

[www.mientayvn.com](http://www.mientayvn.com)

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao i tr c tuy n t i:

[www.mientayvn.com/chat\\_box\\_li.html](http://www.mientayvn.com/chat_box_li.html)

TS. PHẠM DUY LÁC

*Lý thuyết*  
**TRƯỜNG LƯỢNG TỬ**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*  
Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI  
Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

*Biên tập :*  
TRẦN NGỌC KHÁNH

*Trình bày bìa :*  
TẠ TRỌNG TRÍ

*Sửa bản in :*  
NGUYỄN THU HẰNG

*Chế bản :*  
NGUYỄN MINH CHÂU

## MỞ ĐẦU

Ngày nay với sự phát triển không ngừng của vật lý hạt cơ bản, nhiều hạt cơ bản mới được tìm ra nhờ những tiến bộ vượt bậc của kỹ thuật máy gia tốc các hạt. Vượt lên trên hết là khối lượng đồ sộ các số liệu thực nghiệm, lượng thông tin mới về là chỗ lý giải thế nào bản chất của hạt về cấu trúc, các tính chất, các tương tác và sự sinh hủy chuyển hóa lẫn nhau giữa chúng. Lý thuyết trường lượng tử ra đời cùng với các thành tựu của lý thuyết đối xứng trong của các hạt cơ bản và mô hình quark của cấu tạo hạt hadron, các quark duyên và gắn liền với nó một số lượng tử đặc biệt, kết hợp với nguyên lý động lực học của sự đối xứng chuẩn định xứ, lý thuyết thống nhất các tương tác điện từ yếu, cho phép giải thích một cách định lượng gần như tất cả các số liệu thực nghiệm về các quá trình xảy ra do tương tác này gây nên, tiên đoán được sự tồn tại của các hạt tải của tương tác yếu – các bozon véc tơ và các hạt cơ bản mới khác. Đó là mốc lịch sử mà lý thuyết trường lượng tử đã mở ra giúp chúng ta nhận biết các quá trình vật lý diễn ra trong thế giới vi mô đều do sự chuyển động và tương tác của các vi hạt tạo nên chúng tạo thành. Với vai trò như vậy vật lý trường lượng tử - vật lý hạt cơ bản chắc chắn sẽ có những đóng góp quan trọng trong sự phát triển vật lý hiện đại.

Lý thuyết trường lượng tử hình thành trên cơ sở kết hợp lý thuyết tương đối (giúp ta có những hiểu biết mới về các tính chất của không gian và thời gian, có hằng số  $c$  đặc trưng – vận tốc ánh sáng trong chân không) và cơ học lượng tử (chỉ ra những giới hạn ứng dụng các khái niệm cổ điển vào thế giới vi mô, có hằng số đặc trưng là hằng số Planck). Để đi đến lý thuyết trường lượng tử - lý thuyết tương đối của nhiều vật trong đó có thể phản ánh được sự sinh hủy của các hạt, trước hết chúng ta điếm lại một số nội dung cơ bản của cơ học lượng tử (lý thuyết tương đối của một vật). Qua đó chúng ta có nhận thức sâu sắc hơn về không gian, về thời gian, về các dạng vật chất và chuyển động của chúng.

*Phần thứ nhất*

# **NỘI DUNG CƠ BẢN CỦA CƠ HỌC LƯỢNG TỬ**

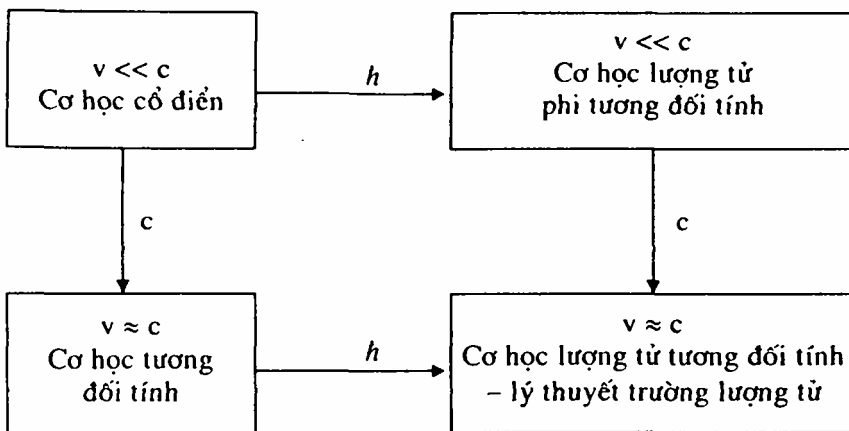
## §1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ CHUYỂN ĐỘNG, KHÔNG THỜI GIAN, TÍNH SÓNG HẠT

Chúng ta biết rằng lý thuyết hiện đại hình thành trên cơ sở hai lý thuyết chủ yếu: Lý thuyết tương đối của ANHSTANH (Albert Einstein) và lý thuyết lượng tử. Lý thuyết tương đối ANHSTANH được đặc trưng bởi vận tốc ánh sáng (hay còn gọi là vận tốc truyền tương tác  $c \approx 3.10^8$  m/s).

Lý thuyết lượng tử được đặc trưng bởi hằng số Planck  $\hbar$  ( $\hbar$  còn gọi là lượng tử tác dụng). Hằng số này biểu thị các giá trị gián đoạn (phân lập) khả dĩ của các đại lượng vật lý và sự quan hệ giữa hai tính sóng - hạt của vật chất chuyển động.

$$h = 6,62517.10^{-34} \text{ j.s} ; \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Dựa vào hai hằng số này ( $c, \hbar$ ) ta có thể rút ra sự liên hệ giữa lý thuyết lượng tử và lý thuyết tương đối tính theo phác đồ sau :



$v$  là vận tốc của đối tượng chuyển động đang xét.

## 1. Các dạng chuyển động

Theo cơ học cổ điển vật chất có hai dạng chuyển động, đó là dạng chuyển động hạt và dạng chuyển động sóng. Dạng chuyển động hạt được đặc trưng bởi sự định xứ của vật trong không gian và sự tồn tại quỹ đạo, còn dạng chuyển động sóng được đặc trưng bởi sự không định xứ trong không gian. Sóng là quá trình truyền nhiễu loạn trong không gian với vận tốc không đổi và mang theo năng lượng. Chuyển động của sóng là chuyển động của trạng thái vật chất chứ không phải là sự truyền vật chất - là sự truyền pha từ phần tử vật chất này đến phần tử vật chất kia. Chuyển động sóng tuần hoàn trong không gian và thời gian. Sóng có khả năng nhiễu xạ và giao thoa. Sóng cơ và sóng điện từ có thể thu và phát được. Một loại sóng mà chúng ta cần đề cập quan tâm đến - đó là sóng gắn liền với chuyển động của vi hạt vật chất (sóng Debroi). Sóng Debroi khác với sóng cơ và sóng điện từ ở chỗ không có nguồn phát và không có nguồn thu, nhưng nhận biết được nó qua các hiện tượng vật lý tìm được thể hiện tính giao thoa và nhiễu xạ của sóng Debroi; mà hàm sóng phẳng tương ứng với nó có dạng :

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \quad (I-1)$$

Hàm sóng thỏa mãn phương trình sóng:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (I-2)$$

(v - tần số)

## 2. Không thời gian và các biến động lực

Vật chất luôn luôn vận động và chỉ có thể vận động trong không gian và thời gian. Nói cách khác không gian và thời gian là hình thức phản ánh khách quan sự tồn tại cơ bản của vật chất đang vận động.

*Không gian* : Tất cả các vật thể vật chất tuy có hình thù bên ngoài khác nhau, nhưng đều có kích thước (dài - ngắn, rộng - hẹp, cao - thấp và chiếm một thể tích nhất định trong không gian. Từ lâu tất cả những tính chất chung nhất của các vật thể vật chất đã được phản ánh trong ý

thức của con người dưới dạng khái niệm không gian. Cũng từ đó hình thành các khái niệm hình học nghiên cứu các quan hệ không gian và hình dáng vật thể phản ánh các tính chất đó.

*Thời gian*: Là đặc tính biểu thị thời hạn nhất định của các quá trình vật chất diễn ra theo một trình tự nhất định và được tiến triển theo từng bước, từng giai đoạn phát triển.

Theo quan niệm cổ điển thì không gian = thời gian là tuyệt đối, không biến đổi, chúng độc lập với nhau và với vật chất.

*Các biến động lực*: Để mô tả trạng thái vật thể và chuyển động của nó, trong vật lý cổ điển người ta dùng các biến động lực như năng lượng, động lượng (xung lượng) và mômen động lượng. Các đại lượng vật lý cơ bản này được đưa vào thông qua các định luật bảo toàn : năng lượng, động lượng và mômen động lượng. Các định luật này là hệ quả của các tính chất đồng nhất của không gian và thời gian.

Cho đến nay chưa có một thực nghiệm nào chỉ ra sự vi phạm các tính chất đối xứng của không thời gian trong các hiện tượng vi mô. Vì vậy các biến động lực nói ở trên vẫn được sử dụng để mô tả trạng thái chuyển động trong thế giới vi mô.

Trong cơ học cổ điển, phương trình Newton :

$$\text{Lực} = (\text{khối lượng}) \times (\text{gia tốc})$$

Có một ý nghĩa cơ bản quan trọng : Lực biểu thị nguyên nhân gây ra vận động, còn khối lượng là thuộc tính của vật chất và gia tốc biểu thị hệ thức giữa không gian và thời gian. Như vậy phương trình Newton thể hiện mối quan hệ giữa vật chất, vận động, không gian, thời gian và nguyên nhân gây ra sự vận động đó. Cơ học Newton cùng với lý thuyết điện từ của Maxwell đã mô tả được về cơ bản mọi hiện tượng vật lý của thế giới vĩ mô, nhưng lại nảy sinh những mâu thuẫn khi giải thích những hiện tượng kích thước nguyên tử (kích thước vi mô).

### **3. Tính chất sóng - hạt của vật chất và giả thuyết Đơbroi (Debroglie)**

Bằng thực nghiệm Đavisson và Germer đã phát hiện ra hiện tượng



nhiều xạ electron (năm 1927). Điều đó chứng tỏ không chỉ ánh sáng mà ngay cả electron cũng có lưỡng tính sóng - hạt. Như vậy giả thuyết electron (như một điện tích nhỏ nhất) có tính chất sóng là có cơ sở thực nghiệm vững chắc (chẳng hạn hiện tượng nhiễu xạ qua khe hẹp, nhiễu xạ trên tinh thể,...). Bằng chứng thực nghiệm về tính sóng của electron ngày nay đã được ứng dụng trong kỹ thuật, trong máy nhiễu xạ electron, máy bán dẫn, v.v...

Từ những kết quả trên Đơbroi đã mở rộng lưỡng tính sóng - hạt của ánh sáng cho mọi vi hạt khác bằng giả thuyết (ông tiên đoán từ năm 1924) rằng tất cả các hạt vi mô như electron vừa có tính chất hạt vừa có tính chất sóng giống như ánh sáng.

Mỗi vi hạt tự do có năng lượng  $W$  và động lượng  $\vec{P}$  xác định được mô tả bằng một sóng phẳng đơn sắc có tần số vòng  $\omega$  và véc tơ sóng  $\vec{K}$  với :

$$W = \hbar\omega ; \vec{P} = \hbar\vec{K} \quad (I-3)$$

và sóng phẳng viết dưới dạng phức :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})\right] = \Psi_0 \exp\left[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right] \quad (I-4)$$

## §2. CƠ SỞ VẬT LÝ CỦA CƠ HỌC LƯỢNG TỬ

### 1. Hai ý tưởng của cơ học lượng tử

- Trước hết là ý tưởng lượng tử hóa (tính gián đoạn hay tính nguyên tử)
- Sau đó là ý tưởng lưỡng tính sóng - hạt.

**a) Ý tưởng lượng tử hóa** : ý tưởng này nảy sinh từ việc một vài đại

lượng vật lý mô tả các đối tượng vi mô trong những điều kiện nhất định chỉ có thể nhận các giá trị rời rạc xác định : ta nói chúng bị lượng tử hóa.

Điều cần nhấn mạnh nữa là năng lượng của bất cứ vi hạt nào ở trạng thái liên kết (thí dụ như electron trong nguyên tử) cũng đều bị lượng tử hóa, trong khi đó năng lượng của electron chuyển động tự do không bị lượng tử hóa. Khi electron chuyển từ trạng thái đặc trưng bởi năng lượng  $W_1$  sang trạng thái đặc trưng bởi năng lượng  $W_2$ , sau khi nhận hoặc phát ra một lượng tử thì sự chuyển dời đó gọi là chuyển dời lượng tử. Người đầu tiên đưa ra ý tưởng lượng tử là Planck (1900) khi nghiên cứu bức xạ của vật đen tuyệt đối. Ý tưởng đó chứa đựng trong giả thuyết : "Năng lượng của bức xạ điện từ do vật phát ra không phải là liên tục mà là phát ra dưới dạng những lượng tử gián đoạn (gọi là các lượng tử năng lượng) ; và mỗi lượng tử mang năng lượng :

$$W = \hbar\omega$$

với  $\omega$  là tần số bức xạ.

Tiếp đó Bohr (năm 1913) đã áp dụng thành công ý tưởng lượng tử hóa để xây dựng lý thuyết lượng tử bán cổ điển nhằm giải thích cấu tạo quang phổ vạch của nguyên tử hydro theo mẫu hành tinh nguyên tử của Rutherford.

### *b) Ý tưởng lưỡng tính sóng hạt*

Theo quan niệm vật lý cổ điển hạt và sóng là hai mặt đối lập loại trừ nhau. Nếu là hạt thì phải có quỹ đạo xác định, có những hiện tượng đặc trưng như va chạm..., là sóng thì có những đặc trưng như nhiễu xạ, giao thoa... hạt không thể có đặc trưng của sóng và ngược lại. Nhưng chuyển động động của các hạt vi mô lại được đồng thời đặc trưng bằng cả tính sóng và cả tính hạt. Thực ra hai mặt đối lập này kết hợp với nhau một cách biện chứng thống nhất tạo nên lưỡng tính sóng - hạt của hạt vi mô.

Ý tưởng sóng - hạt đã được ANHSTANH áp dụng cho bức xạ điện từ để giải thích các hiện tượng quang điện. Sau đó Đơbrioi đã mở rộng ý

tương đó cho tất cả các đối tượng vi mô nói chung. Ngày nay lưỡng tính sóng - hạt được hiểu như khả năng sẵn có của thế giới vi mô thể hiện những tính chất khác nhau của mình phụ thuộc vào các điều kiện cụ thể, chẳng hạn như điều kiện quan sát,...

Mỗi vi hạt có những đặc trưng hạt (năng lượng và động lượng) và cả những đặc trưng sóng (tần số, bước sóng):

$$W = \hbar\omega ; \vec{P} = \hbar\vec{K} \quad (I-5)$$

(Hệ thức Planck - Einstein)

$$(W, \vec{P}) \text{ tính hạt} \xleftrightarrow{h} \text{ tính sóng } (\omega, \vec{k})$$

$$\text{Với bước sóng } \lambda = \frac{h}{p}$$

## 2. Các hệ thức bất định

Heisenberg và Bohr là người đầu tiên sử dụng hệ thức Planck - Einstein áp dụng cho các đặc trưng hạt của vi hạt đã đưa ra hệ thức:

$$\Delta P_x \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (I-6)$$

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar \quad (I-7)$$

gọi là các hệ thức bất định.

Hệ thức (I-6) có ý nghĩa là : Nếu vi hạt được định xứ tại một điểm xác định ứng với tọa độ x (độ bất định về tọa độ  $\Delta x = 0$ ) thì hình chiếu  $P_x$  của động lượng của nó phải có độ lớn tùy ý, có nghĩa là vi hạt phải lan ra theo cả trục x. Điều đó chứng tỏ trong cơ học lượng tử vi hạt không thể có đồng thời tọa độ xác định và giá trị hình chiếu động lượng xác định, tương ứng là không có khái niệm quỹ đạo. Do thời gian chỉ là một tham số chứ không phải là biến động lực nên  $\Delta t$  không phải là độ bất định của thời gian, vì thế hệ thức (I-7) có thể giải thích theo nhiều cách khác nhau:

Nếu hệ ở trạng thái kích thích trong khoảng thời gian  $\Delta t$  thì khi đó hệ không thể có năng lượng xác định và độ bất định năng lượng của hệ

là :

$$\Delta W \geq \frac{\hbar}{\Delta t} \quad (I-8)$$

Lưu ý rằng cổ độ bất định về năng lượng không có nghĩa là năng lượng không được bảo toàn. Bởi lẽ nếu hệ ở trạng thái dừng, năng lượng của hệ không thay đổi theo thời gian, như vậy ta có thể đo năng lượng trong khoảng thời gian ít tùy ý (từ  $t = 0$  đến  $t = \infty$ ). Nghĩa là khi  $\Delta t = \infty$  thì  $\Delta W = 0$  và không có sự sai lệch nào về trị số năng lượng. Nhờ hệ thức (I-7) ta biết được thời gian sống của các vi hạt.

Sự "bất định" ở đây nên hiểu rằng : không phải là do những sai số ngẫu nhiên của phép đo hay sự không hoàn thiện của các thiết bị vật lý mà do động lượng và tọa độ không có ý nghĩa vật lý khi cùng một tọa độ vi hạt.

Hệ thức bất định là một trong những hệ quả quan trọng nhất của lý thuyết Đơbroi về lưỡng tính sóng - hạt của vi hạt, là hệ thức cơ bản nhất của cơ học lượng tử.

### 3. Cách mô tả lượng tử các hiện tượng (kích thước nguyên tử)

Theo vật lý cổ điển thì các quá trình vật lý hoàn toàn độc lập với các quan sát, có nghĩa là tác dụng của quan sát chỉ là nhiễu loạn không đáng kể đến trạng thái của hệ. Vì vậy chúng ta có khả năng mô tả không những tuyệt đối mà còn tường tận trạng thái chuyển động của hệ vật lý và có thể lắp ghép các phép đo rời rạc lại thành một bức tranh thống nhất mô tả trọn vẹn một đối tượng.

Song trong vật lý lượng tử để thấu hiểu được các hiện tượng vật lý đòi hỏi phải kết hợp cả tính sóng và tính hạt với nhau.

Vì vậy các khái niệm trạng thái và các đại lượng vật lý (thí dụ như tọa độ, động lượng) trong vật lý cổ điển được coi là tuyệt đối thì trong cơ học lượng tử chúng lại có những đặc tính tương đối gắn liền với các điều kiện (thiết bị đo) mà trong đó các hiện tượng vi mô xảy ra. Nhưng các điều kiện vật chất cần thiết để quan sát một tính chất nào đó có thể

không tương thích với các điều kiện vật chất để quan sát một tính chất khác. Bởi vậy không thể kết hợp các tính chất tương ứng không tương thích lại thành bức tranh rõ ràng của đối tượng. Điều đó là chỗ dựa giúp ta giải thích các nghịch lý và các mâu thuẫn đã nêu ở phần đầu.

Thí dụ : Ta gọi quan sát vị trí là A, quan sát động lượng là B và kí hiệu quan sát B tiếp theo quan sát A là AB, như vậy những quan sát trên theo thứ tự ngược lại được kí hiệu là BA. Vì mỗi quan sát có thể gây ra nhiễu loạn, nên làm ảnh hưởng đến kết quả của các quan sát tiếp theo. Do đó hai cách quan sát khác nhau có thể dẫn đến các kết quả khác nhau, điều này được kí hiệu một cách toán học như sau:

$$AB - BA \neq 0 \qquad (I-9)$$

Trị số của biểu thức này đương nhiên phải liên hệ với độ lớn của những nhiễu loạn không thể tránh khỏi. Chính ở đây dựa vào lý thuyết lượng tử cũ ta có thể đưa vào lý thuyết một hằng số lượng tử mới đó là hằng số Planck:

Theo hình thức luận cổ điển thì các định luật của thế giới vĩ mô có thể được biểu thị một cách toán học bằng những số, nhưng trong hình thức luận lượng tử các định luật và hiện tượng vi mô (kích thước nguyên tử) được biểu thị bằng những khái niệm toán học trừu tượng hơn - đó là các toán tử và chúng không tuân theo quy luật giao hoán của phép nhân. Nếu bây giờ ta giả thiết những quan sát A, B ... được biểu thị bằng những toán tử  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ... có nghĩa là đối với những tính chất quan sát được như năng lượng, vị trí, động lượng,... có thột toán tử tương ứng. Những hàm số mà các toán tử tác dụng lên chúng biểu diễn trạng thái của hệ vi hạt và chúng được gọi là hàm số trạng thái - hàm sóng.

Chẳng hạn dạng toán tử tọa độ, động lượng :

$$\hat{x}p - p\hat{x} = i\hbar \qquad (I-10)$$

Trong các điều kiện nhất định hàm sóng đặc trưng cho trạng thái của vi hạt và cho phép ta chuyển từ dạng toán tử tới các giá trị quan sát của đại lượng lượng tử trên thí nghiệm. Đồng thời bình phương môđun hàm

sóng cho biết xác suất tìm thấy hạt ở một nơi nào đó vào thời điểm đã cho. Với cơ học lượng tử yếu tố ngẫu nhiên xuất hiện ngay cả đối với từng vi hạt riêng biệt. Do vậy về mặt nguyên tắc cơ học lượng tử là một lý thuyết thống kê và xác suất là một trong những đặc điểm của nó. Đến đây ta có thể tóm lại những đặc điểm cơ bản của cơ học lượng tử là:

- Vi hạt có tính chất lưỡng tính sóng - hạt. Hàm sóng là một khái niệm mới, nó xác định trạng thái của vi hạt.

Dáng điệu của vi hạt biểu lộ khác nhau tùy thuộc vào điều kiện và đặc tính quan sát. Thí dụ đặc tính "hạt" thể hiện rõ hơn khi xét tương tác, tính "sóng" thể hiện rõ hơn khi xét chuyển động. Các tính chất được suy ra từ sự hữu hạn của hằng số Planck.

- Các định luật của thế giới vi mô là các định luật thống kê.

#### **4. Cách phát biểu của cơ học lượng tử**

Trong cơ học lượng tử hai hình thức luận phát biểu tương đương nhau là: cơ học sóng và cơ học ma trận.

##### *a) Cơ học sóng*

Phương trình Schrödinger là cơ sở của cơ học sóng - phương trình truyền hàm sóng đặc trưng cho hệ lượng tử:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t)$$

Các nhà khoa học thừa nhận phương trình này như một tiên đề và thực nghiệm là chỗ dựa minh chứng chủ yếu của phương trình Schrödinger.

##### *b) Cơ học ma trận*

Trên cơ sở phân tích các đại lượng quan sát được hay đo được chẳng hạn như tần số và cường độ bức xạ phát ra (đặc trưng cho các chuyển động bên trong của nguyên tử), Heisenberg nhận thấy rằng chúng có tính gián đoạn. Vật lý cổ điển đã xếp những tần số bức xạ mà nguyên tử phát ra theo hàng:

$$v = v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

Nhưng những tần số quan sát được trong thí nghiệm (do Ritz phát hiện) luôn luôn được xác định bằng hai chỉ số nguyên:

$$v = v_{12}, v_{21}, \dots, v_{mn}, \dots$$

$$v_{mn} = \frac{W_m - W_n}{h} \quad (I-12)$$

Theo Heisenberg thì tần số phải xếp theo một bảng gọi là ma trận số, mỗi số hạng có hai chỉ số (chỉ số thứ nhất chỉ hàng và chỉ số thứ hai chỉ cột):

$$v = \begin{pmatrix} 0 & v_{12} & v_{13} & \dots & v_{1m} \dots \\ v_{21} & 0 & v_{23} & \dots & v_{2m} \dots \\ v_{31} & v_{32} & 0 & \dots & v_{3m} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \dots & v_{nm} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (I-13)$$

và tất cả các đại lượng đặc trưng cho chuyển động bên trong của nguyên tử đều có thể biểu diễn dưới dạng những ma trận giống như ma trận tần số; Chẳng hạn như tọa độ  $x$  biểu diễn bằng ma trận  $|x_{mn}|$  và động lượng  $P$  biểu diễn bằng ma trận  $|p_{mn}|$ . Cả đại lượng biến thiên gián đoạn và cả đại lượng biến thiên liên tục đều có thể biểu diễn dưới dạng ma trận.

Cơ học sóng gần gũi với trực quan hơn, công cụ toán học đơn giản hơn nên thông dụng hơn (cơ sở toán học của cơ học sóng là phương pháp Hamilton - Jacobi, còn của cơ học ma trận là các móc Lie hay giao hoán tử giữa các toán tử). Nội dung chủ yếu của hai phương pháp trên là:

$$\hat{L}\Psi = \lambda\Psi$$

( $\lambda$  là giá trị riêng của hàm riêng  $\Psi$  của toán tử  $\hat{L}$ )

### §3. CƠ SỞ TOÁN HỌC CỦA CƠ HỌC LƯỢNG TỬ

#### 1. Toán tử

Theo nghĩa tổng quát toán tử là khái niệm toán học chỉ sự tương ứng giữa các phần tử của hai tập hợp  $X$  và  $Y$ , nghĩa là ứng với mỗi phần tử  $x \in X$  ta được một phần tử  $y \in Y$ . Đồng nghĩa với toán tử là các thuật ngữ ánh xạ, phép biến đổi, hàm số, phép hàm. Nếu  $X$  và  $Y$  là hai tập hợp số thì người ta dùng thuật ngữ *hàm số*. Một toán tử biến không gian vô hạn chiều (không gian hàm số) thành tập hợp số thì gọi là *phép hàm*.

#### a) Định nghĩa

Toán tử là một phép toán (đại số, vi phân, tích phân ...) khi tác dụng lên một hàm số bất kỳ thì chuyển nó thành hàm số khác :

$$\hat{L} \Psi(x) = \varphi(x)$$

có nghĩa là toán tử  $\hat{L}$  tác dụng lên hàm  $\Psi(x)$ , kết quả thu được hàm  $\varphi(x)$ . Thí dụ:

- Toán tử  $\hat{X}$  tác dụng lên hàm số bất kỳ  $\Psi(x)$  thì thu được một hàm số mới  $x \Psi(x)$ .

- Toán tử lấy vi phân  $\hat{L} = \frac{d}{dx}$

$$\varphi(x) = \hat{L} \Psi(x) = \frac{d\Psi(x)}{dx}$$

- Toán tử lấy tích phân  $\hat{L} = \int \dots dx$

$$\Psi(x) = \hat{L} \Psi(x) = \int \Psi(x) dx$$



- Toán tử nâng lũy thừa

$$\hat{L} = (\dots)^n, \varphi(x) = \hat{L} \psi(x) = [\psi(x)]^n = \psi^n(x)$$

Toán tử khai căn  $\hat{L} = \sqrt[n]{\quad}$

$$\varphi(x) = \hat{L}\psi(x) = \sqrt[n]{\psi(x)}$$

Toán tử tuyến tính : Toán tử  $\hat{L}$  được coi là toán tử tuyến tính nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau :

$$\hat{L}(\Psi_1 + \Psi_2) = \hat{L} \Psi_1 + \hat{L} \Psi_2 \quad (I-15)$$

$$\hat{L}(a \Psi) = a \hat{L} \Psi$$

Việc đòi hỏi tuyến tính của toán tử có thể xem như biểu hiện của nguyên lý chồng chất của cơ học lượng tử. Các toán tử nhân, toán tử lấy tích phân là các toán tử tuyến tính. Các toán tử lũy thừa và toán tử khai căn là các toán tử phi tuyến tính.

Toán tử đơn vị :  $\hat{L} = \hat{E} = \hat{I}$  (I-16)

$$\hat{L} \Psi = \Psi = \hat{I} \Psi = \hat{E} \Psi$$

Phép cộng toán tử : Toán tử

$$C = A + B, \text{ nếu } C\Psi = A\Psi + B\Psi \quad (I-17)$$

Phép nhân toán tử : Toán tử

$$C = AB \text{ nếu } C\Psi = A(B\Psi) \quad (I-18)$$

Tích các toán tử phụ thuộc vào thứ tự các toán tử tác dụng. Toán tử nghịch đảo: Toán tử nghịch đảo với toán tử  $\hat{L}$  đã cho là toán tử  $\hat{L}^{-1}$  nếu:

$$\varphi(x) = \hat{L} \Psi(x) \text{ thì } \hat{L}^{-1} \varphi(x) = \Psi(x) \quad (I-19)$$

Toán tử liên hợp phức:

Cho  $\hat{L}\Psi = \varphi$ . Toán tử  $\hat{L}^*$  được gọi là toán tử liên hợp phức đối với toán tử  $\hat{L}$  nếu khi tác dụng toán tử đó lên hàm  $\Psi^*$  thì thu được hàm  $\varphi^*$ :

$$\hat{L}^* \Psi^*(x) = \varphi^*(x) \quad (\text{I-20})$$

Phép nâng các toán tử lên lũy thừa:

$$\hat{L}^n = \underbrace{\hat{L}\hat{L}\dots\hat{L}}_n \quad (\text{I-21})$$

Cuối cùng ta có thể xác định được *hàm tùy ý* của toán tử  $\hat{L}$  cơ sở nhờ triển khai hàm này thành chuỗi Taylor với sự thay đổi biến bằng toán tử:

$$\exp(\hat{L}) = 1 + \hat{L} + \frac{1}{2!} \hat{L}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \hat{L}^n + \dots \quad (\text{I-22})$$

**b) Các hệ giao hoán tử**

*Định nghĩa*: Giao hoán tử của hai toán tử  $\hat{A}$  và  $\hat{B}$  là:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

Nói chung giao toán tử không bằng không, mà là một toán tử nào đó:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0.$$

Tương tự, phản giao hoán tử của hai toán tử  $\hat{A}$  và  $\hat{B}$  được định nghĩa là:

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (\text{I-23})$$

Thí dụ:  $\hat{A} = \hat{X}$ ,  $\hat{B} = \frac{\partial}{\partial x}$  thì

$$\begin{aligned} \left[ \hat{X}, \frac{\hat{p}}{\partial x} \right] \Psi(x) &= \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \right) \Psi(x) = \\ &= \left( x \frac{\partial}{\partial x} - 1 - x \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x) = - \Psi(x) \end{aligned}$$

do đó phương trình toán tử có dạng :

$$\left[ \hat{X}, \frac{\hat{p}}{\partial x} \right] = -1$$

Phương trình xác định giao hoán tử của hai toán tử gọi là hệ thức giao hoán. Trường hợp mà giao hoán tử của hai toán tử là một số có vai trò đặc biệt trong lý thuyết vật lý sau này.

Thí dụ : Biết  $\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

ta có:

$$[x, p_x] = i\hbar$$

### c) Bài toán trị riêng

Toán tử  $\hat{L}$  khi tác dụng vào các hàm chuyển thành chính bản thân chúng nhân với một hằng số. thì chúng được gọi là hàm riêng của toán tử đó :

$$\hat{L} \Psi = \lambda \Psi \quad (I-24)$$

( $\lambda$  là trị riêng của toán tử  $\hat{L}$ ).

Phương trình (I - 24) là phương trình cơ bản của lý thuyết các toán tử tuyến tính. Mỗi toán tử có nhiều hàm riêng  $\{\Psi_n\}$  ứng với các trị riêng  $\{\lambda_n\}$ , do đó phương trình trên được viết dưới dạng:

$$\hat{L} \Psi_n = \lambda_n \Psi_n \quad (I-25)$$

Tập hợp các trị riêng  $\{\lambda_n\}$  của toán tử  $\hat{L}$  được gọi là phổ của nó. Phổ các giá trị riêng có thể liên tục, gián đoạn, hay vừa liên tục vừa gián đoạn và ứng với một trị riêng có thể có nhiều hàm riêng.

## 2. Toán tử tự liên hợp hay ecmite và toán tử unita

### a) Toán tử liên hợp với toán tử $\hat{L}$

*Định nghĩa:* Toán tử  $\hat{L}^+$  được gọi là toán tử liên hợp với toán tử tuyến tính  $\hat{L}$ , nếu thỏa mãn hệ thức :

$$\int \Psi^* \hat{L} \varphi dx = \int (\hat{L}^+ \Psi)^* \varphi dx \quad (I-26)$$

Nếu  $\Psi = \Psi(x)$ ,  $\varphi = \varphi(x)$  thì  $dx = dx$ . Tích phân được lấy theo tất cả vùng biến đổi của đối số  $x$ . Các hàm  $\Psi$  và  $\varphi$  thỏa mãn điều kiện khả tích bình phương hay giảm nhanh tới giới hạn lấy tích phân.

Từ khái niệm toán tử liên hợp ta xác định được hai toán tử quan trọng:

- Nếu toán tử  $t$  thỏa mãn điều kiện  $\hat{L} = \hat{L}^+$  thì  $\hat{L}$  là toán tử tự liên hợp hay toán tử ecmite, ta có:

$$\int \Psi^* \hat{L} \varphi dx = \int (\hat{L} \Psi)^* \varphi dx \quad (I-27)$$

- Nếu  $\hat{L}$  thỏa mãn điều kiện:

$$\hat{L} \hat{L}^+ = \hat{L}^+ \hat{L} = 1 \quad (I-28)$$

thì  $\hat{L}$  gọi là toán tử unita.

*Thí dụ 1:* Xét toán tử  $\hat{L} = \hat{x}$ . Vì  $x$  là đại lượng thực nên  $x^* = x$ . Do đó:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{x} \varphi dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x} \Psi^* \varphi dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{x} \Psi)^* \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{x}^+ \Psi)^* \varphi dx . \end{aligned}$$

Như vậy toán tử  $\hat{x} = \hat{x}^+$ , do đó toán tử  $x$  là toán tử tự liên hợp.

*Thí dụ 2:* Xét toán tử  $\hat{L} = \frac{d}{dx}$  ta có  $\hat{L}^* = \hat{L} = \frac{d}{dx}$

Do đó :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{L} \varphi dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{d}{dx} \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{d\varphi}{dx} dx = \\ &= \Psi^* \varphi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Psi^*}{dx} \varphi dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{d}{dx} \Psi^* \right) \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{L}^+ \Psi)^* \varphi dx \end{aligned}$$

Khi  $x \rightarrow \pm\infty$  các hàm số  $\Psi, \varphi$  dần tới 0 (vì mật độ tìm thấy hạt ở vô cực bằng 0) nên số hạng  $\Psi^* \varphi = 0$ .

Suy ra  $\hat{L}^+ = -\frac{d}{dx}$ . Như vậy điều kiện tự liên hợp không thỏa mãn, nên toán tử  $\hat{L} = \frac{d}{dx}$  và  $\hat{L}^+ = -\frac{d}{dx}$  là hai toán tử liên hợp với nhau, chứ không phải toán tử tự liên hợp.

Toán tử  $\hat{L} = -i \frac{d}{dx}$  lại là toán tử tự liên hợp.

**b) Các tính chất của toán tử tự liên hợp**

*Định lý 1:* Toán tử có các trị riêng là thực, khi và chỉ khi nó là toán tử hermite.

Thật thế,  $\hat{L} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ , ở đây giả thiết  $\Psi \equiv \varphi$ , chúng ta có :

$$\int \Psi_n^* \hat{L} \varphi_n dx = \int \varphi_n^* \hat{L} \varphi_n dx = \lambda_n \int \varphi_n^* \varphi_n dx$$

$$\int (\hat{L}^+ \Psi_n)^* \varphi_n dx = \int (\hat{L} \varphi_n)^* \varphi_n dx = \lambda_n^* \int \varphi_n^* \varphi_n dx$$

Lấy từng vế của hai đẳng thức trên trừ cho nhau và kết hợp với (I-26) ta có :

$$0 = (\lambda_n - \lambda_n^*) \int \varphi_n^* \varphi_n dx \Rightarrow \lambda_n = \lambda_n^* \quad (I-29)$$

Ta định nghĩa tích trực giao của hai hàm số  $\Psi(x)$  và  $\varphi(x)$  như sau :

$$\int \Psi^*(x) \varphi(x) dx = \int \varphi^*(x) \Psi(x) dx = 0 \quad (I-30)$$

và điều kiện chuẩn hóa :

$$\int |\Psi(x)|^2 dx = \int |\varphi(x)|^2 dx = 1 \quad (I-31)$$

Các hàm trực chuẩn  $\Psi(x)$ ,  $\varphi(x)$  (trực giao và chuẩn hóa) trong khoảng  $-\infty < x < +\infty$ ; Nếu tích phân lấy trong một miền nào đó, thì các hàm ấy trực chuẩn trong miền đó.

*Thí dụ:* Tập hợp các hàm số trực chuẩn trong khoảng  $(-\pi, \pi)$  :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$$

và tập hợp các hàm phức trực chuẩn trong khoảng  $(-\pi, \pi)$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ix), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(2ix), \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(nix)$$

*Định lý 2* : Các hàm riêng của các toán tử Hermite là trực giao với nhau:

Bây giờ ta chứng minh tính trực giao của các hàm riêng:

$$\Psi_n(x), \Psi_m(x) \text{ của toán tử Hermite } \hat{L}.$$

Ta có:

$$\hat{L} \Psi_n = \lambda_n \Psi_n; \hat{L} \Psi_m = \lambda_m \Psi_m$$

Từ định nghĩa toán tử tự liên hợp ta viết :

$$\int \Psi_m^* \hat{L} \Psi_n dx = \int (\hat{L}^+ \Psi_m)^* \Psi_n dx = \int (\hat{L} \Psi_m)^* \Psi_n dx.$$

*Chú ý*:  $\lambda_m$  là số thực nên  $\lambda_m^* = \lambda_m$  và hai vế của phương trình trên được viết lại như sau.

$$\lambda_n \int \Psi_m^* \Psi_n dx = \lambda_m \int \Psi_m^* \Psi_n dx$$

Suy ra:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int \Psi_m^* \Psi_n dx = 0.$$

Trong trường hợp không có suy biến (trường hợp không có suy biến

là trường hợp thì các trị riêng ứng với các hàm riêng khác nhau thì khác nhau  $\lambda_n \neq \lambda_m$ ) và nếu  $n \neq m$  thì  $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$  và ta có :

$\int \Psi_m^* \Psi_n dx = 0$ , chứng tỏ các hàm riêng của toán tử Hermite là trực giao với nhau. Tính trực chuẩn của các hàm riêng có thể biểu diễn bằng một phương trình gộp chung cả hai phương trình (I-30) và (I-31).

$$\int \Psi_m^* \Psi_n dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n \\ 1 & \text{nếu } m = n \end{cases} \quad (I-32)$$

$\delta_{mn}$  là kí hiệu Kronecker.

Trong trường hợp phổ của toán tử là liên tục (Toán tử có phổ liên tục là toán tử mà trị riêng có thể có những giá trị liên tục). Khi đó hàm riêng được kí hiệu là  $\Psi_\lambda(x)$  và phụ thuộc vào các giá trị riêng  $\lambda$  với tư cách như một thông số biến đổi liên tục.

Đối với toán tử có phổ liên tục thì các tính chất : giá trị riêng là thực và các hàm riêng trực giao vẫn giữ nguyên, còn điều kiện chuẩn hóa thì khác:

$$\int \Psi_\lambda^* \Psi_\lambda dx = \infty$$

(Tích phân này dần tới vô cực, vì hàm  $\Psi_\lambda(x)$  vẫn hữu hạn khi  $x \rightarrow \infty$ , do đó không thể nhân một hằng số nào với  $\Psi_\lambda(x)$  để cho tích phân nói trên bằng một được). Vì vậy điều kiện trực chuẩn sẽ được viết dưới dạng (có thể coi như kí hiệu Kronecker suy rộng) :

$$\int \Psi_{\lambda'}^*(x) \Psi_\lambda(x) dx = \delta(\lambda' - \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \lambda' \neq \lambda \\ \infty & \text{nếu } \lambda' = \lambda \end{cases} \quad (I-33)$$

$\delta(\lambda' - \lambda)$  là hàm delta Dirac, là phương trình biểu diễn tính trực chuẩn của hàm riêng của toán tử có phổ liên tục.

Ở đây điều kiện chuẩn hóa phải theo hàm delta:



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{I-34})$$

Lưu ý : Trong trường hợp suy biến bậc S của một giá trị riêng nào đó, thì các hàm riêng tương ứng với giá trị riêng này nói chung là không trực chuẩn. Tuy nhiên ta có thể thiết lập S tổ hợp tuyến tính từ các hàm trên thỏa mãn điều kiện trực chuẩn.

Một hàm hữu hạn bất kỳ nào cũng có thể triển khai thành chuỗi (hay tích phân) theo các hàm riêng của toán tử ecmite; Nghĩa là các hàm riêng của toán tử ecmite lập thành một hệ đủ:

$$f(x) = \sum_n C_n \Psi_n(x) \quad (\text{I-35})$$

$C_n$  là các hằng số - hệ số phân tích hoặc hệ số khai triển của hàm  $f(x)$ , tổng lấy theo tất cả các hàm riêng của toán tử.  $C_n$  tìm được bằng cách nhân đẳng thức trên với  $\Psi_m^*$  và tích phân theo  $x$  :

$$\int \Psi_m^*(x) f(x) dx = \sum_n C_n \int \Psi_m^* \Psi_n(x) dx = \sum_n C_n \delta_{mn} = C_m \quad (\text{I-36})$$

Như vậy :

$$f(x) = \sum_n C_n \Psi_n(x) \quad (\text{I-37})$$

$$C_n = \int \Psi_n^*(x) f(x) dx \quad (\text{I-38})$$

Trong trường hợp phổ liên tục các công thức (I-37) và (I-38) có dạng :

$$f(x) = \int C(\lambda)\Psi_{\lambda}(x)dx \quad (I-39)$$

$$C_n = \int \Psi_{\lambda}^*(x)f(x)dx \quad (I-40)$$

*Chú ý* : ở đây ta mới xét trường hợp có một biến x. Nếu xét trong không gian cả ba biến x, y, z thì ta thay dx bằng dv : dx dy dz và cũng nhận được các công thức tương tự.

### 3. Các biến động lực của cơ học lượng tử

Chúng ta biết rằng trong cơ học lượng tử, khái niệm trạng thái được mô tả bởi hàm sóng  $\Psi(\vec{r}, t)$  và công cụ toán học được sử dụng là toán tử. Vì vậy ta có thể chuyển các hệ thức của các biến động lực từ cơ học cổ điển sang các hệ thức trong cơ học lượng tử bằng cách thay mỗi một biến động lực của cơ học cổ điển bằng một toán tử ecmitê tuyến tính tương ứng:

	CÁC BIẾN ĐỘNG LỰC CỦA CƠ HỌC CỔ ĐIỂN	CÁC TOÁN TỬ TƯƠNG ƯNG (trong cơ học lượng tử)
Tọa độ	$\vec{r}$ x, y z	$\vec{r}\Psi(\vec{r}, t) = r\Psi(\vec{r}, t)$ $\vec{x}\Psi(x, y, z, t) = x\Psi(\mathbf{y}, z, t)$
Động lượng	$\vec{P}$ $P_x, P_y, P_z$	$\hat{P} = -i\hbar \text{grad} = -i\hbar \nabla$ $P_x = -i\hbar ; P_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ $P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$

	CÁC BIẾN ĐỘNG LỰC CỦA CƠ HỌC CỔ ĐIỂN	CÁC TOÁN TỬ TƯƠNG ƯNG (trong cơ học lượng tử)
Mô men động lượng	$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ $L_x = yP_z - zP_y$ $L_y = zP_x - xP_z$ $L_z = xP_y - yP_x$	$\hat{L} = -i\hbar[\vec{r} \times \vec{\nabla}]$ $\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ $\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$
Năng lượng	$E = \frac{p^2}{2m} + v(\vec{r})$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{v}(\vec{r})$

Nhờ hàm sóng (nó đặc trưng cho trạng thái vi hạt ở những điều kiện nhất định) mà ta có thể chuyển từ những kí hiệu toán tử trừu tượng tới các giá trị quan sát được của đại lượng vật lý trên thực nghiệm :

$$\hat{L}\psi(\vec{r}, t) = \lambda\psi(\vec{r}, t).$$

Nếu toán tử  $\hat{L}$  biểu thị cho một phép đo một đại lượng vật lý L nào đó, thì giá trị  $\lambda$  là giá trị ta nhận được cho đại lượng vật lý L trên thực nghiệm.

*Phần thứ hai*

# **LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ**

## *Chương I*

# **MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ CÁCH TRÌNH BÀY TRONG LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ**

Để nghiên cứu các hạt cơ bản và sự tương tác của chúng, lý thuyết trường lượng tử cho rằng mỗi loại hạt tương ứng với một loại trường, trường liên kết các hạt thành một hệ thống nhất và truyền tương tác từ những hạt này đến những hạt khác với vận tốc hữu hạn. Trong lý thuyết trường lượng tử, trường như vậy được mô tả bằng hàm sóng toán tử và các tương tác được hiểu như quá trình sinh hạt này (toán tử sinh hạt) và hủy hạt kia (toán tử hủy hạt) và toán tử số hạt bằng tích các toán tử sinh và toán tử hủy. Như vậy lý thuyết trường lượng tử có thể mô tả được những hệ có số hạt thay đổi, mô tả được sự biến hóa của các quá trình sinh hạt và hủy hạt, đồng thời diễn tả được cả tính "hạt" của sóng và tính "sóng" của hạt. Từ quan niệm đó dẫn đến một khái niệm mới - Khái niệm chân không trong lý thuyết trường lượng tử. Lý thuyết đầu tiên hình thành lý thuyết trường lượng tử là điện động lực học lượng tử. Đó là lý thuyết hiện đại của trường điện từ và sự tương tác của nó với các hạt tích điện. Điện động lực học lượng tử được xây dựng trên cơ sở của các định luật của cơ học lượng tử và lý thuyết tương đối, trong đó các photon được coi như những lượng tử của trường điện từ, các electron, các pôditron - như là các lượng tử của trường electron, pôditron ; còn sự tương tác của các trường bức xạ với vật chất được coi như quá trình hấp thụ các photon này và bức xạ các photon khác.

## §1.1. KHÁI NIỆM CHẤT VÀ TRƯỜNG TRONG LÝ THUYẾT CỔ ĐIỂN VÀ LƯỢNG TỬ

Từ lâu vật lý rất quan tâm đến vấn đề thế nào là "chất" và "trường" và mối quan hệ giữa chúng. Lý thuyết cấu tạo vật chất cho rằng chất và trường là hai dạng tồn tại cơ bản của vật chất. Chúng ta biết rằng vật chất luôn luôn vận động và đối với mỗi một dạng vật chất đó người ta đã xây dựng cho nó một lý thuyết đặc trưng về chuyển động.

### 1. Khái niệm chất và trường trong lý thuyết cổ điển

Trong lý thuyết cổ điển người ta cho rằng :

- Chất là nguyên liệu để cấu thành các vật chất, chất có khối lượng, chiếm một thể tích nào đó, có thể nhìn thấy và cân đo được. Thí dụ về chất như các hạt electron và proton, các nguyên tử, các phân tử và các vật thể khác được tạo nên từ các hạt trên.

- Trường là một dạng đặc biệt của vật chất, thông qua trường mà tương tác (hút, đẩy) giữa các vật cách xa nhau được thực hiện. Trường không có khối lượng nhưng có mang năng lượng và trường tồn tại liên tục ở khắp mọi nơi. Tác dụng của trường trong chừng mực nào đó ta cũng có thể nhận biết được - như trường bức xạ nhiệt tác dụng vào da ; một số trường mà ta đã biết đó là trường điện từ, trường hấp dẫn, trường bức xạ nhiệt, ...

Chất và trường là hai khái niệm biệt lập nhau, vì thế người ta gán cho mỗi dạng đó của vật chất quy luật chuyển động riêng biệt :

- Đối với chất : *Quy luật chuyển động hạt* mà đặc điểm của nó là sự định xứ và tồn tại quỹ đạo chuyển động.

- Đối với trường : *Quy luật chuyển động sóng* mà đặc điểm của nó là không định xứ và không tồn tại quỹ đạo chuyển động - mà là chuyển động của cả một môi trường nào đó.

Như vậy theo vật lý cổ điển - vật lý của thế giới vĩ mô thì hai dạng chuyển động hạt và chuyển động sóng là hoàn toàn khác hẳn nhau cũng như chất và trường không thể chuyển hóa cho nhau được.

## 2. Khái niệm chất và trường trong lý thuyết trường lượng tử tương đối tính

Nếu dựa vào quan niệm cổ điển về chất và trường và các quy luật chuyển động lượng ứng ta không thể giải thích được các hiện tượng vật lý trong thế giới vi mô và các sự kiện thực nghiệm liên quan đến nó. Nói cách khác quan niệm cổ điển đó không còn phù hợp nữa, mà cần thay vào đó quan niệm mới hoàn toàn lượng tử - đó là lý thuyết trường lượng tử tương đối tính.

Theo lý thuyết tương đối Einstein thì giữa khối lượng và năng lượng có mối liên hệ gắn bó với nhau theo công thức  $E = mc^2$ . Mối liên hệ mật thiết này thể hiện ở chỗ : chỗ nào có năng lượng thì chỗ đó có khối lượng và ngược lại. Như thế sự tách biệt giữa chất và trường theo tiêu chuẩn khối lượng của vật lý cổ điển đã bị xóa nhòa.

Khi cơ học lượng tử ra đời, trên cơ sở những giả thiết của Planck, Einstein và De Broglie đã hình thành quan niệm lượng tử : Trường cũng có tính gián đoạn, có tính chất hạt" (tính chất lượng tử của trường, suy ra từ các hiện tượng bức xạ nhiệt, hiệu ứng quang điện) và những hạt của trường cũng có thể có những đặc tính của hạt chất ; ngược lại các hạt chất cũng có đặc tính của trường : Các hạt cũng có tính "sóng" (tính chất lượng tử) theo giả thuyết De Broslie, và nó loang ra trong không gian giống như trường. Các quy luật chuyển động sóng của các hạt vi mô đã được cơ học lượng tử nghiên cứu.

Trong thế giới vi mô còn có nhiều hiện tượng khác với trong thế giới vĩ mô. Chẳng hạn hiện tượng sinh hủy cặp, hai photon có năng lượng đủ lớn gặp nhau biến thành một cặp hạt electron - pôditron :  $2\gamma \rightarrow e^- + e^+$  đó là hiện tượng sinh cặp ; ngược lại một cặp hạt electron - poditron gặp nhau sẽ biến thành hai photon :  $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$  đó là hiện tượng hủy cặp. Trước đây các nhà vật lý có ý phân biệt hai loại hạt : Những *hạt chất* - đó là những hạt có khối lượng nghỉ (thí dụ : electron - poditron), còn hạt photon không có khối lượng nghỉ được xem như những *lượng tử hóa* của trường.

Chính hiện tượng phân hủy cặp đã minh chứng một điều mà chúng ta

hàng mong đợi : các hạt chất và các lượng tử của trường có thể biến hóa lẫn nhau và hơn thế nữa các hạt chất cũng có thể được sinh ra và bị hấp thụ như các lượng tử của trường. Như vậy với quan niệm cũ cho rằng hạt chất là tập trung trong một kích thước giới hạn và có khối lượng, thì nay lại có thể mất kích thước và loang ra như trường, và ngược lại cho rằng trường là loang ra vô tận và không có khối lượng cũng tập trung thành hạt, cũng có khối lượng và có thể biến thành những hạt của chất. Do đó lý thuyết trường lượng tử tương đối tính là lý thuyết thống nhất giữa các hạt và các trường. Sự đồng nhất các khái niệm hạt và trường được lý giải theo quan điểm là : do tính chất sóng "lượng tử" của bất kỳ những hạt cơ bản nào và tính chất lượng tử "tính hạt" của tất cả các trường, mà mỗi một trường (theo cách hiểu cổ điển) đồng thời là tập hợp các hạt chất, còn mỗi tập hợp các hạt chất (theo cách hiểu cổ điển) là một trường nào đó.

## **§1.2. LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ**

Lý thuyết trường lượng tử ra đời trên cơ sở hòa hợp lý thuyết tương đối và cơ học lượng tử. Vì thế lý thuyết trường lượng tử là lý thuyết hiện đại cơ bản nhằm tạo nên một lý thuyết nhất quán về các hạt, các trường và sự tương tác giữa chúng.

### **1. Sự cần thiết phải tổng quát hóa cơ học lượng tử**

Thật công bằng mà đánh giá thì cơ học lượng tử và sự áp dụng của nó đã giúp chúng ta giải thích một vấn đề quan trọng về cấu tạo nguyên tử, phân tử ; mặt khác cần áp dụng thành công trong một loạt các lĩnh vực khác nữa như liên kết Hóa học, Vật lý chất rắn, và Vật lý hạt nhân nguyên tử. Đồng thời cơ học lượng tử là cánh cửa đầu tiên mở ra cho chúng ta hiểu nhiều tiên đoán khác trong thế giới vi mô, song một điều cần nghi vấn ở đây là tại sao trường điện từ là một trong những trường đã biết từ lâu vẫn còn tiếp tục được mô tả bằng phương trình Maxwell của lý thuyết cổ điển. Bên cạnh đó cơ học lượng tử mới đề cập đến chuyên động các vi hạt mà không đề cập đến sự sinh và hủy nó. Như



vật cơ học lượng tử mới chỉ áp dụng để mô tả các hệ số hạt không đổi. Vì lẽ đó để có thể mô tả được cả các trường và sự sinh hủy các hạt - tức là hệ có thể có một số hạt thay đổi ta phải tiến hành tổng quát hóa cơ học lượng tử thành lý thuyết trường lượng tử.

Để tổng quát hóa cơ học lượng tử thành lý thuyết trường lượng tử - tức là thực hiện phép chuyển từ cơ học lượng tử sang lý thuyết trường lượng tử, chúng ta nhắc lại phép chuyển từ cơ học cổ điển sang cơ học lượng tử. Đây là bước chuyển từ *hạt sang sóng* và được gọi là sự lượng tử hóa lần thứ nhất. Thực chất của bước chuyển này là việc thay thế các đại lượng vật lý (trong cơ học cổ điển là các hàm số tuân theo quy luật nhân giao hoán, hay gọi tắt là C - số) bằng các toán tử tuyến tính tự liên hợp (nói chung không tuân theo phép nhân giao hoán - hay gọi tắt là q - số) thỏa mãn các hệ thức nhất định. Trong bước chuyển này mới chỉ tính đến tính sóng mà hàm sóng mô tả trạng thái vi hạt thỏa mãn phương trình sóng Schrödinger (đối với hạt có khối lượng m chuyển động trong trường thế  $U(\vec{r}, t)$  :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II-1})$$

Như vậy phương trình sóng này mới nêu được quy luật chuyển động sóng của vi hạt mà chưa tính đến tính "hạt" của hạt. Nếu chỉ riêng phương trình Schrödinger thì chưa đủ mô tả được lưỡng tính sóng hạt, nên ta phải bổ sung thêm giả thiết của Born:

Bình phương hàm sóng tại một điểm tỉ lệ với xác suất tìm thấy hạt tại điểm đó ở thời điểm to đã cho :

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = p(\vec{r}, t_0) \quad (\text{II-2})$$

Rõ ràng bằng tính hiện tượng luận ta đã đưa được tính "hạt" của vi hạt vào lý thuyết. Điều này gợi lên một ý tưởng là muốn cho lý thuyết diễn tả được đồng thời cả tính chất "hạt" và tính chất "sóng" của vi hạt ta phải tổng quát hóa cơ học lượng tử một lần nữa - Bước chuyển từ *sóng sang hạt* và gọi là sự lượng tử hóa lần thứ hai (chẳng hạn sóng ánh

sáng gồm những hạt photon) nhưng vấn đề tính hạt của sóng sự lượng tử hóa lần thứ nhất vẫn chưa giải quyết được - tức là vấn đề lượng tử hóa của trường chưa giải quyết được. Vì thế nhiệm vụ của sự lượng tử hóa lần thứ hai phải làm sao cho lý thuyết diễn đạt được cả tính hạt và tính sóng của hạt, thể hiện được sự biến hóa của hạt, sự sinh và hủy hạt, mô tả được những hệ có số hạt thay đổi. Sự lượng tử hóa lần thứ hai được thực hiện về mặt toán học là phép thay thế hàm sóng mô tả trạng thái thành toán tử - thành  $q$  - số thỏa mãn các hệ thức giao hoán nào đấy. Việc chuyển hóa này cho kết quả là sóng (tức là trường) bị lượng tử hóa : Trong sóng hình thành tính hạt, tính gián đoạn, xuất hiện các hiện tượng sinh hủy hạt.

Những điều trình bày ở trên có thể tóm lại trong biểu mẫu sau đây :

CÁC KHÁI NIỆM	CƠ HỌC CỔ ĐIỂN	CƠ HỌC LƯỢNG TỬ	LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ
Trạng thái	C - số	C - số	q - số, chân không
Các đại lượng vật lý (biến động lực)	C - số	q - số	q - số, hạt biến thiên
Hạt sóng	Lần thứ nhất Hạt	→ Sóng $ \Psi ^2$	Lần thứ hai → Sóng hạt Sóng → Sóng hạt

## 2. Khái niệm chân không trong lý thuyết trường lượng tử

Khái niệm chân không đã được bàn luận từ lâu và theo quan niệm cũ thì chân không coi như là không gian "trống rỗng" nguyên thủy - phi vật chất. Song quan niệm đó dần dần được thay đổi và hình thành mới khi lý thuyết trường lượng tử ra đời mà một trong số các lý thuyết đầu tiên khá hoàn chỉnh của nó là điện động lực học lượng tử. Có nhiều hiện tượng trước đây rất khó hiểu chưa giải thích được, thí dụ mômen từ dị thường của electron ở trường ngoài, sự dịch chuyển các mức năng lượng nguyên tử và một số các kết luận quan trọng về những tính chất của chất và trường. Nhưng khi dựa vào các quy luật của điện động lực học lượng tử ta mới giải thích được các hiện tượng khó hiểu đó. Từ

những thành công đó người ta đã chỉ ra rằng có tồn tại một dạng mới nào đó của vật chất mà trước đây ta chưa biết : đó là chân không của trường điện từ và chân không của trường electron - pôditron.

Theo quan niệm của lý thuyết trường lượng tử thì chân không là trạng thái có năng lượng cơ bản thấp nhất của trường hay hệ các trường mà trong đó không tồn tại các hạt thực. Với nghĩa đó trong trạng thái chân không của trường điện từ không có các photon thực, nhưng vẫn tồn tại một loạt các hiệu ứng thể hiện trong đó có tồn tại những dao động không của chân không. Sự tồn tại các dao động không cũng là nét đặc trưng đối với chân không của trường electron - pôditron mà trong đó không tồn tại các hạt thực là electron và pôditron.

Qua tất cả các hiện tượng trên chúng ta thấy rằng chân không có những tính chất vật lý phức tạp. Cũng nhờ có khái niệm chân không vật lý mà sự tương tác giữa các hạt trong lý thuyết trường lượng tử được giải thích trên cơ sở coi sự tương tác đó là kết quả của việc trao đổi các lượng tử của các trường tương ứng. Thí dụ tương tác điện từ là kết quả của sự đổi photon ảo, tương tác mạnh là kết quả của việc trao đổi các mezon ảo.

Khái niệm chân không và sự tương tác của nó với các trường khác giúp chúng ta giải quyết một số vướng mắc quan trọng ở trên, song nó lại dẫn đến cho điện động lực học lượng tử những vấn đề đặc biệt nan giải khác đó là sự xuất hiện các biểu thức phân kỳ trong công cụ tính toán của lý thuyết gắn với nó là phải áp dụng lý thuyết nhiễu loạn. Về mặt lý tưởng chúng ta có thể vượt qua được những trở ngại về phân kỳ nếu như bổ sung thêm sự tái chuẩn hóa lại các hằng số (khối lượng, diện tích ...), nhưng điều này không thực hiện được trong các cách phát biểu của lý thuyết. Vì thế nhiều phương pháp tính toán mới đang được tìm tòi thay cho tính toán liên quan đến phương pháp nhiễu loạn.

### **3. Các cách trình bày lý thuyết trường lượng tử**

Chúng ta biết rằng có nhiều lý thuyết nghiên cứu về cấu trúc và các tính chất của các hạt cơ bản sự tương tác và sự biến hóa lẫn nhau giữa chúng, nhưng lý thuyết trường lượng tử là một trong những phương

pháp rất mạnh nghiên cứu kết quả các vấn đề đó. Ngay lý thuyết trường lượng tử cũng tồn tại ba phương pháp nhưng tương đương với nhau (một cách lưỡng đối) :

- Phương pháp hình thức luận lượng tử hóa thứ cấp.
- Phương pháp tích phân phiếm hàm.
- Phương pháp hàm Green.

Sau đây chúng ta sẽ nêu ý chính của từng phương pháp.

**a) Phương pháp hình thức luận lượng tử hóa thứ cấp**

Phương pháp lượng tử hóa các hệ cùng với sự thay đổi số lượng hạt (sự lượng tử hóa thứ cấp) lần đầu tiên được sử dụng đối với hệ hạt Bose vào năm 1927, năm 1928 được phát triển bởi Permi, Wigner, Jordan và sau đó được Fock phát triển tiếp. Nội dung cơ bản của nó là đưa vào các toán tử mô tả sự sinh hạt ( $\hat{a}^+$ ) và sự hủy hạt ( $\hat{a}$ ), tuân theo các hệ thức giao hoán nhất định. Tiếp đó xây dựng toán tử hạt ( $\hat{n}$ ) bằng tích toán tử sinh nhân với toán tử hủy ( $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$ ). Tất cả các đại lượng "hạt" đặc trưng cho hệ đang xét có thể biểu diễn qua các trị riêng của toán tử số hạt.

*Thí dụ* : Gọi toán tử  $\hat{a}^+$  là toán tử sinh hạt ở trạng thái k (toán tử  $\hat{a}^+$  làm tăng số hạt trong trạng thái k lên một đơn vị) và toán tử  $\hat{a}$  là toán tử hủy hạt (toán tử  $\hat{a}$  làm giảm số hạt trong trạng thái k đi một đơn vị). Toán tử  $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k$  là toán tử số hạt  $\hat{n}_k$  ở trạng thái k. Như vậy hiển nhiên tác dụng liên tiếp  $\hat{a}_k^+$  và  $\hat{a}_k$  sẽ không thay đổi số hạt trong trạng thái k :

$$\hat{a}_k^+ \hat{a}_k \Psi_{n_1, \dots, n_k} = n_k \Psi_{n_1, \dots, n_k}$$

Điều nhận biết dễ dàng là các toán tử  $\hat{a}$  và  $\hat{a}^+$  tuân theo các hệ thức giao hoán :

$$\begin{aligned} \hat{a}_k \hat{a}_i^+ - \hat{a}_i^+ \hat{a}_k &= \delta_{ki} \\ \hat{a}_k \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_k &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

$$\hat{a}_k^+ \hat{a}_i^+ - \hat{a}_i^+ \hat{a}_k^+ = 0$$

Tương tự ta có thể xét cho hệ Fermi. Nhưng các toán tử  $\hat{a}_k^+$  và  $\hat{a}_k$  phải được xác định sao cho các giá trị riêng của toán tử  $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k$  hoặc bằng 0, hoặc bằng đơn vị (ở đây các giá trị riêng của toán tử  $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k$  không còn bằng các số nguyên dương bất kỳ nữa mà đối với hệ Fermion số chiếm đây chỉ có thể bằng không hoặc đơn vị tương ứng với nguyên lí Pauli) :

$$(\hat{a}_k^+ \hat{a}_k)_{n_k n_k} = n_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

Đồng thời các toán tử  $\hat{a}_k$  và  $\hat{a}_k^+$  tuân theo các quy tắc phản giao hoán sau :

$$\hat{a}_k \hat{a}_i^+ + \hat{a}_i^+ \hat{a}_k = \delta_{ki}$$

$$\hat{a}_k \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{a}_k = 0 \quad (\text{II-5})$$

$$\hat{a}_k^+ \hat{a}_i^+ + \hat{a}_i^+ \hat{a}_k^+ = 0$$

Sau đây ta xét một thí dụ minh họa phương pháp này :

Xét hệ n hạt đồng nhất ở trong trường ngoài  $V(x)$ . Đầu tiên để đơn giản chúng ta giả thiết các hạt trong hệ không tương tác với nhau. Khi ấy phương trình Schrödinger mô tả hệ có dạng :

$$\frac{i\hbar \partial \psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)}{\partial t} = \left\{ \sum_{i=1}^n \hat{H}_i(q_i) \right\} \psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (\text{II-6})$$

Ở đây đi kí hiệu tập hợp các tọa độ :

$$\hat{H}_i(q_i) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \hat{V}(q_i) \text{ là toán tử Hamiltonien của hạt thứ } i.$$

Giả sử  $\{\varphi_k(q)\}$  là hệ trực chuẩn và đủ các hàm số của toán tử ecmité nào đó của hạt. Hàm sóng  $\varphi_k(q)$  mô tả hạt ở trạng thái lượng tử k và các

hàm này có thể là các hàm riêng của Hamiltonien tự do. Khi ấy hàm sóng  $\Psi$  được khai triển theo hệ các hàm riêng này :

$$\begin{aligned} \Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} C(k_1, k_2, \dots, k_n, t) = \\ &= \varphi_{k_1}(q_1) \varphi_{k_2}(q_2) \dots \varphi_{k_n}(q_n) \end{aligned} \quad (\text{II-7})$$

Tập hợp các hệ số  $C(k_1, k_2, \dots, k_n, t)$  hoàn toàn đặc trưng cho trạng thái của hệ. Vì rằng, nếu biết được các hệ số này ta có thể suy được hàm sóng theo công thức (II-7) và ngược lại nếu biết hàm sóng  $\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$  dùng điều kiện hệ đủ trực chuẩn các hàm  $\{\varphi_k(q)\}$  có thể tính được các hệ số :

$$\begin{aligned} C(k_1, k_2, \dots, k_n, t) &= \\ &= \int \varphi_{k_1}^*(q_1) \varphi_{k_2}^*(q_2) \dots \varphi_{k_n}^*(q_n) \Psi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) dq_1 dq_2 \dots dq_n \end{aligned} \quad (\text{II-8})$$

Các hệ số này có nghĩa ở chỗ :  $|C(k_1, k_2, \dots, k_n, t)|^2$  là xác suất để tại thời điểm  $t$  hạt thứ nhất của hệ ở trạng thái  $k_1$ , hạt thứ hai ở trạng thái  $k_2, \dots$ . Tập hợp các hệ số này được gọi là hàm sóng trong biểu diễn của các toán tử mà theo các hàm riêng của nó ta có khai triển (II-7). Khi thay (II-7) vào (II-6) ta nhận được phương trình cho hàm sóng theo biểu diễn mới :

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \varphi_{k_1}(q_1) \varphi_{k_2}(q_2) \dots \varphi_{k_n}(q_n) \frac{dc(k_1, k_2, \dots, k_n, t)}{dt} &= \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{k_1 \dots k_n} C(k_1, \dots, k_n, t) \varphi_{k_1}(q_1) \varphi_{k_2}(q_2) \dots [\hat{H}_i(q_i) \varphi_{k_i}(q_i)] \dots \varphi_{k_n}(q_n) \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

Nhân hai vế của phương trình này với  $\varphi_{m_1}^*(q_1) \varphi_{m_2}^*(q_2) \dots \varphi_{m_n}^*(q_n)$  rồi

lấy tích phân theo tọa độ của tất cả các hạt, đồng thời sử dụng điều kiện trực chuẩn của các hàm  $\varphi_k(q)$ , chúng ta nhận được phương trình Schrödinger trong biểu diễn mới :

$$i\hbar \frac{dc(m_1, m_2, \dots, m_n, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k_i} H_{m_i, m_k} C(m_1, m_2, \dots, k_i \dots k_n, t) \quad (\text{II-10})$$

Trong đó :

$$H_{m_i, m_k} = \int \varphi_{m_i}^*(q) \hat{H}(q) \varphi_{m_k}(q) dq \quad (\text{II-11})$$

Đối với các hạt đồng nhất loại bozon thì hệ đối xứng và các hàm sóng là đối xứng khi hoán vị hai hạt, còn loại Fermion thì hàm sóng là phản đối xứng khi hoán vị hai hạt. Đầu tiên chúng ta xét hệ các bozon :

Đối với hệ các hạt bozon, hàm sóng không thay đổi khi hoán vị hai hạt bất kì, thí dụ :

$$C(m_1, m_2, \dots, m_n, t) = C(m_2, m_1, \dots, m_n, t) \quad (\text{II-12})$$

Như vậy hàm sóng không phụ thuộc vào việc những hạt nào ở trạng thái  $m_1$  và  $m_2$  mà chỉ phụ thuộc vào một điều là có bao nhiêu hạt trong tổng số  $n$  hạt ở trạng thái  $m_1$  và bao nhiêu hạt ở trạng thái  $m_2$  v.v... Những hàm sóng (II-12) thực chất là hàm số của số lấp đầy (của số hạt). Giả sử trong trạng thái  $m_1$  có  $n_1$  hạt, trong trạng thái  $m_2$  có  $n_2$  hạt, ... ( $\sum_i n_i =$  tổng số hạt  $N$ ).

Đối với các hạt bozon các số  $n_i$  là các số nguyên tùy ý, đối với các hạt Fermion  $n_i$  bằng 0 hoặc bằng 1. Trong biểu diễn mới - biểu diễn các số lấp đầy, hàm sóng theo dạng :

$$|\psi(n_1, n_2, \dots, t)|^2 = \sum_{m_1, m_2, \dots} |C(m_1, m_2, \dots, m_N, t)|^2 \quad (\text{II-13})$$

Ở đây tổng lấy theo tất cả các trạng thái (tổng lấy đối với mọi hoán vị có thể của các chỉ số khác nhau  $m_1, m_2, \dots$ ). Số lượng các trạng thái

như vậy (phép hoán vị các hạt ở trong trạng thái đã cho) bằng  $\left(\frac{n_1!n_2!\dots}{N!}\right)$ . Vì hàm sóng của hệ các hạt bozon là không thay đổi khi hoán vị các hạt, nên hệ thức (II -13) có thể viết dưới dạng :

$$|\psi(n_1, n_2, \dots, t)|^2 = \frac{n_1!n_2!\dots}{N!} |C(m_1, m_2, \dots, m_N, t)|^2$$

Khi đó hàm sóng theo dạng mới có dạng :

$$\psi(n_1, n_2, \dots, t) = \left(\frac{n_1!n_2!\dots}{N!}\right)^{1/2} C(m_1, m_2, \dots, m_N, t) \quad (II-14)$$

[thừa số  $\left(\frac{n_1!n_2!\dots}{N!}\right)^{1/2}$  xuất hiện do điều kiện chuẩn hóa].

Bây giờ ta tìm dạng của phương trình Schrödinger trong biểu diễn của các số lập đầy. Trước hết ta xét tổng theo tất cả các trạng thái khả dĩ của hạt thứ  $i$  :

$$\sum_{k_i} H_{m_i, m_k} C(m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, t) \quad (II-15)$$

Nếu hàm sóng  $C(m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, k_i, \dots, m_N, \dots, t)$  (II-16) tương ứng với trạng thái mà ở đó :

{  $n_{m_i}$  hạt ở trạng thái  $m_i$

{  $n_{k_i}$  hạt ở trạng thái  $k_i$  (II-17)

Thì  $C(m_1, m_2, \dots, k_i, \dots, m_N, t)$  (II-18)

tương ứng với trạng thái mà ở đó :

{  $n_{m_i} - 1$  hạt ở trạng thái  $m_i$

{  $n_{k_i} + 1$  hạt ở trạng thái  $k_i$



Vì bây giờ hạt thứ  $i$  ở trạng thái  $k_i$  mà không ở trạng thái  $m_i$  nữa, nên lúc này hàm sóng sẽ là :

$$\psi(n_1, n_2, \dots, n_{m_i} - 1, \dots, n_{k_i} + 1, \dots, t) = \left( \frac{n_1! n_2! \dots (n_{m_i} - 1)! \dots (n_{k_i} + 1)! \dots}{N!} \right)^{1/2} \cdot C(k_1 \dots k_i \dots m_N, t) \quad (\text{II-19})$$

Lúc này (II-15) có dạng :

$$\sum_{k_i} H_{m_i, k_i} \left( \frac{n_1! n_2! \dots (n_{m_i} - 1)! \dots (n_{k_i} + 1)! \dots}{N!} \right)^{1/2} \psi(n_1, n_2, \dots, \dots, (n_{m_i} - 1), \dots, (n_{k_i} + 1), t) \quad (\text{II-20})$$

Tiếp theo ta lấy tổng biểu thức (II-20) theo chỉ số  $i$  cho tất cả các hạt trạng thái  $m_i$ , rồi sau đó lấy tổng theo  $m$  và  $k$  theo tất cả các trạng thái có thể của hạt. Khi ấy phương trình Schrödinger trong biểu diễn các số lấp đầy sẽ có dạng :

$$i\hbar \frac{d\psi(n_1, n_2, \dots, 1)}{dt} = \sum_{m_k} H_{m_k} \sqrt{n_m(n_k + 1)} \cdot \psi(n_1, n_2, \dots, n_m - 1, n_k + t) \quad (\text{II-21})$$

Đây là phương trình biểu diễn theo dạng mới cần phải tìm, trong đó các biến độc lập có thể lấy các số hạng ở các trạng thái riêng biệt. Chúng ta có thể viết phương trình (II-21) dưới dạng thuận lợi hơn, nếu đưa vào các toán tử  $\hat{a}_k^+$  và  $\hat{a}_k$  tác dụng lên hàm sóng được xác định trong biểu diễn các số lấp đầy :

$$\hat{a}_k^+ \psi(n_1, n_2, \dots, n_k, t) = \sqrt{n_k + 1} \psi(n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots, t) \quad (\text{II-22})$$

$$\hat{a}_k \psi(n_1, n_2, \dots, n_k, t) = \sqrt{n_k} \psi(n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots, t) \quad (\text{II-23})$$

Toán tử  $\hat{a}_k$  chính là toán tử hủy hạt ở trạng thái  $k$ , toán tử liên hợp

$\hat{a}_k^+$  chính là toán tử sinh hạt cũng ở trạng thái đó mà chúng ta đã trình bày ở trên cùng với các hệ thức giao hoán (II-3) mà các toán tử này thỏa mãn. Dựa vào các toán tử này chúng ta có thể biểu diễn phương trình (II-21) dưới dạng :

$$i\hbar \frac{d\psi(n_1, n_2, \dots, t)}{dt} = \hat{H}\psi(n_1, n_2, \dots, t) \quad (II-24)$$

với 
$$\hat{H} = \sum_{m,k} \hat{a}_m^+ H_{m_k} \hat{a}_k \quad (II-25)$$

H được gọi là Hamiltonien được lượng tử hóa thứ cấp. Phương trình (II-24) với phương trình Schrödinger (II-6) là hoàn toàn tương đương nhau cho N hạt ở không gian cấu hình. Ở đây phương trình (II-24) là phương trình trong  $\gg N \gg$  biểu diễn, có nghĩa là biểu diễn mà trong đó người ta lấy số lượng các hạt  $n_1, n_2, \dots, n_N$  trong các trạng thái khác nhau 1, 2, ... m làm các biến số. Lưu ý rằng phương trình (II-24) là phương trình tổng quát với tổng số hạt không được chứa trong đó dưới dạng hiện và đúng cho  $N = \text{const}$ , song cũng đúng cho bất kỳ số lượng nào của các hạt bozon đồng nhất.

Trong phương pháp lượng tử hóa thứ cấp các hạt của hệ được coi như các lượng tử của một trường nào đấy, còn sự tương tác của các hạt được thực hiện qua các trường khác mà lượng tử của chúng cũng là các hạt nào đó.

### ***b) Phương pháp tích phân phiếm hàm***

(Hay còn gọi là tích phân liên tục - tích phân đường)

Phương pháp này cho phép ta biểu diễn các phương trình của lý thuyết trường lượng tử bằng cách dựa vào các đạo hàm biến phân. Qua đó các lời giải tương ứng có thể nhận được dưới dạng tích phân phiếm hàm. Người ta chờ đợi phương pháp này ở chỗ nó cho ta nhiều triển vọng tính toán các hiệu ứng, quá trình của lý thuyết trường lượng tử mà không cần sự can thiệp của phương pháp tính toán của lý thuyết nhiễu loạn.

### ***c) Phương pháp hàm Green***

Để xác định chuyển động của các hạt và trạng thái của các trường trong lý thuyết trường lượng tử người ta dùng hàm Green (hay hàm truyền) như là một trong những đại lượng động lực chủ lực. Trên cơ sở đó các phương trình của lý thuyết trường lượng tử được viết trực tiếp qua các hàm Green. Phương pháp hàm Green cho ta cách mô tả đầy đủ đáng điệu của hệ.

Để nắm được nội dung chủ yếu và hiểu một cách hệ thống những phương pháp của lý thuyết trường lượng tử, trước hết chúng ta xét lý thuyết cổ điển của các trường sóng tự do tương tự với cơ học cổ điển của hạt, tiếp đó xét lý thuyết trường lượng tử của các trường sóng tự do và lý thuyết của các lượng tử tương tác. Nội dung đó được diễn đạt theo hình thức luận Lagrange, vì hình thức luận Lagrange cho kết quả đối với phép tái chuẩn hóa, trong khi đó hình thức luận Hamilton chỉ cho các kết quả thỏa đáng khi xét các bài toán đơn giản và không thích hợp khi xét các bài toán phức tạp vì khi đó lý thuyết trường tương đối tính chứa các phân kỳ.

Bảng sau đây cho chúng ta hiểu rõ hơn hai hình thức luận nói ở trên.

HÌNH THỨC LUẬN HAMILTON	HÌNH THỨC LUẬN LAGRANGE
<p>- Thời gian t độc lập (tách biệt) với x, y, z nên tính hiệp biến tương đối tính bị mất.</p> <p>- Dễ hiểu, sự tương tự giữa cơ học và lý thuyết trường rất rõ.</p> <p>- Phương trình là phương trình chính tắc (Hamilton) :</p> $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ <p>(ở đây phương trình có dấu trừ nên hệ không đối xứng với phép biến đổi <math>p_i \rightarrow q_i</math>) H là Hamiltonien.</p> <p>- Các biến động lực.</p>	<p>- Các tọa độ không thời gian x, y, z, t trong lý thuyết hoàn toàn đối xứng.</p> <p>- Để tổng quát cho trường hợp tương đối tính.</p> <p>- Phương trình được suy ra từ nguyên lý biên phân.</p> $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ <p>L là Lagrangian</p> <p>- Các biến động lực bảo toàn được suy ra từ nguyên lý tác dụng cực tiểu.</p>

## *Chương II*

# NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG CỰC TIỂU TRONG LÝ THUYẾT TRƯỜNG CỔ ĐIỂN

### §2.1. NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG CỰC TIỂU

Nguyên lý tác dụng cực tiểu (nguyên lý tác dụng dừng) là một dụng cụ đặc lực và đóng vai trò to lớn trong việc nghiên cứu vật lý hiện đại, vì trong nguyên lý này chúng ta có thể kết hợp các nghiên cứu toán học trừu tượng với nội dung vật lý cụ thể. Từ nguyên lý tác dụng cực tiểu ta có thể suy ra phương trình cho hàm trường và từ hàm trường ta nhận biết được các đặc trưng của trường. Ở chương này ta xét trường như một hệ cơ học với vô số bậc tự do và lý thuyết trường được xây dựng hoàn toàn tương tự như ở cơ học cổ điển.

#### **1. Khái niệm về trường**

*Định nghĩa* : Trường là một khoảng không gian mà tại mỗi một điểm trong nó đặt tương ứng một hay vài đại lượng đặc trưng nào đó.

Các đại lượng đặc trưng này phụ thuộc vào các tọa độ không gian  $x, y, z$  và tọa độ thời gian  $t$  và chúng được gọi là hàm trường  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ . Phương trình vi phân mà các hàm trường thỏa mãn gọi là phương trình trường.

*Thí dụ về trường* :

Trường áp suất, trường nhiệt độ. Hàm trường của các trường này xác định các giá trị đo trực tiếp của các đại lượng tương ứng (như nhiệt độ,

áp suất). Nhưng trường mà chúng ta trình bày trong lý thuyết này là một trường khác mà các đại lượng đặc trưng cho nó không đo được trực tiếp - loại trường này dùng để mô tả trạng thái vi hạt, nó diễn tả tính sóng của vi hạt và có ở tất cả các điểm của không thời gian.

## 2. Hàm Lagrange

Trường được đặc trưng bởi hàm trường. Như trên đã nói ta xét trường sóng như một hệ cơ học nào đó có thể tương ứng với một hàm đặc trưng - hàm Lagrange, mà nó có thể biểu diễn qua tích phân của

mật độ hàm Lagrange  $L\left(\Psi, \frac{\partial\Psi_i}{\partial x_\mu}\right)$  (gọi tắt là Lagrangian). Như vậy

Lagrangian phụ thuộc vào các thành phần của trường  $\Psi_i$  và các đạo hàm bậc nhất của chúng theo các tọa độ không thời gian mà không phụ thuộc tường minh vào  $x_\mu$ . Ở đây chúng ta nên hiểu rằng các thành phần của hàm sóng  $\Psi_i$  đóng vai trò như các tọa độ suy rộng của hệ - của trường, còn  $\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_\mu}$  - như các vận tốc suy rộng của nó. Một đại lượng

đóng vai trò quan trọng trong việc tìm các phương trình trường và các biến động lực của trường, đó là đại lượng mà ta gọi là tác dụng (J). Theo định nghĩa tác dụng là tích phân của Lagrange theo thể tích 4 chiều bất biến.

$$J = \int_{\Omega} L\left(\Psi, \frac{\partial\Psi_i}{\partial x_\mu}\right) d^4x \quad (\text{II-26})$$

$$(d^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$$

và Lagrange phải là một bất biến tương đối tính. Trong lý thuyết trường lượng tử (là sự kết hợp của lý thuyết tương đối tính và cơ học lượng tử) ta sử dụng hệ đơn vị  $\hbar = c = 1$ ; còn lặp lại các chỉ số Hy Lạp  $\mu, \dots$  biểu thị lấy tổng từ 1 đến 4.

## 3. Biến phân tổng quát của tác dụng

Trong cơ học lượng tử để giải gần đúng bài toán cơ học lượng tử ta

đã dùng phương pháp nhiễu loạn nhưng không thuận lợi, vì không có bài toán gần với bài toán đã cho. Sau đó người ta phải sử dụng một phương pháp gọi là phương pháp biến phân cho phép giải được một cách chính xác ở gần đúng bậc không. Ở đây để tìm các phương trình trường và các biến động lực của trường, ta sử dụng cách tính biến phân tổng quát của tác dụng  $J$  gắn liền với sự biến thiên hàm sóng của trường, cũng như với sự biến thiên của biên vùng lấy tích phân :

$$\delta J = \delta \int_{\Omega} L d^4x = \int_{\Omega} \delta L d^4x + \int_{\Omega} L \delta(d^4x) \quad (\text{II-27})$$

Trong đó biến phân của Lagrange có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\begin{aligned} \delta L &= L'(x') - L(x) = [L'(x') - L(x')] + [L(x') - L(x)] \\ &= \overline{\delta L(x')} + \overline{\delta(L(x))}. \end{aligned}$$

Các hàm  $L'(x')$  và  $L(x')$  rõ ràng biểu diễn sự phụ thuộc giải tích khác nhau vào cùng một tọa độ, và về hình thức coi chúng như mô tả các đường cong hình học. Như vậy tại cùng một điểm trong không gian sự biến đổi  $\overline{\delta L(x')} = L'(x') - L(x')$  có thể giải thích như sự thay đổi của dạng đường cong tại đó :

$$\overline{\delta L} = \frac{\partial L}{\partial \psi} \overline{\delta \psi} + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right)} \delta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right) \quad (\text{II-28})$$

ở đây  $\overline{\delta \psi}$  cũng có nghĩa tương tự. Riêng sự biến đổi bé  $\overline{\delta L}$  liên quan trực tiếp đến sự biến đổi đối số của cùng một hàm số, nếu tính tới các số hạng bé bậc nhất ta có thể viết :

$$\overline{\delta L} = L(x') - L(x) = L(x + \delta x) - L(x) = \frac{\partial L(x)}{\partial x_{\mu}} \delta x_{\mu} \quad (\text{II-29})$$

Trong lúc ấy biến phân của vùng lấy tích phân chuyển từ  $\Omega \rightarrow \Omega'$ , có

nghĩa là chuyển từ  $d^4x \rightarrow d^4x'$  và khi đó ta viết :

$$\begin{aligned} \delta(d^4x) &= d^4x' - d^4x = \delta(dx_1 dx_2 dx_3 dx_4) = \\ &= \delta(dx_1)dx_2 dx_3 dx_4 + dx_1\delta(dx_2)dx_3dx_4 + \dots \quad (\text{II-30}) \\ &= \frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu} d^4x \end{aligned}$$

$$(\text{Ở đây ta đã áp dụng } \delta(dx_1)=d(\delta x_1)= \frac{\partial(\delta x_1)}{\partial x_1} \delta x_1$$

Cuối cùng thấy các công thức (II-28), (II-29), (II-30) vào công thức (II-27) ta nhận được kết quả cho biến phân của tác dụng :

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial L(x)}{\partial \psi(x)} \overline{\delta \psi(x)} + \frac{\partial L(x)}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \delta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial L(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu + L(x) \frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu} \right] d^4x \quad (\text{II-31}) \end{aligned}$$

Chú ý : Đối với các biến phân  $\overline{\delta \Psi}$  ta được phép áp dụng hệ thức

$$\delta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\overline{\delta \Psi}).$$

Thực hiện lấy tích phân từng phần đối với số

hạng thứ hai trong công thức (II-31) và sử dụng định lí Gauss - Ostrogratski chuyển tích phân theo thể tích bốn chiều thành tích phân theo siêu mặt  $\Sigma$  công thức (II-31) có dạng :



$$\delta J = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right)} \right] \overline{\delta \psi} d^4 x + \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right)} \overline{\delta \psi} + L \delta x_{\mu} \right] d\sigma_{\mu} \quad (\text{II-32})$$

Với  $d\sigma_{\mu} = \frac{d^4 x}{dx_{\mu}}$ , và  $d\sigma_{\mu}$  là hình chiếu của yếu tố mặt và chúng trực giao với các trục tọa độ tương ứng của không gian 4 chiều Minkowski.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x}{dx_{\mu}} &= \{d\sigma_{\mu}\} = \{d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4\} = \\ &= \left\{ dx_2 dx_3 dx_4, dx_1 dx_3 dx_4, dx_1 dx_2 dx_4, \frac{1}{i} dx_1 dx_2 dx_3 \right\} \quad (\text{II-33}) \end{aligned}$$

#### 4. Phương trình trường

Muốn có chuyển động thực sự - muốn có phương trình "chuyển động" của trường trong đó hàm  $\psi$  thỏa mãn phương trình trường ta phải nhờ nguyên lý tác dụng cực tiểu. Theo nguyên lý này thì tác dụng J phải là cực tiểu, rồi từ đó thiết lập phương trình trường. Trong trường hợp này ta xét biến phân của các biến cố định, khi đó biến phân của các hàm sóng tại biên bằng 0 ( $\delta\psi = 0$ ). Tích phân mặt trong công thức (II-32) sẽ triệt tiêu, nếu ta giả thiết trường ở các khoảng cách lớn tiến tới 0. Mặt khác ta giả thiết biến phân bên trong thể tích  $\Omega$  là một hàm tùy ý của  $x$ . Từ việc tìm cực tiểu của tác dụng J, dẫn đến giải hệ phương trình  $\delta J = 0$  chúng ta nhận được phương trình chuyển động của trường [theo (II-32)] :

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right)} = 0 \quad (\text{II-34})$$

Nếu ta đưa vào một Lagrangian  $L'$  sao cho

$$L' = L + \frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x_\mu} \quad (\text{II-35})$$

trong đó  $F_\mu$  là hàm véc tơ 4 chiều của hàm trường, thì  $L$  và  $L'$  đều có cùng một dạng phương trình vì trong biến phân của tác dụng sẽ có thêm một lượng :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x_\mu} d^4x = \int_{\Sigma} F_\mu(x) d\sigma_\mu$$

sẽ triệt tiêu như đã trình bày ở trên.

## §2.2. CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI CỦA HÀM TRƯỜNG

Để có thể suy ra được các tính chất của các hàm trường ta dựa vào tính bất biến Lorentz. Theo lý thuyết tương đối Einstein thì tất cả các định luật của tự nhiên phải bất biến (không đổi) đối với các phép biến đổi Lorentz. Tính bất biến này gọi là tính bất biến tương đối tính - hay lính bất biến Lorentz, nó thể hiện sự bình đẳng của tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Từ tính bất biến Lorentz mà các phương trình mô tả các quá trình vật lý trong một hệ quy chiếu quán tính phải có cùng một dạng. Nhờ đó ta có thể suy ra được các tính chất của các hàm trường.

### 1. Nhóm Lorentz

Sự liên hệ giữa các hàm trường với nhau trong hai hệ quy chiếu được biểu thị qua các phép biến đổi Lorentz. Biến đổi Lorentz lại là liên tục, ứng với phép quay trong mặt  $(x, t)$  trong không gian Minkowski bốn chiều. Vì vậy về phương diện toán học mà nói thì nhóm Lorentz thuần nhất được tạo thành trên cơ sở tập hợp tất cả các phép biến đổi Lorentz và các phép quay ba chiều. Theo định nghĩa nhóm này được cấu thành như tập hợp các phép biến đổi liên tục tuyến tính :

$$x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = a_{\mu\rho} x_{\rho} \quad (\text{II-36})$$

(ở đây chỉ số lặp lại  $\mu, \rho \dots$  hiểu rằng lấy tổng từ 1 đến 4) và bảo toàn dạng toàn phương :

$$S = x_{\mu} x_{\mu} = r^2 - c^2 t^2 = \text{const} \quad (\text{II-37})$$

trong đó các ma trận biến đổi  $a_{\mu\rho}$  thỏa mãn các điều kiện :

$$a_{\mu\rho} a_{\mu\gamma} = \delta_{\rho\gamma} = \begin{cases} 1 \text{ khi } \rho = \gamma \\ 0 \text{ khi } \rho \neq \gamma \end{cases} \quad (\text{II-38})$$

$$\det |a_{\mu\gamma}| = +1 \quad (\text{II-39})$$

$$a_{44} > 0 \quad (\text{II-40})$$

Lưu ý rằng nếu bỏ điều kiện (II-39) thì ta sẽ có nhóm Lorentz kỳ dị, nó bao gồm cả các phép phản chiếu các trục không gian. Nếu bỏ thêm điều kiện (II-40) ta có nhóm Lorentz tổng quát chứa các phần tử là các phép quay ba chiều  $xy, yz, zx$ , các phép phản chiếu không gian và các phép phản chiếu theo thời gian, có nghĩa tất cả các phép biến đổi liên tục cũng như các phép biến đổi chẵn đoạn của vector  $x$  và giữ nguyên dạng  $x_{\mu} x_{\mu} = \text{const}$ .

Người ta thường thường xét nhóm Lorentz không kỳ dị cùng với các phép dịch chuyển  $\epsilon_{\mu}$  theo tất cả 4 trục :

$$x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = a_{\mu\rho} x_{\rho} + \epsilon_{\mu} \quad (\text{II-41})$$

Chính tập hợp các phép biến đổi như vậy tạo thành nhóm Lorentz không thuần nhất (nhóm Poincare).

## 2. Biểu diễn nhóm

Bây giờ ta xét việc chuyển từ một hệ quy chiếu ( $x$ ) sang hệ quy

chiều khác ( $x'$ ). Giả sử từ nhóm Lorentz không thuần nhất ta có một phép biến đổi P và một đại lượng vật lý được mô tả bằng hàm tọa độ  $\psi_\alpha(x)$  nhiều thành phần. Ở đây hàm  $\psi_\alpha(x)$  có thể là véc tơ năng xung lượng bốn chiều của hệ hay thế của trường điện từ, hay tenxơ mômen động lượng v.v... Các thành phần của đại lượng vật lý  $\psi_\alpha(x)$  sẽ được biến đổi tuyến tính qua nhau khi chuyển từ hệ quy chiếu ( $x$ ) sang hệ quy chiếu ( $x'$ ) khác :

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x') = R_{\alpha\beta} \psi_\beta(x), \quad (\text{II-42})$$

trong đó ma trận  $R_{\alpha\beta}$  (mà hạng của nó bằng số lượng các thành phần  $\alpha$  của hàm  $\psi_\alpha(x)$ ) được hoàn toàn xác định bằng phép biến đổi P từ nhóm Lorentz trong dạng (II-41) - Ma trận  $R_{\alpha\beta}$  còn được gọi là ma trận biến đổi từ biểu diễn này sang một biểu diễn khác. Như vậy mỗi một biến đổi P tương ứng với một phép biến đổi tuyến tính R (P), bổ sung vào đó yếu tố đơn vị của nhóm Lorentz tương ứng với phép biến đổi đơn vị  $R = 1$  (hay  $R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ), còn tích hai yếu tố  $P_1$  và  $P_2$  của nhóm tương ứng với tích của hai phép biến đổi :

$$R(P_1 P_2) = R(P_1) R(P_2) \quad (\text{II-43})$$

Tập hợp các ma trận R cùng với các tính chất trên tạo thành biểu diễn tuyến tính của nhóm. Người ta gọi biểu diễn tác dụng vào không gian còn lại biến thành không gian chập với chính nó là biểu diễn khả quy, trong trường hợp ngược lại ta có biểu diễn bất khả quy. Trong không gian các thành phần của các hàm đôi khi có thể khoanh được một không gian con bất biến với tất cả các phép biến đổi của biểu diễn đã cho - nghĩa là có biểu diễn khả quy. Vì biểu diễn khả quy có thể dẫn về tập hợp của các biểu diễn bất khả quy, nên nói chung nghiên cứu biểu diễn nhóm chỉ cần nghiên cứu các biểu diễn bất khả quy của nó.

### 3. Tenxơ và Spino

Do thông thường tất cả các trường vật lý được mô tả bằng một số hữu hạn các thành phần, nên ở đây chỉ cần xét các biểu diễn hữu hạn chiều của nhóm Lorentz. Mặt khác phép biến đổi  $a_{\mu\rho} \rightarrow R_{\alpha\beta}$  tương ứng không nhất thiết phải đơn trị vì các hàm trường không phải là các đại

lượng đo trực tiếp trên thực nghiệm (mà các tổ hợp song tuyến tính của các hàm trường mới là các đại lượng đo trực tiếp trên thực nghiệm), nên biểu diễn có thể là các biểu diễn đơn trị hay các biểu diễn lưỡng trị. Tuy vậy sự không đơn trị của các toán tử R phải sao cho các đại lượng đo được sẽ biến đổi một cách hoàn toàn đơn trị trong bất kỳ phép biến đổi Lorentz nào.

Để đáp ứng yêu cầu trên người ta chia biểu diễn nhóm thành hai loại:

a) Biểu diễn nhóm Lorentz loại thứ nhất được đặc trưng bằng sự đơn trị của phép chuyển tương ứng  $a \rightarrow R$  và bao gồm các biểu diễn được gọi là biểu diễn tenxơ (hay biểu diễn giả tenxơ). Các hàm trường biến đổi theo biểu diễn tenxơ được gọi là tenxơ (hay giả tenxơ). Tuy nhiên đôi khi hàm trường này cũng có thể đo được trực tiếp trên thực nghiệm (thí dụ như trường điện từ).

Đối với các phép biến đổi Lorentz tenxơ đơn giản nhất là một vô hướng, vô hướng còn được gọi là tenxơ hạng không. Vô hướng không thay đổi dạng trong các phép biến đổi Lorentz :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x) \quad (\text{II-44})$$

Với ý nghĩa này đôi khi vô hướng đồng nhất với bất biến. Tenxơ hạng nhất là véctơ bốn chiều và nó biến đổi như véctơ x trong các phép biến đổi Lorentz :

$$T_\mu(x) \rightarrow T_\mu(x') = a_{\mu\nu} T_\nu(x) \quad (\text{II-45})$$

Còn tenxơ hạng hai  $T_{\mu\nu}(x)$  trong các phép biến đổi Lorentz sẽ biến đổi theo dạng :

$$T_{\mu\nu}(x) \rightarrow T_{\mu\nu}(x') = a_{\mu\alpha} \cdot a_{\nu\lambda} T_{\alpha\lambda}(x) \quad (\text{II-46})$$

b) Loại thứ hai được đặc trưng bằng việc lưỡng trị của phép chuyển tương ứng  $a \rightarrow \pm R$  và bao gồm các biểu diễn được gọi là biểu diễn Spinơ :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{II-47})$$

$\Psi(x)$  là hàm hai thành phần và nó được dùng để mô tả hai trạng thái sớm khả dĩ của hạt với spin 1/2 (ứng với hai khả năng hình chiếu sớm  $(\pm 1/2)$ ).

#### 4. Các phép biến đổi bé Lorentz

Các phép biến đổi bé Lorentz thường hay được dùng trong lý thuyết tương đối. Từ dạng (II-36) ta có phép biến đổi bé Lorentz:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{II-48})$$

Trong đó  $\epsilon_{\mu\nu}$  là các đại lượng vô cùng bé và  $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ . Từ đây phép biến đổi các hàm trường  $\psi_\alpha(x)$  tương ứng có dạng :

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x') = \psi_\alpha(x) + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \quad (\text{II-49})$$

Trong đó  $G_{\mu\nu} = -G_{\nu\mu}$  là các ma trận không phụ thuộc vào  $\epsilon_{\mu\nu}$  và được gọi là các toán tử vi phân. Thí dụ về các toán tử vi phân :

Trong trường hợp các trường spinor Dirac thì

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (\text{II-50})$$

Trong đó  $\gamma_\mu, \gamma_\nu$  là các ma trận. Còn đối với các trường tenxơ chẳng hạn,

$$\left. \begin{array}{l} \text{trường có spin} = 0 \text{ thì } G_{\mu\nu} = 0, \\ \text{trường có spin} = 1 \text{ thì } G_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \end{array} \right\} \quad (\text{II-51})$$

Các toán tử vi phân  $G_{\mu\nu}$  hoàn toàn xác định hiệu diễn của nhóm và nó được tìm nhờ định lý sau : Giao hoán tử của hai toán tử vi phân

$$[G_{\mu\nu}, G_{\rho\delta}] = G_{\mu\nu} G_{\rho\delta} - G_{\rho\delta} G_{\mu\nu} \quad (\text{II-52})$$

bằng tổng các toán tử vi phân nhân với các hệ số C nào đây chung cho tất cả các biểu diễn của nhóm :

$$[G_{\mu\nu}, G_{\rho\delta}] = C_{\mu\nu\rho\delta\lambda\nu} G_{\lambda\nu} \quad (II-53)$$

Các hệ số  $C_{\mu\nu\rho\delta\lambda\nu}$  có thể tìm được nếu biết dù chỉ một biểu diễn của nhóm. Khi chọn biểu diễn nhóm Lorentz là chính nhóm Lorentz thì có thể nhận biết các toán tử của nhóm Lorentz thỏa mãn hệ thức :

$$[G_{\mu\nu}, G_{\rho\delta}] = \delta_{\nu\rho} G_{\mu\delta} - \delta_{\nu\delta} G_{\mu\rho} - \delta_{\mu\rho} G_{\nu\delta} + \delta_{\mu\delta} G_{\nu\rho} \quad (II-54)$$

Từ các hệ thức này ta tìm được các toán tử  $G_{\mu\nu}$ . Vì các toán tử  $G_{\mu\nu}$  hoàn toàn đặc trưng cho biểu diễn nhóm, nên về sau khi cần đến các biểu diễn của nhóm ta chỉ cần dùng các công thức xác định  $G_{\mu\nu}$ .

## §2.3. CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN

Từ giả thiết các biến phân của hàm trường ở các biên của miền  $\Omega$  bằng 0 ta đã suy ra được các phương trình chuyển động của trường (II-34). Giờ đây để có chuyển động thực ta xét biến phân của hàm tác dụng theo giả thiết miền lấy tích phân  $\Omega$  cùng với trường sóng được coi như một khối thống nhất bị dịch chuyển một khoảng vô cùng nhỏ trong không gian bốn chiều Minkowski. Dựa vào tính chất đối xứng và đẳng hướng của không thời gian ta suy ra tác dụng sẽ không bị thay đổi ( $J = \text{const}$ ), có nghĩa là biến phân của tác dụng J sẽ bằng không ( $\delta J = 0$ ). Giải các phương trình này ta tìm được các tenxơ - các định luật bảo toàn, nghĩa là biết được các đặc trưng của trường.

### 1. Tenxơ năng xung lượng của trường

Theo giả thiết trên trong trường hợp <<khối thống nhất>> dịch chuyển một khoảng vô cùng nhỏ, ta có phép biến đổi vô cùng nhỏ của tọa độ :

$$x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = x_{\mu} + \varepsilon_{\mu} \quad (II-55)$$

trong đó  $\varepsilon_\mu$  là véc tơ bốn chiều vô cùng nhỏ, tương ứng ta cũng có phép biến đổi vô cùng bé của các hàm sóng :

$$\psi(x_\mu) \rightarrow \psi'(x_\mu) = \psi(x_\mu - \varepsilon_\mu) = \psi(x_\mu) - \varepsilon_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu}$$

Từ đó suy ra :

$$\overline{\delta\psi} = \psi'(x) - \psi(x) = -\varepsilon_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} \quad (\text{II-56})$$

Khi thay giá trị biến phân của hàm sóng cùng với biến  $x_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu$  vào tích phân mặt của công thức (II-32) đối với biến phân của tác dụng ta có :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \overline{\delta\psi} + L \delta x_\mu \right] d\sigma_\mu = \\ &= \int_{\Sigma} \varepsilon_\mu \left[ -\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} + L \delta_{\mu\nu} \right] d\sigma_\mu = 0 \quad (\text{II-57}) \end{aligned}$$

Ta kí hiệu :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} - L \delta_{\mu\nu} \quad (\text{II-58})$$

thì có thể viết :

$$\delta J = - \int_{\Sigma} \varepsilon_\mu T_{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0 \quad (\text{II-59})$$



Các đại lượng  $T_{\mu\nu}$  được gọi là tenxơ năng xung lượng của trường, đó là tenxơ bốn chiều hạng hai. Từ (II-59) suy ra :

$$\int_{\Sigma} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} = 0 \quad (\text{II-60})$$

Vì thể tích  $\Omega$  tùy ý, nên có thể bao thể tích này bằng siêu mặt ba chiều  $\Sigma$  kín tùy ý. Trong đó hai siêu mặt  $\Sigma_1, \Sigma_2$  có hướng trục giao với trục thời gian và siêu mặt  $\Sigma_3$  nối hai siêu mặt  $\Sigma_1, \Sigma_2$  đồng thời có hướng trục giao với tất cả các trục không gian. Bằng các hình thức tương tự như không gian ba chiều ta có thể biểu diễn  $\Sigma$  như mặt các hình trụ mà đáy trên và đáy dưới là các siêu mặt  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_2$  còn một bên là siêu mặt  $\Sigma_3$ . Do đó tích phân (II-60) có thể viết dưới dạng :

$$\int_{\Sigma} T_{\mu\gamma} d\sigma_{\gamma} = \int_{\Sigma_1} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} - \int_{\Sigma_2} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} + \int_{\Sigma_3} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} \quad (\text{II-61})$$

Vì các pháp tuyến tới hai siêu mặt đáy  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_2$  có hướng ngược nhau, nên có dấu trừ xuất hiện trước tích phân thứ hai. Nếu cho siêu mặt  $\Sigma_3$  chứa thể tích  $\Omega$  ở các hướng loại không gian tiến đến vô cực, và nếu đặt điều kiện  $\Psi_{\vec{r} \rightarrow \infty}(\vec{r}, t) = 0$  thì tích phân  $\int_{\Sigma_3} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} \rightarrow 0$ .

Kh; đó Công thức (II-61) với kết quả (II-60) có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\int_{\Sigma} T_{\mu\gamma} d\sigma_{\gamma} = \int_{\Sigma_1} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} - \int_{\Sigma_2} T_{\mu\nu} d\sigma_{\nu} = 0 \quad (\text{II-62})$$

Dễ dàng nhận được :

$$\int_{\Sigma_1} T_{\mu\nu} d\sigma_\nu = \int_{\Sigma_2} T_{\mu\nu} d\sigma_\nu = \tilde{\text{const}} \quad (\text{II-63})$$

hay 
$$\int_{\Sigma_i} T_{\mu\nu} d\sigma_\nu = \text{const}$$

Với  $\Sigma_i$  là siêu mặt loại không gian bất kỳ. Như vậy giá trị của tích phân (II-63) không phụ thuộc vào việc lựa chọn  $\Sigma_i$ .

Nếu ta chọn siêu mặt loại không gian trực giao trực tiếp với trục thời gian thì yếu tố diện tích của siêu mặt này sẽ chỉ được xác định bởi diện tích hình chiếu :

$$d\sigma = \{d\sigma_\nu\} = \{0,0,0,d\sigma_4\} \quad (\text{II-64})$$

$d\sigma_4$  xác định yếu tố không gian ba chiều thông thường  $d\sigma_4 = \frac{1}{i} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{i} d^3x = \frac{1}{i} d\vec{x}$ . Vậy từ công thức (II-63) ta có định luật bảo toàn :

$$\int T_{\mu 4} d\vec{x} = \text{const} \quad (\text{II-65})$$

Trong đó tích phân theo tất cả các thể tích chứa trường.

Từ đây suy ra được các đại lượng đặc trưng của trường:

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x = - \int \left( \pi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu} - iL\delta_{4\mu} \right) d^3x \quad (\text{II-66})$$

(ở đây  $\pi_i = -\frac{\partial L}{\partial \Psi_i}$ , dấu chấm trên  $\psi_i$  kí hiệu phép vi phân theo thời gian) sẽ tạo thành vectơ bốn chiều. Vectơ  $P_\mu$  được gọi là véc tơ năng lượng xung lượng của trường. Các thành phần không gian của  $P_\mu$  xác định xung lượng của trường, còn thành phần thời gian là năng lượng của trường.

Từ (II-66) ta có :

$$P_4 = -i \int T_{44} d^3x = -i \int \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_4} \right)} \frac{\partial \psi}{\partial x_4} - L \right] d^3x = i \int H d^3x$$

(II-67)

Trong đó  $H = -T_{44}$  là mật độ năng lượng của trường. Nhìn vào biểu thức của  $H$  ta thấy mật độ năng lượng không phải là đại lượng dương xác định, mà chỉ có một vài trường hợp đặc biệt mới thỏa mãn điều kiện  $H = -T_{44} > 0$ .

Khi áp dụng định lí Gauss cho tích phân mặt (II-60) ta nhận được :

$$\int_{\Sigma} T_{\mu\gamma} d\sigma_{\gamma} = \int_{\Omega} \frac{\partial T_{\mu\gamma}}{\partial x_{\gamma}} d^4x = 0 \rightarrow \frac{\partial T_{\mu\gamma}}{\partial x_{\gamma}} = 0$$

(II-68)

Như vậy di véc bốn chiều của tenxơ năng xung lượng bằng không. Dựa vào hệ thức này ta chỉ ra được sự bảo toàn của véc tơ  $P_{\mu}$ . Ta có :

$$\frac{dP_{\mu}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( i \int T_{\mu 4} d^3x \right) = - \int \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial (it)} d^3x = - \int \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial x_4} d^3x$$

Theo (II-68) ta có :

$$\frac{\partial T_{\mu j}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial x_4} = - \frac{\partial T_{\mu j}}{\partial x_j}$$

Thay vào trên ta nhận được :

$$\frac{dP_{\mu}}{dt} = \int \frac{\partial T_{\mu j}}{\partial x_j} d^3x = \int T_{\mu j} dS_j = 0$$

(mặt kín)

Suy ra  $P_{\mu} = \text{const}$ .

*Chú ý* : Khi bổ sung vào  $T_{\mu\nu}$  một lượng  $\frac{\partial \chi_{\mu\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}}$ , trong đó  $\chi_{\mu\nu\lambda}$  là tenxơ bất kỳ hạng ba và phản đối xứng với hai chỉ số  $\nu$  và  $\lambda$ , divergence bốn chiều của ten xơ  $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\partial \chi_{\mu\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}}$  cũng như tenxơ  $T_{\mu\nu}$  sẽ bằng 0.

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad (\text{II-69})$$

Như vậy năng xung lượng của trường không có sự thay đổi khi thay thế ten xơ  $T_{\mu\nu}$  bằng tenxơ  $T_{\mu\nu}$ . Do tenxơ  $\chi_{\mu\nu\lambda}$  là tùy ý nên có thể lựa chọn  $\chi_{\mu\nu\lambda}$  thế nào để tenxơ  $T_{\mu\nu}$  là tenxơ đối xứng  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ .

## 2. Tenxơ mômen động lượng của trường

Để đi đến tenxơ mômen động lượng của trường ta xét biến phân của tác dụng trong phép quay vô cùng bé của hệ quy chiếu. Phép quay ấy tương ứng với phép biến đổi Lorentz vô cùng bé :

$$x_{\mu} \rightarrow x_{\mu} = x_{\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu} \quad (\text{II-70})$$

trong đó  $|\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1$ . Dùng điều kiện  $a_{\mu\nu} a_{\rho\nu} = \delta_{\mu\rho}$  với độ chính xác tới bậc nhất theo  $\varepsilon$  ta có  $\varepsilon_{\mu\rho} = -\varepsilon_{\rho\mu}$ . Nếu phép biến đổi Lorentz viết dưới dạng :

$$x_{\mu} \rightarrow x_{\mu} = a_{\mu\nu} x_{\nu} = x_{\mu} + \delta x_{\mu} \quad (\text{II-71})$$

thì từ (II-70) và (II-71) ta có :

$$\delta x_{\mu} = \varepsilon_{\mu\rho} x_{\rho} \quad (\text{II-72})$$

Tương ứng khi chuyển từ hệ quy chiếu này sang hệ quy chiếu khác thì hàm trường cũng chịu một phép biến đổi tuyến tính, đó là biểu diễn nhóm Lorentz :

$$\Psi_{\alpha}(x) \rightarrow \Psi'_{\alpha}(x') = R_{\alpha\beta}(a) \Psi_{\beta}(x) \quad (\text{II-73})$$

Đối chiếu công thức (II-73) với công thức (II-49)

$$\begin{aligned}\dot{\psi}'_{\alpha}(x') &= \psi_{\alpha}(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x) = \\ &= \left[ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \right] \psi_{\beta}(x)\end{aligned}$$

ta có :

$$R_{\alpha\beta}(a) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \quad (II-74)$$

Các ma trận  $\frac{1}{2} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$  là hệ số khai triển ma trận  $R_{\alpha\beta}$  đối với các trường vô hướng và giả vô hướng thì rõ ràng  $(G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = 0$ .

Khai triển Taylor  $\Psi_{\alpha}(x')$  hạn chế tới hạng bậc nhất theo

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha}(x') &= \psi_{\alpha}(x_{\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu}) = \\ &= \psi_{\alpha}(x_{\mu}) + \frac{\partial \dot{\psi}'_{\alpha}(x)}{\partial x_{\mu}} \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu}\end{aligned} \quad (II-75)$$

Thay (II-74), (II-75) vào (II-73) ta có :

$$\dot{\psi}'_{\alpha}(x) + \frac{\partial \psi_{\alpha}(x)}{\partial x_{\mu}} \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu} = \left[ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \right] \psi_{\beta}(x)$$

Từ đây ta có :

$$\dot{\psi}'_{\alpha}(x) - \psi_{\alpha}(x) = - \frac{\partial \dot{\psi}'_{\alpha}(x)}{\partial x_{\mu}} \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x)$$

Mặt khác  $\dot{\psi}'_{\alpha}(x) - \psi_{\alpha}(x) = \overline{\delta\psi_{\alpha}(x)}$  và  $\dot{\psi}'_{\alpha}(x) = \psi_{\alpha}(x) + \delta\psi_{\alpha}$

Nên bỏ qua  $\delta\psi_{\alpha}$  vì  $-\frac{\partial \dot{\psi}'_{\alpha}(x)}{\partial x_{\mu}} \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu} = -\frac{\partial \psi_{\alpha}(x)}{\partial x_{\mu}} \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu} + O(\delta^2)$ .

Kết quả ta nhận được :

$$\overline{\delta\psi_\alpha(x)} = -\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x_\mu} \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta(x). \quad (\text{II-76})$$

Thay (II-76) vào tích phân mặt (II-32) ta có :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} \overline{\delta\psi_\alpha(x)} + L \delta x_\mu \right] d\sigma_\mu = \\ &= \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\rho} \right)} \left[ -\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \right] + L \varepsilon_{\rho\nu} x_\mu \right\} d\sigma_\rho \end{aligned} \quad (\text{II-77})$$

Thực hiện các phép biến đổi chỉ số cho các số hạng 1 và 2 trong công thức (II-77) :

Số hạng thứ nhất :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \varepsilon_{\mu\gamma} x_\gamma &= -\frac{1}{2} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} (\varepsilon_{\mu\gamma} + \varepsilon_{\mu\gamma}) x_\gamma = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} (\varepsilon_{\mu\gamma} - \varepsilon_{\gamma\mu}) x_\gamma = -\frac{1}{2} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \varepsilon_{\mu\gamma} x_\gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \varepsilon_{\gamma\mu} x_\gamma \end{aligned}$$

Đổi chỉ số  $\mu \leftrightarrow \gamma$ , ta có :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \varepsilon_{\mu\gamma} x_\gamma &= -\frac{1}{2} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \varepsilon_{\mu\gamma} x_\gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\gamma} \varepsilon_{\mu\gamma} x_\mu = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\gamma} x_\mu - \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} x_\gamma \right) \varepsilon_{\mu\gamma} \end{aligned} \quad (\text{II-78})$$

Số hạng thứ hai :

$$\begin{aligned}
 L\varepsilon_{\rho\nu}x_\nu &= \frac{1}{2}\delta_{\rho\mu}L(\varepsilon_{\mu\nu} - \varepsilon_{\nu\mu})x_\nu = \\
 &= \frac{1}{2}L\delta_{\rho\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu - \frac{1}{2}L\delta_{\rho\mu}\varepsilon_{\nu\mu}x_\nu = \frac{1}{2}L(\delta_{\rho\nu}x_\nu - \delta_{\rho\nu}x_\mu)\varepsilon_{\mu\nu}
 \end{aligned}
 \tag{II-79}$$

Thay (II-78) và (II-79) vào (II-77) kết quả nhận được :

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2} \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} \left[ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\nu} x_\mu - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\mu} x_\nu + (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + L\delta_{\rho\mu}x_\nu - L\delta_{\rho\nu}x_\mu \right\} d\sigma_\rho = \\
 &= \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2} \int_{\Sigma} \left\{ \left[ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\rho} \right)} - L\delta_{\rho\nu} \right] x_\mu - \left[ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\rho} \right)} - L\delta_{\rho\mu} \right] x_\nu + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\rho} \right)} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \right\} d\sigma_\rho = \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2} \int_{\Sigma} M_{\mu\nu\rho} d\sigma_\rho = 0
 \end{aligned}
 \tag{II-80}$$

ở đây

$$M_{\mu\nu\rho} = x_{\mu} T_{\nu\rho} - x_{\nu} T_{\mu\rho} + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_{\rho}} \right)} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x) \quad (\text{II-81})$$

Suy ra kết quả :

$$\int_{\Sigma} M_{\mu\nu\rho} d\sigma_{\rho} = 0 \quad (\text{II-82})$$

Từ (II-82) suy ra đương là như công thức II-68) :

$$\frac{\partial M_{\mu\nu\rho}}{\partial x_{\rho}} = 0 \quad (\text{II-83})$$

Bằng cách lập luận tương tự như đã tiến hành từ công thức (II-60) đến công thức (II-65), trong công thức (II-82) chọn siêu mặt trực giao với trục thời gian là sẽ nhận được các định luật bảo toàn :

$$\int M_{\mu\nu} d^3x = \text{const} \quad (\text{II-84})$$

Đại lượng

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= -i \int M_{\mu\nu 4} d^3x = \\ &= -i \int (x_{\mu} T_{\nu 4} - x_{\nu} T_{\mu 4}) d^3x - i \int \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_4} \right)} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x) d^3x \quad (\text{II-85}) \end{aligned}$$

được gọi là tenxơ mômen dung lượng của trường. Đó là tenxơ hạng hai. Trong công thức (II-85) số hạng thứ nhất :

$$L_{\mu\nu} = -i \int (x_{\mu} T_{\nu 4} - x_{\nu} T_{\mu 4}) d^3x \quad (\text{II-86})$$

gọi là mômen động lượng quỹ đạo của trường. còn số hạng thứ hai



$$S = -i \int \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4} \right)} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta d^3x =$$

$$= \int \pi_\alpha (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \psi_\beta d^3x \quad (\text{II-87})$$

(ở đây ta kí hiệu  $\frac{i\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4} \right)} = \frac{i\partial L}{\partial \psi_\alpha} = -\pi_\alpha$ )

S liên quan đến sự tồn tại các chỉ số gián đoạn của hàm trường và trong lý thuyết trường lượng tử nó tương ứng với sự đóng góp các sô-ma của các hạt vào mô-men toàn phần.

### 3. Điện tích và véc-tơ dòng

Các trường được đặc trưng bởi các hàm trường trong đó có các hàm trường thực hoặc phức. Trong lý thuyết trường lượng tử các trường được mô tả bằng các hàm trường thực sẽ tương ứng với các hạt không tích điện và tích phân tác dụng  $J = \int_{\Omega} \left( \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) d^4x$  dùng cho các hàm

trường thực. Còn bây giờ ta tổng quát hóa tích phân tác dụng cho các trường phức, các trường này sẽ tương ứng với các hạt tích điện. Nếu một trường nào đó được diễn tả bằng hàm phức  $\phi$  thì nó và liên hợp phức của nó  $\phi^*$  có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] \quad (\text{II-88})$$

$$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)] \quad (\text{II-89})$$

Ở (tây  $\varphi_1(x)$  và  $\varphi_2(x)$  là các hàm thực và theo (II-88), (II-89) chúng có thể biểu diễn theo các hệ thức :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\phi(x) + \phi^*(x)| \quad (\text{II-90})$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{i\sqrt{2}} |\phi(x) - \phi^*(x)| \quad (\text{II-91})$$

Như vậy do trường phức đang xét thực tế được đặc trưng bằng hai lần số hàm trường thực, nên ta có thể chọn  $(\varphi_1(x)$  và  $\varphi_2(x)$  là những tọa độ suy rộng độc lập của trường và khi đó tích phân tác dụng có thể biểu diễn dưới dạng :

$$J = \int_{\Omega} L \left( \phi_{\alpha}, \phi_{\alpha}^*, \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}, \frac{\partial \phi_{\alpha}^*}{\partial x_{\mu}} \right) d^4x \quad (\text{II-92})$$

và biến phân tổng quát có dạng :

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \right)} \right] \overline{\delta \Phi_{\alpha}} \right. \\ & + \overline{\delta \Phi_{\alpha}^*} \left[ \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha}^*} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \Phi_{\alpha}^*}{\partial x_{\mu}} \right)} \right] \left. \right\} d^4x + \\ & + \oint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \right)} \overline{\delta \Phi_{\alpha}} + \overline{\delta \Phi_{\alpha}^*} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \Phi_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} \right)} \right] d\sigma_{\mu} \quad (\text{II-93}) \end{aligned}$$

Ở các phần trên ta đã xét sự bất biến của tác dụng J đối với các phép biến đổi tọa độ của không thời gian bốn chiều Minkowski. Ở đây ta xét sự bất biến của tác dụng đối với các phép biến đổi gradien (chuẩn) mà nó không làm thay đổi các tọa độ không thời gian, có nghĩa là :

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$$

Bây giờ ta xét phép biến đổi gradien :

$$\phi_\alpha(x) \rightarrow \phi'_\alpha(x) = \phi_\alpha(x)^{ie\chi} = \phi_\alpha(x) + \overline{\delta\phi_\alpha(x)}, \quad (\text{II-94})$$

$$\phi_\alpha^*(x) \rightarrow \phi'^*_\alpha(x) = \phi_\alpha^*(x)^{-ie\chi} = \phi_\alpha^*(x) + \overline{\delta\phi_\alpha^*(x)}, \quad (\text{II-95})$$

Ở đây  $\overline{\delta\phi_\alpha(x)} = ie\chi\phi_\alpha(x)$  ;  $\overline{\delta\phi_\alpha^*(x)} = -ie\chi\phi_\alpha^*(x)$ ,

trong đó  $e$  là số thực và khác nhau đối với các trường khác nhau, còn  $\chi$  là tham số thực tùy ý. Trong lý thuyết trường tương ứng người ta thường nghiên cứu các phép biến đổi gradien loại một - đó là các phép biến đổi (II-94), (II-95) với  $\chi$  không phụ thuộc vào tọa độ không thời gian. Thay  $\overline{\delta\phi_\alpha}$  và  $\overline{\delta\phi_\alpha^*}$  vào công thức (II-93) và xã điều kiện để cho chuyển động thực sự của trường, ta có kết quả :

$$\delta J = ie\chi \oint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} \Phi_\alpha - \Phi_\alpha^* \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \Phi_\alpha^*}{\partial x_\mu} \right)} \right] d\sigma_\mu = 0 \quad (\text{II-96})$$

Đại lượng xác định vector bốn chiều

$$j_\mu(x) = -ie \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} \phi_\alpha(x) - \phi_\alpha^* \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi_\alpha^*}{\partial x_\mu} \right)} \right] \quad (\text{II-97})$$

được gọi là véc tơ dòng.

Khi đó biến phân tác dụng có thể viết :

$$\delta J = \chi \oint_{\Sigma} j_{\mu}(x) d\sigma_{\mu} = 0 \quad (\text{II-98})$$

Áp dụng định lý Gauss cho tích phân mặt (II-98) ta được tích phân theo thể tích bốn chiều :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial j_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} d^4x = 0 \Rightarrow \frac{\partial j_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad (\text{II-99})$$

Như vậy suy ra divergence bốn chiều của vectơ dòng bằng 0, có nghĩa là chúng ta nhận được véc tơ dòng bốn chiều thỏa mãn phương trình liên tục. Bằng cách lập luận tương tự như việc tiến hành dẫn đến công thức (II-84). Ở đây ta có :

$$\int j_4(x) d^3x = \text{const} ; j_4(x) = i\rho \quad (\text{II-100})$$

với  $\rho$  là mật độ điện tích của trường. Vậy điện tích của trường là :

$$Q = -i \int i_4 d^3x = \text{const} \quad (\text{II-101})$$

là đại lượng bảo toàn. Trong lý thuyết trường lượng tử các lượng tử của trường phức là các hạt với điện tích  $e$  hoặc  $-e$ . Còn với các trường được mô tả bằng các hàm trường thực  $\phi(x) = \phi^*(x)$  thì véc tơ dòng  $j_4(x)$  và điện tích  $Q$  của trường sẽ triệt tiêu. Như thế chỉ có các trường phức mới có thể mô tả được các hạt tích điện. Vì phép biến đổi gradient loại một không liên quan đến sự thay đổi hàm trường và cũng không liên quan đến các tọa độ không thời gian, nên định luật bảo toàn điện tích không thể nói là liên quan với tính chất đối xứng nào đó của không thời gian.

Tóm lại : Lagrangian trong lý thuyết trường cổ điển cũng như trong lý thuyết trường lượng tử mà ta sẽ xét sau đây là một đại lượng vật lý cơ bản xác định dạng lý thuyết, nếu ta dựa vào nguyên lý tác dụng cực tiểu thì Lagrangian của trường là một sự tổng quát hóa hàm Lagrangian trong cơ học cho hệ vô tận bậc tự do. Chính từ nguyên lý tác dụng cực tiểu ta suy ra được các phương trình "chuyển động" của trường và các

đại lượng động lực bất biến như véc tơ năng xung lượng, mômen động lượng, véc tơ dòng và điện tích của trường.

### *Chương III*

## TRƯỜNG CỔ ĐIỂN TỰ DO

### §3.1. MỞ ĐẦU

Để xây dựng lý thuyết về các hạt cơ bản, chúng ta xây dựng lý thuyết về các trường cụ thể mà qua đó có thể đối chiếu với các hạt cơ bản. Đầu tiên ta xét trường tự do cho các hạt cơ bản đó là một sự lý tưởng hóa về sự không tương tác giữa các hạt. Vì rằng trong các điều kiện thực tế, bất kỳ hạt cơ bản nào cũng chịu tác động nào đó của môi trường vật chất bao quanh nó. Mặt khác qua sự tương tác của những hạt này với những hạt khác (của những trường này với những trường khác) mà tính chất cơ bản và các đặc trưng của các hạt tương ứng với trường mới được thể hiện. Chính vì vậy sự nghiên cứu thực nghiệm của quá trình tương tác của các hạt cơ bản cho biết mọi thông tin về chúng, còn sự mô tả các quá trình này là nhiệm vụ cơ bản của lý thuyết các hạt cơ bản.

Việc coi các hạt cơ bản mô tả các trường của chúng có thể xét như các hạt tự do không tương tác chỉ trong sự gần đúng nào đó. Tất nhiên điều đó cần thiết để về sau tiến hành tổng quát hóa, bao gồm thêm sự tương tác giữa chúng. Tất cả các quá trình tương tác đều có thể hình dung được chia thành ba giai đoạn kế tiếp nhau :

**1. Các hạt tham gia tương tác** (tham gia phản ứng) ở rất xa nhau, khi đó ta bỏ qua sự tương tác của chúng và có thể coi chúng là các hạt tự do. Các trạng thái của hệ trước khi tương tác có thể được mô tả bằng lý thuyết trường tự do và được thực nghiệm ghi nhận bằng cách đo các

đại lượng đặc trưng tương ứng của các hạt.

**2. Các hạt ở gần nhau và tương tác với nhau.** Cho đến nay vẫn chưa có một mô hình tổng quát nào giải thích mọi chi tiết về cơ chế tương tác của các hạt, tuy nhiên lẽ tẻ vẫn có những mô hình khác nhau cố gắng giải thích các giai đoạn tương tác.

**3. Các sản phẩm được tạo ra do quá trình tương tác** (các sản phẩm của phản ứng) có thể là các hạt 'ban đầu hay các hạt mới. Tất cả các hạt đó cũng được xét như các hạt tự do.

Lý thuyết tương tác có nhiệm vụ tiên đoán xem sản phẩm được tạo thành sau quá trình tương tác là gì và sau tương tác các hạt sẽ ở trạng thái nào nếu như biết được các trạng thái ban đầu của các hạt cơ bản tương tác - nghĩa là phải tiên đoán được xác suất của trạng thái khả dĩ của hệ sau quá trình tương tác. Đồng thời cần phải tiên đoán xác suất có thể xảy ra biến đổi những hạt cơ bản này thành những hạt cơ bản khác và sự sinh các hạt trong quá trình tương tác. Như vậy ngoài nhiệm vụ cơ bản của lý thuyết về các hạt cơ bản là mô tả sự tương tác của chúng, lý thuyết này còn xét sự tồn tại các hạt không tương tác. Trong chương này ta sẽ trình bày cơ sở của các trường tự do :

1. Trường vô hướng (trường thực và trường phức).
2. Trường véc tơ và trường điện từ.
3. Trường Dirac.

Cơ sở để xây dựng trường này hoặc trường nọ là dựa vào tính thức luận Lagrange, mà trong đó là việc cho trước Lagrangian  $L(x)$  đối với trường đã cho. Ở phần trên để có hình thức luận tổng quát xây dựng trường sóng cổ điển ta đã dựa vào việc sử dụng các nguyên lý biến phân dưới dạng Lagrange, thờ đó cho phép ta xét các loại trường cụ thể khác nhau theo ùng một quan niệm và đã đưa ra dạng tổng quát của Lagrangian :

$$L(x) = L \left\{ \varphi(x), \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu} \right\}$$

Ta có thể tìm được Lagrangian này từ những lập luận tổng quát sau đây :

1. Tính hiệp biến tương đối tính Lagrangian của trường phải là tổ hợp của các hàm trường và các đạo hàm trường của chúng cùng với các tính chất biến đổi cho trước với các phép biến đổi Lorentz và Lagrangian phải là một vô hướng đối với các phép biến đổi này. Từ đây suy ra các hàm trường (các tọa độ suy rộng), chúng sẽ thực hiện một biểu diễn nào đấy của nhóm Lorentz. Việc lựa chọn biểu diễn này hay biểu diễn khác về thực chất đã xác định đặc thù của trường cụ thể đã cho. Dưới đây ta chỉ xét một số trường thực hiện những biểu diễn đơn giản nhất của nhóm : các biểu diễn vô hướng, véc tơ và spin ở hạng nhất, vì phần lớn các hạt cơ bản được biết cho đến nay đều được mô tả bằng các trường này.

2. Lagrangian của trường phải là hàm thực. Đòi hỏi này bắt nguồn từ sự tương tự hình thức giữa lý thuyết trường và cơ học cổ điển, và liên quan đến đặc trưng động lực cơ bản của trường một cách tuyến tính được biểu diễn qua Lagrangian. Các đặc trưng này được đo trực tiếp trên thực nghiệm, nên theo ý nghĩa đó chúng phải là các số thực (nói chung các hàm trường có thể là các hàm phức).

Bất kỳ cách phát biểu nào của lý thuyết trường cũng đều chứa đựng hai đòi hỏi bắt buộc cơ bản nêu trên.

3. Ngoài ra người ta còn đặt một loạt đòi hỏi khác đối với Lagrangian của trường (những hạn chế đối với Lagrangian của trường):

a) Tính tuyến tính của lý thuyết trường dẫn đến tính tuyến tính của các phương trình trường. Vì vậy Lagrangian của trường phải được chọn dưới dạng tổ hợp tuyến tính nào đó của các số hạng lên toàn phương đối với các hàm trường và đạo hàm của chúng.

b) Việc Lagrangian của trường chỉ chứa các đạo hàm của các hàm trường không cao hơn bậc nhất dẫn đến các phương trình trường tương ứng sẽ là các phương trình vi phân không cao hơn bậc hai.

c) Tính định xứ của lý thuyết trường có nghĩa Lagrangian của trường



phải là hàm số của tọa độ bốn chiều của một điểm. Yêu cầu này gắn liền với điều kiện rút ra từ lý thuyết tương đối tính về tính điểm của vi hạt và mật độ gần đúng xác định trong lý thuyết trường.

Các đòi hỏi nêu trên (a, b, c) không phải là các đòi hỏi bắt buộc, điều này có thể thấy được khi xem xét việc xây dựng những lý thuyết phi tuyến, không định xứ cũng như các lý thuyết khác dựa vào những phương trình trường chứa đạo hàm bậc cao.

### §3.2. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

Chúng ta biết rằng trong các phép biến đổi Lorentz, vô hướng không đổi dạng. Vô hướng là tenxơ hạng không. Còn trường vô hướng được mô tả bằng hàm một thành phần  $\varphi(x)$  mà trong các phép biến đổi Lorentz nó không biến đổi. Trường vô hướng có hai loại khác nhau trong phép phản chiếu qua các trục tọa độ không gian :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x}; \quad x_4 \rightarrow x'_4 = x_4$$

$\varphi(\vec{x}, x_4) \rightarrow \varphi(\vec{x}', x_4) = \eta_p \varphi(-\vec{x}, x_4), \quad \eta_p^2 = 1, \eta_p = 1$  đối với trường vô hướng;

$\eta_p = -1$  đối với trường giả vô hướng. Do trong lý thuyết trường lượng tử trường giả vô hướng tự do không khác với trường vô hướng và sự khác nhau vật lý giữa hai loại trường này chỉ thể hiện trong quá trình tương tác với các trường khác, nên chúng ta không chú ý những sự khác nhất giữa các vô hướng và các giả vô hướng ; các véc tơ và các giả véc tơ v.v... mà xét chúng đồng thời trong lý thuyết các trường tự do. Đối với các mêzôn không có sôms, trung hòa tương ứng với trường thực vô hướng (giả vô hướng), còn các mêzôn không có sôms, tích điện tương ứng với trường phức vô hướng (giả vô hướng).

#### 1. Trường thực vô hướng

Trường thực vô hướng dùng để mô tả các hạt không có sôms trung

hòa, các hạt mezôn vô hướng (giả vô hướng) trung hòa có spin bằng 0. Bây giờ ta xét các cơ sở và các đại lượng đặc trưng của trường thực vô hướng.

### 1.1. Lagrangian của trường và chương trình trường

Trường thực vô hướng ép được mô tả bằng Lagrangian  $L(x)$  có dạng:

$$L(x) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} + \kappa^2 \varphi^2(x) \right\} \quad (\text{II-102})$$

Ở đây  $\kappa$  là tham số thực dương, còn trong lý thuyết trường lượng tử  $\kappa$  là một khối lượng dừng của lượng tử trường.

Lấy đạo hàm hai vế của công thức (II - 102) theo  $\varphi$  ta được :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\kappa^2 \varphi(x) \quad (\text{II-103})$$

và lấy đạo hàm theo  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}}$  ta được :

$$\frac{\partial L}{\partial \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right\}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \quad (\text{II-104})$$

Thay (II-103), (II-104) vào phương trình tổng quát (II-34) chúng ta nhận được phương trình :

$$(\square - \kappa^2) \varphi(x) = 0 \quad (\text{II-105})$$

Trong đó

$$\square = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

là toán tử Dalembert.

Như vậy đối với phương trình của trường vô hướng chúng ta nhận được phương trình vi phân bậc hai đối với hàm trường  $\varphi(x)$ . Phương trình này bất biến tương đối tính vì  $\square = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$  và hàm  $\varphi(x)$  là một vô hướng.

Phương trình (II-105) chính là phương trình Klein-Gordon mà chúng ta đã gặp trong cơ học lượng tử tương đối tính. Phương trình này có thể nhận được bằng cách tổng quát hóa tương đối tính phương trình Schrödinger như sau : Do phương trình Schrödinger là phương trình bậc nhất đối với đạo hàm theo thời gian và là phương trình bậc hai đối với đạo hàm theo tọa độ không gian, nên phương trình Schrödinger không thể bất biến đối với phép biến đổi Lorentz. Để đáp ứng sự đòi hỏi bất biến với phép biến đổi Lorentz thì tọa độ thời gian và tọa độ không gian phải được chứa một cách đối xứng trong phương trình đó. Thực hiện biến đổi phương trình Schrödinger về phương trình bậc hai theo đạo hàm của thời gian  $t$  và các tọa độ không gian  $x_1, x_2, x_3$ , ta có phương trình mới gọi là phương trình Klein-Gordon nêu ở trên. Đó là phương trình sóng lượng đối tính đầu tiên của cơ học lượng tử.

### ***1.2. Các biến động lực của trường***

Theo quy tắc chung bằng cách xuất phát từ Lagrangian của trường ta có thể tìm được các biểu thức đối với các biến động lực của trường vô hướng ; véc tơ năng xung lượng và mômen động lượng. Theo định nghĩa tenxơ năng xung lượng của trường từ công thức (II-58) ta có :

$$T_{\mu\gamma} = \frac{\partial L}{\partial \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\gamma} \right\}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - L \delta_{\mu\gamma} \quad (\text{II-107})$$

Thay các công thức (II- 102), (II- 104) vào (II- 107) ta được :

$$T_{\mu\gamma} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - L\delta_{\mu\gamma} \quad (\text{II-108})$$

Từ đây ta tính được năng xung lượng của trường (tương tự như cách tính (II-67)) :

Năng lượng của trường (thành phần thời gian của véc tơ năng xung lượng  $P_\mu$  của trường xác định năng lượng của trường) :

$$\begin{aligned} H = -i P_4 &= -\int T_{44} d^3x = \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 + \varkappa^2 \varphi^2 \right] d^3x = \\ &= \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_\gamma} \right)^2 + (\nabla\varphi)^2 + \varkappa^2 \varphi^2 \right] d^3x \end{aligned} \quad (\text{II-109})$$

Xung lượng của trường (thành phần không gian của véc tơ năng xung lượng  $P_\mu$  của trường xác định xung lượng của trường) :

$$P_k = -i \int T_{k4} d^3x = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial x_o} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} d^3x \quad (\text{II-110})$$

Biểu thức (II-109) cho thấy năng lượng của trường vô hướng luôn luôn là đại lượng dương xác định đối với bất kỳ hàm trường  $\varphi(x)$  nào.

Theo công thức (II-85) tenxơ mômen động lượng của trường vô hướng được xác định là :

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= -i \int (x_\mu T_{\nu 4} - x_\nu T_{\mu 4}) d^3x - \\ &- i \int \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_4} \right)} (G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \varphi_\beta(x) d^3x \end{aligned} \quad (\text{II-111})$$

Đối với trường vô hướng  $(G_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = 0$ , vậy mômen động lượng bảo toàn của trường vô hướng được xác định theo dạng :

$$M_{\mu\nu} = -i \int (x_{\mu} T_{\nu 4} - x_{\nu} T_{\mu 4}) d^3x \quad (\text{II-112})$$

Như vậy chỉ tồn tại mômen động lượng quỹ đạo của trường vô hướng mà không tồn tại mômen spin động lượng của trường vô hướng - có nghĩa là trường này chỉ có thể đối ứng với các hạt không có spin - các hạt vô hướng (ví dụ các hạt vô hướng như  $\pi$ -mezôn ; K-mezôn và các hạt có thời gian sống ngắn các hạt cộng hưởng).

Vì trường ta đang xét là trường thực  $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ , nên véc tơ dòng điện tích  $j_{\mu}(x)$ , điện tích của trường  $Q$  sẽ bằng 0, do vậy trường thực  $\varphi(x)$  chỉ dùng để mô tả các hạt trung hòa (ví dụ  $\pi^0$  - mezôn trung hòa.  $K^0$ -mezôn trung hòa).

### ***1.3. Lò giải của phương trình sóng vô hướng***

Phương trình Klein-Gordon là phương trình sóng vô hướng đối với các hạt không có spin, mà hàm trường  $\varphi(x)$  biến đổi như một vô hướng trong phép biến đổi Lorentz :

$$(\square \alpha^2) \varphi(x) = 0 \quad (\text{II-113})$$

Có hai cách giải phương trình này tùy thuộc vào giới hạn không gian trong đó hạt tồn tại : - Cách thứ nhất ta không giới hạn vị trí của hạt ở trong không gian, khi đó nghiệm của phương trình (II-113) được tìm dưới dạng tích phân Fourier ; Cách thứ hai ta coi hạt được đặt trong không gian có thể tích hữu hạn  $V = L_3^0$  và nghiệm của phương trình được tìm dưới dạng chuỗi Fourier.

#### ***a) Lò giải theo cách thứ nhất***

Nghiệm của phương trình (II-113) được biểu diễn dưới dạng khai triển Fourier của hàm trường :

$$\varphi(\bar{x}, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\varphi(\bar{q}, x_0)}{\sqrt{2q_0}} e^{i\bar{q}\bar{x}} d\bar{q} \quad (\text{II-114})$$

Trong đó các hệ số khai triển phụ thuộc vào thời gian ; thừa số  $\frac{1}{\sqrt{2q_0}}$  là thừa số chuẩn hóa hàm sóng để trong một đơn vị thể tích có một hạt, lúc ấy mật độ dòng vô hướng  $j_0$  sẽ bằng một. Từ (II-114) ta thấy hàm  $\varphi(\bar{x}, x_0)$  hoàn toàn xác định hàm  $\varphi(\bar{q}, x_0)$  và ngược lại, giữa chúng có một sự tương ứng đơn trị. Ở đây hàm  $\varphi(\bar{x}, x_0)$  cho cách mô tả trường trong biểu diễn tọa độ, còn hàm  $\varphi(\bar{q}, x_0)$  cho cách mô tả cùng hệ ấy trong biểu diễn xung lượng.

Khi thay (II-114) vào phương trình (II-113) ta tìm được phương trình các hàm  $\varphi(\bar{q}, x_0)$  thỏa mãn :

$$\frac{\partial^2 \varphi(\bar{q}, x_0)}{\partial x_0^2} + (\bar{q}^2 + \alpha^2) \varphi(\bar{q}, x_0) = 0 \quad (\text{II-115})$$

Phương trình này có hai nghiệm tương ứng với năng lượng dương và âm  $q = \pm \sqrt{\bar{q}^2 + \alpha^2}$ . Nghiệm tổng quát của phương trình (II-115) có thể viết dưới dạng :

$$\varphi(\bar{q}, x_0) = \varphi^{(+)}(\bar{q}) e^{iq_0 x_0} + \varphi^{(-)}(\bar{q}) e^{-iq_0 x_0} \quad (\text{II-116})$$

ở đây  $q_0 = \sqrt{\bar{q}^2 + \alpha^2}$  Khi thay (II-116) vào (II-114) ta được :

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \quad (\text{II-117})$$

trong đó

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{iqx} \varphi^{(+)}(\vec{q}) \frac{d\vec{q}}{\sqrt{2q_0}} \quad (\text{II-118})$$

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-iqx} \varphi^{(-)}(-\vec{q}) \frac{d\vec{q}}{\sqrt{2q_0}} \quad (\text{II-119})$$

ở đây  $q = (\vec{q}, iq_0)$ ;  $qx = q_\mu x_\mu = \vec{q}\vec{x} - q_0 x_0$

Lưu ý rằng biểu thức (II-119) nhận được bằng cách thay các biến lấy tích phân  $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$

Hàm  $\varphi^{(+)}(x)$  được gọi là phần tần số dương của hàm trường  $\varphi(x)$  (dưới dấu tích phân chứa thừa số  $e^{iq_0 x_0}$ ). còn hàm  $\varphi^{(-)}(x)$  là phần tần số âm của hàm trường (dưới dấu tích phân chứa thừa số  $e^{-iq_0 x_0}$ ).

Bây giờ chúng ta sẽ tính thực của hàm trường :

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) \quad (\text{II-120})$$

Từ đó tìm sự liên hệ giữa hai hàm  $\varphi^{(+)}(\vec{q})$  và  $\varphi^{(-)}(-\vec{q})$ . Thực hiện lấy liên hợp phức với (II-117) và sử dụng (II-118), (II-119) ta có :

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{[\varphi^{(+)}(\vec{q})]^*}{\sqrt{2q_0}} e^{-iqx} d\vec{q} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{[\varphi^{(-)}(-\vec{q})]^*}{\sqrt{2q_0}} e^{iqx} d\vec{q} \quad (\text{II-121})$$

Từ (II-120) kết hợp với (II-117) và (II-121) từ suy ra :

$$\varphi^{(-)}(-\vec{q}) = \left[ \varphi^{(+)}(\vec{q}) \right]^* \quad (\text{II-122})$$

Như vậy trường thực vô hướng (giả vô hướng) được đặc trưng bằng

một hàm phức  $\varphi^{(+)}(\vec{q})$  - đó là các thành phần Fourier của phần tần số dương của hàm trường  $\varphi(x)$ .

Để viết đơn giản ta đặt :

$$\varphi^{(+)}(\vec{q}) = a(q) ; \varphi^{(-)}(-\vec{q}) = a(-q) \quad (\text{II-123})$$

từ đó điều kiện thực của hàm trường (II-122) có dạng :

$$a(-q) = a^*(q) \quad (\text{II-124})$$

Khi ấy nghiệm tổng quát của phương trình Klein-Gordon sẽ là :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{a(q)}{\sqrt{2q_0}} e^{iqx} d\vec{q} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{a(-q)}{\sqrt{2q_0}} e^{-iqx} d\vec{q} \quad (\text{II-125})$$

### *b) Lời giải theo cách thứ hai*

Trong mức độ gần đúng liên quan đến việc xấp xỉ coi trường bằng hệ được xác định ở trong một thể tích hữu hạn  $L_0^3$  nào đấy, mà nó có phổ gián đoạn của các trị riêng năng lượng, thì nghiệm của phương trình (II-113) tìm được dưới dạng chuỗi Fourier :

$$\varphi(\vec{x}, x_0) = \frac{1}{L_0^{\frac{3}{2}}} \sum \frac{A(\vec{q}, x_0)}{\sqrt{2q_0}} e^{i\vec{q}\vec{x}} \quad (\text{II-126})$$

$$q_0 = \sqrt{\vec{q}^2 + \kappa^2}$$

Đối với hàm trường sóng chúng ta đặt điều kiện tuần hoàn theo tất cả ba tọa độ không gian ở trên hình lập phương cạnh  $L_0$ .

$$\varphi(x, y, z, x_0) = \varphi(x + L_0, y, z, x_0)$$

$$\varphi(x, y, z, x_0) = \varphi(x, y + L_0, z, x_0) \quad (\text{II-127})$$

$$\varphi(x, y, z, x_0) = \varphi(x, y, z + L_0, x_0)$$



Ở đây vectơ  $q$  nhận dãy các giá trị phân lập (gián đoạn) từ điều kiện tuần hoàn (II- 127) :

$$q_x = \frac{2\pi}{L_0} n_x, \quad q_y = \frac{2\pi}{L_0} n_y, \quad q_z = \frac{2\pi}{L_0} n_z$$

trong đó,  $n_x, n_y, n_z$  là tất cả các số nguyên dương âm  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Sau khi thay (II-126) vào (II-113) và lập luận y hệt như cách đã làm ở trên, ta có thể biểu diễn nghiệm của phương trình dưới dạng :

$$\varphi(x) = \frac{1}{L_0^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \left[ a_{\vec{q}} e^{iqx} + a_{\vec{q}}^* e^{-iqx} \right], \quad (\text{II-128})$$

trong đó  $a_{\vec{q}} = A^{(+)}(\vec{q}), a_{\vec{q}}^* = A^{(-)}(-\vec{q})$

Do các kích thước thể tích  $L_0^3$  có thể chọn tùy ý, nên nghiệm (II-128) là nghiệm tổng quát của phương trình sóng (II-113).

Chúng ta biết rằng sóng phẳng đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết lượng tử vì chúng mô tả các trạng thái của các hạt riêng biệt với xung lượng xác định. Lời giải phương trình vô hướng (II-113) theo tích phân Fourier và theo chuỗi Fourier nêu ở trên về thực chất chỉ là các phép khai triển hàm trường vô hướng theo các sóng phẳng  $u_{\vec{q}} = \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{L_0^{\frac{3}{2}}}$  có

trong thể tích  $V = L_0^3$ , và theo sóng phẳng  $u_{(\vec{q})} = \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$  có trong toàn

bộ không gian. Để thuận tiện cho việc sử dụng sau này trong việc chuyển các hệ thức lấy tổng thành phép lấy tích phân và ngược lại, chúng ta dẫn ra sau đây các công thức chuyển hai biểu diễn lời giải của phương trình sóng vô hướng :

$$u_{\vec{q}} \leftrightarrow \left( \frac{2\pi}{L_0} \right)^{\frac{3}{2}} u(\vec{q})$$

$$a_{\vec{q}} \leftrightarrow \left( \frac{2\pi}{L_0} \right)^{\frac{3}{2}} a(\vec{q}) \quad (\text{II-129})$$

$$\sum_{\vec{q}} f(\vec{q}) \leftrightarrow \left( \frac{2\pi}{L_0} \right)^{\frac{3}{2}} \int f(\vec{q}) d\vec{q}$$

#### 1.4. Các biến động lực của trường trong biểu diễn xung lượng

Chúng ta có thể biểu diễn tất cả các biến động lực của trường vô hướng bằng cách sử dụng nghiệm tổng quát của phương trình Klein-Gordon qua các đại lượng  $a(\vec{q})$  và  $a(-\vec{q})$ .

Đầu tiên ta xét biểu thức (II-109) đối với năng lượng của trường:

$$H = \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 + \kappa^2 \varphi^2 \right] d^3x \quad (\text{II-130})$$

Thay (II-117) vào (II-130) và tích phân lấy theo  $x$  :

$$H = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} + 2 \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x_\mu} + \right. \\ \left. + \kappa^2 \left[ \varphi^{(+)} \varphi^{(+)} + 2\varphi^{(+)} \varphi^{(-)} + \varphi^{(-)} \varphi^{(-)} \right] \right\} d^3x \quad (\text{II-131})$$

Để tính kết quả tích phân trên chúng ta tính hai số hạng sau đây dưới dấu tích phân rồi suy luận cho các số hạng khác :

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \left[ \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} + \varkappa^2 \varphi^{(+)} \varphi^{(+)} \right] = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int \frac{d\bar{q}d\bar{q}'}{2\sqrt{q_0q'_0}} e^{i(\bar{q}+\bar{q}')x} \varphi^{(+)}(\bar{q})\varphi^{(+)}(\bar{q}') \times \\
& \quad \times e^{-i(q_0+q'_0)x_0} (\varkappa^2 - q_\mu q'_\mu) = \\
& = \int \frac{d\bar{q}}{2q_0} \varphi^{(+)}(\bar{q})\varphi^{(+)}(-\bar{q}) (\varkappa^2 + \bar{q}^2 - q_0^2) e^{-2iq_0x_0}
\end{aligned}$$

Từ những kết quả của các phép tính tương tự ta có :

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{d\bar{q}}{4q_0} \left\{ \left[ \varphi^{(+)}(\bar{q})\varphi^{(+)}(-\bar{q}) e^{-2iq_0x_0} + \varphi^{(-)}(\bar{q})\varphi^{(-)}(-\bar{q}) e^{2iq_0x_0} \right] \times \right. \\
& \quad \times \left( \varkappa^2 + \bar{q}^2 - q_0^2 \right) + \left[ \varphi^{(+)}(\bar{q})\varphi^{(-)}(-\bar{q}) + \varphi^{(-)}(-\bar{q})\varphi^{(+)}(\bar{q}) \right] \left( \varkappa^2 + \bar{q}^2 + q_0^2 \right) \left. \right\} \\
& \hspace{15em} (II-132)
\end{aligned}$$

Sử dụng (II-123) và lưu ý  $q_0^2 = q^2 + \varkappa^2$  kết quả cuối cùng ta nhận được :

$$H = \frac{1}{2} \int d\bar{q} [a(q)a(-q) + a(-q)a(q)] q_0, \quad (II-133)$$

trong đó  $a(-q) = a^*(q)$  là điều kiện thực của hàm trường (xem (II-124)). Đối với xung lượng của trường theo (II-110) ta có :

$$p_k = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} d^3x \quad (II-134)$$

Tiến hành các phép tính tương tự và chú ý tới tính lẻ của hàm dưới dấu tích phân chúng ta nhận được biểu thức xung lượng của trường :

$$p_k = \frac{1}{2} \int d\bar{q} [a(q)a(-q) + a(-q)a(q)] q_k \quad (\text{II-135})$$

Như vậy trường vô hướng cổ điển có thể nhận những giá trị bất kỳ xác định thông qua hàm phức  $a(q)$  - hàm của biến  $\bar{q}$ , còn năng lượng  $H$  của trường cổ điển có thể nhận các giá trị dương bất kỳ (biểu thức (II-133)).

## 2. Trường phức vô hướng

Trường phức vô hướng được mô tả bởi hàm phức :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \} \quad (\text{II-136})$$

và liên hợp phức của nó

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varphi_1(x) - i\varphi_2(x) \}$$

Trong hình thức luận việc sử dụng  $\varphi(x)$ ,  $\varphi^*(x)$  - tổ hợp của hai hàm thực  $\varphi_1(x)$  và  $\varphi_2(x)$  thực chất là thuận tiện và  $\varphi(x)$ ,  $\varphi^*(x)$  được xét như các tọa độ suy rộng của hệ.

### 2.1. Lagrangian của trường và các phương trình trường

Trường phức vô hướng  $\varphi$  được mô tả bằng Lagrangian thỏa mãn những đòi hỏi của tính hiệp biến tương đối tính và tính chất biến đổi với phép biến đổi gradient sẽ có dạng (tương tự như (II-102)) :

$$L(x) = - \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \kappa^2 \varphi^* \varphi \right\}, \quad (\text{II-137})$$

Tính biến phân tổng quát tương tự như (II-93) và dựa vào nguyên lý biến phân ta nhận được các phương trình trường sau đây:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right)} = 0, \quad (\text{II-138})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^*} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_{\mu}} \right)} = 0 \quad (\text{II-139})$$

Sử dụng công thức (II-137) bằng cách lấy đạo hàm theo  $\varphi$ .

$\varphi^*$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}}$  và  $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_{\mu}}$  lần lượt ta có :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\kappa^2 \varphi \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi^*} = -\kappa^2 \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right)} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_{\mu}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_{\mu}} \right)} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \quad (\text{II-140})$$

Thay (II-139) và (II-140) vào (II-138) lý nhận được các phương trình tương ứng đối với các hàm trường  $\varphi(x)$  và  $\varphi^*(x)$  :

$$(\square - \kappa^2) \varphi(x) = 0 \quad (\text{II-141})$$

$$(\square - \kappa^2) \varphi^*(x) = 0 \quad (\text{II-142})$$

Đây là các phương trình Klein-Gordon mà sự lý giải vật lý phương trình này ta đã gặp trong cơ học lượng tử tương đối tính. Trong đó phép chuyển dời từ trạng thái năng lượng âm sang thời trạng thái lượng dương được giải thích như sự sinh (hay hủy) cặp những hạt cùng với các điện tích ngược dấu.

## 2.2. Các biến động lúc của trường phức vô hướng

Về hình thức luận dương phức vô hướng được xây dựng ương tự với

lý thuyết của trường thực vô hướng nên khi tổng quát hóa tương tự từ công thức (II-107) đến công thức (II-112) cho trường phức vô hướng, ta có:

- Tenxơ năng xung lượng của trường :

$$\begin{aligned} T_{\mu\gamma} &= \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\gamma} \right)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\gamma} \right)} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} - L \delta_{\mu\gamma} \\ &= \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\gamma} - L \delta_{\mu\gamma} \end{aligned} \quad (\text{II-143})$$

- Biểu thức năng lượng của trường:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \varkappa^2 \varphi^* \varphi \right] = \\ &= \int d^3x \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \nabla \varphi^* \nabla \varphi + \varkappa^2 \varphi^* \varphi \right] \end{aligned} \quad (\text{II-144})$$

- Biểu thức xung lượng của trường:

$$P_k = - \int d^3x \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_k} \right].$$

Trong trường hợp trường phức vô hướng ta có thể đưa thêm vào một biến động lực nữa - véctơ bốn chiều dòng điện tích  $j_\mu(x)$ . Đó là điều khác với trường thực vô hướng. Véctơ dòng điện tích được xác định theo công thức tổng quát (II-97). Điện tích của trường phức được xác định theo công thức (II-101) - đó là đại lượng bảo toàn ( $q = \text{const}$ ) và nó có dạng:

$$Q = -i \int j_4(x) d^3x = e \int d^3x \left[ \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_4} \right) \varphi - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \right) \varphi^* \right] \quad (\text{II-145})$$

Trong đó đại lượng mật độ điện tích của trường là:

$$\rho = e \left[ \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_4} \right) \varphi - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \right) \varphi^* \right] \quad (\text{II-146})$$

Để có thể nhận được biểu thức mật độ dòng (II-146) một cách trực tiếp từ các phương trình đối với trường (II-141), (II-142), ta nhân trái phương trình (II-141) với  $\varphi$  và phương trình (II-142) với  $\varphi^*$ , rồi trừ cho nhau ta có:

$$\varphi \square \varphi - \varphi \square \varphi^* = 0$$

hay

$$\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \varphi - \varphi \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \varphi^* = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ \varphi^* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \varphi \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \right) \right] = 0 \quad (\text{II-147})$$

Về thực chất phương trình (II-147) được giải thích như phương trình liên tục, từ đây suy ra véctơ dòng điện tích:

$$j_\mu(x) = \alpha \left[ \varphi^* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \varphi \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \right) \right], \quad (\text{II-148})$$

trong đó  $\alpha$  là một hệ số không đổi nào đó.

Ta thấy với độ chính xác tới các hệ số không đổi, biểu thức (II-148) trùng hợp với biểu thức tương tự đối với véctơ dòng  $j_\mu(x)$  mà ta tìm được từ sự bất biến của tác dụng đối với phép biến đổi gradien loại một.

Từ (II-146) ta đưa ra một đại lượng quan trọng là:

$$\rho_0 = \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_4} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \varphi^* \right] \quad (\text{II-149})$$

xác định mật độ điện tích, song nó không thể giải thích như mật độ xác suất tìm thấy hạt của cơ học lượng tử được vì nó là đại lượng dương không xác định (vì chứa  $\varphi$  và đạo hàm theo thời gian  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}$ ).

Trong phép gần đúng không tương đối tính biểu thức phi tương đối tính đối với mật độ xác suất  $\rho_0 = \varphi^* \varphi$ . Ở đây những khó khăn nêu trên đối với  $\rho_0$  theo công thức (II-149) có thể vượt qua được nhờ cách giải thích đặc biệt nghiệm của phương trình Klein - Gordon trong biểu diễn xung lượng.

### 2.3. Biểu diễn xung lượng của trường phức vô hướng

Tương tự các kết quả nhận được đối với trường thực vô hướng chúng ta có thể biểu diễn nghiệm của phương trình (II-141), (II-142) dưới dạng nghiệm tổng quát của phương trình Klein - Gordon dạng tích phân Fourier (II-125):

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dq}{\sqrt{2q_0}} [a(q)e^{iqx} + a(-q)e^{-iqx}] \quad (\text{II-150})$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dq}{\sqrt{2q_0}} [a^*(q)e^{-iqx} + a^*(-q)e^{iqx}] \quad (\text{II-151})$$

Điều khác biệt quan trọng của trường phức vô hướng với trường thực vô hướng ở chỗ các hàm  $a(q)$  và  $a(-q)$  trong trường phức vô hướng là các hàm độc lập vì điều kiện thực (II-124) không còn nữa.

Để hiểu rõ hơn ý nghĩa của các nghiệm tổng quát nêu trên ta quay về



cách giải thích thông thường trong cơ học lượng tử.

Theo cách giải thích này thì công thức (II-150), (II-151) là các phép khai triển nghiệm tổng quát của phương trình sóng tương đối tính thành các sóng phẳng De Broglie:

$$e^{iqx} = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\vec{r} - \varepsilon t)} \quad (\text{II-152})$$

(Vì dùng đơn vị  $c = \hbar = 1$ )

Sóng này mô tả trạng thái của hạt chuyển động với năng lượng dương  $\varepsilon$  và cùng chiều với vectơ xung lượng  $\vec{q}$  ;

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\vec{r} + \varepsilon t)} = e^{\frac{i}{\hbar}[(\vec{q}\vec{r} - (-\varepsilon)t)]} \quad (\text{II-153})$$

Sóng này mô tả trạng thái của hạt cùng với năng lượng âm ( $-\varepsilon$ ) và chuyển động cùng chiều với xung lượng  $\vec{q}$  .

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\vec{r} - \varepsilon t)} = e^{\frac{i}{\hbar}[(-\vec{q})\vec{r} - (-\varepsilon)t]} \quad (\text{II-154})$$

Sóng này mô tả trạng thái của hạt cùng với năng lượng âm ( $-\varepsilon$ ) và chuyển động ngược chiều với xung lượng ( $-\vec{q}$ ) ;

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\vec{r} + \varepsilon t)} = e^{-\frac{i}{\hbar}[(-\vec{q})\vec{r} - \varepsilon t]} \quad (\text{II-155})$$

Sóng này mô tả trạng thái của hạt cùng với năng lượng dương và chuyển động ngược chiều với xung lượng.

Mặt khác bình phương môđun các biên độ  $a(q)$ ,  $a^*(q)$ ,  $a(-q)$  và  $a^*(-q)$  cho ta xác suất tìm thấy hạt ở các trạng thái tương ứng.

Trong các phép khai triển (II-150), (II-151) ta thay có tồn tại các trạng thái cùng với năng lượng dương cũng như trạng thái cùng với

năng lượng âm  $\varepsilon = \pm \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}$ ; các nghiệm ứng với năng lượng dương và âm đều là nghiệm của phương trình Klein - Gordon. Vì vậy nghiệm tổng quát của phương trình Klein - Gordon có thể biểu diễn dưới dạng tổng:

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \quad (\text{II-156})$$

trong đó phần tần số dương (tương ứng theo (II-150))

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d\vec{q}}{\sqrt{2q_0}} a(q) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\vec{r} - \varepsilon t)} \quad (\text{II-157})$$

và phần tần số âm

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d\vec{q}}{\sqrt{2q_0}} a(-q) e^{\frac{i}{\hbar}[(-\vec{q})\vec{r} - (-\varepsilon)t]} \quad (\text{II-158})$$

Trong vật lý cổ điển các trạng thái cùng với năng lượng âm không gây nên khó khăn gì, vì khi hạt chuyển động ở vùng năng lượng xác định, thì không có việc chuyển vùng năng lượng do sự biến đổi năng lượng một cách liên tục, và các phép dời chuyển từ trạng thái năng lượng dương sang trạng thái năng lượng âm là không xảy ra. Do đó ta không cần phải xét các trạng thái năng lượng âm nữa.

Trong lý thuyết lượng tử có cả những phép dời chuyển một cách liên tục và có cả phép dời chuyển một cách gián đoạn. Bởi vậy không thể loại bỏ các trạng thái cùng với mức năng lượng âm, vì việc loại bỏ những nghiệm năng lượng âm sẽ vi phạm (về mặt toán học) tính chất đầy đủ của tập hợp các nghiệm phương trình sóng. Ta không thể khai triển một hàm sóng bất kỳ theo tập hợp hàm không đủ như vậy. Mặt khác (về mặt vật lý hay mặt lý thuyết) vì phương trình Dirac cho phép chuyển dời hệ nằm ở trạng thái đầu với năng lượng dương, vào các trạng thái cuối với năng lượng âm. Vì vậy để vượt qua khó khăn trong

việc chuyển dời vào các trạng thái cùng với năng lượng âm Dirac đã giả thiết rằng tất cả các trạng thái năng lượng âm đều bị Electron chiếm đầy. Theo nguyên lý Pauli những phép dời chuyển vào vùng các trạng thái năng lượng âm đều bị cấm. Đồng thời Dirac cho rằng những electron năng lượng âm đều được chứa đầy trong một cái "bể" - chân không, trong khi đó thì các trạng thái năng lượng dương còn trống. Nếu như vì một lý do nào đó trong bể Dirac mất đi một electron năng lượng âm, thì người ta nói rằng sự mất đi đó tương đương với sự xuất hiện một lỗ trống trong bể Dirac. Tuy electron năng lượng âm không quan sát được, nhưng lỗ trống có thể quan sát được (về hình tượng giống như quan sát được một bọt nước xuất hiện trong bể nước). Dirac gọi lỗ trống đó là positron - nó là phản hạt của electron. Như vậy Dirac đã giải thích ý nghĩa vật lý của các trạng thái cùng với năng lượng âm khi dựa vào đề xuất gần chúng không phải với hạt mà gắn liền với phản hạt - dựa vào lý thuyết lỗ trống. Khác với cách giải thích của Dirac. Feynman đã đưa ra cách giải thích thuận tiện cho các hạt với spin bán nguyên cũng như các spin nguyên. Theo Feynman thì các trạng thái cùng với năng lượng âm và xung lượng (-q) được mô tả bằng hàm:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{q}\vec{r}+et)} = e^{-\frac{i}{\hbar}[(\vec{-q})\vec{r}-et]} \quad (\text{II-159})$$

và được giải thích như trạng thái của hạt, mà trong đó nó chuyển động giạt lùi theo thời gian (chuyển động mang tính chất quay ngược về thời gian). Vì vậy dấu trừ trước t(-t) (ở biểu thức (II-159)) có thể xem như hệ quả của việc thay đổi chiều thời gian  $t \rightarrow (-t)$  và lúc đó năng lượng sẽ là đại lượng dương. Theo lập luận ở trên thì xung lượng của hạt này bằng (+q), còn dấu âm gắn liền với chuyển động giạt lùi theo thời gian. Tóm lại chuyển động giạt lùi theo thời gian trong lý thuyết trường tương tác tương ứng với chuyển động thực của phản hạt cùng với năng lượng  $\epsilon$  và xung lượng q theo chiều thuận thời gian. Nói cách khác các trạng thái cùng với năng lượng âm sẽ mô tả các phản hạt thực cùng với các tính chất "bình thường" theo thời gian. Chú ý: từ công thức (II-150) có thể nói bình phương môđun của biên độ a(q) xác định xác suất trạng thái của hạt, còn bình phương môđun của a(-q) xác định xác suất trạng

thái phản hạt.

#### ***2.4. Các biến động lực và cách giải thích chúng trong biểu diễn xung lượng***

Sử dụng nghiệm tổng quát của phương trình Klein - Gordon dạng khai triển (II-150) và (II-151) đối với trường phức vô hướng và thực hiện những tính toán tương tự như đã tiến hành đối với trường thực vô hướng (dẫn đến công thức (II-135)), ta nhận được các biểu thức dưới đây đối với véctơ bốn chiều năng xung lượng và điện tích của trường (II-145):

$$P_{\mu} = \int [a^{*}(q)a(q) + a^{*}(-q)a(-q)]q_{\mu}d\vec{q} \quad (\text{II-160})$$

$$Q = e \int [a^{*}(q)a(q) - a^{*}(-q)a(-q)]d\vec{q} \quad (\text{II-161})$$

Từ (II-160) ta suy ra năng lượng của trường chỉ nhận các giá trị dương. Còn từ (II-161) ta thấy điện tích  $Q$  của trường có thể nhận các giá trị âm và các giá trị dương. Để thấy rõ ý nghĩa vật lý của biểu thức (II-161) ta viết nó dưới dạng:

$$Q = \int [ea^{*}(q)a(q) + (-e)a^{*}(-q)a(-q)]d\vec{q} \quad (\text{II-162})$$

Ta nhận thấy rằng tất cả các biến động lực  $P_{\mu}$ ,  $Q$  của trường phức vô hướng đều có sự đóng góp riêng rẽ dưới dạng tổng của thành phần tần số dương  $\varphi^{(+)}(x)$  và của phần tần số âm  $\varphi^{(-)}(x)$ . Việc phân chia này là bất biến tương đối tính và có thể thực hiện được trong biểu diễn xung lượng và trong biểu diễn tọa độ. Trong biểu diễn đó phần tần số dương  $\varphi^{(+)}$  sẽ mô tả hạt vô hướng cùng với điện tích  $e$ , còn phần tần số  $\varphi^{(-)}$  sẽ mô tả phản hạt vô hướng điện tích  $(-e)$ . Khi đó tổng điện tích của hệ sẽ bằng tổng điện tích hạt cộng với tổng điện tích của phản hạt.

### **3. Trường pion**

Trường thực vô hướng cùng với trường phức vô hướng tạo thành một trường gọi là trường pion. Trường thực vô hướng mô tả các hạt  $\pi^0$

mêzon trung hòa, trường phức vô hướng mô tả các hạt ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ) mêzon tích điện. Do đó trường pion mô tả đồng thời mêzon của cả ba loại ( $\pi^0$ ,  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ). Ba hạt pion giả vô hướng được mô tả bằng ba hàm trường giả vô hướng - ba thành phần của vectơ trong không gian spin đồng vị và chúng tạo thành một tuyến ba. Bây giờ ta sẽ nói về không gian spin đồng vị.

### 3.1. Không gian spin đồng vị

Không gian spin đồng vị hay còn gọi là không gian điện tích được dùng để nghiên cứu tính độc lập điện tích của các lực hạt nhân. Trong không gian spin đồng vị: độ lớn của các lực hạt nhân tác dụng giữa prôtôn và prôtôn (p - p) hay giữa neutron và neutron (n - n), cũng giống như độ lớn của lực hạt nhân tác dụng giữa prôtôn và neutron (p - n), nếu như các hạt tương tác đó ở cùng một trạng thái spin và quỹ đạo. Đó là bản chất của vấn đề mà không gian spin đồng vị nghiên cứu. Nói cách khác, trong tương tác hạt nhân p và n không khác gì nhau (không phụ thuộc điện tích). Người ta cho rằng khối lượng của p khác khối lượng của n là do p có mang điện tích (nghĩa là do tương tác điện từ). Như vậy trong tương tác hạt nhân, người ta có thể coi p và n là hai trạng thái của cùng một hạt, tức là hạt nuclôn (N). Nếu không kể đến tương tác điện từ thì hai trạng thái đó tương ứng với cùng một khối lượng, do đó cùng một năng lượng. Nếu kể đến tương tác điện từ thì hai trạng thái đó tương ứng với hai khối lượng khác nhau chút ít, do đó tương ứng với hai mức năng lượng gần nhau. Tính chất này có thể so sánh với tính chất của electron trong nguyên tử. Nếu không kể đến spin thì môi trường của electron trong nguyên tử tương ứng với cùng một mức năng lượng, còn nếu kể đến spin thì mức năng lượng đó tách thành hai mức gần nhau tương ứng với hai trạng thái của electron khác nhau về sự định hướng của mômen spin ( $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$  và  $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ ). Để tiện tính

toán, đối với nuclôn người ta cũng đưa ra một đại lượng gọi là spin đồng vị I. Như ta đã biết trong cơ học lượng tử, nếu hệ có spin s thì hệ sẽ có  $(2s + 1)$  trạng thái ứng với các hình chiếu khác nhau của spin. Tương tự nếu hệ có spin đồng vị I thì hệ sẽ có  $(2I + 1)$  trạng thái ứng

với các giá trị khác nhau của hình chiếu spin đồng vị trên một trục Z ưu tiên nào đó. Như vậy khái niệm spin đồng vị cho phép ta mô tả các trạng thái điện khác nhau của cùng một hạt. Ví dụ: nuclôn có hai trạng thái điện nghĩa là  $(2I + 1) = 2$ , do đó  $I = \frac{1}{2}$ ; cụ thể là p và n là hai trạng thái khác nhau của nuclôn về hình chiếu  $I_z$  của spin đồng vị:

$$p \text{ có } I_z = + \frac{1}{2} ,$$

$$n \text{ có } I_z = - \frac{1}{2} .$$

Đến đây cần nhấn mạnh rằng không gian spin đồng vị là không gian trừu tượng không thực, nó được đưa vào để tiện lợi cho việc nghiên cứu các tính chất đối xứng trong của các hạt cơ bản. Một cách tương tự hình thức trong không gian spin đồng vị ta cũng đưa ra những khái niệm: các toán tử spin đồng vị, hàm sóng, phép biến đổi và sự bất biến tương tự như đã thực hiện khi nghiên cứu các tính chất không thời gian của các hạt trong không gian ba, bốn chiều thông thường. Dưới đây là một ví dụ về sự tương tự hình thức đối với không gian ba chiều spin đồng vị (xem bảng dưới đây):

KHÔNG GIAN BA CHIỀU THÔNG THƯỜNG	KHÔNG GIAN BA CHIỀU SPIN ĐỒNG VỊ
<b>Spin (mômen spin) của electron bằng <math>\frac{1}{2} \hbar</math></b>	<b>Spin đồng vị của nuclôn bằng <math>\frac{1}{2}</math></b>
Hàm sóng $\psi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & (x) \\ \varphi_2 & (x) \end{bmatrix}$ (II-163)	Hàm sóng $\psi_N = \begin{bmatrix} \varphi_p & (x) \\ \varphi_n & (x) \end{bmatrix}$ (II-164)

KHÔNG GIAN BA CHIỀU THÔNG THƯỜNG	KHÔNG GIAN BA CHIỀU SPIN ĐỒNG VỊ
<p><math>\varphi_1, \varphi_2</math> là hai trạng thái spin của electron. Nếu <math>\varphi_2 = 0</math> thì <math>\psi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ 0 \end{bmatrix}</math> mô tả hạt ở trạng thái ứng với hình chiếu dọc theo trục z: <math>S_z = \frac{1}{2} \hbar</math>.</p> <p>Nếu <math>\varphi_1 = 0</math> thì <math>\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}</math> mô tả hạt ở trạng thái ứng với hình chiếu spin dọc theo trục z: <math>S_z = -\frac{1}{2} \hbar</math>.</p> <p>Toán tử spin (véctơ spin) có thể biểu diễn bằng ma trận:</p> $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ $\vec{S} = (\vec{S}_x, \vec{S}_y, \vec{S}_z)$ $\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$	<p><math>\varphi_p(x), \varphi_n(x)</math> là hai trạng thái khác nhau của nuclôn. Nếu <math>\varphi_n(x) = 0</math> thì <math>\psi_N = \begin{bmatrix} \varphi_p(x) \\ 0 \end{bmatrix}</math> mô tả nuclôn ở trạng thái ứng với spin đồng vị dọc theo trục ưu tiên 3: <math>I_3 = \frac{1}{2}</math>.</p> <p>Nếu <math>\varphi_p(x) = 0</math> thì <math>\psi_N = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix}</math> mô tả nuclôn ở trạng thái ứng với spin đồng vị dọc theo trục ưu tiên 3: <math>I_3 = -\frac{1}{2}</math>.</p> <p>Toán tử spin đồng vị có thể biểu diễn bằng ma trận:</p> $\vec{I} = (\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3)$

Chúng ta biết rằng dạng tổng quát của toán tử tác dụng lên hàm sóng loại (II-163) và (II-164) là ma trận 2 x 2 ecmite. Bằng cách lập luận tương tự như với spin thông thường, chúng ta có thể biểu diễn các toán tử của spin đồng vị dưới dạng ma trận trùng hoàn toàn với các ma trận của spin thông thường.

Điều đó được thể hiện qua ví dụ spin đồng vị 2 được đối ứng với ba ma trận 2 x 2 hoàn toàn trùng với ma trận Pauli:

$$\dot{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-165})$$

Khi đó toán tử spin đồng vị (véctơ) có thể biểu diễn bằng ma trận:

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{T}} = (\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3) \quad (\text{II-166})$$

và bình phương toán tử véctơ  $\hat{\mathbf{I}}$  tỉ lệ với ma trận đơn vị, với hệ số tỉ lệ bằng  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + 1 \right) = \frac{3}{4}$ . Các véctơ riêng tương ứng với các giá trị riêng  $\frac{1}{2}$

và  $-\frac{1}{2}$  của toán tử  $\hat{I}_3$  là  $\begin{bmatrix} \Psi_p(x) \\ 0 \end{bmatrix}$  và  $\begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_n(x) \end{bmatrix}$ . Các thành phần  $I_1, I_2, I_3$

thỏa mãn các hệ thức giao hoán đặc trưng để cho mômen động lượng  $[I_1, I_2] = iI_3$  (và thực hiện các hoán vị tuần hoàn các chỉ số 1, 2, 3).

Bây giờ chúng ta đề cập đến sự tương tự hình thức đối với phép quay tùy ý trong không gian ba chiều spin đồng vị và trong không gian ba chiều thông thường: trong không gian ba chiều thông thường sự bất biến gắn liền với định luật bảo toàn mômen động lượng, còn trong không gian ba chiều spin đồng vị sự bất biến spin đồng vị hay sự độc lập điện tích gắn liền với định luật bảo toàn spin đồng vị. Ngoài ra nếu ta xét phép quay quanh trục thứ ba của hai không gian này thì sự bất biến gắn liền tương ứng với sự bảo toàn thành phần thứ ba của mômen động lượng (trong không gian ba chiều thông thường) và sự bảo toàn thành phần thứ ba của véctơ spin đồng vị  $I_3 = \text{const}$  (trong không gian spin đồng vị).

Đến đây ta lưu ý rằng các hàm sóng không phụ thuộc tường minh vào các tọa độ của không gian spin đồng vị ba chiều; cho nên các phép quay trong không gian này không làm biến đổi các tọa độ thông thường  $x$ . Theo Gellman và Nishijima thì điện tích  $Q$ , hình chiếu  $I_3$  của véctơ spin đồng vị, tích lạ  $S$ , tích barion  $B$  của mỗi hạt adrôn (gồm các mêzôn  $\pi$ , mêzôn  $K$  và các bariôn (nuclôn và hyperôn)) liên hệ với nhau bằng



hệ thức:

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (\text{II-167})$$

trong đó  $Y = B + S$  gọi là siêu tích, còn  $Q$  là số điện tích của hạt tính theo đơn vị  $e$ . Ví dụ:

$$\text{Đối với prôtôn: } Q = \frac{1}{2} + \frac{1+0}{2} = +1$$

$$\text{Đối với neutron: } Q = -\frac{1}{2} + \frac{1+0}{2} = 0$$

$$\text{Đối với ômêga } (\Omega^- \text{ - một hyperôn): } Q = 0 + \frac{1+(-3)}{2} = -1.$$

Ta có thể áp dụng hình thức luận tương tự trên cho các pion ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ) và có thể coi chúng là ba trạng thái của cùng một hạt, nghĩa là  $2I + 1 = 3$ , suy ra  $I = 1$ . Vậy ba hạt mêzôn  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  đều có spin đồng vị  $I = 1$ .

Ba trạng thái  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  ứng với ba giá trị hình chiếu  $I_3$  khác nhau của véctơ spin đồng vị của  $\pi$ :

$$\pi^+ \text{ có } I_3 = +1 ; \pi^0 \text{ có } I_3 = 0 ; \pi^- \text{ có } I_3 = -1.$$

Các pion ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ) đều có tích lạ  $S$ , tích barion  $B$  bằng 0, nên suy ra:

$$\pi^+ \text{ có } Q = +1 ; \pi^0 \text{ có } Q = 0 ; \pi^- \text{ có } Q = -1.$$

Tóm lại trong không gian spin đồng vị hàm sóng của tuyến ba (ba thành phần của véctơ trong không gian spin đồng vị) của các hạt với spin đồng vị bằng 1 có thể coi như một véctơ spin đồng vị cùng với ba thành phần là các hàm trường vô hướng thực và phức.

### 3.2. Các biểu diễn khác nhau của trường pion và các Lagrangian tương ứng

Tùy theo ba thành phần của véctơ spin đồng vị đều là các hàm thực hay là trong đó có hàm phức mà trường luôn được biểu diễn theo loại khác nhau. Có hai loại biểu diễn của trường pion:

- Loại thứ nhất là trường hợp tất cả ba thành phần của véctơ spin đồng vị là các hàm thực:

$$\vec{\pi}(x) = \{\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x)\} \quad (\text{II-168})$$

$$\pi_{\alpha}^*(x) = \pi_{\alpha}(x) ; \alpha = 1, 2, 3$$

trong đó thành phần thứ ba  $\pi_3(x)$  mô tả các hạt  $\pi_0$  mêzôn trung hòa, còn hai thành phần  $\pi_1(x)$  và  $\pi_2(x)$  mô tả tương ứng các hạt  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  mêzôn tích điện.

- Loại thứ hai là trường hợp thành phần thứ hai là hàm thực, còn thành phần thứ nhất và thứ ba là các hàm phức và liên hợp phức:

$$\vec{\varphi}(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$$

$$\varphi_2^*(x) = \varphi_2(x) ; \varphi_1^*(x) = -\varphi_3(x) \quad (\text{II-169})$$

Từ các trường hợp trên ta có thể chọn sự liên hệ giữa (II-168) và (II-169) theo dạng:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}} \text{ mô tả các hạt } \pi^+ \text{ mêzôn.}$$

$$\varphi_2 = \pi_3 \text{ mô tả các hạt } \pi^0 \text{ mêzôn,} \quad (\text{II-170})$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}} \text{ mô tả các hạt } \pi^- \text{ mêzôn}$$

hoặc có thể chọn dưới dạng ma trận biến đổi O (ma trận Unita  $O^+O = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1(x) \\ \pi_2(x) \\ \pi_3(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II-171})$$

Đối với trường pion tự do Lagrangian bất biến đối với phép quay trong không gian ba chiều spin đồng vị và trong biểu diễn (II-168) Lagrangian có dạng:

$$L(x) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \bar{\pi}(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \bar{\pi}(x)}{\partial x_\mu} + \kappa^2 \bar{\pi}(x) \bar{\pi}(x) \right\} = \quad (\text{II-172})$$

còn trong biểu diễn (II-169) Lagrangian có dạng:

$$L(x) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \bar{\varphi}(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \bar{\varphi}(x)}{\partial x_\mu} + \kappa^2 \bar{\varphi}(x) \bar{\varphi}(x) \right\} = \quad (\text{II-173})$$

$$- \left\{ \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\mu} + \kappa^2 \varphi_1^*(x) \varphi_1(x) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_\mu} + \kappa^2 \varphi_2^2(x) \right\}$$

Dựa vào tính chất bất biến spin đồng vị của Lagrangian (II-172) ta nhận được sự bảo toàn véctơ spin đồng vị I. Mặt khác theo công thức (II-167) thành phần thứ ba của véctơ spin đồng vị  $I_3$  đối với  $\pi$  mêzôn sẽ bằng điện tích Q (vì siêu tích  $Y = B + S = 0$ ):

$$Q = I_3 \quad (\text{II-174})$$

Tương tự như đã thực hiện ở chương II, ở đây ta có thể nhận kết quả: phép biến đổi chuẩn loại một chính là phép quay quanh trục thứ ba của không gian ba chiều spin đồng vị.

PHÉP BIẾN ĐỔI CHUẨN LOẠI MỘT	PHÉP QUAY TRONG KHÔNG GIAN SPIN ĐỒNG VỊ
$\varphi_1(x) \rightarrow \varphi'_1(x) = e^{i\alpha} \varphi_1(x)$ (xem II-94)	
$Q = -i \int J_4(x) d^3x = \text{const}$ (xem II-101)	$I_3 = \text{const}$
$Q = I_3 = -i \int J_4(x) d^3x = e \int d^3x \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \varphi_1^* \right] = \text{const}$ <p style="text-align: right;">(xem II-145)</p>	

Từ công thức (II-170) ta có thể viết:

$$\varphi'_1(x) = e^{i\alpha} \varphi_1(x) ; \varphi_1 = - \frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}} ;$$

$$\varphi'_1(x) = - \frac{\pi'_1 - i\pi'_2}{\sqrt{2}} \quad (\text{II-175})$$

hay viết dưới dạng tường minh:

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi'_1 - i\pi'_2) = (\cos \alpha - i \sin \alpha) \left[ \frac{-1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2) \right] ,$$

$$\pi'_1 - i\pi'_2 = \pi_1 \cos \alpha - \pi_2 \sin \alpha - i(\pi_1 \sin \alpha + \pi_2 \cos \alpha)$$

Dễ dàng suy ra:

$$\pi'_1 = \pi_1 \cos \alpha - \pi_2 \sin \alpha ,$$

$$\pi'_2 = \pi_1 \sin \alpha + \pi_2 \cos \alpha , \quad (\text{II-176})$$

$$\pi'_3 = n_3$$

Từ đây ta thấy rằng phép biến đổi chuẩn là phép quay quanh trục thứ ba một góc bằng  $(-e\chi)$  và đại lượng bảo toàn tương ứng là thành phần thứ ba của véctơ spin đồng vị  $I_3 = \text{const}$ ; còn  $\pi_1$  và  $\pi_2$  được biến đổi như hai thành phần đầu của véctơ trong không gian spin đồng vị. Kết quả điện tích của trường là:

$$Q = e \int d^3x \left[ \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x_4} \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \varphi_1^* \right]$$

Với  $x_4 = ix_0$ ;  $\varphi_1^* = -\varphi_3$ ;  $\varphi_1 = \varphi_3^*$ , ta có:

$$\begin{aligned} Q &= e \int d^3x \left[ -\frac{\partial \varphi_3}{i \partial x_0} (-\varphi_3^*) - \frac{\partial \varphi_1}{i \partial x_0} \varphi_1^* \right] = \\ &= ie \int d^3x \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \varphi_1^* - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0} \varphi_3^* \right] \end{aligned} \quad (\text{II-177})$$

Như vậy các thành phần liên hợp phức của  $\varphi_1$  và  $\varphi_3$  cho các đóng góp vào điện tích ngược dấu nhau, còn thành phần thực  $\varphi_2 = \pi_3$  không có đóng góp gì vào điện tích.

### §3.3. TRƯỜNG THỰC VÉCTƠ (TRƯỜNG ĐIỆN TỪ)

#### 1. Đặt vấn đề

Trong trường thực véctơ hàm mô tả trường véctơ là hàm bốn thành phần  $(U_1, U_2, U_3, U_4 = iU_0)$   $U_\mu(x)$ . Tập hợp các hàm này tạo thành véctơ bốn chiều mà trong các phép quay Lorentz nó biến đổi như một véctơ:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\rho} x_\rho \quad (\text{II-178})$$

$$U_\mu(x) \rightarrow U'_\mu(x') = a_{\mu\rho} U_\rho(x)$$

Để làm đơn giản nhất việc tổng quát hóa lý thuyết đối với trường véctơ, người ta lựa chọn Lagrangian của trường véctơ dưới dạng tương tự (II-102):

$$L(x) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\gamma} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\gamma} + \varkappa^2 U_\mu U_\mu \right\} \quad (\text{II-179})$$

Đây là dạng tổng hiệp biến của bốn Lagrangian tương ứng với bốn thành phần  $U_1, U_2, U_3, U_4$  riêng biệt. Mặt khác khi thực hiện các quá trình đối với Lagrangian (II-179) tương tự như quá trình (II-103) dẫn đến (II-105), ta nhận được phương trình Klein-Gordon:

$$(\square - \varkappa^2)U_\mu(x) = 0 \quad (\text{II-180})$$

Xuất phát từ Lagrangian của trường ta sẽ tìm được các biến động lực trên cơ sở tổng quát hóa các biểu thức tương ứng đối với trường vô hướng. Điều khó khăn mà dễ dàng ta thấy được ở đây là thành phần  $U_4 = iU_0$  sẽ dẫn đến các số hạng âm trong năng lượng, nếu như các dấu được chọn sao cho các thành phần không gian  $U_1, U_2, U_3$  của véctơ  $U_\mu(x)$  tương ứng với các số hạng dương trong năng lượng. Khó khăn này ta có thể giải quyết được nếu bổ sung thêm điều kiện:

$$\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{II-181})$$

Ta thấy ngay ý nghĩa của điều kiện này trong hệ tọa độ mà chỉ hạt đứng yên (trong hệ này tốc độ suy rộng  $\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ ), khi đó trường sóng sẽ phụ thuộc tuần hoàn vào thời gian mà không phụ thuộc vào tọa độ không gian. Trong hệ này điều kiện (II-181) đòi hỏi  $U_4 = 0$  và như vậy năng lượng nhất thiết phải là dương xác định. Trong trường hợp chung từ tính hiệp biến Lorentz của lý thuyết ta cũng suy được tích phân thể tích của mật độ năng lượng là dương.

Ta thấy rằng điều kiện (II-181) đồng thời làm giảm đi một thành phần độc lập tuyến tính của trường véctơ. Nay còn lại ba thành phần

độc lập tương ứng với ba giá trị khả dĩ của hình chiếu spin lên một trục ưu tiên nào đó và bằng 1, 0, - 1 một cách tương ứng, có nghĩa là mô tả các hạt với spin bằng một ; hay nói cách khác đã loại trừ hạt với spin bằng không, mà nó dẫn đến năng lượng âm trong cách phát biểu này.

Đến đây một vấn đề đặt ra là trong lý thuyết trường véctơ, chọn Lagrangian thế nào để nó không chỉ thỏa mãn các phương trình mà còn dẫn đến việc thực hiện tự động điều kiện (II-181). Khi áp dụng các đòi hỏi này cho lý thuyết trường điện từ được mô tả bằng thế véctơ ta không thể thiết lập được hình thức luận sao cho nó đảm bảo điều kiện bổ sung (II-181) một cách tự động. Mặt khác trong lý thuyết trường điện từ lượng tử điều kiện (II-181) lại không tương thích với các hệ thức giao hoán. Do vậy ta coi điều kiện (II-181) có tính độc lập với hình thức luận Lagrangian, nhưng tiếp đó ta gán lên các trạng thái cho phép những điều kiện tương ứng với việc thực hiện điều kiện (II-181) đối với các giá trị trung bình.

## 2. Lagrangian của trường điện từ và phương trình trường

Để đưa ra dạng Lagrangian của trường điện từ, trước hết ta tìm hàm trường mô tả trường điện từ. Theo lý thuyết thì trường điện từ được mô tả bằng hàm bốn thành phần:

$$A(x) = \{A_\mu(x)\} = \{\bar{A}(x), iA_0(x)\} = \{\bar{A}(x), i\varphi(x)\} \quad (\text{II-182})$$

Hàm  $A(x)$  bao gồm thế véctơ ba chiều  $\bar{A}(x)$  và thế vô hướng  $\varphi(x)$ . Tập hợp các hàm thành phần này tạo thành véctơ bốn chiều. Từ đó ta có thể chọn Lagrangian của trường điện từ tự do theo mẫu của trường véctơ rồi đặt  $\varepsilon = 0$ . Khi ấy ta có:

$$L(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu \partial A_\mu}{\partial x_\gamma \partial x_\gamma} \quad (\text{II-183})$$

Đồng thời ta đặt thêm điều kiện Lorentz cho thế véctơ:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{II-184})$$

Song cần lưu ý rằng điều kiện (II-184) chỉ có hiệu lực trong lý thuyết trường điện từ chưa lượng tử, còn trong lý thuyết trường điện từ lượng tử hóa thì điều kiện (II-184) sẽ được thay thế bằng điều kiện Lorentz tương đương đối với giá trị trung bình theo các trạng thái khả dĩ Lagrangian (II-183) và dẫn đến phương trình trường:

$$\square A_\mu(x) = 0 \quad (\text{II-185})$$

Phương trình (II-185) cùng với điều kiện (II-184) mà thế véctơ thỏa mãn sẽ tương đương với phương trình Maxwell tự do:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\text{II-186})$$

trong đó  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$  là tenxơ cường độ trường và lịch quan đến các đại lượng quan sát trường  $\vec{E}, \vec{H}$ :

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-187})$$

Trong trường hợp thế  $A_\mu(x)$  được thay bằng thế  $A'_\mu(x)$  sao cho



$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \quad (\text{II-188})$$

trong đó hàm tùy ý  $\Lambda$  thỏa mãn phương trình:

$$\square \Lambda = 0 \quad (\text{II-189})$$

thì phương trình trường và điều kiện Lorentz đối với thế  $A'_\mu(x)$  vẫn không thay đổi:

$$\square A'_\mu(x) = 0 ; \frac{\partial A'_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{II-190})$$

Các phương trình (II-185), (II-186) và (II-190) cho thấy các thế  $A_\mu(x)$  và  $A'_\mu(x)$  cho cùng một tenxơ cường độ trường - thể hiện tính bất biến Lagrangian và thế của trường điện từ được xác định không đơn trị.

### 3. Các biến động lực của trường điện từ

Các biến động lực của trường điện từ có thể tìm được khi thực hiện các bước tương tự như đã tìm các biến động lực của trường trong chương II. Vì vậy ta có thể sử dụng các công thức tổng quát ở chương II cho trường điện từ. Khi sử dụng công thức tổng quát (II-58) và Lagrangian (II-183) ta tìm được tenxơ năng xung lượng của trường điện từ:

$$T_{\mu\gamma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\gamma} \right)} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\gamma} = - \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\gamma} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\delta} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\delta} \delta_{\mu\gamma} \quad (\text{II-191})$$

Sử dụng công thức tổng quát (II-66) và (II-191) ta nhận được vectơ bốn chiều năng xung lượng của trường điện từ:

$$P_{\mu} = -i \int T_{\mu 4} d^3x = i \int \left[ \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\delta}} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\delta}} \delta_{4\mu} \right] \quad (\text{II-192})$$

Theo công thức tổng quát (II-87) mômen spin của trường điện từ được xác định dưới dạng:

$$S_{\mu\gamma} = -i \int \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \right)} (G_{\mu\gamma})_{\rho\delta} A_{\delta}(x) d^3x \quad (\text{II-193})$$

Trong đó ma trận (toán tử vi phân)  $G_{\mu\gamma} = a_{\mu\gamma}$  (xem (II-51) đối với trường tenxơ có spin 1), như vậy:

$$(G_{\mu\gamma})_{\rho\delta} = (a_{\mu\gamma})_{\rho\delta} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\mu\delta}\delta_{\gamma\rho} \quad (\text{II-194})$$

Để tính  $S_{\mu\gamma}$  trước hết ta sử dụng Lagrangian (II-183) cho  $\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \right)}$ ,

khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \right)} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\gamma}} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \right)} \left[ \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x} + \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \right] = -\frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_4} \quad (\text{II-195}) \end{aligned}$$

sau đó thay các công thức (II-194) và (II-195) vào (II-193) ta nhận được:

$$\begin{aligned}
S_{\mu\gamma} &= i \int \frac{\partial A_\rho}{\partial x_4} \{ \delta_{\mu\rho} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\mu\delta} \delta_{\gamma\rho} \} A_\delta(x) d^3x = \\
&= \int \left[ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_0} A_\gamma - \frac{\partial A_\gamma}{\partial x_0} A_\mu \right] d^3x \quad (\text{II-196})
\end{aligned}$$

Thông thường để mô tả các tính chất spin của trường (các hạt) ta chỉ sử dụng ba thành phần  $S_{23}$ ,  $S_{31}$ ,  $S_{12}$  của biểu thức hiệp biến của tenxơ mômen spin  $S_{\mu\gamma}$ ; và chúng hợp thành véctơ ba chiều spin:

$$\vec{S} = \{S_i\} = \frac{1}{2} \{ \epsilon_{ijk} S_{jk} \} ; \text{ với } i, j, k = 1, 2, 3 \quad (\text{II-197})$$

Ở đây  $\epsilon_{ijk}$  là tenxơ đơn vị hoàn toàn phản xứng trong không gian ba chiều và gọi là tenxơ Levi-Civita. Các thành phần khác không của nó chỉ bằng +1 hay -1:

$$\epsilon_{123} = 1, \epsilon_{321} = 1, \epsilon_{231} = 1, \epsilon_{213} = -1, \epsilon_{132} = -1, \epsilon_{312} = -1.$$

Dựa vào (II-197) ta có thể viết lại (II-196) theo dạng:

$$S_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int \left[ \frac{\partial A_j}{\partial x_0} A_k - \frac{\partial A_k}{\partial x_0} A_j \right] d^3x \quad (\text{II-198})$$

#### 4. Biểu diễn xung lượng

Chúng ta biết rằng nghiệm của phương trình Klein - Gordon

$$(\square - \alpha^2)\varphi(x) = 0$$

tìm được dưới dạng khai triển theo các sóng phẳng (xem (II-125)):

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \{ \varphi^{(+)}(\vec{q}) e^{iqx} + \varphi^{(-)}(-\vec{q}) e^{-iqx} \} d\vec{q}$$

$$(\text{II-199})$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự ta có thể nhận được nghiệm của phương trình (II-185) dưới dạng tổng quát giống như (II-199):

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left[ A_{\mu}^{(+)}(\vec{k}) e^{ikx} + A_{\mu}^{(-)}(-\vec{k}) e^{-ikx} \right] d\vec{k}$$

(II-200)

Trong trường hợp khi chưa đặt thêm điều kiện Lorentz (II-184) thì trường điện từ có thể coi như chồng chập của bốn trường vô hướng tương ứng với những sự phân cực khác nhau  $\lambda$  của photon. Khi đó vectơ  $A_{\mu}(x)$  khai triển theo các trạng thái phân cực theo dạng:

$$A_{\mu}(x) = \sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{\lambda} a_{\lambda}(k) \quad (\text{II-201})$$

trong đó  $e_{\mu}^{\lambda}$  là vectơ phân cực

$\lambda$  - chỉ số phân cực,  $\lambda = 1, 2, 3, 4$

$\mu$  - chỉ số Lorentz,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

Nếu ta chọn hệ tọa độ sao cho các hình chiếu của các vectơ xung lượng và vectơ phân cực tương ứng bằng:

$$\begin{aligned} K_{\mu} &= (\vec{K}, iK^0) = K_0(0, 0, 1, i) \\ e_{\mu}^{\lambda} &= (\vec{e}_1, 0) = (1, 0, 0, 0), \quad \lambda = 1; \\ e_{\mu}^{\lambda} &= (\vec{e}_2, 0) = (0, 1, 0, 0), \quad \lambda = 2; \\ e_{\mu}^{\lambda} &= (\vec{e}_3, 0) = (0, 0, 1, 0), \quad \lambda = 3; \\ \vec{e}_3 &= \frac{\vec{K}}{K_0} = \vec{\alpha} \\ e_{\mu}^{\lambda} &= (\vec{0}, i) = (0, 0, 0, i), \quad \lambda = 4. \end{aligned} \quad (\text{II-202})$$

Ở đây  $\vec{e}_3$  là véctơ đơn vị dọc theo véctơ  $\vec{K}$ , còn  $\vec{e}_1$  và  $\vec{e}_2$  là các véctơ đơn vị trực giao với nhau và với  $\vec{K}$ :

$$\vec{e}_\lambda \vec{e}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, (\lambda, \lambda' = 1, 2, 3) \quad (\text{II-203})$$

thì rõ ràng các véctơ bốn chiều  $e_\mu^\lambda$  thỏa mãn các điều kiện:

$$(e^\lambda e^{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'} \eta_\lambda, (\lambda, \lambda' = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{II-204})$$

(ở đây việc lặp lại các chỉ số  $\lambda$  không có nghĩa lấy tổng theo  $\lambda$

$$(e^\lambda \mathbf{k}) = 0, (\lambda = 1, 2) \quad (\text{II-205})$$

$$(e^3 \mathbf{k}) = \mathbf{k}_0, \quad (\text{II-206})$$

$$(e^4 \mathbf{k}) = -\mathbf{k}_0;$$

còn thừa số  $\eta_\lambda$  nhận các giá trị sau đây:

$$\eta_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 1, 2, 3 \\ -1, & \lambda = 4 \end{cases} \quad (\text{II-207})$$

Từ đây các hệ số  $A_\mu^{(+)}(\vec{k})$  và  $A_\mu^{(-)}(-\vec{k})$  trong biểu thức (II-200) có thể khai triển theo hệ đủ các véctơ:

$$A_\mu^{(+)}(\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda(\mathbf{k}) e_\mu^\lambda(\mathbf{k}),$$

$$A_\mu^{(-)}(-\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda(-\mathbf{k}) e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) \quad (\text{II-208})$$

$$a_\lambda(\mathbf{k}) = \left( \mathbf{e}_\mu^\lambda(\mathbf{k}) A_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}}) \right) = \left( \vec{\mathbf{e}}_\lambda(\vec{\mathbf{k}}) \vec{A}_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}}) \right); \quad \lambda = 1, 2$$

$$a_3(\mathbf{k}) = \left( \vec{\mathbf{a}} \vec{A}_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}}) \right);$$

$$a_4(\mathbf{k}) = -i A_4^{(+)}(\vec{\mathbf{k}}) = A_0^{(+)}(\vec{\mathbf{k}}). \quad (\text{II-209})$$

Như vậy  $a_1(\mathbf{k})$  và  $a_2(\mathbf{k})$  là các hình chiếu của vectơ  $\vec{A}_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}})$  lên các vectơ vuông góc với vectơ  $(\vec{\mathbf{k}})$  (các thành phần ngang của  $\vec{A}_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}})$ );  $a_3(\mathbf{k})$  là hình chiếu của vectơ  $\vec{A}_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}})$  lên vectơ  $(\vec{\mathbf{k}})$  (thành phần dọc của vectơ  $\vec{A}_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}})$ );  $a_4(\mathbf{k})$  là thành phần Fourier của thế vô hướng  $\vec{A}_\mu^{(+)}(\vec{\mathbf{k}})$ . Một cách tương tự ta cũng tìm được  $a_1(-\mathbf{k})$ ,  $a_2(-\mathbf{k})$  và  $a_3(-\mathbf{k})$  là các thành phần ngang và dọc của vectơ  $\vec{A}_\mu^{(-)}(-\vec{\mathbf{k}})$ , còn  $a_4(-\mathbf{k}) = A_0^{(-)}(-\vec{\mathbf{k}})$ .

Khi thay (II-208) vào (II-200) ta nhận được:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 \mathbf{e}_\mu^\lambda(\mathbf{k}) [a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + a_\lambda(-\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}] d\vec{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (\text{II-210})$$

Vì các thành phần không gian của vectơ bốn chiều  $A_\mu$  là thực, còn thành phần thời gian của nó là ảo, nên ta có:

$$A_\mu^* = A_\mu \eta_\mu \quad (\text{II-211})$$

(chỉ số lặp lại  $\mu$  ở đây không lấy tổng). Như vậy với các thành phần

thực  $A_{\mu}^* = A_{\mu}$ ,  $\eta_{\mu} = 1$  ; còn thành phần ảo  $\eta_{\mu} = -1$ , nên tương ứng với (II-211) ta có thêm:

$$(e_{\mu}^{\lambda})^* = e_{\mu}^{\lambda} \eta_{\mu} \quad (\text{II-212})$$

Thay phép khai triển (II-210) và công thức (II-212) vào (II-211) ta nhận được:

$$a(-k) = A_{\lambda}^*(k) \quad (\text{II-213})$$

Kết quả thế vectơ  $A_{\mu}(x)$  tìm được theo biểu thức:

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{\lambda}(k) [a_{\lambda}(k) e^{ikx} + a_{\lambda}^*(k) e^{-ikx}] d\vec{k} \quad (\text{II-214})$$

Nếu bây giờ ta đưa điều kiện Lorentz (II-184) vào thì khi thay (II-214) vào (II-184) ta có:

$$\frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 e^{\lambda}(k) \cdot K [a_{\lambda}(k) e^{ikx} - a_{\lambda}^*(k) e^{-ikx}] d\vec{k} = 0 \quad (\text{II-215})$$

Từ (II-215) suy ra:

$$\sum_{\lambda=1}^4 (e^{\lambda} \cdot K) a_{\lambda}(k) = 0 \quad (\text{II-216})$$

Sử dụng các công thức (II-205) và (II-206) cho (II-216) ta nhận được:

$$K_0 a_3(k) - K_0 a_4(k) = 0$$

$$a_3(k) = a_4(k) \quad (\text{II-217})$$

Từ đây ta nhận thấy trường điện từ có thể mô tả bằng các hàm phức  $a(k)$  - đó là các hàm một biến  $k$  (là các thành phần Fourier của thế vô hướng) và thỏa mãn (II-217). Áp dụng công thức tổng quát tính năng lượng của trường (II-144) cho trường điện từ tự do (với  $\mathbf{x} = 0$ ) và sử dụng thêm công thức (II-211) (với công thức này ta có

$$\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x_4} = \eta_4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} \quad \text{còn với } \delta = 1, 2, 3 \text{ thì } A_\delta^* = A_\delta = \rightarrow$$

$$\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x_\delta} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\delta}) \text{ ta có công thức xác định năng lượng của trường điện từ:}$$

$$H = \int \left[ - \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\delta} \right)^2 \right] d\bar{x} \quad (\text{II-218})$$

Thay vế trái của (II-215) vào biểu thức năng lượng (II-218) ta nhận được:

$$H = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\bar{x} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \frac{\left( K_4 K_4 - \frac{1}{2} K_\delta K_\delta \right)}{2\sqrt{K_0 K_0}} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^4 e_\mu^\lambda(\mathbf{k}) e_\mu^{\lambda'}(\mathbf{k}') \times$$

$$\left\{ a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')x} + a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')x} - a_\lambda^*(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')x} - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^*(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')x} \right\} \quad (\text{II-218})$$

Thực hiện cách tính hoàn toàn lượng tự như đã tiến hành từ công thức (II-130) đến (II-134) và sử dụng thêm các hệ dưới đây:



$$e_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{k})e_{\mu}^{\lambda'}(\mathbf{k}') = \delta_{\lambda\lambda'}\eta_{\lambda}, (\lambda, \lambda' = 1, 2, 3, 4);$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{\pm i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\bar{\mathbf{x}} = \delta(\bar{\mathbf{k}} \pm \bar{\mathbf{k}'});$$

$$K_4 K_4' - \frac{1}{2} K_{\delta} K_{\delta}' = \begin{cases} -K_0^2, & \text{khi } \bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{k}}' \\ 0, & \text{khi } \bar{\mathbf{K}} = -\bar{\mathbf{k}}' \end{cases}$$

(Kết quả cuối cùng này có thể lý giải qua các biến đổi sau đây:

$K_4 K_4' = (iK_0)(iK_0) = -K_0^2$  còn  $K_{\delta} K_{\delta}' = \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{K}}' - K_0 K_0'$ , với  $\delta = 1, 2, 3$  thì khi  $\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}'$  và theo (II-202) ta có  $\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{K}}' = \bar{\mathbf{K}}^2 = K_0^2$ ,  $K_0 K_0' = K_0^2$ , suy ra:  $K_{\delta} K_{\delta}' = K_0^2 - K_0^2 = 0$ ; khi  $\bar{\mathbf{K}} = -\bar{\mathbf{K}}'$  thì  $\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{K}}' = -(\bar{\mathbf{K}})^2 = -K_0^2$ , suy ra  $K_{\delta} K_{\delta}' = -2K_0^2$ ,  $-\frac{1}{2} K_{\delta} K_{\delta}' = K_0^2$ ).

Ta nhận được công thức xác định năng lượng của trường điện từ tự do:

$$H = \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \eta_{\lambda} k_0 d\bar{\mathbf{k}} \quad (\text{II-219})$$

Theo hệ thức (II-217) (ta có  $a_3^*(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k}) = a_4^*(\mathbf{k})a_4(\mathbf{k})$ ) và theo (II-207) ( $\eta_{\lambda} = 1$  với  $\lambda = 1, 2, 3$ ;  $\eta_{\lambda} = -1$  với  $\lambda = 4$ ) ta thấy các số hạng  $a_3^*(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k})$  và  $a_4^*(\mathbf{k})a_4(\mathbf{k})$ , (các đóng góp của các thành phần dọc và các thành phần vô hướng) trong công thức (II-219) có dấu ngược nhau (khi ta đã gán giá trị của  $\eta_{\lambda}$  vào các số hạng đó), nên chúng triệt tiêu nhau.

Kết quả cuối cùng ta nhận được biểu thức đối với năng lượng của trường điện từ tự do:

$$\mathbf{H} = \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \mathbf{k}_0 d\bar{\mathbf{k}} \quad (\text{II-220})$$

Như vậy năng lượng H của trường điện từ tự do chỉ có thể nhận các giá trị dương xác định. Điều này có được chỉ sau khi ta đặt lên thế điều kiện Lorentz bổ sung.

Đối với xung lượng của trường điện từ tự do ta cũng nhận được biểu thức tương tự:

$$\mathbf{P}_i = \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \eta_{\lambda} k_i d\bar{\mathbf{k}} \quad (\text{II-221})$$

Dựa vào công thức tổng quát thế véctơ bốn chiều (II-214), ta có thể véctơ ba chiều của trường điện từ:

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^3 e_j^{\lambda}(\mathbf{k}) \left[ a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right] d\bar{\mathbf{k}} \quad (\text{II-222})$$

trong đó  $e_j^{\lambda}$  là các véctơ phân cực đơn vị ba chiều (có thành phần xem (II-202)). Để tính spin của trường bây giờ ta thay (II-222) vào (II-198) và tiến hành những tính toán cần thiết, ta nhận được biểu thức:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_0} A_k - \frac{\partial A_k}{\partial x_0} A_j \right) d^3x = \\ &= i \varepsilon_{ijk} \int d\bar{\mathbf{k}} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^3 e_j^{\lambda} e_k^{\lambda'} \left[ a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_{\lambda}(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^*(\mathbf{k}) \right] = \\ &= i \int d\bar{\mathbf{k}} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^3 \left[ \overline{e^{\lambda}} \times \overline{e^{\lambda'}} \right]_i \left[ a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_{\lambda}(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^*(\mathbf{k}) \right] \quad (\text{II-223}) \end{aligned}$$

Khi xét hình chiếu của véctơ spin lên chiều véctơ sóng  $\mathbf{k}$  có độ lớn

xác định ( $K = \text{const}$ ) ta có:

$$S_3 \sim \{ a_1^*(\mathbf{k})a_2(\mathbf{k}) - a_1(\mathbf{k})a_2^*(\mathbf{k}) \} \quad (\text{II-224})$$

Biểu thức (II-224) có thể chéo bằng phép biến đổi tuyến tính sau đây:

$$a_1 = \frac{b_1 + b_2}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \frac{b_1 - b_2}{i\sqrt{2}} \quad \text{hay}$$

$$a_1 = \frac{b_1 + b_2}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = -i \frac{(b_1 - b_2)}{\sqrt{2}}$$

(II-226)

Thay (II-225) vào (II-224) ta được:

$$S_3 \sim b_1^* b_1 - b_2 b_2^* \quad (\text{II-226})$$

Kết quả này có thể giải thích như sau:  $b_1^*(\mathbf{k})b_1(\mathbf{k})$  là mật độ hạt với xung lượng  $\vec{k}$  và hình chiếu spin lên véctơ sóng  $\vec{k}$  bằng +1; còn  $b_2(\mathbf{k})b_2^*(\mathbf{k})$  là mật độ hạt với xung lượng  $\vec{k}$  và hình chiếu spin lên véctơ sóng  $\vec{k}$  bằng -1. Như vậy, trong biểu diễn xung lượng ta thấy rằng trường điện từ tự do mô tả các hạt photon ngang cùng với hai giá trị khả dĩ của hình chiếu spin lên hướng chuyển động.

### §3.4. TRƯỜNG PHỨC SPINO

Trường phức spinor dùng để mô tả các hạt có spin bằng 1/2 (các electron, các notrinô). Khác với các trường mô tả các hạt có spin bằng 0 và bằng 1 mà ta đã xét ở trên, ở đây phương trình trường mô tả các hạt có spin bằng 1/2 là phương trình Dirac (ta đã xét trong cơ học

lượng tử tương đối tính). Để đi đến phương trình trường trước hết ta xác định Lagrangian của trường.

### 1. Lagrangian của trường

Giả sử trường ta đang xét được mô tả bởi hàm phức spinor  $\psi_\sigma(x)$ . Đó là hàm có bốn thành phần viết dưới dạng ma trận cột (chỉ số  $\sigma$  lấy bốn chỉ số):

$$\psi_\sigma = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II-227})$$

Tương ứng ta có thể chọn Lagrangian dưới dạng:

$$L(x) = -\frac{1}{2} \left[ \left( \bar{\psi} \gamma_\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} + m \bar{\psi} \psi \right) - \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\rho} \gamma_\rho \psi - m \bar{\psi} \psi \right) \right] \quad (\text{II-228})$$

trong đó các ma trận  $4 \times 4$  Hermite  $(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = 2\delta_{\mu\nu}$ ;  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$ ; còn  $m$  là tham số dương (trong lý thuyết trường lượng tử,  $m$  là khối lượng của lượng tử trường). Ở đây ký hiệu  $\psi^\dagger$  cũng biểu thị  $\psi^*$

$$\psi^\dagger = \tilde{\psi}^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

Từ Lagrangian (II-228) ta tìm được:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\sigma} = -m\bar{\psi}_\sigma + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \right)_\sigma, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right)} = -\frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu)_\sigma$$

(II-229) ;

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} = -\frac{1}{2} \left( \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)_\sigma - m\psi_\sigma, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_\mu} \right)} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \psi)_\sigma$$

(II-230)

Thay các công thức (II-230) và (II-229) vào các phương trình tương ứng dưới đây:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_\mu} \right)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right)} = 0$$

tương ứng ta nhận được phương trình Dirac đối với hàm  $\psi(x)$ :

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) + m\psi_\sigma = 0 \quad (\text{II-231})$$

và phương trình Dirac đối với spinor liên hợp  $\bar{\psi}(x)$ :

$$\left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \right) - m \bar{\psi} = 0 \quad (\text{II-232})$$

Ta nhận thấy mỗi thành phần của tư  $\psi$  cũng thỏa mãn phương trình Klein-Gordon. Thật vậy, nếu tác dụng toán tử  $\gamma_\nu \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} - m$  lên phía trái của phương trình (II-231) thì ta nhận được:

$$\begin{aligned} \left( \gamma_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} - m \right) \left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi &= \left( \gamma_\gamma \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m^2 \right) \psi = \\ &= \left( \frac{1}{2} \{ \gamma_\gamma, \gamma_\mu \} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m^2 \right) \psi = 0 \end{aligned}$$

(Ta đã thực hiện đổi chỉ số  $\gamma \leftrightarrow \mu$ )

ở đây các ma trận  $\gamma_\nu, \gamma_\mu$  thỏa mãn các hệ thức:

$$\{ \gamma_\nu, \gamma_\mu \} = \gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{II-233}).$$

Vậy kết quả ta nhận được:

$$(\square - m^2)\psi = 0 \quad (\text{II-234}).$$

Tất nhiên điều này không có nghĩa là bất kỳ tập hợp bốn nghiệm của phương trình Klein - Gordon (II-234) sẽ thỏa mãn phương trình Dirac. Từ kết luận đó ta thấy rằng phương trình Dirac dùng để mô tả các hiện tượng không thể suy ra được từ phương trình Klein - Gordon (II-234). Mà một trong các hiện tượng đó là sự tồn tại spin. Phương trình Dirac là phương trình sóng bất biến tương đối tính mô tả các hạt có spin bằng 1/2. Phương trình này do Dirac tìm ra năm 1928 nhằm loại bỏ khó khăn gắn liền với mật độ xác suất âm trong phương trình Klein - Gordon. Vì phương trình Dirac là phương trình bậc nhất theo đạo hàm các tọa độ không gian và thời gian, trong phương trình này các tọa độ không gian và thời gian được chứa một cách đối xứng. Hệ

nghiệm của phương trình Dirac nhất thiết phải bao gồm các trạng thái với năng lượng dương cũng như các trạng thái với năng lượng âm.

## 2. Các ma trận Dirac

Các ma trận Dirac có quan hệ mật thiết với phương trình Dirac. Dựa vào các ma trận này cùng với các nghiệm của phương trình Dirac ta xây dựng được các lượng song tuyến tính cũng như tính được các tiết diện của những quá trình tương tác.

Các ma trận Dirac thỏa mãn các hệ thức giao hoán:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{II-235})$$

ở đây

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{khi } \mu = \nu, \\ 0 & \text{khi } \mu \neq \nu, \end{cases} \Rightarrow \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu$$

Các ma trận  $\gamma_\mu$  trong các hệ thức (II-235) được xác định không đơn trị, chúng chỉ xác định chính xác tới các phép biến đổi chính tắc (phép biến đổi unita):  $\gamma_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$ , trong đó  $s$  là ma trận unita bất kỳ nào. Đối với các ma trận này tổng các thành phần chéo gọi là vết (được ký hiệu là  $S_p$ ) của các ma trận bằng 0. Trên cơ sở ma trận đơn vị  $I$  và các ma trận  $\gamma_\mu$  ta có thể xây dựng được một số nhất định các ma trận độc lập tuyến tính, mà bất kỳ ma trận hạng bốn  $4 \times 4$  nào cũng đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các ma trận này:

$$\left. \begin{array}{ll} I & - \text{một ma trận} \\ \gamma_\mu & - \text{bốn ma trận} \\ \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) & - \text{sáu ma trận} \\ \gamma_5 \gamma_\mu & - \text{bốn ma trận} \\ \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 & - \text{một ma trận} \end{array} \right\} \quad (\text{II-236})$$

Như vậy có 16 ma trận độc lập tuyến tính. Trong đó ma trận  $\gamma_5$  phản giao hoán với tất cả các ma trận:

$$\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0 \quad (\text{II-237})$$

Sử dụng biểu diễn Pauli cho các ma trận Dirac (hay còn gọi là ma trận Pauli - Dirac), ta đặt

$$\gamma_k = -i\beta\alpha_k ; \gamma_4 = +\beta ,$$

trong đó

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \delta_k \\ \delta_k & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_5 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-238})$$

$k = 1, 2, 3$  ;  $\delta_k$  là các ma trận  $2 \times 2$  Pauli.

Trong trường hợp ma trận hạng bốn, dựa vào điều kiện phản giao hoán và tính chất ecmite, ta có thể xây dựng được các ma trận sau đây:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Từ đây ta nhận thấy: ma trận  $\gamma_4$  là chéo và thực;  $\gamma_2$  là thực;  $\gamma_1$  và  $\gamma_3$  là hoàn toàn ảo.

Với các ma trận cấp bốn, phương trình tổng quát Dirrac sẽ mô tả các hạt có spin 1/2. Khi đó hàm  $\psi_\sigma(x)$  sẽ có 4 thành phần viết dưới dạng ma trận cột (II-227).

Từ các ma trận (II-236) và các spinor  $\psi$  (là các nghiệm phương trình Dirac) và  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$  ta có thể xây dựng được các đại lượng song tuyến tính bất biến đối với phép biến đổi Lorentz mà trong trường hợp lượng tử hay sử dụng:

$$\text{Vô hướng } \bar{\psi} \psi \quad (\text{II-239})$$

$$\text{Vectơ } \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (\text{II-240})$$

Tenxơ phản xứng hạng hai

$$\frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi \quad (\text{II-241})$$

$$\text{Vectơ trục (hay giả vectơ)} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \quad (\text{II-242})$$

$$\text{Giả vô hướng } \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (\text{II-243})$$

**3. Cách tính vết của các ma trận  $\gamma$ :** việc tính vết của các ma trận  $\gamma$  giúp ta tính được các tiết diện của những quá trình sau này. Cơ sở của các cách tính vết của các ma trận là dựa vào các hệ thức

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{II-244})$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0$$

và hệ thức

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA) \quad (\text{II-245})$$

với ma trận A và B bất kỳ

$$\left( \text{Sp}(\mathbf{AB}) = \sum_{\sigma, \sigma'} \mathbf{A}_{\sigma\sigma'} \mathbf{B}_{\sigma\sigma'} = \sum_{\sigma, \sigma'} \mathbf{B}_{\sigma\sigma'} \mathbf{A}_{\sigma\sigma'} = \text{Sp}(\mathbf{BA}) \right)$$

Từ các hệ thức (II-244) và (II-245) ta có thể chỉ ra các đẳng thức sau:

- Vết của tích một số lẻ các ma trận Dirac bằng 0:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\rho) &= \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_5 \gamma_\nu \dots \gamma_\rho) = \\ &= -\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\rho \gamma_5) = -\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\rho) = 0 \quad (\text{II-246}) \end{aligned}$$

Trong (II-246) khi thay thế 1 bằng  $\gamma_5^3$  ta nhận đẳng thức thứ nhất ; khi thực hiện hoán vị các ma trận  $\gamma_5$  với các ma trận  $\gamma_\mu, \gamma_\nu$  ta nhận được đẳng thức thứ hai. Khi sử dụng (II-244) và (II-245) ta tìm được:

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Sp}[2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu] = 8\delta_{\mu\nu} - \text{Sp}(\gamma_\nu \gamma_\mu)$$

và suy ra:

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu} \quad (\text{II-247})$$

- Giả sử  $\mathbf{a}_\mu$  và  $\mathbf{b}_\nu$  là các vectơ bốn chiều tùy ý. Nhân  $\mathbf{a}_\mu$  và  $\mathbf{b}_\nu$  với (II-247) rồi lấy tổng theo  $\mu\nu$  và  $\nu$  ta được:

$$\text{Sp}(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{a}_\mu \mathbf{b}_\nu \text{Sp}\delta_{\mu\nu} = 4(\mathbf{ab}) \quad (\text{II-248})$$

Ta có

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= \text{Sp}(2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \text{Sp}[\gamma_\nu (2\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho \gamma_\mu) \gamma_\sigma] = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\rho (2\delta_{\mu\sigma} - \gamma_\sigma \gamma_\mu)] = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + 8\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) \end{aligned}$$

và suy ra được:

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \quad (\text{II-249})$$

Như vậy, nhờ các hệ thức giao hoán (II-244) và hệ thức (II-245) ta có thể tính được vết của tích sáu, tám... v.v... các ma trận Dirac tương tự như đã tiến hành đối với vết của tích bốn ma trận ở (II-249).

Nếu nhân (II-249) với các vectơ bốn chiều bất kỳ  $a_\mu$ ,  $b_\nu$ ,  $c_\rho$  và  $d_\sigma$  rồi lấy tổng theo các chỉ số  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  ta nhận được:

$$\text{Sp}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) = 4[(\hat{a}\hat{b})(\hat{c}\hat{d}) - (\hat{a}\hat{c})(\hat{b}\hat{d}) + (\hat{a}\hat{d})(\hat{b}\hat{c})] \quad (\text{II-250})$$

Ta có:

$$\text{Sp}\gamma_5 = \text{Sp}(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4) = -\text{Sp}(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_1) = -\text{Sp}\gamma_5 = 0$$

và suy ra

$$\text{Sp}\gamma_5 = 0 \quad (\text{II-251})$$

Ta có thể viết  $\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu)$  dưới dạng:

$$\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = \frac{1}{2} \text{Sp}[\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)] + \frac{1}{2} \text{Sp}[\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu)] \quad (\text{II-252})$$

Ta thấy số hạng thứ hai

$$\frac{1}{2} \text{Sp}[\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu)] = \frac{1}{2} \text{Sp}[\gamma_5 (2\delta_{\mu\nu})] = \delta_{\mu\nu} \text{Sp}\gamma_5 = 0$$

Mặt khác ta dễ dàng nhận thấy

$$\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\rho \gamma_\sigma \quad (\text{II-253})$$

Khi dựa vào (II-253) và (II-247) ta nhận được số hạng thứ nhất của (II-252).

$$\frac{1}{2} \text{Sp}[\gamma_5(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)] = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}(\gamma_\rho\gamma_\sigma) = -2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta_{\rho\sigma} = 0$$

(II-254)

Vậy  $\text{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu) = 0$

Ta có  $\text{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = 4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  (II-255)

Trường hợp  $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = \text{Sp} \gamma_5^2 = 4$  ta có:

Ta nhận thấy vết ở vế trái của đẳng thức (II-255) phản đối xứng với nhóm hoán vị hai chỉ số bất kỳ:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) &= \text{Sp}[\gamma_5\gamma_\mu(2\delta_{\nu\rho} - \gamma_\rho\gamma_\nu)\gamma_\sigma] \\ &= 2\delta_{\nu\rho} \text{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\sigma) - \text{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\sigma) = -\text{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\sigma) \dots \end{aligned}$$

#### 4. Các tính chất biến đổi của trường spinơ

Các tính chất biến đổi của trường spinơ được thể hiện qua các hàm trường của phương trình Dirac thực hiện biểu diễn spinơ của nhóm Lorentz. Trong trường hợp các hàm trường của phương trình Klein - Gordon, do phép hiệp biến của toán tử Klein - Gordon và các hàm trường thực hiện những biểu diễn tenxơ của nhóm Lorentz nên tính hiệp biến của các phương trình trường được đáp ứng một cách tự động. Song trong trường spinơ do các hàm trường của phương trình Dirac thực hiện biểu diễn spinơ của nhóm Lorentz, nên tính hiệp biến của phương trình Dirac không được thỏa mãn một cách tự động mà phải được cân nhắc một cách đặc biệt.

Trước hết ta xét các phép biến đổi Lorentz

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$$

Tương ứng các spinơ được biến đổi theo quy luật

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = R(a)\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)R^{-1}(a), \quad (\text{II-256})$$

và phương trình Dirac có dạng:

$$\left( \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right) \psi(x) = 0 \rightarrow \left( \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} - m \right) \psi'(x') = 0 \quad (\text{II-257})$$

Ở đây, trong các phép biến đổi Lorentz ta đã giả thiết ma trận là bất biến.

Bây giờ để đi đến phương trình Dirac bất biến ta nhân hai vế của phương trình (II-257) với toán tử  $R^{-1}$  và sử dụng biến đổi:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}$$

ta nhận được

$$\left( R^{-1} \gamma_{\mu} a_{\mu\nu} R \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (\text{II-257a})$$

Từ đây ta thấy phương trình Dirac chỉ bất biến khi hệ thức sau đây được thỏa mãn:

$$R^{-1} \gamma_{\mu} a_{\mu\nu} R = \gamma_{\nu} \quad (\text{II-258})$$

hay  $R \gamma_{\nu} R^{-1} = \gamma_{\mu} a_{\mu\nu} \quad (\text{II-259})$

Rõ ràng dạng của toán tử  $R$  trong (II-256) hoàn toàn được xác định bằng hệ thức (II-258). Mặt khác ta cũng có thể tìm được dạng tường

minh của toán tử R bằng cách xét các phép biến đổi bé Lorentz

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \quad (\text{II-260})$$

trong đó  $\varepsilon_{\mu\nu}$  là các đại lượng vô cùng bé và  $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ . Với đòi hỏi độ chính xác tới số hạng tuyến tính theo  $\varepsilon_{\mu\nu}$  ta có:

$$\begin{aligned} R &= 1 + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \\ R^{-1} &= 1 - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{II-261})$$

Thay (II-260) và (II-261) vào (II-259), và thực hiện các phép biến đổi cần thiết ta có :

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{2} G^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma} \right) \gamma_\nu \left( 1 - \frac{1}{2} G^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma} \right) &= \gamma_\mu (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) \quad \text{suy ra :} \\ -\frac{1}{2} \gamma_\nu G^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} G^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma} \gamma_\nu &= \gamma_\mu \varepsilon_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{II-262})$$

Ta biến đổi vế phải (II-262):

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \varepsilon_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \delta_{\nu\rho} \gamma_\mu (\varepsilon_{\rho\mu} - \varepsilon_{\mu\rho}) = \frac{1}{2} \delta_{\nu\rho} \gamma_\mu \varepsilon_{\rho\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu\rho} \gamma_\mu \varepsilon_{\mu\rho} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\nu\rho} \gamma_\mu - \delta_{\nu\mu} \gamma_\rho) \varepsilon_{\rho\mu} \end{aligned}$$

Sau đó thực hiện phép biến đổi chỉ số âm, kết quả (II-262) có dạng:

$$\frac{1}{2} (\gamma_\nu G^{\rho\sigma} - G^{\rho\sigma} \gamma_\nu) \varepsilon_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\delta_{\nu\rho} \gamma_\sigma - \delta_{\nu\sigma} \gamma_\rho) \varepsilon_{\rho\sigma}$$

$$\text{hay} \quad \left[ \gamma_\nu, G^{\rho\sigma} \right] = (\delta_{\nu\rho} \gamma_\sigma - \delta_{\nu\sigma} \gamma_\rho) \quad (\text{II-263})$$

Ta nhận thấy rằng các ma trận  $\gamma_\nu$  dễ dàng làm cho hệ thức (II-263) được thỏa mãn khi sử dụng các hệ thức giao hoán:

$$G^{\rho\sigma} = \frac{1}{4i}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho) = \frac{1}{2}\delta_{\rho\sigma}, \quad (\text{II-264})$$

trong đó 
$$\delta_{\rho\sigma} = \frac{1}{2i}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho) \quad (\text{II-265})$$

Thay (II-261) vào (II-256) ta có:

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \left( 1 + \frac{1}{2}G^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \right) \psi(x), \\ \bar{\psi}'(x') &= \left( 1 - \frac{1}{2}G^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \right) \bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (\text{II-266})$$

Tiếp theo ta xét dạng song tuyến tính:

$$\bar{\psi}(x)0\psi(x) \quad (\text{II-267})$$

trong đó 0 là toán tử tùy ý chức các ma trận  $y$ . Trong phạm vi các phép biến đổi bé Lorentz (II-260) và trên cơ sở của (II-256) dạng song tuyến tính sẽ được biến đổi như sau:

$$\bar{\psi}(x)0\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')0\psi'(x') = \bar{\psi}(x)R^{-1}0R\psi(x) \quad (\text{II-268})$$

Chúng ta biết rằng các spinor  $\bar{\psi}(x)$  và  $\psi(x)$  là các đại lượng bốn thành phần, nên khi nhân  $\bar{\psi}(x)$  và  $\psi(x)$  ta nhận được 16 tổ hợp tuyến tính. Trong các phép biến đổi Lorentz 16 tổ hợp này được tách ra thành năm nhóm. Năm nhóm này là năm trường hợp riêng mà ta sẽ xét dưới đây:

\*  $0 = 1$  thì đó  $\bar{\psi}'(x')0\psi' = \bar{\psi}(x)\psi(x)$ , có nghĩa  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  là vô hướng tương đối tính.

\*  $0 = \gamma_5$  là vì  $R^{-1}\gamma_5 R = \gamma_5$  nên  $\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$  có nghĩa là  $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$  cũng là vô hướng tương đối tính (giá vô hướng).

\*  $0 = \gamma_5 = (\mu = 1, 2, 3, 4)$ , sử dụng (II-258) và thực hiện biến đổi ta nhận được:

$A'_\mu(x') = \bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') = a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x) = a_{\mu\nu}(x)$ , trong đó  $A_\nu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x')$  mà biến thành phần của nó được biến đổi như một vectơ bốn chiều.

\*  $0 = \gamma_\mu\gamma_5$ , khi đó dạng  $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$  cũng được biến đổi thu vectơ bốn chiều (vectơ trục).

$0 = \gamma_\mu\gamma_\nu$  sử dụng (II-258) ta có:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x')(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi'(x') &= \bar{\psi}(x)\{a_{\mu\rho}\gamma_\rho a_{\nu\sigma}\gamma_\sigma - a_{\nu\sigma}\gamma_\sigma a_{\mu\rho}\gamma_\rho\}\psi(x) = \\ &= a_{\mu\rho}a_{\nu\sigma}\bar{\psi}(x)(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho)\psi(x) \end{aligned}$$

và như vậy các đại lượng  $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu - \psi\gamma_\mu\gamma_\nu$  được biến đổi như tenxơ phản xứng hạng hai.

Tóm lại từ hệ thức (II-244) ta có thể xây dựng tất cả các tenxơ phức tạp hơn bằng cách biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của năm đại lượng đã xét ở trên.

### 5. Các biến động lực của trường

Trong trường hợp chung khi tìm các biến động lực của trường ta xuất phát từ các công thức tổng quát ở chương II. Ví dụ tìm tenxơ năng xung lượng của trường spinor ta có:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\nu}\right)}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\bar{\psi}_\alpha}{\partial x_\nu}\right)}\frac{\partial\bar{\psi}_\alpha}{\partial x_\mu} - L\delta_{\mu\nu} \quad (\text{II-269})$$

Khi thay (II-229) và (II-230) vào (II-269) và sử dụng giá trị của Lagrangian (II-228) với  $\psi$  và  $\bar{\psi}$  thỏa mãn các phương trình (II-231) và (II-232) bằng 0, ta nhận được biểu thức:



$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\nu\psi \quad (\text{II-270})$$

Sử dụng công thức (II-97) ta có véctor dòng của trường spinor được xác định theo công thức:

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= -ie \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} \psi_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial\bar{\psi}_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} \bar{\psi}_\alpha \right] = \\ &= -ie \left[ -\frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu)_\alpha \psi_\alpha - \frac{1}{2}(\gamma_\mu\psi)_\alpha \bar{\psi}_\alpha \right] = \\ &= ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \end{aligned} \quad (\text{II-271})$$

Bên cạnh đó khi sử dụng công thức (II-101) ta nhận được công thức tính điện tích của trường

$$Q = -i \int j_4 d^3x = e \int \bar{\psi}\gamma_4\psi d^3x = \text{const} \quad (\text{II-272})$$

Còn khi sử dụng véctor bốn chiều năng xung lượng của trường  $P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x$  ta xác định được véctor năng xung lượng của trường phức spinor

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{i}{2} \int \bar{\psi}\gamma_4 \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} d^3x - \frac{i}{2} \int \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_4\psi d^3x = \\ &= i \int \bar{\psi}\gamma_4 \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} d^3x - \frac{i}{2} \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\bar{\psi}\gamma_4\psi) d^3x \end{aligned} \quad (\text{II-273})$$

Để tính  $P_\mu$  ta có thể biểu diễn số hạng thứ hai của vế phải biểu thức (II-273) như sau:

$$\int \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) d^3x = \int \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) d^3x + \int \frac{\partial}{\partial x_4} (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) d^3x$$

Vi ở vô tận không có trường nên  $\int \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) d^3x = 0$ . Mặt khác từ định luật bảo toàn điện tích ta suy ra được:

$$\int \frac{\partial}{\partial x_4} (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) d^3x = \frac{\partial}{\partial x_4} \int (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) d^3x = 0.$$

Kết quả véctor năng xung lượng của trường phức spinor bằng

$$P_k = i \int \bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d^3x \quad (\text{II-274})$$

Khi sử dụng các tính chất bất biến của trường phức spinor (II-266) và công thức tổng quát tính spin (II-87) ta xác định được tenxơ spin của trường phức spin:

$$S_{\mu\rho} = i \int \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_{\delta'}}{\partial x_4} \right)} G_{\delta'\delta}^{\mu\rho} \psi_{\delta} + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \bar{\psi}_{\delta'}}{\partial x_4} \right)} G_{\delta'\delta}^{\mu\rho} \bar{\psi}_{\delta} \right] d^3x \quad (\text{II-275})$$

Thay (II-229) và (II-230) vào (II-275) ta nhận được:

$$\begin{aligned} S_{\mu\rho} &= -\frac{i}{2} \int \left[ (\bar{\psi} \gamma_4)_{\delta'} G_{\delta'\delta}^{\mu\rho} \psi_{\delta} - (\gamma_4 \psi)_{\delta'} G_{\delta'\delta}^{\mu\rho} \bar{\psi}_{\delta} \right] d^3x = \\ &= -\frac{i}{2} \int \left[ (\bar{\psi} \gamma_4)_{\delta'} G_{\delta'\delta}^{\mu\rho} \psi_{\delta} + \bar{\psi}_{\delta'} G_{\delta'\delta}^{\mu\rho} (\gamma_4 \psi)_{\delta} \right] d^3x. \end{aligned}$$

Để đơn giản ta bỏ các chỉ số  $\delta$  và  $\delta'$ , khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{i}{2} \int \bar{\psi} [\gamma_4 G^{\mu\rho} + G^{\mu\rho} \gamma_4] \psi d^3x = \\
&= -\frac{i}{4} \int \bar{\psi} [\gamma_4 \delta_{\mu\rho} + \delta_{\mu\rho} \gamma_4] \psi d^3x.
\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra tenxơ spin ba chiều hạng hai:

$$S_{ik} = -\frac{1}{2} \int \psi^+ \delta_{ik} \psi d^3x ; S_{i4} = S_{4i} = 0$$

(i, k = 1, 2, 3).

Mặt khác dựa vào công thức véctơ ba chiều spin (II-197) của trường điện từ, ta có thể định nghĩa véctơ spin của trường spinơ bằng cách sau:

$$\begin{aligned}
S_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{jk} = -\frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \int \psi^+ \delta_{jk} \psi d^3x = \\
&= -\frac{1}{2} \int \psi^+ \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} \right) \psi d^3x = -\frac{1}{2} \int \psi^+ G_i \psi d^3x \quad (\text{II-276})
\end{aligned}$$

ở đây các ma trận  $G_i$  bằng:

$$G_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = \frac{1}{2i} \varepsilon_{ijk} \gamma_j \gamma_k \quad (\text{II-277})$$

(i, j, k = 1, 2, 3).

Còn trong biểu diễn Dirac-pauli ma trận  $G_i$  có dạng:  $G_i = \begin{pmatrix} \delta_i & 0 \\ 0 & \delta_i \end{pmatrix}$

Các ma trận  $\frac{1}{2} G_i$  là ma trận spin của trường. Các ma trận này thỏa mãn các hệ thức giao hoán của mômen dung lượng:

$$\left[ \frac{1}{2} G_i, \frac{1}{2} G_k \right] = i \varepsilon_{ikl} \frac{1}{2} G_l \quad (\text{II-278})$$

## 6. Lời giải của phương trình Dirac

Để có lời giải của phương trình Dirac, trước hết ta biểu diễn phương trình Dirac  $\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$  dưới dạng phương trình Schrödinger:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = H \psi, \quad (\text{II-279})$$

trong đó toán tử Haminton có dạng:

$$H = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m, \quad (\text{II-280})$$

còn  $\psi$  là spinơ bốn thành phần.

Phương trình (II-279) có nghiệm tìm được dạng sóng phẳng:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} U(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x} - iEx_0} \quad (\text{II-281})$$

Khi thay (II-281) vào (II-280) ta được phương trình cho spinơ  $U(\vec{p})$ .

$$(\vec{\alpha} \vec{p} + m\beta) U(\vec{p}) = E U(\vec{p}) \quad (\text{II-282})$$

Kết hợp việc sử dụng biểu diễn ma trận Dirac - Pauli và tìm nghiệm của phương trình (II-282) dưới dạng:

$$U(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{II-283})$$

trong đó  $\varphi$  và  $\chi$  là các spinơ hai thành phần,  $N$  là hằng số chuẩn hóa và

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \delta_k \\ \delta_k & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-284})$$

thì ta có thể biểu diễn phương trình (II-282) theo dạng:

$$(m - E)\varphi + \bar{\alpha}\bar{p}\chi = 0 \quad (\text{II-285})$$

$$\bar{\alpha}\bar{p}\varphi - (m + E)\chi = 0 \quad (\text{II-286})$$

Để hệ phương trình (II-285) và (II-286) giải được ta phải có điều kiện:

$$\begin{vmatrix} m - E & \bar{\alpha}\bar{p} \\ \bar{\alpha}\bar{p} & -(m + E) \end{vmatrix} = 0$$

Từ đây ta tìm được:

$$E = \pm p_0 \quad \text{với} \quad p_0 = \sqrt{m^2 + \bar{p}^2} \quad (\text{II-287})$$

Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm tương ứng với hai giá trị năng lượng dương và năng lượng âm.

**a) Nghiệm tương ứng với năng lượng dương ( $E = P_0$ )**

Từ phương trình (II-286) ta nhận được:

$$\chi = \frac{\bar{\alpha}\bar{p}}{p_0 + m} \varphi \quad (\text{II-288})$$

Thay (II-288) vào (II-285) ta có:

$$\frac{(\bar{\alpha}\bar{p})^2 \varphi}{p_0 + m} = (p_0 - m)\varphi \quad (\text{II-289})$$

Như vậy ta suy ra nghiệm ứng với năng lượng dương của phương

trình (II-282) theo (II-283) có dạng:

$$U_+(\vec{p}) = N_+(\vec{p}) \begin{pmatrix} \varphi \\ (\vec{\alpha}\vec{p}) \\ p_0 + m \end{pmatrix} \quad (\text{II-290})$$

Sử dụng điều kiện chuẩn hóa cho spinor  $U_+(\vec{p})$

$$[U_+(\vec{p})]^\dagger U_+(\vec{p}) = 1 \quad (\text{II-291})$$

ta suy ra  $N_+(\vec{p})^2 |\varphi^\dagger, \varphi| \frac{2p_0}{(p_0 + m)} = 1 \quad (\text{II-292})$

Giả sử  $(\varphi^\dagger \varphi) = 1$ , khi đó hằng số chuẩn hóa  $N_+(\vec{p}) = \left( \frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2}$ .

Theo (II-290) nghiệm chuẩn hóa ứng với năng lượng dương của Phương trình Dirac trong biểu diễn Dirac-Pauli có dạng:

$$U_+(\vec{p}) = \left( \frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ (\vec{\alpha}\vec{p}) \\ p_0 + m \end{pmatrix} \quad (\text{II-293})$$

***b) Nghiệm ứng với năng lượng âm ( $E = -p_0$ ) của phương trình Dirac***

Từ (II-285) ta nhận được

$$\varphi = \frac{-\vec{\alpha}\vec{p}}{p_0 + m} \chi \quad (\text{II-294})$$

Khi thay (II-294) vào (II-286) ta cũng nhận được dạng

$$\frac{(\vec{\alpha}\vec{p})^2}{p_0 + m} \chi = (p_0 - m) \chi$$

và ta thấy không có một hạn chế nào đối với spinor  $\chi$  cả. Từ đòi hỏi spinor  $U_{-}(\vec{p})$  mô tả trạng thái ứng với năng lượng âm thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa

$$U_{-}^{+}(\vec{p})U_{-}(\vec{p}) = 1 \quad (\text{II-295})$$

$$\text{và giả sử } \chi^{+}\chi = 1 \quad (\text{II-296})$$

thì ta nhận được

$$U_{-}(\vec{p}) = \left( \frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\alpha}\vec{p}}{p_0 + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{II-297})$$

Hệ thức này được thỏa mãn với bất kỳ  $\phi$  nào, vì ta luôn có

$$(\vec{\alpha}\vec{p})^2 = p^2 = p_0^2 - m^2$$

Ta thấy các spinor  $U^{+}(\vec{p})$  và  $U_{-}(\vec{p})$  là trực giao

$$U^{+}(\vec{p})U_{-}(\vec{p}) = 0 \quad (\text{II-298})$$

### c) Toán tử xoắn

Khi đưa vào vectơ đơn vị  $\vec{n}$  dọc theo hướng xung lượng  $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$  thì toán tử

$$\vec{G} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{G}\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (\text{II-299})$$

được gọi là toán tử xoắn.

Trong đó toán tử spin  $G_i$  được xác định theo công thức (II-277) và sau khi thay (II-238) vào ta có thể biểu diễn  $G_i$  như sau:

$$G_i = \frac{1}{2i} \varepsilon_{ijk} \gamma_j \gamma_k = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \alpha_j \alpha_k \quad (\text{II-300})$$

trong đó các ma trận  $\alpha_k$ ,  $\alpha_j$  và  $\beta$  thỏa mãn các hệ thức giao hoán:

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk}$$

$$\alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0$$

$$\beta^2 = 1 \quad (\text{II-301})$$

Đồng thời ta có thể tính được giao hoán toán tử của toán tử  $G_i$  với toán tử Hamintonien  $H = \vec{\alpha} \vec{p} + m\beta$ , sau khi sử dụng các hệ thức giao hoán (II-301) ta có kết quả:

$$[G_i, H_i] = -i(\vec{\alpha} \vec{p}) \quad (\text{II-302})$$

Từ đây ta nhận thấy chỉ có thành phần toán tử hình chiếu spin lên véctơ xung lượng giao hoán với Hamintonien  $H(\vec{p})$  là bảo toàn, còn các thành phần còn lại không bảo toàn.

Bây giờ ta đòi hỏi các spinor  $U^+(\vec{p})$  và  $U_-(\vec{p})$  vừa là các nghiệm của phương Dirac đồng thời là các hàm riêng của toán tử xoắn

$$\vec{G}nU_+(\vec{p}) = rU_+(\vec{p})$$

$$\vec{G}nU_-(\vec{p}) = rU_-(\vec{p}) \quad (\text{II-303})$$

trong đó  $r = \pm 1$  gọi là độ xoắn.

Như vậy  $U_-(\vec{p})$  và  $U_+(\vec{p})$  mô tả trạng thái spin của hạt Dirac ứng với năng lượng dương tro và năng lượng âm  $-p_0$  và độ xoắn tương ứng  $r$ . Tương tự từ (II-291), (II-295), (II-298) và (II-303) ta có:



$$[U_+^r(\vec{p})]^\dagger U_+^r(\vec{p}) = \delta_{rr}$$

$$[U_-^r(\vec{p})]^\dagger U_-^r(\vec{p}) = \delta_{rr} \quad (\text{II-304})$$

$$[U_+^r(\vec{p})]^\dagger U_-^r(\vec{p}) = 0$$

Tóm lại qua các biểu diễn ở trên ta có thể lập thành hệ đủ các nghiệm của phương trình Dirac từ bốn hàm số với giá trị xung lượng xác định:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} U_+^r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x} - ip_0 x_0} \\ & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} U_-^r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x} + i p_0 x_0} \end{aligned} \quad (\text{II-305})$$

( $r = \pm 1$ )

Mặt khác khi thêm chỉ số spin ta viết các spinor (II-2931 và (II 297) dưới dạng:

$$\begin{aligned} U_+^r(\vec{p}) &= \left( \frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi^r \\ \frac{\vec{\alpha}\vec{p}}{p_0 + m} \varphi^r \end{pmatrix}, \\ U_-^r(\vec{p}) &= \left( \frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\alpha}\vec{p}}{p_0 + m} \chi^r \\ \chi^r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II-306})$$

Áp dụng (II-303) cho  $\varphi^r$  và  $\chi^r$  ta có:

$$\bar{\alpha} n \varphi^r = r \varphi^r$$

$$\bar{\alpha} n \chi^r = r \chi^r \quad (\text{II-307})$$

Đến đây ta nhận thấy rằng các phương trình (II-303) cho phép xác định sự lựa chọn nhất định của spinơ hai thành phần  $\varphi$  đối với các trạng thái ứng với năng lượng dương và spinơ hai thành phần  $\chi$  đối với các trạng thái với năng lượng âm. Khi đó từ (II-209) và (II-307) ta viết các spinơ dưới dạng:

$$U_+^r(\vec{p}) = \left( \frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi^r \\ \frac{|\vec{p}|r}{p_0 + m} \varphi^r \end{pmatrix}$$

$$U_-^r(\vec{p}) = \left( \frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{-|\vec{p}|r}{p_0 + m} \chi^r \\ \chi^r \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp nếu ta chọn các spinơ hai thành phần có dạng  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  và  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  thì spinơ thứ nhất sẽ diễn tả hạt spinơ có hình chiếu spin dọc theo xung lượng, còn spinơ thứ hai mô tả hạt spinơ có hình chiếu ngược với xung lượng. Còn trong trường hợp đặc biệt  $\vec{p}$  hay  $p_0 = m$ , thì bốn nghiệm khác nhau của phương trình Dirac có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\psi^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left\{-\frac{imc^2}{\hbar} t\right\},$$

$$\psi^{(2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left\{-\frac{imc^2}{\hbar} t\right\}$$

hai nghiệm này tương ứng với năng lượng dương, còn hai nghiệm sau đây tương ứng với năng lượng âm

$$\psi^{(3)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left\{\frac{imc^2}{\hbar} t\right\}$$

$$\psi^{(4)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left\{\frac{imc^2}{\hbar} t\right\}$$

*d) Chuẩn hóa các spinor*

Ta biết rằng các spinor  $U_+(\vec{p})$  và  $U_-(\vec{p})$  thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa (II-291) và (II-295):

$$\begin{aligned} U_+(\vec{p})U_+(\vec{p}) &= 1 \\ U_-(\vec{p})U_-(\vec{p}) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II-308})$$

Tuy vậy về trái của (II-308) có thể viết như sau:

$$U_+(\vec{p})U_+(\vec{p}) = U_+(\vec{p})\gamma_4^2 U_+(\vec{p}) = \bar{U}_+(\vec{p})\gamma_4 U_+(\vec{p}) = 1 \quad (\text{II-309})$$

Ta thấy đại lượng  $\bar{U}_+(\vec{p})\gamma_4 U_+(\vec{p})$  có thể coi như thành phần húr tư của véctơ  $\bar{U}(\vec{p})\gamma_4 U(\vec{p})$  và như vậy chuẩn hóa (II-308) là không bất biến. Vấn đề bây giờ là ta phải đưa ra được sự huẩn hóa bất biến spinor (hay còn gọi là sự chuẩn hóa theo lăng lượng). Ta xét các hạt có khối lượng khác không. Khi đó theo (II-282) spinor  $U(\vec{p})$  thỏa mãn phương trình

$$(\vec{\alpha}\vec{p} + m\beta)U(\vec{p}) = EU(\vec{p}) \quad (\text{II-310})$$

Đầu tiên thực hiện phép liên hợp ecmite đối với phương trình (II-310) ta được:

$$U^+(\vec{p})(\vec{\alpha}\vec{p} + m\beta) = U^+(\vec{p})E \quad (\text{II-311})$$

Sau đó tiến hành nhân trái phương trình (II-310) với  $U^+(\vec{p})\beta$ , và nhân phải phương trình (II-311) với  $\beta U(\vec{p})$ , rồi động các phương trình nhận được với nhau, ta có:

$$\begin{aligned} U^+(\vec{p})\beta(\vec{\alpha}\vec{p} + m\beta)U(\vec{p}) + U^+(\vec{p})(\vec{\alpha}\vec{p} + m\beta)\beta U(\vec{p}) &= \\ &= U^+(\vec{p})\beta U(\vec{p})E + U^+(\vec{p})\beta U(\vec{p})E \end{aligned}$$

Suy ra:

$$U^+(\vec{p})(\beta\alpha_i + \alpha_i\beta)U(\vec{p})p_i + 2mU^+(\vec{p})U(\vec{p}) = 2\bar{U}(\vec{p})U(\vec{p})E$$

Khi sử dụng các hệ thức giao hoán (II-301) và điều kiện (II-309) ta thu được điều kiện bất biến:

$$\bar{U}(\vec{p})U(\vec{p}) = \frac{m}{E} U^+(\vec{p})U(\vec{p}) = \frac{m}{E} \quad (\text{II-312})$$

Từ đây ta có:

$$\bar{U}_+(\vec{p})U_+(\vec{p}) = \frac{m}{p_0} > 0, \text{ ứng với } E = p_0 \quad (\text{II-313})$$

$$\bar{U}_-(\vec{p})U_-(\vec{p}) = -\frac{m}{p_0} < 0, \text{ ứng với } E = -p_0 \quad (\text{II-314})$$

Riêng trường hợp hạt với khối lượng bằng 0 thì  $\bar{U}(\vec{p})U(\vec{p}) = 0$ .

Bây giờ để mô tả trạng thái của hạt với năng lượng dương  $p_0$  ta đưa vào spinor  $U(\vec{p})$  và spinor  $U(-\vec{p})$  mô tả trạng thái của hạt với năng lượng âm  $-p_0$ .

Các spinor này liên hệ với các spinor  $U_+(\vec{p})$  và  $U_-(\vec{p})$  bằng các hệ thức:

$$U(\vec{p}) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{1/2} U_+(\vec{p}) = \left(\frac{p_0 + m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{-\vec{\alpha}\vec{p}}{p_0 + m} \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{II-315})$$

$$U(-\vec{p}) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{1/2} U_-(\vec{p}) = \left(\frac{p_0 + m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\alpha}\vec{p}}{p_0 + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{II-316})$$

Từ các điều kiện (II-313) và (II-314) ta có các điều kiện chuẩn hóa

$$\bar{U}(\mathbf{p})U(\mathbf{p}) = \frac{p_0}{m} \bar{U}_+(\vec{\mathbf{p}})U_+(\vec{\mathbf{p}}) = 1 \quad (\text{II-317})$$

$$\bar{U}(-\mathbf{p})U(-\mathbf{p}) = \frac{p_0}{m} \bar{U}_-(-\vec{\mathbf{p}})U_-(-\vec{\mathbf{p}}) = -1 \quad (\text{II-318})$$

Mặt khác các spinor  $U(\mathbf{p})$  và  $U(-\mathbf{p})$  thỏa mãn các phương trình:

$$(\vec{\alpha}\vec{\mathbf{p}} + m\beta)U(\mathbf{p}) = p_0U(\mathbf{p}) \quad (\text{II-319})$$

$$(-\vec{\alpha}\vec{\mathbf{p}} + m\beta)U(-\mathbf{p}) = -p_0U(-\mathbf{p}) \quad (\text{II-320})$$

Từ những phương trình này ta có thể tìm được các phương trình đối với các spinor  $\bar{U}(\mathbf{p})$  và  $\bar{U}(-\mathbf{p})$  bằng cách thực hiện các bước sau đây. Nhân trái các phương trình (II-319) và (II-320) với ma trận  $-\beta$ , rồi chuyển về một vế, ta nhận được:

$$(\hat{\mathbf{p}} - im)U(\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{II-321})$$

$$(\hat{\mathbf{p}} + im)U(-\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{II-322})$$

trong đó  $\gamma_k = -i\beta\alpha_k = i\alpha_k\beta, = 1,2,3$

$$\gamma_4 = \beta; \hat{\mathbf{p}} = p_\mu\gamma_\mu \quad (\text{II-323})$$

Khi sử dụng các hệ thức giao hoán (II-301) cho các ma trận  $\gamma_\mu$ , ta thấy chúng thỏa mãn các hệ thức:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{II-324})$$

Thực hiện phép liên hợp ecmite đối với phương trình (II-321) và chú ý trong biểu diễn Dirac - Pauli  $\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$  ta được:

$$U^+(\mathbf{p})(\mathbf{p}_\mu\gamma_\mu^* + im) = 0 \quad (\text{II-325})$$

Tiến hành nhân  $\gamma_4$  với phía bên phải của phương trình (II-325) và chú ý

$$\gamma_4 \rho_\mu^* \gamma_\mu \gamma_4 = -\gamma_\mu \rho_\mu,$$

$$\bar{U} = U^\dagger \gamma_4, \quad \gamma_4^2 = \beta^2 = 1$$

ta nhận được phương trình:

$$\bar{U}(p)(\hat{p} - im) = 0 \quad (\text{II-326})$$

Bằng cách tương tự từ (II-322) ta nhận được phương trình:

$$\bar{U}(-p)(\hat{p} + im) = 0 \quad (\text{II-327})$$

Nhân vế trái của phương trình (II-326) với  $\bar{U}(-p)$ , nhân vế phải của phương trình (II-327) với  $U(p)$ , rồi cộng các hệ thức thu được ta có :

$$\bar{U}(-p)\bar{U}(p)(\hat{p} - im) + \bar{U}(-p)(\hat{p} + im)U(p) = 0$$

$$\bar{U}(-p)[\bar{U}(p)(\hat{p} - im) + (\hat{p} + im)U(p)] = 0 \quad (\text{II-328})$$

Theo (II-326) thì  $\bar{U}(p)(\hat{p} - im) = 0$  và theo (II-321) thì  $im U(p) = \hat{p} U(p)$ , nên từ (II-328) ta có  $\bar{U}(-p)[2\hat{p} U(p)] = 0$ .

$$\text{Từ đây suy ra } \bar{U}(-p)U(p) = 0 \quad (\text{II-329})$$

Áp dụng kết quả này cho (II-315) và (II-316) ta có:

$$\bar{U}_-(-\vec{p})U_+(\vec{p}) = 0 \quad (\text{II-330})$$

$$\text{và lưu ý } \bar{U}_+(\vec{p})U_+(\vec{p}) \neq 0$$

Từ (II-303) ta thấy các spinor  $U_+(\vec{p})$  và  $U_-(\vec{p})$  là các hàm riêng của toán tử xoắn, có nghĩa là:

$$\bar{G}\bar{n}U_+^r(\vec{p}) = rU_+^r(\vec{p})$$

$$\bar{G}(-\bar{n})U_-^r(-\vec{p}) = rU_-^r(-\vec{p}) \quad (\text{II-331})$$

$\left( \begin{array}{c} \vec{n} = \frac{(\vec{p})}{|\vec{p}|} \end{array} \right)$ , nên theo (II-315) và (II-316) ta có các spinor:

$$U^r(\vec{p}) = \left( \frac{p_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} U_+^r(\vec{p})$$

$$U^r(-\vec{p}) = \left( \frac{p_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} U_-^r(-\vec{p}) \quad (\text{II-332})$$

Các spinor này cũng mô tả trạng thái ứng với độ xoắn xác định, thỏa mãn các điều kiện chuẩn hóa và trực giao sau đây (xem (II-304) (II-318) và (II-329)):

$$\bar{U}^r(\vec{p})U^{r'}(\vec{p}) = \delta_{rr'}$$

$$\bar{U}^r(-\vec{p})U^{r'}(-\vec{p}) = -\delta_{rr'} \quad (\text{II-333})$$

$$\bar{U}^r(-\vec{p})U^{r'}(\vec{p}) = 0$$

Ở đây hai dấu (+) và (-) trong các điều kiện chuẩn hóa (II-333) có thể liên hệ với sự bất định của năng lượng hay điện tích. Điều này dựa vào một định lý quan trọng mà Pauli đã chứng minh trong lý thuyết hạt cơ bản: "Đối với các hạt có spin bán nguyên mật độ năng lượng (do đó tổng năng lượng) không thể là một đại lượng dương xác định, còn đối với các hạt spin nguyên mật độ điện tích không thể là một đại lượng dương xác định". Như vậy theo định lý Pauli đối với các hạt



spin  $\frac{1}{2}$  năng lượng không xác định, còn điện tích là một đại lượng dương xác định; ngược lại đối với các hạt spin 0 và 1 thì điện tích là không xác định, còn năng lượng là một đại lượng dương xác định. Vì lẽ đó mà trong lý thuyết hạt cơ bản hàm sóng được chuẩn hóa theo hai cách: chuẩn hóa theo năng lượng (là chuẩn hóa bất biến) hay chuẩn hóa theo điện tích. Ở đây ta đã chuẩn hóa theo năng lượng.

**e) Kết luận chung**

- Với giá trị xung lượng xác định bốn nghiệm tạo thành hệ đủ của phương trình Dirac là:

+ Hai nghiệm ứng với năng lượng dương:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{p_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} U_+^r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x} - ip_0 x_0} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} U^r(p) e^{ipx} \quad (\text{II-334})$$

+ Hai nghiệm ứng với năng lượng âm:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{p_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} U_-^r(-\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x} + ip_0 x_0} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} U^r(-p) e^{-ipx}$$

(II 335)

Từ đây ta có thể biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình Dirac dưới dạng chồng chất các nghiệm (II-334) và (II-335):

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{\frac{1}{2}} U^r(p) e^{ipx} c_r(p) d\vec{p} + \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{\frac{1}{2}} U^r(-p) e^{-ipx} c_r(-p) d\vec{p} \quad (\text{II-336})
\end{aligned}$$

Trong đó  $U^r(p)$  và  $U^r(-p)$  thỏa mãn phương trình (II-321) và (II-322); và đồng thời thỏa mãn các điều kiện chuẩn hóa bất biến (II-333).

Xuất phát từ (II-336) ta suy ra:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{U}^r e^{-ipx} c_r^+(p) d\vec{p} + \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{U}^r(-p) e^{ipx} c_r^+(-p) d\vec{p} \quad (\text{II-337})
\end{aligned}$$

Các biến động lực của trường spinor trong biểu diễn xung lượng có thể được xác định bằng cách thay các công thức (II-336) và (II-337) vào công thức (II-274) đối với vectơ năng xung lượng của trường phức spinor ta có:

$$P_\mu = i \int \bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} d\vec{x} \quad (\text{II-338})$$

Thực hiện lấy tích phân theo  $\vec{x}$ , rồi lấy tích phân theo  $p'$  (biến  $p'$  xuất hiện sau khi tích phân theo  $\vec{x}$ ) và sử dụng các biến đổi

$$\bar{U}_{(p)}^r(p)\gamma_4 U^{r'}(p) = \left(\frac{p_0}{m}\right) [U_+^r(\vec{p})]^\dagger U_+^{r'}(\vec{p}) = \frac{p_0}{m} \delta_{rr'},$$

$$\bar{U}_{(-p)}^r(-p)\gamma_4 U^{r'}(-p) = \left(\frac{p_0}{m}\right) [U_-^r(-\vec{p})]^\dagger U_-^{r'}(-\vec{p}) = \frac{p_0}{m} \delta_{rr'},$$

(II-339)

$$\bar{U}_{(p)}^r(p)\gamma_4 U^{r'}(-p) \Big|_{p=-\vec{p}} = \left(\frac{p_0}{m}\right) [U_+^r(\vec{p})]^\dagger U_-^{r'}(\vec{p}) = 0,$$

ta tìm được các công thức đối với năng lượng và xung lượng của trường phức spinor:

$$H = \int [c_r^*(p)c_r(p) - c_r^*(-p)c_r(-p)] p_0 d\vec{p}, \quad (\text{II-340})$$

$$P_k = \int [c_r^*(p)c_r(p) - c_r^*(-p)c_r(-p)] p_k d\vec{p}, \quad (\text{II-341})$$

Bằng cách tiến hành tương tự như ở trên đối với công thức xác định điện tích (II-272)

$$Q = e \int \bar{\psi} \gamma_4 \psi d\vec{x}$$

ta nhận được công thức đối với điện tích của hai trường phức spinor (trường mô tả các hạt có spin bằng 0 và bằng 1, và trường spin mô tả các hạt có spin bằng  $\frac{1}{2}$ ).

$$Q = e \int [c_r^*(p)c_r(p) + c_r^*(-p)c_r(-p)] d\vec{p} \quad (\text{II-342})$$

Đến đây ta nhận thấy: Số hạng thứ hai dưới dấu tích phân trong công thức (II-340) là âm - đó là phần đóng góp của các trạng thái ứng với năng lượng âm. Điều đó chứng tỏ năng lượng của trường cổ điển phức spinơ không phải là một đại lượng dương xác định. Bên cạnh đó từ công thức (II-342) ta thấy điện tích của trường cổ điển phức sáng có thể nhận các giá trị cùng loại dấu.

Dựa vào công thức (II-276) ta xác định được véctơ spin của trường bằng biểu thức thành phần:

$$S_i = -\frac{1}{2} \int \psi^+ G_i \psi d\bar{x} \quad (\text{II-343})$$

Khi đó thành phần spin dọc theo hướng của xung lượng có dạng:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{2} \int \psi^+ \vec{G} n \psi d\bar{x} \quad (\text{II-344})$$

trong đó  $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$  - là véctơ đơn vị dọc theo hướng của xung lượng  $\vec{p}$ .

Sau khi thay các công thức (II-336) và (II-337) vào (II 344), rồi sử dụng các phương trình (II-331), lấy tích phân theo  $\bar{x}$  và chú ý các điều kiện trực chuẩn (II-339) ta nhận được biểu thức cuối cùng với  $\vec{s} \cdot \vec{n}$ .

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{2} \int [c_r^*(\vec{p})c_r(\vec{p}) - c_r^*(-\vec{p})c_r(-\vec{p})] d\vec{p} \quad (\text{II-345})$$

## *Chương IV*

### **LƯỢNG TỬ HÓA TRƯỜNG TỰ DO**

Chúng ta biết rằng trong các trường cổ điển, các quá trình sinh hủy của các hạt cơ bản không được mô tả, xem xét một cách cụ thể rõ ràng. Song trong lý thuyết trường lượng tử các quá trình các hạt có thể được sinh ra và bị hủy đi - quá trình chuyển hóa lẫn nhau của chúng được xem xét chặt chẽ, tường minh. Để mô tả một trong những tính chất quan trọng nhất đó của các hạt cơ bản chúng ta cần phải lượng tử hóa các trường cổ điển bằng cách coi các hàm trường là các toán tử trường chứa các toán tử sinh hạt và các toán tử hủy hạt, mà không còn coi là các hàm trường với nghĩa cổ điển. Điều đòi hỏi là các toán tử trường này sẽ thỏa mãn các phương trình trường và tuân theo các hệ thức giao hoán nhất định. Trong trường lượng tử kết quả này được giải thích như hệ "các hạt" - thực ra là hệ "các lượng tử" mang năng lượng và xung lượng (và điện tích) của trường. Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một số cách lượng tử hóa trường.

#### **§4.1. CÁC CÁCH LƯỢNG TỬ HÓA TRƯỜNG**

Để lượng tử hóa trường cổ điển ta có thể coi trường cổ điển như một hệ cơ học cùng với vô hạn bậc tự do, vì thế ta có thể tiến hành lượng tử hóa các trường tương tự như lượng tử hóa hệ cơ học của các hạt. Như vậy có nghĩa là ta có thể lượng tử hóa hệ với số lượng hữu hạn bậc tự do.

##### **1. Các quy tắc lượng tử hóa trong cơ học lượng tử**

Để hiểu rõ cách lượng tử hóa trong lý thuyết trường lượng tử trước

hết ta quay lại cách lượng tử hóa hệ cơ học cổ điển trong cơ học lượng tử. Theo cơ học cổ điển thông thường một hệ cơ học cổ điển với một số hữu hạn bậc tự do có thể mô tả bằng hàm Hamilton  $H(p, q)$  của các tọa độ suy rộng  $q = (q_1, \dots, q_n)$  và các xung lượng suy rộng  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , mà sự biến đổi của chúng theo thời gian được biểu diễn bằng các phương trình Hamilton:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (\text{II-46})$$

Các phương trình này được gọi là các phương trình chính tắc của cơ học, còn các tọa độ  $q$  và các xung lượng  $p$  suy rộng được gọi là các tọa độ và xung lượng suy rộng chính tắc. Các phương trình này đơn giản và gọn, nhưng do có dấu trừ ở phương trình thứ hai nên hệ các phương trình (II-346) không phải là hệ các phương trình đối xứng với  $q, p$ . Tuy nhiên điều này có thể khắc phục được bằng cách sử dụng móc Poisson và hệ khi đó có dạng:

$$\frac{dq_i}{dt} = \{H, q_i\}_p; \quad \frac{dp_i}{dt} = \{H, p_i\}_p \quad (\text{II-347})$$

Dạng (II-347) bảo đảm tuyệt đối tính đối xứng đối với tọa độ và xung lượng.

Trong cơ học lượng tử người ta lượng tử hóa hệ cơ học cổ điển bằng cách thay các biến đi và tri bằng các toán tử tương ứng:

$$q_i(t) \rightarrow \hat{q}_i; \quad p_i(t) \rightarrow \hat{p}_i \quad (\text{II-348})$$

Khi chuyển sang cơ học lượng tử như vậy Hamiltonien  $H(q, p)$  và các đại lượng vật lý khác cũng chuyển thành các toán tử.

Ở đây ta giả thiết rằng hệ thức giữa các toán tử này có dạng giống như hệ thức giữa các đại lượng tương ứng trong cơ học cổ điển. Sau đây ta đưa ra một ví dụ minh họa; đối với một hạt có khối lượng  $m$  chuyển động trong một trường thế  $U(r)$ , Hamiltonien trong cơ học cổ điển là:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \quad (\text{II-349})$$

(ở đây  $q = r$  ;  $p = p$ )

Khi chuyển sang cơ học lượng tử ta thay thế các đại lượng cổ điển bằng các toán tử:

$$\vec{r} \rightarrow \hat{r}, \quad \vec{p} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

và toán tử Hamilton có dạng là:

$$H(\hat{r}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}) \quad (\text{II-350})$$

Các toán tử này tác dụng lên các hàm sóng  $\psi(\vec{r}, t)$  và các hàm sóng này tạo thành không gian Hilbert (từ không gian Euclide thông thường mà yếu tố là vectơ 3 chiều, khi tổng quát nó với số chiều tăng lên vô hạn và phức hóa ta có không gian Hilbert mà yếu tố là hàm phức xác định trên khoảng nào đó, các hàm này bình phương khả tích  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx < \infty$ . Ở đây khái niệm hàm là sự tổng quát hóa). Sự biến đổi của hệ theo thời gian được xác định bằng phương trình sóng Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H(\hat{r}, \hat{p})\psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II-351})$$

Hàm sóng  $\psi(\vec{r}, t)$ , ở đây xác định trạng thái của hệ. Còn các toán tử tọa độ  $\hat{q}_i$  và toán tử xung lượng  $\hat{p}_i$  không giao hoán với nhau những thỏa mãn các quy tắc lượng tử hóa sau đây:

$$\left[ \hat{q}_i, \hat{q}_j \right] = 0 ; \left[ \hat{p}_i, \hat{p}_j \right] = 0 ; \left[ \hat{q}_i, \hat{p}_j \right] = i\hbar\delta_{ij} \quad (\text{II-352})$$

Đến đây ta có thể nói rằng việc chuyển từ cơ học cổ điển sang cơ học lượng tử có thể thực hiện bằng việc thay thế các móc Poisson cổ

điền bằng các móc Poisson lượng tử sau đây:

$$\{q_i, p_j\}_{p. cổ điển} \rightarrow \{\hat{q}_i, \hat{p}_j\}_{p. lượng tử}, \quad (II-353)$$

$$\{\hat{q}_i, \hat{p}_j\}_{p. lượng tử} = \frac{i}{\hbar}(\hat{q}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{q}_i) = -\delta_{ij} \quad (II-354)$$

Với định nghĩa móc Poisson lượng tử của hai toán tử  $\hat{q}_i$  và  $\hat{p}_j$  bằng

$$\{\hat{q}_i, \hat{p}_j\}_{p. lượng tử} = \frac{i}{\hbar}(\hat{q}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{q}_i)$$

Điều này có nghĩa là ta chọn giao hoán tử với độ chính xác tối thiểu  $\frac{i}{\hbar}$  là móc Poisson lượng tử, đơn vị ảo  $i$  nhằm bảo đảm tính ecmite của toán tử.

Từ những điều đã trình bày ở trên, kết quả ta nhận được các phương trình chuyển động lượng tử mô tả hệ tương đương với phương trình sóng Schrödinger (II-351) dưới dạng đạo hàm theo thời gian của chính các biến động lực. Vì trong cơ học lượng tử các biến động lực được đối ứng bằng các toán tử xác định do đó phương trình cần tìm cho dạng tổng quát sẽ được viết cho những toán tử này, cụ thể là  $\hat{q}_i$  và  $\hat{p}_j$ . Do những toán tử này không phụ thuộc tường minh vào thời gian trên ta có các phương trình dạng toán tử:

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = \{\hat{H}, \hat{q}_i\}_{p. lượng tử} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{q}_i]_p$$

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = \{\hat{H}, \hat{p}_i\}_{p. lượng tử} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}_i]_p \quad (II-355)$$

Điều ta cần lưu ý là các phương trình chuyển động Heisenberg (II-355) viết cho các toán tử, còn phương trình Schrödinger viết cho các hàm sóng mô tả các trạng thái hệ. Trong thực tế phương trình



Schrödinger giải đơn giản hơn về tính toán so với giải phương trình Heisenberg - phương trình toán tử. Song về mặt vật lý thì một số tính chất của các hệ lượng tử được thể hiện rõ nét hơn trong biểu diễn Heisenberg.

Trong lý thuyết trường lượng tử một trong những hình thức luận được bàn đến là hình thức luận chính tắc - sự lượng tử hóa chính tắc. Hình thức luận này dựa trên việc sử dụng phương pháp đã được trình bày trong cơ học lượng tử, mà cơ sở của nó là nguyên lý tương ứng và hình thức luận chính tắc Hamilton của trường cổ điển. Tuy vậy trong trường hợp lý thuyết trường vẫn có nảy sinh điều khác nhau duy nhất là "phương pháp được áp dụng cho hệ vô tận bậc tự do".

Bên cạnh hình thức luận nêu trên, một hình thức luận khác cũng được xây dựng - đó là hình thức luận hiệp biến mà cơ sở của nó là các phương trình hiệp biến của trường cổ điển và phương pháp lượng tử hóa bảo đảm tính hiệp biến. Đến nay hai hình thức luận này được nhiều tác giả đề cập đến về tính tổng quan lý thuyết, xem xét tỷ mỉ những vấn đề ứng dụng của lý thuyết trường và bàn luận ý nghĩa vật lý của nó, đồng thời cũng nêu ra những khó khăn mà lý thuyết gặp phải.

Sau đây ta sẽ trình bày nội dung chủ yếu của sự lượng tử hóa chính tắc và hình thức luận hiệp biến.

## **2. Sự lượng tử hóa chính tắc**

Nhiệm vụ đặt ra đối với sự lượng tử hóa chính tắc là làm thế nào tổng quát hóa được cách lượng tử hóa của cơ học các hạt cho cơ học các trường. Để đạt được mục đích đó sự lượng tử hóa chính tắc đã tiến hành nghiên cứu nội dung theo các bước sau:

- Trước hết tìm các tọa độ và biến động lực thích hợp, đưa ra định nghĩa hàm Lagrange của trường rồi xác định xung lượng liên hiệp chính tắc với các tọa độ và xây dựng hàm Hamilton của trường.

- Sau đó chuyển các đại lượng này thành các toán tử thỏa mãn các hệ thức giao hoán nhất định.

Xuất phát từ định hướng đặt ra quá trình tổng quát hóa có thể thực

hiện theo hai hướng:

*Hướng thứ nhất:* khi mô hình hóa trường gồm tập hợp vô hạn các dao động tử điều hòa cùng với tần số  $\omega_n$ , nếu dùng các tọa độ chuẩn để mô tả các trường thì khi đó Hamiltonien của trường có thể biểu diễn dưới dạng:

$$H = \frac{1}{2} \sum_n (p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2) \quad (\text{II-356})$$

Từ đây ta có thể nhận được trường lượng tử bằng cách đồng thời thay các biến tọa độ tin và xung lượng tin bằng toán tử tương ứng, và thỏa mãn hệ thức giao hoán.

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (\text{II-357})$$

*Hướng thứ hai:* chúng ta biết rằng các đại lượng vật lý có thể thay đổi theo vị trí không gian. Tuy nhiên nếu ta chia không gian (ở đây là không gian ba chiều) thành những đơn vị thể tích  $\delta x^s = \Delta^3$  đủ bé sao cho có thể coi các đại lượng vật lý trong thể tích ấy biến đổi không đáng kể, thì trong đơn vị thể tích  $s$  đó giá trị trung bình  $\varphi(x, y, z, t) - \varphi_s$  có thể coi như tọa độ  $Q_s$ . Như vậy theo hướng này trong đơn vị thể tích  $s$  ta coi đồng nhất

- tọa độ  $Q_s$  với  $\varphi_s$
- vận tốc  $\hat{Q}_s$  với  $\varphi_s$
- đạo hàm không gian  $\nabla\varphi$  thay bằng đại lượng  $\frac{Q_{s+1} - Q_s}{\Delta}$
- Khi đó ta có thể coi hàm Lagrange của cả hệ như là hàm số của  $Q_s, \hat{Q}_s$  và có dạng:

$$L = \sum L_s \delta x^s \quad (\text{II-358})$$

Trong đó đại lượng  $L_s$  là giá trị trung bình của mật độ hàm

Lagrange trong đơn vị thể tích  $\delta x^s$  và phụ thuộc vào  $Q_s$ ,  $Q_{s+1}$  và  $\dot{Q}_s$ . Trong trường hợp giới hạn khi  $\delta x_s \rightarrow 0$  thì ta có thể viết Lagrange của trường dưới dạng:

$$L = \sum_s L_s \delta x^s \rightarrow L = \int L \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) d^3x \quad (\text{II-359})$$

Điều ta từng nhận biết được trong cơ học cổ điển là khi xây dựng được hàm Lagrange  $L$  ta có thể xác định được xung lượng liên hiệp chính tắc. Ở đây bằng cách tương tự ta cũng tìm được các xung lượng liên hiệp chính tắc với  $Q_s$ :

$$P_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_s} = \frac{\partial L_s}{\partial \dot{Q}_s} \delta x^s \quad (\text{II-360})$$

Từ đây ta định nghĩa "mật độ" của xung lượng liên hiệp chính tắc:

$$\pi_s = \frac{\partial L_s}{\partial \dot{Q}_s} \Rightarrow P_s = \pi_s \delta x^s \quad (\text{II-361})$$

Trường hợp  $\delta x^s \rightarrow 0$  thì  $\dot{Q}_s \varphi$  và  $\pi^s \rightarrow \pi$ , nghĩa là ta có:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad (\text{II-362})$$

Kết quả ta xây dựng được hàm Hamilton

$$H = \sum_s P_s \dot{Q}_s - L = \sum_s \delta x^s (\pi_s \dot{Q}_s - L_s) \quad (\text{II-363})$$

Khi  $\delta x^s \rightarrow 0$  thì theo (II-363) ta có:

$$H = \int (\pi \dot{\varphi} - L) d^3x = \int H d^3x \quad (\text{II-364})$$

Trong đó  $H = (\pi \dot{\varphi} - L)$  là mật độ hàm Hamilton - mật độ năng lượng của trường.

Dựa vào các hệ thức giao hoán giữa các toán tử tọa độ  $\hat{q}_i$  và các toán tử xung lượng  $\hat{p}_i$  bằng cách tương tự khi lượng tử hóa trường ta có:

$$[Q_s(t), Q_r(t)] = [P_s(t), P_r(t)] = 0 \quad (\text{II-365})$$

$$[Q_s(t), P_r(t)] = i\hbar\delta_{sr} \quad (\text{II-366})$$

Từ sự đồng nhất giữa  $Q_s$  và  $\varphi_s$ , và từ (II-361) ta có thể viết lại (II-366) dưới dạng.

$$[\varphi_s(t), \varphi_r(t)] = [\pi_s(t), \pi_r(t)] = 0 \quad (\text{II-367})$$

$$[\varphi_s(t), \pi_r(t)] = i\hbar\frac{\delta_{sr}}{\delta x^r} \quad (\text{II-367})$$

Trong giới hạn  $\delta x^r \rightarrow 0$  tổng của các hệ thức giao hoán trên được lấy theo tất cả các thể tích đơn vị và sau đó các tổng này được thay bằng tích phân theo thể tích, ví dụ từ (II-367):

$$\sum [\varphi_s(t), \pi_r(t)]\delta x^r \rightarrow \int [\varphi_s(\vec{r}, t), \pi_r(\vec{r}', t)]d^3x = i\hbar$$

(II-368) Từ (II-368) ta suy ra:

$$[\varphi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = i\hbar\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{II-369})$$

Tóm lại, tuy phương pháp lượng tử hóa chính tắc giúp ta giải được một số bài toán đơn giản (như trường vô hướng) với kết quả hài lòng, dễ hiểu. Song phương pháp này tỏ ra không phù hợp đối với những bài toán phức tạp, vì khi đó có xuất hiện các phân kỳ trong lý thuyết trường tương đối tính (ví dụ như phân kỳ loại năng lượng riêng). Dù rằng ta có thể loại bỏ các phân kỳ này bằng cách tái chuẩn hóa, nhưng kết quả mà ta chờ đợi khi tiến hành theo hình thức luận Hamilton sẽ gặp nhiều khó khăn. Mặt khác về mặt hình thức phương pháp lượng tử

hóa chính tắc cũng bộc lộ những nhược điểm khó bỏ qua như tính hiệp biến không thể hiện rõ ràng trong lập luận. Điều này nảy sinh do trong phương pháp lượng tử hóa chính tắc có sự khác biệt giữa các tọa độ không gian và các tọa độ thời gian, vì lẽ đó hình thức luận hiệp biến được lưu ý trong trình bày lý thuyết trường lượng tử:

### 3. Hình thức luận hiệp biến

Hình thức luận hiệp biến được xây dựng trên cơ sở sử dụng các phương trình hiệp biến của trường cổ điển kết hợp với phương pháp lượng tử hóa bảo toàn tính hiệp biến (thiết lập được các hệ thức giao hoán hiệp biến). Từ sự kết hợp đó ta xây dựng được lý thuyết dưới dạng hiệp biến rõ ràng. Để đạt được điều đó ta có thể tiến hành theo hai cách:

3.1. Đưa ra giả định về các toán tử trường hay các toán tử sinh và các toán tử hủy thỏa mãn các hệ thức giao hoán nhất định. Từ các hệ thức này ta suy ra được các hệ quả đó là các phương trình chuyển động Heisenberg đối với các toán tử trường:

$$\frac{d\hat{F}}{dx_0} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}]_p, \quad (\text{II-370})$$

trong đó  $\hat{H}$  là toán tử Hamilton biểu thị năng lượng toàn phần của hệ, còn  $F$  là đa thức tùy ý của các toán tử  $\hat{F}$  của trường  $\varphi(x)$ . Dựa vào các hệ thức (II-370) ta có thể suy ra được vectơ năng lượng - đó là toán tử của các phép biến đổi vô cùng bé.

3.2. Giả thiết các toán tử trường luôn luôn được thỏa mãn các phương trình chuyển động Heisenberg (II-370). Từ các phương trình đó ta sẽ nhận được các hệ thức giao hoán nhất định đối với các toán tử trường hay đối với các toán tử sinh và các toán tử hủy. Như vậy cách tiến hành này có trình tự ngược lại với quá trình 3.1.

Qua hai hình thức luận nêu trên ta thấy rằng: cả hai hình thức luận đều khẳng định sự lượng tử hóa lần thứ hai - các phương trình sóng của trường thực sự đã được tiến hành khi ta thay các hàm trường bằng các toán tử trường tuân theo những hệ thức giao hoán nhất định. Kết

luận này cho phép ta mô tả các cách lượng tử hóa đối với các trường, tuy nhiên tùy theo mức độ yêu cầu mà trường này có thể diễn tả tất cả các cách lượng tử hóa còn trường kia chỉ mô tả một cách lượng tử hóa mà thôi. Để dẫn đến việc lượng tử hóa các trường cụ thể trước hết ta cần phân biệt rõ sự khác nhau cơ bản giữa các trường và cách lượng tử hóa khả dĩ tương ứng.

Sự khác biệt này có thể nhận biết được từ các kết luận suy ra khi tính các biến động lực của các trường cổ điển tự do mà ta đã trình bày trong chương III. Theo các kết luận này thì mỗi một trường đều có tính chất đặc trưng (điển hình) riêng cho trường đó và vì thế có cách biểu diễn cũng như cách lượng tử hóa khả dĩ khác nhau. Ví dụ trong trường hợp trường phức (hay trường thực) mật độ năng lượng và do đó năng lượng toàn phần là những giá trị dương xác định, trong khi đó mật độ điện tích hay điện tích toàn phần lại có những giá trị không xác định về dấu. Đó là tính chất điển hình đối với các trường tự do, mà chúng liên quan đến các biểu diễn đơn trị của nhóm Lorentz (các trường tenxơ). Còn trong trường hợp trường Dirac thì ngược lại mật độ năng lượng và năng lượng toàn phần là những giá trị không xác định, song mật độ điện tích và điện tích toàn phần lại là những giá trị dương xác định. Các tính chất như vậy là điển hình cho các trường tự do, mà chúng liên quan đến biểu diễn lưỡng trị của nhóm Lorentz (các trường spinơ).

Xuất phát từ những tính chất điển hình khác nhau đó mà có tương ứng những cách lượng tử hóa khả dĩ khác nhau cho các trường:

Đối với trường tự do vô hướng cần phải lượng tử hóa sao cho các lượng tử của trường tương ứng (các hạt) sẽ tuân theo thống kê Bose - Einstein. Yêu cầu này đòi hỏi các toán tử trường vô hướng tự do sẽ tuân theo quy tắc giao hoán tử:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x). \quad (\text{II-371})$$

Đây là hệ thức giao hoán Bose - Einstein.

Đối với trường Dirac tự do ta không thể áp dụng cách lượng tử hóa như trên được, mà cần phải lượng tử hóa để cho các lượng tử trường

tương ứng (các hạt) phải tuân theo thống kê Fermi - Dirac. Điều đó đòi hỏi các toán tử trường Dirac tuân theo quy tắc phản giao hoán tử:

$$[\psi(x), \psi(y)]_+ = \psi(x)\psi(y) + \psi(y)\psi(x) \quad (\text{II-372})$$

Đây là hệ thức giao hoán Fermi-Dirac.

Đến đây ta thấy rằng các cách lượng tử hóa khả dĩ cho các trường vừa nêu ở trên chỉ là trường hợp riêng của định lý Pauli về mối liên hệ giữa các tính chất biến đổi của trường và cách lượng tử hóa (sự liên hệ giữa spin và thống kê). Theo định lý này thì "các trường mô tả các hạt với spin nguyên được lượng tử hóa theo Bose - Einstein ; các trường mô tả các hạt với spin bán nguyên được lượng tử hóa theo Fermi-Dirac". Như vậy có thể nói định lý Pauli được áp dụng cho các trường với spin tùy ý Song điều cần nhất mạnh ở đây là nếu sự liên hệ giữa spin và thống kê do định lý Pauli thiết lập bị vi phạm thì kết quả nhận được đều chứa đựng những mâu thuẫn sâu sắc. Ví dụ tiến hành lượng tử hóa trường vô hướng theo thống kê Fermi-Dirac sẽ dẫn đến sự mâu thuẫn với tính chất nhân quả ; còn lượng tử hóa trường Được theo thống kê Bose - Einstein sẽ làm thay đổi dấu của biểu thức năng lượng của trường.

Ta biết rằng khi tính các biến động lực của trường ta cần xác định các biểu diễn tương ứng. Từ các biểu diễn này ta có thể tiến hành lượng tử hóa các trường. Vì vậy để đi đến việc lượng tử hóa các trường cụ thể, đầu tiên ta xét các biểu diễn cơ bản trong lý thuyết trường lượng tử.

#### **4. Biểu diễn Schrödinger, biểu diễn Heisenberg, biểu diễn tương tác**

Để mô tả các trạng thái của các hiện tượng vi mô trong vật lý lượng tử ta đưa ra hai khái niệm mới cơ bản, đó là vectơ trạng thái và toán tử đối ứng với các biến động lực. Các vectơ trạng thái và các toán tử có thể phụ thuộc vào thời gian. Qua sự phụ thuộc đó ta nhận biết được sự tiến triển của hệ vi mô theo thời gian. Với ý định đó trong cơ học lượng tử cũng như trong lý thuyết trường lượng tử tùy theo sự phụ

thuộc của véctor trạng thái và toán tử vào thời gian mà chúng được mô tả trong các biểu diễn khác nhau. Sau đây ta trình bày ba biểu diễn khác nhau đó.

### a) *Biểu diễn Schrödinger*

Đối với biểu diễn Schrödinger các biến động lực F không phụ thuộc thời gian, các toán tử  $\hat{F}_s$  đối ứng với chúng cũng sẽ không phụ thuộc thời gian. Do đó sự tiến triển của hệ hoàn toàn được xác định bởi hàm sóng  $\psi_s(t)$  (véctor trạng thái) phụ thuộc vào thời gian. Hàm sóng  $\psi_s(t)$  mô tả hệ phụ thuộc vào thời gian thỏa mãn phương trình sóng Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_s(t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi_s(t) \quad (\text{II-373})$$

Tuy các biến động lực F tương ứng với các toán tử  $\hat{F}_s$  không phụ thuộc thời gian, song các giá trị trung bình của các biến động lực sẽ phụ thuộc thời gian qua các hàm sóng  $\psi_s(t)$  và được xác định bằng công thức:

$$\langle F \rangle_{\psi}(t) = \langle \Psi_s(t) | \hat{F}_s | \Psi_s(t) \rangle. \quad (\text{II-374})$$

### b) *Biểu diễn Heisenberg*

Trong biểu diễn Heisenberg các hàm sóng  $\psi_h$  - các véctor  $\psi_h$  không phụ thuộc vào thời gian (mà chỉ phụ thuộc vào tọa độ), còn các toán tử tương ứng với các biến động lực thì thay đổi theo thời gian. Khi đó sự tiến hóa của hệ theo thời gian hoàn toàn được mô tả dựa vào các toán tử phụ thuộc thời gian dưới dạng các phương trình Heisenberg - các phương trình toán tử:

$$\frac{\partial \hat{F}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_h, \hat{F}_h(t)]_p \quad (\text{II-375})$$

Do hàm sóng không phụ thuộc thời gian, nên ta có phương trình:



$$\frac{\partial \Psi_h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-376})$$

Sự phụ thuộc thời gian của giá trị trung bình của các biến động lực được xác định bằng công thức

$$\langle E \rangle_{\Psi} (t) = \langle \Psi_h | \hat{F}_h | \Psi_h \rangle \quad (\text{II-377})$$

### c) Biểu diễn tương tác

Ngoài hai biểu diễn Schrödinger và Heisenberg, để mô tả các hệ lượng tử người ta còn dùng biểu diễn tương tác. Theo Dirac trong biểu diễn này đề cập đến hệ có các phần tương tác với nhau. Sự tiến triển của hệ theo thời gian được mô tả bởi cả vectơ trạng thái (hàm sóng)  $\Psi_1(t)$  lẫn toán tử  $\hat{F}_1(t)$  và chúng đều phụ thuộc thời gian. Sự phụ thuộc thời gian của  $\Psi_1(t)$ ,  $\hat{F}_1(t)$  được xác định chủ yếu nhờ sự phân chia Hamiltonien

$$H = H_0 + H_I, \quad (\text{II-378})$$

trong đó  $H_0$  là Hamiltonien không tương tác, còn  $H_I$  là Hamiltonien mô tả sự tương tác (sự phân chia này gắn liền với việc sử dụng lý thuyết nhiễu loạn). Các hàm sóng trong biểu diễn tương tác cùng với Hamiltonien tương tác thỏa mãn phương trình Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1(t)}{\partial t} = \hat{H}_1(t) \Psi_1(t), \quad (\text{II-379})$$

còn các toán tử  $\hat{F}_1(t)$  thỏa mãn phương trình Heisenberg cùng với Hamiltonien  $H_{0I}$

$$\frac{\partial \hat{F}_1(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{0I}, \hat{F}_1(t)]_P. \quad (\text{II-380})$$

Dựa vào công thức (II-379) và (II-380) ta có thể kết luận rằng biểu diễn tương tác là biểu diễn trung gian giữa biểu diễn Schrödinger và biểu diễn Heisenberg. Ở đây điều ta cần lưu ý là trong biểu diễn tương tác, các toán tử phụ thuộc vào thời gian cũng giống như sự phụ thuộc thời gian của các toán tử trong biểu diễn Heisenberg với toán tử Hamiltonien  $H_0$ , còn sự biến thiên của hàm sóng theo thời gian trong biểu diễn tương tác chỉ được chi phối bởi toán tử tương tác  $\hat{H}_I(t)$ . Mặt khác ta thấy biểu diễn tương tác có sự thuận tiện trong nhiều trường hợp, ví dụ các hệ thức giao hoán để cho các toán tử trường trùng với các hệ thức trong các trường tự do và có thể viết các hệ thức này cho tất cả các thời điểm. Đồng thời từ biểu diễn tương tác ta có thể dẫn đến cách phát biểu lý thuyết nhiễu loạn hiệp biến khi tổng quát hóa phương trình (II-379) thành phương trình hiệp biến (phương trình Tomonaga - Schrödinger)

$$i\hbar \frac{\delta\Psi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = H_I(x)\Psi(\sigma), \quad (\text{II-381})$$

trong đó  $H_I(x)$  là mật độ Hamiltonien,  $\sigma$  là siêu mặt loại không gian mà trên nó cho trước trạng thái của hệ.

Ta nhận thấy rằng ba biểu diễn đã trình bày ở trên có thể liên hệ với nhau bằng các phép biến đổi unita. Ví dụ việc chuyển từ biểu diễn Schrödinger sang biểu diễn Heisenberg nhờ phép biến đổi unita dạng

$$V(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}, \quad (\text{II-382})$$

còn toán tử unita chuyển biểu diễn Schrödinger sang biểu diễn tương tác có dạng:

$$V'(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0st} \quad (\text{II-383})$$

Tóm lại mối liên hệ giữa ba biểu diễn trên có thể được viết gọn

trong bảng sau đây:

	BIỂU DIỄN SCHRÖDINGER	BIỂU DIỄN TƯƠNG TÁC	BIỂU DIỄN HEISENBERG
Toán tử	$\vec{F}_s$	$\vec{F}_I(t)$ $= e^{\frac{1}{\hbar}\hat{H}_{os}t}\hat{F}_s e^{\frac{1}{\hbar}\hat{H}_{os}t}$	$\vec{F}_h(t)$ $e^{\frac{1}{\hbar}\hat{H}_s t}\hat{F}_s e^{\frac{1}{\hbar}\hat{H}_s t}$
Phương trình chuyển động cho toán tử	$\frac{\partial \hat{F}_s}{\partial t}$	$\frac{\partial \hat{F}_I(t)}{\partial t}$ $\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{OI}, \hat{F}_p(t)]_p$	$\frac{\partial \hat{F}_h(t)}{\partial t}$ $= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_h, \hat{F}_h(t)]_p$
Hàm trạng thái	$\Psi_s(t)$	$\Psi_I(t) =$ $= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{os}t} \Psi_s(t)$	$\Psi_h(t) =$ $= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_s t} \Psi_s(t)$
Phương trình chuyển động cho hàm trạng thái	$i\hbar \frac{\partial \Psi_s(t)}{\partial t} = H_s \Psi_s(t)$	$i\hbar \frac{\partial \Psi_I(t)}{\partial t}$ $= \hat{H}_I(t) \Psi_I(t)$	$\frac{\partial \Psi_h}{\partial t} = 0$
Nghiệm hình thức	$= e^{\frac{i}{\hbar}H_s(t-t_0)} \Psi_s(t_0)$	$\Psi_I(t) =$ $S(t, t_0) \Psi_I(t_0)$	$\Psi_h = \text{const}$

trong đó S là kí hiệu của toán tử ma trận tán xạ - ma trận được xác định bằng  $S(t, t_0) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right\}$ .

Quan sát bảng trên ta thấy tại thời điểm  $t_0$  (thời điểm ban đầu) các vectơ trạng thái cũng như các toán tử trùng nhau trong cả hai biểu diễn Schrödinger và Heisenberg, nhưng trong các thời điểm tiếp theo xảy ra hai tình huống khác nhau. Tuy hai biểu diễn Schrödinger và Heisenberg hoàn toàn tương tự nhau, nhưng biểu diễn Schrödinger thực tế thường được dùng hơn, vì nó rất tiện lợi cho các bài toán tính toán cụ thể; còn trong biểu diễn Heisenberg thể hiện rõ sự tương tự khăng khít về mặt hình thức giữa lý thuyết cổ điển và lý thuyết lượng tử.

Cuối cùng ta có thể hình dung một cách cụ thể bức tranh tiến hóa của hệ vi hạt theo thời gian tương ứng với phép quay của vectơ trạng thái (biểu diễn Schrödinger) trong không gian Hilbert hay của hệ vectơ cơ sở (biểu diễn Heisenberg) trong không gian Hilbert đối với vectơ trạng thái im ững yên.

## §4.2. LƯỢNG TỬ HÓA TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

Bây giờ ta tiến hành lượng tử hóa các trường cụ thể. Để đơn giản trước tiên ta tiến hành lượng tử hóa trường vô hướng theo hình thức luận hiệp biến.

### 1. Lượng tử hóa trường thực vô hướng

Ta biết rằng trong trường thực vô hướng hàm trường  $\varphi(x)$  thỏa mãn phương trình Klein - Gordon (II-113). Nghiệm tổng quát của phương trình này theo công thức (II-125) có thể biểu diễn dưới dạng tích phân Fourier:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{q}}{\sqrt{2q_0}} \left[ a(\vec{q})e^{iqx} + a(-\vec{q})e^{-iqx} \right], \quad (\text{II-384})$$

trong đó do điều kiện thực của hàm trường ta có:

$$a(-\vec{q}) = a^*(\vec{q}) \quad (\text{II-385})$$

Theo lý thuyết cổ điển vì trường  $\varphi(x)$  là thực, nên các đại lượng  $a(q)$  và  $a(-q)$  là liên hợp phức với nhau. Để thực hiện lượng tử hóa ta chỉ cần thay các đại lượng  $a(q)$  và  $a(-q)$  bằng các toán tử ecmite và xây dựng các toán tử  $a(q)$  và  $a^+(q)$  là các toán tử liên hợp ecmite với nhau trong lý thuyết lượng tử. Khi đó bằng cách thay các đại lượng trong công thức (II-384) bằng các toán tử, tương tự ta có dạng:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{2q_0}} [a(q)e^{ipx} + a^+(q)e^{-ipx}] \quad (\text{II-386})$$

Việc lượng tử hóa ở đây giống như trong cơ học lượng tử bằng cách thay các đại lượng có trong công thức cổ điển bằng các toán tử. Vì vậy theo cách lượng tử hóa như thế từ công thức (II-133) ta xây dựng được toán tử năng lượng - toán tử Hamiltonien của hệ dưới dạng:

$$H = \frac{1}{2} \iint [a^+(q)a(q) + a(q)a^+(q)] q_0 d\bar{q} \quad (\text{II-387})$$

Từ đây ta thấy rõ ràng toán tử năng lượng là toán tử ecmite. Bây giờ ta tiếp tục giả thiết các toán tử trường thỏa mãn các hệ thức giao hoán:

$$[a(q), a(q')] = 0; \quad [a^+(q), a^+(q')] = 0;$$

$$[a(q), a^+(q')] = \delta(q - q'). \quad (\text{II-388})$$

Giờ đây vấn đề đặt ra là  $\varphi(x)$  là toán tử trong biểu diễn nào. Để có câu trả lời cho vấn đề đó trước hết ta sử dụng các hệ thức giao hoán (II-388) cùng với Hamilton (II-387) và biểu thức (II-386) dẫn đến phải chứng minh được công thức:

$$i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_0} = [\varphi(x), H] \quad (\text{II-389})$$

Mục đích đó ta có thể đạt được khi dùng hệ thức:

$$\begin{aligned} [A, BC] &= ABC - BCA = (AB - BA)C + B(AC - CA) = \\ &= [A, B]C + B[A, C], \end{aligned}$$

trong đó A, B, C là các toán tử bất kỳ, áp dụng kết quả này ta tính được giao hoán tử:

$$\begin{aligned} [a(q), H] &= \frac{1}{2} \iint \left\{ [a(q), a^+(q')] a(q') + a(q') [a(q), a^+(q')] \right\} q_0' dq - \\ &= q_0 a(q) \end{aligned} \quad (\text{II-390})$$

Bằng phương pháp liên hợp ecmite từ công thức (II-390) ta cũng nhận được giao hoán tử:

$$[a^+(q), H] = -q_0 a^+(q) \quad (\text{II-391})$$

Sau đó thay (II-390) và (II-391) vào giao hoán tử  $[\varphi(x), H]$  ta nhận được kết quả:

$$\begin{aligned} [\varphi(x), H] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{2q_0}} [e^{ipx} q_0 a(q) + e^{-ipx} (-q_0) a^+(q)] = \\ &= \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_0}, \end{aligned} \quad (\text{II-392})$$

trong đó  $\hbar = 1$ . Như vậy công thức (II-389) được chứng minh.

Công việc mà ta đã tiến hành là lượng tử hóa trường vô hướng (giả vô hướng) tự do. Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát khi mà có nhiều trường tương tác với nhau các công thức (II-390), (II-391) và (II-392) vẫn đúng, nếu H được hiểu như là Hamiltonien không tương tác. Khi đối ứng công thức (II-380) với công thức (II-392) ta đi đến kết luận rằng  $\varphi(x)$  là toán tử trong biểu diễn tương tác.

Để thấy rõ ý nghĩa vật lý của các toán tử tương ứng với các đại

lượng vật lý ta đi tìm các hàm riêng và trị riêng tương ứng với chúng. Mở đầu ta có thể tìm được các hàm riêng tương ứng với các trị riêng của toán tử Hamilton (II-387). Muốn vậy ta sử dụng các hệ thức giao hoán (II-388) trong việc xét phương trình:

$$H\Psi_E = E\Psi_E, \quad (\text{II-393})$$

trong đó  $\Psi_E$  là hàm riêng (véctơ riêng) ứng với trị riêng  $E$  của toán tử  $H$ .

Đầu tiên nhân trái hai vế của phương trình (II-393) với toán tử  $a^+(q)$  ta có:

$$a^+(q)H\Psi_E = E a^+(q)\Psi_E \quad (\text{II-394})$$

Từ hệ thức giao hoán tử

$$[a^+(q), H] = a^+(q)H - H a^+(q)$$

và sử dụng công thức (II-391) ta suy ra:

$$a^+(q)H = -q_0 a^+(q) + H a^+(q) \quad (\text{II-395})$$

Thay (II-395) vào phương trình (II-393) ta được phương trình dạng:

$$H a^+(q)\Psi_E = (E + q_0) a^+(q)\Psi_E \quad (\text{II-396})$$

Sau đó nhân trái hai vế của phương trình (II-393) với toán tử  $a(q)$ , đồng thời áp dụng kết quả (II-390) ta được phương trình:

$$H a(q)\Psi_E = (E - q_0) a(q)\Psi_E \quad (\text{II-397})$$

Nhìn vào các phương trình (II-393), (II-396) và (II-397) ta nhận thấy nếu  $\Psi_E$  là véctơ riêng của toán tử Hamilton  $H$  cùng với trị riêng  $E$  thì các véctơ trạng thái  $a^+(q)\Psi_E$  và  $a(q)\Psi_E$  cũng là các véctơ riêng tương ứng với các trị riêng  $(E + q_0)$  và  $(E - q_0)$  của toán tử  $H$ .

Từ (II-393) ta có thể chỉ ra rằng tất cả các trị riêng của Hamiltonien (II-387) đều dương. Thật vậy, khi nhân trái phương trình (II-393) với

$\Psi_E^+$  ta có:

$$\frac{\Psi_E^+ H \Psi_E}{(\Psi_E^+ \Psi_E)} = E \quad (\text{II-398})$$

Ta dễ dàng nhận thấy mẫu số của biểu thức (II-398) là dương, còn tử số cũng dương, vì theo (II-387) tử số có chứa:

$$(\Psi_E^+ a^+(q) a(q) \Psi_E) = (a(q) \Psi_E^+ a^+(q) \Psi_E) \geq 0 \quad (\text{II-399})$$

Như vậy có thể nhận thấy rằng phổ các giá trị riêng của Hamiltonian (II-387) là dương và có tồn tại một trị riêng cực tiểu (vì bị chặn dưới). Giá trị riêng cực tiểu này của Hamiltonian  $H$  được ký hiệu bằng  $E_0$ , còn vectơ trạng thái tương ứng với giá trị riêng  $E_0$  được ký hiệu bằng  $\Psi_0$ . Lúc đó ta có:

$$a(q) \Psi_0 = 0, \text{ với } \forall q \quad (\text{II-400})$$

Trong trường hợp ngược lại ta đã có vectơ trạng thái tương ứng với trị riêng ( $E_0 - q_0$ ) và như vậy  $E_0$  chưa phải là giá trị cực tiểu.

Nếu như  $E_0$  là giá trị cực tiểu thì từ (II-387) và (II-397) ta tìm được:

$$E_0 = \frac{1}{2(\Psi_0^+ \Psi_0)} \iint [\Psi_0^+ a^+(q) a(q) \Psi_0 + \Psi_0^+ a(q) a^+(q) \Psi_0] q_0 d\vec{q}$$

Theo (II-400) ta suy ra  $\Psi_0^+ a^+(q) a(q) \Psi_0 = 0$ , nên ta có :

$$E_0 = \frac{1}{2(\Psi_0^+ \Psi_0)} \int \Psi_0^+ a(q) a^+(q) \Psi_0 \delta(\vec{q}' - \vec{q}) q_0 d\vec{q} d\vec{q}' \quad (\text{II-401})$$

$$\begin{aligned} \text{Thay } a(q) a^+(q') &= [a(q), a^+(q')] + a^+(q') a(q) = \\ &= \delta(\vec{q} - \vec{q}') + a^+(q') a(q) \end{aligned}$$



và sử dụng (II-400) vào (II-401) ta nhận được:

$$E_0 = \frac{1}{2} \int \delta(\bar{q}' - \bar{q}) \delta(\bar{q} - \bar{q}') q_0 d\bar{q} d\bar{q}' \quad (\text{II-402})$$

Vì tích phân (II-402) là phân kỳ, nên giá trị  $E_0$  mà ta nhận được là không có ý nghĩa. Bởi rằng khi đó giá trị riêng cực tiểu của Hamiltonien bằng vô tận. Kết cục không mong đợi này xuất phát từ phương pháp lựa chọn Hamiltonien của lý thuyết lượng tử. Theo lý thuyết lượng tử Hamiltonien có thể nhận được từ Hamiltonien cổ điển bằng cách chuyển các đại lượng cổ điển  $a(q)$  và  $a^+(q)$  bằng các toán tử  $a(q)$  và  $a^+(q)$ . Qua tính toán ở trên rõ ràng phương pháp này không đơn trị.

Giờ đây vấn đề khác lại đặt ra là làm thế nào tiến hành được phép chuyển từ lý thuyết cổ điển sang lý thuyết lượng tử để đi đến định nghĩa về phép chuyển như thế trong lý thuyết lượng tử ta dựa vào khái niệm tích chuẩn các toán tử hay gọi tắt là *N-tích* các toán tử.

Theo định nghĩa *N-tích* của các toán tử trường là kết quả thu được từ tích thông thường của các toán tử này bằng cách chuyển tất cả các toán tử  $a(q)$  về bên phải các toán tử  $a^+(q)$ . Ví dụ:

$$N[a(q)a^+(q)] = a^+(q)a(q) \quad (\text{II-403})$$

$$N[a^+(q)a(q)] = a^+(q)a(q)$$

Như vậy *N-tích* bằng cách tác dụng lên tích các toán tử đã sắp xếp lại chúng theo thứ tự chuẩn. Vì vậy việc sử dụng *N-tích* rất tiện lợi khi tính toán các phần tử ma trận sau này.

Bây giờ ta sử dụng định nghĩa *N-tích* trong việc chọn Hamiltonien của lý thuyết trường lượng tử. Theo (II-401) ta nhận thấy số hạng  $a(q)a^+(q)$  có liên quan đến giá trị cực tiểu bằng vô tận của Hamiltonien. Để có kết quả không vô nghĩa ta giả thiết rằng Hamiltonien lượng tử nhận được từ Hamiltonien cổ điển ngoài việc chuyển các đại lượng  $a(q)$  và  $a^+(q)$  bằng các toán tử  $a(q)$  và  $a^+(q)$  còn

phải được biểu diễn qua  $N$ -tích. Dựa vào (II-387) ta thu được kết quả:

$$H = \int a^+(q)a(q)q_0 d\vec{q} \quad (\text{II-404})$$

Kết hợp (II-400) với (II-404) ta nhận được:

$$H\Psi_0 = 0 \quad (\text{II-405})$$

Điều ta cảm nhận được ngay từ (II-405) là giá trị riêng cực tiểu của Hamiltonien (II-404) bằng 0.

Từ kết quả trên ta giả thiết rằng: các toán tử tương ứng với tất cả các đại lượng vật lý khác cũng có thể nhận được từ các đại lượng cổ điển tương ứng bằng cách thay các hàm số bằng các toán tử nhưng được sắp xếp lại trong thứ tự chuẩn. Theo giả thiết này từ công thức (II-135) ta nhận được biểu thức đối với toán tử xung lượng của trường:

$$P_k = \int a^+(q)a(q)q_k d\vec{q} \quad (\text{II-406})$$

Bằng cách tương tự như (II-405) ta có:

$$P_k\Psi_0 = 0 \quad (\text{II-407})$$

Như vậy từ (II-405) và (II-407) ta thấy vectơ  $\Psi_0$  mô tả trạng thái ứng với năng lượng và xung lượng đều bằng 0. Trong vật lý trường lượng tử trạng thái năng lượng thấp nhất được gọi đơn giản là trạng thái chân không (trạng thái mà trong đó không có hạt thật - chỉ tồn tại các hạt ảo). Tất nhiên trạng thái chân không vật lý ở đây hoàn toàn khác với chân không toán học (chân không toán học là trạng thái không có vật chất). Chính vì vậy trong lý thuyết trường lượng tử chân không vật lý được tổng quát hóa như sau: chân không vật lý tương ứng với trạng thái năng lượng thấp nhất của trường lượng tử và là một khái niệm cơ bản đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết trường lượng tử. Với khái niệm chân không vật lý như vậy điện tích và tích barion, xung lượng, mômen động lượng và các số lượng tử khác của chân không vật lý đều bằng 0.

Trên cơ sở các hệ thức giao hoán cùng với toán tử xung lượng (II-406) và sử dụng kết quả (II-391) ta có:

$$[\vec{P}, a^+(q)] = \int a^+(q') [a(q') a^+(q)] \vec{q}' d\vec{q}' - q a^+(q) \quad (\text{II-408})$$

Từ đây ta có thể chỉ ra rằng véctor  $a^+(q_1)\Psi_0$  không chỉ là các véctor riêng của Hamiltonien (II-404) ứng với trị riêng mô thỏa mãn phương trình (II-396), mà còn là véctor riêng của toán tử xung lượng  $\vec{P}$ . Theo (II-396) khi đặt  $\Psi_E = \Psi_0$  ta nhận được:

$$H a^+(q_1)\Psi_0 = q_{10} a^+(q_1)\Psi_0 \quad (\text{II-409})$$

Sử dụng hệ thức giao hoán tử giữa toán tử xung lượng  $\vec{P}$  và  $a^+(q_1)$ , sau đó thay (II-407) và (II-408) vào ta có:

$$\vec{P} a^+(q_1)\Psi_0 = [\vec{P}, a^+(q_1)]\Psi_0 + a^+(q_1)\vec{P}\Psi_0 = \vec{q}_1 a^+(q_1)\Psi_0$$

$$(\text{II-410})$$

Rõ ràng theo (II-409) và (II-410) véctor  $a^+(q_1)\Psi_0$  vừa là véctor riêng của Hamiltonien (II-404) vừa là véctor riêng của toán tử xung lượng  $\vec{P}$ . Như vậy véctor trạng thái  $a^+(q_1)\Psi_0$  mô tả trạng thái hạt (*lượng tử của trường*) không có spin cùng với năng lượng qui xung lượng  $q_{10}$  và khối lượng  $\varkappa = \sqrt{q_{10}^2 - q_1^2}$ . Nếu tác dụng toán tử  $a^+(q_2)$  lên véctor trạng thái  $a^+(q_1)\Psi_0$  ta nhận được véctor riêng mới  $a^+(q_2)a^+(q_1)\Psi_0$  của Hamiltonien (II-404) cùng với trị riêng  $(q_{10} + q_{20})$ ; còn khi tác dụng toán tử xung lượng  $\vec{P}$  lên véctor riêng  $a^+(q_2)a^+(q_1)\Psi_0$  ta được:

$$\vec{P} a^+(q_2)a^+(q_1)\Psi_0 = [\vec{P}, a^+(q_2)a^+(q_1)]\Psi_0 + a^+(q_2)\vec{P} a^+(q_1)\Psi_0 =$$

$$= (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) a^+(q_2)a^+(q_1)\Psi_0 \quad (\text{II-411})$$

Từ (II-411) ta thấy véctor riêng mới  $a^+(q_2)a^+(q_1)\Psi_0$  cũng là véctor riêng của toán tử xung lượng  $\vec{P}$  cùng với trị riêng  $\vec{q}_1 + \vec{q}_2$ . Như vậy ở

đây véctơ trạng thái  $a^+(q_2)a^+(q_1)\Psi_0$  mô tả *hai hạt* không tương tác với nhau ứng với các xung lượng bốn chiều  $q_1$  và  $q_2$  và cùng một khối lượng  $\alpha$ . Nếu tiến hành tác dụng toán tử  $a^+(q_3)$  lên véctơ trạng thái  $a^+(q_2)a^+(q_1)\Psi_0$  thì ta nhận được véctơ trạng thái mới mô tả *ba hạt* không tương tác ứng với các xung lượng  $q_1, q_2$  và  $q_3, \dots$ . Một cách tổng quát, khi tác dụng các toán tử  $a^+(q)$  lên véctơ chân không  $\Psi_0$  ta sẽ nhận được hệ các véctơ riêng của Hamiltonien mô tả hệ các hạt không tương tác ứng cùng khối lượng  $\alpha$ , spin không và với các giá trị xung lượng xác định.

Với quy luật tác dụng như trên ta gọi :

Các toán tử  $a^+(q)$  là các toán tử sinh hạt. Toán tử  $a^+(q)$  làm tăng số hạt trong trạng thái đang xét lên một đơn vị.

Các toán tử  $a(q)$  được gọi là các toán tử hủy hạt. Toán tử  $a(q)$  làm giảm số hạt đi một đơn vị cũng ở trạng thái đang xét đó. Toán tử  $a^+(q)$  là toán tử liên hợp với toán tử  $a(q)$ . Trong trường hợp tổng quát véctơ riêng của Hamiltonien (II-404) có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\Psi_{n(q_n)\dots n(q_1)} = \underbrace{a^+(q_n)\dots a^+(q_n)}_{n(q_n)} \dots \underbrace{a^+(q_1)\dots a^+(q_1)}_{n(q_1)} \Psi_0$$

(II-412)

Ở đây  $n(q_1)$  là số lượng toán tử  $a^+(q_1)$ ,  $n(q_2)$  là số lượng toán tử  $a^+(q_2), \dots$ ; véctơ (II-412) mô tả trạng thái lượng tử trong đó  $n(q_1), n(q_2), \dots$  là các hạt đồng nhất có các xung lượng tương ứng  $q_1, q_2, \dots$ . Các số  $n(q_1), n(q_2), \dots$  được gọi là các số lấp đầy trạng thái. Như vậy véctơ trạng thái (II-412) được xác định một cách đơn trị bởi các số lấp đầy. Bây giờ hàm sóng chứa biến số mới là các số lấp đầy mà không chứa các biến tọa độ và sớm nữa. Do véctơ trạng thái (II-412) chứa các biến số lấp đầy, nên nó tương ứng với các giá trị riêng năng lượng toàn phần và xung lượng toàn phần cũng được biểu diễn qua các số lấp đầy trong từng trạng thái. Nếu  $n(q_i)$  là số hạt có trong mỗi trạng thái lượng tử thì năng lượng và xung lượng toàn phần của trạng thái  $\Psi_{n(q_n)\dots n(q_1)}$  nào đó của trường vô hướng bằng tổng số năng lượng hoặc xung

lượng của các hạt chứa trong trạng thái này. Khi ấy năng lượng và xung lượng toàn phần có dạng :

$$E_{n(q_n)\dots n(q_1)} = \sum_{i=1}^n n(q_i)q_{i0} \quad (\text{II-413})$$

$$\vec{p}_{n(q_n)\dots n(q_1)} = \sum_{i=1}^n n(q_i)\vec{q}_i \quad (\text{II-414})$$

Qua lập luận đã trình bày ở trên ta rút ra các kết luận :

- Trường lượng tử gồm tập hợp các hạt - các lượng tử của trường ở những trạng thái nhất định. Mỗi một loại hạt tương ứng với một loại trường.

- Các kết quả xét được ở trên cho trường vô hướng đều đúng cho cả trường giả vô hướng.

## 2. Các hạt vô hướng và giả vô hướng

Như ta đã trình bày ở trên tất cả những kết luận trong phạm vi khảo sát không chỉ đúng cho trường vô hướng mà đúng cho cả trường giả vô hướng. Tuy vậy, giữa hai trường đó vẫn có sự khác nhau tùy thuộc vào các tính chất nội tại của các hạt của trường và sự khác nhau vật lý giữa hai loại trường này chỉ thể hiện trong quá trình tương tác với các trường khác. Bây giờ ta xem xét sự khác nhau giữa các trường vô hướng và trường giả vô hướng, đồng thời xét cả các hạt tương ứng của chúng trước hết ta xét phép nghịch đảo các tọa độ không gian :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x} \quad (\text{II-415})$$

$$x_0 \rightarrow x'_0 = x_0$$

Mặt khác ta đã giả thiết : Có thể chuyển từ các biểu thức cổ điển đến các biểu thức lượng tử cho tất cả các đại lượng vật lý bằng cách thay các hàm số bằng các toán tử đặt dưới dạng huân (các toán tử hủy ở bên phải các toán tử sinh). Nội dung bà ta đề cập đến được thể hiện trong bảng sau đây :

LÝ THUYẾT CỔ ĐIỂN	LÝ THUYẾT LƯỢNG TỬ
Hàm trường $\varphi(x)$ mô tả trường cổ điển trong phép biến đổi (II-415)	Toán tử trường $\hat{\varphi}(x)$ mô tả trường lượng tử trong phép biến đổi (II-415)
$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x') = \eta_p \varphi(x)$ (II-416)	$\hat{\varphi}(x) \rightarrow \hat{\varphi}(x') = U_p \varphi(x) U_p^{-1} = \eta_p \varphi(x)$ (II-417)
Nếu tiến hành một phép nghịch đảo các tọa độ không gian một lần nữa ta sẽ được hệ ban đầu và nhận được $\eta_p^2 = I$ .	trong đó $U_p$ là toán tử unita ( $U_p^+ U_p = 1$ ) tác dụng lên các toán tử trường. Khi thay (II-386) vào (II-417) ta có :
$\eta_p = 1$ đối với trường vô hướng	$U_p a(q) U_p^{-1} = \eta_p a^+(q')$ (II-418)
$\eta_p = -1$ đối với trường giả vô hướng.	$U_p a^+(q) U_p^{-1} = \eta_p a^+(q')$
Đại lượng $\eta_p$ được gọi là tính chẵn lẻ nội tại.	$\vec{q}' = -\vec{q} ; q_0 = q_0$ (II-419)

Tiếp theo ta xét sự tác dụng của toán tử  $U_p$  lên véctơ trạng thái  $\Psi_q = a^+(q)\Psi_0$  mô tả hạt với xung lượng  $q$  :

$$U_p \Psi_q = U_p a^+(q) U_p^{-1} U_p \Psi_0 = \eta_p a^+(q') U_p \Psi_0.$$

Ta đòi hỏi toán tử  $U_p$  biến biểu diễn  $\Psi_0$  thành  $\Psi'_0$

$$U_p \Psi_q = \Psi'_0$$

Khi đó ta có.

$$U_p \Psi_q = \eta_p a^+(q') = \eta_p \Psi_{q'} \quad (\text{II-420})$$

Qua đây ta thấy nếu tác dụng toán tử unita  $U_p$  lên véctơ trạng thái mô tả hạt với xung lượng bốn chiều  $q$  thì ta nhận được véctơ trạng thái của chính hạt đó với xung lượng bốn chiều  $q'$  kèm theo thừa số chẵn lẻ nội tại. Trong trường hợp :

**$\eta_p = 1$  thì hạt được coi là hạt vô hướng,**

**$\eta_p = -1$  thì hạt được coi là hạt giả vô hướng.**

Như vậy đại lượng  $\eta_p$  đặc trưng cho các tính chất nội tại của các

hạt và được xác định bằng thực nghiệm . Sử dụng (II-412) và (II-416) tổng quát ta nhận được :

$$U_P \Psi_{n(q_n) \dots n(q_1)} = (\eta_P)^{n(q_1) + \dots + n(q_n)} \Psi_{n(q_n) \dots n(q_1)} \quad (\text{II-421})$$

trong đó  $\vec{q}_i = \vec{q}_i$ ;  $q_{i0} = q_{i0}$

### 3. Không gian Hilbert suy rộng và hình thức luận của số lấp đầy

Trong khuôn khổ của cơ học lượng tử ta đã đưa vào khái niệm trạng thái của hạt hay hệ. Mỗi trạng thái như vậy được đối ứng với một vectơ trong không gian Hilbert. Theo hình thức luận này các biến động lực được đối ứng với các toán tử tác dụng lên các vectơ của không gian Hilbert và các vectơ này là hàm số của các tọa độ không gian, thời gian cũng như của các tọa độ nội tại. Ở phần trên ta đã biết vectơ trạng thái  $\Psi_{n(q_n) \dots n(q_1)}$  của trường hoàn toàn được xác định bởi các số lấp đầy  $n(q_i)$ ; trong đó ký hiệu  $n(q_i)$  biểu thị  $n(q_i)$  hạt đồng nhất trong trạng thái mà một hạt có xung lượng đi với hàm sóng trạng thái mô tả hạt là hàm riêng của toán tử năng lượng, xung lượng. Để phù hợp với sự có mặt của biến số mới đó, ở đây ta chọn hệ các vectơ  $\Psi_{n(q_n) \dots n(q_1)}$  làm cơ sở của không gian Hilbert suy rộng. Để làm đơn giản hóa cách viết và tiện lợi trong chứng minh toán học ta có thể biểu diễn các vectơ cơ sở này theo ký hiệu sau đây :

TỔNG SỐ HẠT N	VÉCTƠ $\Psi_{n(q_1) \dots n(q_n)}$	KÝ HIỆU $ n(q_1) \dots n(q_i) \dots k(q_n)\rangle$	MÔ TẢ TRẠNG THÁI
0	$\psi_0$	$ 000\dots\rangle$	chân không
1	$\psi_1, \psi_2, \psi_3; \dots$	$ 1000\dots\rangle;  0100\dots\rangle$ $ 0010\dots\rangle; \dots$	một hạt
2	$\psi_{12}; \psi_{13};$	$ 1100\dots\rangle;  1010\dots\rangle;$	hai hạt

...	$\psi_{23}; \dots$	$ 0110\dots\rangle; \dots$	...
...	...	...	...

Bất kỳ véctor nào trong không gian Hilbert suy rộng cũng có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các véctor cơ sở này. Tập hợp tất cả các véctor  $|n(q_1)\dots n(q_i)\dots k(q_n)\rangle$  tạo thành hệ trực giao đầy đủ trong không gian Hilbert suy rộng, mà trong đó số hạt là biến số. Khi đó ta gọi tập hợp các hàm trường tự là cơ sở của các số lấp đầy, còn hình thức luận tương ứng được gọi là biểu diễn các số lấp đầy. Như vậy trong biểu diễn các số lấp đầy hàm sóng (véctor trạng thái)  $\psi_{n(q_1)\dots n(q_n)}$  chứa các biến số mới là các số lấp đầy. Khi tác dụng các toán tử sinh và toán tử -hủy hạt vào véctor trạng thái và dựa vào các tính chất của các toán tử này ta suy ra :

$$a^+(q)a(q)\Psi_{n(q_1)\dots n(q_i)\dots} = N(q)\Psi_{n(q_1)\dots n(q_i)\dots} \quad (\text{II-422})$$

trong đó  $N(q)$  là số hạt có trong trạng thái ta xét. Từ (II-422) ta thấy toán tử  $a^+(q)a(q)$  có ý nghĩa như là toán tử số hạt có trong trạng thái khảo sát và được gọi là toán tử số hạt có trong trạng thái đó. Như vậy, theo định nghĩa toán tử số hạt là :

$$N(q) = a^+(q)a(q) \quad (\text{II-423})$$

(còn toán tử tổng số hạt của hệ  $N = \sum_i N(q_i)$ ).

Các trị riêng của toán tử số hạt này là nguyên dương và trong biểu diễn mới ta có thể viết :

$$N(q_i)|n(q_1)\dots n(q_i)\dots\rangle = n(q_i)|n(q_1)\dots n(q_i)\dots\rangle \quad (\text{II-424})$$

trong đó  $n(q_i) = 0, 1, 2, \dots$ . Kết quả này có thể được khẳng định từ việc tìm trị riêng của Hamiltonien đã trình bày ở phần trên. Các toán tử năng lượng và xung lượng đều có thể biểu diễn qua toán tử số hạt. Điều này giúp ta diễn đạt các phương trình lượng tử thuận tiện và đơn giản hơn.



#### 4. Trường tương đương với dao động tử điều hòa

Trong quá trình lượng tử hóa trường thực vô hướng vẫn đề cũng cần bàn đến là trường đó tương đương với hệ các hạt - các lượng tử nào của trường. Để có lời đáp ta sử dụng phương pháp luận hiệp biến tìm mối liên hệ với sự lượng tử chính tắc. Bằng cách áp dụng công thức chuyển phép lấy tích phân thành phép lấy tổng (II-129) cho Hamiltonien (II-404) ta có :

$$H = \sum_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^{\dagger} a_{\vec{q}} q_{o\vec{q}} \quad (\text{II-425})$$

Ta có thể biểu diễn Hamiltonien này theo các biến số mới

$$q_{\vec{q}} = \frac{i}{\sqrt{2q_{o\vec{q}}}} (a_{\vec{q}} - a_{\vec{q}}^{\dagger})$$

$$p_{\vec{q}} = \sqrt{\frac{q_{o\vec{q}}}{2}} (a_{\vec{q}} + a_{\vec{q}}^{\dagger}) \quad (\text{II-426})$$

Khi đó Hamiltonien có dạng :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}} (P_{\vec{q}}^2 + q_{o\vec{q}}^2 q_{\vec{q}}^2) \quad (\text{II-427})$$

Ta thấy Hamiltonien (II-427) có dạng như biểu thức (II-356) (trong đó  $P_{\vec{q}} = P_n$ ;  $q_{\vec{q}} = q_n$ ;  $q_{o\vec{q}} = \omega_n$ ). Đến đây ta có thể kết luận rằng trường đang xét giống như một hệ cơ học, mà nó tương đương với tập hợp các dao động tử điều hòa tuyến tính độc lập của tần số  $q_{o\vec{q}}$  cùng với khối lượng bằng đơn vị, với các tọa độ  $q_{\vec{q}}$  và các xung lượng  $PA$ . Như vậy ta có thể coi trường như một hệ vô số bậc tự do được đặc trưng bởi các tọa độ suy rộng  $q$  và các xung lượng suy rộng  $PA$  mà khi áp dụng phương pháp lượng tử hóa chính tắc vào đây ta có trường

lượng tử tương ứng.

### 5. Lượng tử hóa trường phức vô hướng

Việc thực hiện lượng tử hóa trường phức vô hướng được tiến hành theo các bước như đã lượng tử hóa trường thực vô hướng. Song cần lưu ý rằng nếu trường vô hướng  $\varphi(x)$  là nghiệm thỏa mãn phương trình Klein - Gordon và không phải là trường thực thì các hàm  $a(q)$  và  $a(-q)$  trong các công thức (II-396), (II-397), (II-409) và (II-410) là độc lập với nhau. Trong trường hợp đó dựa vào công thức (II-125) trường phức vô hướng có thể được mô tả bằng hai hàm phức của đối số  $q$ , đó là :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{2q_0}} \left[ a(q)e^{iqx} + b^*(q)e^{-iqx} \right] \quad (\text{II-428})$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{2q_0}} \left[ a^*(q)e^{-iqx} + b(q)e^{iqx} \right], \quad (\text{II-429})$$

trong đó  $a(-q) = b^*(q)$ . Để thực hiện bước lượng tử hóa tiếp theo ta chuyển các đại lượng  $a(q)$ ,  $a^*(q)$ , và  $b(q)$ ,  $b^*(q)$  thành các toán tử, còn phép liên hợp phức của các hàm số được thay bằng phép liên hợp ecmite của các toán tử. Khi đó ta có :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{2q_0}} \left[ a(q)e^{iqx} + b^+(q)e^{-iqx} \right] \quad (\text{II-430})$$

và

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{2q_0}} \left[ b(q)e^{iqx} + a^+e^{-iqx} \right], \quad (\text{II-431})$$

Đến đây tương tự như trường thực vô hướng ta giả thiết : các toán tử  $a(q)$ ,  $a^+(q)$  và  $b(q)$ ,  $b^+(q)$  thỏa mãn các hệ thức giao hoán :

$$[a(q), a^+(q')] = \delta(\bar{q} - \bar{q}') \quad (\text{II-432})$$

$$[b(q), b^+(q')] = \delta(\bar{q} - \bar{q}')$$

còn tất cả các hệ thức giao hoán khác của hai toán tử  $a(q)$  hay  $a^+(q)$ ;  $b(q)$  hay  $b^+(q)$ ; cũng như các hệ thức giao hoán hỗn hợp của một trong các toán tử  $a(q)$  hay  $a^+(q)$  cùng với toán tử  $b(q)$  hay  $b^+(q)$  đều bằng 0.

Từ các lập luận trên khi thay các biểu thức vectơ bốn chiều năng xung lượng (II-160) và biểu thức điện tích (II-161) của trường phức vô hướng bằng các biểu thức toán tử và viết chúng dưới dạng chuẩn thì ta nhận được các biểu thức toán tử năng lượng, toán tử xung lượng và toán tử điện tích của trường phức vô hướng được lượng tử hóa :

$$H = \int [a^+(q)a(q) + b^+(q)b(q)] q_0 d\bar{q}, \quad (\text{II-433})$$

$$P_k = \int [a^+(q)a(q) + b^+(q)b(q)] q_k d\bar{q}. \quad (\text{II-434})$$

$$Q = e \int [a^+(q)a(q) - b^+(q)b(q)] d\bar{q}. \quad (\text{II-435})$$

Điều dễ nhận biết ở đây là các toán tử năng lượng, xung lượng và điện tích đều là các toán tử ecmite, tất cả các trị riêng của Hamiltonien (II-433) là dương. Nếu vectơ riêng của Hamiltonien (II-433) tương ứng với các trị riêng nhỏ nhất và được ký hiệu là  $\psi_0$  thì ta có :

$$a(q)\psi_0 = 0; \quad b(q)\psi_0 = 0 \quad (\text{II-436})$$

$$\text{và} \quad H\psi_0 = 0; \quad \bar{P}\psi_0 = 0; \quad Q\psi_0 = 0 \quad (\text{II-437})$$

Rõ ràng vectơ  $\psi_0$  mô tả trạng thái chân không cùng với năng lượng, xung lượng và điện tích đều bằng 0.

Bây giờ ta sử dụng các hệ thức giao hoán (II-432) và biểu thức Hamiltonien (II-433) để tính các giao hoán tử cần thiết :

Dựa vào kết quả (II-390) ta có các hệ thức :

$$[a(q), H] = q_0 a(q) \quad (\text{II-438})$$

$$[b(q), H] = q_0 b(q)$$

và bằng cách tương tự ta có :

$$[a(q), \bar{P}] = \bar{q} a(q) \quad (\text{II-439})$$

$$[b(q), \bar{P}] = \bar{q} b(q)$$

Vì  $H$  và  $\bar{P}$  là các toán tử ecmite, nên ta suy được các hệ thức (xem (II-391)) :

$$[a^+(q), H] = -q_0 a^+(q) \quad (\text{II-440})$$

$$[b^+(q), H] = -q_0 b^+(q)$$

và

$$[\bar{P}, a^+(q)] = \bar{q} a^+(q) \quad (\text{II-441})$$

$$[\bar{P}, b^+(q)] = \bar{q} b^+(q)$$

Bước chuyển tiếp là ta xây dựng hệ các vectơ riêng của Hamiltonien (II-433). Xét vectơ trạng thái  $a^+(q)\psi_0$ , sử dụng (II-436), (II-437), (II-440) và (II-441) ta có :

$$H a^+(q)\psi_0 = \{[H, a^+(q)] + a^+(q)H\} \psi_0 = q_0 a^+(q)\psi_0 \quad (\text{II-442})$$

và

$$\bar{P} a^+(q)\psi_0 = \{[\bar{P}, a^+(q)] + a^+(q)\bar{P}\} \psi_0 = \bar{q} a^+(q)\psi_0 \quad (\text{II-443})$$

Như vậy vectơ  $a^+(q)\psi_0$  mô tả trạng thái hạt với xung lượng bốn chiều  $q$  và khối lượng  $\varkappa = \sqrt{q_0^2 - \vec{q}^2}$ . Xét vectơ trạng thái  $b^+(q)\varkappa_0$  và

tương tự như (II-442), (II-443) ta nhận được :

$$Hb^+(q)\Psi_0 = q_0 b^+(q)\Psi_0 \quad (\text{II-444})$$

$$\bar{P}b^+(q)\Psi_0 = \bar{q}b^+(q)\Psi_0$$

Ở đây vectơ trạng thái  $b^+(q)\Psi_0$  mô tả hạt với xung lượng bốn chiều  $q$  và khối lượng  $\varkappa = \sqrt{q_0^2 - \vec{q}^2}$ . Từ việc xét trên ta thấy toán tử  $a^+(q)$  và  $b^+(q)$  đều là các toán tử sinh hạt cùng khối lượng  $\varkappa$ . Tuy nhiên giữa các hạt này vẫn có sự khác nhau. Để chỉ ra sự khác nhau trước hết ta xét các giao hoán tử giữa toán tử điện tích  $Q$  và các toán tử  $a^+(q)$ ,  $b^+(q)$  và sử dụng (II-432), (II-435) ta có :

$$[Q, a^+(q)] = e \int a^+(q') [a(q'), a^+(q)] d\vec{q} = ea^+(q) \quad (\text{II-445})$$

và

$$[Q, b^+(q)] = -e \int b^+(q') [b(q'), b^+(q)] d\vec{q} = -eb^+(q) \quad (\text{II-446})$$

Sau đó cho toán tử  $Q$  tác dụng lên các vectơ  $a^+(q)\Psi_0$  và  $b^+(q)\Psi_0$  ta được :

$$Qa^+(q)\Psi_0 = \{[Q, a^+(q)] + a^+(q)Q\} \Psi_0 = ea^+(q)\Psi_0 \quad (\text{II-447})$$

$$Qb^+(q)\Psi_0 = \{[Q, b^+(q)] + b^+(q)Q\} \Psi_0 = -eb^+(q)\Psi_0 \quad (\text{II-448})$$

Nhìn vào các biểu thức (II-447) và (II-448) ta thấy rằng : vectơ trạng thái  $a^+(q)\Psi_0$  mô tả hạt tích điện với điện tích  $e$ , vectơ trạng thái  $b^+(q)\Psi_0$  mô tả hạt tích điện với điện tích  $-e$ .

Như vậy có tồn tại các hạt - các lượng tử của trường mà chúng có cùng một khối lượng  $\varkappa$ , song với các hạt có điện tích  $e$ , còn có cả các hạt với điện tích  $-e$  (các phản hạt). Đây là kết luận tổng quát quan trọng mà lý thuyết trường lượng tử đưa ra và sự tồn tại hạt cũng như

phản hạt đã được thực nghiệm minh chứng.

Tiếp theo ta xét vectơ trạng thái  $b^+(q)a^+\psi_0$  và tác dụng các toán tử  $P, Q$  lên vectơ đó ta có :

$$\begin{aligned} P b^+(q') a^+(q) \Psi_0^* &= \{ [P, b^+(q')] + b^+(q') P \} a^+(q) \Psi_0^* = \\ &= (q' + q) b^+(q') a^+(q) \Psi_0^* \end{aligned} \quad (\text{II-449})$$

và

$$Q b^+(q') a^+(q) \Psi_0^* = [(-e) + e] b^+(q') a^+(q) \Psi_0^* \quad (\text{II-450})$$

Như vậy vectơ  $b^+(q') a^+(q) \psi_0$  mô tả trạng thái hạt cùng với xung lượng bốn chiều  $q$  và phản hạt với xung lượng bốn chiều  $q'$ . Một cách tổng quát nếu ta tác dụng các toán tử sinh  $a^+$  và  $b^+$  lên vectơ trạng thái chân không  $\psi_0$  thì ta sẽ nhận được hệ các vectơ riêng của Hamiltonien (II-433) mô tả các hạt và phản hạt với xung lượng tương ứng xác định:

$$\Psi_{\bar{n}(q'_m) \dots \bar{n}(q'_1) n(q_n) \dots n(q_1)}^- = \underbrace{b^+(q'_m) \dots b^+(q'_1)}_{\bar{n}(q'_m)} \underbrace{a^+(q_1) \dots a^+(q_1)}_{n(q_1)} \Psi_0 \quad (\text{II-451})$$

Ở đây các số lấp đầy các hạt  $n(q_1), \dots, n(q_n)$  và các số lấp đầy các phản hạt  $\bar{n}(q'_1), \dots, \bar{n}(q'_m)$  hoàn toàn xác định trạng thái của hệ. Như vậy trạng thái của hệ các hạt và phản hạt được mô tả bởi vectơ (II-451) và nó tương ứng với các giá trị sau đây của vectơ năng xung lượng và điện tích :

$$P_\mu = \sum_{i=1}^n (q_i)_\mu n(q_i) + \sum_{k=1}^m (q'_k)_\mu \bar{n}(q'_k) \quad (\text{II-452})$$

$$Q = e \sum_{i=1}^n n(q_i) + (-e) \sum_{k=1}^m \bar{n}(q'_k) \quad (\text{II-453})$$

### §4.3. LƯỢNG TỬ HÓA TRƯỜNG PHỨC SPINO

Trong hương ba ta đã khảo sát các trường vô hướng mô tả các hạt có spin nguyên (bằng 0 và 1) và trường phức spinơ mô tả các hạt có spin bán nguyên (bằng 1/2). Ở phần trên ta cũng đã xét sự lượng tử hóa trường vô hướng, giờ đây ta muốn lượng tử hóa trường phức spinơ, nói cụ thể là lượng tử hóa trường phức Dirac. Để thuận lợi trong việc chọn cách lượng tử hóa chúng ta đưa ra sự khác nhau giữa trường spinơ và trường vô hướng qua các kết quả nghiên cứu trường cổ điển :

- Đối với trường vô hướng : Hàm trường biến đổi theo biểu diễn tenxơ đơn trị của nhóm Lorentz và không thể đưa ra được công thức về mật độ điện tích dương xác định của trường.

- Đối với trường spinơ : Hàm trường biến đổi theo biểu diễn lưỡng trị của nhóm Lorentz và không thể đưa ra được công thức về mật độ năng lượng dương xác định của trường.

Với trường vô hướng ta đã lượng tử hóa theo cách giao hoán tử theo cách lượng tử hóa Bose - Einstein. Khác với cách lượng tử hóa đó, trường Dirac được lượng tử hóa theo cách phản giao hoán - theo cách lượng tử hóa Fermi - Dirac. Bây giờ ta xét cụ thể sự lượng tử hóa này.

#### 1. Lượng tử hóa trường Dirac

Trong chương ba khi xét các tính chất biến đổi của phương trình spinơ ta đã có kết luận : Nghiệm tổng quát của phương trình Dirac có thể biểu diễn dưới dạng (II-336), (II-337) khai triển theo các sóng phẳng :

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{1/2} [U^r(p)c_r(p)e^{ipx} + U^r(-p)c_r(-p)e^{-ipx}] d\vec{p}, \quad (\text{II-454})$$

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{1/2} [\bar{U}^r(-p)c_r^*(-p)e^{ipx} + \bar{U}^r(p)c_r^*(p)e^{-ipx}] d\vec{p}, \quad (\text{II-455})$$

Khi chuyển sang lượng tử hóa ta thay các hàm  $c_r(p)$ ,  $c_r(-p)$  và  $c_r^*(p)$ ,  $c_r^*(-p)$  bằng các toán tử tương ứng, thay phép liên hợp phức các hàm số bằng phép liên hợp cemite của các toán tử và đặt  $c_r(-p) = d_r^+(p)$ ;  $c_r^*(-p) = d_r(p)$ . Với cách như vậy ta thay các hàm trường  $\psi(x)$  và  $\bar{\psi}(x)$  bằng các toán tử tương ứng và kết quả ta có các toán tử trường :

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{1/2} [U^r(p)c_r(p)e^{ipx} + U^r(-p)d_r^+(p)e^{-ipx}] d\vec{p}, \quad (\text{II-456})$$

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( \frac{m}{p_0} \right)^{1/2} [\bar{U}^r(-p)d_r(p)e^{ipx} + \bar{U}^r(p)c_r^+(p)e^{-ipx}] d\vec{p}, \quad (\text{II-457})$$

Tiếp theo ta giả thiết các toán tử của trường phức Dirac thỏa mãn các hệ thức giao hoán.

$$[c_r(p), c_r^+(p')]_{+} = \delta_{rr} \cdot \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (\text{II-458})$$

$$[d_r(p), d_r^+(p')]_{+} = \delta_{rr} \cdot \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (\text{II-459})$$

và các hệ thức giao hoán khác giữa các toán tử  $c_r(p)$ ,  $c_r^+(p)$ ,  $d_r(p)$ ,



$d_r^+$  (p) với nhau đều bằng không. Tương tự như sự lượng tử hóa trường vô hướng, trước khi thực hiện phép chuyển từ lý thuyết cổ điển sang lý thuyết lượng tử ta đưa ra định nghĩa  $N$  - tích của các toán tử trường phức Dirac. Như ta đã biết đối với trường vô hướng (hay giả vô hướng) khi tác dụng toán tử  $N$  - tích lên tích hai toán tử trường thì chúng sẽ được xếp đặt theo thứ tự chuẩn (toán tử sinh ở bên trái toán tử hủy) ; còn khi tác dụng toán tử  $N$  - tích lên hai toán tử trường Dirac thì chúng được sắp xếp theo thứ tự chuẩn và nếu ta thực hiện phép hoán vị hai toán tử thì tích các toán tử này đổi dấu (được nhân với (-1)) và được viết dưới dạng chuẩn . Ví dụ :

$$N(c_r^+(p')c_r(p)) = c_r^+(p')c_r(p), \quad (\text{II-460})$$

$$N(d_r(p)d_r^+(p')) = -d_r^+(p')d_r(p),$$

Nếu từ các công thức (II-340), (II-341) và (II-342) ta thay các hàm số bằng các toán tử, còn liên hợp phức các đại lượng cổ điển được thay bằng phép liên hợp ecmite của các toán tử và viết chúng theo thứ tự chuẩn, thì kết quả tương ứng ta có toán tử Hamiltonien, toán tử xung lượng và điện tích của trường :

$$H = \int [c_r^+(p)c_r(p) + d_r^+(p)d_r(p)]p_0 d\vec{p}, \quad (\text{II-461})$$

$$P_k = \int [c_r^+(p)c_r(p) + d_r^+(p)d_r(p)]p_k d\vec{p}, \quad (\text{II-462})$$

$$Q = e \int [c_r^+(p)c_r(p) - d_r^+(p)d_r(p)]d\vec{p}, \quad (\text{II-463})$$

Từ (II-461) ta dễ dàng nhận thấy các giá trị riêng của Hamiltonien là dương. Cũng như việc lượng tử hóa trường phức vô hướng, ở đây ta giả sử  $\psi_0$  là véctor trạng thái tương ứng với giá trị riêng tối thiểu của năng lượng và như vậy ta có:

$$c_r(p)\psi_0 = 0,$$

$$dr(p)\psi_0 = 0,$$

Áp dụng kết quả (II-404) cho (II-461), (II-462) và (II-463) ta nhận được :

$$H\Psi_0 = 0, \bar{P}\Psi_0 = 0, Q\Psi_0 = 0.$$

Như vậy véctor  $\psi_0$  mô tả trạng thái chân không của hệ. Giống như việc tiến hành chứng minh hệ thức (II-389) trong sự lượng tử hóa trường vô hướng, ở đây ta dựa vào các hệ thức giao hoán cùng với Hamiltonien (II-461) cũng có thể chứng minh được toán tử trường  $\psi(x)$  và  $\bar{\psi}(x)$  thỏa mãn các phương trình chuyển động trong biểu diễn tương tác :

$$i \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_0} = [\Psi(x), H], \quad (\text{II-465})$$

$$i \frac{\partial \bar{\Psi}(x)}{\partial x_0} = [\bar{\Psi}(x), H], \quad (\text{II-466})$$

Đồng thời dựa vào (II-390) và (II-391) ta suy ra được các hệ thức :

$$[c_r(p), H] = p_0 c_r(p),$$

$$[d_r(p), H] = p_0 d_r(p),$$

(II-467)

$$[c_r^+(p), H] = -p_0 c_r^+(p)$$

$$[d_r^+(p), H] = -p_0 d_r^+(p)$$

Ngoài các hệ thức liên ta có thể tìm được các hệ thức giao hoán tử khác. Khi căn cứ vào các hệ thức giao hoán (II-458), (II-459) và kết luận về các hệ thức giao hoán còn lại khác giữa các toán tử  $c_r(p)$ ,

$c_r^+(p)$ ,  $d_r(p)$ ,  $d_r^+(p)$  với nhau đều bằng không ta tính được các giao hoán tử :

$$\begin{aligned}
 & [c_r^+(p), c_r^+(p')c_r^-(p')] = \\
 & = c_r^+(p)c_r^+(p')c_r^-(p') - c_r^+(p')c_r^-(p')c_r^+(p) = \\
 & = [c_r^+(p), c_r^+(p')]_+ c_r^-(p') - c_r^+(p')[c_r^-(p'), c_r^+(p)]_+ = \\
 & = -c_r^+(p')\delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (\text{II-468})
 \end{aligned}$$

và

$$[c_r^+(p), d_r^+(p')d_r^-(p')] = 0 \quad (\text{II-469})$$

Sử dụng kết quả (II-468), (II-469), cho (II-462) ta suy được hệ thức:

$$[c_r^+, \vec{P}] = -\vec{P}c_r^+(p) \quad (\text{II-470})$$

Tiến hành tương tự từ (II-462) và (II-463) ta có

$$[d_r^+(p), \bar{p}] = -\bar{p}d_r^+(p), \quad (\text{II-471})$$

$$[Q, c_r^+(p)] = ec_r^+(p), \quad (\text{II-472})$$

$$[Q, d_r^+(p)] = -ed_r^+(p). \quad (\text{II-473})$$

Việc tính các giao hoán tử từ (II-467) đến (II-473) giúp ta thuận lợi trong việc tìm hệ các hàm riêng của các toán tử năng - xung lượng và điện tích của trường.

## 2. Toán tử thành phần spin

Khi chuyển sang lượng tử hóa bằng cách thay các hàm  $c_r(p)$ ,  $c_r(-p)$  và  $c_r^*(p)$ ,  $c_r^*(-p)$  trong công thức (II-345) bằng các toán tử, còn phép liên hợp phức các đại lượng cổ điển thay bằng phép liên hợp ecmite của các toán tử rồi viết chúng dưới dạng *N - tích* thì ta nhận được biểu thức toán tử cho thành phần spin trên hướng của xung lượng :

$$\bar{S} \cdot \bar{n} = \frac{\Gamma}{2} \int [c_r^+(p)c_r(p) + d_r^+(p)d_r(p)] d\bar{p} \quad (\text{II-474})$$

Sau đó kết hợp (II-474) với các hệ thức giao hoán (II-458) và (II-459) ta suy được giao hoán tử :

$$\begin{aligned} [c_r(p), \bar{S} \cdot \bar{n}] &= \frac{\Gamma}{2} \int d\bar{p} [c_r(p), c_r^*(p')c_r(p')] = \\ &= \frac{\Gamma'}{2} \int d\bar{p} [c_r(p), c_r^*(p')]c_r(p') = \frac{\Gamma'}{2} \int d\bar{p} \delta_{rr'} \delta(\bar{p} - \bar{p}')c_r(p') = \\ &= \frac{\Gamma}{2} c_r(p). \end{aligned} \quad (\text{II-475})$$

Bằng cách tiến hành tương tự ta có :

$$[d_r(p), \vec{S} \cdot \vec{n}] = \frac{\hbar}{2} d_r(p) \quad (\text{II-476})$$

Từ công thức (II-475) và (II-476) bằng phương pháp liên hợp ecmita ta cũng nhận được :

$$[\vec{S} \cdot \vec{n}, c_r^+(p)] = \frac{\hbar}{2} c_r^+(p), \quad (\text{II-477})$$

$$[\vec{S} \cdot \vec{n}, d_r^+(p)] = -\frac{\hbar}{2} d_r^+(p) \quad (\text{II-478})$$

Các kết quả của các giao hoán tử (II-475), (II-476), (II-477), (II-478) được dùng để tìm hình chiếu của spin trên hướng xung lượng của các hạt spinơ.

### 3. Các véctơ riêng của Hamiltonien

Để tìm các véctơ riêng của Hamiltonien (II-461) ta tiến hành giống như trường hợp từ vô hướng bằng cách tác dụng các toán tử sinh  $c^+$  và  $d^+$  lên véctơ chân không  $\Psi_0$ . Hệ các véctơ riêng này mô tả các hạt và phản hạt trong các trạng thái cùng với các xung lượng xác định.

Trước hết ta xét ý nghĩa của các véctơ trạng thái  $c_r^+(p)\Psi_0$  và  $d_r^+\Psi_0$ . Theo tuần tự như trong trường hợp lượng tử hóa trường phức vô hướng nếu ta dựa vào các hệ thức từ (II-467) đến (II-473) ta có thể chứng minh các véctơ trạng thái  $c_r^+(p)\Psi_0$  và  $d_r^+\Psi_0$  không chỉ là các véctơ riêng của Hamiltonien (II-461) mà còn là các véctơ riêng của toán tử xung lượng (II-462) và toán tử điện tích (II-463). Đồng thời thực hiện các bước tương tự như việc dẫn đến các công thức từ (II 442) đến (II-448), ta sẽ nhận được :

$$Hc_r^+(p)\Psi_0 = p_0c_r^+(p)\Psi_0,$$

$$\bar{P}c_r^+(p)\Psi_0 = \bar{p}c_r^+(p)\Psi_0,$$

$$Qc_r^+(p)\Psi_0 = ec_r^+(p)\Psi_0,$$

$$Hd_r^+(p)\Psi_0 = p_0d_r^+(p)\Psi_0, \quad (\text{II-479})$$

$$\bar{P}d_r^+(p)\Psi_0 = \bar{p}d_r^+(p)\Psi_0,$$

$$Qd_r^+(p)\Psi_0 = -ed_r^+(p)\Psi_0.$$

Nhìn vào (II-479) ta thấy rõ rằng vectơ trạng thái  $c_r^+(p)\Psi_0$  mô tả hạt với xung lượng bốn chiều  $p$ , khối lượng  $m = \sqrt{p_0^2 - p^2}$  và điện tích  $e$ ; còn vectơ trạng thái  $d_r^+(p)\Psi_0$  mô tả phản hạt cùng với xung lượng bốn chiều  $p$ , cùng khối lượng  $m$  và điện tích trái dấu ( $-e$ ).

Khi sử dụng kết quả (II-464) cho (II-474) ta suy được :

$$\bar{S}\cdot\bar{n}\Psi_0 = 0$$

Tiếp theo sử dụng kết quả này và các giao hoán tử từ (II-475) đến (II-478) ta có :

$$\bar{S}\cdot\bar{n}c_r^+(p)\Psi_0 = \left( [\bar{S}\bar{n}, c_r^+(p)] + c_r^+(p)\bar{S}\bar{n} \right) = \frac{1}{2}rc_r^+(p)\Psi_0,$$

$$(\text{II-480})$$

$$\bar{S}\bar{n}d_r^+(p)\Psi_0 = \frac{1}{2}rd_r^+(p)\Psi_0.$$

Như vậy vectơ trạng thái  $c_r^+(p)\Psi_0$  mô tả hạt với điện tích  $e$ , khối lượng  $m$ , xung lượng bốn chiều  $P$  và hình chiếu sớm trên hướng của xung lượng bằng  $\frac{r}{2}$ ; còn vectơ trạng thái  $d_r^+\Psi_0$  mô tả phản hạt với điện tích  $-e$ , cùng khối lượng  $m$ , cùng xung lượng bốn chiều  $p$  và hình chiếu sớm trên hướng của xung 1 động bằng  $\frac{r}{2}$ .

Nếu tiếp tục xét ta có vectơ trạng thái  $c_{r_2}^+(p_2)c_{r_1}^+(p_1)\Psi_0$  là vectơ riêng của Hamiltonien (II-461), đồng thời cũng là vectơ riêng của các toán tử xung lượng (II-462) và điện tích (II-463) - Vectơ riêng này mô tả hai hạt với các xung lượng bốn chiều  $p_1$  và  $p_2$ ; còn vectơ trạng thái  $d_{r_2}^+(p_2)C_{r_1}^+(p_1)\Psi_0$  mô tả hạt với xung lượng bốn chiều  $p_1$  và phản hạt với xung lượng bốn chiều  $p_2$ .

Tóm lại bằng cách làm như trên nếu tác dụng các toán tử sinh  $c^+$  và  $d^+$  lên vectơ chân không  $\Psi_0$  ta nhận được các vectơ riêng của Hamiltonien (II-461).

#### 4. Sự lượng tử hóa theo Fermi - Dirac và nguyên lý Pauli

Như phần trên đã trình bày, dựa vào các phản giao hoán tử (II-458), (II-459) ta đã lượng tử hóa trường spinor Dirac - theo cách lượng tử hóa Fermi - Dirac. Trường spinor Dirac được lượng tử hóa gồm các hạt - các lượng tử của trường có spin bán nguyên - đó là các fermion, chúng tuân theo nguyên lý Pauli : Trong hệ các hạt đồng nhất với spin bán nguyên (ví dụ như electron) không thể tồn tại quá một hạt ở trong cùng một trạng thái (có cùng một tập hợp tất cả các số lượng tử). Hệ hạt được mô tả bởi các vectơ trạng thái - đó là các vectơ riêng của Hamiltonien (II-461). Một ví dụ minh họa là vectơ trạng thái (cách chỉ ra vectơ riêng đã được giới thiệu ở mục trên) :

$$d_{r_4}^+(p_4)c_{r_3}^+(p_3)c_{r_2}^+(p_2)c_{r_1}^+(p_1)\Psi_0 \quad (\text{II-481})$$

mô tả ba hạt với các xung lượng bốn chiều  $p_1, P_2, P_3$ , và một phản hạt với xung lượng  $p_4$ . Các toán tử sinh tác dụng lên vectơ chân không  $\Psi_0$  tạo thành các vectơ riêng của Hamiltonien (II-461) cũng phải thỏa mãn đòi hỏi của các hệ thức giao hoán và khi sử dụng các hệ thức giao hoán ta có :

$$\begin{aligned} d_{r_4}^+(p_4)c_{r_3}^+(p_3)c_{r_2}^+(p_2)c_{r_1}^+(p_1)\Psi_0 &= \\ &= -d_{r_4}^+(p_4)c_{r_1}^+(p_1)c_{r_2}^+(p_2)c_{r_3}^+(p_3)\Psi_0. \end{aligned}$$

Nhưng cần lưu ý rằng nếu xảy ra trường hợp  $p_1 = p_3$  và  $r_1 = r_3$  thì vectơ (II-481) bằng 0. Mặt khác điều ta quan tâm đến là kết luận về các hệ thức giao hoán đối với các toán tử spinơ phải được giả thiết phù hợp với nguyên lý Pauli. Có như vậy việc chọn các hệ thức giao hoán đối với các toán tử mới có ý nghĩa trong sự lượng tử hóa.

#### §4.4. LƯỢNG TỬ HÓA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Ta biết rằng các tính chất lượng tử của trường điện từ tự do (không có điện tích) có thể được phân tích nhờ những phương pháp của cơ học lượng tử. Trong cơ học lượng tử phương trình chuyển động của hệ các hạt có thể được viết dưới dạng giống phương trình Newton hay Hamilton, biểu diễn sự liên hệ giữa các tọa độ và xung lượng của hạt mà trong đó các tọa độ và xung lượng không phải là số mà là các toán tử thỏa mãn những hệ thức giao hoán nhất định.

Mặt khác trường điện từ cũng có thể xét như hệ động lực tổng quát. Các tọa độ suy rộng của nó có thể coi như các giá trị của các thể tại từng điểm của không gian. Vì số điểm đó là vô tận, nên trường điện từ là một hệ vô số bậc tự do. Nếu xét theo quan điểm động lực thì trường điện từ tương đương với một hệ vô số các dao động tử điều hòa liên kết với nhau. Mà trong cơ học lượng tử, bất kỳ tập hợp các dao động tử



điều hòa tuyến tính nào cũng có thể đưa đến tập hợp các dao động từ độc lập nhờ việc đưa vào các tọa độ chuẩn.

Vấn đề ở đây là ta phải lượng tử hóa trường điện từ như thế nào ? Ban đầu người ta cho rằng lượng tử hóa trường này là đơn giản, vì trường điện từ là trường cổ điển đo được duy nhất trong số các trường ta xét. Nhưng trong quá trình lượng tử hóa trường này lại gặp khó khăn lớn. Khó khăn đó vượt qua được nhờ đưa lý thuyết hiệp biến vào việc lượng tử hóa bằng cách sử dụng số biến lớn hơn số bậc tự do độc lập của thể bốn chiều  $A_\mu(x)$  (có bốn thành phần). Khi sử dụng tính chất này ta có thể tiến hành lượng tử hóa trường điện từ theo hai cách : cách lượng tử hóa chính tắc Fermi và cách lượng tử hóa hiệp biến Gupta và Bleuer. Sau đây ta sẽ trình bày các cách lượng tử hóa này.

### 1. Cách lượng tử hóa chính tắc

Phương pháp lượng tử hóa chính tắc được tiến hành theo cách chọn điều kiện Lorentz thích hợp sao cho ta có thể đòi hỏi thành phần thời gian của thể bốn chiều  $A_\mu = (\vec{A}, A_4) = (\vec{A}, iA_0)$  bằng 0 ( $A_0 = 0$ ). Khi đó điều kiện Lorentz (II- 190) có dạng :

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \text{div} \vec{A} = 0 \quad (\text{II-482})$$

Nếu trình bày trong biểu diễn xung lượng thì điều kiện (II-482) có thể viết dưới dạng :

$$(\vec{K} \cdot \vec{A}(\vec{k})) = 0 \quad (\text{II-483})$$

Thực ra điều kiện (II-483) hay (II-482) chính là điều kiện ngang của trường điện từ. Trong chương ba ta đã đề cập đến trường điện từ được mô tả bằng thể bốn chiều  $A_\mu(x)$ , mặc dù vậy trong đó chỉ có hai thành phần độc lập tuyến tính trực giao với véctơ sóng  $\vec{k}$  mới có ý nghĩa vật lý trực tiếp. Cũng vì lẽ đó ta chỉ tiến hành lượng tử hóa hai thành phần ngang của thể véctơ mà thôi. Ngay cả trong trường hợp đó cũng xuất hiện không ít khó khăn về tính hiệp biến của lý thuyết do điều kiện

ngang không phải là điều kiện hiệp biến tạo ra. Tuy vậy việc lượng tử hoá trường điện từ đã được Fermi thực hiện theo cách lượng tử hóa chính tắc và đã áp dụng nó thành công trong việc xét các hiện tượng tương tác giữa ánh sáng và hạt điện tích.

## 2. Cách lượng tử hóa hiệp biến theo Gupta và Bleuer

Như ở phần lượng tử hóa trường vô hướng đã trình bày : trong lý thuyết lượng tử để mô tả các trạng thái của các hệ vật lý về phương diện toán học ta sử dụng các véctơ của không gian tuyến tính Hilbert. Song chỉ có các véctơ trạng thái mà chuẩn của chúng phải là dương xác định mới có ý nghĩa vật lý, còn véctơ trạng thái có chuẩn là âm sẽ không có ý nghĩa vật lý. Để mở rộng phạm vi ứng dụng của không gian Hilbert trong lý thuyết trường lượng tử người ta đưa ra khái niệm không gian Hilbert suy rộng. Đó là không gian Hilbert bao gồm cả véctơ với chuẩn âm (còn được gọi là không gian Hilbert cùng với metrica không xác định). Chính nhờ việc đưa vào không gian Hilbert suy rộng này mà khi lượng tử hóa trường điện từ Gupta và Bleuer đã sử dụng các véctơ với chuẩn âm trong quá trình tính toán trung gian để bảo đảm tính hiệp biến của lý thuyết. Nhưng khi chuyển sang tính các đại lượng quan sát được thì các véctơ này được loại khỏi kết quả cuối cùng. Dưới đây ta sẽ trình bày một cách lượng tử hóa hiệp biến trường điện từ mà về hình thức có khác đôi chút, song về bản chất không khác so với cách lượng tử hóa Gupta và Bleuer.

## 3. Lượng tử hóa trường điện từ

Trong cách lượng tử hóa chính tắc ta chỉ mới lượng tử hóa hai thành phần ngang của thế véctơ  $A_{\mu}(x)$ , còn hai thành phần nữa của thế véctơ này chưa được lượng tử hóa. Song ở đây tất cả bốn thành phần của thế véctơ  $A_{\mu}(x)$  đều được lượng tử hóa một cách độc lập với nhau. Kết quả sau khi lượng tử hóa mỗi thành phần của thế véctơ  $A_{\mu}(x)$  sẽ tương ứng với một loại photon, trong đó có :

- Hai loại photon ngang,
- Một loại photon dọc và một loại photon vô hướng. Cả hai loại photon dọc và photon vô hướng đều thuộc loại photon không vật lý. Thực

tế photon vô hướng không tồn tại, mà chúng chỉ tồn tại hình thức trong các lập luận trung gian nhằm tạo cho lý thuyết đối xứng và hiệp biến, nhưng sau đó chúng sẽ biến mất khi chuyển sang các đại lượng quan sát được. Bước tiếp theo Gupta và Bleuer đã đưa ra định nghĩa chuẩn các véctơ trạng thái trên cơ sở của không gian Hilbert suy rộng.

Theo định nghĩa này thì

- Đối với các véctơ trạng thái ứng với các photon ngang thì chuẩn là đại lượng dương xác định.

- Còn đối với các véctơ trạng thái ứng với các photon không vật lý thì chuẩn là đại lượng dương không xác định.

Đến đây lại có vấn đề đặt ra là điều kiện Lorentz được đưa vào như thế nào ? Như ta đã biết, trong cơ học lượng tử các đại lượng động lực nói chung không có giá trị xác định, mà chỉ có giá trị trung bình của các đại lượng động lực mới có giá trị xác định. Mặt khác tương ứng với các biến động lực ta có các toán tử đối ứng. Vì vậy, điều kiện Lorentz không đặt vào dạng toán tử, mà nó chỉ được thỏa mãn trong ý nghĩa giá trị trung bình. Chính điều kiện này giới hạn các trạng thái nào của hệ chứa cùng một số lượng photon dọc và photon ngang bằng nhau với cùng một xung lượng.

Qua lập luận nêu trên ta thấy về phương diện vật lý cả cách trình bày ở trên và cách lượng tử hóa của Gupta và Bleuer đều tương đương nhau vì giá trị trung bình của các toán tử tương ứng với các đại lượng quan sát được trong các trạng thái là không đổi. Tuy nhiên về hình thức có chút ít cải tiến so với cách Gupta và Bleuer. Trong cách lượng tử hóa Gupta và Bleuer. cách định nghĩa tích vô hướng hai véctơ trạng thái ứng với photon vô hướng có thay đổi và giữ nguyên cách định nghĩa phép liên hợp ecmite của các toán tử trường ; còn trong cách lượng tử hóa được trình bày ở trên giữ nguyên cách định nghĩa tích vô hướng hai véctơ trạng thái ứng với photon vô hướng và thay đổi cách định nghĩa phép liên hợp ecmite của các toán tử trường.

Để thấy rõ điều đó ta xem lại chương ba đối với thể véctơ  $A_\mu(x)$  và đã nhận được biểu thức (II-214) :

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{\lambda}(k) \left[ a_{\lambda}(k) e^{ikx} + a_{\lambda}^*(k) e^{-ikx} \right] d\vec{k}$$

(II-484)

Theo cách lượng tử hóa khi chuyển sang lý thuyết lượng tử ta thay các hàm số  $a_{\lambda}(k)$  và  $a_{\lambda}^*(k)$  bằng các toán tử, đồng thời thực hiện phép liên hợp ecmite của các toán tử. Từ (II-211) ta có:

$$A_{\mu}^+(x) = A_{\mu}(x) \eta_{\mu} \quad (\text{II-485})$$

Kết quả cuối cùng ta nhận được toán tử trường :

$$\begin{aligned} A_{\mu}(x) &= A_{\mu}^+(x) + A_{\mu}^{(-)}(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}(k) e_{\mu}^{\lambda}(k) e^{ikx} d\vec{k} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^+(k) e_{\mu}^{\lambda}(k) e^{-ikx} d\vec{k} \end{aligned} \quad (\text{II-486})$$

trong đó  $a_{\lambda}^+(k)$  và  $a_{\lambda}(k)$  là các toán tử sinh và hủy các photon. Như vậy để lượng tử hóa trường điện từ ta cần phải khai triển toán tử trường  $A_{\mu}(x)$  theo hệ đủ các véctơ và coi các hệ số của phép khai triển đó là các toán tử sinh và hủy các hạt (photon). Dựa vào các biểu thức (II-219) và (II-221) ta tìm được các toán tử năng lượng của trường điện từ lượng tử :

Toán tử năng lượng

$$H = \sum_{\lambda=1}^4 \int a_{\lambda}^+(k) a_{\lambda}(k) \eta_{\lambda} k_0 d\vec{k} \quad (\text{II-487})$$

Toán tử xung lượng

$$P_i = \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \eta_{\lambda} k_i d\bar{\mathbf{k}} \quad (\text{II-488})$$

Sử dụng các kết quả (II-208), (II-209) và các hệ thức biến đổi thêm trước công thức (II-219), trong trường hợp  $\lambda = \lambda' = 4$  ta nhận được hệ thức giao hoán :

$$[a_4(\mathbf{k}), a_4^{\dagger}(\mathbf{k}')] = -\delta(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{k}}') \quad (\text{II-489})$$

Kết quả mà hệ thức giao hoán này sẽ dẫn đến là làm xuất hiện dấu trừ trước số hạng  $a_4^{\dagger}(\mathbf{k}) a_4(\mathbf{k})$  trong Hamiltonien (II-487). Như vậy mật độ năng lượng cũng như năng lượng của trường điện từ lượng tử sẽ là một đại lượng dương không xác định. Căn cứ vào các hệ thức giao hoán (II-489) cùng với Hamiltonien (II-487) và toán tử xung lượng (II-488) ta thu được phương trình toán tử tương tự như các phương trình của trường vô hướng (II-389) :

$$i \frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_0} = [A_{\mu}(x), H], \quad (\text{II-490})$$

$$i \frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_i} = [A_{\mu}(x), p_i], \quad (\text{II-491})$$

Đối với toán tử năng lượng xung lượng ta có thể viết dưới dạng tổng quát:

$$i \frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_{\nu}} = [A_{\mu}(x), p_{\nu}], \quad (\text{II-492})$$

trong đó  $P_{\nu}$  là toán tử năng lượng xung lượng bốn chiều của trường điện từ lượng tử và nó có dạng :

$$P_v = \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \eta_{\lambda} k_v d\tilde{\mathbf{k}}. \quad (\text{II-493})$$

Đồng thời sử dụng các kết quả (II-390), (II-391) và (II-408) ta nhận được các giao hoán tử sau đây :

$$[a_{\lambda}(\mathbf{k}), \mathbf{H}] = k_0 a_{\lambda}(\mathbf{k}), \quad (\text{II-494})$$

$$[a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}), \mathbf{H}] = -k_0 a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}), \quad (\text{II-495})$$

$$[a_{\lambda}(\mathbf{k}), p_i] = k_i a_{\lambda}(\mathbf{k}), \quad (\text{II-496})$$

$$[a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}), p_i] = -k_i a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}). \quad (\text{II-497})$$

Việc tìm hệ các hàm riêng của Hamiltonien và của toán tử xung lượng - hay hệ các véctơ trạng thái của trường điện từ lượng tử đều thông qua sử dụng các hệ thức giao hoán này.

#### 4. Điều kiện Lorentz trong lý thuyết lượng tử

Để bảo đảm cho lý thuyết thể hiện tính đối xứng và hiệp biến tương đối tính ở trên ta đã lượng tử hóa tất cả bốn thành phần của thế  $A_{\mu}(x)$  một cách tương tự như nhau. Vì vậy các photon không vật lý vẫn có sự đóng góp vào các giá trị khả dĩ của năng lượng và xung lượng. Giờ đây ta phải nêu điều kiện Lorentz sao cho các photon không vật lý không có đóng góp nào vào các giá trị khả dĩ của năng lượng và xung lượng. Tuy nhiên để có cách phát biểu điều kiện Lorentz phù hợp ta nhớ lại rằng nhờ điều kiện Lorentz (II-184) đặt lên thế  $A_{\mu}(x)$  trong điện động lực cổ điển, việc loại bỏ các dao động không vật lý tương ứng với các photon không vật lý trong điện động lực học lượng tử như dao động học và dao động vô hướng được thực thi. Song điều kiện như vậy theo (II-217) trong điện động lực học lượng tử sẽ không tương thích với sự độc lập của các toán tử  $a_3(\mathbf{k})$  và  $a_4(\mathbf{k})$ . Chính lẽ đó mà việc nêu điều kiện Lorentz không dành cho các toán tử  $a_3(\mathbf{k})$  và  $a_4(\mathbf{k})$ : Điều kiện Lorentz dành cho các véctơ trạng thái của trường điện từ  $\Psi$ , mà các toán tử

$a_3(k)$  và  $a_4(k)$  sẽ tác dụng lên chúng, nghĩa là tác dụng lên véctor  $\Psi$  và khi ấy ta có điều kiện :

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \Psi = 0, \quad (\text{II-498})$$

trong đó  $\Psi$  là véctor bất kỳ mô tả trạng thái của trường điện từ. Từ (II-498) ta suy ra :

$$\Psi^+ \left( \frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu} \right) = \Psi^+ \frac{\partial A_\mu^{(-)}(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{II-499})$$

Khi kết hợp các công thức (II-4981 và (II-499) ta nhận được:

$$\left( \Psi^+ \frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu} \Psi \right) = \left\langle \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right\rangle = 0 \quad (\text{II-500})$$

Từ đây ta nhận thấy : nếu điều kiện (II-498) được thỏa mãn cho bất kỳ các véctor trạng thái nào của trường điện từ, thì các yếu tố ma trận của toán tử  $\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}$  sẽ bằng 0. Như vậy có nghĩa là trong điện động lực học lượng tử ta không thể đòi hỏi được toán tử sẽ bằng 0, mà chỉ có thể đòi hỏi giá trị trung bình của toán tử  $\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}$  bằng 0. Do vậy phương trình dạng (II-186) không còn thích hợp nữa, mà đòi hỏi phương trình đối với ten xơ của trường trong điện động lực học lượng tử bây giờ có dạng :

$$\left( \Psi^+ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \Psi \right) = \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right\rangle = 0 \quad (\text{II-501})$$

Thay (II-486) vào (II-498) và sử dụng các kết quả (II-206), (II-216) ta có :

$$\sum_{\lambda=1}^4 (e^{\lambda k}) a_{\lambda}(k) \Psi = k_0 [a_3(k) - a_4(k)] \Psi = 0$$

Từ đây dễ dàng suy ra : các véctơ mô tả trạng thái của trường điện từ lượng tử sẽ thỏa mãn điều kiện :

$$[a_3(k) - a_4(k)] \Psi = 0, \quad (\text{II-502})$$

trong đó  $k$  là véctơ tùy ý. Từ (II-500) ta có cả điều kiện :

$$\Psi^+ [a_3^+(k) - a_4^+(k)] = 0 \quad (\text{II-503})$$

Trên cơ sở của các điều kiện Lorentz đưa ra ở trên ta có thể tìm được giá trị trung bình của các toán tử năng lượng và xung lượng trong trạng thái mô tả bằng véctơ  $\Psi$ . Song cũng cần lưu ý rằng, trong lược đồ lượng tử ở đây đối với bất kỳ trạng thái cho phép nào ta đều có :

$$a_4(k) \Psi \neq 0 \quad (\text{II-504})$$

(Kết quả này có thể được lý giải như sau : Nhân trái hệ thức giao hoán (II-489) với  $\Psi^+ h^*(\vec{k})$  và nhân phải với  $h(\vec{k}) \Psi$ , sau đó lấy tích phân theo  $\vec{k}$  và  $\vec{k}'$  ( $h(\vec{k})$  là hàm tùy ý). Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} & (\int h(\vec{k}) a_4^+(k) d\vec{k} \Psi)^+ (\int h(\vec{k}') a_4^+(k') d\vec{k}' \Psi) - \\ & - (\int h(\vec{k}) a_4(k) d\vec{k} \Psi)^+ (\int h(\vec{k}') a_4(k') d\vec{k}' \Psi) = \\ & = - (\Psi^+ \Psi) \int |h(\vec{k})|^2 d\vec{k} \end{aligned}$$

Như vậy nếu tồn tại véctơ trạng thái  $\Psi$  để cho  $a_4(k) \Psi = 0$  thì số hạng thứ hai ở vế trái của (II-505) sẽ triệt tiêu và dẫn đến mâu thuẫn là vế trái của (II-505) là một số dương, còn vế phải là một số âm. Vì vậy không thể tồn tại véctơ trạng thái  $\Psi$  để cho  $a_4(k) \Psi = 0$ .



Cũng từ điều kiện Lorentz (II-502) ta có :

$$a_3(k) \Psi = 0 \quad (\text{II-506})$$

Dựa vào (II-493) và tách hai số hạng với  $\lambda = 3$  và  $\lambda = 4$  ra ta có :

$$\begin{aligned} \langle P_V \rangle &= (\Psi^+ P_V \Psi) = (\Psi^+ \int \sum_{\lambda=1}^2 a_\lambda^+(k) a_\nu(k) k_\nu d\vec{k} \Psi) + \\ &+ (\Psi^+ \int a_3^+(k) a_3(k) k_i d\vec{k} \Psi) - (\Psi^+ \int a_4^+(k) a_4(k) k_i d\vec{k} \Psi) \quad (\text{II-507}) \end{aligned}$$

Căn cứ vào các điều kiện Lorentz (II-502) và (II-503) ta nhận thấy tổng hai số hạng cuối của công thức (II-507) bằng 0 (nhân trái phương trình (II-502) lần lượt với  $\Psi^+ a_3^+(k)$  và  $\Psi^+ a_4^+(k)$ ; nhân phải phương trình (II-503) lần lượt với  $a_3 \Psi$  và  $a_4 \Psi$ . Sau đó cộng tất cả các vế lại ta được :

$$\Psi^+ (a_3^+(k) a_3(k) - a_4^+(k) a_4(k)) \Psi = 0.$$

Nhờ đó ta nhận được biểu thức đối với giá trị trung bình của toán tử năng lượng :

$$\langle P_V \rangle = (\Psi^+ \int \sum_{\lambda=1}^2 a_\lambda^+(k) a_\lambda(k) k_\nu d\vec{k} \Psi). \quad (\text{II-508})$$

Đến đây có thể khẳng định rằng mục đích mà ta đề ra ở trên đã thực hiện được : Đó là chỉ có các photon với phân cực ngang [ $e^1(k)$  và  $e^2(k)$ ] mới có phần đóng góp vào năng lượng và xung lượng của trường điện từ ; còn các photon dọc và các photon vô hướng là các photon không vật lý đều bị loại ra khỏi kết quả tính toán cuối cùng. Bên cạnh đó tính xác định dương của giá trị trung bình của năng lượng được đảm bảo. Đồng thời việc sử dụng không gian Hilbert suy rộng cùng với metric không xác định trong khi tính toán các đại lượng vật lý quan sát không làm xuất hiện các kết quả dị thường (chẳng hạn tương tự như "các xác suất âm"). Như vậy trạng thái không chứa các photon với phân cực ngang, tương ứng với năng lượng thấp nhất. Giả sử  $\Psi_0$  là vectơ trạng thái thỏa mãn các điều kiện :

$$a_\lambda(k)\Psi_0 = 0, \lambda = 1, 2 \quad (\text{II-509})$$

Khi đó từ công thức (II-508) ta suy ra năng lượng và xung lượng của trường điện từ trong trạng thái  $\Psi_0$  sẽ bằng 0 -  $\Psi_0$  là trạng thái chân không. Điều kiện (II-509) cho biết : trong trạng thái được mô tả bằng véctơ  $\Psi_0$  không chứa các photon phân cực ngang.

Kết quả tiếp theo mà ta có thể quy được từ véctơ trạng thái  $\Psi_0$  thỏa mãn điều kiện (II-509) là ta có thể xây dựng được hệ các véctơ trạng thái mô tả các photon tự do cùng với các xung lượng bốn chiều xác định bằng cách tác dụng các toán tử sinh  $a_\lambda^+(k)$  lên véctơ  $\Psi_0$  đó.

### 5. Các yếu tố ma trận của quá trình tương tác điện từ

Ta biết rằng các quá trình tương tác được đặc trưng bằng Hamiltonien tương tác. Nhờ Hamiltonien tương tác mà ta xác định được các yếu tố ma trận của phép dời chuyển giữa các trạng thái của các hạt tự do - nghĩa là xác định được yếu tố ma trận của S - ma trận. Điều này rất cần khi tính toán các hiệu ứng của các quá trình vật lý khác nhau. Như vậy việc xác định các yếu tố của S - ma trận gắn liền với Hamiltonien tương tác. Nhưng trong trường hợp Hamiltonien tương tác với các trường khác có thể có mặt các toán tử trường  $A_\mu(x)$  và  $F_{\mu\nu}(x)$ . Chính vì vậy thay cho việc tìm các yếu tố S - ma trận ta phải tìm được các yếu tố ma trận của tích các toán tử trường  $A_\mu(x)$  và các đạo hàm của chúng - hay tìm các yếu tố ma trận  $N$  - tích các toán tử sinh hủy các photon. Để có thể hình dung được cách tìm đó ta xét ví dụ : Khi tính các yếu tố ma trận  $(\Psi_1^+ S \Psi)$  ta quy ước các toán tử hủy tác dụng lên hàm  $\Psi$  về bên phải, còn các toán tử sinh tác dụng lên hàm  $\Psi_1^+$  về bên trái.

Cụ thể ta xét tác dụng của toán tử  $A_\mu^+(x)$  lên véctơ trạng thái  $\Psi$  nào đấy. Theo (II-486) toán tử  $A_\mu^+(x)$  có dạng :

$$A_\mu^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) a_\lambda(k) e^{ikx} d\vec{k} \quad (\text{II-510})$$

Nhằm thu được kết quả tác dụng của toán tử  $A_{\mu}^{+}(x)$  lên vectơ trạng thái  $\Psi$ , trước hết ta biểu diễn toán tử  $\sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{\lambda}(k)a_{\lambda}(k)$  theo dạng :

$$\sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{\lambda}(k)a_{\lambda}(k) = \sum_{\lambda=1}^2 e_{\mu}^{\lambda}(k)a_{\lambda}(k) + e_{\mu}^4(k)[a_4(k) - a_3(k)] + [e_{\mu}^3(k) + e_{\mu}^4(k)]a_3(k). \quad (\text{II-511})$$

Dựa vào công thức (II-202) ta có thể viết số hạng cuối cùng của công thức (II-511) dưới dạng :

$$e_{\mu}^3(k) + e_{\mu}^4(k) = \frac{k_{\mu}}{k_0} \quad (\text{II-512})$$

Thay các công thức biến đổi (II-511) và (II-512) vào (II-510) ta nhận được dạng biểu diễn sau đây của toán tử  $A_{\mu}^{+}(x)$  :

$$\begin{aligned} A_{\mu}^{+}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^2 e_{\mu}^{\lambda}(k)a_{\lambda}(k)e^{ikx} d\vec{k} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} a_3(k)e^{ikx} d\vec{k} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^4(k)[a_4(k) - a_3(k)]e^{ikx} d\vec{k} = \\ &= A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) + \frac{\partial \Lambda^{+}(x)}{\partial x_{\mu}} + L_{\mu}(x), \end{aligned} \quad (\text{II-513})$$

trong đó

$$A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^2 e_{\mu}^{\lambda}(k) a_{\lambda}(k) e^{ikx} d\vec{k},$$

$$\Lambda^+(x) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \frac{1}{k_0} a_3(k) e^{ikx} d\vec{k}, \quad (\text{II-514})$$

$$\Lambda^+(x) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \frac{1}{k_0} a_3(k) e^{ikx} d\vec{k}, \quad (\text{II-514})$$

Nhờ tính bất biến gradien mà ta có thể bỏ qua số hạng  $\frac{\partial \Lambda^+(x)}{\partial x_{\mu}}$  (vì  $\Lambda^+(x)$  thỏa mãn phương trình trường  $\square \Lambda^+(x) = 0$ , xem (II-190) và từ điều kiện Lorentz (II-502) ta suy ra :

$$L_{\mu}(x)\Psi = 0 \quad (\text{II-515})$$

Tiến hành hoàn toàn tương tự (II-513) ta nhận được dạng biểu diễn của toán tử  $A_{\mu}^{(-)}(x)$  và kết quả tác dụng của nó lên véctor trạng thái  $\Psi_1^+$  :

$$A_{\mu}^{(-)}(x) = A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) + \frac{\partial \Lambda^{(-)}(x)}{\partial x_{\mu}} + L_{\mu}^+(x), \quad (\text{II-516})$$

Trong đó

$$A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^2 e_{\mu}^{\lambda}(k) a_{\lambda}^{\dagger}(k) e^{-ikx} d\vec{k},$$

$$\Lambda^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \frac{1}{k_0} a_3^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\bar{\mathbf{k}}, \quad (\text{II-517})$$

$$L_\mu^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_\mu^4(\mathbf{k}) [a_4^+(\mathbf{k}) - a_3^+(\mathbf{k})] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\bar{\mathbf{k}}.$$

Khi sử dụng điều kiện Lorentz (II-503) ta nhận được :

$$\Psi_1^+ L_\mu^+(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{II-518})$$

Cũng nhờ tính chất bất biến gradien mà ta bỏ đi được đạo hàm  $\frac{\partial \Lambda^+(\mathbf{x})}{\partial x_\mu}$ .

Đến đây có thể kết luận rằng : Dựa vào bất biến gradien và các điều kiện Lorentz khi tìm các yếu tố ma trận của phép dời chuyển giữa các trạng thái vật lý ta chỉ cần tính  $A^{\text{tr}}(\mathbf{x})$ , có nghĩa là chỉ cần để ý đến phần toán tử của trường điện từ tương ứng với sự sinh và hủy các photon phân cực ngang.

## 6. Hệ các véctơ mô tả trạng thái của trường điện từ lượng tử

Dựa vào các lập luận ở trên ta có thể xây dựng được hệ véctơ mô tả trạng thái của trường điện từ lượng tử bằng cách tác dụng các toán tử sinh  $a_\lambda^+(\mathbf{k})$  lên véctơ chân không  $\Psi_0$ . Tuy vậy để có đầy đủ cơ sở kết luận ta cần đề cập đến hai đặc điểm sau :

a) Trong các véctơ trạng thái mô tả trường điện từ bao giờ cũng chứa số lượng photon dọc bằng số lượng photon vô hướng, nói cách khác các toán tử  $a_3^+(\mathbf{k})$  và  $a_4^+(\mathbf{k})$  luôn luôn xuất hiện trong tổ hợp  $a_3^+(\mathbf{k}) - a_4^+(\mathbf{k})$ . Điều này có thể được chỉ ra như sau :

Tác dụng toán tử  $(a_3(k') - a_4(k'))$  lên véctơ trạng thái  $\Psi_1$ ,

$$\Psi_1 = [\alpha a_3^+(k) + \beta a_4^+(k)]\Psi \quad (\text{II-519})$$

ta được

$$\begin{aligned} [a_3(k') - a_4(k')]\Psi_1 &= \{ (a_3(k') - a_4(k'))(\alpha a_3^+(k) + \beta a_4^+(k)) + \\ &+ (\alpha a_3^+(k) + \beta a_4^+(k))(a_3(k') - a_4(k')) \} \Psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{II-520})$$

Ta nhận thấy số hạng thứ hai trong dấu móc khi tác dụng lên  $\Psi$  sẽ bằng 0 (theo điều kiện (II-502)). Từ các hệ thức giao hoán

$$[a_3^+(k'), a_4(k)] = 0; [a_4^+(k'), a_3(k)] = 0;$$

$$[a_3(k), a_3^+(k')] = \delta(\bar{k} - \bar{k}'); [a_4(k), a_4^+(k')] = -\delta(\bar{k} - \bar{k}')$$

ta suy được số hạng thứ nhất cũng bằng 0 và như thế điều kiện (II-502) sẽ được thỏa mãn nếu như  $\beta = -\alpha$ .

b) Khi sử dụng các điều kiện Lorentz và tính bất biến gradient ta có thể chỉ ra rằng yếu tố ma trận của S - ma trận sẽ bằng 0 nếu như vectơ trạng thái đầu hay vectơ trạng thái cuối chứa các toán tử dạng tổ hợp  $(a_3^+(k) - a_4^+(k))$ . Với ý định đó ta giả sử có ba vectơ trạng thái bất kỳ

$$\Psi,$$

$$\Psi_1 = (a_3^+(k) - a_4^+(k))\Psi,$$

$$\Psi_2 = (a_3^+(k) - a_4^+(k))\Psi_1$$

thỏa mãn điều kiện Lorentz (II-502).

Để thực hiện việc chứng minh trước hết ta nhận xét rằng : do các điều kiện Lorentz và tính bất biến gradient mà trong S - ma trận chỉ chứa các toán tử sinh  $a_\lambda^+(k)$  và các toán tử hay  $a_\lambda(k)$   $\lambda = 1,2$  ứng với

các photon phân cực ngang, nên toán tử S ma trận sẽ giao hoán với các toán tử sinh hủy các photon dọc và các photon vô hướng. Đến đây ta có thể chỉ ra rằng các yếu tố ma trận sau đây sẽ bằng 0.

$$(\Psi_2^+ S \Psi_1) = 0, \quad (\text{II-521})$$

$$(\Psi_2^+ S \Psi) = 0. \quad (\text{II-522})$$

Bằng cách sử dụng giao hoán tử giữa toán tử S - ma trận với các toán tử sinh hủy photon dọc và photon vô hướng ta có :

$$(\Psi_2^+ S \Psi_1) = (\Psi_2^+ S (a_3^+(k) - a_4^+(k) \Psi) = (\Psi_2^+ (a_3^+(k) - a_4^+(k) \Psi) = 0$$

(ta đã sử dụng điều kiện (II-503)).

Và một cách hoàn toàn tương tự ta có:

$$(\Psi_2^+ S \Psi) = (\Psi_1^+ (a_3(k) - a_4(k)) S \Psi) = (\Psi_1^+ (a_3(k) - a_4(k) \Psi) = 0$$

(ta đã sử dụng điều kiện (II-502)).

Giờ đây ta có thể kết luận rằng :

Dựa vào hai đặc điểm nêu trên ta xây dựng được hệ các véctơ mô tả trạng thái của trường điện từ lượng tử mà không làm cho các yếu tố ma trận của phép dời chuyển bằng không đó là :

$$\Psi_{n(k_m, \lambda_m) \dots n(k_1, \lambda_1)} = a_{\lambda_m}^+(k_m) \dots a_{\lambda_m}^+(k_m) \dots a_{\lambda_1}^+(k_1) \dots a_{\lambda_1}^+(k_1) \Psi_0$$

(II-523) trong đó các chỉ số  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  nhận các giá trị 1 và 2. Véctơ (II-523) mang ý nghĩa là mô tả dạng thái với  $n(k_m, \lambda_m)$  photon cùng với xung lượng bốn chiều  $k_m$  và véctơ phân cực  $e^{\lambda m}(k_m)$ , với  $n(k_{m-1}, \lambda_{m-1})$  photon cùng với xung lượng bốn chiều  $k_{m-1}$  và véctơ phân cực  $e^{\lambda-1}(k_{m-1}), \dots$

# MỤC LỤC

MỞ ĐẦU .....	3
Phần thứ nhất: NỘI DUNG CƠ BẢN CỦA CƠ HỌC LƯỢNG TỬ ....	4
§1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ CHUYỂN ĐỘNG, KHÔNG THỜI GIAN, TÍNH SÓNG HẠT.....	5
§2. CƠ SỞ VẬT LÝ CỦA CƠ HỌC LƯỢNG TỬ.....	8
§3. CƠ SỞ TOÁN HỌC CỦA CƠ HỌC LƯỢNG TỬ.....	15
Phần thứ hai: LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ .....	27
MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ CÁCH TRÌNH BÀY TRONG LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ.....	28
§1.1. KHÁI NIỆM CHẤT VÀ TRƯỜNG TRONG LÝ THUYẾT CỔ ĐIÊN VÀ LƯỢNG TỬ.....	29
§1.2. LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ .....	31
Chương II.....	44
NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG CỰC TIỂU TRONG LÝ THUYẾT TRƯỜNG CỔ ĐIÊN .....	44
§2.1. NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG CỰC TIỂU .....	44
§2.2. CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI CỦA HÀM TRƯỜNG.....	49
§2.3. CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN.....	54
Chương III .....	69
TRƯỜNG CỔ ĐIÊN TỰ DO .....	69
§3.1. MỞ ĐẦU .....	69
§3.2. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG .....	72
§3.3. TRƯỜNG THỰC VÉCTƠ (TRƯỜNG ĐIỆN TỪ).....	100
§3.4. TRƯỜNG PHỨC SPINƠ .....	114
Chương IV .....	148



LUỘNG TỬ HÓA TRƯỜNG TỰ DO.....	148
§4.1. CÁC CÁCH LUỘNG TỬ HÓA TRƯỜNG.....	148
§4.2. LUỘNG TỬ HÓA TRƯỜNG VÔ HƯỚNG.....	163
§4.3. LUỘNG TỬ HÓA TRƯỜNG PHỨC SPINƠ.....	182
§4.4. LUỘNG TỬ HÓA TRƯỜNG ĐIỆN TỬ.....	191

## LÝ THUYẾT TRƯỜNG LƯỢNG TỬ

In 1000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5cm. Tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội. Giấy phép xuất bản số 1127/31 – 00. In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2000.