elementary hay fundamental particles) được hiểu là những cấu tử dạng điểm của thế giới vật chất mà bản thân chúng không có cấu trúc bên trong (substructure), ít nhất là trong giới hạn kích thước hiện nay. Giới hạn kích thước hiện nay là cỡ $10^{-16} - 10^{-17} cm$, tức là, năng lượng có thể cung ứng để nghiên cứu sâu vào cấu trúc vật chất là cỡ $1\ TeV$. Trong tương lai gần, sẽ xây dựng các máy gia tốc, sao cho các hạt có thể đạt đến động năng cỡ $100\ TeV$.

Các hạt cơ bản được phân loại theo nhiều tiêu chí. Nếu xét trên vai trò cấu thành và liên kết của thế giới vật chất, thì chúng gồm hai loại: loại cấu thành nên thế giới vật chất và loại truyền tương tác liên kết giữa các hệ vật chất.

I. Hạt cấu thành vật chất. Các hạt loại này đều có spin $s = 1/2$, tức là các fermion. Chúng được phân thành hai nhóm: lepton và quark. Các hạt mà trước đây vài chục năm còn được cho là hạt cơ bản, như proton, neutron, $\pi -$meson (pion),…, thì bây giờ đều được coi là các hệ phức hợp của nhiều quark. Chúng được gọi là các hadron. Khi hệ là quark và phản quark, chúng được gọi là meson, còn khi hệ là ba quark, chúng được gọi là baryon.

a. Lepton và các đặc trưng của chúng

Nhóm lepton gồm: *electron* e^-, *muon* μ^- và *tauon* τ^-, với điện tích $Q = -1$ (tính theo đơn vị điện tích e). Mỗi loại được gọi là một hương lepton (flavor).

Mỗi hương lepton đều có tương ứng kèm theo một hạt trung hoà điện tích, gọi là neutrino: ν_e *neutrino electron*, ν_μ *neutrino muon* và ν_τ *neutrino tauon*.

Lepton tìm thấy đầu tiên là electrnho. Nó có khối lượng rất nhỏ nên họ của nó gọi là lepton, tức là hạt nhẹ. Tuy vậy, những lepton tìm được sau này là muon (hay mu-on) hoặc tauon (hay tau) đều không nhẹ tý nào. Trong bức tranh mô tả thế giới các lepton, nếu electron được ví như con mèo (cat), thì muon và tauon đã là con hổ và sư tử (tiger and lion). Các neutrino chỉ đáng là các con bọ chét (fleas).

Tên hạt	**Spin**	**Điện tích**	**Khối lượng**	**Thấy chưa?**
Electron	1/2	-1	.0005 GeV	Rồi
Electron neutrino	1/2	0	0?	Rồi
Muon	1/2	-1	.106 Gev	Rồi
Muon neutrino	1/2	0	<.00017 GeV	Rồi
Tauon	1/2	-1	1.8 Gev	Rồi
Tauon neutrino	1/2	0	<.017 GeV	Rồi

Bảng 1. Các hương lepton (lepton flavors)

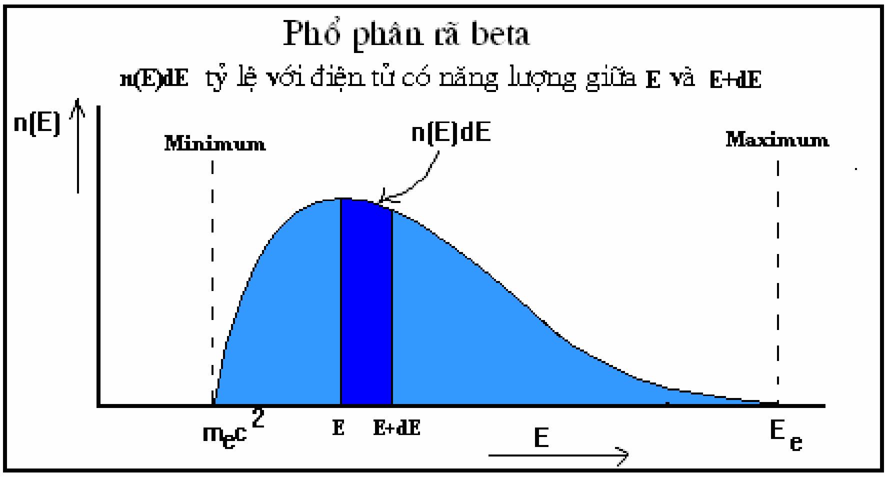
Neutrino electron được Fermi giả định tồn tại vào năm 1930 để giải thích vì sao electron trong phân rã beta không có động năng xác định. Thực vậy, giả sử hạt nhân A phát xạ electron và biến thành hạt nhân B, thì từ sự bảo toàn 4-moment xung lượng $p_B = p_A - p$, trong đó p là xung lượng của electron, và nếu xét hệ quy chiếu trong đó hạt nhân phân ra đứng yên, ta có:

$$m_B^2 = m_A^2 + m_e^2 - 2m_A E$$

từ đó suy ra:

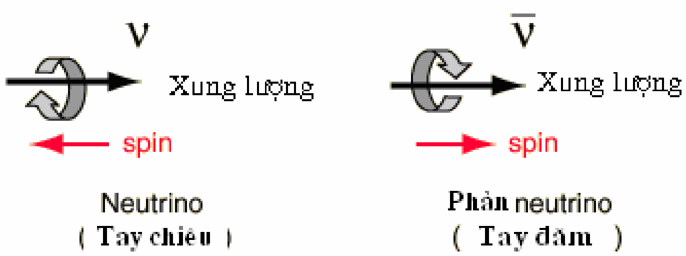
$$E = \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_e^2}{2m_A}$$

nghĩa là, năng lượng của electron phải có giá trị xác định. Tuy nhiên thực nghiệm chứng tỏ rằng, các electron phát ra trong quá trình phóng xạ, năng lượng của chúng không có giá trị xác định mà trải dài từ giá trị cực tiểu $m_e c^2$ đến một giá trị cực đại nào đó. Sự phân bố của số electron theo năng lượng được cho bằng đồ thị bên dưới. Như vậy, năng lượng có vẻ không bảo toàn toàn. Thậm chí Niels Bohr đã sẵn sàng từ bỏ định luật bảo toàn năng lượng. Thế nhưng Pauli đã ít cực đoan hơn bằng cách giả định có một hạt thứ hai được phát ra cùng một lúc với electron và chính phần năng lượng thiếu hụt ở electron là năng lượng của hạt này. Do nó trung hoà điện nên Pauli định gọi là **neutron**, tuy nhiên Fermi đã đề nghị gọi là neutrino, vì trước đó neutron đã được Chadwick tìm thấy (1932). Mãi đến 1953, neutrino mới được quan sát thấy bằng thực nghiệm.



Hạt khó nắm bắt này không có điện tích, không có khối lượng hoặc khối lượng rất nhỏ, nên có thể xuyên qua một lớp vật chất dày mà không hề có tương tác. Nó có thể xuyên qua một lớp nước dầy bằng mười lần khoảng cách từ trái đất đến mặt trời. Trong mô hình Big Bang chuẩn tắc, các neutrino chiếm đa số sau thời điểm hình thành vũ trụ. Mật độ neutrino tàn dư là cỡ 100 hạt trong một cm^3 và có nhiệt độ cỡ 2K (Simpson).

Neutrino tham gia tương tác yếu. Tuy nhiên, thực nghiệm chứng tỏ rằng, hướng tương đối giữa spin và xung lượng của hạt là cố định. Hạt có spin ngược chiều với xung lượng được gọi là hạt tay chiêu (left-handed), trường hợp ngược lại, được gọi là hạt tay đăm (right-handed).



Neutrino, là hạt tay chiêu, spin của nó luôn ngược chiều với xung lượng, còn phản neutrino là hạt tay đăm, spin của nó luôn cùng chiều với xung lượng. Khái niệm tay đăm hoặc tay chiêu không hoàn toàn có ý nghĩa cho các hạt có khối lượng, như electron chẳng hạn. Thực vậy, nếu electron có spin từ trái sang phải và hạt cũng chuyển động sang phải, thì nó phải là hạt tay đăm. Tuy nhiên khi chuyển sang hệ quy chiếu chuyển động nhanh hơn electron, vận tốc của nó lại hướng về bên trái trong khi chiều của spin không đổi, nghĩa là trong hệ quy chiếu mới, điện tử lại là hạt tay chiêu. Đối với neutrino, do nó chuyển động với vận tốc ánh sáng hoặc rất gần với vận tốc ánh sáng, ta không thể gia tốc để có vận tốc lớn hơn nó được, vì vậy, tính tay đăm hoặc tay chiêu không thể thay đổi được. Ta thường nói rằng, neutrino có "tính chẵn lẻ riêng", Tất cả chúng đều là hạt tay chiêu. Điều này kéo theo, tương tác yếu phát ra neutrino hoặc phản neutrino sẽ vi phạm bảo toàn chẵn lẻ. Tính chất là tay chiêu hoặc tay đăm, thường được gọi là "tính xoắn". Độ xoắn của một hạt được định nghĩa bằng tỷ số s_z/s. Với định nghĩa như vậy, độ xoắn sẽ bằng +1 đối với phản neutrino tay đăm và -1 cho neutrino tay chiêu. nếu độ xoắn bảo toàn, điều này đồng nghĩa với neutrino có khối lượng bằng không.

Theo Cơ học lượng tử tương đối tính, các hạt đều có các phản hạt. Tương ứng với 6 hạt lepton sẽ có 6 phản hạt: e^+, $\tilde{\nu}_e$, μ^+, $\tilde{\nu}_\mu$, τ^+, $\tilde{\nu}_\tau$. Phản electron e^+ được gọi là positron.

Các hạt neutrino, electron và positron là các hạt bền; muon và tauon là các hạt không bền. Thời gian sống của chúng chỉ khoảng vài phần triệu giây, $t_\mu \approx 2,20.10^{-6} s$, $t_\tau \approx 2,96.10^{-13} s$.

Nói chung hạt có khối lượng nhất định và có định vị trong không gian sẽ không phải là hạt bền vững, bởi vì việc phân rã thành một số hạt nhẹ hơn sẽ có nhiều khả năng khác nhau để phân bố năng lượng, và như vậy, sẽ có entropy lớn hơn. Quan điểm này thậm chí còn được phát biểu dưới dạng một nguyên lý, gọi là "nguyên lý cực đoan" (totalitarian principle). Theo nguyên lý này: "mọi quá trình không bị cấm đều phải xảy ra". Do đó, một quá trình đáng lý phải xẩy ra, nhưng lại không quan sát thấy, sẽ chứng tỏ rằng, nó bị ngăn cấm bởi một định luật bảo toàn nào đó. Quan điểm này tỏ ra rất hữu hiệu khi sử dụng để phát hiện các quy luật của quá trình phân rã.

Tự nhiên có các quy luật riêng cho tương tác và phân rã. Các quy tắc đó được tổng kết dưới dạng những định luật bảo toàn. Một trong các định luật bảo toàn quan trọng nhất là định luật bảo toàn số lepton và số baryon. Định luật này khẳng định rằng, mỗi loại lepton hoặc baryon đều có một số lượng tử riêng, gọi là số lepton, và số baryon. Trong một quá trình phân rã, tổng đại số của số lepton và số baryon là một đại lượng bảo toàn.

Một ví dụ về tầm quan trọng của định luật bảo toàn số lepton có thể nhìn thấy trong quá trình phân rã β của neutron trong hạt nhân. Sự có mặt của neutrino trong sản phẩm phân rã là nhu cầu để năng lượng bảo toàn. Tuy nhiên, nếu gán cho electron và neutrino electron số lượng tử lepton bằng 1, cho các hạt phản: positron và phản neutrino, bằng -1, thì trong hai phản ứng giả định:

$$n \not\rightarrow p^+ + e^-$$
$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$$

phản ứng đầu bị cấm bởi không bảo toàn số lepton, trong khi phản ứng thứ hai để thoả mãn điều kiện bảo toàn số lepton, hạt đi kèm với electron phải là phản neutrino chứ không phải neutrino.

Thêm vào nữa, việc quan sát thấy hai quá trình phân rã sau đây:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$
$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

chứng tỏ rằng, mỗi hương lepton đều có số lepton riêng rẽ. Phản ứng thứ nhất tuân theo mô hình phân rã thành hai hạt, vì năng lượng của μ^- là hoàn toàn xác định, điều này chỉ chứng tỏ rằng, neutrino có mặt. Phản ứng thứ hai phải tuân theo mô hình phân rã ba hạt, cho nên, neutrino electron khác neutrino muon. Kết quả là, số lượng tử lepton cho mỗi hương lepton đều phải bảo toàn:

$$L_e = \begin{cases} 1 & cho\ e^-,\ \nu_e \\ -1 & cho\ e^+,\ \tilde{\nu}_e \end{cases} \quad L_\mu = \begin{cases} 1 & cho\ \mu^-,\ \nu_\mu \\ -1 & cho\ \mu^+,\ \tilde{\nu}_\mu \end{cases} \quad L_\tau = \begin{cases} 1 & cho\ \tau^-,\ \nu_\tau \\ -1 & cho\ \tau^+,\ \tilde{\nu}_\tau \end{cases}$$

Các phân rã không bảo toàn số lepton kiểu như:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$$
$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + e^+ + e^-$$

không quan sát thấy trong thực tế.

b. Quark và các đặc trưng của chúng

Đến nay, đã biết 6 quark khác nhau. Để phân biệt, mỗi loại cũng được gọi là một hương. Như vậy, quark có 6 hương, ký hiệu là: u, d, s, c, b và t. Điện tích của chúng là phân số. Bảng dưới đây sẽ cho tên, khối lượng và một số thông tin về chúng

Nếu như lepton có số lượng tử lepton, quark cũng có một số lượng tử cộng tính, gọi là số baryon, ký hiệu là B. Mỗi hương quark đều có số baryon bằng $1/3$. Các phản quark có số baryon bằng $-1/3$.

Từ hai hương u và d có thể tạo ra được proton và neutron, tức là hạt nhân nguyên tử của mọi chất.

Năm 1947, khi nghiên cứu tương tác của các tia vũ trụ, đã tìm thấy một hạt có thời gian sống dài hơn dự kiến: 10^{-10} s thay cho 10^{-23} s, trong số các sản phẩm sau va chạm giữa proton và hạt nhân. Hạt này được gọi là hat lambda (Λ). Thời gian sống của nó dài hơn rất nhiều so với dự kiến, đã được gọi là "phép lạ", và từ đó dẫn đến giả thiết về sự tồn tại hương quark thứ ba trong thành phần của lambda. Hương quark này được gọi là "quark lạ"- strange quark, ký hiệu là s. Hạt lambda sẽ là một baryon được tạo thành từ ba quark: up, down và strange.

Tên hạt	Spin	Điện tích	Khối lượng	Thấy chưa?
Up quark (lên)	1/2	2/3	.005 GeV	Gián tiếp
Down quark (xuống)	1/2	-1/3	.009 GeV	Gián tiếp
Strange quark (lạ)	1/2	-1/3	.17 GeV	Gián tiếp
Charm quark (duyên)	1/2	2/3	1.4 GeV	Gián tiếp
Bottom quark (đáy)	1/2	-1/3	4.4 GeV	Gián tiếp
Top quark (đỉnh)	1/2	2/3	174 GeV	Gián tiếp

Bảng 2. Các hương quark (quark flavors)

Thời gian sống được dự kiến cho lambda là cỡ 10^{-23} s, bởi vì lambda là baryon, nên nó sẽ phân rã do tương tác mạnh. Việc lambda có thời gian sống dài hơn dự kiến chắc chắn phải do sự chi phối của một định luật bảo toàn mới, đó là định luật "bảo toàn số lạ".

Hương s có số lượng tử số lạ $S=-1$. Sự có mặt của một quark lạ trong lambda làm cho nó có số lạ: $S=-1$. Các phản hadron tương ứng với nó sẽ có số lạ $S=+1$. Các quark u,d sẽ có số lạ bằng không.

Định luật bảo toàn số lạ sẽ ngăn cấm các phản ứng phân rã do tương tác mạnh và tương tác điện từ mà không bảo toàn số lạ. Nhưng trong tất cả các phản ứng phân rã của lambda thành các sản phẩm nhẹ hơn:

$$\Lambda \to \pi^- + p\,, \qquad \Lambda \to \pi^+ + n$$

$$\Lambda \to e^- + \tilde{\nu}_e + p\,, \qquad \Lambda \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu + p$$

định luật bảo toàn số lạ đều bị vi phạm. Các hạt sản phẩm phân rã có số lạ bằng không. Vì vậy, sự phân rã của Λ phải gây nên bởi tương tác khác, yếu hơn nhiều so với tương tác điện từ và tương tác mạnh, gọi là tương tác yếu. Tương tác yếu sẽ biến quark lạ thành quark up và down. Hệ quả là, lambda bị phân rã thành các hạt không lạ. Do tương tác rất yếu nên lambda có thời gian sống dài hơn dự kiến.

Trong các quá trình:

$$\underset{S=-1}{\overset{uds}{\Lambda^0}} \to \underset{\neq\ 0}{\overset{uud}{p}} + \underset{+\ 0}{\overset{\bar{u}d}{\pi^-}} \qquad \underset{S=-1}{\overset{uds}{\Lambda^0}} \to \underset{\neq\ 0}{\overset{udd}{n}} + \underset{+\ 0}{\overset{\frac{\bar{u}u+\bar{d}d}{\sqrt{2}}}{\pi^0}}$$

quark lạ được biến đổi thành quark u và d nhờ một boson trung gian là W^-:

Năm 1974, lại phát hiện được một meson mới gọi là hạt J/Psi (J/ψ). Hạt này có khối lượng cỡ 3100 MeV, lớn hơn gấp ba lần khối lượng proton. Đây là hạt đầu tiên có trong thành phần một loại hương quark mới, gọi là quark duyên-charm quark ký hiệu là c. Hạt J/Psi được tạo nên từ cặp quark và phản quark duyên. Quark duyên có số lượng tử duyên $C=+1$. Phản quark duyên có số duyên bằng -1, còn các quark khác có số duyên bằng không. Quark duyên cùng với các quark thông thường u,d, tạo nên các hạt cộng hưởng có duyên.

Meson nhẹ nhất có chứa quark duyên là D meson. Nó là một ví dụ điển hình của quá trình chuyển đổi từ quark duyên sang quark lạ chi phối bởi tương tác yếu, và do quá trình chuyển đổi này mà D meson phân rã thành các hạt nhẹ hơn.

Baryon nhẹ nhất có quark duyên được gọi là lambda cộng, ký hiệu là Λ_c^+. Nó có cấu trúc quark $(u\ d\ c)$ và có khối lượng cỡ 2281 MeV.

Năm 1977, nhóm thực nghiệm dưới sự chỉ đạo của Leon Lederman tại Fermilab (Fermi National Accelerator Laboratory ở Batavia, Illinois (gần Chicago)), đã tìm thấy một hạt cộng hưởng mới với khối lượng cỡ 9,4 GeV. Hạt này đã được xem như trạng thái liên kết của cặp quark mới là quark đáy-phản quark đáy, bottom-antibottom quark, $b,\bar{b}$ và được gọi là meson Upsilon Y. Từ các thí nghiệm này suy ra khối lượng của quark đáy b là cỡ 5 GeV. Phản ứng được nghiên cứu đã là:

$$p + N \to \mu^+ + \mu^- + X$$

trong đó N là hạt nhân của đồng đỏ hoặc platinum. Hương quark đáy có một số lượng tử mới, đó là số đáy $B_q = -1$. Đối với các hương quark khác, số đáy bằng không.

Các quark hình như tạo với nhau thành các đa tuyến trong lý thuyết tương tác yếu. Chúng tạo thành các lưỡng tuyến yếu, như (u,d), (c,s). Khi cần đưa vào quark đáy b để giải thích sự tồn tại của hạt Upsilon, thì tự nhiên sẽ nảy sinh vấn đề tồn tại một hạt quark song hành với nó. Hạt này được gọi là quark đỉnh- top quark, ký hiệu là t. Vào tháng 4 năm 1995, sự tồn tại của một hương quark đỉnh t, đã được khẳng định. Bằng máy gia tốc Tevatron thuộc viện Fermilab đã tạo ra proton cỡ 0.9 TeV và cho nó va chạm trực tiếp với phản proton có năng lượng tương tự. Bằng cách phân tích các sản phẩm va chạm, đã tìm được dấu vết của t. Kết quả này cũng được khẳng định sau khi sử lý hàng tỷ kết quả thu được trong quá trình va chạm proton-phản proton với năng lượng cỡ 1.8 TeV.

Khối lượng của top quark cỡ vào khoảng 174.3 +/- 5.1 GeV. Nó lớn hơn 180 lần khối lượng của proton và gần hai lần khối lượng của hạt cơ bản nặng nhất vừa tìm được, meson vectơ Z^0 (Z^0 là hạt truyền tương tác yếu, có khối lượng cỡ 93 GeV). Quark đỉnh có số lượng tử mới đó là số đỉnh. Nó bằng $T_q = +1$ cho quark đỉnh, bằng -1 cho hạt phản tương ứng. Số đỉnh sẽ bằng không cho các quark khác.

Ngoài những số lượng tử như số baryon, số lạ, số duyên, số đỉnh và số đáy, các quark còn có một số lượng tử khác, gọi là isospin. Isospin được đưa vào để mô tả các nhóm hạt có tính chất gần giống nhau, có khối lượng xấp xỉ nhau như proton và neutron. Nhóm hai hạt này, còn gọi là lưỡng tuyến, được nói rằng, có isospin bằng 1/2, với hình chiếu +1/2 cho proton và -1/2 cho neutron. Ba hạt $\pi -$meson tạo thành một bộ ba, hay một tam tuyến, rất phù hợp với isospin 1. Hình chiếu +1 cho hạt $\pi^+ -$meson, 0 và -1 cho các pion trung hoà và âm.

Isospin thực chất liên quan đến tính độc lập điện tích của tương tác mạnh. Đối với tương tác mạnh, bất kỳ thành phần nào của lưỡng tuyến isospin proton-neutron cũng tương đương nhau: cường độ "hấp dẫn mạnh" của proton-proton, proton-neutron, neutron-neutron đều giống hệt nhau.

Ở cấp độ quark, quark up và down sẽ tạo thành một lưỡng tuyến isospin, tức $I = 1/2$. u sẽ tương ứng với hình chiếu $I_3 = 1/2$, trong khi d tương ứng với $I_3 = -1/2$. Các quark khác s, c, b, t có isospin bằng 0. Chúng được gọi là các đơn tuyến isospin.

Isospin được gắn với một định luật bảo toàn, đó là bảo toàn isospin: Tương tác mạnh bảo toàn isospin. Ví dụ, quá trình sau đây:

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \eta^0$$
$$I = 1 \neq 1/2 + 0 \quad \text{Isospin}$$

bị cấm, cho dù nó bảo toàn điện tích, spin, hay số baryon. Nó bị cấm vì không bảo toàn isospin.

Sự bảo toàn số lạ, số duyên, số đáy, số đỉnh thực ra không phải là các định luật bảo toàn độc lập. Chúng được xem như một sự kết hợp của định luật bảo toàn điện tích, isospin và số baryon. Đôi khi chúng được diễn tả thông qua một đại lượng, gọi là siêu tích Y, định nghĩa bởi:

$$Y = B + S + C + B_q + T_q$$

Khi đó s, c, b, t sẽ có siêu tích bằng: $-2/3,\ 4/3,\ -2/3,\ 4/3$.

Từ siêu tích và isospin, điện tích của các quark thoả mãn hệ thức sau đây của Gell-Man, Nishijima:

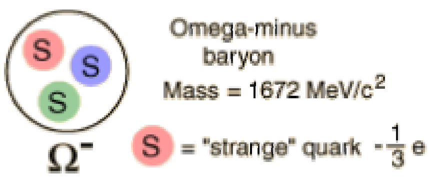
$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

$$quark\ \ u:\ \ Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$quark\ \ d:\ \ Q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$quark\ \ s,\ c,\ b,\ t:\ \ Q = \frac{1}{2}Y = -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$$

Các quark có spin $1/2$, vậy chúng là các fermion. Theo nguyên lý loại trừ Pauli, không thể có hai fermion giống nhau trong cùng một trạng thái. Tuy nhiên, proton lai tạo thành từ hai quark u và một quark d, Δ^{++} tạo nên từ ba quark u, Δ^{-} tạo nên từ ba quark d, Ω^{-1} tạo nên từ ba quark s,…. Để bảo đảm thoả mãn nguyên lý loại trừ Pauli, mỗi hương quark phải có thêm một số lượng tử cộng tính khác, được gọi là sắc (hoặc mầu) (color). Có tất cả 3 mầu, thường quy ước là đỏ (red), xanh (blue), vàng (yellow). Các phản quark có các màu ngược lại. Nếu ba quark với ba màu khác nhau, hoặc một quark với một phản quark kết hợp với nhau, ta sẽ thu được một hạt không màu. Cho đến nay, vì chưa quan sát thấy hạt có màu trong Tự nhiên, nên các quark được giả thiết là bị cầm tù trong các hadron. Ví dụ hạt Ω^{-} chẳng hạn. Nó được tạo thành từ ba quark lạ. Để thoả mãn nguyên lý loại trừ Pauli, chúng phải có ba màu khác nhau:



II. Loại vật chất truyền tương tác.

1. Các loại tương tác cơ bản

Chúng là các hạt truyền tương tác giữa các cấu tử vật chất. Cho đến nay có thể cho rằng, giữa thế giới của các hạt vật chất có bốn loại tương tác cơ bản:

- Tương tác hấp dẫn, liên kết tất cả các hạt có khối lượng trong vũ trụ,
- Tương tác điện từ, xẩy ra giữa các hạt mang điện tích, nhờ nó, có cấu tạo nguyên tử và phân tử,
- Tương tác mạnh, liên kết các quark có màu để tạo thành hadron, trong đó có proton, neutron, các hạt tạo nên hạt nhân nguyên tử,
- Tương tác yếu, gây nên đa số các hiện tượng phóng xạ, trong đó có phóng xạ β.

Trừ tương tác hấp dẫn, tất cả các tương tác khác đều được truyền bằng các hạt boson, có spin $s = 1$. Photon γ, truyền tương tác điện từ, 8 hạt gluon g_α truyền tương tác mạnh, 3 hạt $W^\pm$ và Z truyền tương tác yếu.

Do ba tương tác mạnh, yếu, điện từ đều được truyền bằng các hạt boson, nên đã có nhiều thử nghiệm xây dựng lý thuyết hấp dẫn tương tự như ba loại tương tác kia. Khi đó, boson truyền tương tác hấp dẫn sẽ được gọi là graviton. Tuy nhiên , nếu tồn tại, graviton phải có spin $s = 2$.

Photon là hạt không khối lượng, trung hoà điện tích, cho nên chúng không tự tương tác. Lý thuyết mô tả tương tác điện từ giữa các hạt mang điện được gọi là Điện động lực học lượng tử, viết tắt là *QED* (Quantum Electrodynamics). Vì photon không tự tương tác, hệ phương trình cơ bản của *QED* là tuyến tính. Do photon có khối lượng bằng không, nên bán kính tương tác điện từ là vô hạn.

BOSON: Hạt truyền tương tác, Spin = 1...					
Boson	**Tương tác**	**Bán kính**	**Cường độ**	**Hạt tham gia tương tác**	**Lượng tích**
graviton ?	Hấp dẫn	infinite	10^{-38}	Tất cả các hạt	Khối lượng, năng lượng
photon	Điện từ	infinite	10^{-2}	Tất cả các fermion trừ neutrino	Điện tích Q
8 **gluon**	Mạnh	10^{-15} m.	1	Tất cả các quark	Mầu tích

3 boson: **W^+ W^- Z^0**	Yếu	10^{-18} m.	10^{-7}	Tất cả các fermion	Yếu tích

Bảng 3. Boson truyền các tương tác cơ bản

Gluon không khối lượng, không điện tích, nhưng lại có màu, do đó, chúng tự tương tác mạnh. Lý thuyết mô tả tương tác mạnh giữa các hạt có màu sắc (tức là có màu tích), được gọi là Sắc động lực học lượng tử, và viết tắt là QCD (Quantum Chromodynamics). Do gluon tự tương tác, hệ phương trình cơ bản của QCD là phi tuyến tính. gluon tuy có khối lượng bằng không, những bán kính tương tác mạnh vẫn hữu hạn. Nguyên nhân là do quark bị cầm tù trong các hadron. Nói chung, bán kính tác dụng của tương tác mạnh vào cỡ $10^{-13}cm$. Giá trị này, còn gọi là 1 fermi, ký hiệu là fm, tương ứng với kích thước đặc trưng của các hadron nhẹ nhất.

Nguồn của tương tác yếu được gọi là yếu tích. Các hạt truyền tương tác yếu $W^{\pm}$, Z có khối lượng, có điện tích và có yếu tích, do đó chúng cũng tự tương tác. Hạt $W^{\pm}$ có điện tích bằng ± 1, Z có điện tích bằng không.

Lý thuyết mô tả tương tác yếu của các hadron, ban đầu, là lý thuyết hiện tượng luận do Fermi đề xuất. Lý thuyết này, được gọi là tương tác bốn đường fermion. Sau đã được Feynman và Gell-Mann bổ xung thêm, để được Lý thuyết dòng × dòng, và để phản ánh tính vi phạm chẵn lẻ của tương tác yếu, dòng có dạng $V - A$, tức là hiệu của hai số hạng, một là giả vectơ và một là vectơ. Lý thuyết này đã giải thích được phần lớn các kết quả thực nghiệm thu được thời đó. Nó là lý thuyết không tái chuẩn hoá được, nghĩa là, khi tính đến các bổ chính bậc cao, nó chứa các số hạng vô hạn.

Lý thuyết tương tác điện từ-yếu (electroweak theory), có mục đích là xây dựng một lý thuyết tương tác yếu giống hệ như QED (quantum electrodynamics). Hai đòi hỏi đối với lý thuyết tương tác yếu là:

- Phải bất biến chuẩn (gauge invariant), nghĩa là, chúng diễn ra như nhau ở mọi điểm trong không-thời gian, và
- Phải tái chuẩn hoá được.

Trong những năm 1960 Sheldon Glashow, Abdus Salam, và Steven Weinberg, độc lập nhau, đã xây dựng được lý thuyết bất biến gauge cho tương tác yếu trong đó có hàm chứa cả tương tác điện từ. Lý thuyết đã dự đoán tồn tại 4 boson truyền tương tác, hai hạt tích điện và hai hạt trung hoà điện. Bán kính tác dụng rất ngắn của lực yếu, kéo theo các boson này phải có khối lượng. Ta nói rằng, đối xứng cơ sở bị vi phạm tự phát do một cơ chế nào đó, và điều này đã làm cho một phần của boson truyền trở nên có khối lượng. Cơ chế này kéo theo một tương tác phụ với một trường trước đây chưa từng biết, gọi là trường Higgs, tràn ngập khắp không gian.

Năm 1971 G. 't Hooft và M. Veltman đã chứng minh rằng, lý thuyết thống nhất điện từ-yếu của Glashow, Salam, và Weinberg là tái chuẩn hoá được. Sau đó, thực nghiệm đã phát hiện được các hạt truyền tương tác yếu là $Z-$boson trung hoà và $W-$boson tích điện: khối lượng của chúng trùng với giá trị mà lý thuyết dự kiến.

2. Mẫu chuẩn tắc-Standard model

Đây là lý thuyết kết hợp hai lý thuyết của các hạt cơ bản thành một lý thuyết duy nhất mô tả tất cả các tương tác dưới mực nguyên tử, trừ tương tác hấp dẫn. Hai thành phần của Mô hình chuẩn tắc là Lý thuyết điện từ-yếu, mô tả tương tác điện từ và yếu, và QCD, Sắc động lực học lượng tử, mô tả tương tác mạnh. Cả hai lý thuyết đều là lý thuyết bất biến gauge, trong đó tương tác được thực hiện bởi các boson truyền có spin bằng 1. Nhóm đối xứng chuẩn là $G = SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Bên cạnh các boson truyền lực, Mô hình chuẩn tắc còn chứa hai họ hạt tạo nên vật chất có spin bằng $1/2$. Các hạt này là quark và lepton, và chúng có 6 hương, phân chia thành các cặp và nhóm lại thành ba "thế hệ" có khối lượng tăng dần. Vật chất thông thường được tạo nên từ các thành viên của thế hệ nhẹ nhất: "up" và "down" quark tạo nên proton và neutron của hạt nhân nguyên tử; electron quay trên các quỹ đạo của nguyên tử và tham gia vào việc kết hợp nguyên tử để tạo thành phân tử hoặc các cấu trúc phức tạp hơn; electron-neutrino đóng vai trò quan trọng trong tính chất phóng xạ và ảnh hưởng đến tính bền vững của vật chất. Các thế hệ quark và lepton nặng hơn được phát hiện khi nghiên cứu tương tác của hạt ở năng lượng cao, cả trong phòng thí nghiệm với các máy gia tốc lẫn trong các phản ứng tự nhiên của các hạt trong tia vũ trụ năng lượng cao ở tầng trên của khí quyển.

Mô hình chuẩn tắc có rất nhiều ưu điểm và các kết quat thực nghiệm. Tuy nhiên cũng không ít những điểm yếu còn sót lại. Mô hình chuẩn tắc hiện thời không thể giải thích được vì sao tồn tại ba thế hệ của quark và lepton. Nó cũng không dự đoán được khối lượng của chúng, cũng như cường độ của các tương tác. Hy vong rằng, trong tương lai sẽ xây dựng được một lý thuyết hoàn chỉnh hơn, từ đó chỉ ra cách thức để tương tác thống nhất suy biến để trở thành các tương tác thành phần, khi năng lượng giảm. Một lý thuyết như vậy cũng đã được xây dựng. Nó được gọi là Lý thuyết thống nhất lớn - Grand unified theory (GUT). Nhóm đối xứng chuẩn là nhóm $SU(5)$.

FERMION: Hạt tạo nên vật chất, Spin = 1/2...			
QUARKS Q = 2/3	(up) quark lên **u**	(charm) quark duyên **c**	(top) quark đỉnh **t**
QUARKS Q = -1/3	(down) quarle xuống **d**	(strange) quark lạ **s**	(bottom) quark đáy **b**
LEPTONS Q = -1	electron e^-	muon μ^-	tauon τ^-
LEPTONS Q = 0	neutrino electron ν_e	neutrino muon ν_μ	neutrino tauon ν_τ

Bảng 4. Ba thế hệ của quark và lepton trong Mô hình chuẩn tắc

Trong Mô hình chuẩn tắc, khối lượng của các hạt neutrino đều bằng không. Dự đoán này chỉ phù hợp với các kết quả thực nghiệm trước đây. Ngày nay, có nhiều dấu hiệu chứng tỏ rằng, neutrino có khối lượng rất nhỏ nhưng khác không. Nếu điều này là sự thực, thì đó là dấu hiệu phải xây dựng một lý thuyết mới cho các hạt cơ bản. Trong Lý thuyết thống nhất lớn, khối lượng của neutrino được dự đoán là rất nhỏ.

Khối lượng rất lớn của quark đỉnh lớn hơn khối lượng của bất kỳ hạt nào đã biết. Vì sao quark đỉnh lại nặng như vậy, vì sao tự nhiên lại lựa chọn lặp lại ba lần cấu trúc thế hệ của fermion. Đó là những vấn đề của vật lý năng lượng cao. Có thể chìa khoá để tìm câu trả lời cho các vấn đề này, chính là việc quark đỉnh có khối lượng rất lớn.

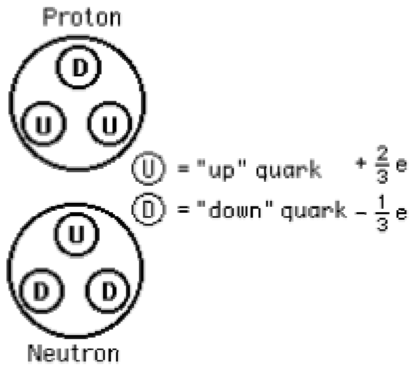
3. Hadron

Trược đây các hadron được coi là các hạt cơ bản. Tuy nhiên, đến khi tìm thấy hàng trăm hạt hadron, thì việc coi chúng là các hạt phức hợp có cấu trúc bên trong, tỏ ra là hợp lý hơn cả. Theo Murray Gell-Mann và George Zweig (1964), hadron được cấu thành từ các quark. Các baryon, trong đó có proton và neutron, được tạo nên từ ba quark:

$$p \sim uud, \qquad n \sim udd$$

còn các meson, trong đó có $\pi -$meson, được tạo thành từ một quark và một phản quark:

$$\pi^{+} \sim u\tilde{d}, \qquad \pi^{-} \sim d\tilde{u}, \qquad \pi^{0} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\tilde{u} - d\tilde{d}\right)$$



Các hadron tương tác với nhau thông qua lực hạt nhân, như kiểu lực “tàn dư” của tương tác mạnh, giống như lực “val der Walls” của tương tác điện từ tạo nên phân tử. Từ các đặc trưng tĩnh của quark, có thể suy ra các đặc trưng của hadron.

Nhóm meson: Nhóm meson gồm các hạt có spin $s = 0$, 1, ..., có số baryon bằng không. Chúng là phức thể gồm một quark và một phản quark. Các meson tìm thấy đầu tiên là $\pi -$meson. Chúng gồm ba hạt, $\pi^{\pm}$ có điện tích bằng ± 1, và một hạt trung hoà điện tích, đó là π^{0}. Các hạt này được giả định là truyền tương tác hạt nhân giữa các nucleon. Ví dụ:

$$p \rightarrow \pi^{+} + n$$

$$n \rightarrow \pi^{-} + p$$

Tuy có spin bằng không, nhưng hàm sóng mô tả chúng không phải là vô hướng thực sự. Chúng bất biến đối với nhóm Lorentz, nhưng đổi dấu đối với phép nghịch đảo không gian. Vì vậy, chúng được gọi là các giả vô hướng. Để đặc trưng cho tính thực sự hoặc giả vô hướng, ta dùng số lượng tử gọi là tính chẵn lẻ P. Gọi $\widehat{P}$ là phép nghịch đảo không gian: $\widehat{P}\vec{r} = -\vec{r}$, ta có: $\widehat{P}^{2} = 1$. Khi đó, nếu nó tác dụng lên hàm sóng mô tả trạng thái của meson:

Hạt	Ký hiệu	Phản hạt	Thành phần quark	Khối lượng MeV	S	C	B	Th/g sống	Kiểu rã
Pion	π^+	π^-	$u\underline{d}$	139.6	0	0	0	$2.60\text{x}10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu$
Pion	π^0	Self	$\frac{\bar{u}u+\bar{d}d}{\sqrt{2}}$	135.0	0	0	0	$0.83\text{x}10^{-16}$	2γ
Kaon	K^+	K^-	$u\underline{s}$	493.7	+1	0	0	$1.24\text{x}10^{-8}$	$\mu^+\nu_\mu, \pi^+\pi^0$
Kaon	K^0_S	K^0_S	1*	497.7	+1	0	0	$0.89\text{x}10^{-10}$	$\pi^+\pi^-, 2\pi^0$
Kaon	K^0_L	K^0_L	1*	497.7	+1	0	0	$5.2\text{x}10^{-8}$	$\pi^+e^-\bar{\nu}_e$
Eta	η^0	nó	2*	548.8	0	0	0	$<10^{-18}$	$2\gamma, 3\mu$
Eta prime	η'^0	nó	2*	958	0	0	0	...	...
Rho	ρ^+	ρ^-	$u\underline{d}$	770	0	0	0	$0.4\text{ x}10^{-23}$	π,π
Rho	ρ^0	nó	$u\underline{u}, d\underline{d}$	770	0	0	0	...	...
Omega	ω^0	nó	$u\underline{u}, d\underline{d}$	782	0	0	0	...	...
Phi	Φ	nó	$s\underline{s}$	1020	0	0	0	$20\text{ x}10^{-23}$	$K^+K^-; K^0\bar{K}^0$
D	D^+	D^-	$c\underline{d}$	1869.4	0	+1	0	$10.6\text{x}10^{-13}$	K+_,e+_
D	D^0	$\bar{D}^0$	$c\underline{u}$	1864.6	0	+1	0	$4.2\text{x}10^{-13}$	[K,μ,e]+_
D	D^+_S	D^-_S	$c\underline{s}$	1969	+1	+1	0	$4.7\text{x}10^{-13}$	K+_
J/Psi	J/Ψ	nó	$c\underline{c}$	3096.9	0	0	0	$0.8\text{x}10^{-20}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-$, ...
B	B^-	B^+	$b\underline{u}$	5279	0	0	-1	$1.5\text{x}10^{-12}$	D^0+_
B	B^0	$\bar{B}^0$	$d\underline{b}$	5279	0	0	-1	$1.5\text{x}10^{-12}$	D^0+_
B_s	B_s^0	$\underline{B}_s^0$	$s\underline{b}$	5375	0	0	-1	...	...
Upsilon	Υ	nó	$b\underline{b}$	9460.4	0	0	0	$1.3\text{x}10^{-20}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-$,

									...

1* Kaons trung hoà K_S^0 và K_L^0 là hỗn hợp đối xứng và phản đối xứng của down-phản strange và phảndown-strange: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{s}u+\tilde{d}s\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{s}u-\tilde{d}s\right)$.

2* Eta- meson trung hoà là hỗn hợp $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\tilde{u}u+\tilde{d}d-2\tilde{s}s\right)$

Bảng 5. Meson và một số đặc trưng của chúng

$$\hat{P}\varphi(\vec{r})=P\varphi(-\vec{r})$$

Do $\hat{P}^2\varphi(\vec{r})=P^2\varphi(\vec{r})=\varphi(\vec{r})$, nên $P^2=1$, $P=\pm1$. Các hạt có $P=1$, là các hạt vô hướng thực sự, ta nói rằng, chúng có tính chẵn lẻ $+$, các hạt có $P=-1$, là các giả vô hướng, ta sẽ nói rằng, chúng có tính chẵn lẻ $-$. Tất cả các meson liệt kê ở trên, đều là các giả vô hướng và thường được ký hiệu là 0^-. Meson có tính chẵn lẻ $+$, chỉ thấy ở một số hạt cộng hưởng và phản hạt.

Phản meson là những hạt các đặc trưng như khối lượng, spin,…, giống như hạt, nhưng có điện tích bằng $-Q$. Phép biến đổi $Q\to-Q$ sẽ biến một hạt thành phản hạt. Khi đổi hạt thành phản hạt các đặc trưng khác, như số baryon, số lạ, siêu tích, moment từ, v.v… cũng đổi dấu. Thực vậy, ví dụ, đối với phản proton:

$$Q=-1=T_3+\frac{B}{2}$$

cho nên, $T_3=-1/2$, $B=-1$.

Đối với các hạt trung hoà điện, có những hạt bất biến đối với phép biến đổi điện tích, tức là hạt và phản hạt trùng nhau. Những hạt đó, được gọi là trung hoà thực sự. Ví dụ, photon γ, π^0-meson, các meson trung hoà khác, như $\eta^0,\rho^0,\omega^0,\varphi^0,K^0$, đều là các hạt trung hoà thực sự. Protonium và positronium (hệ $\left(p^+p^-\right)$, $\left(e^+e^-\right)$) cũng là hệ trung hoà thực sự.

Tuy nhiên, cũng có những hạt và hệ hạt, điện tích bằng không, nhưng hạt và phản hạt không trùng nhau, tức là không bất biến đối với phép biến đổi điện tích. Chúng không phải là hạt trung hoà thực sự. Ví dụ, neutron, nguyên tử nước,….

Để phân biệt hạt nào là trung hoà thực sự và không trung hoà thực sự, ta dùng số lượng tử điện tích C_n, nó có dấu $+$ đối với hạt trung hoà thực sự, và có dấu $-$ đối với hạt không trung hoà thực sự.

Do meson được tạo nên từ quark và phản quark, nên nếu trong thành phần của nó có quark lạ s, thì meson đó cũng có số lạ. Ví dụ, $K^0 = \bar{s}d$, $K^+ = \bar{s}u$, $K^- = \bar{u}s$ nên số lạ của K^0, K^+ bằng $C = +1$, số lạ của K^- bằng $C = -1$. $\Phi -$meson được tạo thành từ quark và phản quark lạ $\bar{s}s$, nên số lạ của nó bằng không.

Meson J/ψ được tạo thành từ quark duyên c và phản quark $\bar{u}$, nên nó có số duyên bằng $+1$. Nó là hạt trung hoà điện tích, nhưng có spin bằng 1. Hạt η được tạo thành từ quark và phản quark duyên $c\bar{c}$. Như vậy, có là charmonium.

Nhóm baryon: Nhóm baryon gồm các hạt có spin $s = 1/2$, $3/2$, ..., có số baryon bằng 1, và là phức thể gồm ba hạt quark. Các baryon tìm thấy đầu tiên là p,

Hạt	Ký hiệu	Thành phần quark	Khối lượng MeV	Spin	B	S	Th/g sống (s)	Kiểu rã
Proton	p	uud	938.3	1/2	+1	0	Stable	...
Neutron	n	ddu	939.6	1/2	+1	0	920	$pe^-\bar{\nu}_e$
Lambda	Λ^0	uds	1115.6	1/2	+1	-1	2.6×10^{-10}	$p\pi^-$, $n\pi^0$
Sigma	Σ^+	uus	1189.4	1/2	+1	-1	0.8×10^{-10}	$p\pi^0$, $n\pi^+$
Sigma	Σ^0	uds	1192.5	1/2	+1	-1	6×10^{-20}	$\Lambda^0\gamma$
Sigma	Σ^-	dds	1197.3	1/2	+1	-1	1.5×10^{-10}	$n\pi^-$
Delta	Δ^{++}	uuu	1232	3/2	+1	0	0.6×10^{-23}	p,π^+
Delta	Δ^+	uud	1232	3/2	+1	0	0.6×10^{-23}	p,π^0
Delta	Δ^0	udd	1232	3/2	+1	0	0.6×10^{-23}	n,π^0

Delta	Δ^-	ddd	1232	3/2	+1	0	0.6x10^{-23}	n, π^-
Ksi Cascade	Ξ^0	uss	1315	1/2	+1	-2	2.9x10^{-10}	$\Lambda^0 \pi^0$
Ksi Cascade	Ξ^-	dss	1321	1/2	+1	-2	1.64x10^{-10}	$\Lambda^0 \pi^-$
Omega	Ω^-	sss	1672	3/2	+1	-3	0.82x10^{-10}	$\Xi^0 \pi^-$, $\Lambda^0 K^-$
Lambda	Λ_c^+	udc	2281	1/2	+1	0	2x10^{-13}	...

n. Chúng thường được coi là hai thành phần isospin khác nhau, hoặc hai trạng thái điện tích khác nhau của một hạt, đó là nucleon.

Cấu trúc quark của một số hạt là như nhau, ví dụ $p = (uud)$, $\Delta^+ = (uud)$. Nhưng trong trường hợp proton, hai hạt quark có spin trái chiều nhau, trong khi, trong trường hợp $\Delta^+ -$baryon, ba hạt có spin cùng chiều nhau.

Các hạt baryon đều có tính chẵn lẻ $+$, điều này nghĩa là, khi đổi chiều không gian, hàm sóng không thay đổi dấu. Ta thường ký hiệu chúng bằng $(1/2)^+, (3/2)^+$.

CHƯƠNG II

MẪU QUARK CỦA CÁC HADRON

2.1 Bất biến isotopic

Như đã nói ở trên, proton và neutron làm thành lưỡng tuyến isospin, tức là hàm sóng của chúng là một vectơ hai thành phần trong một không gian, gọi là không gian isotopic, và biến đổi theo một cách thức nhất định khi biến đổi cơ sở. Nhóm biến đổi cơ sở là nhóm $SU(2)$, gồm các ma trận unita cấp 2, có định thức bằng 1. Như vậy, nó tương ứng với các phép quay trong không gian phức hai chiều. Phép quay trong không gian isotopic không liên quan gì đến phép quay trong không gian ba chiều thông thường. Nó là một loại "không gian trong" và "spinơ nucleon" là đối tượng hình học cơ bản của nó, cũng giống như spinơ là đối tượng hình học cơ bản của không gian vectơ thực ba chiều thông thường. Nucleon sẽ có isospin bằng $1/2$, và hình chiếu quay lên hoặc quay xuống sẽ mô tả proton hay neutron. Cũng giống như hạt có spin bằng $1/2$, hai thành phần của đa tuyến isospin $1/2$ sẽ có khối lượng bằng nhau: $m(\uparrow) = m(\downarrow)$.

Tương tự như nucleon, các nhóm hadron khác cũng có thể được coi là các trạng thái hình chiếu isospin khác nhau của cùng một hạt. Hạt có isospin bằng không, được mô tả bằng hàm sóng iso-vô hướng, hạt có isospin khác không được diễn tả bằng các đại lượng nhiều thành phần, gọi là iso-spinơ, iso-tensơ, hay là các iso-đa tuyến. Tính bất biến của Lagrangean đối với phép biến đổi các thành phần của iso-đa tuyến được gọi là bất biến isotopic. Phép biến đổi $SU(2)$ được gọi là phép biến đổi isotopic.

Các iso-đa tuyến sẽ là thành phần của một tensơ thực hiện một biểu diễn bất khả quy nào đó của nhóm $SU(2)$. Khi một hạt có isospin bằng I, đa tuyến của nó có $2I+1$ thành phần. Điện tích của mỗi thành phần sẽ được xác định bằng hệ thức Gell-Man-Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}$$

Ví dụ 1.: Hạt đơn

a. Nucleon có isospin $1/2$. Hàm trường của nó là một lưỡng tuyến:

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

Do nucleon không có số lạ, $S = 0$, không có số duyên, số baryon $B = 1$, nên $I_3 = 1/2$ tương ứng với proton, vì có điện tích bằng 1, và $I_3 = -1/2$ tương ứng với neutron, vì có điện tích bằng 0.

b. Xét một tensơ hỗn hợp π_a^b, tạo nên từ tích trực tiếp của hai biểu diễn cơ bản của nhóm $SU(2)$, tức là:

$$\pi_a^b \to \pi_a'^b = (U)_c^b \left(U^{-1}\right)_a^d \pi_d^c$$

Nó là biểu diễn bốn chiều của $SU(2)$. Biểu diễn này là hoàn toàn khả quy. Phần $0-$vết và phần vết của nó làm thành các biểu diễn bất khả quy của nhóm. Nói chung, ta có khai triển sau đây:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3$$

$$\pi_a^b = \left(\frac{1}{2}\delta_a^b Sp\pi\right) + \left(\pi_a^b - \frac{1}{2}\delta_a^b Sp\pi\right)$$

Thực vậy, phần chứa vết $Sp\pi = \pi_1^1 + \pi_2^2$, là một đại lượng bất biến:

$$Sp\pi' = \pi'^1_1 + \pi'^2_2 = \pi'^a_a = \left(U\right)^a_c \left(U^{-1}\right)^d_a \pi^c_d = \left(U^{-1}\right)^d_a \left(U\right)^a_c \pi^c_d = \delta^d_c \pi^c_d = Sp\pi$$

Đây chính là hàm sóng của một iso-vô hướng, tức là hạt có isospin bằng không. Nó được đồng nhất với hạt η.

Phần còn lại, gồm ba thành phần, tức là iso-vectơ. Chúng biến đổi lẫn nhau và mô tả hạt có isospin bằng 1:

$$\pi'^b_a - \frac{1}{2}\delta^b_a Sp\pi = \left(U\right)^b_c \left(U^{-1}\right)^d_a \pi^c_d - \frac{1}{2}\delta^b_a Sp\pi = \left(U\right)^b_c \left(U^{-1}\right)^d_a \left[\pi^c_l - \frac{1}{2}\delta^c_d Sp\pi\right]$$

Đây chính là hàm sóng của ba $\pi -$meson. $\pi -$meson là một iso- tam tuyến. Tam tuyến $\pi -$meson có thể đặt tương ứng với một vectơ $\vec{\pi}$, định nghĩa theo cách sau đây:

$$\left(\pi^c_l - \frac{1}{2}\delta^c_d Sp\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_i)^b_a \pi^i$$

Điều đó nghĩa là,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi^1_1 - \frac{1}{2}\pi^2_2 & \pi^1_2 \\ \pi^2_1 & -\frac{1}{2}\pi^1_1 + \frac{1}{2}\pi^2_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pi^3 & \pi^1 - i\pi^2 \\ \pi^1 + i\pi^2 & -\pi^3 \end{pmatrix}$$

Ta thường đồng nhất các hạt $\pi -$meson như sau:

$$\pi^0 \sim \pi^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pi^1_1 - \pi^2_2\right), \quad \pi^{\pm} \sim \frac{\pi^1 \mp i\pi^2}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi^+ = \pi^1_2, \ \ \pi^- = \pi^2_1$$

Vậy, ma trận của $\pi -$có dạng:

$$\left(\pi^b_a - \frac{1}{2}\delta^b_a Sp\pi\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 \end{pmatrix}$$

Tương tự, các sigma-baryon cũng là một iso-tam tuyến:

$$\left(\Sigma^b_a - \frac{1}{2}\delta^b_a Sp\Sigma\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 \end{pmatrix}$$

c. Các hạt cộng hưởng delta-baryon có isospin bằng $3/2$, nên nó làm thành một tứ tuyến. Tứ tuyến này thu được từ tích ba biểu diễn cơ bản hiệp biến (hoặc phản biến). Khi đó, bằng cách phân tích thành tổng trực tiếp của các biểu diễn bất khả quy:

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \oplus 2 \oplus 4$$

ta sẽ thu được hai lưỡng tuyến và một tứ tuyến. Tứ tuyến Δ là phần hoàn toàn đối xứng của tensơ ψ_{abc} : $\Delta_{abc} \sim \psi_{\{abc\}}$. Như vậy,

$$\Delta_{111} = \Delta^{++}, \quad \Delta_{112} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^{+}, \quad \Delta_{122} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^{0}, \quad \Delta_{222} = \Delta^{-}$$

Ví dụ 2. Hệ hạt

Isospin cũng có thể định nghĩa cho một hệ hạt. Bằng cách nhân trực tiếp các hàm sóng tương ứng với các hạt thành phần. Các biểu diễn tích trực tiếp là hoàn toàn khả quy và có thể phân thành tổng trực tiếp các biểu diễn bất khả quy của nhóm $SU(2)$.

a. Hệ πN

Do isospin của pi-meson bằng 1, còn của nucleon bằng $1/2$, nên hệ πN sẽ là một trong hai biểu diễn bất khả quy của tích trực tiếp:

$$3 \otimes 2 = 2 \oplus 4$$

Các không gian thực hiện biểu diễn bất khả quy sẽ được sinh bởi tổ hợp tuyến tính của các vectơ cơ sở:

$$\left|p\pi^{+}\right\rangle, \left|p\pi^{0}\right\rangle, \left|p\pi^{-}\right\rangle, \left|n\pi^{+}\right\rangle, \left|n\pi^{0}\right\rangle, \left|n\pi^{-}\right\rangle$$

Với tứ tuyến, isospin bằng $3/2$, ta có các cơ sở sau đây:

Thành phần có điện tích 2, theo công thức $Q = I_3 + \frac{B}{2} = 3/2 + 1/2 = 2$ sẽ là:

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \left|p\pi^{+}\right\rangle$$

Tác động J_- lên vectơ cơ sở này, ta thu được:

$$J_-\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \left|n\pi^{+}\right\rangle + \sqrt{2}\left|p\pi^{0}\right\rangle$$

Như vậy, thành phần có điện tích 1, sẽ là tổ hợp tuyến tính của hai vectơ $\left|p\pi^{0}\right\rangle$, $\left|n\pi^{+}\right\rangle$:

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|p\pi^{0}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|n\pi^{+}\right\rangle$$

Tương tự, tác động J_- lên vectơ cơ sở $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$, ta được:

$$J_-\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = 2\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\left|n\pi^0\right\rangle + 2\sqrt{\frac{1}{3}}\left|p\pi^-\right\rangle$$

Vậy, thành phần có điện tích 0, sẽ là:

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|n\pi^0\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|p\pi^-\right\rangle$$

Cuối cùng, thành phần có điện tích bằng -1, sẽ tương ứng với vectơ cơ sở:

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left|n\pi^-\right\rangle$$

Các hệ số của tổ hợp tuyến tính, chính là hệ số Clebsch-Gordan.

Với lưỡng tuyến, tương ứng với isospin bằng $1/2$, ta có diện tích của các thành phần là $Q=+1=1/2+B/2$ và $Q=0=-1/2+B/2$. Như vậy, cơ sở phải là các tổ hợp sau đây:

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha\left|p\pi^0\right\rangle + \beta\left|n\pi^+\right\rangle,$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha'\left|n\pi^0\right\rangle + \beta'\left|p\pi^-\right\rangle$$

Từ tính trực chuẩn, suy ra tổng bình phương các cặp hệ số phải bằng 1. Tác động toán tử J_- lên vectơ trạng thái thứ nhất, ta được:

$$J_-\left(\alpha\left|p\pi^0\right\rangle + \beta\left|n\pi^+\right\rangle\right) = \alpha\left|n\pi^0\right\rangle + \sqrt{2}\alpha\left|p\pi^-\right\rangle + \sqrt{2}\beta\left|n\pi^0\right\rangle$$

$$\alpha' = \sqrt{2}\beta + \alpha, \quad \beta' = \sqrt{2}\alpha$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = 1 = 1 + \beta^2 + 2\sqrt{2}\alpha\beta + 2\alpha^2 \Rightarrow (\sqrt{2}\alpha + \beta)^2 = 0 \Rightarrow \beta = -\sqrt{2}\alpha$$

Chọn $\alpha = -1/\sqrt{3}$, ta được: $\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\alpha' = 1/\sqrt{3}$, $\beta' = -\sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}\left|p\pi^0\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|n\pi^+\right\rangle \qquad Q = I_3 + \frac{B}{2} = 1/2 + 1/2 = 1$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|n\pi^0\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|p\pi^-\right\rangle \qquad Q = I_3 + \frac{B}{2} = -1/2 + 1/2 = 0$$

b. Hệ hai pi-meson

Do $3\otimes 3 = 1\oplus 5\oplus 3$, nên hệ này có các hệ con tương ứng với isospin bằng 0, 2 hoặc 1.

$J=2$:

Ta bắt đầu bằng trạng thái có hình chiếu isospin lớn nhất, bằng 2:

$$\left|2,2\right\rangle = \left|\pi_1^+\pi_2^+\right\rangle$$

Khi đó:

$$J_-\left|2,2\right\rangle = 2\left|2,1\right\rangle = \sqrt{2}\left|\pi_1^0\pi_2^+\right\rangle + \sqrt{2}\left|\pi_1^+\pi_2^0\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|2,1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\pi_1^0\pi_2^+\right\rangle + \left|\pi_1^+\pi_2^0\right\rangle\right)$$

Tiếp theo:

$$J_-\left|2,1\right\rangle = \sqrt{6}\left|2,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle + \sqrt{2}\left|\pi_1^0\pi_2^0\right\rangle + \sqrt{2}\left|\pi_1^0\pi_2^0\right\rangle + \sqrt{2}\left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle\right) =$$

$$= \left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle + 2\left|\pi_1^0\pi_2^0\right\rangle + \left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|2,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle + 2\left|\pi_1^0\pi_2^0\right\rangle + \left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle\right)$$

Tương tự :

$$J_-\left|2,0\right\rangle = \sqrt{6}\left|2,-1\right\rangle = \sqrt{3}\left(\left|\pi_1^-\pi_2^0\right\rangle + \left|\pi_1^0\pi_2^-\right\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \left|2,-1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\pi_1^-\pi_2^0\right\rangle + \left|\pi_1^0\pi_2^-\right\rangle\right)$$

$$J_-\left|2,-1\right\rangle = 2\left|2,-2\right\rangle = 2\left|\pi_1^-\pi_2^-\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left|2,-2\right\rangle = \left|\pi_1^-\pi_2^-\right\rangle$$

$J = 1$:

Trạng thái hình chiếu isospin bằng 1 là tổ hợp tuyến tính của các trạng thái cơ sở: $\left|\pi_1^+\pi_2^0\right\rangle, \left|\pi_1^0\pi_2^+\right\rangle$, của trạng thái có hình chiếu isospin bằng 0 là tổ hợp tuyến tính của $\left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle, \left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle$ và của trạng thái có hình chiếu của isospin bằng -1 là tổ hợp tuyến tính của $\left|\pi_1^0\pi_2^-\right\rangle, \left|\pi_1^-\pi_2^0\right\rangle$:

$$\left|1,1\right\rangle = \alpha\left|\pi_1^+\pi_2^0\right\rangle + \beta\left|\pi_1^0\pi_2^+\right\rangle$$

Điều kiện chuẩn hoá sẽ cho ta hệ thức $\left|\alpha\right|^2 + \left|\beta\right|^2 = 1$. Điều kiện, trực giao với trạng thái $\left|2,1\right\rangle$ cho ta hệ thức: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) = 0$, từ đó suy ra:

$$\left|1,1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\pi_1^+\pi_2^0\right\rangle - \left|\pi_1^0\pi_2^+\right\rangle\right)$$

Tiếp theo, tác dụng toán tử J_- lên vectơ này, ta thu được:

$$J_-\left|1,1\right\rangle = \sqrt{2}\left|1,0\right\rangle = \left(\left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle - \left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle\right) \Rightarrow$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle - \left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle\right)$$

Sau đó:

$$J_-|1,0\rangle = \sqrt{2}|1,-1\rangle = \left|\pi_1^0\pi_2^-\right\rangle - \left|\pi_1^-\pi_2^0\right\rangle \Rightarrow$$

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\pi_1^0\pi_2^-\right\rangle - \left|\pi_1^-\pi_2^0\right\rangle\right)$$

$J = 0$:

Vectơ trạng thái phải trực giao với $|2,0\rangle, |1,0\rangle$. Nó là tổ hợp tuyến tính của các vectơ cơ sở: $\left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle, \left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle, \left|\pi_1^0\pi_2^0\right\rangle$:

$$|0,0\rangle = \alpha\left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle + \beta\left|\pi_1^0\pi_2^0\right\rangle + \gamma\left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle$$

Từ điều kiện trực giao, ta có: $\alpha = -\beta = \gamma = 1/\sqrt{3}$:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|\pi_1^+\pi_2^-\right\rangle - \left|\pi_1^0\pi_2^0\right\rangle + \left|\pi_1^-\pi_2^+\right\rangle\right)$$

2.2 Lagrangean bất biến isotopic

Đối với phép biến đổi Lorentz, các hàm trường có thể là vô hướng, giả vô hướng, vectơ, giả vectơ, tensơ,…, với phép biến đổi của nhóm $SU(2)$ các hàm trường cũng sẽ là iso-vô hướng, iso-giả vô hướng, iso-vectơ, và iso-tensơ…. Lagrangean của hệ hạt không những phải là một vô hướng Lorentz, mà nó còn là iso-vô hướng.

Xét Lagrangean tương tác giữa các hạt pi-meson và nucleon. Do nucleon là một spinơ, pi-meson là giả vô hướng, nên để Lagrangean tương tác là một vô hướng Lorentz, nó phải có dạng tích sau đây:

$$\bar{N}_a\gamma_5 N^b \pi_d^c$$

Trong đó, π_a^b là tensơ hỗn hợp $0-$vết, dấu gạch ngang phía trên hàm sóng của nucleon dùng để chỉ liên hợp Dirac của nó, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_4$.

Biểu thức này chưa bất biến isotopic. Để được iso-vô hướng, ta phải co các chỉ số theo các cách khả dĩ khác nhau. Do π_b^a là tensơ hỗn hợp 0-vết, nên chỉ có một cách duy nhất sau đây:

$$\bar{N}_a\gamma_5 N^b\pi_b^a = \bar{N}_a\gamma_5\pi_b^a N^b = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{N}_a\gamma_5\left(\sigma_i\right)_b^a N^b\pi^i$$

Do đó, ta có thể chọn Lagrangean tương tác pi-meson-nucleon là:

$$\mathfrak{L}_{\pi NN} = ig_{\pi NN}\bar{N}_a\gamma_5\left(\sigma_i\right)_b^a N^b\pi^i$$

Chú ý rằng:

$$N=\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix},\quad \bar{N}=\begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{n} \end{pmatrix},\quad \sigma\pi=\begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}$$

nên Lagrangean tương tác sẽ có khai triển theo hàm trường các hạt thực như sau:

$$\mathfrak{L}_{\pi NN}=ig_{\pi NN}\left\{\sqrt{2}\bar{p}\gamma_5 n\pi^+ + \sqrt{2}\bar{n}\gamma_5 p\pi^- + \left(\bar{p}\gamma_5 p - \bar{n}\gamma_5 n\right)\pi^0\right\}$$

Xét Lagrangean mô tả sự phân rã của delta-baryon thành pi-meson và nucleon. Do delta có spin bằng 1/2 và có số chẵn lẻ bằng +, nên Lagrangean phải bằng:

$$\mathfrak{L}_{\Delta\to\pi+N}=g\bar{N}^a\gamma_5\bar{\pi}^{\{bc\}}\Delta_{\{abc\}}$$

Chú ý đến hàm sóng của từng hạt, ta có:

$$L_{\Delta\to\pi+N}=\bar{N}^a\gamma_5\bar{\pi}^{\{bc\}}\Delta_{\{abc\}}=g\pi^+\bar{p}\gamma_5\Delta^{++}+\frac{g}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\pi^0\bar{p}+\pi^+\bar{n}\right)\gamma_5\Delta^+ +$$

$$+\frac{g}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\pi^0\bar{n}+\pi^-\bar{p}\right)\gamma_5\Delta^0+g\,\pi^-\bar{n}\Delta^-$$

Nhận xét rằng, xác suất phân rã theo những kênh khác nhau được liên hệ bằng hệ thức:

$$W(\Delta^{++}\to\pi^+p)=3W(\Delta^+\to\pi^+n)=\frac{3}{2}W(\Delta^+\to\pi^0p)=$$

$$3W(\Delta^0\to\pi^-p)=\frac{3}{2}W(\Delta^0\to\pi^0n)=W(\Delta^-\to\pi^-n)$$

Hạt Δ^{++} chỉ phân rã theo một kênh, còn Δ^+ lại phân rã theo hai kênh. Xác suất phân rã theo từng kênh không giống nhau, nhưng xác suất phân rã toàn phần lại giống nhau:

$$W(\Delta^+\to\pi^+n)+W(\Delta^+\to\pi^0p)=\frac{1}{3}W(\Delta^{++}\to\pi^+p)+\frac{2}{3}W(\Delta^{++}\to\pi^+p)$$
$$=W(\Delta^{++}\to\pi^+p)$$

do đó bề rộng của các hạt cộng hưởng trong một iso-đa tuyến là như nhau.

Bây giờ ta xét Lagrangean của bài toán tán xạ pi-meson lên nucleon. Lagrangean sẽ chứa tích 4 trường, hai trường nucleon và 2 trường pi-meson:

$$\bar{\pi}_b^a(q_2)\pi_d^c(q_1)\bar{N}^e(p_2)N_g(p_1)$$

Để có bất biến isotopic, ta có thể lập các bất biến sau đây:

$$\bar{\pi}_b^a(q_2)\pi_a^b(q_1)\bar{N}^c(p_2)N_c(p_1),\bar{N}^a(p_2)\left[\bar{\pi}_a^b(q_2)\pi_b^c(q_1)\pm\pi_a^b(q_1)\bar{\pi}_b^c(q_2)\right]N_c(p_1)$$

Tuy nhiên, do:

$$\bar{\pi}_a^b(q_2)\pi_b^c(q_1)+\pi_a^b(q_1)\bar{\pi}_b^c(q_2)=\frac{1}{2}\bar{\pi}_i\left(q_2\right)\pi_j\left(q_1\right)\left\{\tau_i\tau_j+\tau_j\tau_i\right\}_a^c=\bar{\pi}_i\left(q_2\right)\pi_j\left(q_1\right)\delta_a^c$$

cho nên, ta chỉ có hai hệ số liên kết. Khi đó:

$$M\left(\pi N\to\pi N\right)=g_1\bar{\pi}_b^a(q_2)\pi_a^b(q_1)\bar{N}^c(p_2)N_c(p_1)+$$
$$+g_2\bar{N}^a(p_2)\left[\bar{\pi}_a^b(q_2)\pi_b^c(q_1)-\pi_a^b(q_1)\bar{\pi}_b^c(q_2)\right]N_c(p_1)$$

hay, để khai triển theo các trường thực, ta thực hiện các phép tính với ma trận:

$$M\left(\pi N\to\pi N\right)=2g_1\bar{\pi}_i(q_2)\pi_i(q_1)\bar{N}^c(p_2)N_c(p_1)+$$
$$+g_2 2i\varepsilon_{jik}\bar{\pi}_i(q_2)\pi_j(q_1)\bar{N}(p_2)(\tau_k)N(p_1)$$
$$M\left(\pi N\to\pi N\right)=2g_1\bar{\pi}_i(q_2)\pi_i(q_1)\bar{N}^c(p_2)N_c(p_1)+$$
$$+g_2 2i\varepsilon_{jik}\bar{\pi}_i(q_2)\pi_j(q_1)\bar{N}(p_2)(\tau_k)N(p_1)$$

2.3 Mẫu quark của các hadron

2.3.1 Meson

Giả sử ba hương quark: up, down, strange biến đổi theo biểu diễn cơ bản 3 của nhóm $SU(3)$:

$$q^i=\begin{pmatrix}q^1\\q^2\\q^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix}$$

thành phần của đa tuyến sẽ có các số lượng tử sau đây:

Quark	Ký hiệu	Q	Isospin I	I_3	Số Baryon	Y	S	Mass*
Up	u	2/3	1/2	+1/2	1/3	1/3	0	360 MeV
Down	d	-1/3	1/2	-1/2	1/3	1/3	0	360 MeV
Strange	s	-1/3	1/2	0	1/3	-2/3	-1	540 MeV

Phản quark sẽ biến đổi như biểu diễn liên hợp $3^*: \tilde{q} = (q_1\ q_2\ q_3) = (\tilde{u}\ \tilde{d}\ \tilde{s})$. Số lượng tử của chúng sẽ có dấu trái với dấu số lượng tử của hạt:

Quark	Ký hiệu	Q	Isospin I	I_3	Số Baryon	Y	S	Mass*
Phản up	$\tilde{u}$	-2/3	1/2	-1/2	-1/3	-1/3	0	360 MeV
Phản down	$\tilde{d}$	1/3	1/2	1/2	-1/3	-1/3	0	360 MeV
Phản strange	$\tilde{s}$	1/3	0	0	-1/3	2/3	+1	540 MeV

Meson ($B = 0$) là các trạng thái liên kết của quark và phản quark. Tuy nhiên do quark là fermion, nên spin của hệ hạt hai fermion có thể là vô hướng và có thể là vectơ. Với quark và phản quark có spin ngược chiều, ta được các meson giả vô hướng. Ngược lại, với hệ quark và phản quark có spin cùng chiều, ta được các meson giả vectơ.

Trước hết, ta xét meson vô hướng. Ta chỉ xét phần isospin của hàm sóng. Khi đó, chúng sẽ được diễn tả bằng tensơ: $T_a^b = \tilde{q}_a q^b$. Biểu diễn cho bởi tensơ này không bất khả quy, mặt khác, từ hệ thức: $3 \times 3^* = 1 + 8$, suy ra, các meson làm thành một đơn tuyến và một bát tuyến của $SU(3)$. Để diễn tả cụ thể các thành phần quark của meson, ta phân tích tích $\tilde{q}_a q^b$ thành các biểu diễn bất khả quy của nhóm $SU(3)$.

Trước hết, vết của tensơ T_a^b:

$$\frac{1}{3} SpT = \frac{1}{3} \tilde{q}_a q^a = \frac{1}{3}(\tilde{u}u + \tilde{d}d + \tilde{s}s)$$

Nó là một đại lượng bất biến, tức là nó tương ứng với biểu diễn bất khả quy một chiều của $SU(3)$. Đây là hàm sóng mô tả một hạt giả vô hướng có isospin bằng không.

8 thành phần còn lại, sẽ tương ứng với biểu diễn bất khả quy 8 chiều (8 tuyến) của nhóm $SU(3)$. Ta sẽ viết nó dưới dạng tường minh theo thành phần quark:

$$M_a^b = \tilde{q}_a q^b - \frac{1}{3} \delta_a^b SpT =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\tilde{u}u - \frac{1}{3}\tilde{d}d - \frac{1}{3}\tilde{s}s & \tilde{d}u & \tilde{s}u \\ \tilde{u}d & -\frac{1}{3}\tilde{u}u + \frac{2}{3}\tilde{d}d - \frac{1}{3}\tilde{s}s & \tilde{s}d \\ \tilde{u}s & \tilde{d}s & -\frac{1}{3}\tilde{u}u - \frac{1}{3}\tilde{d}d + \frac{2}{3}\tilde{s}s \end{pmatrix}$$

Các thành phần trên đường chéo có cấu trúc quark như sau:

$$M_1^1 = \tilde{u}u - \frac{1}{3}(\tilde{u}u + \tilde{d}d + \tilde{s}s) = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}u - \tilde{d}d\right) + \frac{1}{6}\left(\tilde{u}u + \tilde{d}d - 2\tilde{s}s\right)$$

$$M_2^2 = \tilde{d}d - \frac{1}{3}(\tilde{u}u + \tilde{d}d + \tilde{s}s) = -\frac{1}{2}\left(\tilde{u}u - \tilde{d}d\right) + \frac{1}{6}\left(\tilde{u}u + \tilde{d}d - 2\tilde{s}s\right)$$

$$M_3^3 = \tilde{s}s - \frac{1}{3}(\tilde{u}u + \tilde{d}d + \tilde{s}s) = -\frac{1}{3}\left(\tilde{u}u + \tilde{d}d - 2\tilde{s}s\right)$$

Các thành phần ngoài đường chéo có cấu trúc quark như sau:

$$M_1^2 = \tilde{u}d \qquad M_2^3 = \tilde{d}s$$

$$M_1^3 = \tilde{u}s \qquad M_3^1 = \tilde{s}u$$

$$M_2^1 = \tilde{d}u \qquad M_3^2 = \tilde{s}d$$

Trong số 8 thành phần của bát tuyến, chỉ có ba hàm sóng trong cấu trúc quark của nó không chứa quark lạ. Đó là:

$$M_1^2 = \tilde{u}d, \quad M_2^1 = \tilde{d}u, \quad \tilde{u}u - \tilde{d}d$$

Mặt khác, isospin của các quark up và down là $1/2$, nên, các hạt tương ứng với các hàm sóng này sẽ có isospin bằng 1. Các hạt nói trên sẽ có hình chiếu isospin bằng: $-1,\ 1,\ 0$. Nếu tính đến hệ số chuẩn hoá, ta có:

$$\pi^- \sim M_1^2 = \tilde{u}d, \qquad \pi^+ \sim M_2^1 = \tilde{d}u, \qquad \pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{u}u - \tilde{d}d\right)$$

Các thành phần khác của bát tuyền đều chứa quark lạ. Dựa vào isospin của các quark, suy ra:

$$K^+ \sim M_3^1 = \tilde{s}u, \qquad K^- \sim M_1^3 = \tilde{u}s$$

$$K^0 \sim M_3^2 = \tilde{s}d, \qquad \bar{K}^0 \sim M_2^3 = \tilde{d}s$$

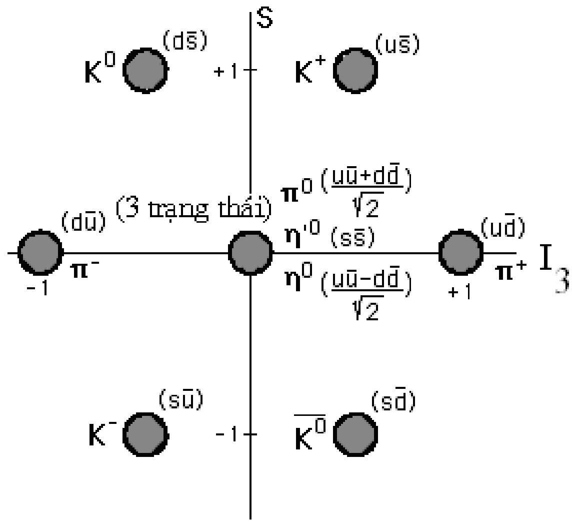
Hạt mô tả bởi hàm sóng $\tilde{u}u + \tilde{d}d - 2\tilde{s}s$ có chứa quark lạ, tuy nhiên số lạ của nó bằng không. Đây cũng là tổ hợp ứng với isospin bằng không. Vậy nó chính là hạt $\eta -$meson. Nếu tính đến hệ số chuẩn hoá, ta có:

$$\eta^0 \sim \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\tilde{u}u + \tilde{d}d - 2\tilde{s}s\right)$$

Ta có thể diễn tả các thành phần của bát tuyến meson qua các hạt thực như sau:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \frac{-2\eta^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

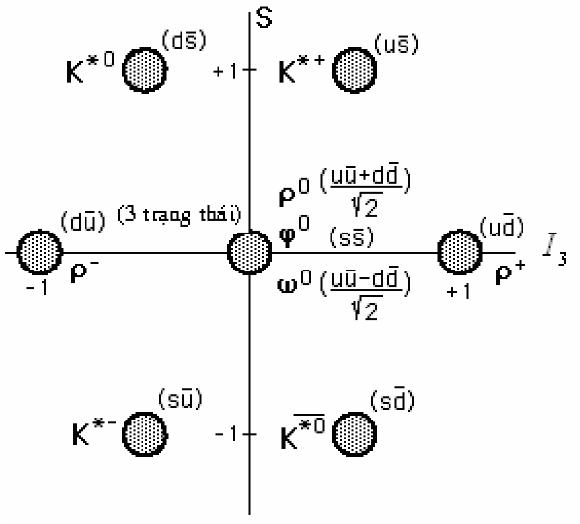
Các meson giả vô hướng được xắp xếp trên hệ trục $(I_3, Y) = (I_3, S)$ như sau:



Tương tự, đối với meson giả vectơ ta cũng có cấu trúc quark như sau:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \frac{-2\omega^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Ta cũng có thể xắp xếp các meson vectơ trên hệ trục (I_3, S):



Thực ra, hạt tương ứng với hàm sóng $\tilde{u}u + \tilde{d}d - 2\tilde{s}s$ không diễn tả hạt η^0 hoặc ω^0 thuần tuý. Chúng là sự pha trộn của hai hạt: η^0 và η'^0 trong trường hợp meson giả vô hướng, và ω^0 và φ^0 trong trường hợp meson giả vectơ.

2.3.2 Baryon

Baryon là hệ gồm ba quark. Do quark là fermion nên spin của baryon có thể là $1/2$ hoặc $3/2$. Sau đây, ta cũng chỉ xét đến phần isospin của hàm sóng. Như vậy, hàm sóng sẽ biến đổi như tích:

$$B^{abc} \sim q^a q^b q^c$$

Biểu diễn bằng tích tensơ như trên không bất khả quy, vì từ nó ta có thể lập được các đại lượng, ví dụ $\varepsilon_{abd}B^{abc}$, mà chúng sẽ sinh ra một không gian con bất biến. Để phân tích biểu diễn trên thành tổng các biểu diễn bất khả quy, ta chú ý rằng:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

nghĩa là ta có một đơn tuyến, hai bát tuyến và một thập tuyến:

$$B^{abc} = B^{[abc]} + B^{\{a\,[b\}c]} + B^{[a\{b]\,c\}} + B^{\{abc\}}$$

Do các chỉ số lấy ba giá trị, nên phần hoàn toàn phản đối xứng chỉ có một thành phần, nó diễn tả một đơn tuyến.

Phần đối xứng với một cặp chỉ số, phản đối xứng với cặp còn lại, diễn tả bát tuyến:

$$B^{\{a[b\}c]} \sim C^a_d = \varepsilon_{bcd} B^{\{a[b\}c]}$$

Tensơ C^b_a là $0-$vết, bởi vì:

$$C^a_a = \varepsilon_{abc} B^{\{a[b\}c]} = 0$$

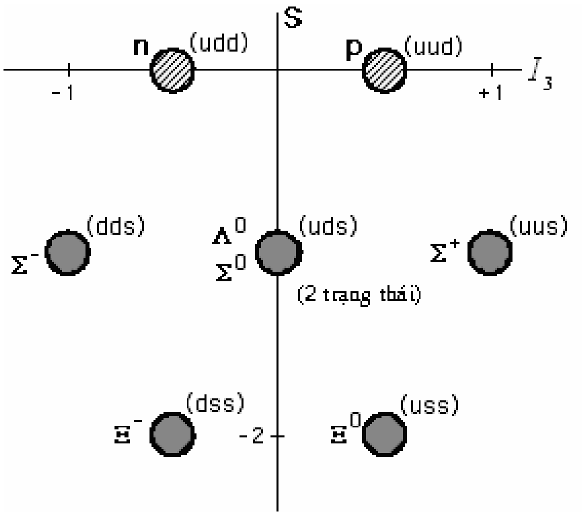
do $B^{\{a[b\}c]}$ đối xứng đối với cặp chỉ số a,b, nên nó chỉ có 8 thành phần. Tương tự như vậy cho bát tuyến $B^{[a\{b]c\}}$.

Số hạng cuối cùng có 10 thành phần. Ta có thể tính số thành phần độc lập cho một tensơ q phản biến (hoặc hiệp biến). Số thành phần có q' giá trị 1,2 còn $q-q'$ giá trị bằng 3 là $q'+1$. Do q' có giá trị từ 0 đến q, nên số thành phần độc lập là:

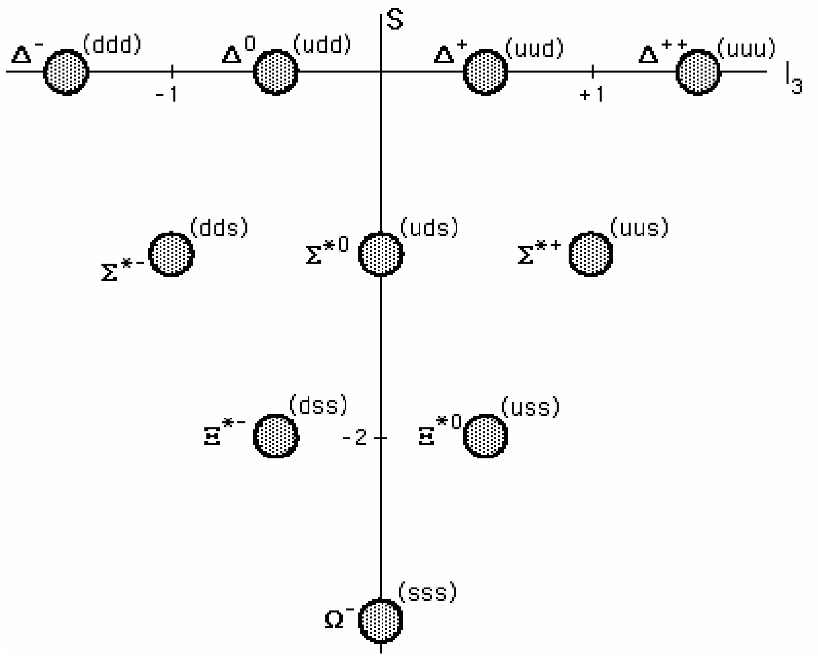
$$\sum_{q'=0}^{q}(q'+1) = \frac{(q+1)(q+2)}{2}$$

Các hàm sóng mô tả thập tuyến baryon.

Sau khi tính chi tiết cho các thành phần, ta có thể biểu diễn bát tuyến baryon trên mặt phẳng có hệ trục tọa độ (I_3, S) như sau:

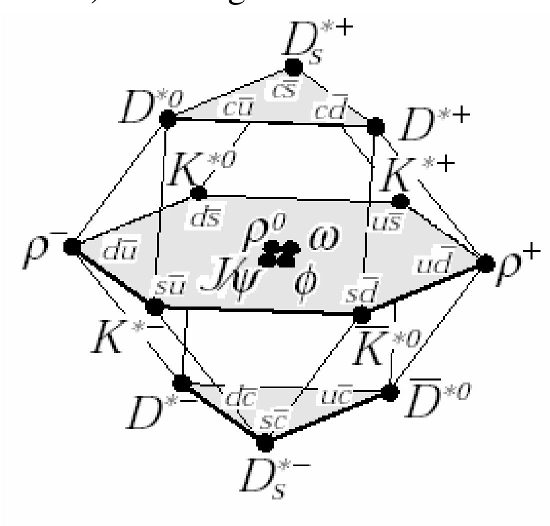


Đối với thập tuyến baryon cũng có kết quả tương tự:

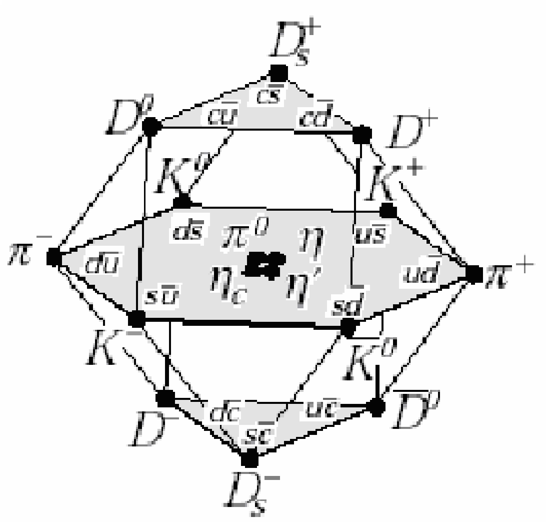


Khi thêm quark duyên c vào mô hình, chúng ta phải mở rộng nhóm đối xứng từ $SU(3)$ thành $SU(4)$. Khi đó, kết quả cho meson giả vô hướng và meson giả vectơ sẽ được cho bởi đồ thị ba chiều. Các hạt "vô duyên" sẽ nằm trên một mặt phẳng, các hạt có duyên sẽ nằm ngoài mặt phẳng này.

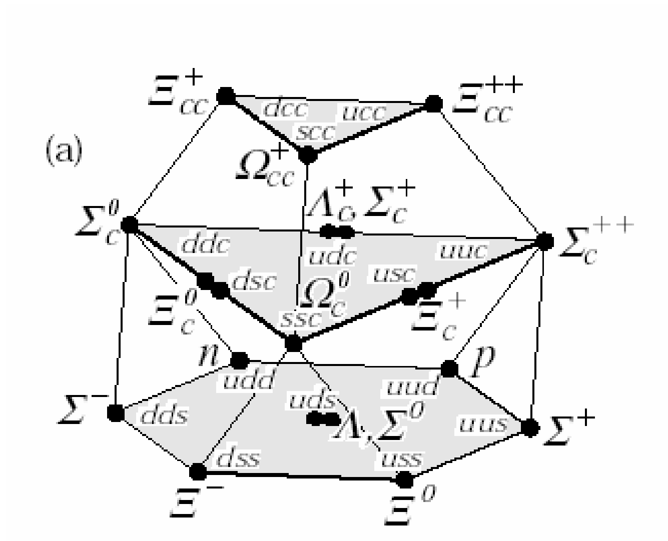
a) Meson giả vectơ



b) Meson giả vô hướng



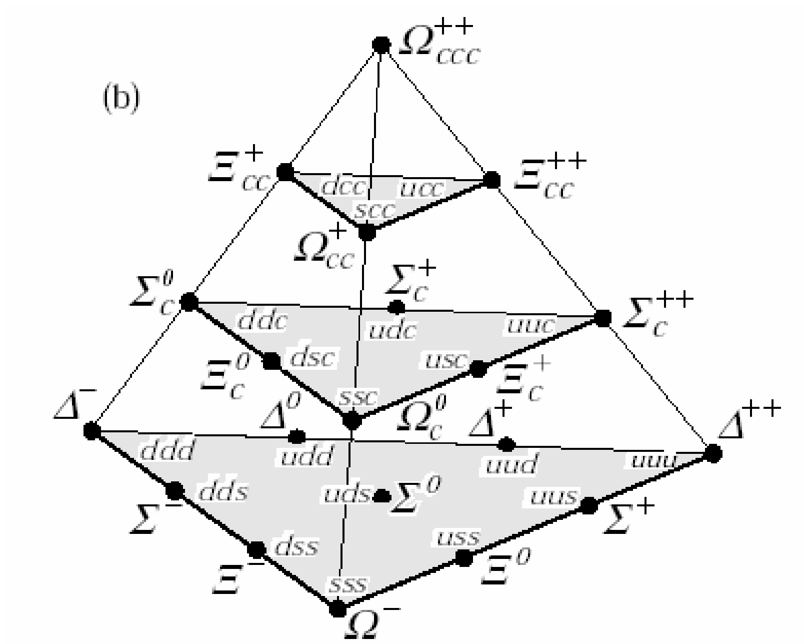
Đối với các baryon có duyên, ta cũng có kết quả tương tự:



Sơ đồ đối với baryon có spin $1/2$

Khi thêm quark bottom b, nhóm đối xứng sẽ là $SU(5)$, như vậy hạng của nó là 4, ta sẽ phải đặc trưng cho mỗi biểu diễn bằng 4 đại lượng. Vì vậy, sơ đồ của meson và baryon sẽ phải vẽ trong không gian 4 chiều. Điều này không thể thực hiện một cách trực giác được.

Nói chung, cho đến nay, mô hình quark cho các hadron còn chưa cần thay đổi. Việc coi các hadron là trạng thái kết hợp của nhiều quark hoặc quark và các phản quark vẫn còn có ý nghĩa cả về mặt lý thuyết lẫn thực tiễn tính toán.



Sơ đồ đối với baryon có spin $3/2$

CHƯƠNG III

LÝ THUYẾT GAUGE TRONG VẬT LÝ HẠT CƠ BẢN

1. Nhóm đối xứng toàn xứ (Global Group Symmetry)

Xét trường $\psi(x)$ mô tả bởi Lagrangian:

$$L = L(\psi, \partial_\mu \psi)$$

Ta quan tâm đến phép biến đổi sau đây:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$$

trong đó α là một số thực. Phép biến đổi này được gọi là phép biến đổi pha (hay gauge loại I) $U(1)$. Nó chính là nhóm unita trong không gian một chiều. Do α là hằng số, nên nhóm được gọi là toàn xứ (global), còn khi α là hàm đối với không thời gian, nhóm được gọi là định xứ (local). Chúng ta chỉ quan tâm đến phép biến đổi vi phân:

$$\delta\psi = \psi' - \psi = +i\alpha\psi, \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}$$

Với phép biến đổi này Lagrangian thay đổi như sau:

$$\delta L = \left[\frac{\partial L}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta(\partial_\mu \psi)\right] =$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \psi}\delta\psi + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right)\delta\psi\right]$$

Do Lagrangian thoả mãn phương trình Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right) = 0$$

Cho nên biến thiên của Lagrangian có dạng:

$$\delta L = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} i\alpha\psi \right)$$

Ta định nghĩa mật độ dòng:

$$J^\mu = -i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi$$

thì biến thiên của Lagrangian sẽ có dạng:

$$\delta L = -\alpha \partial_\mu J^\mu - (\partial_\mu \alpha) J^\mu$$

Như vậy sự bất biến của Lagrangian đối với phép biến đổi toàn xứ $U(1)$ kéo theo sự bảo toàn dòng.

Ví dụ, trường electron Dirac có Lagrangian như sau:

$$L_e = \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right]\psi - \frac{1}{2}\left[i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi}\right]\psi$$

Phương trình Euler-Lagrange đối với trường $\psi, \bar{\psi}$ có dạng:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \ \ i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

Mật độ dòng có dạng:

$$J^\mu = -i\left[\frac{\partial L_e}{\partial(\partial_\mu \psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial L_e}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})}\right] = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

Từ phương trình Euler-Lagrange ta suy ra:

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = im(\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\psi) = 0$$

vậy Lagrangian L_e bất biến đối với nhóm $U(1)$ toàn xứ.

Một ví dụ khác, đó là trường vô hướng phức mô tả bởi Lagrangian:

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} - \mu^2 \varphi^* \varphi\right]$$

Phương trình Euler-Lagrange có dạng:

$$\Box \varphi^* + \mu^2 \varphi^* = 0$$

$$\Box \varphi + \mu^2 \varphi = 0$$

Mật độ dòng có dạng:

$$J^\mu = \frac{1}{2}\left[\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi\right]$$

Từ phương trình Euler-Lagrange suy ra dòng bảo toàn:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\mu^2}{2}(\varphi^* \varphi - \varphi^* \varphi) = 0$$

Điều này chứng tỏ rằng, Lagrangian bất biến đối với nhóm $U(1)$ toàn xứ.

2. Nhóm đối xứng định xứ (Local Group Symmetry)

Lý thuyết gauge Abelian $U(1)$

Bây giờ nếu ta chuyển nhóm đối xứng pha này thành định xứ (local), bằng cách thay α thành $\alpha(x)$. Phép biến đổi pha local sẽ được gọi là phép biến đổi gauge, và việc thay tham số không đổi thành tham số phụ thuộc thời gian, thường được gọi là "gauge hoá". Khi đó, ví dụ, đối với lý thuyết trường electron Dirac:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x)$$
$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi'}(x) = e^{i\alpha(x)}\overline{\psi}(x)$$

kéo theo Lagrangian sẽ thay đổi một lượng:

$$\delta L_e = -\left(\partial_\mu \alpha\right) J^\mu$$

bởi vì số hạng đạo hàm trong Lagrangian không còn bất biến:

$$\overline{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \to \overline{\psi'}(x)\partial_\mu\psi'(x) = \overline{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)) =$$
$$= \overline{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\overline{\psi}(x)\partial_\mu\alpha(x)\psi(x)$$

Để khôi phục tính bất biến gauge, ta tìm *đạo hàm hiệp biến* D_μ thay cho đạo hàm thường ∂_μ, sao cho $D_\mu\psi$ ***biến đổi như*** ψ:

$$D_\mu\psi(x) \to \left[D_\mu\psi(x)\right]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)$$

và khi đó, tích $\overline{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ sẽ bất biến. Điều này có thể làm được, nếu mở rộng tập hợp trường ψ ban đầu, đưa thêm trường vectơ $A_\mu(x)$, gọi là trường gauge hay trường bù, và xây dựng đạo hàm hiệp biến:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi$$

trong đó e là tham số tự do. Tham số này thường gọi là lượng tích, mà trong trường hợp lý thuyết trường electron Dirac, nó được đồng nhất với điện tích. Ta hãy tìm quy luật biến đổi $A_\mu(x)$ để yêu cầu đối với đạo hàm hiệp biến được thoả mãn. Ta có:

$$\left[D_\mu\psi(x)\right]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \Rightarrow (\partial_\mu + ieA'_\mu)e^{-i\alpha(x)}\psi(x) =$$
$$= e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu - i\partial_\mu\alpha + ieA'_\mu)\psi(x) = e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x)$$

suy ra, trường gauge phải biến đổi theo quy luật:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$

Để trường gauge trở thành biến động lực thực sự, phải thêm vào Lagrangian phần chứa đạo hàm của trường gauge (kiểu động năng). Nhận xét rằng, nếu đặt:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

thì:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = ieF_{\mu\nu}\psi \qquad (*)$$

và $$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi]' = e^{-i\alpha(x)}[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi] \Rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

Vậy biểu thức đơn giản nhất bất biến gauge của trường gauge có thể thêm vào Lagrangian là:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

và Lagrangian toàn phần cho tập hợp trường (ψ, A_μ), mà còn gọi là Điện động lực học lượng tử, là:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}(x)\psi(x) \qquad (1)$$

Từ Lagrangian này ta có những nhận xét sau đây:

1. Photon không có khối lượng, bởi vì số hạng $A_\mu A^\mu$ không bất biến gauge, nên không thể thêm nó vào Lagrangian được.

2. Tương tác tối thiểu của photon với electron chứa trong đạo hàm hiệp biến $D_\mu\psi$, mà đại lượng này lại được thiết lập nhờ tính chất biến đổi của trường electron. Nói một cách khác, tương tác của photon với một trường vật chất nào đó, sẽ được xác định thông qua tính chất biến đổi của nó đối với một nhóm đối xứng. Tính chất này thường được gọi là tính phổ quát. Những số hạng tương tác bất biến gauge loại khác, có thứ nguyên cao hơn, đại loại như: $\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$, được bỏ qua do yêu cầu của tính tái chuẩn hoá.

3. Lagrangian (1) không chứa số hạng tự tương tác của trường gauge, tức là số hạng chứa A_μ với số mũ cao hơn 2, vậy photon không có điện tích (tức là số lượng tử $U(1)$ bằng không), nghĩa là khi không có trường vật chất, Lagrangian (1) mô tả lý thuyết trường điện từ tự do.

Lý thuyết gauge non-Abelian $SU(2)$

Xét lưỡng tuyến isospin của các trường fermion:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

mà nó làm thành lưỡng tuyến của nhóm đối xứng $SU(2)$. Khi thực hiện phép biến đổi $SU(2)$, nó biến đổi theo quy luật:

$$\psi'(x) \to \psi(x) = \exp\left\{\frac{-i\tau\theta}{2}\right\}\psi(x) = U(\theta)\psi(x)$$

trong đó $\tau = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ là các ma trận Pauli, thoả mãn hệ thức giao hoán:

$$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^k}{2}\right] = i\varepsilon^{ikl}\frac{\tau^l}{2}, \qquad i,k,l = 1,2,3$$

còn $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ là tham số biến đổi của nhóm $SU(2)$. Nếu các tham số θ là những hằng số, nhóm này được gọi là nhóm biến đổi pha global, hay nhóm gauge loại I. Nếu tham số đó là hàm đối với biến không-thời gian $\theta = \theta(x)$ được gọi là nhóm gauge, hay còn gọi là nhóm biến đổi pha local.

Đối với nhóm phép biến đổi pha global, Lagrangian tự do:

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$$

bất biến. Nếu gauge hoá:

$$\psi'(x) \to \psi(x) = \exp\left\{\frac{-i\tau\theta(x)}{2}\right\}\psi(x) = U(\theta)\psi(x)$$

thì cũng như trong trường hợp nhóm Abelian, phần chứa đạo hàm sẽ biến đổi theo quy tắc:

$$\overline{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \to \overline{\psi'}(x)\partial_\mu\psi'(x) = \overline{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) + \overline{\psi}(x)U^{-1}(\theta)[\partial_\mu U(\theta)]\psi(x)$$

nên Lagrangian không còn bất biến. Để khôi phục tính bất biến gauge, học theo trường hợp Abelian, phải đưa vào trường gauge vectơ $A^i_\mu, \quad i = 1,2,3$ (mỗi trường tương ứng với một vi tử của nhóm đối xứng này) và xây dựng đạo hàm hiệp biến:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ig\frac{\tau A_\mu}{2})\psi$$

trong đó g là hằng số liên kết, hay là lượng tích, có vai trò như điện tích e trong trường điện từ. Khi đó, $D_\mu\psi$ ***biến đổi như*** ψ **:**

$$D_\mu\psi \to (D_\mu\psi)' = U(\theta)\psi$$

Từ đó suy ra:

$$(D_\mu\psi)' = (\partial_\mu - ig\frac{\tau A'_\mu}{2})U(\theta)\psi = U(\theta)(\partial_\mu - U^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)$$

$$-igU^{-1}(\theta)\frac{\tau A'_\mu}{2}U(\theta))\psi = U(\theta)D_\mu\psi = U(\theta)(\partial_\mu - ig\frac{\tau A_\mu}{2})\psi$$

Nghĩa là trường gauge phải có quy luật biến đổi:

$$\frac{\tau A'_\mu}{2} = U(\theta)\frac{\tau A_\mu}{2}U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta) \qquad (2)$$

Đối với một phép biến đổi cực vi $\theta(x) \ll 1$, ta có:

$$U(\theta) \approx 1 - i\frac{\vec{\tau}\vec{\theta}(x)}{2}$$

và công thức (2) sẽ có dạng:

$$\frac{\vec{\tau}\vec{A}'_\mu}{2} = \frac{\vec{\tau}\vec{A}_\mu}{2} - i\theta^j A^k_\mu\left[\frac{\tau_j}{2},\frac{\tau_k}{2}\right] - \frac{1}{g}\left(\frac{\vec{\tau}.\partial_\mu\vec{\theta}}{2}\right) = \frac{\vec{\tau}\vec{A}_\mu}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\tau^i\theta^j A^k_\mu - \frac{1}{g}\left(\frac{\vec{\tau}.\partial_\mu\vec{\theta}}{2}\right)$$

hay là:

$$A^{i'}_\mu = A^i_\mu + \varepsilon^{ijk}\theta^j A^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i \qquad (3)$$

Số hạng thứ hai của công thức (3) chứng tỏ rằng, trường bù biến đổi theo biểu diễn phó của nhóm $SU(2)$:

$$\forall A \in SU(2), A \to adA$$

Thực vậy, từ định nghĩa của toán tử $adA = ad(1 - i\theta^i\frac{\tau_i}{2})$, suy ra ma trận của nó:

$$adA(X) = \left[A, X\right] \Rightarrow adA(\frac{\tau^i}{2}) = -i\theta^i ad\frac{\tau^i}{2}\left(\frac{\tau^k}{2}\right) = \varepsilon^{ikl}\theta^i\frac{\tau_l}{2}$$

nghĩa là,

$$\left(adA\right)^{il} = \theta^k\varepsilon^{ikl} \Rightarrow A''^i_\mu = A^i_\mu + \left(adA\right)^{il}A^l_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i$$

Như vậy, trường gauge A^i_μ, khác với trường gauge Abelian, có chứa lượng tích.

Từ đạo hàm hiệp biến, ta có thể xây dựng được lý thuyết bất biến gauge cho hệ trường (ψ, A^i_μ). Phần đóng góp thuần tuý của trường gauge trong Lagrangian sẽ tương tự như biểu thức (*):

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = ig(\frac{\tau_i}{2}F^i_{\mu\nu})\psi$$

trong đó:

$$\frac{\vec{\tau}.\vec{F}_{\mu\nu}}{2} = \partial_\mu \frac{\vec{\tau}.\vec{A}_\nu}{2} - \partial_\nu \frac{\vec{\tau}.\vec{A}_\mu}{2} - ig\left[\frac{\vec{\tau}.\vec{A}_\mu}{2}, \frac{\vec{\tau}.\vec{A}_\nu}{2}\right]$$

hoặc:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ikl} A^k_\mu A^l_\nu$$

Để xem biểu thức $-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$, có bất biến gauge không, ta hãy tìm quy luật biến đổi của $F^i_{\mu\nu}$. Ta chú ý rằng, từ yêu cầu:

$$[D_\mu\psi]' = U(\theta)D_\mu\psi$$

suy ra
$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi]' = U(\theta)(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi$$

hay:
$$\vec{\tau}.\vec{F}'_{\mu\nu}U(\theta)\psi = U(\theta)\vec{\tau}.\vec{F}_{\mu\nu}\psi \Rightarrow \vec{\tau}.\vec{F}'_{\mu\nu} = U(\theta)(\vec{\tau}.\vec{F}_{\mu\nu})U^{-1}(\theta)$$

Với phép biến đổi vi phân $\theta_i \ll 1$ hệ thức đó có dạng:

$$F^{i'}_{\mu\nu} = F^i_{\mu\nu} + \varepsilon^{ijk}\theta^j F^k_{\mu\nu}$$

Như vậy, khác với trường hợp Abelian, trường gauge non-Abelian không bất biến mà biến đổi như một tam tuyến. Tuy vậy, tích:

$$tr\left\{(\vec{\tau}.\vec{F}_{\mu\nu})(\vec{\tau}.\vec{F}^{\mu\nu})\right\} = 2F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$$

bất biến gauge:

$$tr\left\{(\vec{\tau}.\vec{F}'_{\mu\nu})(\vec{\tau}.\vec{F}'^{\mu\nu})\right\} = tr\left\{U(\theta)(\vec{\tau}.\vec{F}_{\mu\nu})U^{-1}(\theta)U(\theta)(\vec{\tau}.\vec{F}^{\mu\nu})U^{-1}(\theta)\right\} =$$

$$tr\left\{(\vec{\tau}.\vec{F}_{\mu\nu})(\vec{\tau}.\vec{F}^{\mu\nu})\right\} = 2F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$$

Vì lẽ đó, ta sẽ chọn:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$$

làm phần Lagrangian động lực cho trường gauge. Tóm lại, Lagrangian toàn phần bất biến gauge sẽ là:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi =$$

$$= -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}.\vec{A}_\mu}{2})\psi - m\overline{\psi}\psi$$

Lý thuyết gauge non-Abelian tổng quát

Từ kết quả cho nhóm $SU(2)$, ta có tổng quát hoá cho một nhóm đối xứng có chiều cao hơn và với một biểu diễn tuỳ ý của trường ψ. Gọi G

nhóm non-Abelian đơn tuỳ ý. Các vi tử của nhóm này thoả mãn hệ thức giao hoán:

$$[F^a, F^b] = iC^{abc}F^c$$

trong đó C^{abc} là hằng số cấu trúc hoàn toàn phản đối xứng. Giả sử ψ thuộc một biểu diễn nào đó mà các vi tử được biểu diễn bằng các ma trận T^a:

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c$$

Khi đó, đạo hàm hiệp biến sẽ có dạng:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - igT^a A_\mu^a)\psi$$

còn tensơ bậc hai cho trường gauge là:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

$$(\vec{T}.\vec{F})_{\mu\nu} = \partial_\mu(\vec{T}.\vec{A}_\nu) - \partial_\nu(\vec{T}.\vec{A}_\mu) - ig[\vec{T}.\vec{A}_\mu, \vec{T}.\vec{A}_\nu]$$

Lagrangian dạng:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu(D_\mu - m)\psi =$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\vec{T}.\vec{A}_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi$$

sẽ bất biến đối với phép biến đổi gauge:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(T\theta(x))\psi(x) = U(\theta_x)\psi(x)$$

$$\vec{T}.\vec{A}_\mu(x) \to \vec{T}.\vec{A}'_\mu(x) = U(\theta_x)\vec{T}.\vec{A}_\mu U^{-1}(\theta_x) - \frac{i}{g}\left[\partial_\mu U(\theta_x)\right]U^{-1}(\theta_x)$$

hoặc dưới dạng vi phân:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) - iT^a\theta^a(x)\psi(x)$$

còn trường A_μ có quy tắc biến đổi sau đây:

$$A_\mu^a(x) \to A_\mu'^a(x) = A_\mu^a(x) + C^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)$$

Thành phần thuần tuý Yang-Mill $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ chứa số hạng bậc ba và bậc bốn đối với A_μ^a:

$$-gC^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{g^2}{4}C^{abc}C^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu}A^{e\nu}$$

Các số hạng này diễn tả sự tự tương tác của trường gauge non-Abelian. Chúng xuất hiện do có các thành phần phi tuyến trong $F_{\mu\nu}^a$, điều này cũng bởi trường gauge A_μ^a không biến đổi tầm thường, như trong trường hợp Abelian, mà nó biến đổi như các vi tử hay như các phần tử thuộc biểu diễn liên kết. Mặc dù trường hợp non-Abelian khác với trường hợp Abelian, nhưng tính phổ quát và tính không khối lượng vẫn giống như cũ. Chú ý rằng, số lượng của các trường gauge không khối lượng bằng số vi tử của nhóm đối xứng. Đối với tính phổ quát, ta có hai nhận xét sau đây:

1. Trong trường hợp lý thuyết trường Abelian, không có hạn chế gì đối với lực tương tác giữa trường gauge và nhiều trường vật chất khác. Nói riêng, ngoài trường trường electron với điện tích e, có thể xét cả trường khác với điện tích λe. Đối với trường non-Abelian, ví dụ như trường hợp $SU(2)$, nếu ngoài lưỡng tuyến ψ với lượng tích g, còn có lưỡng tuyến ϕ với lượng tích λg, thì trong hệ thức giao hoán, mỗi vi tử phải nhân với λ, điều này dẫn đến điều kiện $\lambda^2 = \lambda$, hay $\lambda = 1$.

2. Liệu có tồn tại nhiều trường gauge khác nhau tương ứng với nhiều phép biến đổi gauge khác nhau hay không? Nếu nhóm là đơn, ta chỉ có một trường gauge, nhưng nếu nhóm là tích của các nhóm đơn, ví dụ:

$$G = SU(2) \times SU(3)$$

khi đó do các vi tử của các nhóm đó là giao hoán nhau, nên sẽ tồn tại hai trường gauge tương ứng với hai lượng tích khác nhau.

Ví dụ: nhóm đối xứng là $SU(N)$, mà các phần tử của nó có thể viết thành:

$$(U)_i^k = \delta_i^k + i\varepsilon_i^k, (U^+)_i^k = \delta_i^k - i\varepsilon_i^k$$

còn trường vật chất là một vectơ $n-$chiều ϕ_i và liên hợp phức của nó ϕ^i biến đổi theo quy tắc:

$$\phi_i \to \phi_i + i\varepsilon_i^k \phi_k, \quad \phi^i \to \phi^i - i\varepsilon_k^i \phi^k, \quad (\phi^i)^* = \phi_i$$

hoặc trường trong biểu diễn phó ϕ_i^k, biến đổi theo quy tắc:

$$\phi_i^k \to \phi_i^k + i\varepsilon_i^j \phi_j^k - i\varepsilon_j^k \phi_i^j$$

Ta hãy tìm đạo hàm hiệp biến cho từng trường hợp, quy tắc biến đổi của trường bù, và hãy tìm đạo hàm hiệp biến cho trường vô hướng trong biểu diễn phó.

Cho trường vectơ:

$$(D\phi)_i = \partial_\mu \phi_i + ig(A_\mu)_i^k \phi_k$$

với điều kiện nó phải biến đổi như trường ϕ_i:

$$(D_\mu \phi)'_i = (D_\mu \phi)_i + i\varepsilon_i^k (D_\mu \phi)_k$$

Từ điều kiện này, ta suy ra quy tắc biến đổi của trường gauge:

$$\partial_\mu \phi'_i + ig(A'_\mu)_i^k \phi'_k = \partial_\mu(\phi_i + i\varepsilon_i^k \phi_k) + ig(A'_\mu)_i^k(\phi_k + i\varepsilon_k^j \phi_j) =$$

$$\partial_\mu \phi_i + i\partial_\mu \varepsilon_i^k \phi_k + i\varepsilon_i^k \partial_\mu \phi_k + ig(A'_\mu)_i^k(\phi_k + i\varepsilon_k^j \phi_j) =$$

$$\partial_\mu \phi_i + ig(A_\mu)_i^k \phi_k + i\varepsilon_i^k(\partial_\mu \phi_k + ig(A_\mu)_k^j \phi_j)$$

Vậy: $$i\partial_\mu \varepsilon_i^k \phi_k + ig(A'_\mu)_i^k(\phi_k + i\varepsilon_k^j \phi_j) = ig(A_\mu)_i^k \phi_k + i\varepsilon_i^k ig(A_\mu)_k^j \phi_j$$

$$\frac{1}{g}\partial_\mu \varepsilon_i^k + (A'_\mu)_i^k + (A'_\mu)_i^j i\varepsilon_j^k = (A_\mu)_i^k + \varepsilon_i^j i(A_\mu)_j^k$$

Hay, chỉ giữ đến số hạng bậc nhất đối với ε:

$$\frac{1}{g}\partial_\mu \varepsilon_i^k + (A'_\mu)_i^j(\delta_j^k + i\varepsilon_j^k) = (A_\mu)_i^k + \varepsilon_i^j i(A_\mu)_j^k \Rightarrow$$

$$(A'_\mu)_i^k = (A_\mu)_i^k - i\varepsilon_j^k (A_\mu)_i^j + i\varepsilon_i^j (A_\mu)_j^k - \frac{1}{g}\partial_\mu \varepsilon_i^k$$

Bất biến gauge và hình học

Sau lý thuyết tương đối tổng quát của Einstein, Weyl cũng muốn xây dựng một lý thuyết điện từ, trong đó, thế điện từ được đồng nhất với hệ số liên kết trong bất biến tỷ lệ xích. Nếu từ một điểm cho trước đến một điểm cách nó một khoảng dx^μ, tỷ lệ xích sẽ thay đổi một lượng bằng $1 + S_\mu dx^\mu$, và một hàm bất kỳ $f(x)$ sẽ thay đổi một lượng bằng:

$$f(x) \to (f + (\partial_\mu f)dx^\mu)(1 + S_\mu dx^\mu) = f + \left[(\partial_\mu + S_\mu)f\right]dx^\mu$$

do đó, Weyl đã đồng nhất:

$$S_\mu \leftrightarrow A_\mu$$

Lý thuyết của Weyl tỏ ra không thành công. Về sau, khi cơ học lượng tử phát triển, người ta đã chứng tỏ rằng, xung lượng chính tắc được thay bằng toán tử $-i\partial_\mu$, (trong đơn vị $\hbar = c = 1$), còn xung lượng chính tắc trong trường điện từ được thay với toán tử:

$$-i\partial_\mu + eA_\mu = -i\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)$$

nên, hệ số biến đổi tỷ lệ xích đúng đắn phải là:

$$S_\mu \leftrightarrow iA_\mu$$

Do Weyl dùng thuật ngữ tỷ lệ xích, hay chuẩn (gauge), nên các phép biến đổi tỷ lệ xích local được gọi là phép biến đổi gauge, mà ta còn gọi trong thuật ngữ Việt Nam là phép biến đổi chuẩn.

Bây giờ ta xét sự liên hệ giữa trường chuẩn và cấu trúc hình học của không-thời gian.

Giả sử cho một trường vectơ V^μ. Nếu không gian là Riemann với metric $g_{\mu\nu}$ tuỳ ý, thì đạo hàm của V^μ không có tính tensơ, vì nó là hiệu của vectơ tại hai điểm khác nhau, nên tính chất biến đổi của chúng cũng khác nhau. Để khôi phục tính tensơ, ta phải dịch chuyển song song một trong hai vectơ đến cùng một điểm với vectơ còn lại thì khi đó hiệu của chúng mới biến đổi theo cùng một ma trận. Như vậy, nếu gọi δV^{μ} là lượng biến đổi của vectơ sau khi dịch chuyển song song, ta có thể giả thiết rằng:

$$\delta V^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\nu} dx^{\rho}$$

Khi đó:

$$V^{\mu}(x') \to V^{\mu}(x') - V^{\mu}(x) + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\nu} dx^{\rho} = \left[\partial_{\rho} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\nu}\right] dx^{\rho}$$

Vậy, phải thay đạo hàm thường ∂_{μ} thành đạo hàm hiệp biến D_{μ}:

$$\partial_{\mu} V^{\rho} \to D_{\mu} V^{\rho} = \partial_{\mu} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} V^{\nu} = V^{\rho}_{;\mu}$$

hệ số $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ được gọi là hệ số liên kết affine, hay hệ số Christoffel của không gian Riemann. Hế số này được giả thiết là đối xứng với cặp chỉ số dưới (nếu không đối xứng, không gian sẽ có độ xoắn). Chú ý rằng, do $A^{\mu} B_{\mu}$ bất biến, nên khi dịch chuyển song song, nó không thay đổi. Vì vậy:

$$D_{\mu} V_{\rho} = V_{\rho;\mu} = \partial_{\mu} V_{\rho} - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} V_{\nu}$$

Khái niệm quan trọng tiếp theo trong không gian Riemann là khái niệm tensơ độ cong của không gian. Nếu ta xét sự thay đổi của một vectơ khi tịnh tiến song song nó dọc theo một đường khép kín, thì đại lượng này phụ thuộc vào tensơ độ cong của không gian. Thực vậy, nếu xét đường cong đó là hình bình hành $PP_1P_2P_3$ tạo bởi hai vectơ a^{μ} bà b^{μ} và các vectơ thu được từ chúng bằng các dịch chuyển song song. Khi đó, vectơ V_{μ} khi dịch chuyển song song từ P đến P_2 bằng hai đường PP_1P_2 và PP_3P_2 sẽ biến đổi một lượng bằng:

$$\delta V_{\mu} = (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_P a^{\nu} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_{P_1} (b^{\nu} + \delta b^{\nu})$$

$$\delta V'_{\mu} = (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_P b^{\nu} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_{P_2} (a^{\nu} + \delta a^{\nu})$$

Mặt khác, khai triển vectơ tại P_1 và P_2 theo giá trị tại P, ta có:

$$(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_{P_1} = (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \partial_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} a^{\beta})(V_{\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho} V_{\sigma} a^{\rho})$$

$$(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_{P_2} = (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \partial_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} b^{\beta})(V_{\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho} V_{\sigma} b^{\rho})$$

và chú ý rằng,

$$a^{\nu} + \delta a^{\nu} = a^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\zeta\xi} a^{\zeta} b^{\xi}$$

$$b^{\nu} + \delta b^{\nu} = b^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\zeta\xi} a^{\zeta} b^{\xi}$$

(ở đây ta sử dụng tính đối xứng của cặp chỉ số dưới). Vậy:

$$\begin{aligned}
\Delta V_{\mu} &= (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_P a^{\nu} + (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \partial_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} a^{\beta})(V_{\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho} V_{\sigma} a^{\rho})(b^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\zeta\xi} a^{\zeta} b^{\xi}) + \\
&- (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha})_P b^{\nu} - (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \partial_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} b^{\beta})(V_{\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho} V_{\sigma} b^{\rho})(a^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\zeta\xi} a^{\zeta} b^{\xi}) = \\
&= (\partial_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\xi} \Gamma^{\xi}_{\nu\beta} V_{\alpha}) a^{\beta} b^{\nu}
\end{aligned}$$

Để diễn tả ký hiệu Christoffel qua tensơ metric, ta chú ý rằng đạo hàm hiệp biến của tensơ metric bằng 0. Nó được biểu diễn thông qua tensơ metric của không gian:

$$g_{\mu\nu;\rho} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu} g_{\kappa\mu} = 0$$

$$g_{\nu\rho;\mu} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\rho} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} g_{\kappa\rho} = 0$$

$$g_{\rho\mu;\nu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\rho} g_{\kappa\nu} = 0$$

Từ đó suy ra:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\rho} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} g_{\kappa\rho} = 2\Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\rho}$$

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu})$$