

[www.mientayvn.com](http://www.mientayvn.com)

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

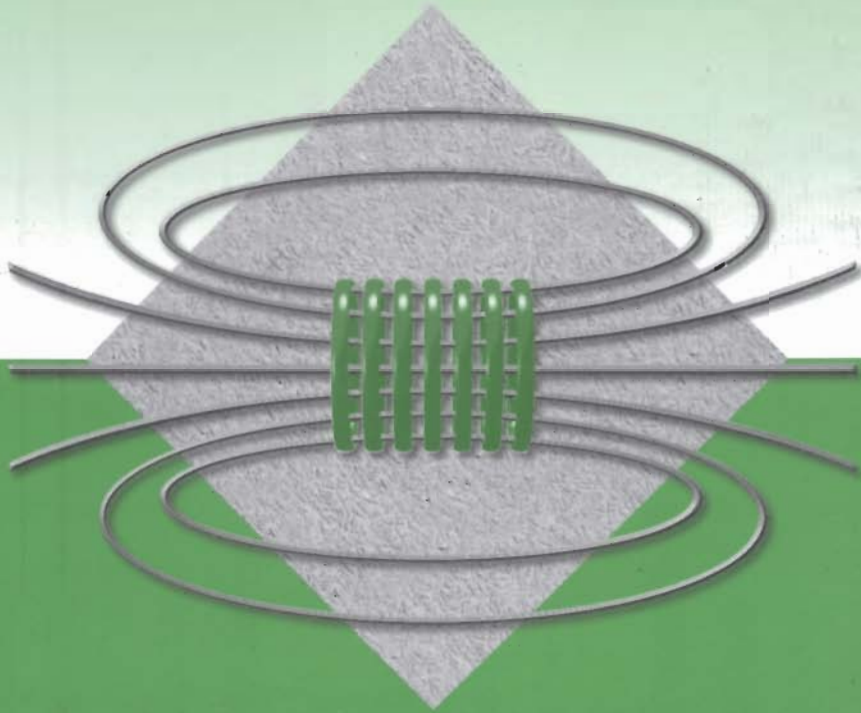
Trao i tr c tuy n t i:

[www.mientayvn.com/chat\\_box\\_li.html](http://www.mientayvn.com/chat_box_li.html)



# ĐIỆN TỬ HỌC

## 2



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



HACHETTE  
*Supérieur*

"Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kỹ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam".

*"Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République socialiste du Vietnam".*

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*  
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI  
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

*Biên tập nội dung :*

LÊ HÙNG

*Trình bày bìa :*

ĐOÀN HỒNG

*Sửa bản in :*

LÊ HÙNG

*Sắp chữ :*

ĐOÀN VIỆT QUÂN

# Điện tử học

*(Tái bản lần thứ hai)*

Dưới sự hướng dẫn của

JEAN - MARIE BRÉBEC

Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học  
trường Lixê Saint - Louis ở Paris

PHILIPPE DENÉVE

Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học  
trường Lixê Henri - Wallon ở Valenciennes

THIERRY DESMARAIS

Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học  
trường Lixê Vaugelas ở Chambéry

ALAIN FAVIER

Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học  
trường Lixê Champollion ở Grenoble

MARC MÉNÉTRIER

Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học  
trường Lixê Thiers ở Marseilles

BRUNO NOËL

Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học  
trường Lixê Champollion ở Grenoble

CLAUDE ORSINI

Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học  
trường Lixê Dumont - d'Urville ở Toulon

Người dịch : LÊ BĂNG SƯƠNG

**Năm thứ hai**

**PC - PC\***

**PSI-PSI\***

**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

# Électromagnétisme

sous la direction de  
JEAN - MARIE BRÉBEC  
Professeur en Classes Préparatoires  
au Lycée Saint - Louis à Paris

PHILIPPE DENÈVE  
Professeur en Classes Préparatoires  
au Lycée Henri - Wallon à Valenciennes

THIERRY DESMARAIS  
Professeur en Classes Préparatoires  
au Lycée Vaugelas à Chambéry

ALAIN FAVIER  
Professeur en Classes Préparatoires  
au Lycée Champollion à Grenoble

MARC MÉNÉTRIER  
Professeur en Classes Préparatoires  
au Lycée Thiers à Marseilles

BRUNO NOËL  
Professeur en Classes Préparatoires  
au Lycée Champollion à Grenoble

CLAUDE ORSINI  
Professeur en Classes Préparatoires  
au Lycée Dumont - d'Urville à Toulon

2<sup>de</sup> année

PC - PC\*  
PSI-PSI\*



HACHETTE  
*Supérieur*

# Lời nói đầu

Bộ giáo trình này có liên quan đến các chương trình mới của các lớp dự bị vào các trường đại học (Grandes écoles), được áp dụng cho kì tựu trường tháng 9/1995 đối với các lớp năm thứ nhất MPSI, PCSI và PTSI, và cho kì tựu trường tháng 9/1996 đối với các lớp năm thứ hai MP, PC, PSI.

Theo tinh thần của các chương trình mới, thì bộ giáo trình này đưa ra một sự đổi mới trong việc giảng dạy môn vật lí ở các lớp dự bị đại học.

- Trái với truyền thống đã in sâu đậm nét, mà theo đó vật lí bị xếp vào hàng môn học thứ yếu sau toán học vì các hiện tượng đã bị che lấp bởi khía cạnh tính toán. Tuy nhiên ở đây các tác giả đã cố gắng thu xếp để đặt toán học vào đúng chỗ của nó bằng cách ưu tiên dẫn dắt tư duy và lập luận vật lí, đồng thời nhấn mạnh lên các tham số có ý nghĩa và các hệ thức đã kết hợp chúng lại với nhau.

- Vật lí là một môn khoa học thực nghiệm nên phải được giảng dạy theo tinh thần đó. Các tác giả đã quan tâm đặc biệt đến việc mô tả các thiết bị thí nghiệm nhưng vẫn không bỏ qua khía cạnh thực hành. Mong sao những cố gắng của các tác giả sẽ thúc đẩy thầy và trò cải tiến hoặc tạo ra các hoạt động thí nghiệm luôn luôn đầy chất sáng tạo.

- Vật lí không phải là một khoa học coi thường vật chất, chỉ chú trọng đến lập luận trừu tượng mà dừng dưng với thực tiễn công nghệ. Mỗi khi vấn đề được nêu lên, thì các tác giả đã dành một chỗ xứng đáng cho các áp dụng khoa học hay công nghiệp, đặc biệt để kích thích các nhà nghiên cứu và kĩ sư tương lai.

- Vật lí không phải là một khoa học thiếu tính độc đáo và vĩnh hằng, mà vật lí là sản phẩm của một thời đại và không tự tách ra khỏi phạm vi hoạt động của con người.

Các tác giả đã không coi thường các cứ liệu lịch sử các khoa học trong việc mô tả sự biến đổi của các mô hình lí thuyết cũng như thay thế các thí nghiệm trong bối cảnh của họ.

Nhóm tác giả mà Jean-Marie BRÉBEC đã phối hợp, gồm các giáo sư các lớp dự bị rất từng trải, đã có một bề dày các kinh nghiệm trong các kì thi tuyển vào các trường đại học và có năng lực khoa học cao được mọi người nhất trí công nhận. Nhóm này đã cộng tác chặt chẽ với các tác giả của bộ giáo trình của DURANDEAU và DURUPHY cho cấp hai các trường trung học (tương đương trung học phổ thông của Việt Nam).

Sách cho các lớp dự bị đã kế tiếp hoàn hảo sách ở cấp trung học cả về hình thức, nội dung lẫn ý tưởng.

Chúng tôi bảo đảm rằng các cuốn sách này là những công cụ quý báu cho sinh viên để chuẩn bị có hiệu quả cho các kì thi tuyển, cũng như để có được một sự trau dồi khoa học vững chắc.

J.P.DURANDEAU

Sách này chia làm ba phần lớn :

- Trường điện từ không đổi: sau khi nghiên cứu các tương tác của trường này với các điện tích (định luật OHM, lực LAPLACE, hiệu ứng HALL), thì các định luật dưới dạng tích phân (định lí GAUSS và định lí AMPÈRE đã học ở năm thứ nhất) cho phép xây dựng các định luật dưới dạng vi phân (không quên các thế vô hướng  $V$  và thế vectơ  $A$  mà từ đó phát sinh ra trường điện từ này).

- Nghiên cứu trường điện từ biến thiên : trường hợp tổng quát đã được trình bày với chứng minh vật lí về bốn phương trình Maxwell ; việc nghiên cứu sự cân bằng năng lượng dẫn tới việc đưa vào vectơ Poynting. Sau đó, các phương trình trên được nghiên cứu trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng cùng với các hệ quả của nó trên các vật dẫn.

Phần này bao gồm cả các hiện tượng cảm ứng, có phân biệt rõ cảm ứng Lorentz với cảm ứng Neumann ; đã dành hẳn một chương trọn vẹn cho các áp dụng của hiện tượng cảm ứng.

- Các phương trình MAXWELL trong vật chất cũng được đề cập tiếp theo với các hiện tượng phân cực (tác dụng của điện trường lên vật chất) và từ hóa (tác dụng của từ trường). Chương cuối cùng, dành cho sự nghiên cứu máy biến thế (đề cập đến trong giáo trình thí nghiệm), cho phép nêu bật các khái niệm về hiện tượng sắt từ nhờ có thí nghiệm.

Nhớ rằng sự nghiên cứu các sóng điện từ được triển khai trong cuốn sách *H-Prépa, Sóng, năm thứ hai, PC, PC\*, PSI và PSI\**.

# Mục lục

<i>Lời nói đầu</i> .....	5
<i>Mục lục</i> .....	6
<b>1</b> Điện tích và trường điện từ .....	7
<b>2</b> Trường điện từ không đổi .....	39
<b>3</b> Các phương trình MAXWELL .....	72
<b>4</b> Cảm ứng điện từ .....	111
<b>5</b> Các áp dụng của cảm ứng điện từ .....	137
<b>6</b> Các phương trình MAXWELL trong môi trường vật chất .....	177
<b>7</b> Biến thế : tiếp cận thực nghiệm hiện tượng sắt từ .....	213
<i>Phụ lục</i> .....	254



# ĐIỆN TÍCH VÀ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

# 1

## Mở đầu

*Ở năm thứ nhất, chúng ta đã mô tả các sự phân bố điện tích và dòng điện, và đã nghiên cứu các tính chất của điện trường và từ trường không đổi.*

*Trong chương này, chúng ta sẽ đề cập đến các cơ sở nghiên cứu những hiện tượng điện từ ở năm học thứ hai.*

## M U C T I Ê U

- Định luật bảo toàn điện tích.
- Công suất mà trường điện từ cung cấp cho các điện tích.
- Sự dẫn điện và định luật Ohm;
- Lực Laplace.

---

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Điện từ học năm thứ nhất : điện tích và dòng điện.

# 1 Điện tích và dòng điện

## 1.1. Phân bố điện tích

Trong năm học thứ nhất, ta đã định nghĩa mật độ điện thể tích (hay mật độ điện khối)  $\rho$  của một phân bố điện tích như một đại lượng trung bình cục bộ.

Đại lượng này được xác định ở thang trung mô, khá lớn đối với thang vi mô để có thể coi môi trường tích điện như một môi trường liên tục, nhưng lại khá nhỏ đối với thang vĩ mô để cách mô tả này được coi là chính xác.

Điện tích nguyên tố  $dq$  chứa trong một thể tích nguyên tố (trung mô)  $d\tau$  là (H.1a) :

$$dq = \rho d\tau$$

Ở thang vĩ mô, môi trường tích điện có thể được biểu diễn dưới dạng một lớp mỏng (H.1b), mà ta kết hợp vào đó mật độ điện diện tích (hay mật độ điện mặt)  $\sigma(M, t)$  biểu thị ra  $C \cdot m^{-2}$ . Một điện tích nguyên tố  $dS$  sẽ mang điện tích :

$$dq = \sigma dS.$$

Cũng như vậy, khi môi trường có chiều hướng trở thành hình sợi chỉ (H.1c) thì ta lại xác định một phân bố theo đơn vị dài  $\lambda(M, t)$  biểu thị ra  $C \cdot m^{-1}$ , sao cho một chiều dài nguyên tố  $dl$  sẽ mang điện tích :

$$dq = \lambda(M, t) dl.$$

Kích thước không gian quá nhỏ bé của một số hạt tích điện, ví dụ các ion của một chùm hạt trên máy gia tốc, đã lí giải sự mô hình hóa chúng bằng các "điện tích điểm".

## 1.2. Phân bố dòng điện

### 1.2.1. Dòng điện

Chuyển động của các hạt tích điện là sự khởi đầu của các dòng điện. Nếu các điện tích linh động của một phân bố, được đặc trưng bởi mật độ  $\rho_m(M, t)$ , di chuyển với vận tốc  $\vec{v}$  (vận tốc toàn bộ, H.2a) trong hệ quy chiếu nghiên cứu, thì vectơ mật độ dòng thể tích  $\vec{j}$  kết hợp với chuyển động đó sẽ được xác định bởi :

$$\vec{j}(M, t) = \rho_m(M, t) \vec{v}(M, t) ;$$

$\vec{j}$  được đo bằng đơn vị  $A \cdot m^{-2}$ .

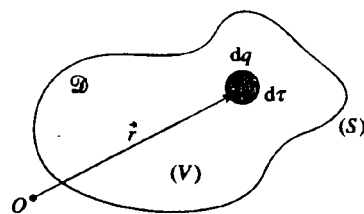
Chú ý :

- Mật độ điện tích thể tích  $\rho$  không nhất thiết phải đồng nhất với mật độ các điện tích linh động  $\rho_m$ . Một kim loại tuy trung hòa về toàn bộ, nhưng lại có thể là trung tâm của các dòng điện được tạo thành bởi sự di chuyển của các electron dẫn.

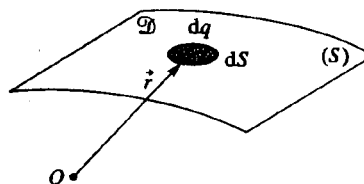
- Trường hợp có nhiều loại điện tích linh động, thì dòng điện thể tích sẽ là tổng các phân đóng góp của các loại điện tích đó.

Cũng giống như các phân bố điện tích, khi phân bố dòng điện có dáng vẻ một lớp mỏng, thì ta mô tả phân bố đó bằng mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s$

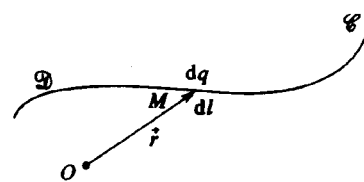
(H.2b) biểu thị ra đơn vị  $A \cdot m^{-1}$ .



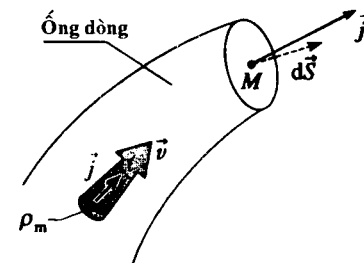
H.1a. Phân bố theo thể tích của điện tích.



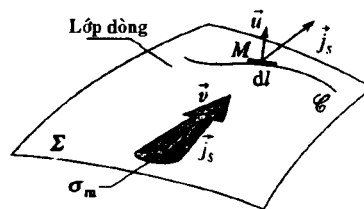
H.1b. Phân bố theo diện tích của điện tích.



H.1c. Phân bố dài của điện tích.



H.2a. Mật độ dòng điện theo thể tích  $\vec{j}$ .



H.2b. Mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s$

Các dòng điện hình sợi chỉ sẽ được biểu diễn đơn giản bằng cường độ  $I$  của chúng (H.2c).

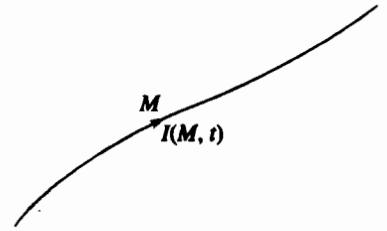
### 1.2.2. Cường độ dòng điện

Nếu một điện tích  $dq$  đi qua một mặt  $S$  trong một khoảng thời gian nguyên tố  $dt$ , thì cường độ dòng điện  $I_S$  xuyên qua mặt đó phải sao cho  $dq = I_S dt$ . Cường độ  $I_S$  bằng thông lượng của vectơ  $\vec{j}$  đi qua mặt đó :

$$I_S(t) = \iint_S \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS}.$$

Trong trường hợp một lớp dòng, thì cường độ dòng điện đi qua một đường cong  $\mathcal{C}$  vẽ trên lớp bề mặt  $\Sigma$ , và định hướng bởi vectơ  $\vec{u}$  (pháp tuyến với đường cong và tiếp tuyến với  $\Sigma$ ) sẽ là (H.2b) :

$$I_{\mathcal{C}}(t) = \int_{\mathcal{C}} \vec{j}_S(M, t) \cdot \vec{u} dl.$$



H.2c. Dòng điện hình sợi chỉ.

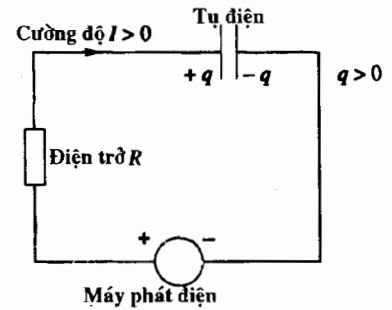
## 2 Sự bảo toàn điện tích

### 2.1. Nguyên lý bảo toàn

Trong mạch điện được biểu diễn trên hình 3, thì sự tích điện vào tụ điện kéo theo sự xuất hiện các điện tích trên các bản của tụ điện. Nhưng khi một bản tụ điện đã thu được một điện tích  $+q$ , thì bản kia phải mang điện tích trái dấu  $-q$ . Thành thử, ta thấy điện tích của mạch điện (hệ khép kín) luôn bằng không theo thời gian.

Thí nghiệm chứng tỏ rằng điện tích là một đại lượng bảo toàn : điện tích tổng cộng của một hệ khép kín được bảo toàn theo thời gian.

Nguyên lý bảo toàn điện tích này có thể được áp dụng trong mọi thí nghiệm vật lý.



H.3. Sự tích điện cho một tụ điện.

### 2.2. Định luật bảo toàn điện tích dạng tích phân

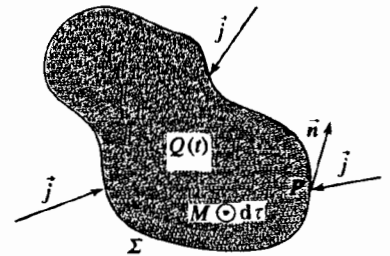
Ta hãy xét một hệ nằm trong thể tích  $V$  của không gian, cố định trong hệ quy chiếu mà ta đang sử dụng (H.4). Điện tích của hệ ở thời điểm  $t$  là :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(M, t) d\tau$$

Độ biến thiên điện tích của hệ trong đơn vị thời gian là :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau.$$

Theo nguyên lý bảo toàn điện tích, nếu điện tích toàn phần của hệ biến đổi theo thời gian, thì có nghĩa là chính hệ đã trao đổi điện tích với ngoại vi dưới dạng các dòng điện.



H.4. Sự biến đổi điện tích trong một thể tích  $V$  giới hạn bởi mặt kín  $\Sigma$ .

Sự trao đổi này có thể được mô tả bởi phương trình cân bằng :  $\frac{dQ}{dt} = I$ ,

trong đó  $I$  là dòng điện đi vào thể tích  $V$ , giới hạn bởi mặt kín  $\Sigma$  :

$$I = \oiint_{\Sigma} -\vec{j}(P,t) \cdot \vec{n} dS.$$

Dấu trừ chỉ hướng của pháp tuyến  $\vec{n}$  với mặt  $\Sigma$ , theo quy ước hướng ra phía ngoài, mặc dầu ta đang tìm cách biểu thị dòng điện đi vào trong thể tích  $V$ .

Phương trình :

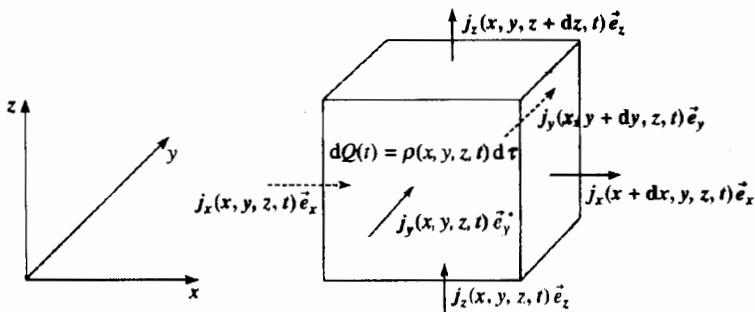
$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} d\tau = \oiint_{\Sigma} -\vec{j}(P,t) \cdot \vec{n} dS,$$

là phương trình tích phân mô tả sự bảo toàn điện tích đối với một thể tích  $V$  cố định (giới hạn bởi mặt kín  $\Sigma$ ) trong hệ quy chiếu đang xét.

### 2.3. Định luật bảo toàn điện tích dạng vi phân

Ta áp dụng sự cân bằng điện tích này cho một hình hộp nguyên tố (H.5). Độ biến thiên, giữa thời điểm  $t$  và  $t + dt$ , của điện tích  $\delta q = \rho(M, t) dx dy dz$  chứa trong thể tích nguyên tố đó là :

$$d(\delta q) = \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dt dx dy dz$$



◀ H.5. Sự biến đổi điện tích trong một thể tích nguyên tố  $d\tau = dx dy dz$ .

Để biểu thị cường độ dòng điện đi vào thể tích  $d\tau = dx dy dz$ , ta có thể kết hợp 6 mặt của hình hộp thành từng cặp. Các phần đóng góp của các mặt 1 và 2, trục giao với trục  $(Ox)$  là :

- mặt 1 :  $+ j_x(x, y, z, t) dy dz$  ;
- mặt 2 :  $- j_x(x + dx, y, z, t) dy dz$  ;

nghĩa là, tổng cộng ta có :

$$j_x(x, y, z, t) dy dz - j_x(x + dx, y, z, t) dy dz = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Sự kết hợp từng đôi hai mặt đối diện của các mặt còn lại cho ta các phần đóng góp bổ sung :

$$\left( -\frac{\partial j_y}{\partial y} dy dx dz \right) \text{ và } \left( -\frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy \right).$$

Như vậy, cường độ dòng điện đi vào trong hình hộp nguyên tố sẽ bằng :

$$\delta I = - \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Ở đây, ta đã quen biết biểu thức về toán tử div (trong tọa độ Descartes) của trường vectơ  $\vec{j}$  (xem phụ lục) :

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Sự cân bằng điện tích  $d(\delta q) = \delta I dt$ , với  $\delta I = -\operatorname{div} \vec{j} d\tau$ , sẽ dẫn ta đến hệ thức sau đây :

**Phương trình vi phân mô tả sự bảo toàn điện tích có dạng :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 .$$

Chú ý :

Biểu thức này không gắn với hệ tọa độ được chọn. Chỉ duy có công thức của toán tử div là phụ thuộc hệ tọa độ.

## 2.4. Trường hợp các chế độ không đổi

Một chế độ là không đổi (hoặc dừng hay độc lập với thời gian) nếu các đại lượng được nghiên cứu không phụ thuộc thời gian :

$$\rho(M, t) = \rho(M) \quad \text{và} \quad \vec{j}(M, t) = \vec{j}(M) .$$

Ta đã biết (xem H-Prépa, điện từ học, năm thứ nhất) trong trường hợp này :

- dòng điện đi vào trong một thể tích cố định cho trước bằng không : thông lượng của vectơ mật độ dòng điện đi qua một mặt kín bằng không.
- dòng điện có cùng giá trị như nhau qua mọi tiết diện của một ống dòng cho trước : vectơ mật độ dòng điện có thông lượng bảo toàn (H.6).

Hệ thức vi phân của sự bảo toàn điện tích mà ta vừa viết cho phép ta thể hiện các tính chất này dưới dạng vắn tắt như sau :

Ở chế độ không đổi, thì  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , và divergence của vectơ mật độ dòng điện thể tích bằng không :  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ .

Chú ý :

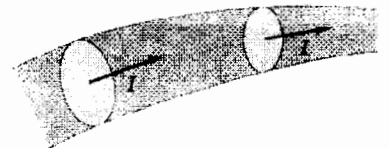
Định lý GREEN - Ostrogradski (xem phụ lục) cho phép ta viết :

$$\oiint_{\Sigma(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \, d\tau .$$

Ta nhận thấy tính chất vi phân  $\operatorname{div} \vec{j}$  cho ta thấy ngay các tính chất của thông lượng của vectơ  $\vec{j}$  ở chế độ không đổi mà ta đã nói ở trên.

## 2.5. Sự tính gần đúng các chế độ chuẩn dừng (gần như không đổi)

Đối với các dòng điện dạng chỉ, ta đã coi các dây dẫn như những ống dòng. Thành thử, trong điện động học, ta coi cường độ dòng điện qua mọi tiết diện của một dây dẫn cho trước là như nhau, thì có nghĩa là ta đã ngầm sử dụng tính chất bảo toàn của thông lượng của  $\vec{j}$ .



H.6. Dòng điện đều như nhau qua mọi tiết diện của một ống dòng.

Xét một nút của mạch điện và dựng một mặt kín  $\Sigma$  bao quanh nút (H.7). Thông lượng của  $\vec{j}$  qua  $\Sigma$  quy lại là thông lượng của  $\vec{j}$  qua các tiết diện  $S, S_1$  và  $S_2$  của các dây dẫn :

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -I, \quad \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_1 \quad \text{và} \quad \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_2.$$

Định luật về nút  $I = I_1 + I_2$  như vậy, sẽ trở lại dạng :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Ở đây nữa, ta lại ngầm thừa nhận sự bảo toàn thông lượng của  $\vec{j}$  :

Ấy vậy mà các kết quả của trước đây lại chứng tỏ rằng tính chất đó, thoạt tiên có vẻ không đúng trong chế độ biến thiên, nhưng vẫn được dùng trong điện động học cho trường hợp của một chế độ biến thiên nhưng được coi như chế độ không đổi !

Các định luật của điện động học tạo thành một mô hình : mô hình này (cũng như mọi mô hình) chỉ là gần đúng, nhưng cũng đủ chính xác để nghiên cứu sự hoạt động của các mạch điện mà ta đã gặp. Cần nhớ rằng trong điện động học, các phần tử (điện trở, cuộn cảm, tụ điện,...) được coi như các vật "điểm", có kích thước nhỏ so với bước sóng của hiện tượng tồn tại trong mạch điện.

Ta gọi *phép tính gần đúng các chế độ chuẩn dùng* là phép tính gần đúng mà ta đã ngầm sử dụng như thế. Theo tên gọi, thì đây là một kiểu chế độ mà trong đó, các đại lượng phụ thuộc thời gian đủ chậm để có thể biện luận như khi chế độ là không đổi.

Ta có thể lượng tử hóa chính xác hơn phép tính gần đúng đó bằng cách thừa nhận rằng thông tin được truyền tải bởi một tín hiệu điện từ (Ví dụ, tín hiệu "làm chuyển động các điện tích" trong dây dẫn của một mạch điện) sẽ lan truyền với vận tốc vào cỡ vận tốc ánh sáng, ký hiệu là  $c$ . Như vậy, sự trễ, gắn với sự lan truyền thông tin "dòng điện có giá trị  $I$ " giữa hai điểm của một dây dẫn cách nhau một khoảng  $L$ , sẽ vào cỡ  $\frac{L}{c}$  (H.8).

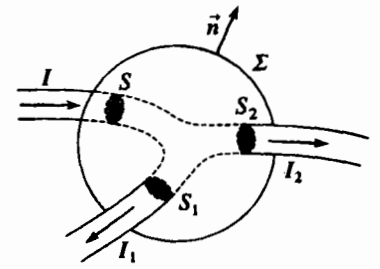
Sự trễ này có thể được bỏ qua nếu thời gian  $T$  đặc trưng cho sự biến đổi của dòng điện trong mạch điện (ví dụ chu kỳ trong trường hợp một chế độ hình sin) rất lớn so với độ sai lệch thời gian cần thiết này, nghĩa là :

$$T \gg \frac{L}{c}$$

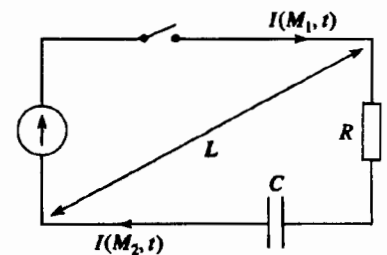
Trong trường hợp một mạch điện kích thước cỡ đêximét ( $L = 0,1\text{m}$ ), thì ta có  $T \gg 3.10^{-10}\text{s}$ . Trong chừng mực mà các tần số sử dụng chưa vượt quá vài MHz ( $T \gg 3.10^{-7}\text{s}$ ), thì phép tính gần đúng của các chế độ chuẩn dùng được chứng thực đầy đủ.

Thành thử ta lại tìm thấy giả thuyết của điện động học được nhắc đến trước đây : các kích thước của mạch điện (và tất nhiên các phần tử cấu thành mạch điện) đều rất nhỏ so với bước sóng  $\lambda = cT$  của hiện tượng tồn tại trong mạch.

Trong phép tính gần đúng của các chế độ chuẩn dùng, sự bảo toàn thông lượng của vector  $\vec{j}$ , được thể hiện cục bộ bởi hệ thức  $\text{div } \vec{j} = 0$ , có thể được áp dụng khắp nơi (và đặc biệt trong một môi trường dẫn điện).



H.7. Các dòng điện tại một nút của một mạch điện.



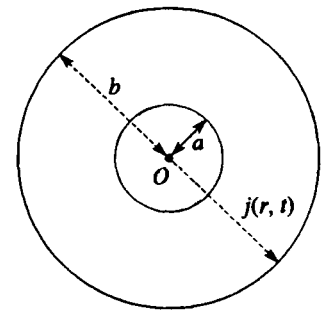
H.8. Mạch điện hoạt động trong phép tính gần đúng các chế độ chuẩn dùng :  $L \ll cT$  (trên sơ đồ,  $T = RC$ ).

**Chú ý :**

Ta cần chỉ rõ là phép tính gần đúng các chế độ chuẩn dừng có thể được áp dụng ở bên ngoài các miền tích tụ điện tích.

Đẳng thức  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  có vẻ như không thể áp dụng được khi có mặt tụ điện.

Thế nhưng mô hình của điện động học lại cho phép ta mô tả tụ điện như một phần tử "hình điểm" có điện tích toàn phần bằng không ; nhờ đó, loại bỏ được tính nhập nhằng nước đôi này. Ta sẽ trở lại việc mô tả phép tính gần đúng các chế độ chuẩn dừng, cùng với khó khăn này ở chương 3, khi xử lí các phương trình của trường điện từ ở chế độ bất kì.



H.9. Vector mật độ dòng xuyên tâm.

# Áp dụng 1

## Trường xuyên tâm có div bằng không.

Không gian giữa hai hình trụ đồng tâm có chiều cao  $h$  và các bán kính  $a$  và  $b$ , bị choán bởi một tụ điện. Một dòng điện cường độ  $I(t)$  chạy giữa hai hình trụ.

Bỏ qua mọi hiệu ứng bờ và trong phép tính gần đúng các chế độ chuẩn dừng, hãy xác định sự phân bố dòng điện giữa hai hình trụ đó.

Trong hệ ở hình học trụ này, vector mật độ dòng điện có dạng (H.9) :

$$\vec{j}(r, t) = j(r, t) \vec{e}_r .$$

Trong phép tính gần đúng các chế độ chuẩn dừng,  $\vec{j}$  vẫn còn có div bằng không, như thế có nghĩa là có sự bảo toàn cường độ dòng điện  $I(t)$  qua mọi hình trụ có chiều cao  $h$  và bán kính  $r$  ở giữa  $a$  và  $b$ .

Do đó,  $I(t) = 2\pi r h j(r, t)$  và :

$$\vec{j}(r, t) = \frac{I(t)}{2\pi r h} \vec{e}_r .$$

Nhớ rằng trong tọa độ trụ, một trường vector  $\vec{A} = A(r) \cdot \vec{e}_r$ , sẽ có div bằng không, khi :

$$\vec{A} = \frac{K}{r} \vec{e}_r$$

► Để tập luyện : bài tập 1.

## 3 Điện tích và trường điện từ

### 3.1. Các điện tích nguồn của trường điện từ

Các điện tích và các dòng điện tạo ra các điện trường và từ trường.

Ở năm học thứ nhất, chúng ta đã nghiên cứu các ví dụ về các trường không đổi :

- điện trường được tạo ra bởi một phân bố tĩnh các điện tích ;
- từ trường được tạo ra bởi một phân bố dừng (không phụ thuộc thời gian) các dòng điện.

Muốn vậy, ta đã phát biểu thành tiên đề định luật COULOMB và định luật BIOT và SAVART. Các định luật tích phân này xác định trường điện từ không đổi được tạo ra bởi phân bố nói trên.

Ta sẽ thấy mối liên hệ giữa trường điện từ và các nguồn của trường có thể được thể hiện nhờ các định luật vi phân, các phương trình MAXWELL, như ta đã làm để thể hiện cục bộ nguyên lý bảo toàn điện tích.

Mặt khác, ta sẽ mở rộng quan điểm này cho trường hợp tổng quát các trường không nhất thiết phải là không đổi. Khi đó, ta sẽ thấy hai trường  $\vec{E}$  và  $\vec{B}$  chỉ là hai mặt của cùng một thực thể mà ta chỉ định dưới tên gọi là trường điện từ.

Các điện tích và dòng điện là các nguồn của trường điện từ.

### 3.2. Điện tích dưới tác dụng của trường điện từ

Như ta đã biết ở năm học thứ nhất, điện trường và từ trường được biểu hiện nhờ tác động của chúng lên các điện tích và dòng điện.

Một hạt có điện tích  $q$  và vận tốc  $\vec{v}$ , chuyển động trong một miền mà ở đó tồn tại một điện trường  $\vec{E}$  và một từ trường  $\vec{B}$ , thì sẽ chịu tác dụng của lực LORENTZ :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Lực tác dụng bởi trường điện từ (tạo ra bởi các điện tích di động hay không) thể hiện tương tác điện từ giữa các điện tích. Do đó, ta có thể coi trường điện từ như một yếu tố tính toán trung gian đơn giản, còn lực mới là đối tượng vật lý duy nhất "có thể quan sát được".

Tuy nhiên, ta sẽ thấy là trường điện từ mang năng lượng (ví dụ năng lượng được truyền tải bởi một chùm sáng). Ta cũng có thể kết hợp với nó một xung lượng (và một mômen động), như ta đã từng làm một cách rất cổ điển cho các đối tượng vật lý cụ thể. Trường điện từ là một thực thể vật lý thực tế mà ta sẽ nghiên cứu, trong các chương tới, các định luật vận động và hệ quả.

## Áp dụng 2

### Sự lệch của một chùm hạt.

1) Trong trường hợp có một phân bố theo thể tích, đặc trưng bởi các mật độ điện tích  $\rho(M, t)$  và mật độ dòng điện  $\vec{j}(M, t)$ , hãy xác định lực thể tích (lực khối) mà ta có thể kết hợp với lực LORENTZ tác dụng lên một điện tích.

2) Từ đó ta có thể suy ra được điều gì về chuyển động của một chùm hạt tích điện, được coi như một ống dòng thẳng, tiết diện tròn bán kính  $a$ , chứa  $n$  điện tích  $q$  trong đơn vị thể tích chuyển động với vận tốc  $\vec{v}$  theo chiều của trục  $(Oz)$  của ống? (Vấn đề trong sự mô hình hóa này, là một phân bố "vô hạn" hoạt động ở chế độ "không đổi".)

1) Điện tích  $dq = \rho d\tau$  nằm trong một thể tích nguyên tố  $d\tau$ , sẽ chịu một lực nguyên tố gắn với điện trường là  $d\vec{F} = \rho \vec{E} d\tau$ .

Điện tích nguyên tố lưu động :

$$dq_m = \rho_m(M, t) d\tau,$$

đang chuyển động với vận tốc toàn bộ  $\vec{v}$ , sẽ chịu thêm lực nguyên tố :

$$(\rho_m \vec{v} d\tau) \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau.$$

gắn với từ trường.

Như vậy, lực nguyên tố tổng cộng là

$$d\vec{F} = (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau$$

Vậy thì, tác dụng của trường điện từ lên môi trường được đặc trưng bởi lực thể tích  $\vec{F}_{vol} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$  áp dụng vào chất lỏng điện tích mà một phân (điện tích khối  $\rho_m$  không nhất thiết có thể đồng nhất được với  $\rho$ ) đang chuyển động với vận tốc  $\vec{v}$ .



2) Ta hãy coi một ống chứa các điện tích đang chuyển động như một hình trụ vô hạn mang mật độ điện tích khối  $\rho = nq$  và có mật độ dòng điện khối đi qua là :

$$\vec{j} = nq\vec{v}.$$

Điện trường do phân bố này tạo ra là xuyên tâm :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r,$$

và từ trường là trục xuyên tâm :

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta,$$

trong tọa độ trụ có trục  $(Oz)$ . Khi áp dụng định lý GAUSS cho một hình trụ có trục  $(Oz)$  và bán kính  $r$ , và định lý AMPÈRE cho một vòng tròn có trục  $(Oz)$  và bán kính  $r$ , thì ta được, trong ống ( $r \leq a$ ) :

$$\vec{E} = \frac{\left(\frac{\rho\pi r^2}{\epsilon_0}\right)}{2\pi r}\vec{e}_r = \frac{nq}{2\epsilon_0}r\vec{e}_r,$$

$$\text{và } \vec{B} = \frac{\mu_0 j\pi r^2}{2\pi r}\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 nqv}{2}r\vec{e}_\theta.$$

Từ đó suy ra lực thể tích (lực khối) tác dụng lên chùm :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{vol}} &= \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{(nq)^2}{2\epsilon_0}r(1 - \epsilon_0\mu_0v^2)\vec{e}_r \\ &= \frac{(nq)^2}{2\epsilon_0}r\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\vec{e}_r \end{aligned}$$

vì  $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$ .

Vì vận tốc các hạt nhỏ hơn vận tốc ánh sáng trong chân không, nên ta thấy chùm tia tích điện có khuynh hướng giãn ra.

Trong một máy gia tốc hạt, ví dụ phát ra các chùm electron, ta phải đều đặn tập trung chùm để tránh cho các hạt khối bị phân tán.

Lưu ý rằng lực có nguồn gốc từ, có tác dụng làm co thắt, vì nó có khuynh hướng làm tiêu tụ chùm hạt. Hiệu ứng co thắt này cũng có thể biểu hiện đối với một chùm hạt về toàn bộ thì trung hòa, nhưng bên trong có một dòng điện chạy qua.

Hiệu ứng "bó chặt" này cho phép làm ổn định một cột plasma (cột khí bị ion hóa) có khuynh hướng giãn rộng ra do tác dụng của áp suất động học gắn với chuyển động hỗn loạn của các hạt hợp thành cột plasma.

### 3.3. Công suất của trường truyền cho các điện tích

Công suất của lực LORENTZ thực hiện trên một hạt điện tích  $q$  chịu tác dụng của các trường  $\vec{E}$  và  $\vec{B}$  bằng :

$$\mathcal{P} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Lực có nguồn gốc từ, vuông góc với chuyển động, thì không sinh công.

Trong một môi trường chứa  $n$  điện tích linh động trên đơn vị thể tích, thì công suất theo thể tích của các lực điện từ đối với một thể tích nguyên tố  $d\tau$  sẽ có dạng :

$$d\mathcal{P} = (nq d\tau)\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot d\tau \vec{E},$$

nghĩa là, đối với một đơn vị thể tích, ta có :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Công suất trên đơn vị thể tích  $\mathcal{P}_{\text{vol}}$  mà trường điện từ truyền cho các điện tích là :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Công suất này gắn với điện trường. Thành thử trong một máy gia tốc hạt, các hạt tích điện được khởi động là nhờ có điện trường.

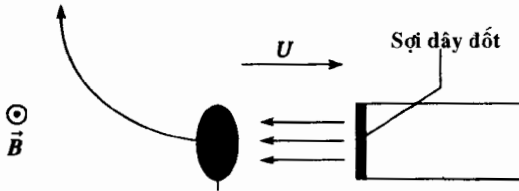
Một từ trường sẽ có thể làm lệch các hạt đó, mà không cung cấp năng lượng cho chúng, để giam hãm chúng trong một vành khuyên lưu trữ.

# Áp dụng 3

## Gia tốc một chùm hạt

Các hạt có điện tích  $q$  và khối lượng  $m$ , được phát xạ bởi một sợi dây đốt nóng, với vận tốc ban đầu không đáng kể, và được gia tốc bởi một điện trường không đổi và đều  $\vec{E}_0$  tồn tại giữa các điện cực gia tốc, cách nhau một khoảng  $d$  (H.10).

- 1) Tìm vận tốc  $\vec{v}_0$  mà các hạt điện tích đạt được.
- 2) Tìm bán kính của chuyển động quay của các hạt đó nếu chúng lọt vào một miền có một từ trường đều, không đổi  $\vec{B}_0$ , vuông góc với vận tốc  $\vec{v}_0$  của chúng lúc ra khỏi các điện cực tăng tốc.



**H.10.** Các electron, sau khi được gia tốc dưới một hiệu điện thế  $U$ , thâm nhập vào một vùng có từ trường đều không đổi  $\vec{B}$ .

Dữ kiện : các điện tích được dùng là các electron có điện tích  $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C và khối lượng  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg ; hiệu điện thế gia tốc có giá trị 1000 V và từ trường bằng 0,002 T.

1) Giữa các điện cực gia tốc, các điện tích chịu tác dụng của lực  $\vec{F} = q\vec{E}_0$ . Lực này cung cấp cho chúng công  $W = qE_0d$  khi chúng đi qua miền gia tốc. Nếu vận tốc ban đầu của chúng nhỏ không đáng kể so với vận tốc cuối cùng  $v_0$  của chúng, thì định lý động năng cho ta :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qE_0d.$$

Điện trường không đổi xuất phát từ một thế vô hướng  $V$ , và điện trường đều  $E_0$  liên hệ với hiệu điện thế  $U$  giữa các điện cực theo :

$$U = E_0d.$$

Trong trường hợp các electron, vận tốc đạt được bằng :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 18,8 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}.$$

Vận tốc này vào cỡ  $\frac{c}{16}$ , và kết quả này là giới hạn có hiệu lực của cơ học cổ điển.

2) Khi các electron thâm nhập vào miền có từ trường, thì phương trình chuyển động của chúng có dạng :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

nghĩa là :  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{v}$ , với  $\vec{\omega}_0 = -\frac{q\vec{B}_0}{m}$ .

Ta hãy mô tả chuyển động này trong các tọa độ Descartes bằng cách chọn trục ( $Oz$ ) song song với từ trường  $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ , và trục ( $Ox$ ) song song với vận tốc ban đầu  $\vec{v}_0$  (ở thời điểm  $t = 0$ ).

Phương trình biến đổi của vector vận tốc chứng tỏ rằng vector  $\vec{v}$  thực hiện một chuyển động tiến động với vận tốc góc không đổi  $\omega_0$  chung quanh trục ( $Oz$ ). Từ đó ta rút ra các thành phần của  $\vec{v}$  ở thời điểm  $t$  :

$$v_x = v_0 \cos(\omega_0 t) \text{ và } v_y = v_0 \sin(\omega_0 t).$$

Lấy vị trí ban đầu của hạt làm gốc của hệ tọa độ, ta suy ra phương trình quỹ đạo của hạt theo thời gian, nằm trong mặt phẳng ( $xOy$ ) :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

và 
$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t)).$$

Quỹ đạo này, có phương trình trong các tọa độ Descartes :

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2,$$

là một vòng tròn bán kính :

$$R = \left| \frac{v_0}{\omega_0} \right| = \left| \frac{mv_0}{qB_0} \right| \approx 5,3 \text{ cm}.$$

# 4 Sự dẫn điện

## 4.1. Định luật OHM dạng vi phân

### 4.1.1. Độ dẫn điện của một môi trường

Một vật liệu dẫn điện chứa các điện tích tự do, hay điện tích dẫn, có khả năng dịch chuyển dưới tác dụng của một điện trường áp vào vật liệu. Đó là trường hợp :

- các kim loại, trong đó các điện tích dẫn là electron ;
- các dung dịch ion, trong đó sự dẫn điện gắn với các chuyển dời của toàn bộ các ion.

Trong nhiều tình huống, điện trường áp vào thường khá yếu, nên vector mật độ dòng điện  $\vec{j}$  và điện trường  $\vec{E}$  liên kết với nhau theo một hệ thức tuyến tính gọi là định luật OHM dạng vi phân :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Hệ số  $\gamma$  chỉ độ dẫn điện của môi trường đo bằng  $S \cdot m^{-1}$  ( $S$  là siemen hay ohm<sup>-1</sup>). Phạm vi biến đổi của độ dẫn điện của môi trường cực kì rộng, từ các vật cách điện và vật dẫn điện tối đến các vật dẫn điện rất tốt (H.11)

Môi trường	Độ dẫn điện ( $S \cdot m^{-1}$ )	Bản chất của môi trường	
Parafin	$10^{-8}$	Chất cách điện	
đất mùn	$6 \cdot 10^{-6}$	vật dẫn thường	
Chất điện phân	$10^{-2}$	độ dẫn điện phụ thuộc nồng độ	
Kim loại	Hg	$10^6$	chất dẫn điện rất tốt
	Al	$3,7 \cdot 10^7$	
	Au	$4,6 \cdot 10^7$	
	Cu	$5,9 \cdot 10^7$	
	Ag	$6,2 \cdot 10^7$	

H.11. Độ dẫn điện của một số môi trường.

### 4.1.2. Mô hình sơ cấp về sự dẫn điện

#### ■ Sự trôi giạt của các điện tích dẫn

Ta xét một môi trường dẫn điện chứa  $n$  hạt (có điện tích  $q$  và khối lượng  $m$ ) trên đơn vị thể tích, có khả năng bảo đảm sự dẫn điện của môi trường. Việc áp vào môi trường một điện trường sẽ kéo theo một chuyển động trôi giạt của các điện tích dẫn trong môi trường, chồng chất lên chuyển động nhiệt hỗn loạn của chúng. Ta ký hiệu  $\vec{v}$  là vận tốc kết hợp với chuyển động toàn bộ này của chất lỏng các điện tích dẫn có khối lượng riêng  $\rho = nm$ .

Ta thừa nhận là tác dụng của điện trường vĩ mô  $\vec{E}$  áp vào môi trường, có thể được biểu hiện qua trung gian của một lực trên đơn vị thể tích

$$\vec{F}_{vol} = nq\vec{E}.$$

## ■ Mô hình DRUDE

Để giải thích sự tồn tại của vận tốc trôi giạt giới hạn, ta sẽ mô hình hóa tác động của các tương tác giữa các điện tích dẫn và các điện tích cố định của vật liệu bằng một lực thể tích, chống lại chuyển động đó và tỉ lệ với vận tốc trôi giạt :

$$\vec{f}_{\text{vol}} = -\rho \frac{\vec{v}}{\tau},$$

trong đó  $\tau$  đồng nhất với thời gian.

Đối với mô hình này (do nhà vật lí Đức Paul DRÜDE (1900) đưa ra), thì phương trình chuyển động của chất lỏng các điện tích dẫn có dạng :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = nq\vec{E} - \rho \frac{\vec{v}}{\tau}$$

hay :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E}.$$

### Chú ý :

Biểu thức sau cùng tương tự như phương trình chuyển động của một điện tích  $q$  có khối lượng  $m$ , chịu tác dụng của điện trường  $\vec{E}$  và lực ma sát nhớt  $\vec{f} = -m \frac{\vec{v}}{\tau}$ . Nhưng trong mô hình vĩ mô này của DRÜDE, thì vận tốc  $\vec{v}$  lại chỉ vận tốc toàn bộ của chất lỏng các điện tích dẫn, chứ không phải vận tốc của một hạt.

Nếu điện trường được áp vào môi trường ở thời điểm  $t = 0$ , thì sự biến đổi của vận tốc trôi giạt được thể hiện bởi :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} \vec{E} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Thành thử hằng số thời gian  $\tau$  thể hiện như thời gian tích thoát của môi trường. Thật vậy, khi  $t \gg \tau$ , thì vận tốc trôi giạt có thể coi như đạt giới hạn của nó :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{q\tau}{m} \vec{E} = \mu \vec{E},$$

trong đó  $\mu$  là độ linh động của các phân tử mang điện tích nói trên.

Khi đó, mật độ dòng điện tương ứng sẽ là :

$$\vec{j} = nq\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E}.$$

## ■ Độ dẫn điện của môi trường

Kết quả này phù hợp với biểu thức vi phân của định luật OHM, do đó, độ dẫn điện của môi trường có giá trị bằng :

$$\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}.$$

Trong trường hợp có nhiều loại phân tử mang (các điện tích  $q_i$ , khối lượng  $m_i$  và mật độ  $n_i$ ) tham gia (ví dụ trong một dung dịch ion chứa nhiều loại ion khác nhau), thì nói chung, có thể bỏ qua các tác dụng tương hỗ giữa chúng với nhau, và ta có thể coi chúng như những chất lỏng dẫn điện độc lập, tuân theo phương trình chuyển động nói trên. Các phần đóng góp của chúng vào dòng điện được cộng vào nhau và độ dẫn điện của môi trường lúc đó có dạng :  $\gamma = \sum_i \gamma_i$ .

Độ dẫn điện tỷ lệ với số điện tích dẫn  $n$  trong đơn vị thể tích. Đặc trưng này có ích trong hóa học khi định lượng độ dẫn điện : Số đo độ dẫn điện của dung dịch cho phép theo dõi sự biến đổi các nồng độ của các ion đang hòa tan khi định lượng.

Trong một môi trường kim loại, số hạt nhảy cảm tương đối ít với nhiệt độ ở những nhiệt độ thông thường. Độ dẫn điện của một kim loại giảm khi nhiệt độ tăng, vì chuyển động nhiệt của các ion trong mạng kim loại có khuynh hướng làm tăng lực ma sát chống lại chuyển động của các điện tích dẫn.

Trong chất bán dẫn, thì mật độ điện tích dẫn, nhạy cảm nhiều hơn với ảnh hưởng của nhiệt độ, nên tăng theo nhiệt độ. Sự tăng số điện tích dẫn lúc đó sẽ lớn hơn sự tăng hiệu ứng các va chạm của các điện tích dẫn với mạng ion. Do đó : độ dẫn điện của chất bán dẫn tăng khi nhiệt độ tăng.

Chú ý :

Khi năng lượng của các phân tử mang đang chuyển động trở thành rất lớn, thì đôi khi nó cho phép tạo ra các phân tử mang điện tích lưu động bổ sung bằng sự ion hóa.

Do hiệu ứng thác này, mà sự dẫn điện không còn tuyến tính nữa. Hiện tượng này được sử dụng trong các diốt ZENER, khi chúng bị phân cực ngược và chịu một điện áp cao hơn điện áp ZENER, vì ngoài điện áp này thì hiệu ứng thác mới xảy ra.

# Áp dụng 4

## Sự dẫn điện của kim loại.

1) Đối với một chất dẫn điện rất tốt như đồng kim loại, hãy ước tính độ lớn của vận tốc trôi giạt của các electron dẫn trong một dây đồng tiết diện  $S = 1 \text{ mm}^2$ , trong có dòng điện  $I = 10\text{A}$  chạy qua.

So sánh vận tốc trôi giạt với vận tốc chuyển động nhiệt của một electron tự do ở nhiệt độ  $T = 300\text{K}$ .

2) Hãy ước tính thời gian tích thoát  $\tau$  của môi trường. Khi coi  $\tau$  là thời gian va chạm (thời gian trung bình giữa hai va chạm liên tiếp của một điện tích dẫn với mạng kim loại), hãy đánh giá quãng chạy tự do trung bình  $l$  của các điện tích dẫn.

3) Điện trường áp vào môi trường có dạng hình sin :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t}$  theo kí hiệu phức.

Chứng minh rằng mô hình kể trên cho phép xác định độ dẫn điện phức  $\gamma$  ở chế độ ổn định hình sin.

Trong khoảng tần số nào ta có thể coi độ dẫn điện của môi trường là giá trị của nó ở chế độ không đổi ?

## Dữ liệu :

- khối lượng của electron :  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ;
- điện tích của electron :  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;
- hằng số AVOGADRO :  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;
- hằng số BOLTZMANN :

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$$

## Đồng :

- độ dẫn điện :  $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- khối lượng riêng :  $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- khối lượng mol :  $M = 64\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Người ta coi mỗi nguyên tử đồng cung cấp một electron dẫn.

1) Nếu mỗi nguyên tử đồng chỉ mang lại một electron dẫn duy nhất, thì mật độ khối các electron dẫn bằng :

$$n = \frac{\mathcal{N}_A \mu}{M} \approx 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Mật độ dòng điện trong dây đồng là :

$$j = \frac{I}{S} = 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Từ đó suy ra vận tốc trôi giạt :

$$|v| = \left| \frac{j}{ne} \right| \approx 0,74 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Nếu ta dùng hệ thức  $\frac{1}{2} m v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$  để tính vận tốc chuyển động nhiệt của electron, thì ta được  $v_T \approx 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ở nhiệt độ xung quanh. Vậy ta có  $|v| \ll v_T$  điều này đã chứng minh mô hình và do vậy chứng thực các phép tính trên đây.

2) Thời gian tích thoát  $\tau$  bằng :

$$\tau = \frac{m\gamma}{ne^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}.$$

Quãng chạy tự do được định nghĩa là tích của vận tốc trung bình của chuyển động nhiệt với thời gian va chạm. Như vậy ta tính được :

$$l = v_T \tau \approx 2,5 \text{ nm}.$$

Lưu ý rằng quãng chạy đó lớn hơn rõ rệt kích thước của mắt mạng tinh thể, điển hình là vào cỡ vài phần mười của nanomet.

3) Nhớ rằng  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{j\omega t}$  là vận tốc phức của chất lỏng electron dẫn ; khi chế độ hình sin

được thiết lập, thì phương trình chuyển động toàn bộ :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} \vec{E},$$

$$\text{cho ta } \vec{v}_0 = -\frac{m}{1+j\omega\tau} \vec{E}_0.$$

Vectơ mật độ dòng phức :

$$\vec{j} = \vec{j}_0 e^{j\omega t} = -ne\vec{v},$$

cho ta xác định được độ dẫn điện phức :

$$\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{1+j\omega\tau}.$$

Ta sẽ có thể lẫn lộn độ dẫn điện phức này với

giá trị của nó  $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$  đối với các xung động

$\omega \ll \frac{1}{\tau}$ . Để nghiên cứu các mạch điện trong

đó tần số bao giờ cũng rất nhỏ so với  $10^{14} \text{ Hz}$ , ta có thể nhầm lẫn độ dẫn điện phức với giá trị của nó ở tần số thấp, vì thời gian đặc trưng cho

sự biến đổi  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  vẫn rất lớn so với thời gian tích thoát  $\tau$  của môi trường dẫn điện.

### ■ Ảnh hưởng của từ trường

Khi môi trường dẫn điện lại chịu thêm tác dụng của từ trường  $\vec{B}$ , thì trước tiên, ta phải kể đến lực (trên đơn vị) thể tích bổ sung  $\vec{F}_{\text{vol}} = nq\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Không thể bỏ qua lực này nếu từ trường vào cỡ  $\frac{E}{v} = \frac{j}{\nu}$ .

Khi dùng các trị số của áp dụng trên, ta thu được một từ trường cỡ 240 tesla, thật là quá lớn !

Trong thực tế, tác dụng của từ trường (kể cả từ trường do chính môi trường dẫn điện gây ra) thể hiện trong định luật OHM thường rất yếu. Muốn kể đến nó, ta phải dùng phương trình vận động :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

ở chế độ không đổi (hay biến thiên, đặc trưng bởi thời gian  $T \gg \tau$ ), phương trình này dẫn tới việc liên kết vectơ mật độ dòng điện  $\vec{j} = nq\vec{v}$  với trường điện từ nhờ hệ thức :

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m} \left( \vec{E} + \frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B} \right) = \gamma (\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}),$$

trong đó  $R_H = \frac{1}{nq}$  gọi là hằng số HALL của môi trường.

Chú ý :

- Cần nói rõ rằng hệ thức này đúng đối với một vật dẫn cố định.
- Ta sẽ trở lại vấn đề ảnh hưởng của từ trường ở §5.

■ Hệ quy chiếu nghiên cứu

Vận tốc  $\vec{v}$ , cho phép ta xác định vectơ mật độ dòng  $\vec{j}$ , lại chính là vận tốc toàn bộ các phân tử mang điện tích, linh động trong hệ quy chiếu gắn với môi trường dẫn điện. Như vậy, định luật OHM được viết trong hệ quy chiếu Galilée đang chuyển động ở thời điểm  $t$  với vận tốc của vật dẫn trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Ta sẽ trở lại ảnh hưởng của chuyển động của vật dẫn với vận tốc theo  $\vec{v}_e$  khi nghiên cứu cảm ứng điện từ.

Mô hình vi mô DRÜDE cho phép giải thích sự dẫn điện của một môi trường thuần trở.

Trong hệ quy chiếu của vật dẫn, vectơ mật độ dòng điện  $\vec{j}$  và điện trường  $\vec{E}$  liên kết tuyến tính với nhau theo hệ thức :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

trong đó  $\gamma$  là độ dẫn điện của môi trường biểu thị bằng  $S \cdot m^{-1}$ .

► Để tập luyện : bài tập 2 và 3.

4.2. Định luật OHM dạng tích phân

Xét một đoạn ống dòng nằm giữa hai tiết diện  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_2$  (H.12) ở chế độ dẫn điện không đổi trong một môi trường thuần trở có độ dẫn điện  $\gamma$ .

Ở chế độ không đổi, cường độ dòng điện đi từ  $\Sigma_1$  về  $\Sigma_2$  là như nhau qua mọi tiết diện (có định hướng) của ống dòng :

$$I = \iint_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2.$$

Điện trường không đổi xuất phát từ một thế vô hướng  $V$  :

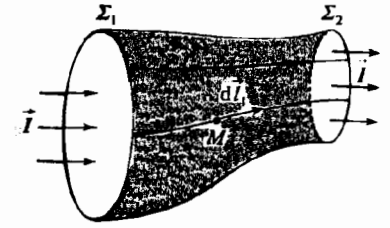
$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}V}.$$

Vectơ  $\vec{j}$  song song với điện trường  $\vec{E}$ , và hai tiết diện  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_2$ , vuông góc với các đường dòng, cấu thành các mặt đẳng thế.

Hiệu điện thế  $U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$  lúc này có thể được tính trên toàn đường đi, dẫn từ tiết diện  $\Sigma_1$  tới tiết diện  $\Sigma_2$  của ống.

Các vectơ mật độ dòng điện  $\vec{j}$  và điện trường  $\vec{E}$  tỉ lệ với nhau và cùng chiều. Vậy ta có thể xác định tỉ số :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_{\Sigma_1 \text{ hay } \Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\gamma \iint_{\Sigma_1 \text{ hay } \Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}.$$



H.12. Điện trở của một đoạn ống dòng.

Tỉ số này xác định điện trở  $R$  của phần tử đoạn ống của môi trường thuần trở: tỉ số đó dương và không phụ thuộc dạng hình học của đoạn ống dòng đang xét. Đại lượng này, biểu thị ra ohm ( $\Omega$ ), cho phép ta viết hệ thức thường dùng  $U = RI$ .

Trong trường hợp mật độ dòng điện theo thể tích là đều, thì điện trở của một ống dẫn điện hình trụ có tiết diện  $S$  và chiều dài  $L$  bằng (H.13):

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_{\Sigma_1 \text{ hay } \Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \frac{EL}{jS} = \frac{L}{\gamma S} = \frac{\rho_R L}{S}$$

trong đó  $\rho_R = \frac{1}{\gamma}$  là điện trở suất của môi trường, biểu thị ra  $\Omega \cdot m$ .

► **Đề tập luyện : bài tập 4, 5, 6.**

## 4.3. Hiệu ứng Joule

### 4.3.1. Công suất tiêu tán trên đơn vị thể tích

Công suất trên đơn vị thể tích mà trường cung cấp cho các điện tích linh động là:

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Đối với một môi trường thuần trở, thì biểu thức trên có dạng:

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2$$

Công suất này do bị tiêu tán bởi những tương tác giữa các phần tử mang điện tích linh động và mạng kim loại chẳng hạn, mà được biến đổi thành năng lượng của chuyển động nhiệt: một điện trở có một dòng điện chạy qua sẽ nóng lên. Hiện tượng này được sử dụng trong các lò sưởi điện.

# Áp dụng 5

### Công suất của “lực ma sát”

Hãy tìm lại các biểu thức nêu trên bằng cách sử dụng lực “ma sát” thể tích, được đưa vào trong khuôn khổ của mô hình DRÜDE.

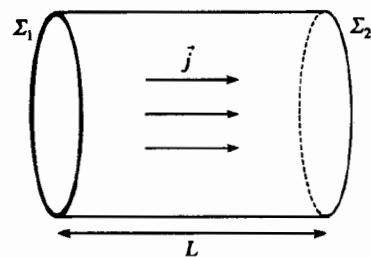
Chất lỏng các phần tử mang linh động có vận tốc toàn bộ  $\vec{v}$  chịu tác dụng của lực thể tích:

$$\vec{f}_{\text{vol}} = -\rho \frac{\vec{v}}{\tau}$$

Công suất thể tích tương ứng là:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{vol}} \cdot \vec{v} &= -\rho \frac{v^2}{\tau} = -\frac{nmv^2}{\tau} = -\frac{nm \left( \frac{j}{nq} \right)^2}{\tau} \\ &= -\frac{j^2}{\gamma} \end{aligned}$$

Biểu thức này làm nổi bật sự tiêu tán công suất do trường cung cấp cho các phần tử mang linh động để làm nóng môi trường dẫn điện.



H.13. Trường hợp một vật dẫn hình trụ mà trong đó  $\vec{j}$  là đều.



### 4.3.2. Công suất tiêu tán trong một ống dẫn điện

Ta lại xét một đoạn ống dòng nằm giữa các tiết diện  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_2$ , vuông góc với các đường dòng và với điện trường.

Trong một ống dòng dạng chỉ, có tiết diện nguyên tố  $dS_1$  ở lối vào, vectơ mật độ dòng  $\vec{j}$  nằm cùng đường thẳng với độ dời nguyên tố  $d\vec{l}$  dọc theo ống hình chỉ đó, và với vectơ diện tích nguyên tố  $\delta\vec{S}$  (H.14).

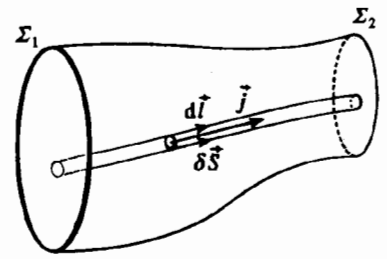
Công suất tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong ống nguyên tố đó là :

$$d\mathcal{P} = \int_1^2 (\vec{j} \cdot \vec{E})(d\vec{l} \cdot \delta\vec{S}) = \int_1^2 \delta I ((\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \delta IU.$$

trong đó  $\delta I$  là dòng điện nguyên tố chạy qua ống có tiết diện nhỏ.

Khi lấy tổng theo tất cả các ống nguyên tố tạo thành đoạn ống dòng đang xét, thì ta tìm lại được các biểu thức cổ điển của công suất tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong đoạn môi trường thuần trở này.

$$\mathcal{P} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$



H.14. Hiệu ứng JOULE trong một vật dẫn.

## 5 Lực từ tác dụng lên dòng điện

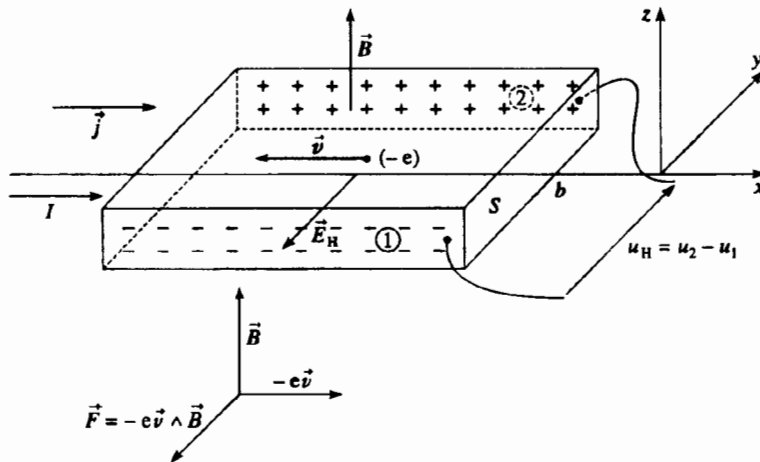
### 5.1. Hiệu ứng Hall

#### 5.1.1. Một mô hình sơ cấp

Xét một dây dẫn mà ta mô hình hóa tiết diện bằng một hình chữ nhật có các cạnh chiều dài  $a$  và  $b$ . Dây dẫn này, dưới tác dụng của điện trường  $\vec{E}_0$ , là trung khu của một dòng điện dẫn hướng theo  $(Ox)$ .

Trong dây dẫn chứa  $n$  phân tử mang điện tích linh động, có vận tốc trôi giạt  $\vec{v}$  và điện tích  $q$  (trên hình 15, ta giả thiết rằng các điện tích linh động là các electron :  $q = -e$ ), mật độ dòng điện thể tích là :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = nqv\vec{e}_x.$$



◀ H.15. Hiệu ứng HALL trong một vật dẫn kim loại.

Tác dụng của từ trường  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , áp vào vật dẫn, được thể hiện bởi sự xuất hiện một lực LORENTZ bổ sung :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -qvB\vec{e}_y.$$

### ■ Chế độ quá độ

Lực này (là lực trung bình, vì ta quan tâm đến hoạt động tập thể của các phân tử mang điện tích linh động) có xu hướng làm lệch phân tử mang điện tích ra khỏi quỹ đạo của nó theo phương của trục (Oy) (H.16a). Nếu các điện tích dẫn là các electron có vận tốc  $\vec{v}$  hướng ngược chiều với vector mật độ dòng điện  $\vec{j}$ , thì lực này có khuynh hướng làm lệch chúng về phía mặt 1. Mặt này sẽ tích điện âm trong khi mặt 2 biểu lộ rõ sự thiếu hụt electron (H.16b).

Các điện tích mặt xuất hiện, tự chúng lại tạo ra một điện trường gọi là *điện trường HALL*, và điện trường này lại tác dụng lên các electron dẫn.

### ■ Chế độ không đổi

Điện trường HALL tạo ra lực đối nghịch với lực làm lệch trước đây. Thành thử hệ phải hướng tới một chế độ không đổi mới, trong đó lực làm lệch và lực do điện trường HALL tạo ra bù trừ nhau (H.16b); chuyển động của các điện tích dẫn lại giống như khi không có từ trường.

$$q\vec{E}_H + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}. \text{ Vì vậy } \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = R_H \vec{B} \wedge \vec{j}.$$

trong đó  $R_H = \frac{1}{nq}$  là hằng số HALL của môi trường.

### 5.1.2. Hiệu điện thế HALL

Mô hình mà ta vừa trình bày lại quá đơn giản để có thể tin tưởng vô hạn vào đó, tuy nhiên, nó lại cho phép ta tính đến việc xuất hiện một *hiệu điện thế HALL* giữa các mặt 1 và 2 :

$$U_H = \int_1^2 -\vec{E}_H \cdot d\vec{l} = -bE_H = -\frac{jb}{nq} B = -\frac{1}{nqa} IB, \text{ vì } I = jab.$$

Chú ý :

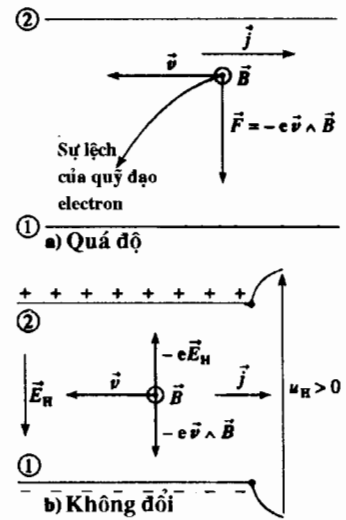
Dấu của hiệu điện thế HALL gắn với dấu của các phân tử mang điện tích linh động (H.17). Đối với cùng một dòng điện  $I$  như nhau, các hiệu điện thế HALL gây ra bởi :

- một dải băng chất dẫn điện, trong đó các phân tử mang điện tích là các electron ( $q = -e$ ) ;
- và một dải băng chất bán dẫn mà các phân tử mang điện tích chiếm ưu thế là các lỗ (lỗ khuyết electron,  $q = +e$ ) ; sẽ có dấu ngược nhau.

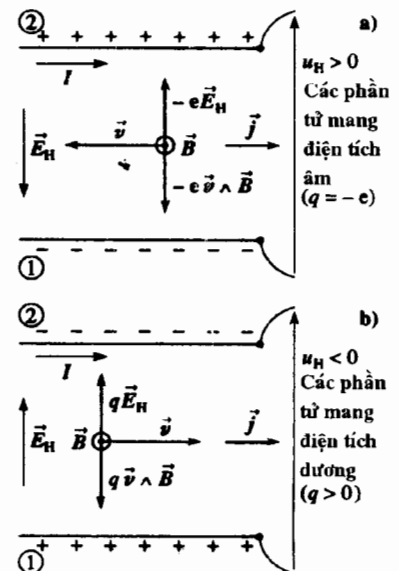
Ta cũng phải thừa nhận rằng tác dụng làm lệch của từ trường đều giống nhau đối với một phân tử mang "+q, +v" hay một phân tử mang "-q, -v", trong khi các điện trường HALL lại ngược nhau.

Đối với một dòng điện  $I$  và một dải băng (có hệ số  $\frac{1}{nqa}$ ) cho trước, thì

hiệu điện thế HALL cho phép xác định giá trị của từ trường : đây là nguyên lý hoạt động của máy dò HALL.



H.16a. Chế độ quá độ.  
b. Chế độ không đổi.



H.17. Hiệu điện thế HALL và dấu điện tích của các phân tử mang linh động.

- a. Các phân tử mang điện tích âm.
- b. Các phân tử mang điện tích dương.

Đối với một dải băng bằng bạc ( $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ;  $q = -e$ ; chiều dày  $a = 0,1 \text{ mm}$ ) có một dòng điện cao  $I = 5 \text{ A}$  chạy qua trong một từ trường mạnh  $B = 1 \text{ T}$ , thì giá trị  $U_H = 5,2 \mu\text{V}$  là quá nhỏ.

Như vậy, phải khuếch đại hiệu ứng đó để có thể thực hiện được một phép đo chính xác. Hiện tượng này có thể được quan sát dễ dàng với các vật liệu bán dẫn trong đó số  $n$  các phân tử mang điện tích trong đơn vị thể tích tham gia vào sự dẫn điện rõ ràng là rất nhỏ (từ  $10^5$  đến  $10^6$  lần nhỏ hơn).

► **Đề tập luyện : bài tập 9.**

## 5.2. Mẫu Hall của các lực Laplace

Khi chế độ không đổi được thiết lập, ta có thể phân tích các lực tác dụng lên các điện tích trong đơn vị thể tích của dây dẫn giả thiết là đứng yên trong hệ quy chiếu nghiên cứu.

Đối với các điện tích linh động (điện tích  $q$ ), thì ta có :

$$\vec{F}_{m \text{ vol}} = nq(\vec{E}_0 + \vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = nq\vec{E}_0.$$

Đối với các điện tích cố định mà mật độ điện tích khối là  $-nq$ , thì

$$\vec{F}_{f \text{ vol}} = -nq(\vec{E}_0 + \vec{E}_H).$$

Lực thể tích tổng cộng mà dây dẫn phải chịu là :

$$\vec{F}_{\text{vol}} = \vec{F}_{f \text{ vol}} + \vec{F}_{m \text{ vol}} = -nq\vec{E}_H = +nq\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

Chú ý :

- Ta cũng có thể nói rằng kết quả này thể hiện tác dụng ở trong lòng vật liệu dẫn điện, làm lệch các điện tích dẫn, là một lực được truyền cho các điện tích cố định của dây dẫn nhờ sự trung gian của các va chạm.
- Các điện tích mặt cố định và ngược dấu xuất hiện trên các bề mặt của dải băng dẫn điện ở §5.1.1., sẽ không đưa vào các lực bổ sung áp đặt vào dây dẫn.

Ta cũng chấp nhận sự khái quát hóa kết quả này cho phân tử vật dẫn chuyển động tịnh tiến trong hệ quy chiếu nghiên cứu Galiléc (H.18)

Lực LAPLACE, tác dụng lên một phần tử vật dẫn có thể tích nguyên tố  $d\tau$ , có mật độ dòng thể tích  $\vec{j}$  chạy qua và đặt trong một từ trường  $\vec{B}$ , sẽ có dạng :

$$d\vec{F}_L = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$$

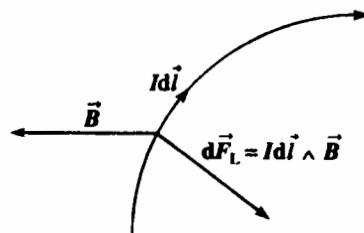
Sử dụng tính tương đương giữa các phần tử dòng điện :

$$\vec{j} d\tau \leftrightarrow \vec{j}_s dS \leftrightarrow Id\vec{l}$$

ta cũng có tương tự như thế :

Lực LAPLACE :

- $d\vec{F}_L = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}$  tác dụng lên một phần tử diện tích  $dS$  của một lớp dòng ;
- $d\vec{F}_L = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$  tác dụng lên một phần tử chiều dài  $d\vec{l}$  của một mạch điện dạng chỉ.



H.18. Lực LAPLACE tác dụng vào một phần tử mạch điện dạng chỉ.

### 5.3. Các lực tác dụng lên một mạch điện

Ta có thể sử dụng biểu thức của lực LAPLACE, tác dụng lên một phần tử dòng điện, để xác định hợp lực và mômen đối với một điểm của các lực đó tác dụng lên một mạch điện cho trước.

Ví dụ trong một mạch điện dạng chỉ, ta có :

- $\vec{F}_L = \oint_{\text{mạch điện}} Id\vec{l} \wedge \vec{B}$  đối với hợp lực của các lực LAPLACE ;
- $\vec{F}_{L/O} = \oint_{\text{mạch điện}} \overline{OM} \wedge (I d\vec{l} \wedge \vec{B})$  đối với mô men của các lực đó đối với điểm  $O$ .

# Áp dụng 6

## Các lực LAPLACE tác dụng lên một khung nhỏ.

1) Một mạch điện dạng chỉ, diện tích  $\vec{S}$ , có dòng điện  $I$  chạy qua, được đặt trong từ trường đều  $\vec{B}$ .

- Tìm tổng hợp lực của các lực LAPLACE tác dụng lên mạch điện ?
- Biểu thị mômen của các lực LAPLACE biến đổi theo mômen từ  $\vec{M}$  của mạch điện và của từ trường  $\vec{B}$ .

Người ta có thể thiết lập hoặc thừa nhận rằng :

$$\begin{aligned} \oint_{\text{mạch}} [\overline{OM} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B})] \\ = \frac{1}{2} \oint_{\text{mạch}} [(\overline{OM} \wedge d\vec{l}) \wedge \vec{B}] \end{aligned}$$

2) Mạch điện là một khung chữ nhật có diện tích  $\vec{S} = a \vec{e}_x \wedge b \vec{e}_y$ , chịu các lực của từ trường :

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z,$$

ít biến đổi trong phạm vi kích thước khung.

Hãy xác định, ở cấp thấp nhất khác không, các biểu thức của tổng hợp lực và của mômen các lực LAPLACE tác dụng lên mạch điện này.

Hãy biểu thị các kết quả được thiết lập theo tọa độ Descartes kể trên, dưới dạng tổng quát không phụ thuộc việc chọn hệ tọa độ.

Ghi chú : Ta thừa nhận rằng ngoài các nguồn tạo ra nó (đặc biệt ở ngang tâm của khung),

thì từ trường áp vào mạch điện thỏa mãn các định luật vi phân :

$$\frac{dB_x}{dx} + \frac{dB_y}{dy} + \frac{dB_z}{dz} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{dB_i}{dx_j} = \frac{dB_j}{dx_i},$$

mà chúng có thể được viết dưới dạng :  $\text{div } \vec{B} = 0$  và  $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$  (xem chương 2). Hệ thức sau chỉ có hiệu lực ở ngoài các điện tích.

1) a) Trong trường hợp một trường đều, thì tổng hợp lực là :

$$\begin{aligned} \vec{F}_L = \oint_{\text{mạch}} Id\vec{l} \wedge \vec{B} = I \left( \oint_{\text{mạch}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}, \\ \text{vì} \quad \oint_{\text{mạch}} d\vec{l} = \vec{0}. \end{aligned}$$

b) Lực tổng hợp bằng không. Vậy, tocos\* (torseur) của các lực LAPLACE tạo thành một ngẫu lực mà mômen có thể được tính đối với bất kỳ điểm  $O$  nào :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_L = \oint_{\text{mạch}} I [\overline{OM} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B})] \\ = I \left[ \left( - \oint_{\text{mạch}} (\overline{OM} \cdot d\vec{l}) \right) \vec{B} \right. \\ \left. + \left( \oint_{\text{mạch}} (\overline{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{l} \right) \right] \end{aligned}$$

Số hạng đầu bằng không vì :

$$\oint_{\text{mạch}} (\overline{OM} \cdot d\vec{l}) = \oint_{\text{mạch}} d \left( \frac{OM^2}{2} \right) = 0.$$

Bản quyền thuộc về NXB Giáo dục Việt Nam

Số hạng thứ hai có thể được tính bằng cách lấy tích phân từng phần mà số hạng đầu bằng không :

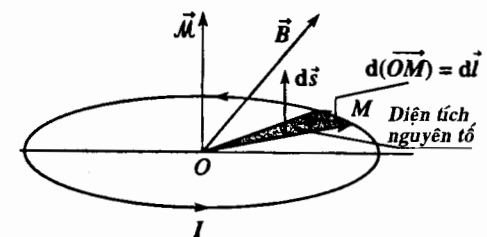
$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_L &= I \left( \oint_{\text{mạch}} (\overline{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{l} \right) \\ &= I \left( 0 - \oint_{\text{mạch}} (d\vec{l} \cdot \vec{B}) \overline{OM} \right) \end{aligned}$$

Từ hai biểu thức trên , ta suy ra :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_L &= \frac{1}{2} I \left( \oint_{\text{mạch}} (\overline{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{l} \right. \\ &\quad \left. - \oint_{\text{mạch}} (d\vec{l} \cdot \vec{B}) \overline{OM} \right) \\ &= \frac{1}{2} I \left( \oint_{\text{mạch}} \overline{OM} \wedge d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Cuối cùng, cần chú ý rằng :  $\frac{1}{2} \overline{OM} \wedge d\vec{l} = \vec{dS}$  (H.19), để ngẫu lực có dạng :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{IS} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

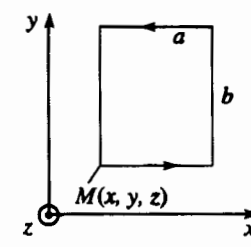


H.19. Diện tích nguyên tố bằng :

$$\vec{dS} = \frac{1}{2} \overline{OM} \wedge d\vec{l}$$

2) Toocsơ (torseur)\* của các lực LAPLACE, trong gần đúng bậc nhất là một ngẫu lực có mômen :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$



H.20. Một khung kích thước nhỏ, song song với mặt phẳng (xOy), được đặt trong từ trường  $\vec{B}$ .

Khi đặt lên hình vẽ các lực tác dụng lên bốn cạnh của khung, thì ta được :

$$\left\{ \begin{aligned} F_{L_x} &= Ib(-B_z(x, y, z) + B_z(x + a, y, z)) \\ &\approx Iab \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ F_{L_y} &= Ib(-B_z(x, y, z) + B_z(x, y + b, z)) \\ &\approx Iab \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ F_{L_z} &= I[b(B_x(x, y, z) - B_x(x + a, y, z)) \\ &\quad + a(B_y(x, y, z) - B_y(x, y + b, z))] \\ &\approx Iab \left( -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = Iab \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Nếu kể đến :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Ta có thể viết :

$$\vec{\Gamma}_L = Iab \overline{\text{grad}} B_z = \vec{\mu} \cdot \overline{\text{grad}} B_z$$

Đó là một biểu thức đặc trưng của :

$$\vec{\Gamma}_L = \overline{\text{grad}} (\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

được tính toán khi  $\mathcal{M} = \text{cte}$  (biểu thức chỉ có hiệu lực nếu  $\mathcal{M} = \text{cte}$ ). Với giả thiết của đề bài :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad \text{và} \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

ta được :

$$\left\{ \begin{aligned} F_{L_x} &= Iab \frac{\partial B_z}{\partial x} = Iab \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ F_{L_y} &= Iab \frac{\partial B_z}{\partial y} = Iab \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ F_{L_z} &= Iab \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

nghĩa là :  $\vec{\Gamma}_L = \left( Iab \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{B}$ ,

mà ta có thể viết :  $\vec{\Gamma}_L = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B}$ .

Các kết quả này tương tự các kết quả mà ta thu được trong trường hợp một lưỡng cực điện  $\vec{p}$  chịu tác dụng của một điện trường  $\vec{E}$  (ở năm học thứ nhất).

\* Toocsơ (torseur) : là hệ các vector trượt. Một toocsơ được xác định bởi vector tổng hợp (là tổng hình học của các vector tạo thành) và mômen tổng của chúng đối với một điểm xác định.

Các chứng minh trong phần áp dụng này không cần phải nhớ, nhưng các kết quả rất đơn giản lại đáng ghi nhớ.

Khi một mạch điện được nhúng vào trong một từ trường đều, thì toocsơ\* của các lực LAPLACE quy về một ngẫu lực có mômen :

$$\vec{F}_L = I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B},$$

trong đó  $\vec{S}$  là vectơ diện tích kết hợp với đường chu vi mô tả mạch điện, và  $\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$  là mômen từ của nó.

Trong một từ trường không đều, một mạch điện nhỏ sẽ chịu một lực, trong gần đúng bậc nhất, bằng :

$$\vec{F}_L = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad}) \vec{B},$$

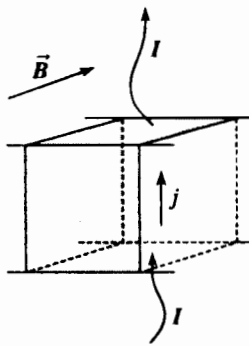
Đặc biệt, ta có thể áp dụng các kết quả này cho một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{\mathcal{M}}$ , và các kích thước rất nhỏ so với khoảng cách đặc trưng cho các độ biến thiên của từ trường tác dụng lên nó.

Các lực, do từ trường tác dụng lên các phần tử dòng điện, làm chuyển động các mạch điện mà không cần có tác động trực tiếp của cơ học. Khi cung cấp điện năng, ta có thể áp đặt một dòng điện chạy qua mạch điện. Sự tồn tại các lực LAPLACE gây ra sự chuyển động của mạch điện, do vậy khiến mạch điện thu được cơ năng. Sự có mặt của từ trường cho phép một sự chuyển đổi năng lượng gọi là sự chuyển đổi điện cơ. Nguyên lí này là cơ sở cho sự vận hành của các động cơ quay. Đặc biệt ta sẽ vận dụng nguyên lí này ở các chương 4 và 5.

# Áp dụng 7

## Bơm điện từ

Một chất lỏng dẫn điện (natri lỏng) có thể tuần hoàn trong một hệ ống dẫn. Một máy phát điện cho một dòng điện  $I$  chạy qua hệ ống dẫn đặt trong một từ trường hướng vuông góc với phương trung bình của các đường dòng (H.21).



H.21. Từ trường  $\vec{B}$  trong một chất lỏng dẫn điện.

Thiết bị này có lợi ích gì ?

Các lực LAPLACE tác dụng lên môi trường dẫn, lấy trung bình đều hướng song song với hệ ống dẫn.

Như vậy, thiết bị này cho phép tạo ra một hiệu ứng bơm không cần bơm cơ học mà chuyển động của các cánh môi cho phép kéo đẩy chất lỏng trong hệ ống dẫn.

Thành thử ta có một bơm không có bộ phận chuyển động.

Thiết bị này đặc biệt có ích để làm dịch chuyển một chất lỏng ăn mòn mạnh, như natri nóng chảy, tuần hoàn trong các vòng trao đổi nhiệt của một số nhà máy điện hạt nhân.

► Để tập luyện : bài tập 7 và 8.

# ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

## ■ SỰ BẢO TOÀN ĐIỆN TÍCH

• Điện tích tổng cộng của một hệ cô lập được bảo toàn theo thời gian. Nguyên lý này được thể hiện bởi các phương trình :

• Bảo toàn dạng tích phân : 
$$\oiint_{\Sigma} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau = 0 ;$$

• Bảo toàn dạng vi phân : 
$$\operatorname{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0 .$$

• Ở chế độ không đổi, trường vectơ  $\vec{j}$  có thông lượng bảo toàn :

$$\operatorname{div} \vec{j}(M) = 0 ,$$

và cường độ dòng điện như nhau qua mọi tiết diện của cùng một ống dòng ; định luật về nút có thể áp dụng được.

• Trong gần đúng các chế độ chuẩn dừng, phương trình  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  và các hệ quả của nó cũng đều có hiệu lực.

## ■ ĐIỆN TÍCH VÀ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

• Điện tích và dòng điện là các nguồn của trường điện từ.

• Một hạt có điện tích  $q$  và vận tốc  $\vec{v}$ , chuyển động trong một vùng có điện trường  $\vec{E}$  và từ trường  $\vec{B}$ , sẽ chịu một lực LORENTZ :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

• Công suất trên đơn vị thể tích  $\mathcal{P}_{\text{vol}}$  mà trường điện từ cung cho các điện tích và dòng điện, là :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

## ■ SỰ DẪN ĐIỆN VÀ ĐỊNH LUẬT OHM

• Mô hình vi mô DRÜDE cho phép giải thích sự dẫn điện của một môi trường thuần trở. Trong hệ quy chiếu của vật dẫn, vectơ mật độ dòng điện  $\vec{j}$  và điện trường  $\vec{E}$  có liên kết tuyến tính nhờ hệ thức :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

trong đó  $\gamma$  là độ dẫn điện của môi trường, biểu thị ra  $S.m^{-1}$ .

## ■ LỰC LAPLACE

- Lực LAPLACE tác dụng lên một phần tử vật dẫn, có thể tích nguyên tố  $d\tau$ , có một dòng điện với mật độ dòng thể tích  $\vec{j}$  đi qua và được đặt trong một từ trường  $\vec{B}$ , sẽ có dạng :

$$d\vec{F}_L = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}, \quad d\vec{F}_L = \vec{j}_S dS \wedge \vec{B}, \quad \text{hoặc là } d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B},$$

tùy theo mô hình phân bố các dòng điện mà ta xét.

- Khi một mạch điện được nhúng trong một từ trường đều, thì toocso (torseur) của các lực LAPLACE quy về một ngẫu lực có mômen :

$$\vec{\Gamma}_L = I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B},$$

trong đó,  $\vec{S}$  là vectơ diện tích kết hợp với đường chu vi mô tả mạch điện, và  $\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$  là mômen từ của nó.

Trong một từ trường không đều, một mạch điện nhỏ sẽ chịu một lực, trong gần đúng bậc nhất, bằng :

$$\vec{F}_L = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad}) \vec{B}.$$



# Bài tập

## ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

### 1 Mặt cầu phóng xạ

Một mặt cầu phóng xạ nhỏ bán kính  $a$ , lúc đầu trung hòa điện, phát xạ đẳng hướng  $n$  điện tích  $q$  trong đơn vị thời gian, với vận tốc xuyên tâm  $\bar{v}$  có độ dài  $v$  không đổi.

Hãy xác định ở một thời điểm  $t$ , sự phân bố các điện tích và dòng điện tương ứng.

### 2 Thời gian tích thoát của một môi trường thuần trở

Trong bài tập này, tất cả các trường vector được khảo sát, đều hướng song song với trục  $(Ox)$ .

#### 1) Một thời gian tích thoát kì lạ

a) Một môi trường thuần trở, độ dẫn điện  $\gamma$ , có một phân bố điện tích khối  $\rho_o(x) = \rho(x, t=0)$  ban đầu không đồng nhất không. Bằng cách sử dụng một mặt GAUSS thích hợp, ta liên kết được sự biến đổi không gian của điện trường  $\vec{E} = E(x, t)\vec{e}_x$  với điện tích khối  $\rho(x, t)$  của môi trường (*Chú ý: định lý GAUSS có thể được áp dụng ở chế độ biến thiên*).

b) Bằng cách dùng định luật OHM, ta có thể suy ra định luật gì về sự biến đổi của điện tích khối  $\rho(x, t)$  khi có bảo toàn điện tích?

Môi trường sẽ tiến triển về trạng thái nào?

Sau một thời gian đặc trưng  $T$  là bao nhiêu để có thể coi môi trường đã mất kí ức về trạng thái ban đầu của nó?

c) Hãy biểu thị độ lớn của thời gian đặc trưng  $T$ , kết hợp với sự tích thoát này.

Liệu định luật OHM có thể áp dụng có hiệu quả để nghiên cứu chế độ quá độ này không?

#### 2) Mô hình DRÛDE

Muốn hiệu chỉnh sự không chặt chẽ của kết quả nói trên, người ta đề nghị áp dụng cho môi trường dẫn điện (có  $n$  phân tử linh động mang điện tích  $q$  và khối lượng  $m$  trong đơn vị thể tích) mô hình DRÛDE (xem §4.1.2.). Nhớ rằng  $\tau$  là thời gian tích thoát kết hợp.

Số  $n$  phân tử mang linh động trong đơn vị thể tích không thể không đổi, vì  $\rho$  biến đổi nhưng trong thực tế, người ta thừa nhận rằng độ biến thiên tương đối của nó cực kì yếu.

a) Trong khi tiếp tục việc nghiên cứu nói trên, bạn hãy biểu thị phương trình biến đổi của điện tích  $\rho(x, t)$  mà bạn có được bằng cách sử dụng quan điểm mới này.

b) Thời gian nào ở đây, kể cả cấp độ lớn, đặc trưng cho sự mất ký ức của vật dẫn?

Thời gian này có thể so sánh được với thời gian  $T$  thu được trước đây không?

*Dữ liệu:* môi trường thuần trở là đồng, có độ dẫn điện  $\gamma \approx 6.10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  và thời gian tích thoát  $\tau = 10^{-14} \text{ s}$ .

### 3★ Hai môi trường thuần trở tiếp xúc nhau

Hai môi trường thuần trở, có độ dẫn điện  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$ , choán lần lượt các miền  $z < 0$  và  $z > 0$ .

Ở thời điểm  $t = 0$ , hệ này chịu tác dụng của một điện trường đều  $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$ .

Ta giả thiết rằng các thời gian tích thoát  $\tau_1$  và  $\tau_2$  (được xác định trong mô hình DRÛDE) của hai môi trường ở đây đều không đáng kể.

1) Ở thời điểm ban đầu, các mật độ dòng điện thể tích  $\vec{j}_1$  và  $\vec{j}_2$  trong các môi trường 1 và 2 có giá trị bao nhiêu?

Từ sự cân bằng các điện tích, suy ra rằng sẽ xuất hiện trên mặt phẳng  $z = 0$  một mật độ điện mặt  $\sigma$  mà ta sẽ liên kết với  $\vec{j}_1$  và  $\vec{j}_2$ .

2) Từ đó suy ra phương trình vi phân nghiệm đúng  $\sigma$  và nghiên cứu chế độ quá độ tương ứng.

Chỉ định trạng thái nhận được ở cuối chế độ quá độ.

Biện luận về sự phù hợp giữa các kết quả nhận được với mô hình đã sử dụng.

### 4 Hiệu ứng từ trở trong một tấm dẫn điện

Một môi trường thuần trở với thời gian tích thoát  $\tau$  có  $n$  điện tích dẫn (điện tích  $q$  và khối lượng  $m$ ) trên đơn vị thể tích. Một hiệu điện thế sẽ tạo ra một điện trường  $\vec{E}(M)$  ở mọi điểm  $M$  của môi trường này.

1) Tìm độ dẫn điện  $\gamma_0$  của môi trường.

2) Một từ trường  $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$  được áp vào môi trường.

Chúng minh rằng, ở chế độ không đổi, vectơ mật độ dòng điện thể tích có thể được viết dưới dạng  $\vec{j} = [\gamma]\vec{E}$ , bằng cách nêu rõ rằng ma trận  $[\gamma]$  biến đổi theo độ dẫn điện  $\gamma_0$  và xung động cyclotron  $\omega_c$

được xác định theo  $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ .

Người ta dùng các tọa độ Descartes.

3) Môi trường choán không gian giữa các mặt phẳng ( $x = 0$ ) và ( $x = a$ ).

Nó chịu một hiệu điện thế:

$$U_0 = U(x=0) - U(x=a).$$

Tìm điện trở  $R_0$  của một tiết diện  $S$  của môi trường dẫn điện này khi không có từ trường?

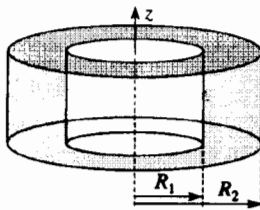
4) Tìm giá trị mới  $R$  của điện trở của vật dẫn nói trên khi có từ trường  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ ?

So sánh giá trị này với  $R_0$  đối với một môi trường kim loại khi từ trường  $B_0 = 1$  T.

Cho :  $q = -e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg và  $\tau \approx 10^{-14}$  s.

### 5 Điện trở giữa hai vật dẫn hình trụ, sự tương tự nhiệt

Hai hình trụ dẫn điện đồng trục, có chiều cao  $h$  và các bán kính lần lượt là  $R_1$  và  $R_2$ , được ngăn cách nhau bởi một môi trường dẫn điện thuần trở có độ dẫn điện  $\gamma$ .



Một dòng điện  $I$  sẽ chạy trong hệ khi ta áp vào một hiệu điện thế  $U$ .

1) Xác định điện trở  $R$  của hệ này bằng hai phương pháp khác nhau (người ta bỏ qua mọi hiệu ứng bờ).

2) Hãy đưa ra một sự tương tự với tình huống hình học tương ứng với một hiện tượng dẫn nhiệt, ở chế độ không đổi, trong một môi trường thỏa mãn định luật FOURIER và độ dẫn nhiệt  $\lambda$ .

Tìm nhiệt trở  $R_{th}$  tương ứng?

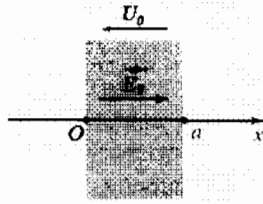
### 6 Hiệu ứng từ trở giữa hai vật dẫn hình trụ

Điện trở nói trên được nhúng vào một từ trường đều và không đổi  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ .

Điện trường vẫn còn xuyên tâm, nhưng sự phân bố các đường dòng đã biến đổi do sự có mặt của từ trường.

1) Xác định vectơ mật độ dòng điện thể tích  $\vec{j}$  mới.

Ta có thể ghi nhớ  $\mu = \frac{q\tau}{m}$  là độ linh động của các phân tử mang điện tích (điện tích  $q$  và khối lượng  $m$ )



của môi trường thuần trở và biểu thị  $\vec{j}$  bằng các thành phần của nó trong cơ sở tọa độ trụ ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ ).

2) Tìm biểu thức mới của điện trở của hệ?

So sánh điện trở này với giá trị điện trở khi không có từ trường, bằng cách dùng các cấp độ lớn đối với một vật dẫn tốt và một từ trường 10 tesla.

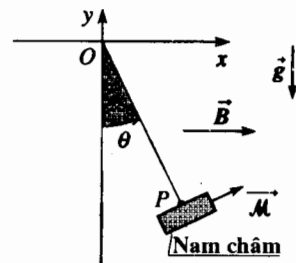
Cho :  $q = -e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg và  $\tau \approx 10^{-14}$  s.

### 7 Dao động của một nam châm nhỏ

Một nam châm nhỏ khối lượng  $m$ , mômen từ  $\vec{M}$ , được treo cứng ở đầu  $P$  của thanh  $OP$  chiều dài  $L$  và khối lượng không đáng kể. Nam châm có thể thực hiện các chuyển động quay trong mặt phẳng thẳng đứng, chung quanh trục nằm ngang ( $Oz$ ) (trong suốt thời gian các dao động của hệ,  $\vec{M}$  luôn luôn vuông góc với  $\vec{OP}$ ).

Hệ được nhúng trong một từ trường  $\vec{B} = B \vec{e}_x$ , đều và nằm ngang. Ta bỏ qua các lực ma sát.

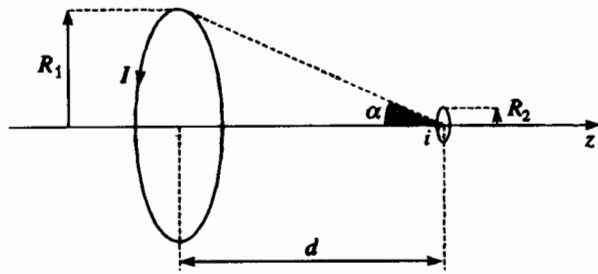
Biện luận về sự biến đổi của chu kỳ các dao động nhỏ của hệ, quanh vị trí cân bằng bên, theo số đo đại số  $B$  của từ trường ( $B$  có thể dương hay âm).



## VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

### 8 ★ Tương tác giữa hai vòng dây

Hai vòng dây tròn, bán kính  $R_1$  và  $R_2$ , trong có các dòng điện  $I$  và  $i$  chạy qua, có cùng một trục ( $Oz$ ). Vòng thứ hai có bán kính  $R_2$  nhỏ so với  $R_1$  và khoảng cách  $d$  giữa hai mạch điện ( $R_2 \ll R_1$  và  $R_2 \ll d$ ).



Hãy tính lực tương tác do vòng này tác dụng lên vòng kia :

- a) bằng cách tính từ trường do vòng to tạo ra tại một điểm của vòng nhỏ ;
- b) bằng cách coi vòng nhỏ như một lưỡng cực từ chịu tác dụng của từ trường do vòng lớn gây ra ;
- c) bằng cách dùng từ trường do vòng nhỏ tạo ra tại một điểm của vòng lớn.

### 9 ★ Hiệu ứng HALL trong một dây dẫn hình trụ

1) Một hình trụ, đáy tròn bán kính  $a$  và trục  $(Oz)$ , có mật độ điện tích mặt  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , trong tọa độ trụ có trục  $(Oz)$ .

a) Chứng minh rằng một phân bố như vậy có thể coi là giới hạn, khi  $b$  tiến tới 0, của sự chồng chất của hai hình trụ có trục  $(O_1z)$  và  $(O_2z)$ , mang các điện tích trên đơn vị thể tích (điện tích khối) tương ứng là  $\rho$  và  $-\rho$ .

Các điểm  $O_1$  và  $O_2$  ở trên trục  $(Ox)$  có hoành độ

$$x_1 = \frac{b}{2} \text{ và } x_2 = -\frac{b}{2}.$$

Xác định hệ thức giữa  $\sigma_0$ ,  $\rho$  và  $b$ .

b) Tính điện trường sinh ra bởi hai hình trụ này, sau đó tính điện trường do hình trụ mang mật độ điện tích  $\sigma(\theta)$  gây ra.

2) Một dây dẫn thẳng, hình trụ bán kính  $a$  và trục  $(Oz)$ , thuận trở với độ dẫn điện  $\gamma$  (có  $n$  phân tử mang điện tích  $q$  linh động trong đơn vị thể tích), chịu tác dụng của một điện trường  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$  ( $E_0 > 0$ ) và một từ trường  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$  ( $B_0 > 0$ ).

a) Hãy giải thích định tính sự xuất hiện các điện tích mặt trên hình trụ, và xác định giá trị của điện trường HALL bên trong hình trụ, ở chế độ không đổi.

b) Chứng tỏ rằng các kết quả được thiết lập khi giải quyết câu hỏi thứ nhất, cho phép đề xuất một cách mô tả chế độ không đổi nói trên. Hãy xác định giá trị của mật độ điện tích  $\sigma_0$ , đặc trưng cho trạng thái này.

## LỜI GIẢI

1 Ở thời điểm  $t$ , mặt cầu đã phát xạ một điện tích bằng  $q$ . Nguyên lý bảo toàn điện tích kéo theo điện tích của mặt cầu ở thời điểm  $t$  là  $Q(t) = -nqt$ .

Một điện tích được phát ra ở thời điểm 0 đã đi được quãng đường  $vt$ . Vậy điện tích được phát ra nằm giữa các mặt cầu bán kính  $a$  và  $a + vt$ . Thành thử với  $r > a + vt$ , thì ta có  $\rho = 0$  và  $\vec{j} = \vec{0}$ .

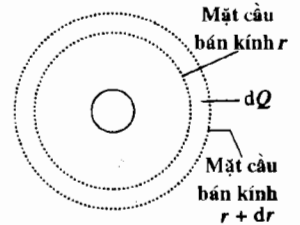
Bây giờ ta xét các giá trị  $r$  trong khoảng giữa  $a$  và  $a + vt$ .

Giữa các mặt cầu bán kính  $r$  và  $r + dr$  tồn tại các điện tích được phát ra giữa các thời điểm :

$$t - \frac{r-a}{v} \text{ và } t - \frac{r+dr-a}{v}.$$

Điều đó tương ứng với một điện tích :

$$dQ = nq \frac{dr}{v}.$$



Sự phát xạ là đẳng hướng, nên mật độ điện tích có tính đối xứng cầu và có giá trị :

$$\rho(r, t) = \frac{dQ}{4\pi r^2 dr} = \frac{nq}{4\pi r^2 v}$$

Mật độ này không phụ thuộc vào thời gian  $t$  ở trong miền không gian mà các điện tích được phát xạ từ thời điểm ban đầu đi tới.

Ta có thể thử nghiệm biểu thức :

$$\int_a^{a+vt} \rho(r) 4\pi r^2 dr = nqt$$

biểu diễn điện tích do mặt cầu phát ra giữa thời điểm ban đầu và thời điểm  $t$ .

Từ đó suy ra mật độ dòng điện thể tích :

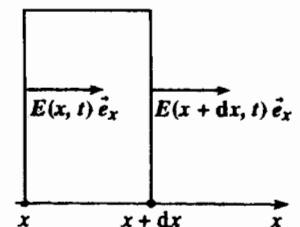
$$\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r = \rho_m \vec{v} = \rho(r, t) v \vec{e}_r = \frac{nq\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

Thông lượng của nó được bảo toàn trong miền  $a < r < a + vt$ , trong đó dòng chảy các điện tích là không đổi. Đối với trường vectơ xuyên tâm này, phương trình div  $\vec{j} = 0$  còn được thể hiện bởi :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j) = 0$$

Đối với bài toán đối xứng cầu, thì một trường xuyên tâm có thông lượng bảo toàn sẽ có dạng  $\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$  (xem phụ lục).

2 1) a) Điện trường hướng theo trục  $(Ox)$ , ta xét một mặt GAUSS dạng hình hộp, có các cạnh song song với các trục  $(Ox)$ ,  $(Oy)$ ,  $(Oz)$  và có hai mặt điện tích  $S$  ở các hoành độ  $x$  và  $x + dx$ .



Định lý GAUSS cho ở đây :

$$-SE(x) + SE(x + dx) = \frac{\rho S dx}{\epsilon_0} \text{ nghĩa là } \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho(x, t)}{\epsilon_0}.$$

b) Định luật OHM cho phép viết

$$\vec{j} = j(x, t) \vec{e}_x = \gamma E(x, t) \vec{e}_x$$

và sự bảo toàn điện tích được thể hiện cục bộ bởi :

$$\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$$

Từ đó, suy ra phương trình biến đổi :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\gamma \rho(x, t)}{\epsilon_0} = 0$$

mà nghiệm giảm theo hàm mũ về không, với thời gian đặc trưng

$$T = \frac{\epsilon_0}{\gamma}.$$

c) Đối với một chất dẫn điện tốt như đồng, độ dẫn điện là :

$$\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1},$$

thì ta được  $T \approx 10^{-19} \text{ s}$ .

Tuy nhiên, ta biết rằng định luật OHM chỉ có thể áp dụng được đối với các thời gian đặc trưng cho sự biến đổi là lớn so với thời gian tích thoát  $\tau$  của mô hình DRUDE. Như vậy kết quả này không có ý nghĩa quan trọng, vì nó nằm trong phạm vi mà mô hình đã dùng để thu được nó lại rõ ràng là không thể áp dụng được (vì  $\tau = 10^{-14} \text{ s}$ ).

2) a) Ta coi phương trình biến đổi vận tốc toàn bộ  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  của các điện tích linh động ở đây là của các electron có điện tích  $-e$  :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -\frac{eE}{m}.$$

Vector mật độ dòng điện  $\vec{j} = -ne\vec{v}$  trong đó,  $n$  biến thiên không đáng kể, nên có thể coi như một hệ số không đổi.

$$\text{Từ đó suy ra : } \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{j}{\tau} = \frac{ne^2 E}{m} = \frac{\gamma E}{\tau}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho(x, t)}{\epsilon_0} \text{ và } \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Vì vậy, phương trình biến đổi mật độ điện khối của môi trường là :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau T} \rho = 0 \text{ với } T = \frac{\epsilon_0}{\gamma}.$$

b) Vì  $T \ll \tau$ , nên chế độ quá độ tương ứng là giả tuần hoàn, và thời gian đặc trưng cho sự giảm theo hàm mũ của các dao động mật độ điện tích bằng  $\tau$ .

Thời gian đặc trưng này biểu hiện đúng như thời gian tích thoát của môi trường : sau một số lần  $\tau$ , môi trường mất đi kí ức về trạng thái ban đầu bị nhiễu loạn của nó và rồi nó trở về trạng thái trung hòa điện.

3) 1) Nếu thời gian tích thoát của mỗi môi trường là không đáng kể, thì các mật độ dòng điện thể tích lúc ban đầu phải bằng :

$$\vec{j}_1 = \gamma_1 E_0 \vec{e}_z$$

$$\text{và } \vec{j}_2 = \gamma_2 E_0 \vec{e}_z$$

Các mật độ dòng điện thể tích đó không bằng nhau, nên thông lượng của chúng không như nhau khi đi qua một phần của mặt phẳng ( $z = 0$ ), ở  $z = 0^-$  và  $z = 0^+$ .

Thành thử, xuất phát từ sự cân bằng điện tích áp dụng cho một hình trụ nhỏ, tiết diện  $S$  "nằm giữa các hoành độ  $z = 0^-$  và  $z = 0^+$ ", ta suy ra sự xuất hiện một mật độ điện tích mặt  $\sigma$  trên mặt phẳng ( $z = 0$ ), liên kết với các mật độ dòng điện thể tích  $j_1$  và  $j_2$  bằng hệ thức :

$$\frac{d\sigma}{dt} = (\vec{j}_1 - \vec{j}_2) \cdot \vec{e}_z$$

2) Mặt phẳng ( $z = 0$ ), mang mật độ điện mặt đều  $\sigma$ , tạo ra điện trường  $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ . Ta thừa nhận giá trị của kết quả này đã học

trong năm học thứ nhất đối với một điện trường không đổi. Vì điện trường này chòng chành lên điện trường  $\vec{E}_0$ , nên ta suy ra các giá trị của các mật độ dòng điện thể tích ở thời điểm  $t$  :

$$\vec{j}_1 = \gamma_1 \left( E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \vec{e}_z \text{ và } \vec{j}_2 = \gamma_2 \left( E_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \vec{e}_z$$

và phương trình biến đổi mật độ điện mặt  $\sigma$  :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \gamma_1 \left( E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) - \gamma_2 \left( E_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right).$$

$$\text{Đặt } T = \frac{2\epsilon_0}{\gamma_1 + \gamma_2} \text{ và } \sigma_1 = \epsilon_0 E_0 \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)} \text{ ta được :}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{(\sigma - \sigma_1)}{T} = 0.$$

Ở thời điểm  $t$ , mặt phẳng không bị thay đổi, nên từ đó suy ra :

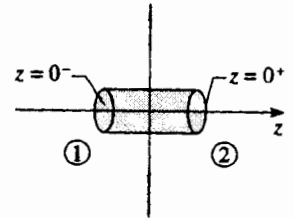
$$\sigma(t) = \sigma_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Khi chế độ giới hạn được thiết lập ( $t \gg T$ ), thì mật độ điện tích mặt của mặt phẳng là  $\sigma = \sigma_1$  và các mật độ dòng điện đều giống nhau trong hai môi trường :

$$\vec{j}_1 = \vec{j}_2 = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 \vec{e}_z.$$

Các thời gian tích thoát  $\tau_1$  hay  $\tau_2$  (được định nghĩa trong mô hình DRUDE) của các môi trường giả thiết là không đáng kể, nghĩa là ở đây rất nhỏ so với  $T = \frac{2\epsilon_0}{\gamma_1 + \gamma_2}$ .

Giả thiết này không thực tế khi kể đến các kết quả của bài tập trước, trong đó ta đã chứng minh rằng  $\frac{\epsilon_0}{\gamma_i} \ll \tau_i$  ( $i = 1$  hay  $2$ ).



Như vậy, dạng tìm được đối với chế độ quá độ còn phải bàn cãi rất nhiều vì không chắc đúng. Một mô hình ít ngây ngô hơn sẽ dẫn tới phải xem xét lại chế độ quá độ này, nhưng chế độ giới hạn, được xác định trong mọi trường hợp bởi  $j_1 = j_2$ , vậy

$$\gamma_1 \left( E_0 - \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \right) = \gamma_2 \left( E_0 + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \right), \text{ sẽ là như nhau.}$$

4) 1) Độ dẫn điện của môi trường là  $\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$ .

2) ở chế độ không đổi, vận tốc toàn bộ các phần tử mang sẽ nghiệm đúng phương trình (xem §4.1.2.) :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Vector  $\vec{j}$  có dạng  $\vec{j} = nq\vec{v} = \gamma_0 \vec{E} + \frac{q\tau}{m} \vec{j} \wedge \vec{B}$ , chiếu lên các trục :

$$\begin{cases} j_x - \tau\omega_c j_y = \gamma_0 E_x \\ j_y + \tau\omega_c j_x = \gamma_0 E_y \\ j_z = \gamma_0 E_z \end{cases}$$

Từ đó suy ra :

$$\vec{j} = [\gamma] \vec{E} = \gamma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2} & \frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ \frac{-\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} & \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Điện trở của ống có tiết diện  $S$  và chiều dày  $a$  bằng :

$$R_0 = \frac{a}{\gamma_0 S}.$$

4) Điện áp  $U_0$  (giữa các mặt phẳng ( $x=0$ ) và ( $x=a$ ) áp vào vật dẫn một điện trường  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$  với  $E_0 = \frac{U_0}{a}$ . Dòng điện đi qua tiết diện  $S$  của các mặt phẳng đó là :

$$I = j_x S = \gamma_0 \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2} E_0 S.$$

Vậy điện trở mới là :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{a(1+\omega_c^2\tau^2)}{\gamma_0 S} = R_0(1+\omega_c^2\tau^2).$$

Đối với môi trường kim loại thì :

$$\frac{R-R_0}{R_0} = \omega_c^2\tau^2 = \left( \frac{q\tau}{m} B \right)^2 \approx 3.10^{-6}$$

Giá trị của điện trở rất ít bị ảnh hưởng tác động của từ trường.

5) 1) • Phương pháp thứ nhất : Nghiên cứu sự phân bố dòng điện

Vector mật độ dòng điện là xuyên tâm,  $\vec{j} = j(r, \theta, z) \vec{e}_r$ , trong cơ sở kết hợp với các tọa độ trụ có trục ( $Oz$ ). Hệ là tròn xoay, và

ta giả thiết phân bố này không phụ thuộc tọa độ  $z$ , trong không gian choán bởi vật dẫn thuần trở (bỏ qua các hiệu ứng bờ và do đó có sự bất biến trong phép tịnh tiến theo  $z$ ). Lúc đó, ta có :  $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$

Thông lượng của trường này là như nhau, ở chế độ không đổi và chuẩn dùng khi đi qua mọi hình trụ bán kính  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) và chiều cao  $h$ . Thông lượng đó bằng  $I$ , vậy thì :

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r h}.$$

Từ đó suy ra điện trường trong môi trường thuần trở này :

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma h} \vec{e}_r.$$

và hiệu điện thế ở các cực của phần tử điện trở này :

$$U = V_1 - V_2 = \frac{I}{2\pi\gamma h} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Vậy điện trở là :  $R = \frac{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi\gamma h}$ .

• Phương pháp thứ hai : Sự kết hợp các ống dòng nguyên tố.

Xét một phần nhỏ nguyên tố của một ống dòng, chiều dài  $dz$ , tiết diện  $dS = dz r d\theta$  như đã chỉ rõ trên hình vẽ. Điện trở của nó là :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dz}{dS} = \frac{1}{\gamma} \frac{dz}{r d\theta}.$$

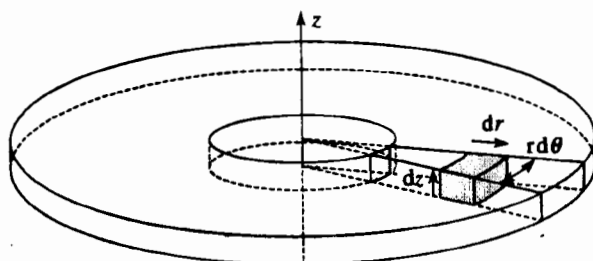
Điện trở của ống nguyên tố có góc  $d\theta$ , nằm giữa các bán kính  $R_1$  và  $R_2$ , được tính bằng cách kết hợp nối tiếp các phần tử nguyên tố như trên. Vậy điện trở đó có giá trị :

$$\int_{r=R_1}^{R_2} \frac{1}{\gamma} \frac{dr}{r d\theta} = \frac{1}{\gamma d\theta} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Điện trở toàn phần được tính bằng cách kết hợp song song các ống nguyên tố như trên, nghĩa là :

$$\frac{1}{R} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \frac{\gamma dz d\theta}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} = \frac{\gamma 2\pi h}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

Kết quả này phù hợp với kết quả trước.



2) Trong trường hợp điện, ta dùng :  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \text{grad} V$  Trong trường hợp nhiệt, ta viết :  $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$  giữa hai hình trụ ở nhiệt độ  $T_1$  và  $T_2$ .

Như vậy, ta tìm được một thông lượng nhiệt  $\Phi_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$  từ

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda h}$$

6) 1) Khi có mặt từ trường, thì trong khuôn khổ của mô hình DRÜDE, phương trình chuyển động của toàn bộ các phần tử mang có dạng (xem §4.1.2):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

nghĩa là ở chế độ không đổi:

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \mu(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Khi không có từ trường, thì vận tốc trôi giạt là xuyên tâm. Từ trường  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  làm lệch các phần tử mang trong mặt phẳng  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

Lúc đó, ta có thể viết:

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \gamma\vec{E} + \mu\vec{j} \wedge \vec{B}, \text{ với } \gamma = \frac{nq^2\tau}{m}.$$

Từ đó, suy ra trong tọa độ trụ ( $j_z$  hiển nhiên bằng không):

$$\begin{cases} j_r = \gamma E + \mu j_\theta B_0 \\ j_\theta = -\mu j_r B_0 \end{cases}$$

Điều này kéo theo:

$$j_r = \frac{\gamma E}{1 + (\mu B_0)^2},$$

thay cho  $j_r = \gamma E$  khi không có từ trường.

2) Thành thử, khi dùng lại phép tính trong bài tập trước (phương pháp thứ nhất), ta tìm được một giá trị điện trở:

$$R_B = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\gamma h} [1 + (\mu B_0)^2].$$

Như vậy, điện trở của hệ đã phải nhân với thừa số  $[1 + (\mu B_0)^2]$ .

Ghi chú:  $\mu \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ C.s.kg}^{-1}$ . Rõ ràng là ngay đối với một từ trường cực mạnh (10 tesla), số hiệu chỉnh cho giá trị của điện trở vẫn rất nhỏ:

$$1 + (\mu B_0)^2 \approx 1 + 3 \cdot 10^{-4}.$$

Như vậy, ta đã thấy ảnh hưởng của từ trở khi có mặt của hình học gọi là CORBINO.

7) Để nghiên cứu chuyển động quay, ta áp dụng cho nam châm nhỏ định lý mômen động, chiếu trên trục quay (Oz), và kí hiệu  $\theta$  là góc nghiêng của con lắc đối với đường thẳng đứng.

Nam châm nhỏ chịu một ngẫu lực do từ trường gây ra. Mômen của ngẫu lực đó bằng:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M}B \sin\theta \vec{e}_z$$

Vậy phương trình chuyển động quay sẽ là:

$$mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin\theta - \mathcal{M}B \sin\theta.$$

Nếu  $\mathcal{M}B > -mgL$  (đặc biệt khi mômen từ của nam châm cùng chiều với từ trường ở  $\theta = 0$ ), thì vị trí cân bằng  $\theta = 0$  là bền.

Chu kì các dao động nhỏ là:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL + \mathcal{M}B}}.$$

Nếu từ trường và mômen từ có chiều ngược nhau ở  $\theta = 0$ , và  $\mathcal{M}B < -mgL$ , thì chính vị trí  $\theta = \pi$  lúc đó là vị trí cân bằng bền.

Chu kì các dao động ở lân cận vị trí cân bằng này lúc đó bằng:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{-(\mathcal{M}B + mgL)}}. \text{ (chú ý, } \mathcal{M}B + mgL < 0).$$

8) a) Giả sử  $M$  là một điểm tọa độ trụ ( $r = R_2, \theta, z$ ) thuộc về vòng dây nhỏ. Điểm này thuộc về một mặt phẳng chứa trục (Oz) cắt vòng lớn theo đường kính. Đó là một mặt phẳng phản xứng đối với sự phân bố dòng điện tương ứng với vòng dây lớn. Từ trường  $\vec{B}_1$  tại  $M$ , thuộc về mặt phẳng này, vậy:

$$\vec{B}_1 = B_{1r}(r, z)\vec{e}_r + B_{1z}(r, z)\vec{e}_z.$$

Người ta muốn biểu thị từ trường  $\vec{B}_1$  ở lân cận trục (Oz) ( $r \ll R_1$ ).

Muốn thế, ta xét một mặt kín có dạng một hình trụ nhỏ trục (Oz), bán kính  $r$  và chiều cao  $dz$ . Thông lượng của từ trường  $\vec{B}_1$  đi qua mặt này, nhất thiết phải bằng không, vậy:

$$\pi r^2 [B_{1z(\text{trục})}(z + dz) - B_{1z(\text{trục})}(z)] + 2\pi r dz B_{1r}(r, z) = 0.$$

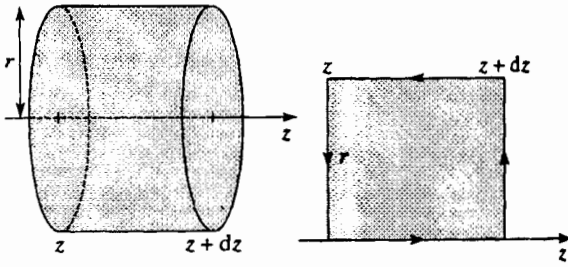
Thành phần xuyên tâm của trường như vậy, gắn với giá trị của trường ở trên trục theo:

$$B_{1r}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{B_{1z(\text{trục})}}{dz},$$

Cho đường chu vi nhỏ hình chữ nhật  $\mathcal{C}$  được biểu diễn dưới đây. Ta có thể viết lưu thông của từ trường  $\vec{B}_1$  bằng không trên đường chu vi này (ở ngang lằn của vòng dây nhỏ, thì người ta ở ngoài các nguồn tạo nên trường  $\vec{B}_1$ ). nghĩa là:

$$-dz B_{1z}(r, z) + dz B_{1z(\text{trục})}(z) = 0,$$

(đến các số hạng bậc cao hoặc bậc 2 ở gần r).



Cuối cùng suy ra :

$$\vec{B}_1 = B_{1z(\text{trục})}(z) \vec{e}_z - \frac{r}{2} \frac{dB_{1z(\text{trục})}(z)}{dz} \vec{e}_r.$$

(đến các số hạng bậc cao hoặc bậc 2 ở gần r)

Chỉ duy nhất phần không đều của biểu thức này sẽ có ích để tính tổng hợp lực của các lực LAPLACE tác dụng lên vòng nhỏ.

Từ đó rút ra tổng hợp lực của các lực tác dụng lên vòng nhỏ :

$$\begin{aligned} \vec{F}'_L &= \oint_{\text{vòng nhỏ}} i d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1 = \oint_{\theta=0..2\pi} i R_2 d\theta \vec{e}_\theta \wedge \left( -\frac{R_2}{2} \frac{dB_{1z(\text{trục})}(z)}{dz} \vec{e}_r \right)_{z=d} \\ &= i\pi R_2^2 \left( \frac{dB_{1z(\text{trục})}(z)}{dz} \right)_{z=d} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Vòng lớn tạo ra, tại một điểm trên trục hoành z, từ trường :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2R_1} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2(R_1^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

Từ đó rút ra :

$$\vec{F}'_L = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I R_1^2 (\pi R_2^2 i) d}{(R_1^2 + d^2)^{5/2}} \vec{e}_z.$$

Đây chính là lực hút nếu hai vòng dây đều định hướng theo cùng chiều (nghĩa là i và I cùng dấu).

2) Lực, hướng theo (Oz) (vì lý do đối xứng tròn xoay của bài toán) cũng có thể được viết :

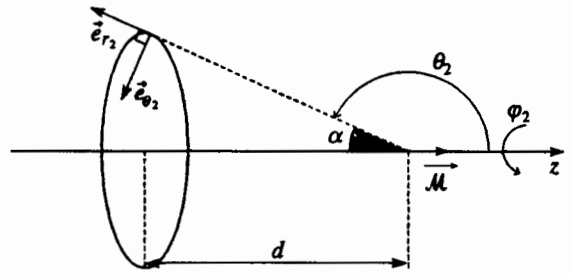
$$\vec{F}'_L = (\mathcal{M}_2 \text{grad}) \vec{B}_1 = i\pi R_2^2 \left( \frac{dB_{1z(\text{trục})}(z)}{dz} \right)_{z=d} \vec{e}_z.$$

nếu ta coi vòng nhỏ như một lưỡng cực từ có mômen  $\mathcal{M}_2 = i \pi R_2^2 \vec{e}_z$ . Điều này một lần nữa lại cho cùng một kết quả như nhau.

3) Tại một điểm P của vòng lớn, trường  $\vec{B}_2$  do vòng nhỏ tạo ra, được coi như trường của một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{M}$ , nghĩa là :

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(P) &= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \left( \frac{2 \cos \theta_2 \vec{e}_{r_2} + \sin \theta_2 \vec{e}_{\theta_2}}{r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \left( \frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_{r_2} + \sin \alpha \vec{e}_{\theta_2}}{(R_1^2 + d^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Bằng cách dùng các tọa độ cầu  $r_2$ ,  $\theta_2$  và  $\varphi_2$  có tâm trên vòng nhỏ.



Từ đó suy ra lực tác dụng lên vòng lớn :

$$\begin{aligned} \vec{F}'_L &= \oint_{\text{vòng lớn}} I R_1 d\varphi_2 \vec{e}_{\varphi_2} \wedge \vec{B}_2 \\ &= \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2}{4\pi} \oint_{\varphi_2=0..2\pi} d\varphi_2 \vec{e}_{\varphi_2} \wedge \left( \frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_{r_2} + \sin \alpha \vec{e}_{\theta_2}}{(R_1^2 + d^2)^{3/2}} \right) \\ \vec{F}'_L &= \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2}{4\pi} \oint_{\varphi_2=0..2\pi} d\varphi_2 \left( \frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_{\theta_2} + \sin \alpha \vec{e}_{r_2}}{(R_1^2 + d^2)^2} \right), \quad \text{hay} \end{aligned}$$

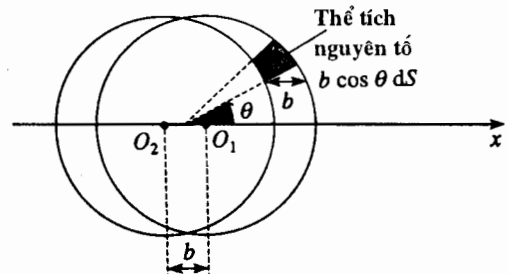
cuối cùng :

$$\vec{F}'_L = \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2}{2\pi} \left( \frac{+3 \cos \alpha \sin \alpha \vec{e}_z}{(R_1^2 + d^2)^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2^2 d}{(R_1^2 + d^2)^{5/2}} \vec{e}_z.$$

Kết quả này trái ngược một cách hợp logic với các kết quả trước.

9 1) a) Diện tích mang bởi mặt  $dS = ad\theta dz$  của hình trụ là  $dq = \sigma_0 \cos \theta dS$ .

Khi các trục của hai hình trụ, mang các điện tích khối trái ngược nhau, xích lại gần nhau, thì các điện tích này bù trừ nhau trong vùng chung của chúng, chỉ để tồn tại một "vỏ" tích điện, chiều dày cực bộ là  $b \cos \theta$ .



Điện tích tương ứng là  $dq = \rho b \cos \theta dS$  (dấu của điện tích chính là dấu của  $\cos \theta$ ). Từ đó suy ra hệ thức bảo đảm tính tương đương của các phân bố này khi  $b$  tiến tới 0 :  $\rho b = \sigma_0$ .

**b) • Một hình trụ duy nhất.**

Đối với một hình trụ bán kính  $a$  và trục  $(Oz)$ , mang điện tích khối  $\rho$ , điện trường, xuyên tâm, có dạng :  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ . Ta có thể xác định nó bằng cách áp dụng định lý GAUSS cho một hình trụ trục  $(Oz)$ , bán kính  $r$  và chiều cao tùy ý, nghĩa là :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r \text{ với } r < a \text{ và } \vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r \text{ với } r > a.$$

**• Hai hình trụ.**

Trong miền chung, ví dụ ở giới hạn tiến tới 0 đối với  $r < a$ , ta sẽ có :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\overline{H_1 M} - \overline{H_2 M}) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} b \vec{e}_x,$$

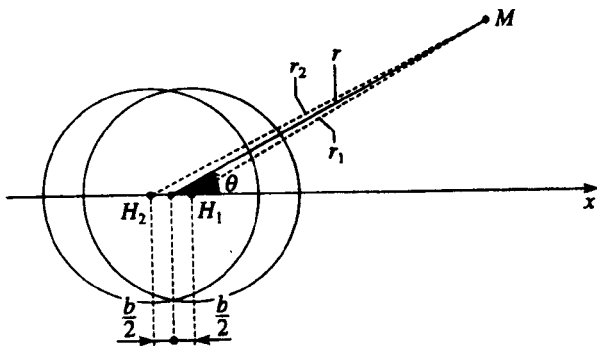
trong đó  $H_1$  và  $H_2$  là các hình chiếu của điểm  $M$  mà tại đó ta tính điện trường, tương ứng trên các trục  $(O_1 z)$  và  $(O_2 z)$ .

Ở ngoài các hình trụ ( $r > a$ ), ta phải thực hiện một sự khai triển của biểu thức của trường, trong phạm vi mà  $r \gg b$ . Tuy nhiên việc khai triển trực tiếp trường thật là tinh tế (vì các chuẩn, và cả các phương của các trường đều khác nhau đối với hai hình trụ). Tốt hơn hết (và nên) là dùng các biểu thức về các thế kết hợp :

$$V_1 = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{a}\right) \text{ và } V_2 = +\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{a}\right) \text{ (sai kém một hằng số)}$$

Điện thế tổng cộng là :  $V = V_1 + V_2$  nghĩa là :

$$V = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{r^2 + b r \cos \theta + \frac{b^2}{4}}{r^2 - b r \cos \theta + \frac{b^2}{4}}\right) \approx \frac{\rho a^2 b}{4\epsilon_0 r} \cos \theta.$$



Từ đó suy ra điện trường ngoài :  $\vec{E} = \frac{\rho a^2 b}{2\epsilon_0} \left( \frac{\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right).$

**• Hình trụ được tích điện ở bề mặt.**

Ta sử dụng sự tương đương triển khai trong câu hỏi trước, khi  $b$  tiến tới 0 với  $\rho b = \sigma_0$ . Khi đó, ta được :

• với  $r < a$ ,  $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$

• với  $r > a$ ,  $\vec{E} = \frac{\sigma_0 a^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right).$

**2) a) Các điện tích dẫn đều được điện trường khởi động theo phương của trục  $(Oz)$ .**

Từ trường làm chúng lệch song song với  $(Ox)$ .

Ví dụ, các electron ( $q < 0$ ), khi chuyển động theo chiều  $z$  giảm, sẽ bị lệch về phía  $x$  giảm.

Ta có thể dự kiến sự xuất hiện các điện tích mặt, dương về phía  $x > 0$  và âm về phía  $x < 0$ .

Các điện tích này đến lượt mình lại tạo ra một điện trường Hall bù trừ tác dụng của từ trường :

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Dưới tác dụng liên hợp của trường  $\vec{B}$  và trường HALL  $\vec{E}_H$ , các điện tích dẫn lại tìm thấy, ở chế độ không đổi, một chuyển động trôi giạt do điện trường  $\vec{E}$  song song với trục  $(Oz)$ , nghĩa là

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{nq} = \frac{\gamma}{nq} E_0 \vec{e}_z.$$

Điện trường HALL, đều trong hình trụ, có giá trị :

$$\vec{E}_H = \frac{\gamma}{nq} E_0 B_0 \vec{e}_x.$$

b) Theo các kết quả được thiết lập ở câu hỏi trước, ta có thể đưa ra ý kiến là cần cho hình trụ một điện tích mặt  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  với

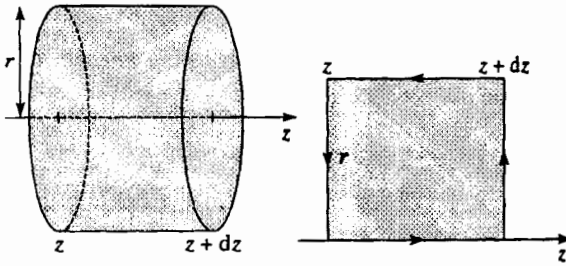
$$\sigma_0 = -2\epsilon_0 \frac{\gamma}{nq} E_0 B_0 \text{ để tạo ra được một điện trường như thế ở}$$

trong hình trụ.



$$-dz B_{1z}(r, z) + dz B_{1z(\text{trục})}(z) = 0,$$

(đến các số hạng bậc cao hoặc bậc 2 ở gần r).



Cuối cùng suy ra :

$$\vec{B}_1 = B_{1z(\text{trục})}(z) \vec{e}_z - \frac{r}{2} \frac{dB_{1z(\text{trục})}}{dz} \vec{e}_r.$$

(đến các số hạng bậc cao hoặc bậc 2 ở gần r)

Chỉ duy nhất phần không đều của biểu thức này sẽ có ích để tính tổng hợp lực của các lực LAPLACE tác dụng lên vòng nhỏ.

Từ đó rút ra tổng hợp lực của các lực tác dụng lên vòng nhỏ :

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \oint_{\text{vòng nhỏ}} i d\vec{l} \wedge \vec{B}_1 = \oint_{\theta=0.2\pi} i R_2 d\theta \vec{e}_\theta \wedge \left( -\frac{R_2}{2} \frac{dB_{1z(\text{trục})}(z)}{dz} \vec{e}_r \right)_{z=d} \\ &= i\pi R_2^2 \left( \frac{dB_{1z(\text{trục})}(z)}{dz} \right)_{z=d} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Vòng lớn tạo ra, tại một điểm trên trục hoành z, từ trường :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2R_1} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2(R_1^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

Từ đó rút ra :

$$\vec{F}_L = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I R_1^2 (\pi R_2^2 i) d}{(R_1^2 + d^2)^{5/2}} \vec{e}_z.$$

Đây chính là lực hút nếu hai vòng dây đều định hướng theo cùng chiều (nghĩa là i và I cùng dấu).

2) Lực, hướng theo (Oz) (vì lý do đối xứng tròn xoay của bài toán) cũng có thể được viết :

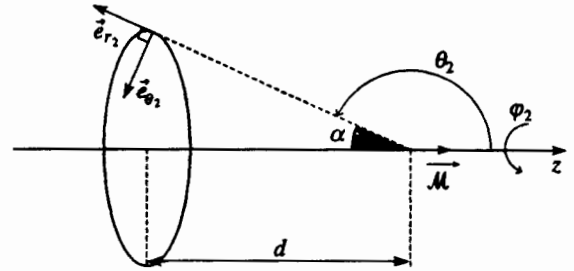
$$\vec{F}_L = (\vec{\mathcal{M}}_2 \text{grad}) \vec{B}_1 = i\pi R_2^2 \left( \frac{dB_{1z(\text{trục})}(z)}{dz} \right)_{z=d} \vec{e}_z.$$

nếu ta coi vòng nhỏ như một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{\mathcal{M}}_2 = i\pi R_2^2 \vec{e}_z$ . Điều này một lần nữa lại cho cùng một kết quả như nhau.

3) Tại một điểm P của vòng lớn, trường  $\vec{B}_2$  do vòng nhỏ tạo ra, được coi như trường của một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{\mathcal{M}}$ , nghĩa là :

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(P) &= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \left( \frac{2 \cos \theta_2 \vec{e}_{r_2} + \sin \theta_2 \vec{e}_{\theta_2}}{r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \left( \frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_{r_2} + \sin \alpha \vec{e}_{\theta_2}}{(R_1^2 + d^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Bằng cách dùng các tọa độ cầu  $r_2, \theta_2$  và  $\varphi_2$  có tâm trên vòng nhỏ.



Từ đó suy ra lực tác dụng lên vòng lớn :

$$\begin{aligned} \vec{F}'_L &= \oint_{\text{vòng lớn}} I R_1 d\varphi_2 \vec{e}_{\varphi_2} \wedge \vec{B}_2 \\ &= \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2}{4\pi} \oint_{\varphi_2=0.2\pi} d\varphi_2 \vec{e}_{\varphi_2} \wedge \left( \frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_{r_2} + \sin \alpha \vec{e}_{\theta_2}}{(R_1^2 + d^2)^{3/2}} \right) \\ \vec{F}'_L &= \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2}{4\pi} \oint_{\varphi_2=0.2\pi} d\varphi_2 \left( \frac{-2 \cos \alpha \vec{e}_{\theta_2} + \sin \alpha \vec{e}_{r_2}}{(R_1^2 + d^2)^{3/2}} \right), \quad \text{hay} \end{aligned}$$

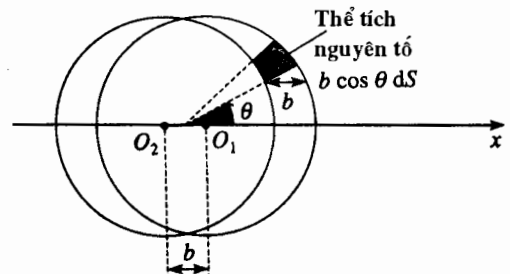
cuối cùng :

$$\vec{F}'_L = \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2}{2\pi} \left( \frac{+3 \cos \alpha \sin \alpha \vec{e}_z}{(R_1^2 + d^2)^{3/2}} \right) = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 \mathcal{M} I R_2 d}{(R_1^2 + d^2)^{5/2}} \vec{e}_z.$$

Kết quả này trái ngược một cách hợp logic với các kết quả trước.

9 1) a) Điện tích mang bởi mặt  $dS = a d\theta dz$  của hình trụ là  $dq = \sigma_0 \cos \theta dS$ .

Khi các trục của hai hình trụ, mang các điện tích khối trái ngược nhau, xích lại gần nhau, thì các điện tích này bù trừ nhau trong vùng chung của chúng, chỉ để tồn tại một "vỏ" tích điện, chiều dày cục bộ là  $b \cos \theta$ .



Điện tích tương ứng là  $dq = \rho b \cos \theta dS$  (dấu của điện tích chính là dấu của  $\cos \theta$ ). Từ đó suy ra hệ thức bảo đảm tính tương đương của các phân bố này khi  $b$  tiến tới 0:  $\rho b = \sigma_0$ .

**b) • Một hình trụ duy nhất.**

Đối với một hình trụ bán kính  $a$  và trục ( $Oz$ ), mang điện tích khối  $\rho$ , điện trường, xuyên tâm, có dạng:  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ . Ta có thể xác định nó bằng cách áp dụng định lý GAUSS cho một hình trụ trục ( $Oz$ ), bán kính  $r$  và chiều cao tùy ý, nghĩa là:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r \text{ với } r < a \text{ và } \vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r \text{ với } r > a.$$

• Hai hình trụ.

Trong miền chung, ví dụ ở giới hạn tiến tới 0 đối với  $r < a$ , ta sẽ có:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\overline{H_1 M} - \overline{H_2 M}) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} b \vec{e}_x,$$

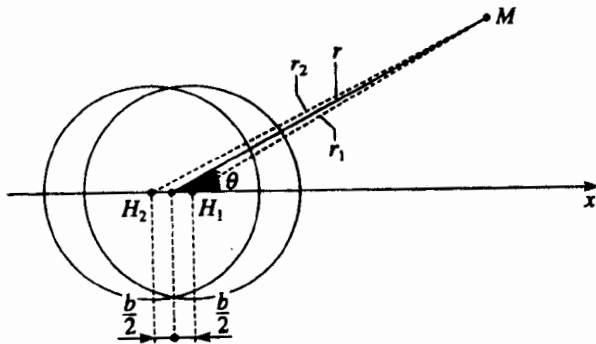
trong đó  $H_1$  và  $H_2$  là các hình chiếu của điểm  $M$  mà tại đó ta tính điện trường, tương ứng trên các trục ( $O_1 z$ ) và ( $O_2 z$ ).

Ở ngoài các hình trụ ( $r > a$ ), ta phải thực hiện một sự khai triển của biểu thức của trường, trong phạm vi mà  $r \gg b$ . Tuy nhiên việc khai triển trực tiếp trường thật là tinh tế (vì các chuẩn, và cả các phương của các trường đều khác nhau đối với hai hình trụ). Tốt hơn hết (và nên) là dùng các biểu thức về các thế kết hợp:

$$V_1 = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{a}\right) \text{ và } V_2 = +\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{a}\right) \text{ (sai kém một hằng số)}$$

Điện thế tổng cộng là:  $V = V_1 + V_2$  nghĩa là:

$$V = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{r^2 + b r \cos \theta + \frac{b^2}{4}}{r^2 - b r \cos \theta + \frac{b^2}{4}}\right) \approx \frac{\rho a^2 b}{4\epsilon_0 r} \cos \theta.$$



Từ đó suy ra điện trường ngoài:  $\vec{E} = \frac{\rho a^2 b}{2\epsilon_0} \left( \frac{\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right)$ .

• Hình trụ được tích điện ở bề mặt.

Ta sử dụng sự tương đương triển khai trong câu hỏi trước, khi  $b$  tiến tới 0 với  $\rho b = \sigma_0$ . Khi đó, ta được:

• với  $r < a$ ,  $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$

• với  $r > a$ ,  $\vec{E} = \frac{\sigma_0 a^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^2} \right)$ .

2) a) Các điện tích dẫn đều được điện trường khởi động theo phương của trục ( $Oz$ ).

Từ trường làm chúng lệch song song với ( $Ox$ ).

Ví dụ, các electron ( $q < 0$ ), khi chuyển động theo chiều  $z$  giảm, sẽ bị lệch về phía  $x$  giảm.

Ta có thể dự kiến sự xuất hiện các điện tích mặt, dương về phía  $x > 0$  và âm về phía  $x < 0$ .

Các điện tích này đến lượt mình lại tạo ra một điện trường Hall bù trừ tác dụng của từ trường:

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Dưới tác dụng liên hợp của trường  $\vec{B}$  và trường HALL  $\vec{E}_H$ , các điện tích dẫn lại tìm thấy, ở chế độ không đổi, một chuyển động trôi giạt do điện trường  $\vec{E}$  song song với trục ( $Oz$ ), nghĩa là

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{nq} = \frac{\gamma}{nq} E_0 \vec{e}_z.$$

Điện trường HALL, đều trong hình trụ, có giá trị:

$$\vec{E}_H = \frac{\gamma}{nq} E_0 B_0 \vec{e}_x.$$

b) Theo các kết quả được thiết lập ở câu hỏi trước, ta có thể đưa ra ý kiến là cần cho hình trụ một điện tích mặt  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  với

$$\sigma_0 = -2\epsilon_0 \frac{\gamma}{nq} E_0 B_0 \text{ để tạo ra được một điện trường như thế ở}$$

trong hình trụ.

# TRƯỜNG ĐIỆN TỪ KHÔNG ĐỔI

# 2

## Mở đầu

Ở năm thứ nhất, ta đã mô tả điện trường không đổi được tạo ra bởi một phân bố các điện tích. Trường có lưu thông hay lưu số bảo toàn này, phát sinh từ một thế vô hướng, và thông lượng của nó qua một mặt kín được xác định bởi định lý GAUSS.

Bằng cách tương tự, từ trường không đổi được tạo ra bởi một phân bố các dòng điện, có thông lượng bảo toàn, và lưu thông của nó trên một đường cong kín được xác định bởi định lý AMPÈRE.

Trong khuôn khổ các chế độ không đổi, ta lập phương trình các tính chất này của trường điện từ không đổi theo các định luật vi phân : các định luật hay các phương trình vi phân này (phương trình đạo hàm riêng) cho phép mô tả các tính chất của trường tại mỗi điểm trong không gian.

Ta cũng sẽ thấy có thể kết hợp một thế gọi là thế vectơ với từ trường như ta đã kết hợp một thế vô hướng với điện trường không đổi.

## M U C T I Ê U

■ Các định luật vi phân của trường điện từ ở chế độ không đổi.

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Điện từ học năm thứ nhất :
  - định luật COULOMB ;
  - định luật BIOT và SAVART ;
  - điện trường và từ trường không đổi ;
  - các định lý GAUSS và AMPÈRE.

# 1 Điện trường không đổi

## 1.1. Điện trường của một phân bố điện tích

### 1.1.1. Định luật Coulomb và sự chồng chất các hiệu ứng

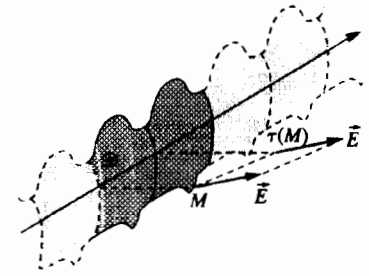
Định luật COULOMB chỉ định lực tương tác, trong chân không, giữa hai điện tích điểm. Nguyên lý chồng chất, coi tính tuyến tính của các hiệu ứng tương tác COULOMB như một tiên đề, đã cho phép ta biểu thị trường tạo nên bởi các mô hình thông thường về phân bố các điện tích.

### 1.1.2. Các tính chất của trường

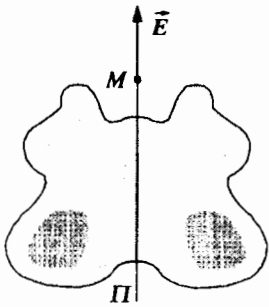
Ta biết rằng điện trường không đổi là một trường có lưu thông bảo toàn nghiệm đúng định lý GAUSS. Việc nghiên cứu tính chất topo của điện trường đã chứng tỏ rằng điện trường có những tính chất *đối xứng của một vector "thật" hay vector cực*.

Đặc biệt ta biết rằng :

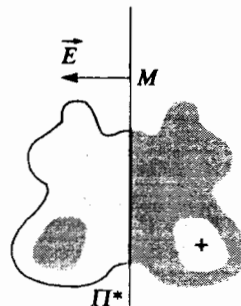
- điện trường, sinh ra bởi một phân bố bất biến khi tịnh tiến hay quay chung quanh một trục, sẽ có cùng những tính bất biến như phân bố đó (H.1) ;
- khi một phân bố có một mặt phẳng đối xứng, thì điện trường thuộc về mặt phẳng đó tại mỗi điểm của nó (H.2) ;
- khi một phân bố có một mặt phẳng phản xứng, thì điện trường sẽ vuông góc với mặt phẳng đó tại mỗi điểm của nó (H.3).



H.1. Phân bố bất biến trong phép tịnh tiến.



H.2. Phân bố có một mặt phẳng đối xứng  $\Pi$ .



H.3. Phân bố có một mặt phẳng phản xứng  $\Pi^*$ .

# Áp dụng 1

### Đối xứng của điện trường

Hãy nhớ rằng dạng tổng quát nhất của điện trường sinh ra bởi một phân bố điện tích có tính :

- đối xứng cầu ;
- đối xứng trụ.

a) Một phân bố, có tính đối xứng cầu tâm  $O$ , nghiệm đúng :

$$\rho(M) = \rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r),$$

trong các tọa độ cầu tâm  $O$ .

Mọi mặt phẳng đi qua tâm  $O$  của hình cầu đều là mặt phẳng đối xứng. Với một điểm  $M$  bất kỳ, có vô số mặt phẳng đối xứng đi qua, chứa  $M$  và  $O$ . Điện trường  $\vec{E}(M)$  thuộc về tất cả các mặt phẳng đó và do vậy thuộc về giao tuyến của chúng : điện trường là xuyên tâm. Tính bất biến trong phép quay chung quanh điểm  $O$  hàm ý rằng modun của trường chỉ phụ thuộc vào khoảng cách  $r$  tới tâm. Vậy kết luận là điện trường của một phân bố điện tích có tính đối xứng cầu, có dạng  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ .

b) Một phân bố có tính đối xứng trụ sẽ bất biến trong phép quay chung quanh trục ( $Oz$ ) của nó và trong phép tịnh tiến song song với trục này.

Vậy  $\rho(M) = \rho(r, \theta, z) = \rho(r)$ , trong các tọa độ trụ có trục ( $Oz$ ).

Mọi điểm  $M$  đều nằm trong hai mặt phẳng đối xứng của phân bố : mặt phẳng chứa  $M$  và trục ( $Oz$ ), và mặt phẳng chứa  $M$  nhưng vuông góc với trục ( $Oz$ ).

Điện trường, tại  $M$ , thuộc về giao tuyến của các mặt phẳng đó, vì vậy :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = E(r, \theta, z)\vec{e}_r.$$

Tính bất biến, bằng phép tịnh tiến theo phương của trục ( $Oz$ ) và bằng phép quay chung quanh trục này, cuối cùng sẽ cho phép ta khẳng định rằng điện trường của một phân bố điện tích đối xứng trụ có dạng :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r.$$

Chú ý :

Không được lẫn lộn các ký hiệu  $r$  và  $\vec{e}_r$  của các tọa độ cầu và tọa độ trụ.

Nếu cần, ta dẫn người đọc trở về giáo trình năm thứ nhất để ôn lại chi tiết hơn các tính chất đối xứng của trường.

## 1.2. Thông lượng của điện trường

### 1.2.1. Định lý GAUSS

Định lý GAUSS chỉ rõ rằng thông lượng của điện trường đi qua một mặt kín  $\Sigma$  bằng điện tích ở bên trong mặt kín chia cho  $\epsilon_0$  :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{trong } \Sigma}}{\epsilon_0}.$$

Đây là một tính chất tích phân của điện trường, mà ta đã thiết lập được một số hệ quả.

- Trong một miền không gian không có điện tích, điện trường có thông lượng bảo toàn (thông lượng là như nhau đi qua mọi tiết diện của một ống trường cho trước). Trên một biểu đồ của điện trường, sự sít gần lại của các đường sức điện trường tương ứng với sự tăng modun của điện trường (H.4).
- Việc sử dụng định lý GAUSS, kết hợp với việc sử dụng các tính chất đối xứng của một phân bố (đối xứng cao), cho phép xác định nhanh điện trường được tạo ra.
- Khi đi qua một lớp có mật độ điện mặt  $\sigma$ , thành phần pháp tuyến của điện trường bị gián đoạn (H.5) :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{N}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

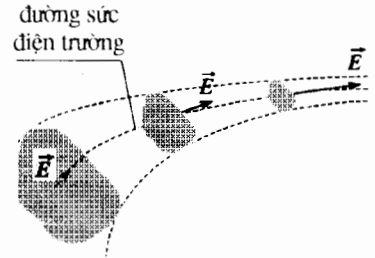
### 1.2.2. Độ phân kỳ (diverge) của điện trường

Định lý GREEN-OSTROGRADSKI (xem phụ lục) cho phép ta liên kết thông lượng của một trường vector đi qua một mặt kín  $\Sigma$  với tích phân của diverge của trường theo thể tích  $\mathcal{V}$  giới hạn bởi  $\Sigma$  :

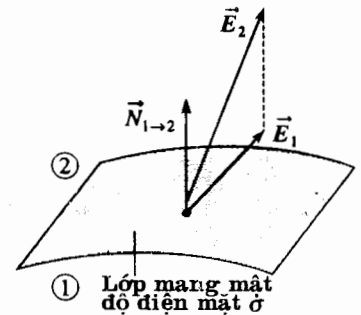
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} d\tau.$$

Thành thử, thông lượng của điện trường đi qua một bề mặt giới hạn một thể tích nguyên tố  $d\tau$  có dạng (H.6) :

$$d\Phi = \text{div } \vec{E} d\tau$$

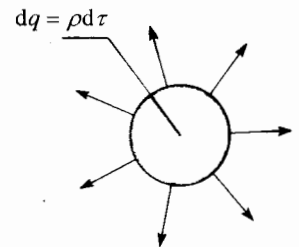


H.4. Sự biến đổi biên độ của điện trường trong một ống trường không có điện tích.



H.5. Sự gián đoạn của thành phần pháp tuyến của thành phần pháp tuyến của điện trường đi qua một lớp mang điện tích mật  $\sigma$  :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{N}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$



H.6. Thể tích nguyên tố được tích điện.

Thể tích này chứa điện tích  $\delta q = \rho d\tau$ . Định lý GAUSS cho ta thấy rằng thông lượng này cũng có giá trị  $d\Phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$ .

So sánh hai biểu thức về thông lượng, tự đó suy ra :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Điện trường được gắn với các nguồn của nó bởi định luật vi phân :**

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Phương trình này thể hiện định luật thứ nhất của các định luật chi phối sự biến đổi cục bộ của trường điện từ. Chúng ta sẽ còn xét ba định luật khác nữa (một cho điện trường và hai cho từ trường), tất cả lập thành nhóm "bốn phương trình MAXWELL".

Vì trích dẫn định lý Gauss, nên ta gọi phương trình vừa nhận được là *phương trình MAXWELL - GAUSS*.

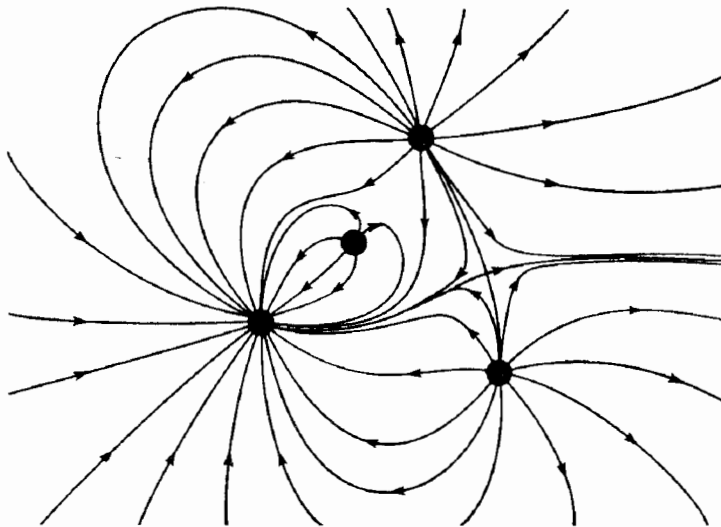
Phương trình vi phân MAXWELL - GAUSS cho phép tìm lại được định lý GAUSS :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \iiint_V \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} d\tau = \frac{Q_{\text{trong } \Sigma}}{\epsilon_0}$$

Các định luật vi phân và tích phân là hai cách lập phương trình của cùng một tính chất cơ bản của điện trường.

Chú ý :

*Khi nghiên cứu các bản đồ điện trường, ta đã quan sát thấy rằng điện trường, do các điện tích cố định tạo ra, phân kỳ đi từ các điện tích dương và hội tụ về các điện tích âm (H.7). Tính chất này chúng ta gọi "độ phân kỳ" được kết hợp với phép toán lấy đạo hàm tác động trong định luật vi phân này.*



**H.7.** Các đường sức của điện trường hội tụ hay phân kỳ, về các điện tích hay ra vô cùng.

### 1.3. Lưu thông của điện trường không đổi

#### 1.3.1. Lưu thông bảo toàn

Ta biết rằng điện trường không đổi có lưu thông bảo toàn.

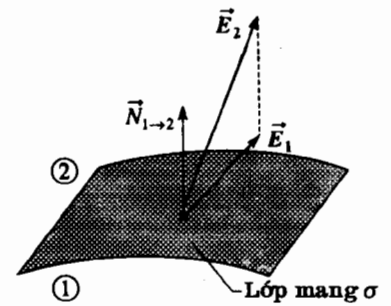
- Lưu thông của điện trường trên một đường cong, đi từ một điểm này sang một điểm khác, không phụ thuộc đường đi liên tục giữa các điểm đó.
- Lưu thông của điện trường dọc theo một đường cong kín bằng không :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Các tính chất này kéo theo :

- các đường sức của một trường tĩnh điện không thể là các đường cong kín : các đường sức, phân kỳ kể từ các điện tích, và đời khởi chúng hướng về vô cực hay đi đến các điện tích khác (H.7) ;
- thành phần tiếp tuyến của điện trường là liên tục khi đi qua một bề mặt tích điện. Biết tính gián đoạn theo phương pháp tuyến của trường, thì ta suy ra tính gián đoạn của trường khi đi qua một lớp có mật độ điện mặt  $\sigma$  (H.8) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$



H.8. Tính gián đoạn của trường khi đi qua một lớp tích điện :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}.$$

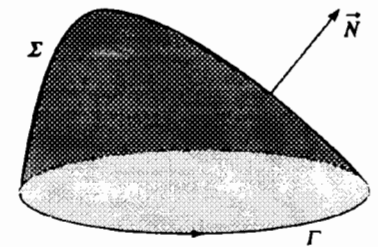
#### 1.3.2. Tính xoáy (rota) của điện trường không đổi

Định lý STOKES (xem phụ lục) liên kết lưu thông  $C_{\Gamma}$  của một trường vector trên một đường cong kín  $\Gamma$ , với thông lượng của rota của trường đó, qua mọi mặt  $\Sigma$  có định hướng dựa lên  $\Gamma$  (H.9) :

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Lưu thông này của điện trường không đổi bằng không, vì đường cong  $\Gamma$  khép kín. Từ đó ta rút ra  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ .

Phương trình  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  thể hiện cục bộ tính chất bảo toàn lưu thông của điện trường không đổi.



H.9. Mặt định hướng  $\Sigma$  dựa lên đường cong kín  $\Gamma$ .

### 1.4. Thế vô hướng

#### 1.4.1. Trường gradien

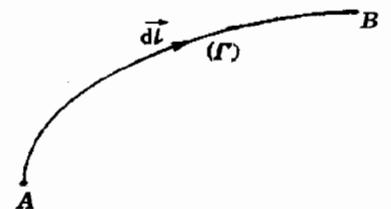
Lưu thông của điện trường không đổi được bảo toàn, và đẳng thức :

$$V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{l},$$

xác định hiệu điện thế  $V_B - V_A$  mà không cần phải định rõ đường đi (nối các điểm A và B) mà theo đó lưu thông của trường được tính toán (H.10). Cách viết này xác định điện thế sai kém một hằng số. Cách chọn hằng số này, gọi là cách chọn mốc đo điện thế, không ảnh hưởng đến trị số của điện trường : điện trường bất biến đối với mốc đo.

Lưu thông nguyên tố của điện trường đồng nhất, sai khác về dấu, với vi phân (toàn chỉnh) của hàm số  $V(\vec{r})$  :

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(\vec{r}).$$

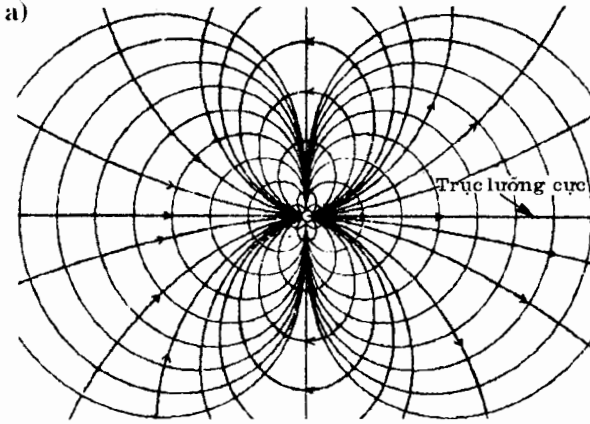


H.10. Đường cong nối hai điểm A và B.

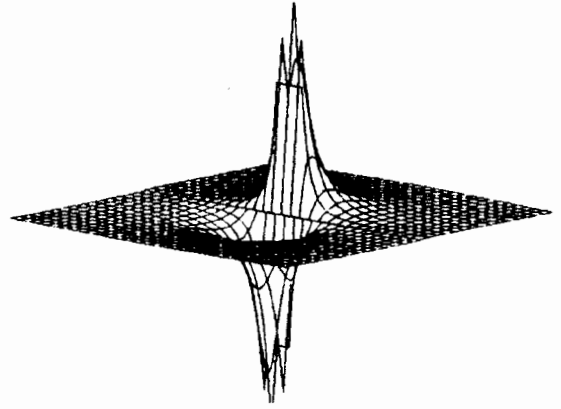
Thành thử, điện trường không đổi, có lưu thông bảo toàn, phải phát sinh từ một thế vô hướng  $V$ :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V(\vec{r}).$$

Điện trường vuông góc với các mặt phẳng thế và các đường sức của điện trường được định hướng theo chiều điện thế giảm. Các hình 11a và 11b minh họa tính chất này trong trường hợp của một lưỡng cực điện.



b)



Mặt khác, tiết §1.3. cho ta thấy rằng một trường có lưu thông bảo toàn là một trường có rota bằng không và ngược lại.

Một trường vector có lưu thông bảo toàn là một trường có rota bằng không; đây cũng là một trường gradien. Các tính chất này, tương đương nhau, được áp dụng cho điện trường không đổi.

**H.11a.** Các đường sức (xanh) và các đường đẳng thế (đen) của một lưỡng cực điện, trong một mặt phẳng chứa lưỡng cực.

**b.** Sự làm thấy rõ điện thế.

#### 1.4.2. Phương trình POISSON

Điện trường không đổi xuất phát từ một thế  $V$  và, khi có mặt một mật độ điện khối  $\rho$ , sẽ thỏa mãn phương trình vi phân MAXWELL-GAUSS:

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V \quad \text{và} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Từ đó ta rút ra:

$$\text{div}(-\overline{\text{grad}} V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

trong đó  $\Delta V$  là laplacien của hàm thế  $V$  (xem phụ lục).

Ở chế độ không đổi, thế vô hướng  $V$  nghiệm đúng phương trình vi phân gọi là **phương trình POISSON**:  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ .

Chú ý:

Trong một vùng không có điện tích, nghĩa là ở bên ngoài sự phân bố điện tích tạo ra điện trường và điện thế, thì điện thế sẽ tuân theo phương trình Laplace:  $\Delta V = 0$ . Ta có thể tìm lại được phương trình này trong các lĩnh vực khác của vật lý (sự dẫn nhiệt, điện, cơ học chất lỏng), trong đó các bài toán tương tự (phương trình và các điều kiện biên giống nhau) chấp nhận các lời giải giống nhau.



# Áp dụng 2

## Vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện

1) Có một vật liệu dẫn điện (ví dụ kim loại) ở cân bằng tĩnh điện. Điều đó có nghĩa là vận tốc chuyển động của tập hợp các điện tích (vận tốc trung mô) bằng không; ta nói rằng các điện tích không dịch chuyển. Vậy trị số của điện trường ở trong lòng một vật liệu như thế phải là bao nhiêu?

2) Từ đó ta có thể rút ra điều gì về điện thế của một vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện?

3) Vật dẫn này có thể được nhiễm điện. Vậy điện tích này phải được phân bố tại đâu khi vật dẫn ở cân bằng? Tìm giá trị của trường tĩnh điện ngay ở bên ngoài vật dẫn, nghĩa là ở ngay lân cận sát bề mặt vật dẫn.

1) Tình huống xét trên là tĩnh: không có chuyển động của toàn bộ các điện tích. "Chất lỏng điện tích" dẫn của vật liệu vẫn đứng yên. Từ đó, ta suy ra điện trường ở trong lòng kim loại bằng không.

2) Nếu điện trường bằng không bên trong vật dẫn, thì điện thế ở đây nhất thiết phải đều: vật dẫn ở cân bằng điện là một khối đẳng thế.

3) Điện trường bên trong vật dẫn bằng không thì divergence của nó cũng bằng không (vì  $\vec{E} = \vec{0}$ , nên  $\text{div } \vec{E} = 0$ ). Do đó không có điện tích trong thể tích của vật dẫn, nghĩa là mật độ điện  $\rho = 0$ .

Nếu vật dẫn được tích điện, thì nhất thiết điện tích của nó phải được phân bố trên bề mặt, biểu diễn bởi mật độ điện mặt  $\sigma$ .

Tính gián đoạn của điện trường qua một mặt tích điện được xác định bởi hệ thức:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$

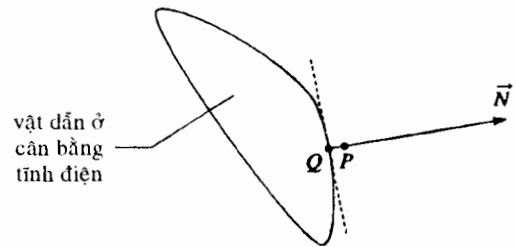
Ký hiệu 2 là môi trường ngoài (chân không), 1 là môi trường vật dẫn tại đó điện trường bằng không, và  $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  là pháp tuyến với mặt vật dẫn, hướng ra phía ngoài, ta suy ra trị số của điện trường ở gần sát ngay mặt vật dẫn:

$$\vec{E}_{\text{gần sát ngay bề mặt}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$

Trong trường hợp được biểu diễn trên hình 12, hệ thức trên có dạng

$$\vec{E}(Q) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$

vì điện trường không được xác định trên bề mặt.



H.12. Điện trường  $\vec{E}$ , ở gần sát ngay mặt vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện được xác định bởi:

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$

## 1.5. Giải các định luật vi phân

Ở năm thứ nhất, ta đã coi định luật COULOMB như một định đề và đã thiết lập, nhờ nguyên lý chồng chất, điện trường và một hàm thế, kết hợp với một phân bố điện tích ở phạm vi hữu hạn.

Khi đã có các định luật vi phân được thử nghiệm bởi điện trường không đổi và thế vô hướng, ta có thể xem xét một cách tiếp cận khác, dựa vào việc tiên đề hóa các định luật vi phân:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{và} \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

Việc tìm một trường vector  $\vec{E}$ , là nghiệm của hệ này, đối với một phân bố điện tích cho trước, quy lại là xác định một nghiệm của phương trình

$$\text{Poisson : } \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Ta thừa nhận rằng, đối với một phân bố điện tích phạm vi hữu hạn, thì hàm thế :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\rho(P)d\tau}{PM},$$

trong đó  $P$  là một điểm mô tả phân bố (H.13), là một nghiệm chấp nhận được của phương trình POISSON. Đây chính là nghiệm duy nhất tiến tới không, khi khoảng cách từ điểm  $M$  đến phân bố tiến tới vô cùng.

Trong tọa độ cầu, ta có thể viết :

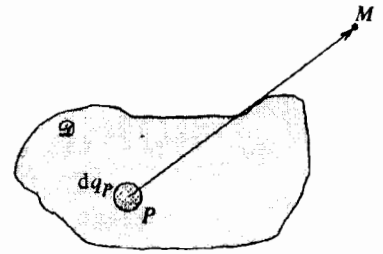
$$\overline{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}, \quad \text{vậy} \quad \overline{\text{grad}}_M\left(\frac{1}{PM}\right) = -\frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2},$$

trong đó chỉ số " $M$ " chỉ rõ sự lấy đạo hàm đối với các tọa độ của điểm  $M$ .

Vậy thì biểu thức của điện trường sinh ra bởi phân bố các điện tích là :

$$\vec{E}(M) = -\overline{\text{grad}}_M \left( \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM} \right) = \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}$$

Các định luật vi phân, được dùng như những định đề, sẽ dẫn tới các biểu thức mà ta đã thiết lập ở năm thứ nhất khi coi định luật COULOMB và tính tuyến tính của các hiệu ứng như một định đề.



H.13. Phân bố các điện tích.

# Áp dụng 3

## Tụ điện phẳng

Một tụ điện gồm hai bản kim loại mà các mặt đối diện đều phẳng, tiết diện  $S$  và song song, cách nhau một khoảng  $h$ .

Môi trường ở giữa hai bản coi như là chân không (H.14).

Hiệu điện thế  $U = V_1 - V_2$  được áp đặt vào hai bản của tụ điện.

Để mô tả hệ này, ta bỏ qua mọi hiệu ứng bờ : ta coi các bờ của tụ điện bị đẩy ra vô cực.

Lúc đó, tụ điện giống như một hệ hai mặt phẳng dẫn vô hạn đối diện nhau.

1) Trong gần đúng này, hãy tìm giá trị của điện trường giữa hai bản của tụ điện ?

Tìm điện tích trên các bản tụ điện. Từ đó suy ra điện dung của tụ ?

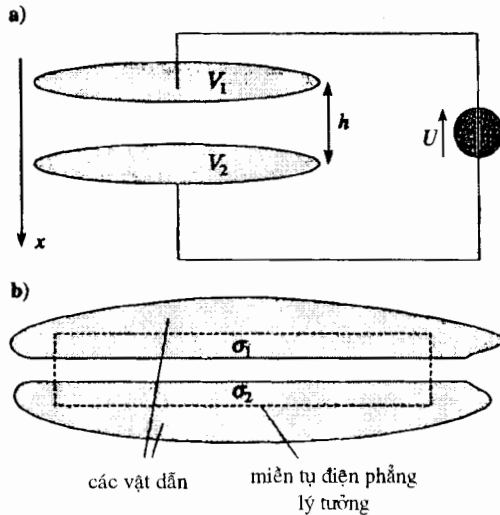
Cho :  $S = 10 \text{ cm}^2$  ;  $h = 1 \text{ mm}$ . Kết luận ?

2) Nếu môi trường giữa các bản là không khí với hằng số điện môi gần giá trị của nó trong chân không, thì điện trường không thể vượt quá giá trị cỡ  $3.10^6 \text{ V.m}^{-1}$ , vì lớn hơn giá trị đó, sự ion hóa không khí sẽ tạo ra tia lửa phá hủy giữa các bản của tụ điện. Hãy bình luận các cấp độ lớn tương ứng của điện tích và hiệu điện thế.

3) Tìm năng lượng tích lũy trong tụ điện khi nó được tích điện dưới hiệu điện thế nói trên. Bình luận cỡ độ lớn của nó. Chứng minh rằng có thể tìm lại được năng lượng tích lũy trong tụ điện bằng cách kết hợp với điện trường một năng lượng trên đơn vị thể tích :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Dữ liệu :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$ .



H.14a và b. Tụ điện phẳng có các bản hình tròn.

1) Khi bỏ qua các hiệu ứng bờ, bài toán sẽ bất biến trong mọi phép tịnh tiến song song với các bản của tụ điện và, do đối xứng, cũng bất biến đối với mọi mặt phẳng vuông góc với các bản. Điện trường có dạng  $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$ . Diver của điện trường bằng không trong khoảng giữa các bản. Vậy  $E(x) = \text{cte} = E_0$ . Lưu thông của điện trường giữa các bản cho ta :

$$E_0 = \frac{V_1 - V_2}{h}$$

Trong các bản, điện trường bằng không (xem áp dụng 2). Tính gián đoạn của điện trường ở bề mặt của các bản cho ta  $\sigma_1 = \epsilon_0 E_0 = -\sigma_2$ . Điện tích của các bản là :

$$Q_1 = Q_2 = \epsilon_0 S \frac{V_1 - V_2}{h}$$

Vậy điện dung của tụ điện là :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{h} \approx 9 \text{ pF}$$

Ta thấy điện dung này tăng theo tiết diện của các bản. Trong thực tế, ta có thể dùng hai lá kim loại ngăn cách bằng một chất cách điện rồi cuộn lại để có được một tụ điện kích thước nhỏ, nhưng vẫn giữ được nguyên vẹn giá trị đầy đủ cho bề mặt các bản

Hơn nữa, chất cách điện có thể có hằng số điện môi lớn hơn nhiều so với chân không (hệ số tăng ích khoảng 1000). Các trị số cỡ  $\mu\text{F}$  thường gặp trong các mạch điện tử như vậy, đã cao hơn giá trị mà ta vừa nhận được.

Chú ý rằng fara vẫn cứ là một đơn vị "to lớn" (điện dung cỡ fara chỉ gặp trong trường hợp đặc biệt).

2) Để được  $E_0 = 3.10^6 \text{ V.m}^{-1}$ , ta cần có  $U = 3000 \text{ V}$  và  $Q = 2,7.10^{-8} \text{ C}$ . Trong tĩnh điện, các điện tích đều nhỏ, còn các hiệu điện thế lại cao. Thành thử, ví dụ một điện áp  $U = 1 \text{ V}$  đặt vào hai đầu của một điện trở  $10 \Omega$  sẽ kéo theo sự xuất hiện một dòng điện  $100 \text{ mA}$ , nghĩa là  $0,1$  culông trong một giây.

3) Năng lượng tích giữ bằng :

$$\frac{1}{2} CU^2 \approx 4.10^{-4} \text{ J}.$$

Năng lượng này cực kì yếu, so với một bếp điện thông thường có một công suất tiêu thụ khoảng kW, nghĩa là  $10^3$  jun trong một giây. Ở đây nảy sinh một vấn đề kĩ thuật rất quan trọng là : không thể lưu trữ năng lượng dưới dạng điện năng.

Thực tế, nó được lưu giữ dưới dạng thế năng cơ (thế năng của trọng lực nước lưu trữ trong một đập nước), hay thế năng có thể được giải phóng bằng phản ứng hóa học (cáát đốt, pin) hay phản ứng hạt nhân. Một khi được giải phóng, các năng lượng thường được biến đổi dạng điện và được sử dụng ngay.

Ta lưu ý rằng năng lượng này có thể được đặt dưới dạng :

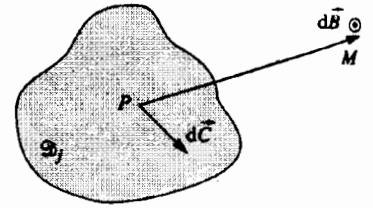
$$\frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{h} (E_0 h)^2 = Sh \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Nhờ đó, ta có năng lượng trên đơn vị thể tích.

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}.$$

► Để tập luyện : bài tập : 1, 2, 4, 6 và 7

# 2 Từ trường không đổi



H.15. Từ trường của một phân bố các dòng điện.

## 2.1. Từ trường của một phân bố các dòng điện

### 2.1.1. Định luật BIOT và SAVART

Định luật BIOT và SAVART chỉ rõ rằng từ trường được tạo ra trong chân không, tại một điểm  $M$ , bởi một phân bố các dòng điện không đổi có thể nhận được bằng cách chồng chất các phần đóng góp nguyên tố (H.15) :

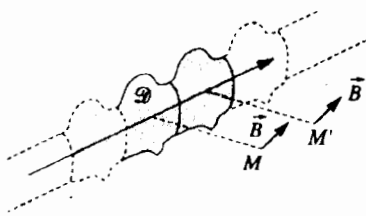
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{\|PM\|^2},$$

của mỗi phần tử trong các phần tử dòng điện  $d\vec{C}$ , tại điểm  $P$  di động trên toàn phân bố ( $d\vec{C} = \vec{j}d\tau$ ,  $\vec{j}_s dS$  hay  $I d\vec{l}$ , đối với một phân bố các dòng điện theo thể tích, theo bề mặt hay theo dạng chỉ).

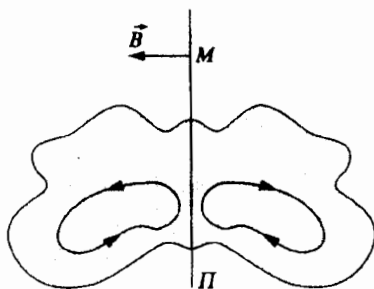
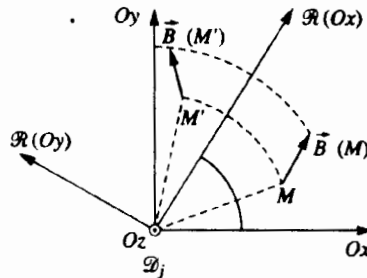
### 2.1.2. Tính chất của từ trường

Ta biết rằng từ trường là một trường có thông lượng bảo toàn, nghiệm đúng định lí Ampère. Việc nghiên cứu topo của nó đã cho biết từ trường có những tính chất đối xứng của một giá vector hay vector trục. Đặc biệt ta thấy rằng :

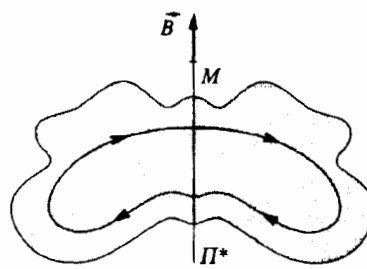
- từ trường sinh ra bởi một phân bố bất biến trong phép tịnh tiến hay phép quay xung quanh một trục, có cùng những bất biến như thế (H.16a và b) ;
- khi một phân bố có một mặt phẳng đối xứng, thì từ trường sẽ vuông góc với mặt phẳng đó tại mỗi điểm của nó (H.17) ;
- khi một phân bố có một mặt phẳng phản xứng, thì từ trường sẽ thuộc về mặt phẳng đó tại mỗi điểm của nó (H.18).



H.16. Bất biến  
a. trong phép tịnh tiến.  
b. trong phép quay



H.17. Từ trường trên một mặt phẳng đối xứng.



H.18. Từ trường trên một mặt phẳng phản xứng.

## 2.2. Lưu thông của từ trường

### 2.1.2. Định lí AMPÈRE

Định lí AMPÈRE liên kết lưu thông của từ trường dọc theo một đường cong kín với dòng điện bị đường cong đó bao quanh (H.19) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{bị bao quanh}}$$

Ta đã quan sát thấy một số hệ quả của tính chất tích phân này của từ trường :

- Trong một miền không gian không có dòng điện, thì từ trường có thông lượng bảo toàn.
- Việc dùng định lí AMPÈRE, kết hợp với việc dùng các tính chất đối xứng của một phân bố đối xứng “cao”, cho phép xác định nhanh chóng từ trường được tạo ra.
- Sự đi qua một lớp dòng điện có vectơ mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s$  được kèm theo một sự gián đoạn (sự không liên tục) của các thành phần tiếp tuyến của từ trường (H.20) :

$$\vec{N}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

### 2.2.2. Phương trình MAXWELL - AMPÈRE ở chế độ không đổi

Định lí STOKES cho phép ta viết :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dòng điện  $I$  “bao quanh” bởi đường cong kín  $\Gamma$  bằng thông lượng của vectơ mật độ dòng điện đi qua mọi mặt có định hướng dựa lên đường cong này (nhớ rằng  $\vec{j}$  là vectơ mật độ dòng điện... theo thể tích, có thông lượng bảo toàn ở chế độ không đổi) :

$$I_{\text{bị bao quanh}} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Khi đồng nhất các biểu thức nói trên (là các biểu thức có hiệu lực đối với mọi mặt  $\Sigma$ ), ta rút ra  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Từ trường không đổi gắn với các nguồn của nó bởi định luật vi phân :

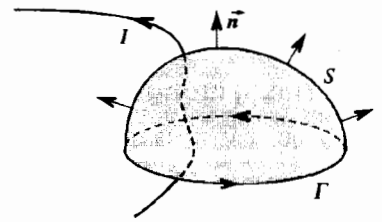
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Ở đây, lại một lần nữa, các định luật vi phân và tích phân là hai cách lập phương trình của cùng một tính chất, vì phương trình vi phân cho phép ta tìm lại được định lí AMPÈRE :

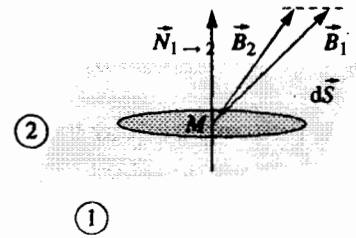
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{bị bao quanh}}$$

Trái với điện trường không đổi, từ trường không đổi không có rota bằng không : điện trường không đổi “phân kì” từ các nguồn của nó (các điện tích), còn từ trường không đổi thì “xoáy” xung quanh các nguồn của nó (các dòng điện).

Các đường sức của từ trường đều xoắn quanh nhau và quấn quanh các đường dòng điện (H.21).

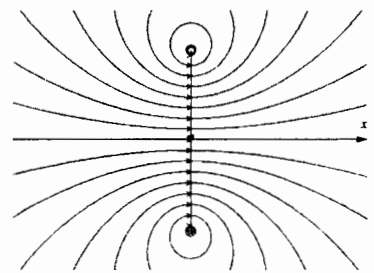


H.19. Dòng điện  $I$  đi qua mặt  $\Sigma$  dựa vào đường cong kín  $\Gamma$ , theo chiều của  $\vec{N}$ .



H.20. Sự đi qua một lớp dòng điện có vectơ mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s$  :

$$\vec{N}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$



H.21. Các đường sức của từ trường, được tạo ra bởi một vòng dây “xoáy” xung quanh dây dẫn.

## 2.3. Thông lượng của từ trường

### 2.3.1. Thông lượng bảo toàn

Ở năm thứ nhất, ta đã nhận thấy tính chất bảo toàn của từ thông :

- thông lượng của từ trường qua một mặt kín bằng không :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 ;$$

- thông lượng này giống như nhau qua mọi tiết diện của cùng một ống trường (H.22).

Các tính chất này kéo theo :

- khi các đường sức của từ trường sát lại nhau, thì biên độ của nó tăng ;
- thông lượng của từ trường giống như nhau qua mọi bề mặt (định hướng) dựa lên cùng một đường cong khép kín ;
- thành phần pháp tuyến của từ trường là liên tục khi đi qua một lớp dòng điện.

Khi biết tính gián đoạn tiếp tuyến, ta suy rằng tính gián đoạn của từ trường đi qua một lớp dòng điện sẽ là (H.20) :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2} .$$

### 2.3.2. Phương trình từ thông

Trái ngược với điện trường, từ trường bao giờ cũng có một thông lượng bằng không đi qua một mặt kín. Định lí GREEN – OSTROGRADSKI cho phép ta liên kết, đối với mọi mặt kín, thông lượng của trường với divergence của nó.

Như vậy, divergence của từ trường bằng không ở tại mọi điểm.

Tính chất bảo toàn của từ thông được thể hiện bởi định luật vi phân :

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

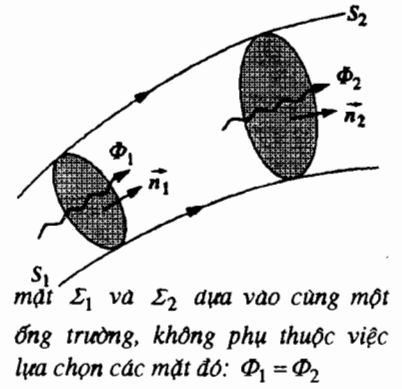
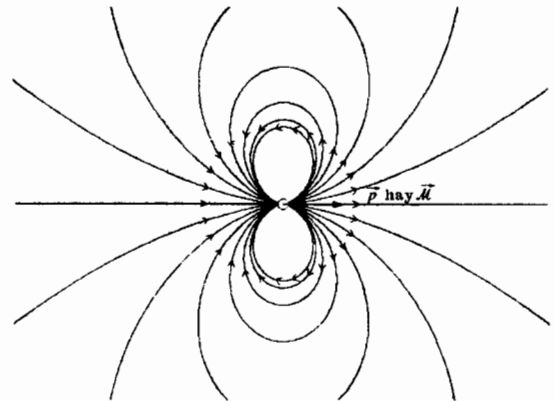
# Áp dụng 4

### Các đường sức của điện trường và từ trường

Trên hình 23, ta biểu diễn trong một mặt phẳng chứa lưỡng cực điện, một vài đường sức của điện trường sinh ra bởi lưỡng cực điện đó.

Sự biểu diễn này tương tự như trong trường hợp từ trường.

**H.23.** Các đường sức của trường của một lưỡng cực điện hay từ.

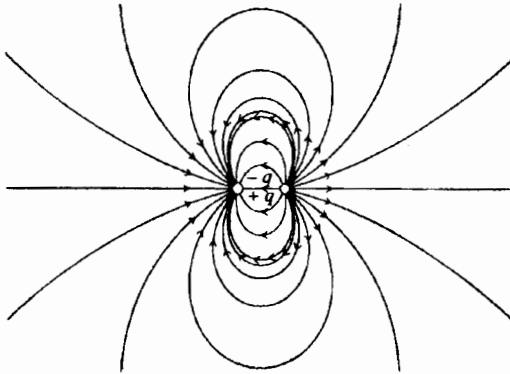


Hai hình vẽ dưới đây gọi cho ta một nhận xét gì? Phải chăng là nghịch lý nếu kể đến tính bất đối xứng tồn tại giữa hai cách biểu diễn của các phương trình vi phân:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{và} & \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}; \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{và} & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \end{cases}$$

Các bản đồ đường sức của trường các lưỡng cực điện và từ đều giống hệt nhau khi ở xa lưỡng cực, như ta đã thấy ở năm thứ nhất.

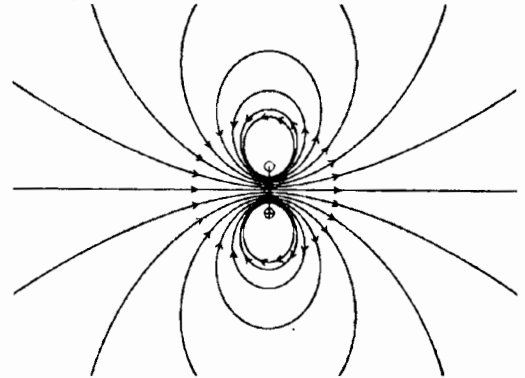
Ở bên ngoài các nguồn của chúng (vậy ở đây là phía ngoài điểm đặt của lưỡng cực), thì các trường tương ứng đều thỏa mãn cùng các phương trình vi phân như nhau: *div* và *rota*



**H.24a.** Các đường sức điện trường của một cặp điện tích bằng nhau nhưng trái dấu (gắn đúng lưỡng cực).

đều đồng thời bằng không. Thành thử, các bản đồ điện trường và từ trường có thể biểu hiện những sự đồng dạng.

Tuy nhiên, nếu ta quan sát các bản đồ điện trường của một lưỡng cực điện và từ trường của một vòng dây (H.24a và 24b) ở những khoảng cách rất nhỏ để chứng thực sự gần đúng lưỡng cực, thì ta sẽ tìm lại được những sự khác biệt cơ bản trong hành vi của điện trường và từ trường: điện trường phân kỳ khởi đầu từ điện tích dương để hội tụ về điện tích âm, còn từ trường xoáy xung quanh các dòng điện tạo ra nó.



**H.24b.** Các đường sức từ trường của một vòng dây có dòng điện chạy qua (gắn đúng lưỡng cực).

## 2.4. Thế vector $\vec{A}$

### 2.4.1 Trường xoáy

Từ trường có *div* bằng không.

Tính chất này bảo đảm sự tồn tại của một trường vector  $\vec{A}$  sao cho:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A};$$

thật vậy, các tính chất  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  và  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  là tương đương nhau.

Một trường có *div* bằng không là trường có thông lượng bảo toàn; đó cũng là một trường xoáy.

Các tính chất này, tương đương nhau, được áp dụng cho từ trường.

Tương tự với thế vô hướng mà từ đó phát sinh điện trường không đổi, ta gọi thế vector là trường vector  $\vec{A}$  mà từ đó phát sinh từ trường  $\vec{B}$ .

### 2.4.2. Chọn thế vector

Nếu hai thế vector  $\vec{A}$  và  $\vec{A}'$  có thể kết hợp được với cùng một từ trường  $\vec{B}$ , nghĩa là  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}'$ , thì hiệu của chúng có rota bằng không :

$$\text{rot}(\vec{A} - \vec{A}') = \vec{0}.$$

Vậy, hiệu đó tương ứng với một trường gradien :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi.$$

Từ trường phát sinh từ một thế vector :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

Thế vector  $\vec{A}$  này được xác định sai kém một gradien.

Việc chọn một thế là việc chọn một mốc đo. Một sự thay đổi mốc đo tương ứng với một sự thay đổi thế nhưng không làm thay đổi trường : trường bất biến đối với mốc đo.

Ta minh họa những tính chất này bằng cách tìm một thế vector kết hợp với một từ trường đều  $\vec{B} = \vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$ .

Trong tọa độ Descartes, đẳng thức  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  được thể hiện bằng :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0 \end{cases}.$$

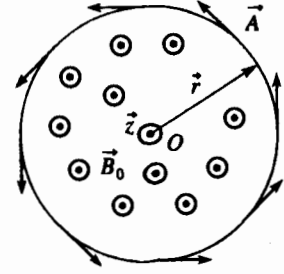
Ta có thể đưa ra các nghiệm hiển nhiên

$$\vec{A}_1 = -y B_0 \vec{e}_x \quad \text{và} \quad \vec{A}_2 = +x B_0 \vec{e}_y,$$

hoặc một tổ hợp tuyến tính các nghiệm này, ví như :

$$\vec{A}_3 = \frac{1}{2} (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \frac{B_0}{2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) = \frac{1}{2} B_0 \wedge \vec{r}.$$

Vậy ta thấy rằng một thế vector  $\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 \wedge \vec{r}$ , trục xuyên tâm (H.25), có thể được kết hợp với một từ trường đều  $\vec{B} = \vec{B}_0$ .



H.25. Thế vector  $\vec{A}$  kết hợp với một trường đều  $\vec{B}_0$ .

### 2.4.3. Điều kiện mốc đo

Thành thử, thế vector không phải là duy nhất ; ta thừa nhận khả năng kết hợp với nó một sự bất buộc, hay điều kiện mốc đo để hạn chế việc lựa chọn nó mà không cần phải khừ sự tồn tại của nó.

Có khả năng tìm được một thế vector  $\vec{A}$  kết hợp với từ trường, thỏa mãn điều kiện mốc đo COULOMB :

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Chú ý :

Việc chọn mốc đo không những có thể được, mà như ta sẽ thấy sau này, nó còn thuận lợi ở chế độ không đổi.

Trong trường hợp của từ trường đều  $\vec{B} = \vec{B}_0$ , thì các trường  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$  và  $\vec{A}_3$  đều là các thế vector thỏa mãn điều kiện mốc đo COULOMB :

$$\text{div } \vec{A}_1 = \text{div } \vec{A}_2 = \text{div } \vec{A}_3 = 0.$$



Điều kiện mốc đo COULOMB tương thích với sự tồn tại của một thế vector, nhưng không kéo theo **tính duy nhất** của nó.

#### 2.4.4. Lưu thông của một thế vector

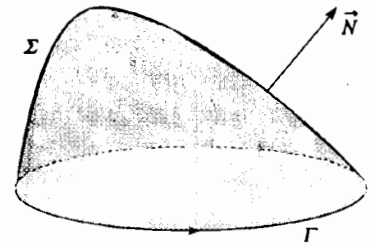
Đối với một đường cong kín  $\Gamma$  và một mặt có định hướng  $\Sigma$  dựa lên đường cong này (H.26), thì định lí Stokes bảo đảm cho ta đẳng thức :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Vì  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , nên ta rút kết quả sau đây :

Lưu thông của thế vector trên một đường cong kín  $\Gamma$  bằng từ thông đi qua mọi mặt  $\Sigma$  có định hướng dựa lên đường cong kín này :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$



H.25. Nhắc lại các quy ước về sự định hướng.

# Áp dụng 5

### Thế vector kết hợp với một từ trường đều

Bằng cách dùng lưu thông của một thế vector, hãy chứng minh rằng có khả năng kết hợp một thế vector dạng  $\vec{A}(r, \theta, z) = A(r)\vec{e}_{\theta}$ , với một từ trường đều dạng  $\vec{B} = B_0 = B_0\vec{e}_z$  trong tọa độ trụ, trục  $(Oz)$ .

Đối với thế phải tìm, ta dùng đường cong kín  $\Gamma$  tương ứng với vòng tròn trục  $(Oz)$  và bán kính  $r$ .

$$\text{Đẳng thức } \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

cho ta ở đây :  $2\pi rA(r) = \pi r^2 B_0$  và ta được :

$$\vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{2} B_0 r \vec{e}_{\theta}.$$

Ta nhận biết ở đây thế  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B}_0 \wedge \vec{r}$  như đã tìm được trước đây.

#### 2.4.5. Phương trình POISSON

Từ trường không đổi xuất phát từ một thế vector  $\vec{A}$  và thỏa mãn phương trình MAXWELL-AMPÈRE :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ và } \vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \text{ vậy } \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}.$$

Khi dùng đồng nhất thức đạo hàm vector :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A},$$

ta rút ra một phương trình vi phân mới.

Ở chế độ không đổi, thế vector  $\vec{A}$  nghiệm đúng phương trình vi phân:

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}).$$

Trong mốc đo COULOMB, thế vector gắn với các nguồn của từ trường bởi phương trình POISSON :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}.$$

### Chú ý:

Phương trình cuối cùng này làm hiện ra một sự đồng dạng giữa thế vô hướng và thế vector; tuy nhiên ta cần nhớ rằng phương trình POISSON chỉ được nghiệm đúng bởi một thế vector thỏa mãn mốc đo COULOMB.

#### 2.4.6. Tìm kiếm một thế vector

Ta chỉ xem xét việc giải trực tiếp phương trình  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  trong các trường hợp rất đơn giản, như trường hợp của một trường đều đã được trình bày trước đây.

Muốn xác định một thế vector kết hợp với một phân bố các dòng điện có đối xứng cao, ta có thể tiến hành theo cách như sau:

- đơn giản hóa biểu thức của thế vector bằng các nhận xét về sự đối xứng;
- sử dụng mối liên hệ giữa lưu thông của thế vector và từ thông để hoàn thành việc xác định  $\vec{A}$ .

Phương pháp tiến hành này rất quen thuộc với chúng ta, vì ta đã theo dõi nó ở năm thứ nhất, để xác định điện trường và từ trường không đối xứng ra bởi một phân bố điện tích hay phân bố dòng điện đối xứng cao. Để tiếp tục, ta còn phải xác định rõ các tính chất đối xứng của thế vector...

Ta biết rằng ta có thể tìm kiếm một thế vector trong mốc đo COULOMB. Trong mốc đo này, phương trình liên kết thế với các nguồn là phương trình POISSON:  $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ . Nhưng toán tử LAPLACE, ví dụ được biểu thị trong tọa độ DESCARTES dưới dạng:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

là một toán tử vô hướng, bất biến trong phép nghịch đảo không gian (ví dụ sự đối xứng đối với mặt phẳng  $(yOz)$ , quy về việc đổi  $x$  thành  $-x$ ). Trong mốc đo COULOMB, ta sẽ tìm một thế vector  $\vec{A}$  có cùng những tính đối xứng như trường vector  $\vec{j}$ .

Với việc chọn mốc đo COULOMB, ta có thể tìm kiếm một thế vector có các tính chất đối xứng của một phân bố các dòng điện đang xét. Thế vector này có hành vi đối với các phép biến đổi không gian (phép tịnh tiến, phép quay và phép đối xứng phẳng), như một vector cực.

## Áp dụng 6

### Nghiên cứu một ví dụ về đối xứng trụ.

1) Một dây dẫn thẳng dài vô hạn được mô hình hóa như một ống dòng, trục  $(Oz)$  và bán kính  $a$ , trong đó có dòng điện thế tích đều chạy qua:

$$\vec{j} = j\vec{e}_z.$$

a) Lập lại biểu thức về từ trường sinh ra bởi phân bố dòng điện này.

b) Bằng cách dùng các nhận xét về tính đối xứng, hãy đưa ra một dạng đơn giản cho thế vector.

c) Hãy hoàn thành việc xác định thế vector nhờ định luật tích phân liên hệ nó với từ trường.

2) Công dây dẫn đó được giả thiết là mang mật độ điện khối đều  $\rho$ ; tìm các biểu thức của điện trường và thế vô hướng kết hợp với phân bố này.

3) Các biểu thức được thiết lập trong nghiên cứu trên sẽ ra sao trong trường hợp một dây dẫn thẳng dài vô hạn, mảnh, chạy qua bởi dòng điện  $I$  hay mang mật độ điện dài  $\lambda$ ?

1) a) Mặt phẳng  $\Pi$ , chứa trục ( $Oz$ ) và điểm  $M$ , là một mặt phẳng đối xứng của phân bố các dòng điện:

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta.$$

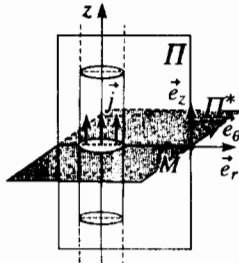
Phân bố là bất biến trong phép quay xung quanh ( $Oz$ ) và phép tịnh tiến song song với trục này, nên ta có biểu thức đơn giản nhất:

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta.$$

Áp dụng định lí AMPÈRE cho hình trụ (H.27), trục ( $Oz$ ) và bán kính  $r$ , thì cuối cùng ta được:

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 j \frac{r}{2} \vec{e}_\theta & \text{nếu } r < a; \\ \vec{B} = \mu_0 j \frac{a^2}{2r} \vec{e}_\theta & \text{nếu } r > a. \end{cases}$$

Từ trường của phân bố dòng điện theo thể tích này hiển nhiên là liên tục ở  $r = a$ .



H.27. Các sự đối xứng của dây dẫn có dòng điện chạy qua.

b) Ta hãy tìm một thế vector trong mốc đo COULOMB, và như vậy nó phải có các tính chất đối xứng của một vector thực: ở điểm  $M$ , thế vector  $\vec{A}$  này vuông góc với mặt phẳng phản xứng  $\Pi^*$  (H.27). Như vậy, ta có thể tìm được nó dưới dạng:

$$\vec{A}(r, \theta, z) = A(r, \theta, z) \vec{e}_z = A(r) \vec{e}_z,$$

do các tính bất biến trong phép quay và phép tịnh tiến.

c) Xét một đường cong kín  $\Gamma$ , chứa trong một mặt phẳng  $\theta = \text{cte}$ , có diện tích nguyên tố (H.28):

$$d\vec{S} = -h dr \vec{e}_\theta,$$

(chú ý sự định hướng!).

Việc áp dụng đẳng thức

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

vào đường cong kín này cho ta:

$$\begin{aligned} A(r+dr)h - A(r)h \\ = -B(r)h dr. \end{aligned}$$

nghĩa là:

$$\frac{dA(r)}{dr} = -B(r).$$

Lấy tích phân, ta được:

$$\begin{cases} \vec{A} = \mu_0 j \frac{r_1^2 - r^2}{4} \vec{e}_z & \text{nếu } r < a; \\ \vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \vec{e}_z & \text{nếu } r > a; \end{cases}$$

trong đó  $r_1$  và  $r_2$  là các hằng số tích phân.

Ta biết rằng từ trường của một phân bố các dòng điện có thể có nhiều nhất là một chỗ gián đoạn hữu hạn (trường hợp một lớp các dòng điện). Từ trường này xuất phát từ một thế, mà thế này nhất thiết phải liên tục. Vậy ta phải nối bằng tính liên tục hai biểu thức trên, nghĩa là:

$$\begin{cases} \vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2 - r^2}{4} \vec{e}_z & \text{nếu } r < a; \\ \vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{a}{r}\right) \vec{e}_z & \text{nếu } r > a; \end{cases}$$

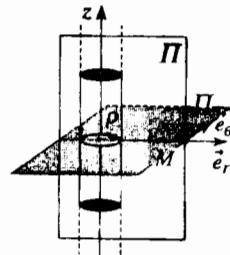
Hơn nữa, ta đã chọn cách hủy bỏ giá trị của thế ở  $r = a$ .

2) Trong trường hợp một dây dẫn tích điện, các sự đối xứng của phân bố cho ta thấy rằng điện trường có dạng:

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r) \vec{e}_r.$$

Việc áp dụng định lí GAUSS cho một hình trụ, trục ( $Oz$ ), đáy hình tròn bán kính  $r$  và chiều cao tùy ý, đưa ta đến (H.29):

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r}{2} \vec{e}_r & \text{nếu } r < a; \\ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2}{2r} \vec{e}_r & \text{nếu } r > a; \end{cases}$$



H.29. Các đối xứng của một dây dẫn tích điện.

Ta nhận được thế  $V(r, \theta, z) = V(r)$  bằng phép tích phân  $\frac{dV(r)}{dr} = -E(r)$ , biết rằng thế phải liên tục ở  $r = a$ . Nếu ta chọn thế vô hướng, được xác định sai kém một hằng số, bằng không ở  $r = a$ , thì ta được :

$$\begin{cases} V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2 - r^2}{4} \text{ nếu } r < a ; \\ V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{a}{r}\right) \text{ nếu } r > a. \end{cases}$$

Các biểu thức mà ta đã nhận được đối với các trường và thế đều tương tự.

Tuy nhiên, cần nhớ là phải theo dõi các đối xứng và phản xứng phẳng của các phân bố vì chúng áp đặt các hướng khác nhau cho các trường  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  và  $\vec{A}$ .

3) Trong trường hợp một phân bố dạng sợi chỉ, ta có thể xét trường hợp giới hạn mà trong đó  $a$  tiến về 0 và thay thế, trong các biểu thức trên,

tích  $j\pi a^2$  bằng  $I$ , là cường độ dòng điện chạy trong dây, và tích  $\rho\pi a^2$  bằng  $\lambda$ , là mật độ điện dài  $\lambda$  của dây. Khi đó ta được, đối với  $r > 0$  :

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta ; \\ \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \vec{e}_z ; \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \\ V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) ; \end{cases}$$

trong đó  $r_0$  là một bán kính mà ta chọn để hủy bỏ các thế.

Các biểu thức này, giống nhau, làm xuất hiện trong đối xứng trụ một sự biến đổi của các trường theo  $\frac{1}{r}$  trong khi các thế lại biểu lộ một sự biến đổi loga.

## 2.5. Giải các định luật vi phân

Cũng như đối với điện trường không đổi, ta có thể coi các định luật vi phân :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ và } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

như những tiên đề và tìm cách giải các phương trình đó.

Ta có thể tìm một thế vector  $\vec{A}$  theo mốc COULOMB. Như vậy ta phải giải phương trình POISSON :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0},$$

mà thành phần DESCARTES trên trục ( $Ox$ ) là :

$$\Delta A_x + \mu_0 j_x = 0.$$

Phương trình này giống phương trình POISSON được thỏa mãn bởi thế vô hướng  $V$  kết hợp với một điện trường không đổi (chỉ cần thay  $V$  bằng  $A_x$ ,

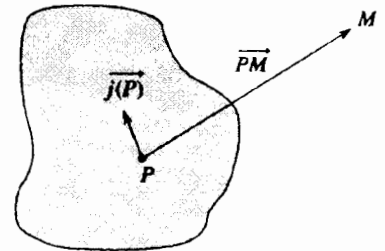
$\epsilon_0$  bằng  $\frac{1}{\mu_0}$ , và  $\rho$  bằng  $j_x$  là đủ). Đối với một phân bố dòng điện phạm

vi hữu hạn (H.30), thì hàm :

$$A_x(M) = \iiint_V \frac{\mu_0 j_x(P)}{4\pi PM} d\tau,$$

trong đó,  $P$  là một điểm mô tả phân bố, sẽ đúng là một nghiệm chấp nhận được của phương trình trên. Nghiệm đó tiến tới không, khi khoảng cách từ điểm  $M$  đến phân bố tiến tới vô cùng. Từ đó rút ra thế vector  $\vec{A}$  :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\vec{j}(P) d\tau}{PM}.$$



H.30. Phân bố các dòng điện.

Biết rằng :

$$\overrightarrow{\text{rot}}_M \left( \frac{\vec{j}(P)}{PM} \right) = \overrightarrow{\text{grad}}_M \left( \frac{1}{PM} \right) \wedge \vec{j}(P) = \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2},$$

nên ta thấy là biểu thức trên của thế vector cho phép ta tìm lại được định luật BIOT và SAVART :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{phân bố}} \vec{j}(P) d\tau \wedge \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2},$$

Nó cho ta từ trường cảm ứng bởi một phân bố (ở đây là theo thể tích) các dòng điện phạm vi hữu hạn.

Các định luật vi phân, các phương trình MAXWELL đối với từ trường không đổi, lại cho ta đúng định luật BIOT và SAVART, đã dùng ở năm thứ nhất.

► Để tập luyện : bài tập : 3, 5, 8, 9, 10 và 11.

## ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

### ■ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ KHÔNG ĐỔI

BẢN CHẤT CỦA TRƯỜNG		ĐỊNH LUẬT VI PHÂN	ĐỊNH LUẬT TÍCH PHÂN
ĐIỆN TRƯỜNG	Thông lượng	phương trình MAXWELL-GAUSS: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	định lí GAUSS : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} d\tau = \frac{Q_{\text{trong } \Sigma}}{\epsilon_0}$
	Lưu thông	rota của điện trường không đổi bằng không : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	lưu thông của điện trường không đổi được bảo toàn : $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{0}$
TỪ TRƯỜNG	Thông lượng	phương trình từ thông : $\text{div } \vec{B} = 0$	từ trường có thông lượng bảo toàn : $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{0}$
	Lưu thông	phương trình MAXWELL - AMPÈRE: $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ <i>Chú ý : trong gần đúng các chế độ chuẩn dừng, khi không có tích lũy điện tích : <math>\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0</math> và <math>\text{div } \vec{j} = 0</math></i>	định lí AMPÈRE : $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$ $= \mu_0 I_{\text{bị bao quanh}}$

# ■ THỂ VÔ HƯỚNG $V$ VÀ THỂ VECTO $\vec{A}$ KẾT HỢP VỚI TRƯỜNG KHÔNG ĐỐI

	Liên hệ với trường		Phương trình vi phân
	Vi phân	Tích phân	
THỂ VÔ HƯỚNG	<ul style="list-style-type: none"> <li>Một trường có rota bằng không là một trường gradien :  <math>\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{E} = -\text{grad } V.</math></li> <li>Chọn mốc :                      Thế vô hướng được xác định sai kém một hằng số.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lưu thông của điện trường không đổi trên một đường cong nối liền hai điểm, xác định hiệu thế vô hướng giữa các điểm này :  <math display="block">V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Thế vô hướng <math>V</math> nghiệm đúng phương trình POISSON :  <math display="block">\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.</math></li> </ul>
THỂ VECTO	<ul style="list-style-type: none"> <li>Một trường có divergence bằng không là một trường xoáy :  <math>\text{div } \vec{A} = 0 \leftrightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.</math></li> <li>Chọn mốc :                      Thế vectơ được xác định sai kém một gradien.</li> <li>Có khả năng tìm một thế vectơ thỏa mãn điều kiện chọn mốc COULOMB :  <math display="block">\text{div } \vec{A} = 0.</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lưu thông của thế vectơ trên một đường cong kín bằng từ thông đi qua mọi mặt định hướng dựa lên đường cong kín này :  <math display="block">\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}.</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Thế vectơ <math>\vec{A}</math> nghiệm đúng phương trình vi phân :  <math display="block">\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}).</math></li> <li>Trong cách chọn mốc COULOMB, thế vectơ được gắn liền với các nguồn của từ trường bởi phương trình POISSON :  <math display="block">\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}.</math></li> <li>Với việc chọn mốc COULOMB, ta có thể tìm kiếm một thế vectơ có các tính chất đối xứng của phân bố các dòng điện đang xét. Thế vectơ này hoạt động, đối với các phép biến đổi không gian (tịnh tiến, quay, đối xứng phẳng) như một vectơ cực.</li> </ul>

# Bài tập có lời giải

## Điốt chân không

### ĐỀ BÀI

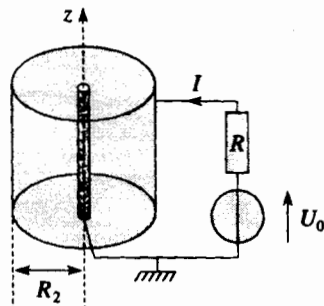
Một điốt chân không được cấu thành bởi hai bản kim loại hình trụ có cùng một trục ( $Oz$ ) và chiều cao  $h$ . Bản trong là một sợi dây đốt bán kính  $R_1$  nhỏ không đáng kể so với bán kính  $R_2$  của bản thứ hai. Sợi dây này, khi đốt nóng, có khả năng phát ra các electron (có điện tích  $-e$  và khối lượng  $m$ ) với vận tốc ban đầu không đáng kể.

Nếu được cung cấp một nguồn điện sức điện động  $U_0$  ( $U_0 > 0$ ) thì sẽ có một dòng điện  $I$  chạy qua điốt theo chiều chỉ trên hình vẽ.

Bản trong ở điện thế không.

Ta chỉ quan tâm đến chế độ không đổi.

Chuyển động của các electron tới bản ngoài của điốt tạo ra một điện tích không gian có mật độ  $\rho(r)$  ở trong điốt và một mật độ dòng điện theo thể tích xác định bởi vector xuyên tâm  $\vec{j}(r) = j(r)e_r$ , trong đó  $r$  chỉ thành phần xuyên tâm của vector  $\vec{OM} = \vec{r}$  (như vậy ta bỏ qua mọi "hiệu ứng bờ" do trị số hữu hạn của độ cao  $h$  của các bản).



- 1) Tìm biểu thức của mật độ dòng điện khối  $j(r)$  biến đổi theo cường độ dòng điện  $I$ ?
- 2) Biểu thị giá trị  $v(r)$  của vận tốc các electron theo điện thế  $V(r)$ .
- 3) Từ đó rút ra phương trình vi phân được nghiệm đúng bởi thế  $V(r)$  ở bên trong điốt.
- 4) Chứng minh rằng một nghiệm dạng  $V(r) = Ar^\alpha$  sẽ tương thích với bài toán này. Hãy xác định các hằng số  $A$  và  $\alpha$ . Với ký hiệu  $U = V(R_2) - V(R_1) = V(R_2)$  là hiệu điện thế giữa các bản, hãy vẽ đường đặc trưng  $I = f(U)$  của lưỡng cực này.
- 5) Tính công suất trên đơn vị thể tích do điện trường cung cấp cho các điện tích đang chuyển động? Từ đó suy ra công suất toàn phần  $\mathcal{P}$  hấp thụ bởi điốt.

Xác định các trị số của  $I$  và  $\mathcal{P}$  khi  $U_0 = 200\text{ V}$  và  $R = 1\text{ k}\Omega$ .

- 6) Một máy phát điện một chiều được thay thế bằng một máy phát điện áp hình sin biên độ  $U_0$ . Tìm đáng đi của giản đồ thời gian của dòng điện  $I(t)$  chạy qua mạch điện? Người ta thừa nhận những kết quả tìm thấy trước đây ở chế độ không đổi vẫn còn hiệu lực ở chế độ biến thiên (điều này chỉ đúng nếu tần số của điện áp hình sin không cao quá, chỉ trong gần đúng các chế độ chuẩn dừng, xem chương 3).

### HƯỚNG DẪN

Trong bài toán này, phải dùng định nghĩa của cường độ  $I$  tương ứng với thông lượng của vector  $\vec{j}$ .

Các định luật cơ học: định lí về động năng hay hệ thức cơ bản mà ta lấy tích phân thì cũng thế thôi.

### LỜI GIẢI

1) Ở chế độ không đổi, vector  $\vec{j}$  có thông lượng bảo toàn: thông lượng của nó là như nhau qua mọi hình trụ có trục ( $Oz$ ), chiều cao  $h$  và bán kính  $r$  nằm giữa  $R_1 = 0$  và  $R_2$ .

Thông lượng của nó bằng  $-I$  (dấu trừ là do sự định hướng của dòng điện  $I$  trên sơ đồ mạch điện).

Từ đó suy ra  $j(r) = -\frac{I}{2\pi rh}$ .

2) Áp dụng định lí về động năng cho một electron được phát ra bởi dây đốt với vận tốc không đáng kể:

$$\frac{1}{2}mv^2(r) + (-e)(V(r) - V(R_1)) = 0, \text{ nghĩa là: } v(r) = \sqrt{\frac{2eV(r)}{m}}.$$

Các phương trình tĩnh điện gồm có :

- định lý GAUSS (dưới dạng vi phân hay tích phân) ;

- định luật  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$  ;

- hay phương trình POISSON. Biểu thức của laplacien trong tọa độ trụ được ghi ở phụ lục.

3) Thế  $V(r)$  thỏa mãn phương trình POISSON, nghĩa là :

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Mật độ điện tích ở đây bằng mật độ điện tích linh động :

$$j(r) = \rho(r) v(r).$$

Từ đó ta rút ra phương trình vi phân mà  $V(r)$  phải thỏa mãn :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = + \left( \frac{I}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{2e}} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right) \frac{1}{\sqrt{V(r)}}.$$

4) Nghiệm sẽ tương thích với bài toán đang xét đối với :

$$\alpha = \frac{2}{3} \text{ và } A = \left( \frac{9I}{8\pi\epsilon_0 h} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Từ đó, ta suy ra dòng điện và điện áp  $U = V(R_2)$  ở các cực của lưỡng cực, liên hệ với nhau qua hệ thức:

$$U = A(R_2)^{\frac{2}{3}}, \text{ vậy } I = \left( \frac{8\pi\epsilon_0 h}{9R_2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \right) U^{\frac{3}{2}}.$$

Chú ý: Biểu thức trên đây không còn giá trị đối với các cường độ mạnh, vì một hiện tượng bão hòa (mà ta không kể đến ở đây) sẽ xảy ra khi tất cả các electron do bắn trong phát ra đều bị bắn ngoài bắt giữ.

Biểu thức trên hiển nhiên là chỉ có thể được áp dụng đối với  $I > 0$  (các electron chỉ có thể đi ngược các điện thế). Khi  $U$  âm, thì dòng điện triệt tiêu (điốt bị khóa).

5) Công suất trên đơn vị thể tích mà điện trường cung cấp cho các điện tích là :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{AI}{3\pi hr^3}$$

vì  $\vec{j} = \frac{-I}{2\pi hr} \vec{e}_r$  và  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{2A}{3r^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_r$

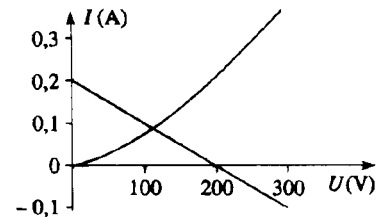
Công suất toàn phần mà điốt hấp thụ bằng :

$$\mathcal{P} = \iiint_{0 \approx R_1 < r < R_2} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \int_{r=0}^{R_2} \frac{AI}{3\pi hr^3} 2\pi rh dr = AI(R_2)^{\frac{2}{3}} = UI,$$

kết quả hiển nhiên như mong đợi.

Điểm hoạt động của mạch lắp ráp là ở giao điểm của đường đặc trưng  $I = f(U)$  của điốt và của đường thẳng

$$I = \frac{U_0 - U}{R} \text{ như trên hình vẽ.}$$



Về trị số,  $I = 87 \text{ mA}$ ,  $U = 113 \text{ V}$  và  $\mathcal{P} = UI = 9,8 \text{ W}$ .

Một sự nghiên cứu bằng đồ thị (hay bằng số) là cần thiết để xác định cường độ  $I$  của dòng điện chạy qua mạch.



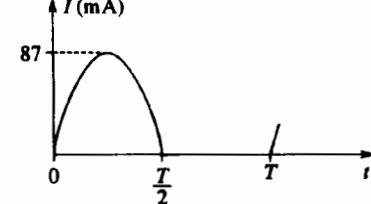
Phải dùng đồ thị của câu 5) đối với một sức điện động biến thiên:

$$U_{\text{phát}} = U_0 \sin \omega t$$

6) Khi sức điện động của máy phát  $U_{\text{phát}} = U_0 \sin \omega t$  là dương, thì dòng điện  $I(t)$  là dương. Ta sẽ thu được từng điểm một, bằng cách đối chiếu ở mọi thời điểm đường đặc trưng của lưỡng cực với đường đặc trưng của dòng điện có phương trình :

$$I = \frac{U_0 \sin \omega t - U}{R}$$

Khi sức điện động của máy phát  $U_{\text{phát}} = U_0 \sin \omega t$  là âm, thì dòng điện  $I(t)$  triệt tiêu.



Sơ đồ biểu diễn dạng của  $I(t)$  trong một chu kỳ của điện áp nuôi ; điốt "chính lưu" dòng điện.

# BÀI TẬP

## ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

Các biểu thức của các toán tử  $\text{div} \vec{A}$ ,  $\text{rot} \vec{A}$ , ... trong các hệ tọa độ khác nhau được trình bày trong phần phụ lục.

### 1 Điện trường đều

Chứng minh rằng trong một miền không có điện tích, thì ở đó các đường sức của một trường tĩnh điện đều thẳng và song song, điện trường là đều.

### 2 Trường phân kỳ có divergence bằng không

- 1) Tìm divergence của trường  $\frac{a}{r^2} \vec{e}_r$  trong tọa độ cầu tâm  $O$ ?
- 2) Tìm thông lượng của trường này đi qua mặt cầu tâm  $O$  và bán kính  $r$ ?
- 3) Có phải hai kết quả này không mâu thuẫn nhau?

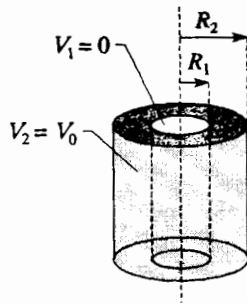
### 3 Trường xoáy có rota bằng không

Cũng giống bài tập trước, bằng cách dùng ví dụ của một từ trường tạo ra bởi một dây dẫn thẳng dài vô hạn có dòng điện  $I$  chạy qua, hãy chứng minh rằng phép tính lưu thông của một trường  $\frac{a}{r} \vec{e}_\theta$  (trong tọa độ trụ) có thể dẫn tới các kết quả mâu thuẫn nhau. Hãy giải thích tại sao mâu thuẫn này chỉ là bề ngoài.

### 4 Tụ điện trụ

Một tụ điện trụ được cấu thành từ hai hình trụ kim loại (gọi là các bản của tụ điện) đồng trục, trục ( $Oz$ ), bán kính  $R_1$ ,  $R_2$  và chiều cao  $h$ .

Bên trong của tụ điện ở điện thế  $V_1 = 0$ , còn bản ngoài ở điện thế  $V_2 = V_0 > 0$  (mỗi bản là một mặt đẳng thế). Không có bất kỳ một điện tích nào ở giữa hai bản.



Người ta bỏ qua các hiệu ứng bờ (người ta coi các bờ bị “đưa ra vô cùng”).

- 1) Tìm các biểu thức của điện trường và điện thế ở bên trong tụ điện (đối với  $R_1 < r < R_2$ ) ?
- 2) Với khổ tụ điện đã cho, tìm các giá trị của bán kính trong  $R_1$  cho phép duy trì điện trường trong tụ điện nhỏ hơn  $2.10^6 \text{ V.m}^{-1}$ . Như vậy có tương thích với các trị số đã đưa ra không ?
- 3) Bằng cách dùng các kết quả của *áp dụng* 2, hãy tính các mật độ điện mặt  $\sigma_1$  và  $\sigma_2$  của mỗi bản và từ đó suy ra các bản mang hai điện tích trái dấu nhau  $Q_2 = Q$  và  $Q_1 = -Q$  ( $Q > 0$ ).
- 4) Tính điện dung  $C$  của tụ điện này, được xác định bởi:  $C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{Q}{V_0}$ .

Dữ liệu:  $V_0 = 10 \text{ kV}$ ;  $R_1 = 1,5 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 3 \text{ cm}$ ;  $h = 10 \text{ cm}$ ;  $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .

### 5 Từ trường và thế vector tạo ra bởi một ống dây

Cho một ống dây dài “vô hạn”, có tiết diện tròn bán kính  $R$ , gồm những vòng dây quấn kề nhau,  $n$  vòng trên một đơn vị dài, và có dòng điện  $I$  chạy qua.

- 1) Nhắc lại biểu thức của từ trường  $\vec{B}$  tạo ra bởi ống dây tại mọi điểm.
- 2) Hãy đưa ra một thế vector  $\vec{A}$  kết hợp với từ trường này.

## VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

### 6 Sự che chắn DEBYE

Ta xét một môi trường về toàn bộ thì trung hòa điện, ở trong một trạng thái bị ion hóa, (ví dụ một plasma), cấu thành bởi các hạt điện tích  $+q$  và  $-q$  với mật độ trung bình như nhau bằng  $n_0$ .

Ta xét một điện tích  $q$  của môi trường đó tại điểm  $O$ . Sự có mặt của điện tích  $q$  ở  $O$  làm thay đổi cục bộ sự phân bố các điện tích dương và âm; các điện tích này lúc đó có các mật độ  $n^+(r)$  và  $n^-(r)$  tương ứng, ở cách  $O$  một khoảng  $r$ .

Các mật độ này được xác định bởi định luật BOLTZMANN, ở cân bằng nhiệt động (thống kê) của hệ ở nhiệt độ  $T$  :

$$n^+(r) = n_0 e^{-\frac{qV}{k_B T}} \quad \text{và} \quad n^-(r) = n_0 e^{+\frac{qV}{k_B T}}$$

vì năng lượng của một điện tích  $q$ , tại một điểm có điện thế  $V$ , có dạng :  $\mathcal{E}_p = qV$ . Ở rất xa gốc  $O$ , môi trường tìm lại được tính trung hòa về toàn bộ của nó và các mật độ điện tích dương và âm sẽ tiến về cùng giá trị  $n_0$  ; Cho  $V = 0$  khi  $r \rightarrow \infty$ , ta có đúng  $n^+(r) = n^-(r) = n_0$ .

- 1) Thiết lập phương trình vi phân nghiệm đúng bởi thế  $V(r)$ .
- 2) Hãy tuyến tính hóa phương trình vi phân này để  $qV \ll kT$ , rồi giải nó.
- 3) Tìm biểu thức của chiều dài DEBYE của plasma, đặc trưng cho sự che chắn thế COULOMB của điện tích  $+q$  bởi các thực thể tích điện khác của môi trường bị ion hóa ?

## 7 Sự phân tích một cân bằng tĩnh điện, phương trình LAPLACE

### 1) Vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện

a) Tìm giá trị của điện trường ở trong lòng một vật liệu dẫn điện ở cân bằng tĩnh điện ? (Ghi chú : tình huống xét trên là tĩnh, không có chuyển động "trung bình" của các điện tích).

b) Từ đó, ta có thể rút ra điều gì về điện thế của một vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện ?

c) Vật dẫn này có thể bị nhiễm điện.

Vậy điện tích này phải được phân bố tại đâu khi vật dẫn ở cân bằng điện ?

Tìm giá trị của trường tĩnh điện ngay sát phía ngoài vật dẫn này (ở lân cận ngay sát bề mặt vật dẫn).

### 2) Điện tích của một mặt phẳng do hưởng ứng điện.

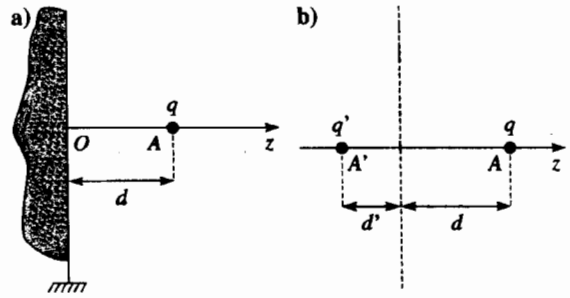
Một quả cầu rất nhỏ mang điện tích  $q$  được đưa lại gần một mặt phẳng kim loại giữ ở điện thế không.

a) Tại sao mặt phẳng kim loại lại có xu hướng tích điện khi điện tích  $q$  lại gần ?

b) Bây giờ ta nghiên cứu trạng thái cân bằng của hệ, khi điện tích  $q$  ở một khoảng  $d$  cách xa mặt phẳng dẫn có phương trình ( $z = 0$ ).

Chúng mình rằng một tình huống không có mặt phẳng dẫn điện, nhưng lại có một điện tích  $q'$  đặt cách xa một khoảng  $d'$  phía sau mặt phẳng ( $z = 0$ ), có thể dẫn tới bài toán tương đương trong miền ( $z > 0$ ). Hãy xác định  $q'$  và  $d'$ .

c) Mật độ điện mặt trên mặt phẳng dẫn lúc đó là bao nhiêu. Từ đó suy ra điện tích toàn phần  $Q'$  của vật dẫn này ở cân bằng điện.



Sơ đồ a) mô tả trường hợp một điện tích được đặt trước mặt phẳng dẫn điện và sơ đồ b) mô tả trường hợp một điện tích phụ bổ sung đặt phía bên kia mặt phẳng ( $z = 0$ ).

## 8 Hiệu ứng MEISSNER

Một mô hình vi mô về sự dẫn điện trong một vật liệu siêu dẫn, dẫn đến việc thiết lập phương trình LONDON, trong mốc đo COULOMB. Phương trình này liên kết vector mật độ dòng điện theo thể tích  $\vec{j}$  với thế vector  $\vec{A}$  tại một điểm của môi trường :

$$\vec{j} = -\frac{\vec{A}}{\mu_0 \lambda^2},$$

trong đó  $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$  là hằng số LONDON của vật liệu

(có  $n$  điện tích  $q$ , khối lượng  $m$  trên đơn vị thể tích).

1) Tìm thứ nguyên của  $\lambda$ . Tính giá trị của nó khi :  $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$  ;  $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

2) Một tấm siêu dẫn được nhúng vào một từ trường đều  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$ . Tấm này đặt trong miền ( $-d \leq z \leq d$ ). Từ trường ở bên ngoài tấm không bị làm thay đổi do sự có mặt của nó.

a) Thiết lập phương trình thể hiện những sự biến thiên của từ trường ở trong lòng vật liệu siêu dẫn.

b) Từ đó suy ra sự phân bố của từ trường khi có mặt tấm siêu dẫn và biểu diễn các sự biến thiên của biên độ từ trường theo hoành độ  $z$  đối với  $d = \lambda$  và  $d = 10\lambda$ .

c) Tìm mật độ dòng điện theo thể tích  $\vec{j}$  trong vật liệu ?

Biểu diễn các sự biến thiên của biên độ của  $\vec{j}$  theo  $z$  đối với  $d = \lambda$  và  $d = 10\lambda$ .

Kết quả thu được liệu có cho phép hiểu rằng tấm siêu dẫn không làm thay đổi giá trị của từ trường ở phía ngoài nó không ?

d) Đối với một tấm dày  $2d = 1\text{mm}$ , thì người ta có thể nói gì về sự phân bố từ trường và mật độ dòng điện thể tích ở trong lòng vật liệu ?

Hãy đưa ra một sự mô hình hóa đơn giản hơn để nói rõ về tình huống nhận được.

### 9\* Quả cầu siêu dẫn lí tưởng

Một viên bi siêu dẫn, bán kính  $a$ , được đặt trong một từ trường đều  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . Ở bên trong vật siêu dẫn lí tưởng (xem bài tập 8 : chiều dài LONDON là không đáng kể), từ trường bằng không.

1) Người ta muốn xác định từ trường ở xung quanh viên bi.

a) Hãy xác định rõ các phương trình và các điều kiện ở giới hạn đặc trưng cho từ trường ở ngoài viên bi.

b) Hãy chứng tỏ rằng sự chống chất lên từ trường  $\vec{B}_0$  một từ trường do một lưỡng cực từ gây ra mà ta cần định rõ mômen lưỡng cực  $\vec{M}$  của nó, cho phép thực hiện các điều kiện giống nhau trong miền ( $r > a$ ).

c) Từ đó suy ra sự phân bố từ trường xung quanh quả cầu siêu dẫn.

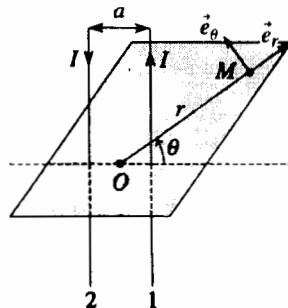
2) Hãy nêu ra một sự tương tự giữa bài toán này và trường hợp của một dòng chảy không nén được và không xoáy của chất lỏng lí tưởng xung quanh một viên bi đứng yên.

3) a) Tìm sự phân bố dòng điện nhận được trên quả cầu siêu dẫn.

b) Xuất phát từ phân bố này, hãy thiết lập mômen từ của quả cầu. Kết quả có làm ta ngạc nhiên không ?

### 10\* Từ trường của hai dây dẫn song song

Hai dây dẫn dài vô hạn, song song, cách nhau một khoảng  $a$ , và có các dòng điện đối ngược nhau chạy qua  $+I$  và  $-I$ .

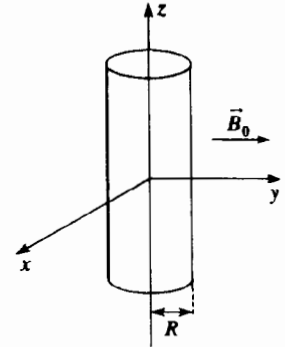


1) Hãy tìm, trong mốc đo COULOMB, một thể vector đối với phân bố này của các dòng điện.

2) Tính từ trường và xác định dạng của các đường sức của từ trường của hai dây dẫn tại những điểm  $M$  sao cho  $OM = r \gg a$  (xem hình vẽ) để có thể xét bài toán trong gần đúng lưỡng cực.

### 11\* Hình trụ siêu dẫn đặt trong một từ trường đều

Một hình trụ siêu dẫn, trục ( $Oz$ ) và bán kính  $R$ , chiều dài rất lớn, được nhúng vào một từ trường đều  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$  vuông góc với trục của nó.



Vật liệu siêu dẫn có tính chất đẩy các đường sức của từ trường (hiệu ứng MEISSNER : xem bài tập 8).

Từ trường  $\vec{B}$  bằng không bên trong hình trụ.

Người ta muốn xác định từ trường  $\vec{B}$  ở ngoài hình trụ (nghĩa là đối với  $r > R$ ).

1) Bằng cách dùng các tính chất đối xứng, hãy giải thích tại sao một thể vector có dạng :

$$\vec{A}(r, \theta, z) = f(r) \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{với } r > R)$$

lại được tiên nghiệm là tương thích với bài toán này ?

2) Viết phương trình được nghiệm đúng bởi thể vector này, trong mốc đo COULOMB ?

Trong khi tìm kiếm các nghiệm có dạng  $f(r) = r^n$ , hãy chứng minh rằng hàm  $f(r)$  có dạng :

$$f(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r}$$

3) Xác định đầy đủ hàm  $f(r)$  có kể đến các điều kiện ở giới hạn đặc trưng cho bài toán này. Từ đó suy ra từ trường kết hợp với hệ này.

4) Chứng minh rằng sự chống chất lên từ trường đều  $B_0$ , từ trường của lưỡng cực trong bài tập 10, cũng cho phép xây dựng được lời giải của bài toán, nhưng với ít phép tính hơn.

5) Tìm các dòng điện bề mặt chạy qua hình trụ siêu dẫn ?

6) Thực ra, chất siêu dẫn mất tính chất riêng của nó khi áp vào nó một từ trường ngang, lớn hơn một giá trị tới hạn  $B_c$ .

Tìm giá trị của  $B_0$ , xác định ở đây sự mất tính siêu dẫn ?

Biểu thị  $B_0$  theo  $B_c$ .

# LỜI GIẢI

1 Người ta có hai phương pháp giải theo cách xếp đặt của ta.

• Dùng các định luật vi phân : **đive và rota.**

Lấy trục  $(Ox)$  cộng tuyến với các đường sức của trường, ta kí hiệu  $\vec{E} = E(x, y, z) \vec{e}_x$  là trường tĩnh điện nên :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial x} \quad \text{và} \quad \text{rot} \vec{E} = \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial y} \vec{e}_z.$$

Bằng cách viết  $\text{div} \vec{E} = 0$  (không gian không có điện tích) và  $\text{rot} \vec{E} = 0$  (trường tĩnh) ta nhận được tính đều đặn của trường.

• Dùng các định luật tích phân : **thông lượng và lưu thông.**

Ta xét một mặt kín : một hình trụ nguyên tố chiều dài  $\Delta x$  và tiết diện  $S$ , có các đường sinh song song với trục  $(Ox)$ . Thông lượng của trường  $\vec{E}$  đi qua mặt kín này bằng không. Mặt bên của hình trụ không tham dự vào biểu thức của thông lượng. Từ đó suy ra điện trường không thể phụ thuộc vào biến số  $x$ , do đó  $E(x, y, z) = E(y, z)$ .

Lưu thông của trường trên một đường cong kín nguyên tố hình chữ nhật, ví dụ lấy trong mặt phẳng  $(Ox, Oy)$ , có cạnh  $dx, dy$  thì bằng không, vậy :

$$0 = E(y + dy, z)dx - E(y, z)dx = \frac{\partial E(y, z)}{\partial y} dx dy.$$

do đó:  $E(y, z) = E(z)$ .

Khi lấy một khung có cạnh  $dx$  và  $dz$  trong mặt phẳng  $(Ox, Oy)$ , ta cũng được như thế  $E(z) = E_0$ , như vậy hoàn thành việc chứng minh.

2 1) **Đive của trường xuyên tâm này bằng :**

$$\text{div} \left( \frac{a}{r^2} \vec{e}_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \left( \frac{a}{r^2} \right) \right] = 0.$$

Như vậy đây là một trường có thông lượng bảo toàn ở khắp mọi nơi mà nó được xác định (đối với  $r$  khác không).

2) Thông lượng của nó được bảo toàn. Đặc biệt, thông lượng là như nhau qua mọi mặt cầu bán kính  $r$  có tâm tại  $O$  và thông lượng đó bằng  $4\pi a$ .

3) Như vậy, vấn đề là một trường có đive bằng không nhưng có thông lượng khác không đi qua một mặt kín : mặt cầu bán kính  $r$ , tâm  $O$ .

Các kết quả này không mâu thuẫn nhau, vì định lí GREEN-OSTROGRADSKI không thể áp vào đây mà không thận trọng, vì trường không được xác định trong toàn thể tích chứa trong mặt cầu này.

Trường tĩnh điện sinh ra bởi một điện tích điểm  $q$  (lúc đó ta có  $a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ ) là một ví dụ về một trường như thế. Vậy không được

hiểu lầm khi nói rằng phương trình vi phân MAXWELL - GAUSS giải thích đúng là, trên một bản đồ điện trường, các đường sức của điện trường  $\vec{E}$  phân kì bắt đầu từ các điện tích. Điều này về

nguyên lý chỉ có giá trị cục bộ, ngay ở vị trí các điện tích ( $r = 0$ ). Ở chỗ khác, nghĩa là ở bên ngoài các điện tích, thì trường này có đive bằng không, và thông lượng của nó được bảo toàn.

3 Người ta coi từ trường của một dây dẫn thẳng dài vô hạn, trục

$$(Oz), \text{ có dòng điện } I \text{ chạy qua là : } \vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{e}_\theta}{2\pi r}$$

Rota của nó bằng không ở khắp mọi nơi mà từ trường được xác định (đối với  $r$  khác không).

$$\text{Trường này là trục xuyên tâm, vậy } \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z.$$

Vì  $r B_\theta = \text{cte}$ , nên ta có  $\text{rot} (\vec{B}) = 0$ .

Tuy nhiên, lưu thông của từ trường này trên một vòng tròn bán kính  $r$  và trục  $(Oz)$  lại không triệt tiêu và có giá trị  $\mu_0 I$ .

Định lý STOKES không thể được áp dụng vào đây mà không thận trọng, vì một bề mặt dựa trên đường cong kín này sẽ chắn trục  $(Oz)$  mà ở trên đó thì từ trường không được xác định.

Phương trình vi phân chỉ rõ rằng một trường  $\frac{a}{r} \vec{e}_\theta$  (ví như  $\vec{B}$ , với  $a = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$ ) chỉ xoáy quanh nguồn của nó ở ngay sát gần nguồn.

Chú ý : Lưu thông của vector này trên mọi đường cong không bao quanh dây dẫn đều bằng không (xem H-prépa, Điện từ học năm thứ nhất).

4 1) Các hiệu ứng bờ đều không đáng kể ; lúc đó, bài toán là bất biến trong phép tịnh tiến song song với  $(Oz)$  và trong phép quay xung quanh  $(Oz)$ . Phải tìm một trường  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$  kết hợp được với thế  $V(r)$ . Vậy là giữa các bản, nghĩa là khi không có điện tích, thì điện trường có thông lượng bảo toàn : thông lượng của trường là như nhau khi đi qua tất cả các hình trụ trục  $(Oz)$ , bán kính  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) vậy  $2\pi r h E(r) = \text{cte}$ , nghĩa là :

$$E(r) = \frac{A}{r} \quad \text{và} \quad V(r) = -A \ln \left( \frac{r}{r_0} \right).$$

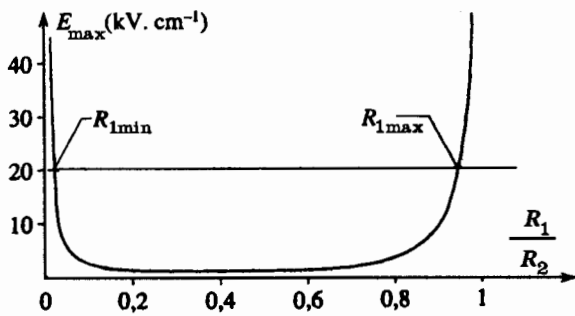
Dùng các giá trị của điện thế trên các bản :

$$V(R_1) = 0 \quad \text{và} \quad V(R_2) = V_0.$$

$$\text{ta tìm được : } V(r) = V_0 \frac{\ln \left( \frac{r}{R_1} \right)}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \quad \text{và} \quad E(r) = - \frac{V_0}{r \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

2) Biên độ của trường là cực đại ở  $r = R_1$  :

$$E_{\max}(R_1) = \frac{V_0}{R_1 \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$



Việc hạn chế giá trị này ở  $2.10^6 \text{ V.m}^{-1}$ , nghĩa là  $20 \text{ kV.cm}^{-1}$ , quy lại là buộc một cực nhỏ hơn và một cực lớn hơn phạm vi biến đổi của bán kính  $R_1$  (xem sơ đồ vẽ trên).

Về trị số, thì điều kiện trên cho:

$$R_{1\min} = 0,085 \text{ cm}$$

$$\text{và } R_{1\max} = 2,95 \text{ cm.}$$

Giá trị do đề bài nêu lên nghiệm đúng:

$$R_{1\min} < R_1 < R_{1\max}.$$

3) Tính không liên tục (gián đoạn) của trường (xem áp dụng 2) ở ngang mức các bản cho ta:

$$\sigma_1 = \frac{-\epsilon_0 V_0}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \text{và} \quad \sigma_2 = \frac{+\epsilon_0 V_0}{R_2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Từ đó suy ra:

$$Q_2 = 2\pi R_2 h \sigma_2 = \frac{2\pi \epsilon_0 h V_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = Q \quad \text{và} \quad Q_1 = 2\pi R_1 h \sigma_1 = -Q.$$

4) Vậy điện dung của tụ điện:  $C = \frac{Q_2}{V_0} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

Áp dụng số:  $C = 8 \text{ pF}$ .

5) Từ trường là đều ở bên trong ống dây (trục (Oz)) và có giá trị  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ . Nó bằng không ở ngoài ống dây (xem H-prépa, điện từ học, năm thứ nhất).

2) Hiển nhiên là ta dùng tọa độ trụ  $r, \theta, z$ .

Một mặt phẳng chứa trục (Oz) của ống dây và một điểm M là một mặt phẳng phản xứng. Thế vector  $\vec{A}(M)$  tìm được phải vuông góc với mặt phẳng đó:

$$\vec{A}(M) = A(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

Bài toán bất biến đối với phép tịnh tiến song song với trục (Oz) và phép quay quanh (Oz),  $\vec{A}$  phải được viết dưới dạng  $\vec{A}(M) = A(r) \vec{e}_\theta$ . Ta có thể thử nghiệm là thế vector này thỏa mãn

mốc đo Coulomb, bằng cách dùng biểu thức div trong tọa độ trụ đã cho trong phần phụ lục:  $\text{div } \vec{A} = 0$

Lúc đó, ta sẽ tính toán lưu thông của  $\vec{A}$  trên một vòng tròn đi qua M, trục (Oz) và bán kính r (vòng tròn này là đường sức của trường vector  $\vec{A}$ ).

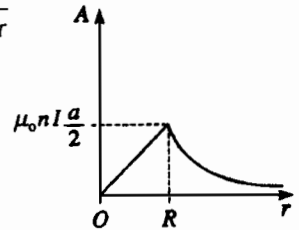
Lưu thông này bằng thông lượng của vector  $\vec{B}$  đi qua vòng tròn này, từ đó:

- đối với  $r > R$ ,  $A(r) = \mu_0 n I \frac{r}{2}$ .

- đối với  $r < R$ ,  $A(r) = \mu_0 n I \frac{a^2}{2r}$ .

Ta nhận thấy rằng thế vector là liên tục khi đi qua bề mặt  $r = R$  của ống dây.

Hàm  $A(r)$  được biểu diễn như hình vẽ.



## 6) Điện thế thỏa mãn phương trình POISSON:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{(n^+ - n^-)q}{\epsilon_0}$$

Biết rằng:  $n^+(r) = n_0 e^{-\frac{qV(r)}{k_B T}}$  và  $n^-(r) = n_0 e^{+\frac{qV(r)}{k_B T}}$ , suy ra:

$$\rho(r) = -2q n_0 \text{sh} \frac{qV(r)}{k_B T}$$

Bài toán là đối xứng tròn xoay chung quanh điện tích q đặt tại điểm gốc, ta thu được  $V(\vec{r}) = V(r)$ , vậy (xem phụ lục):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{2n_0 q}{\epsilon_0} \text{sh} \left( \frac{qV(r)}{k_B T} \right).$$

Nhớ lại:  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV(r)).$

2) Được tuyến tính hóa, phương trình này có dạng:

$$\frac{d^2 (rV(r))}{dr^2} = \frac{2n_0 q^2}{\epsilon_0 k_B T} (rV(r))$$

Nghiệm  $rV(r)$  của phương trình này, không phân kì khi r tiến tới

$\infty$ , có dạng:  $rV(r) = Ae^{-\frac{r}{d}}$ , trong đó:  $d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 q^2}}$

là chiều dài đặc trưng của sự suy giảm điện thế.

Khi r tiến tới 0, nghiệm này phải tương đương với điện thế được tạo ra bởi điện tích duy nhất q, do đó phải cho  $A = \frac{q}{4\pi \epsilon_0}$ .

Cuối cùng, điện thế bằng :

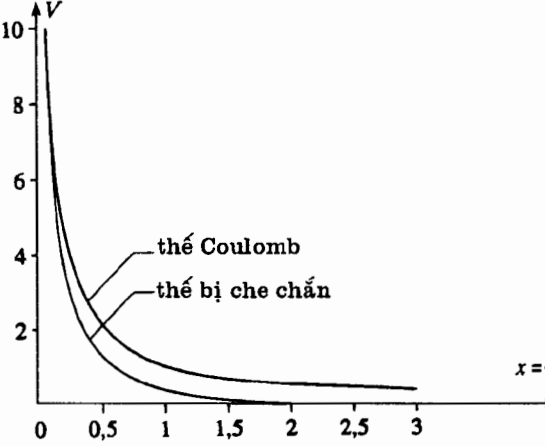
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{d}}.$$

3) Thế nhận được giảm nhanh hơn thế COULOMB  $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  rất

nhều. ở lân cận ngay sát điện tích +q, là các điện tích -q sắp xếp ưu tiên để làm giảm tác dụng của điện tích "trung tâm". Hiện tượng này giải thích kết quả thu được : ở ngoài vài khoảng d, thì thế DEBYE :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{d}}.$$

thấp hơn thế Coulomb nhiều, như chúng tỏ sơ đồ dưới đây, trên đó vẽ các đường cong của thế Coulomb (xanh) và thế bị che chắn (đen) biến đổi theo  $x = \frac{r}{d}$ .



## 7 1) Vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện : xem áp dụng 2

### 2) điện tích của một mặt phẳng do hưởng ứng điện

a) Điện tích q hút các điện tích trái dấu và đẩy các điện tích cùng dấu ra xa. Thế nhưng vật dẫn lại có các điện tích dẫn có thể di chuyển được. Ta có thể dự đoán rằng lúc cân bằng, mặt phẳng dẫn điện sẽ có mật độ điện mặt  $\sigma$  dấu ngược với điện tích q. Chắc chắn mật độ điện mặt này không đều ; nó càng lớn khi càng gần q, nghĩa là khi ở lân cận điểm O. Bài toán có tính đối xứng tròn xoay xung quanh trục (Oz), nên ta có thể dự đoán rằng điện tích này chỉ là hàm của khoảng cách r từ điểm đang xét trên mặt phẳng tới trục (Oz).

b) Ta phân tích bài toán để giải trong miền ( $z > 0$ ) trong trường hợp điện tích có mặt cùng với mặt phẳng dẫn điện. Trong miền này, và ở ngoài điểm có đặt điện tích q, thì không có các điện tích. Như vậy, thế vô hướng V thỏa mãn phương trình LAPLACE : ( $V = 0$ . Hơn nữa, các điều kiện ở giới hạn đặc trưng cho bài toán là :  $V = 0$  trên mặt phẳng ( $z = 0$ ), cũng như ở khoảng cách rất lớn, và "có một điện tích q" tại điểm A.

Vẫn trong miền ( $z > 0$ ), ta xét bài toán tương ứng với hai điện tích q và q'.

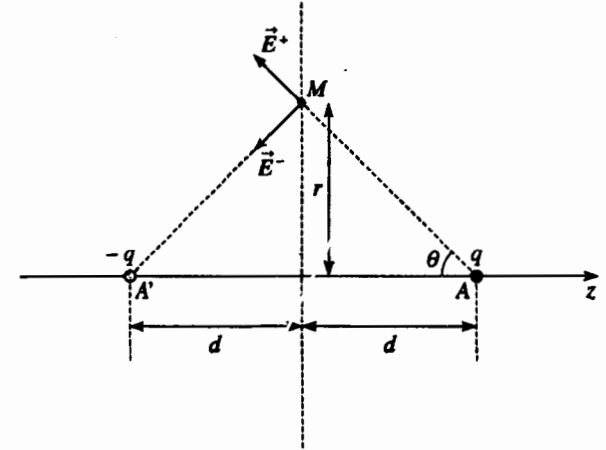
Trường hợp này tương đương với trường hợp trước trong miền  $z > 0$ , với điều kiện áp đặt  $V = 0$  tại mọi điểm của mặt phẳng ( $z = 0$ ). Có thể đạt được điều kiện này bằng cách chọn  $q' = -q$  và  $d' = d$ .

Cả hai bài toán lúc đó đều bị chi phối, trong miền ( $z > 0$ ), bởi cùng các phương trình và cùng các điều kiện ở giới hạn như nhau : nghiệm điện thế của bài toán đều như nhau trong cả hai trường hợp ở trong miền này. Vậy, tại một điểm M có tọa độ  $z > 0$ , ta có :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{AM} - \frac{1}{A'M} \right) \quad \text{và} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{AM}}{AM^3} - \frac{\vec{A'M}}{A'M^3} \right)$$

c) Đối với một điểm M trên bề mặt của mặt phẳng dẫn điện ( $z = 0^+$ ), điện trường trở thành (xem sơ đồ dưới đây) :

$$\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2 \cos \theta) \vec{e}_z}{\left( \frac{d}{\cos \theta} \right)^2}$$



Mật độ điện mặt của mặt phẳng dẫn điện lúc đó có dạng :

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{e}_z \cdot \vec{E}(z=0^+) = \frac{-q \cos^3 \theta}{2\pi d^2}$$

Điện tích tổng cộng của mặt phẳng như vậy bằng :

$$Q = \int_{r=0}^{\infty} \sigma 2\pi r dr = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-q \cos^3 \theta}{2\pi d^2} 2\pi (d \tan \theta) \left( \frac{d}{\cos^2 \theta} d\theta \right) = -q \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = -q.$$

Kết quả này là tự nhiên : mặt phẳng dẫn điện tạo ra, trong miền ( $Z > 0$ ), cùng một điện trường như điện trường mà điện tích  $q' = -q$  đặt tại  $z = -d$  sẽ tạo ra.

8 1) Khi nghĩ tới phương trình  $\Delta A = -\mu_0 \vec{j}$ , ta kiểm tra thấy ngay là :

$$[A] = [\mu_0 j^* (\text{chiều dài})^2] \text{ do đó } [\lambda] = \left[ \frac{A}{\mu_0 j} \right]^{\frac{1}{2}} = \text{chiều dài.}$$

$\lambda$  là chiều dài LONDON của vật liệu. Ghi chú :  $\lambda = 17\text{nm}$ .

2) Từ trường không đổi nghiệm đúng phương trình MAXWELL - AMPÈRE :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = - \frac{\vec{A}}{\lambda^2}.$$

Dive của từ trường bằng không, nên khi lấy rota cả hai vế của phương trình này, thì ta được :

$$\Delta \vec{B} = + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}.$$

Để bài toán này bất biến trong phép tịnh tiến song song với (Ox) hay (Oy), mà ở đó, trường áp đặt vào, được định hướng theo (Ox), thì  $\vec{B}$  có dạng đơn giản :

$$\vec{B} = B(z) \vec{e}_x, \text{ vì } \frac{d^2 B}{dz^2} + \frac{B}{\lambda^2} = 0.$$

b) Mô hình mô tả sự phân bố dòng điện là mô hình theo thể tích (mô hình khối), và từ trường là liên tục ở  $z = -d$  và  $z = d$ , vậy thì :

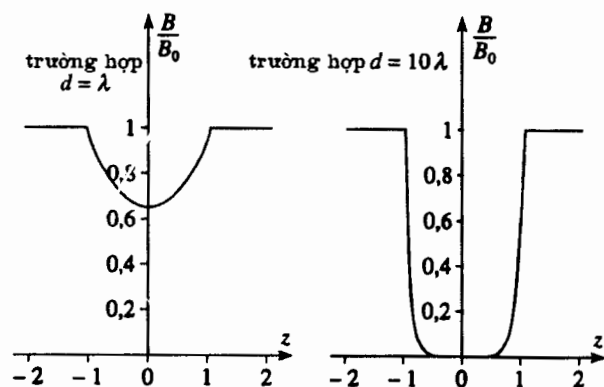
$$B(-d) = B(d) = B_0.$$

Từ đó suy ra từ trường trong tấm siêu dẫn bằng :

$$\vec{B} = B_0 \frac{\text{ch}\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{e}_x$$

Các biến thiên của  $\frac{B}{B_0}$  được biểu diễn dưới đây đối với  $d = \lambda$

trong đồ thị thứ nhất, và đối với  $d = 10\lambda$  trong đồ thị thứ hai.

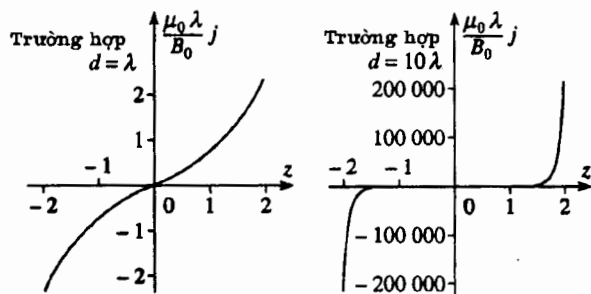


Từ trường chỉ xuyên thấu vào tấm tới độ sâu vào cỡ chiều dài LONDON  $\lambda$ . Chất siêu dẫn có tính chất "đẩy" từ trường ra xa : đó là hiệu ứng MEISSNER.

c) Mật độ dòng điện thể tích là :

$$\vec{j} = \frac{\text{rot } \vec{B}}{\mu_0} = j(z) \vec{e}_y = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\text{sh}\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{e}_y.$$

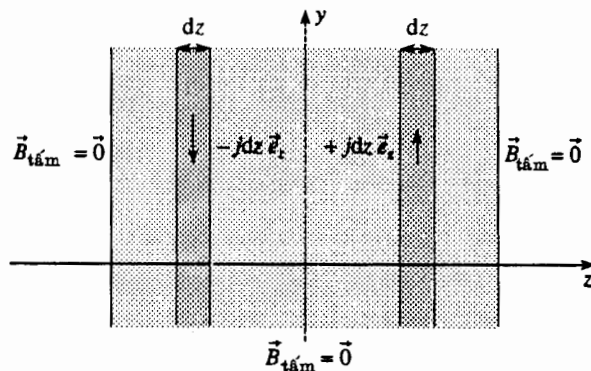
Các biến thiên của  $j(z)$  trong tấm được biểu diễn dưới đây :



Đối với  $d \gg \lambda$ , mật độ dòng điện được định xứ ở lân cận các bề mặt tấm siêu dẫn, mà ở đây mật độ dòng có những giá trị rất lớn.

Người ta đã biết một lớp phẳng vô hạn với mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s$  tạo ra một từ trường  $\pm \frac{\mu_0 j_s}{2}$  ở cả bên này và bên kia lớp.

Đối với hai lớp đối xứng đối với mặt phẳng ( $z = 0$ ), được chạy qua bởi những dòng điện bề mặt đối nghịch, thì các trường cộng vào nhau ở giữa các tấm, nhưng lại bù trừ nhau ở phía ngoài. Sự phân bố theo thể tích nhận được đối với tấm siêu dẫn có nét giống như một sự chồng chất các lớp chiều dày  $dz$ , đối xứng đối với mặt phẳng ( $z = 0$ ), có các dòng điện đối ngược chạy qua. Như vậy ta thấy là trường tạo ra bởi tấm siêu dẫn bằng không ở bên ngoài nó. Do vậy, tấm siêu dẫn không làm nhiễu loạn trường  $\vec{B}_0$  áp đặt vào, trừ ở trong lòng của nó.



d) Các đồ thị ở điểm b) và c) đã chứng tỏ rằng, đối với  $d \gg \lambda$  ( $d = 0,5 \text{ mm}, \lambda = 17 \text{ nm}$ ), thì :

- từ trường chỉ xuyên thấu vào tấm siêu dẫn một chiều dày rất nhỏ ;
- mật độ dòng điện thể tích gần như bằng không ở trong lòng vật liệu, trừ ở lân cận bề mặt của nó, mà ở đó mật độ dòng rất lớn.

Lúc đó, ta có thể thay phân bố này bằng một mô hình bề mặt, mà theo đó thì mật độ dòng điện mặt phải lấy giá trị :

$$\vec{j}_s = \int_{z=0}^d \vec{j} dz = \int_{z=0}^d \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\text{sh}\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} dz \vec{e}_y = \frac{B_0}{\mu_0} \left[ \frac{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right) - 1}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \right] \vec{e}_y.$$



Khi  $d \gg \lambda$ ,  $\vec{j}_s$  tiến tới  $\frac{B_0}{\mu_0} \vec{e}_y$  trên mặt  $z = d$ , dòng điện mặt sẽ đối ngược trên mặt  $z = -d$ . Với phân bố bề mặt này thì sẽ được kết hợp một cách logic một từ trường gián đoạn (không liên tục) khi đi qua các bề mặt của tấm siêu dẫn.

9) 1) a) Ngoài hình cầu (và ngoài các nguồn của trường  $\vec{B}_0$  ở rất xa), thì từ trường tổng cộng, nghĩa là sự chồng chất của từ trường  $\vec{B}_0$  áp đặt vào và của trường tạo nên bởi các dòng điện chạy qua hình cầu, sẽ nghiệm đúng:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ và } \text{rot } \vec{B} = \vec{0}.$$

và như vậy cũng nghiệm đúng phương trình LAPLACE  $\Delta \vec{B} = 0$ .

Ở khoảng cách lớn, từ trường đồng nhất với trường áp đặt  $\vec{B}_0$ . Thành phần pháp tuyến của từ trường là liên tục, do vậy bằng không, tại mọi điểm ở trên bề mặt hình cầu:  $\vec{e}_r \cdot \vec{B}$  ( $r = a, \theta, \varphi$ ) = 0, trong đó  $r = a, \theta, \varphi$  là các tọa độ cầu của điểm đang xét.

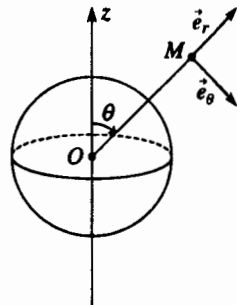
b) Người ta đặt một lưỡng cực tại điểm O, hướng theo trục tròn xoay của bài toán:  $\vec{M} = M \vec{e}_z$ . Rõ ràng là hai điều kiện đầu tiên được nêu lên cho câu hỏi trước đã được kiểm nghiệm, từ trường tổng cộng bằng:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{lưỡng cực}} \\ &= B_0(\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) + \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$

Phải hiệu chỉnh trị số của mômen lưỡng cực từ để cũng nghiệm đúng:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{B} (r = a, \theta, \varphi) = 0.$$

Điều đó buộc  $M = -\frac{2\pi B_0 a^3}{\mu_0}$ .



c) Trường, đồng nhất trong cả hai trường hợp hình vẽ trong miền ( $r > a$ ), có dạng:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_0 \left[ \cos\theta \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - \sin\theta \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \vec{e}_\theta \right].$$

2) Một chất lỏng, theo dòng chảy không thể nén được ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) và không xoáy ( $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ ), chảy với vận tốc  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$  xa mặt cầu, và trượt dọc theo bề mặt hình cầu ở  $r = a$  (chất lỏng lí tưởng), làm phát sinh một bài toán đồng nhất là xác định trường vận tốc  $\vec{v}$ .

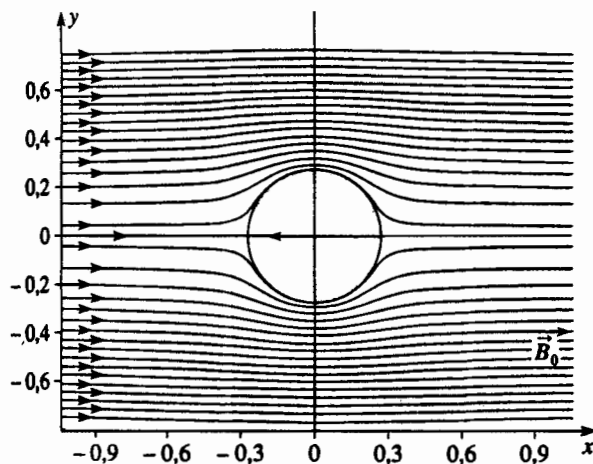
Ngay lập tức, biểu thức của trường đó được suy ra từ đây:

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_0 \left[ \cos\theta \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - \sin\theta \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \vec{e}_\theta \right].$$

Sơ đồ dưới đây biểu diễn, trong một mặt phẳng chứa trục (Oz), một số đường sức của trường tổng hợp do sự chồng chất của một từ trường đều  $\vec{B}_0$  và từ trường của một lưỡng cực, song song với  $\vec{B}_0$  và định hướng ngược lại. Ta phân biệt được dấu vết của hình

cầu bán kính  $a = \left( -\frac{\mu_0 M}{2\pi B_0} \right)^{\frac{1}{3}}$  mà trường tổng cộng "chảy"

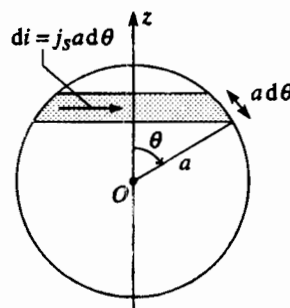
bao quanh nó.



3) a) Sự phân bố của dòng điện được xác định bởi sự không liên tục của từ trường trên bề mặt của hình cầu.

$$\begin{aligned} \vec{B}_{(r=a^+ \cdot \theta, \varphi)} - \vec{B}_{(r=a^- \cdot \theta, \varphi)} &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó, } \vec{j}_s &= \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}_{(r=a^+ \cdot \theta, \varphi)}}{\mu_0} \\ &= \frac{3B_0}{2\mu_0} \sin\theta \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$



b) Một vòng dây, bán kính R và có dòng điện i chạy qua được kết hợp với một mômen lưỡng cực từ  $M = i\pi a^2$ .

Ở đây, người ta có thể cắt sự phân bố dòng điện theo diện tích trên hình cầu thành từng dải băng nhỏ tròn nguyên tố, chiều rộng  $a d\theta$  và bán kính  $a \sin\theta$  có dòng điện  $di = j_s a d\theta$  chạy qua và mômen lưỡng cực từ:

$$\vec{dM} = di \pi a^2 \vec{e}_z = -\frac{3\pi a^3 B_0}{2\mu_0} \sin^3\theta d\theta \vec{e}_z.$$

Khi  $d \gg \lambda$ ,  $\vec{j}_s$  tiến tới  $\frac{B_0}{\mu_0} \vec{e}_y$  trên mặt  $z = d$ , dòng điện mặt sẽ đối ngược trên mặt  $z = -d$ . Với phân bố bề mặt này thì sẽ được kết hợp một cách logic một từ trường gián đoạn (không liên tục) khi đi qua các bề mặt của tấm siêu dẫn.

1) a) Ngoài hình cầu (và ngoài các nguồn của trường  $\vec{B}_0$  ở rất xa), thì từ trường tổng cộng, nghĩa là sự chồng chất của từ trường  $\vec{B}_0$  áp đặt vào và của trường tạo nên bởi các dòng điện chạy qua hình cầu, sẽ nghiệm đúng:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ và } \text{rot } \vec{B} = \vec{0}.$$

và như vậy cũng nghiệm đúng phương trình LAPLACE  $\Delta \vec{B} = 0$ .

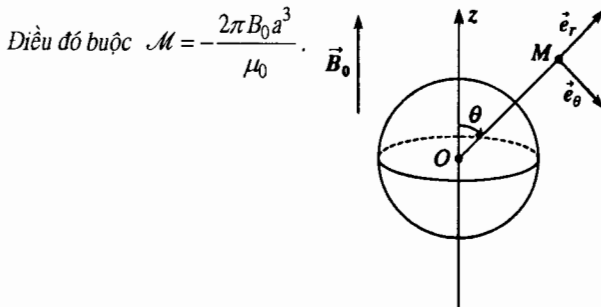
Ở khoảng cách lớn, từ trường đồng nhất với trường áp đặt  $\vec{B}_0$ . Thành phần pháp tuyến của từ trường là liên tục, do vậy bằng không, tại mọi điểm ở trên bề mặt hình cầu:  $\vec{e}_r \cdot \vec{B}$  ( $r = a, \theta, \varphi$ ) = 0, trong đó  $r = a, \theta, \varphi$  là các tọa độ cầu của điểm đang xét.

b) Người ta đặt một lưỡng cực tại điểm O, hướng theo trục tròn xoay của bài toán:  $\vec{M} = M \vec{e}_z$ . Rõ ràng là hai điều kiện đầu tiên được nêu lên cho câu hỏi trước đã được kiểm nghiệm, từ trường tổng cộng bằng:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{lưỡng cực}} \\ &= B_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) + \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$

Phải hiệu chỉnh trị số của mômen lưỡng cực từ để cũng nghiệm đúng:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{B}(r = a, \theta, \varphi) = 0.$$



c) Trường, đồng nhất trong cả hai trường hợp hình vẽ trong miền ( $r > a$ ), có dạng:

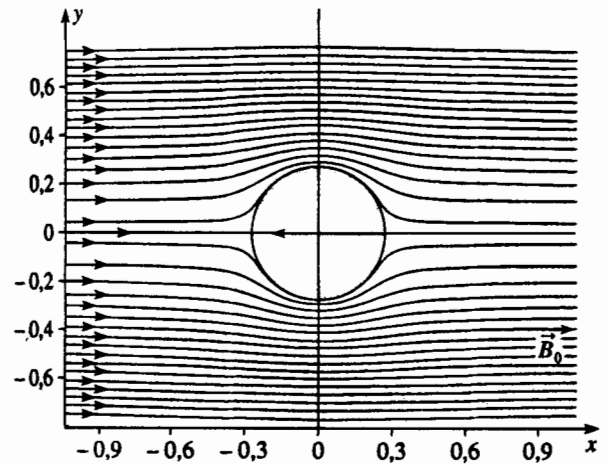
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 \left[ \cos \theta \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - \sin \theta \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \vec{e}_\theta \right].$$

2) Một chất lỏng, theo dòng chảy không thể nén được ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) và không xoáy ( $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ ), chảy với vận tốc  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$  xa mặt cầu, và trượt dọc theo bề mặt hình cầu ở  $r = a$  (chất lỏng lí tưởng), làm phát sinh một bài toán đồng nhất là xác định trường vận tốc  $\vec{v}$ .

Ngay lập tức, biểu thức của trường đó được suy ra từ đây:

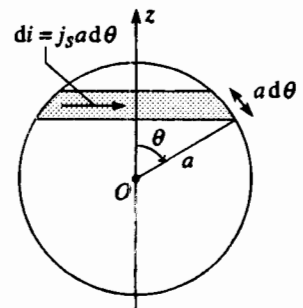
$$\vec{v}(\vec{r}) = v_0 \left[ \cos \theta \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - \sin \theta \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \vec{e}_\theta \right].$$

Sơ đồ dưới đây biểu diễn, trong một mặt phẳng chứa trục (Oz), một số đường sức của trường tổng hợp do sự chồng chất của một từ trường đều  $\vec{B}_0$  và từ trường của một lưỡng cực, song song với  $\vec{B}_0$  và định hướng ngược lại. Ta phân biệt được dấu vết của hình cầu bán kính  $a = \left( -\frac{\mu_0 M}{2\pi B_0} \right)^{\frac{1}{3}}$  mà trường tổng cộng "chảy" bao quanh nó.



3) a) Sự phân bố của dòng điện được xác định bởi sự không liên tục của từ trường trên bề mặt của hình cầu.

$$\begin{aligned} \vec{B}_{(r=a^+, \theta, \varphi)} - \vec{B}_{(r=a^-, \theta, \varphi)} &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r. \\ \text{Từ đó, } \vec{j}_s &= \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}_{(r=a^+, \theta, \varphi)}}{\mu_0} \\ &= \frac{3B_0}{2\mu_0} \sin \theta \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$



b) Một vòng dây, bán kính R và có dòng điện  $i$  chạy qua được kết hợp với một mômen lưỡng cực từ  $M = i\pi a^2$ .

Ở đây, người ta có thể cắt sự phân bố dòng điện theo diện tích trên hình cầu thành từng dải băng nhỏ tròn nguyên tố, chiều rộng  $a d\theta$  và bán kính  $a \sin \theta$  có dòng điện  $di = j_s a d\theta$  chạy qua và mômen lưỡng cực từ:

$$d\mathcal{M} = di \pi a^2 \vec{e}_z = -\frac{3\pi a^3 B_0}{2\mu_0} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z.$$

Mô men lưỡng cực toàn phần của hình cầu như vậy sẽ bằng :

$$\vec{M} = \int_{\theta=0}^{\pi} -\frac{3\pi a^3 B_0}{2\mu_0} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z = -\frac{3\pi a^3 B_0}{2\mu_0} \frac{4}{3} \vec{e}_z = -\frac{2\pi a^3 B_0}{\mu_0} \vec{e}_z.$$

Đương nhiên, ta lại tìm thấy mômen lưỡng cực của lưỡng cực thay thế hình cầu siêu dẫn ở câu hỏi thứ nhất.

10) Từ trường, sinh ra bởi một dây dẫn thẳng trùng với trục (Oz), trong có dòng điện I chạy qua, có dạng :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r}.$$

Hơn nữa, một thế vector, tìm kiếm trong mốc đo Coulomb với các tính chất đối xứng của một vector, sẽ là (xem áp dụng 6) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \vec{e}_z$$

Đối với hai dây dẫn kết hợp, ta có thể viết :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{\vec{e}_{\theta_1}}{r_1} - \frac{\vec{e}_{\theta_2}}{r_2} \right)$$

và 
$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \vec{e}_z$$

trong đó,  $r_1$  và  $r_2$  là các khoảng cách từ điểm đang xét đến mỗi dây dẫn, được biểu thị theo các tọa độ trụ  $r$  và  $\theta$  của điểm đó :

$$r_{2 \text{ hay } 1} = \left( r^2 \pm ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Trong gần đúng lưỡng cực  $r \gg a$ , ta có :

$$\frac{r_{2 \text{ hay } 1}}{r} \approx 1 \pm \frac{a}{2r} \cos \theta, \text{ nghĩa là } \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{a \cos \theta}{r} \right) \vec{e}_z.$$

Trường lưỡng cực của đường hai dây được suy ra từ đó :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{a \cos \theta}{r} \right) \vec{e}_z \right] = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \text{grad} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \wedge \vec{e}_z$$

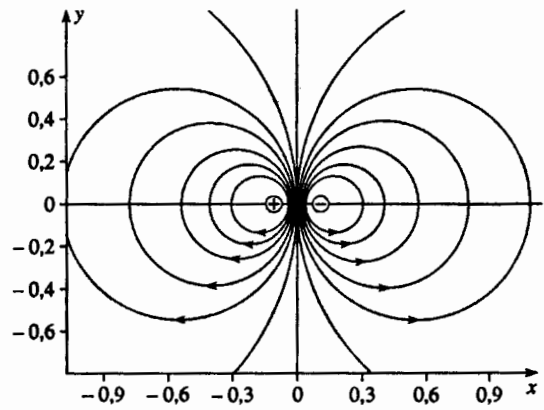
nghĩa là :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \left( -\frac{\cos \theta}{r^2} \vec{e}_r - \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{e}_\theta \right) \wedge \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \frac{-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

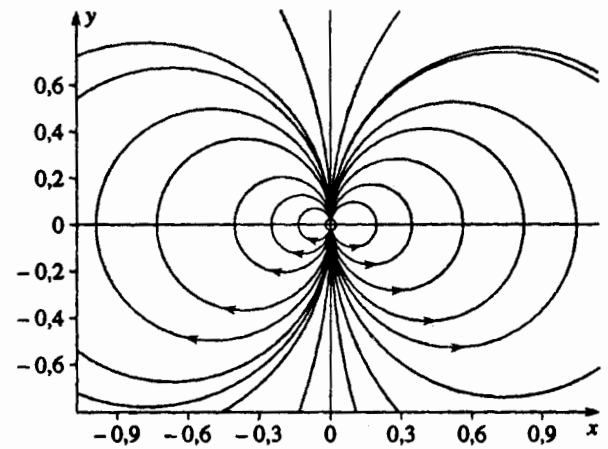
Các đường sức của trường, trong các mặt phẳng ở độ cao  $z = cte$ , được xác định bởi :

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta}, \text{ nghĩa là } \frac{dr}{r} = \frac{-\sin \theta d\theta}{\cos \theta}$$

Sau khi lấy tích phân, ta tìm được  $r = D \cos \theta$  ( $D$  là hằng số tích phân). Các đường sức của trường đều là các vòng tròn tiếp tuyến với trục (Oy) tại O, như các mô phỏng dưới đây chúng tỏ.



Sơ đồ trên cho thấy các đường sức trường của hai dây dẫn : trường xoáy chung quanh các dây dẫn ; ở sơ đồ dưới vẽ các đường sức trường của hai dây dẫn trong gần đúng lưỡng cực : các vòng tròn tiếp tuyến ở O với trục (Oy).



11) Bài toán bất biến trong phép tịnh tiến song song với (Oz). Biến số này sẽ không tham dự vào các biểu thức của trường và thế ở cân bằng.

Từ trường, một giả - vector, hướng theo (Oy) và như vậy nằm trong mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz), làm cho hình trụ bất biến. Vậy ta có thể tìm được một thế vector vuông góc với các mặt phẳng phản xứng này, và như thế sẽ hướng theo  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{A}(r, \theta, z) = A(r, \theta) \vec{e}_z.$$

Một sự đối xứng đối với mặt phẳng (Oy, Oz) quy về việc đổi góc  $\theta$  thành  $\pi - \theta$ , trong tọa độ trụ, trục (Oz).

Phép đối xứng này chuyển một điểm M thành điểm M' đối xứng với nó, mà không làm thay đổi trường  $\vec{B}_0$  (được biến đổi thành trường đối xứng với nó, nghĩa là thành chính nó).

Thế vector  $\vec{A}'$  ở M' vậy phải là thế đối lập với hình đối xứng của thế  $\vec{A}$  tại điểm M. Vì  $\vec{A}$  song song với mặt phẳng phản xứng

này, nên ta có  $A(r, \pi - \theta) = -A(r, \theta)$ . Việc chọn  $A(r, \theta) = f(r)\cos\theta$  là chấp nhận được (đây không phải là sự chọn duy nhất: sự chọn  $\cos^3\theta$  cũng có thể chấp nhận được; tuy nhiên chỉ có một từ trường duy nhất là nghiệm của bài toán này, và điều cốt yếu là tìm thấy nó... nếu dạng này vẫn có thể chấp nhận được khi kết thúc các tính toán, và như thế là đủ).

2) Trong mốc đo COULOMB, thế vector thỏa mãn phương trình POISSON:  $\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = \vec{0}$ . Ở ngoài các nguồn của trường  $\vec{B}_0$  và ở ngoài hình cầu siêu dẫn ( $r > R$ ), thì thế vector thỏa mãn phương trình LAPLACE:  $\Delta\vec{A} = \vec{0}$ .

Đối với dạng đề xuất ở trên, ta được (xem phụ lục):

$$\frac{d^2f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{f(r)}{r^2} = 0.$$

Đây là một phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai, mà ta đi tìm các nghiệm dạng  $f(r) = r^n$ .

Dạng này có thể được chấp nhận nếu  $n(n-1) + n - 1 = 0$ , nghĩa là  $n = +1$  hay  $n = -1$  và  $f(r) = \alpha r$  hay  $f(r) = \frac{\beta}{r}$ . Nghiệm tổng quát

$f(r)$  là một tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm này. Thế vector tìm kiếm, nghiệm của phương trình LAPLACE, sẽ có dạng:

$$\vec{A} = \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \cos\theta \vec{e}_z.$$

3) Từ trường tương ứng là:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} = \text{grad} \left[ \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \cos\theta \right] \wedge \vec{e}_z \\ &= \left( -\alpha - \frac{\beta}{r^2} \right) \sin\theta \vec{e}_r - \left( \alpha - \frac{\beta}{r^2} \right) \cos\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Đó là do sự chống chất của trường  $\vec{B}_0$  được áp đặt vào và của trường cảm ứng bởi các dòng điện chạy qua hình trụ siêu dẫn nên phải tiến đến:

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y = B_0(\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta) \text{ đối với } r \gg R, \text{ do đó } \alpha = -B_0.$$

Thành phần xuyên tâm của trường là liên tục, vậy triệt tiêu ở  $r = R$  ( $\vec{B}$  bằng không đối với  $r < R$ ), từ đó  $\beta = -\alpha R^2 = B_0 R^2$ .

Từ đó ta suy ra biểu thức của trường, đối với  $r > R$ :

$$\vec{B} = B_0 \left[ \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin\theta \vec{e}_r + \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos\theta \vec{e}_\theta \right].$$

4) Trong lời giải bài tập 10, ta đã thu được từ trường:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 a l}{2\pi} \frac{(-\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta)}{r^2},$$

đối với đường lưỡng cực. Khi chống chất trường này với trường áp đặt  $\vec{B}_0$ , ta nhận thấy rằng sự chọn  $\frac{\mu_0 a l}{2\pi} = B_0 R^2$  cho phép hủy

bỏ thành phần xuyên tâm của từ trường tổng cộng ở  $r = R$  và cho phép lại tìm thấy trường đã nhận được ở câu 3).

5) Dòng điện theo diện tích (dòng điện bề mặt) được biểu thị bởi tích không liên tục của từ trường khi đi qua hình trụ, nghĩa là:

$$\vec{B}_{(r=R^+, \theta, z)} - \vec{B}_{(r=R^-, \theta, z)} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_r.$$

$$\text{Điều này kéo theo } \vec{j}_S = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}_{(r=R^+, \theta, z)}}{\mu_0} = \frac{2B_0}{\mu_0} \cos\theta \vec{e}_z$$

6) Ở bề mặt hình trụ, trường ngang là  $\vec{B}_{\text{bề mặt}} = 2B_0 \cos\theta \vec{e}_\theta$ .

Nó không vượt quá giá trị tới hạn  $B_c$ . Như vậy, giá trị giới hạn của  $B_0$  bằng  $\frac{B_c}{2}$ .

# 3

# CÁC PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

## Mở đầu

*Nhờ các tính chất của trường không đổi, ta đã đưa vào chương hai một sự mô tả trường điện từ không đổi bằng các định luật vi phân : các phương trình MAXWELL. Ta sẽ kết thúc cách tiếp cận này ở đây, bằng cách ghi ra nhóm bốn phương trình MAXWELL ở chế độ biến thiên.*

*James Clerk MAXWELL (1831 – 1879) đã công bố, vào năm 1864, một báo cáo khoa học trình bày thuyết điện từ cổ điển, mà các phương trình đã cho phép ông mô tả sự truyền sóng điện từ.*

*Nhờ lí thuyết này, ông đã trình bày khả năng truyền các tín hiệu bằng sóng vô tuyến, một sự tiên đoán đã được các thí nghiệm của HERTZ vào năm 1888 xác nhận.*

*Lí thuyết này cũng cho phép tiên đoán sự truyền sóng điện từ trong chân không với vận tốc bằng vận tốc ánh sáng  $c$ . Các thí nghiệm của MICHELSON và MORLEY (1881 – 1887) đã khẳng định tính chất phổ biến của vận tốc này.*

## M U C T I Ê U

- Các phương trình MAXWELL.
- Năng lượng điện từ.
- Phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng.

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các định luật vi phân đối với các trường điện từ không đổi.

# 3

# CÁC PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

## Mở đầu

Nhờ các tính chất của trường không đổi, ta đã đưa vào chương hai một sự mô tả trường điện từ không đổi bằng các định luật vi phân : các phương trình MAXWELL. Ta sẽ kết thúc cách tiếp cận này ở đây, bằng cách ghi ra nhóm bốn phương trình MAXWELL ở chế độ biến thiên.

James Clerk MAXWELL (1831 – 1879) đã công bố, vào năm 1864, một báo cáo khoa học trình bày thuyết điện từ cổ điển, mà các phương trình đã cho phép ông mô tả sự truyền sóng điện từ.

Nhờ lí thuyết này, ông đã trình bày khả năng truyền các tín hiệu bằng sóng vô tuyến, một sự tiên đoán đã được các thí nghiệm của HERTZ vào năm 1888 xác nhận.

Lí thuyết này cũng cho phép tiên đoán sự truyền sóng điện từ trong chân không với vận tốc bằng vận tốc ánh sáng  $c$ . Các thí nghiệm của MICHELSON và MORLEY (1881 – 1887) đã khẳng định tính chất phổ biến của vận tốc này.

## M U C T I Ê U

- Các phương trình MAXWELL.
- Năng lượng điện từ.
- Phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng.

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các định luật vi phân đối với các trường điện từ không đổi.

# 1 Phương trình MAXWELL - FARADAY

## 1.1. Biến đổi Galilée của trường điện từ

Lực LORENTZ,  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , mô tả tác dụng của trường điện từ lên một hạt tích điện vận tốc  $\vec{v}$ , và cho phép ta nghiên cứu sự biến đổi của nó trong hệ quy chiếu Galilée  $\mathcal{R}$  mà trong đó trường điện từ  $(\vec{E}, \vec{B})$  được quan sát.

Trong một hệ quy chiếu Galilée  $\mathcal{R}'$ , chuyển động tịnh tiến với vận tốc  $\vec{v}_e$  không đổi đối với hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  (H.2), ta viết :

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'),$$

trong đó, trường điện từ  $(\vec{E}', \vec{B}')$  được xem xét trong  $\mathcal{R}'$ .

Theo cơ học cổ điển, thì lực là bất biến khi thay đổi hệ quy chiếu. Biết rằng  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_e$ , nên từ đó ta suy ra rằng đẳng thức :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = (\vec{E}' - \vec{v}_e \wedge \vec{B}') + \vec{v} \wedge \vec{B}'.$$

phải được nghiệm đúng với mọi vận tốc  $\vec{v}$ . Khi đồng nhất các số hạng phụ thuộc vận tốc  $\vec{v}$  và những số hạng không phụ thuộc nó trong biểu thức này, ta thấy rằng trường điện từ nhìn thấy trong  $\mathcal{R}'$  sẽ thu được từ trường điện từ nhìn thấy trong  $\mathcal{R}$  bởi.

$$\begin{cases} \vec{B}' = \vec{B} \\ \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}. \end{cases}$$

Các hệ thức này cấu thành các công thức trong *phép biến đổi Galilée của trường điện từ* (trong cơ học phi tương đối tính,  $v$  và  $v_e$  đều nhỏ hơn  $c$  rất nhiều).

Chú ý :

- Tên tuổi Galilée GALILEI (1564 - 1642), người đã lập công thức về nguyên lý tương đối của các chuyển động, được gắn liền với tất cả các hệ thức phi tương đối tính về sự thay đổi hệ quy chiếu.
- Các trường  $\vec{E}$  và  $\vec{B}$  được liên kết trong các công thức biến đổi Galilée. Đặc điểm này đã giải thích thuật ngữ "trường điện từ" chỉ rõ một thực thể vật lý toàn bộ  $(\vec{E}, \vec{B})$  mà ta đã mô tả hai mặt trong trường hợp các chế độ không đổi.
- Tính bất đối xứng giữa  $\vec{E}$  và  $\vec{B}$  có thể gây ngỡ ngàng. Thực ra, trong khuôn khổ của thuyết tương đối,  $\vec{B}$  cũng phụ thuộc hệ quy chiếu, nhưng ta không phải nghiên cứu trường hợp một vòng dây chuyển động với vận tốc gần bằng vận tốc ánh sáng ...

## 1.2. Trường điện từ không phải là không đổi

### 1.2.1. Trường điện từ biến thiên

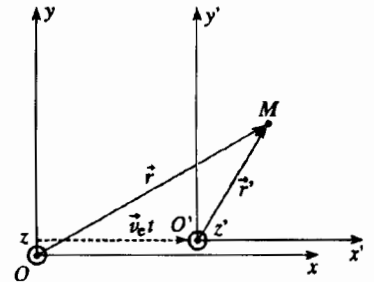
Ta hãy xét trường hợp mà trường  $(\vec{E}, \vec{B})$ , nhìn thấy trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$ , là một trường điện từ không đổi.

Như vậy, tại điểm  $M$  có vị trí được xác định bởi  $\vec{r} = \overline{OM}$  trong mốc  $(O; x, y, z)$  kết hợp với hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$ , ta có thể viết:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o(\vec{r}) \text{ và } \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_o(\vec{r})$$



H.1. James Clerk MAXWELL (1831 - 1879)



H.2. Các hệ quy chiếu trong phép tịnh tiến tương đối.

Ở cùng điểm  $M$ , được xác định vị trí bởi  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t$  (H.2) trong mốc  $(O', x', y', z)$  kết hợp với hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$ , trường điện từ  $(\vec{E}', \vec{B}')$  được viết nhờ các công thức biến đổi Galilée của trường :

$$\vec{E}'(\vec{r}', t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}_e \wedge \vec{B}(\vec{r}, t),$$

$$\text{và } \vec{B}'(\vec{r}', t) = \vec{B}(\vec{r}, t),$$

nghĩa là :

$$\vec{E}'(\vec{r}', t) = \vec{E}_0(\vec{r}' + \vec{v}_e t) + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_0(\vec{r}' + \vec{v}_e t);$$

$$\text{và } \vec{B}'(\vec{r}', t) = \vec{B}_0(\vec{r}' + \vec{v}_e t).$$

Các hệ thức này tương ứng với các phép biến đổi dạng :

$$F(\vec{r}', t) = F_0(\vec{r}' + \vec{v}_e t),$$

mà đối với chúng, ta có thể viết :

$$\frac{\partial F(\vec{r}', t)}{\partial t} = \frac{\partial F_0(\vec{r}' + \vec{v}_e t)}{\partial t} = \left( v_{ex} \frac{\partial F_0}{\partial x} + v_{ey} \frac{\partial F_0}{\partial y} + v_{ez} \frac{\partial F_0}{\partial z} \right) \Big|_{[\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_e t]}$$

nghĩa là :

$$\frac{\partial F(\vec{r}', t)}{\partial t} = (\vec{v}_e \cdot \overline{\text{grad}}) F_0(\vec{r}) \Big|_{[\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_e t]}$$

Trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$ , trường điện từ  $(\vec{E}', \vec{B}')$  nói chung không phải là không đổi. ví dụ sự phụ thuộc của trường  $\vec{B}'$  theo thời gian được thể hiện bởi :

$$\frac{\partial \vec{B}'(\vec{r}', t)}{\partial t} = (\vec{v}_e \cdot \overline{\text{grad}}(\vec{r})) \Big|_{[\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_e t]}$$

### 1.2.2. Tính xoáy của điện trường biến thiên

Ta biết rằng trường điện từ không đổi  $(\vec{E} = \vec{E}_0(r), \vec{B} = \vec{B}_0(r))$  nhìn thấy trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  sẽ thỏa mãn, độc lập với các nguồn của nó, các phương trình vi phân rot  $\vec{E} = \vec{0}$  và  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

Ta có thể tự hỏi liệu các phương trình tương tự có được nghiệm đúng bởi trường biến thiên  $(\vec{E}', \vec{B}')$ , nhìn thấy trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$  không ?

Muốn tính các độ biến thiên không gian của các trường  $\vec{E}'$  và  $\vec{B}'$ , ta có thể nhận thấy rằng nếu  $F(\vec{r}, t) = F_0(\vec{r} + \vec{v}_e t)$ , thì lúc đó ta có :

$$\frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial x'} = \frac{\partial F_0(\vec{r} + \vec{v}_e t)}{\partial x} \Big|_{[\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_e t]}.$$

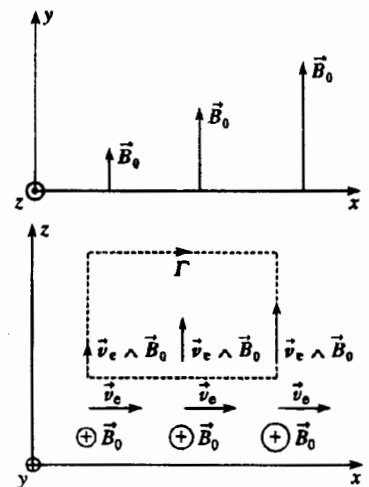
Thành thử, ta cũng kiểm tra thấy từ trường được nhìn trong  $\mathcal{R}'$  đúng là có div bằng không :

$$\text{div}' \vec{B}'(\vec{r}, t) = \text{div } \vec{B}_0(\vec{r}) = 0.$$

Trái lại, hoàn toàn không bảo đảm rằng trường  $\vec{E}'$  lại có lưu thông bảo toàn.

Trên hình 3, mà ta đang xét trường hợp của một trường không đều  $\vec{B}_0 = B_0(x)\vec{e}_y$ , thì rõ ràng là trường  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0(\vec{r})$  không có lưu thông triệt tiêu trên đường cong kín  $\Gamma$ , vậy :

$$\overline{\text{rot}}' \vec{E}'(\vec{r}', t) \neq \overline{\text{rot}} \vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{0}.$$



H.3. Trường  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0(\vec{r})$  không có lưu thông bảo toàn.



Nói chính xác hơn, ta có thể tính toán rota của trường  $\vec{E}'$  :

$$\overline{\text{rot}}' \vec{E}'(\vec{r}', t) = \overline{\text{rot}}(\vec{E}_0 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_0) \Big|_{[\vec{r}=\vec{r}'+\vec{v}_e t]} = \overline{\text{rot}}(\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0) \Big|_t$$

Áp dụng đồng nhất thức về phép đồng lấy đạo hàm vector :

$$\overline{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\text{div}\vec{b}) - \vec{b}(\text{div}\vec{a}) + (\vec{b} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{b},$$

cho các trường vector  $\vec{a} = \vec{v}_e t \vec{b} = \vec{B}_0$ .

Trường thứ nhất là đều, trường thứ hai có divergence bằng không. Từ đó ta suy ra :

$$\overline{\text{rot}}' \vec{E}'(\vec{r}', t) = -(\vec{v}_e \cdot \overline{\text{grad}})\vec{B}_0 = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}.$$

Ta có thể giải thích kết quả này bằng cách nói rằng các biến thiên thời gian của từ trường dẫn đến sự xuất hiện một số hạng có rota khác không trong biểu thức của điện trường.

### 1.3. Phương trình vi phân MAXWELL - FARADAY

Trong trường hợp một trường biến thiên, ta vừa chứng minh rằng điện trường không còn có rota bằng không nữa.

Đối với trường hợp đặc biệt mà ta đã xét, thì ta có thể viết, trong các hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  và  $\mathcal{R}'$  :

$$\overline{\text{rot}}' \vec{E}'(\vec{r}', t) = -\frac{\partial \vec{B}'(\vec{r}', t)}{\partial t} \quad \text{và} \quad \overline{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Ta thấy ở đây cách viết :

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

có thể áp dụng được trong cả hai hệ quy chiếu. Như vậy ta có khả năng thể hiện một cách hoạt động nội tại của trường điện từ bởi cùng một phương trình trong các hệ quy chiếu Galilée  $\mathcal{R}$  và  $\mathcal{R}'$ . Và lại, các định luật vật lý phải có cùng một biểu thức như nhau trong tất cả các hệ quy chiếu Galilée. Phương trình vi phân mà ta vừa viết có tính chất lí thú đó. Điều này không chứng tỏ giá trị của nó, nhưng thực tế, ít ra nó cũng phải là một ứng cử viên rất có khả năng được chấp nhận. Thực tế nó đã được thí nghiệm xác nhận : nó cho phép giải thích các hiệu ứng được quan sát khi một mạch điện chịu tác dụng của một từ trường biến thiên (cảm ứng điện từ). Từ nay, ta sẽ dùng phương trình vi phân đó như một tiên đề cơ bản của thuyết điện từ.

Một từ trường biến đổi theo thời gian có thể gây cảm ứng một thành phần của điện trường có lưu thông không bảo toàn. Rota của nó được xác định bởi phương trình MAXWELL - FARADAY :

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

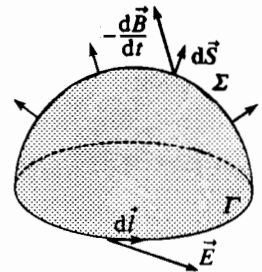
### 1.4. Lưu thông của điện trường

Bằng cách dùng định lí STOKES, ta có thể sử dụng phương trình vi phân này để biểu thị lưu thông của điện trường (H.4)

Lưu thông của điện trường trên một đường cong kín  $\Gamma$  bằng :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

trong đó,  $\Sigma$  chỉ một bề mặt có định hướng dựa vào đường cong kín  $\Gamma$  này.



H.4. Bề mặt có định hướng dựa lên một đường kín.

Trong trường hợp có một đường cong kín  $\Gamma$  cố định trong một hệ quy chiếu Galilée đang xét, và một mặt  $\Sigma$  cố định dựa lên đường cong này, ta sẽ có :

$$\iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d\Phi(t)}{dt},$$

trong đó  $\Phi(t)$  là từ thông đi qua mọi mặt  $\Sigma$  có định hướng dựa lên  $\Gamma$ , ở thời điểm  $t$ .

Lưu thông của điện trường, trên một đường cong kín  $\Gamma$  cố định trong hệ quy chiếu Galilée đang xét, thì bằng độ biến thiên của từ thông đi qua diện tích giới hạn bởi đường cong đó trong đơn vị thời gian, nhưng trái dấu :

$$\oint_{\Gamma \text{ cố định}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Chú ý :

Thông lượng này không phụ thuộc việc chọn mặt  $\Sigma$  dựa lên  $\Gamma$ , vì từ trường có thông lượng bảo toàn.

# Áp dụng 1

## Điện trường cảm ứng bởi một ống dây

Một ống dây rất dài gồm  $n$  vòng quấn kề nhau trên đơn vị dài quanh một hình trụ bán kính  $a$  và trục ( $Oz$ ).

Xác định điện trường cảm ứng bởi một dòng điện biến thiên  $i(t)$  chạy trong ống dây.

Sự phân bố các dòng điện là bất biến trong phép tịnh tiến song song với trục ( $Oz$ ) của ống dây (coi ống dây gần đúng dài vô hạn) và trong phép quay quanh trục này. Mọi mặt phẳng vuông góc với trục này đều là mặt phẳng đối xứng của phân bố dòng điện sinh ra một từ trường có dạng  $\vec{B} = B(r, t)\vec{e}_\theta$ , trong tọa độ trụ, trục ( $Oz$ ).

Ta biết rằng trường là  $B(r, t) = \mu_0 n i(t)$  ở bên trong ống dây, và bằng không ở bên ngoài.

Mọi mặt phẳng chứa trục ( $Oz$ ) đều là mặt phẳng phản xứng của phân bố các dòng điện đã sinh ra một điện trường có dạng :

$$\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_r$$

Ta hãy tính lưu thông của trường này trên một vòng tròn trục ( $Oz$ ) và bán kính  $r$  bằng cách sử dụng hệ thức :

$$\oint_r \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}.$$

Ta nhận được :

$$2\pi r E(r, t) = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \text{ với } r < a,$$

và

$$2\pi r E(r, t) = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \text{ với } r > a.$$

Từ đó ta rút ra :

$$\vec{E} = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{r}{2} \vec{e}_r \text{ với } r < a,$$

$$\text{và } \vec{E} = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{a^2}{2r} \vec{e}_r \text{ với } r > a.$$

Ta thấy ở đây là từ trường biến thiên cảm ứng một điện trường khác không trong miền ( $r > a$ ), mặc dù không có từ trường trong miền này.

# 2 Phương trình MAXWELL - AMPÈRE

## 2.1. Dòng điện dịch MAXWELL

Sự bảo toàn điện tích là một sự kiện thực nghiệm, được chấp nhận như một nguyên lý cơ bản của vật lý. Các phương trình MAXWELL, được xem như để mô tả sự biến đổi của trường điện từ, do vậy phải tương thích với phương trình bảo toàn điện tích :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Phương trình  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  kéo theo  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  khi lấy divergence về đối vế.

Kết quả này không tương thích với định luật bảo toàn điện tích trong trường hợp tổng quát nhất.

Để khắc phục thiếu sót đó, MAXWELL có ý tưởng là phải đưa vào một số hạng bổ sung cho vế thứ hai, gọi là dòng điện dịch, kí hiệu là  $\vec{j}_D$ .

Như vậy, phương trình MAXWELL - AMPÈRE phải được viết trong trường hợp tổng quát nhất :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D).$$

Dạng này tương thích với sự bảo toàn điện tích nếu :

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_D) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = 0, \text{ nghĩa là : } \operatorname{div} \vec{j}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Phương trình MAXWELL - GAUSS, không thay đổi trong chế độ biến thiên (là điều mà chúng ta sẽ thừa nhận), chỉ định cho một dạng của dòng điện dịch tương thích với điều bắt buộc này :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## 2.2. Phương trình MAXWELL - AMPÈRE

Dạng mà ta vừa xem xét không phải là nghiệm duy nhất có thể nhằm tới được, nhưng bằng cách cấu trúc, nó cho phép các phương trình MAXWELL tương thích với nguyên lý cơ bản bảo toàn điện tích. Ta thừa nhận hiệu lực của cách lựa chọn này, và coi đó như là cơ sở của tên đề.

Phương trình MAXWELL - AMPÈRE là :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

## 2.3. Định lí AMPÈRE suy rộng

Phương trình MAXWELL - AMPÈRE đã được sửa đổi, và tự nhiên cũng sẽ như thế đối với dạng tích phân của nó.

Định lí AMPÈRE có thể được suy rộng dưới dạng :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Trong biểu thức về lưu thông của từ trường trên một đường cong kín  $\Gamma$ , thì thông lượng của dòng điện dịch, để qua một mặt  $\Sigma$  có định hướng dựa lên  $\Gamma$ , sẽ cộng thêm vào động lượng của dòng các điện tích.

Để minh họa cách lập phương trình mới này của định lí AMPÈRE, ta có thể tưởng tượng một hệ mà sự vận động làm thay đổi sự phân bố điện tích nghĩa là một hệ mà đối với nó, phương trình  $\text{rot } B = \mu_0 j$  được coi là có thiếu sót.

Vậy ta hãy xét một tụ điện phẳng, cấu thành bởi hai tấm kim loại hình tròn đối diện nhau, được xếp trong mạch điện biểu diễn trên hình 5.

Đường cong kín  $\Gamma$  được chọn bao quanh dây dẫn nối nguồn điện áp với tụ điện. Mặt  $\Sigma_1$  dựa lên đường cong đó và chặn dây dẫn. Mặt  $\Sigma_2$  cũng dựa vào đường cong đó, nhưng đi qua giữa các bản của tụ điện mà không cắt các đường dòng điện.

Việc áp dụng, cho đường cong kín  $\Gamma$ , và cho mỗi một trong hai mặt  $\Sigma$  trên đây, định lí AMPÈRE dẫn xuất từ phương trình vi phân  $\text{rot } B = \mu_0 j$ , sẽ cho ta hai kết quả rời rạc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \quad \text{và} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Điện trường tạo nên bởi mạch điện này thực ra là không đáng kể trên tập hợp các mặt  $\Sigma_1$  và  $\Sigma_2$ , trừ trong khoảng giữa các bản tụ điện, mà ở đó điện trường gần như đều và có cùng biểu thức như ở chế độ không đổi (xem chương 2, áp dụng 3). Vậy nó có dạng :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_y,$$

trong đó  $\sigma$  là mật độ điện mặt của bản tụ điện diện tích  $S$  mang điện tích  $Q$  sao cho  $\sigma = \frac{Q}{S}$ .

Chú ý :

Các biểu thức này thích hợp trong khuôn khổ của phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng, và đối với một tụ điện rất dẹt (khoảng cách giữa các bản rất nhỏ so với bán kính các bản). Ta sẽ trở lại vai trò của phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng và tính đồng đều của trường trong áp dụng 3.

Lúc đó, ta có thể áp dụng định lí AMPÈRE suy rộng cho đường cong kín  $\Gamma$  và mặt  $\Sigma_1$  :

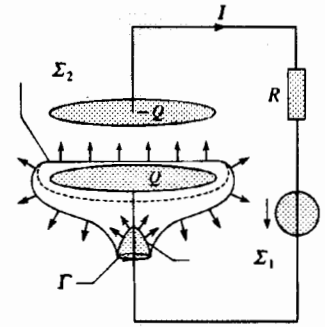
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \iint_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 I + 0. \end{aligned}$$

Áp dụng cho  $\Sigma_2$ , ta được :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \iint_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{\epsilon_0 S} \right) S \\ &= 0 + \mu_0 I \end{aligned}$$

Dòng điện dịch đã hiệu chỉnh đúng sự rời rạc ở trên.

► **Đề tập luyện : bài tập 1 :**



**H.5.** Sự tích tụ điện tích và áp dụng định lí Ampère suy rộng.

# 3 Bốn phương trình MAXWELL

## 3.1. Trường điện từ không đổi

Ở chế độ không đổi, trường điện từ gắn với các nguồn của nó bằng các

$$\text{định luật vi phân : } \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Ta có thể nghiên cứu độc lập nhau điện trường không đổi và từ trường không đổi, vì các phương trình này đã bị tách cặp.

## 3.2. Các phương trình MAXWELL

Ta đã chứng minh thiếu sót của hệ phương trình trên ở chế độ biến thiên và đã coi hai cải biên của các định luật đó như những tiên đề :

- việc đưa vào một sự kết nối đầu tiên giữa điện trường và từ trường dưới dạng phương trình MAXWELL - FARADAY ;

- việc đưa thêm dòng điện dịch vào phương trình MAXWELL - AMPÈRE.

Thực nghiệm chứng tỏ rằng các cải biên này là đủ để giải thích cách hoạt động của trường điện từ trong trường hợp tổng quát.

**Bốn phương trình MAXWELL, chi phối sự biến đổi cục bộ của trường điện từ trong mọi hệ quy chiếu Galilée, là :**

- phương trình MAXWELL - GAUSS (M-G) :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ;
- phương trình MAXWELL - AMPÈRE (M-A) :  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ;
- phương trình từ thông (M-Φ) :  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  ;
- phương trình MAXWELL - FARADAY (M-F) :  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  .

Các hằng số cơ bản :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \quad \text{và} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$$

nhận đúng hệ thức  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , trong đó  $c$  là vận tốc ánh sáng trong chân không.

Hai phương trình đầu tiên mà ta đã ghi (M-G) và (M-A) gắn trường điện từ với các nguồn  $\rho$  và  $\vec{j}$  của nó. Cách viết các phương trình đó dưới dạng tích phân là định lí GAUSS và định lí AMPÈRE suy rộng. Hai phương trình sau (M-Φ) và (M-F), không cho các nguồn của trường tham dự vào. Chúng thể hiện các tính chất nội tại của trường điện từ. Phương trình bảo toàn điện tích từ nay trở đi là một định luật cơ bản nằm trong nhóm các phương trình MAXWELL : ta có thể suy ra phương trình đó từ các phương trình MAXWELL - GAUSS và MAXWELL - AMPÈRE.

Chú ý :

Các phương trình MAXWELL tương ứng với sự mô tả tương tác điện từ bằng lí thuyết trường cổ điển, nghĩa là không bị lượng tử hóa. Một lí thuyết lượng tử của trường làm xuất hiện thêm khái niệm photon, là hạt truyền tương tác điện từ.

### 3.3. Sự vận động của các điện tích và của trường điện từ

#### 3.3.1. Các phương trình có ích

Lúc đầu, chuyển động của các điện tích còn xa lạ đối với chúng ta, nên nói chung, ta không thể nghiên cứu duy nhất trường điện từ, mà ta phải quan tâm đến sự vận động của toàn bộ "trường điện từ và các điện tích", vì :

- trường được gắn với các điện tích bởi các phương trình MAXWELL ;
- các điện tích được gắn với trường nhờ sự tham gia của lực LORENTZ trong sự vận động của chúng :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Việc nghiên cứu sự truyền sóng điện từ khi có mặt các điện tích linh động (xem H- prépa, Sóng, năm thứ hai) sẽ dẫn dắt ta áp dụng vào thực tế tập hợp các phương trình trên.

#### 3.3.2. Các phương trình về trường

Đối với một phân bố của điện tích và dòng điện bất buộc (ví dụ một anten vô tuyến được nuôi bởi một nguồn dao động, xem H.6), thì chúng ta chỉ việc tìm trường điện từ mà phân bố đó sinh ra. Ta sẽ thấu hiểu được sự vận động của trường điện từ, nếu ta giải được các phương trình MAXWELL khi biết mật độ điện tích  $\rho(\vec{r}, t)$  và một dòng điện  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ .

Ta có thể hình dung việc giải trực tiếp các định luật vi phân đi từ các phương trình MAXWELL. Muốn vậy, ta phải thiết lập các phương trình liên hệ riêng rẽ các trường  $\vec{E}$  và  $\vec{B}$ .

Lấy rota của phương trình MAXWELL - FARADAY và phương trình MAXWELL - AMPERE, ta được lần lượt :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\text{rot}}\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

$$\text{và} \quad \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}\vec{B}) = \mu_0 \overline{\text{rot}}\vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\text{rot}}\vec{E}) = \mu_0 \overline{\text{rot}}\vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Khi dùng đồng nhất thức của phép lấy đạo hàm vector

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}\vec{A}) = \overline{\text{grad}}(\overline{\text{div}}\vec{A}) - \Delta \vec{A},$$

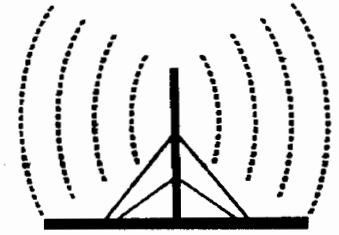
Và hai phương trình MAXWELL khác, ta suy ra, với  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \overline{\text{grad}}\rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t};$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overline{\text{rot}}\vec{j}.$$

Trái với trường hợp các phân bố không đổi, mật độ dòng điện  $j$  lại có mặt trong phương trình đối với điện trường. Nói đúng hơn, đó là các biến thiên thời gian của  $\vec{j}$  đã đóng góp vào việc tạo ra trường  $\vec{E}$ .

Thực tế, ta biết rằng một dòng điện biến thiên sinh ra một từ trường biến thiên. Từ trường biến thiên này lại tự cảm một điện trường mà rota của nó được xác định bởi phương trình MAXWELL - FARADAY.



H.6. Bức xạ sóng điện từ bởi một anten.

### 3.3.3. Sự lan truyền của trường điện từ

Qua việc nghiên cứu các chế độ không đổi, ta đã quen thấy xuất hiện các đạo hàm cấp hai trong các phương trình vi phân dưới dạng toán tử laplacien  $\Delta$  (các phương trình POISSON đã gặp ở chương 2).

Việc kể đến dòng điện dịch đã đưa vào một số hạng bổ sung  $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  :

ở đây, toán tử laplacien trở thành toán tử d' alembert.

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Ta đã đưa vào dòng điện này để hiệu chỉnh thiếu sót của các phương trình trường : Xét về mặt hình thức, thì đây có vẻ là một cách sửa tạm thời cho phép buộc thực sự các phương trình thành một gói ... Nhưng không đúng thế ! Ta sẽ thấy rằng phép lấy đạo hàm riêng này cho phép giải thích sự lan truyền các sóng điện từ. Hơn nữa, sự lan truyền này được thực hiện với vận tốc  $c$ , trong chân không, trong tất cả các hệ quy chiếu Galilée (xem *H-prépa, Sóng, năm thứ hai*)

Các phương trình MAXWELL trong chân không cho phép giải thích hiện tượng lan truyền các sóng điện từ với vận tốc  $c$  trong mọi hệ quy chiếu galilée.

Tính phổ biến của vận tốc lan truyền này mâu thuẫn rõ ràng với định luật cộng các vận tốc galilée. Sự khám phá này của MAXWELL, được thực nghiệm xác nhận, đã kéo theo việc thay thế vật lí galilée bằng vật lí tương đối tính do EINSTEIN phát triển : Các phương trình MAXWELL đều tương thích với vật lí tương đối tính.

Các phương trình MAXWELL đều tương thích trong gần đúng phi tương đối tính, với các định luật của cơ học cổ điển. Trong phép gần đúng này, ta vẫn có thể tiếp tục dùng hệ thức cơ bản của động lực học cổ điển để nghiên cứu chuyển động của các hạt tích điện dưới tác dụng của một trường điện từ.

## Áp dụng 2

### Phép gần đúng phi tương đối tính

Một dây dẫn thẳng dài vô hạn, có mật độ điện dài  $\lambda$ , mang bởi trục  $(Oz)$ , chuyển động với vận tốc không đổi  $\vec{v} = v\vec{e}_z$  (với  $v \ll c$ ) trong một hệ quy chiếu Galilée  $\mathcal{R}$ .

1) Tìm trường điện từ  $(\vec{E}, \vec{B})$  sinh ra bởi phân bố này của các điện tích và các dòng điện trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  ?

2) Hay xác định căng trường điện từ đó trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$  gắn với dây dẫn, theo hai cách khác nhau :

a) bằng cách tính toán trực tiếp trong  $\mathcal{R}'$  ; ta ký hiệu kết quả thu được bởi  $(\vec{E}', \vec{B}')$  ;

b) bằng cách dùng các công thức biến đổi Galilée về trường (xem 1.1.) ; ta ký hiệu kết quả thu được bằng  $(\vec{E}'', \vec{B}'')$

c) Hai kết quả trên có phù hợp nhau không ? Hay biện luận.

3) Một hạt phi tương đối tính có điện tích  $q$  chuyển động với vận tốc  $\vec{v}'$  trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$ . Tìm các biểu thức của lực  $\vec{F}'$  và  $\vec{F}''$  do

trường của dây dẫn tác dụng lên hạt đó trong  $\mathcal{R}'$ , ta có suy ra các kết quả trước đây không? Hãy đưa ra một sự giải thích cho phép loại bỏ rời rạc (sự không kết hợp) của hai biểu thức đó.

1) Dây dẫn đang chuyển động tạo thành một phân bố không đổi các điện tích và dòng điện: dây dẫn thẳng mật độ điện dài  $\lambda$ , có dòng điện  $i = \lambda v$  chạy qua. Trường điện từ nhìn thấy trong  $\mathcal{R}$  được suy ra ngay:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} \quad \text{và} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r}.$$

2) a) Trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$ , dây dẫn đứng yên và ta thu được ngay:

$$\vec{E}' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} \quad \text{và} \quad \vec{B}' = \vec{0}$$

b) Khi dùng các công thức biến đổi Galilée của trường, ta thu được trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}''$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}'' &= \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} + v \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\vec{e}_r}{r} \end{aligned}$$

$$\text{và} \quad \vec{B}'' = \vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi} \frac{\vec{e}_\theta}{r}.$$

c) Các kết quả này rõ ràng là không tương thích với những điều trước đó:

$$\vec{E}'' \neq \vec{E}' \quad \text{và} \quad \vec{B}'' \neq \vec{B}'$$

Các biểu thức  $(\vec{E}, \vec{B})$  và  $(\vec{E}', \vec{B}')$  được suy ra từ các phương trình MAXWELL, như vậy sẽ không tuyệt đối tương thích với các công thức

biến đổi Galilée của trường mà ta đã dựng nên ở đầu chương này, trong khuôn khổ của cơ học cổ điển: các phương trình MAXWELL không tương thích với cơ học cổ điển.

3) Khi dùng  $(\vec{E}', \vec{B}')$ , ta được:

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r};$$

Với  $(\vec{E}'', \vec{B}'')$ , thì ta có:

$$\begin{aligned} \vec{F}'' &= q(\vec{E}'' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'') \\ &= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\vec{e}_r}{r} + \frac{v\vec{v}'}{c^2} \wedge \vec{e}_\theta \right]. \end{aligned}$$

Biểu thức này không tương thích với biểu thức trước:  $\vec{F}'' \neq \vec{F}'$ .

Tuy nhiên, trong gần đúng phi tương đối tính, khi  $\frac{v}{c}$  và  $\frac{v'}{c}$  tiến tới 0, ta cũng vẫn được:

$$\vec{F}'' \rightarrow \vec{F}'$$

Thành thử các phương trình MAXWELL vẫn tương thích với cơ học cổ điển trong gần đúng phi tương đối tính.

Chú ý:

Ta đã xây dựng các công thức biến đổi Galilée của trường sao cho nhận được:

$$\vec{F}'' = \vec{F}',$$

trong đó  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  là lực LORENTZ được biểu thị trực tiếp trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$ .

Biểu thức  $\vec{F}''$ , khác với  $\vec{F}'$ , chỉ là một biểu thức gần đúng của lực đó trong  $\mathcal{R}'$ . Thành thử, trong vật lý tương đối tính, lực sẽ không còn là một đại lượng bất biến khi thay đổi hệ quy chiếu Galilée.

### 3.4. Các điều kiện ở giới hạn

Bằng cách dùng các tính chất tích phân của trường điện từ, ta đã thiết lập được các biểu thức về các gián đoạn (các bất liên tục) của trường điện từ không đổi, khi đi qua một phân bố theo diện tích của các điện tích và dòng điện (xem H-Prépa, Điện từ học, năm thứ nhất). Ta đề nghị suy rộng các kết quả đó ở đây.

#### 3.4.1. Các thành phần pháp tuyến của trường

Xét một mặt tích điện đều, ngăn cách hai môi trường kí hiệu là 1 và 2.



Kí hiệu  $dS$  là một phần tử của lớp đó, có kích thước đủ nhỏ để có thể được coi như một diện tích nhỏ phẳng mang mật độ điện mặt và mật độ dòng điện mặt đồng đều cục bộ  $\sigma$  và  $\vec{j}_s$ .

Ta hãy xét mặt khép kín  $\Sigma$  biểu diễn trên (H.7). Nó có dạng một hình trụ nhỏ mà mặt trên là diện tích  $dS_2$  và mặt đáy là diện tích  $dS_1$ , nhận được bằng cách tịnh tiến diện tích  $dS$  về phía (độ cao  $h$ ) của lớp điện tích và dòng điện phân cách hai môi trường.

### ■ Điện trường

Điện thông đi qua mặt kín này được xác định bởi định lí GAUSS :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \text{thông lượng bên} = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} dS + \left( \begin{array}{l} \text{các diện tích} \\ \text{khác trong} \\ \text{hình trụ} \end{array} \right).$$

Để có được hệ thức liên kết các thành phần của trường ở các phía của lớp mang điện, ta sẽ xét giới hạn khi  $h$  tiến tới 0 : các kích thước của  $dS$  đều vô cùng nhỏ cấp 1, nhưng vẫn lớn so với  $h$ . Trong các điều kiện này, diện tích bên trong  $\Sigma$  là  $\sigma dS$  và thông lượng của trường đi qua  $\Sigma$  bị giới hạn ở thông lượng đi qua  $dS_1$  và  $dS_2$ , nghĩa là :

$$\vec{E}_2 \cdot (\vec{N}_{1 \rightarrow 2} dS) + \vec{E}_1 \cdot (-\vec{N}_{1 \rightarrow 2} dS) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} dS.$$

Từ đó ta suy ra hệ thức giữa các thành phần pháp tuyến của trường, ở bên này và bên kia lớp mang điện, chiếu trên pháp tuyến  $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  (vector đơn vị pháp tuyến với bề mặt, được định hướng từ môi trường 1 sang môi trường 2) :

$$\vec{E}_{2\perp} - \vec{E}_{1\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$

### ■ Từ trường

Từ trường có divergence bằng không : thông lượng của nó đi qua mặt kín  $\Sigma$  bằng không. Từ đó, khi  $h$  tiến tới 0, ta suy ra ngay :

$$\vec{B}_{2\perp} - \vec{B}_{1\perp} = \vec{0}.$$

### 3.4.2. Các thành phần tiếp tuyến của trường

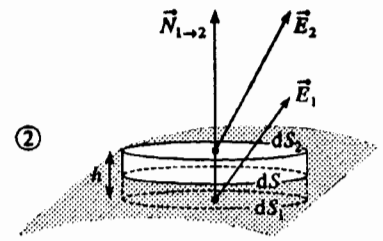
Bây giờ ta xét một đường cong kín nhỏ hình chữ nhật  $\Gamma$  như đã chỉ trên hình 8, đi qua về phía này và phía kia của bề mặt ngăn cách các môi trường 1 và 2.

### ■ Điện trường

Theo phương trình MAXWELL-FARADAY, lưu thông của điện trường trên đường cong kín đó là :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

trong đó, mặt  $\Sigma$  là một mặt có định hướng dựa lên đường cong kín  $\Gamma$ . Nếu kích thước  $d\vec{l}$  của đường cong kín khá nhỏ, thì điện trường có thể được coi là đều ở mỗi phía cùng trên đường thẳng với  $d\vec{l}$  của hình chữ nhật. Trường này sẽ được kí hiệu bằng  $\vec{E}_1$  hay  $\vec{E}_2$  theo môi trường. Hơn nữa, ta chỉ quan tâm đến mối liên hệ giữa các trường đó ở hai phía của mặt phân cách, nghĩa là khi  $h$  tiến tới 0.

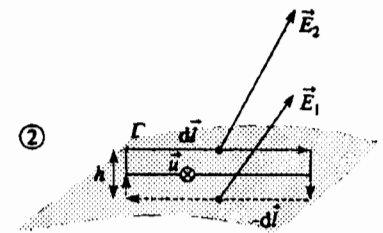


①

H.7. Giao diện phân cách hai môi trường.

- thành phần pháp tuyến của  $\vec{E}$  bị gián đoạn ;

- thành phần pháp tuyến của  $\vec{B}$  là liên tục.



①

H.8. Giao diện phân cách hai môi trường :

- thành phần tiếp tuyến của  $\vec{E}$  là liên tục ;

- thành phần tiếp tuyến của  $\vec{B}$  là gián đoạn.

Các phần đóng góp chủ yếu vào lưu thông của trường trên đường cong kín, tương ứng với các chuyển dời  $\pm d\vec{l}$  ở bên này và bên kia diện tích.

Vậy ta được :

$$\left( \oint_{\Gamma} \vec{E}.d\vec{l} \right)_{h \rightarrow 0} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1).d\vec{l}.$$

Ta chọn diện tích chữ nhật kết hợp tự nhiên với một khung nhỏ làm bề mặt. Diện tích của nó là  $hdl$ , và cũng tiến tới không như  $h$ . Từ trường có thể bị gián đoạn trên mặt đó, nhưng vẫn là hữu hạn (cũng như đạo hàm của nó theo thời gian) sao cho :

$$\left( \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S} \right)_{h \rightarrow 0} = 0.$$

So sánh các kết quả này, sự định hướng của phần tử  $d\vec{l}$  là tùy ý trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt phân cách, ta suy ra từ đó sự liên tục của các thành phần tiếp tuyến của điện trường đi qua mặt đó.

Thành thử ta viết được :

$$\vec{E}_{//2} = \vec{E}_{//1} \quad \text{hay} \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

### ■ Từ trường

Theo phương trình MAXWELL-AMPERE, ta có :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}.d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}.$$

Cũng lập luận như trên và nếu ta đảo ngược các vai trò của điện trường và từ trường, thì ta sẽ có ở đây :

$$\left( \oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{l} \right)_{h \rightarrow 0} = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1).d\vec{l}.$$

và

$$\epsilon_0 \mu_0 \left( \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S} \right)_{h \rightarrow 0} = 0.$$

Ở đây, ta phải kể đến phần đóng góp của dòng điện đi qua đường cong kín  $\Gamma$ , được nối liền, khi  $h$  tiến tới 0, với dòng điện bề mặt chạy qua lớp ngăn cách hai môi trường (H.9)

$$\begin{aligned} \mu_0 \left( \iint_{\Sigma} \vec{j}.d\vec{S} \right)_{h \rightarrow 0} &= \mu_0 (\vec{j}_s \cdot \vec{u} dl) \\ &= \mu_0 \vec{j}_s \cdot (\vec{N}_{1 \rightarrow 2} \wedge d\vec{l}) \\ &= \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}).d\vec{l}. \end{aligned}$$

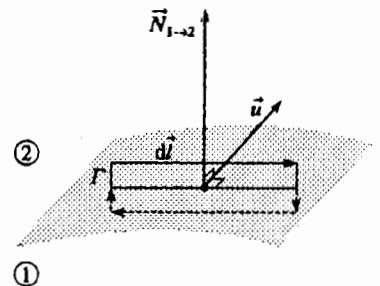
Từ đó ta suy ra :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1).d\vec{l} = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}).d\vec{l},$$

cho dù vectơ nguyên tố  $d\vec{l}$  định hướng như thế nào trong mặt phẳng tiếp tuyến với giao diện của hai môi trường

Điều đó dẫn tới sự gián đoạn của các thành phần tiếp tuyến của từ trường.

$$\vec{B}_{//2} - \vec{B}_{//1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$



H.9. Vector  $\vec{u}$  kí hiệu vector đơn vị pháp tuyến với đường cong kín chữ nhật  $\Gamma$  :

$$\vec{N}_{1 \rightarrow 2} \wedge d\vec{l} = \vec{u} dl.$$

B.93  
B.94  
B.95  
B.96  
B.97  
B.98  
B.99  
B.100

### 3.4.3. Tính gián đoạn của trường điện từ

Khi đi qua một lớp, phân cách hai môi trường 1 và 2, mang mật độ điện mặt  $\sigma$  và mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s$ , thì trường điện từ biểu thị một sự gián đoạn hữu hạn :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2},$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}.$$

*Chú ý :*

Các thế vô hướng  $V$  và vector  $\vec{A}$  (xem §4) là những "căn nguyên" của trường điện từ ; ngay cả khi trường có những gián đoạn hữu hạn có thể xảy ra, thì các "thế" này, về phần chúng, vẫn là liên tục.

Các sự gián đoạn này của trường là giá tạo, gắn với tính chất bề mặt của các mô hình mô tả các trường (tạo nên trường điện từ) và các dòng. Trong trường hợp một mô hình theo thể tích, thì trường điện từ là liên tục.

## 4 Các thế vô hướng $V$ và vector $\vec{A}$

### 4.1. Cấu trúc bản chất của trường điện từ

Phương trình từ thông bảo đảm sự tồn tại của một thế vector :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Mặt khác, phương trình MAXWELL-FARADAY làm xuất hiện một trường gradien :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} V.$$

Các phương trình thực chất của trường điện từ (M- $\Phi$  và M-F) bảo đảm sự tồn tại của một thế vô hướng  $V$  và một thế vector  $\vec{A}$  như :

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ và } \vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Từ trường, cũng như ở chế độ không đổi, vẫn là một trường xoáy. Nhưng điện trường không phải là một trường gradien đơn giản nữa : lưu thông của nó không còn bảo đảm nữa ở chế độ biến thiên.

### 4.2. Các phương trình về các thế

Khi dùng hai phương trình MAXWELL khác, ta có thể liên kết các thế với các nguồn :

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div} \vec{E} = \text{div} \left( -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A});$$

$$\mu_0 \vec{j} = \text{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \text{grad} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

Ta có thể sắp xếp lại các phương trình này dưới dạng đối xứng hơn :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}.$$

Các thế không phải là duy nhất. Ta có thể áp đặt một điều kiện mốc đo, mà không ngăn cấm sự tồn tại của các thế. Việc chọn mốc đo COULOMB :  $\text{div} \vec{A} = 0$ , tuy thuận tiện ở chế độ không đổi hay chuẩn dừng nhưng không làm đơn giản đáng kể các phương trình về thế.

Ở đây, ta coi trọng điều kiện mốc đo LORENTZ hơn :

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Với việc chọn mốc đo Lorentz :  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , các thế vô hướng

và vector liên kết với các điện tích và dòng điện bởi các phương trình tách cặp riêng rẽ :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{và} \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

### 4.3. Các thế trễ

Các phương trình này khác các phương trình POISSON nhận được ở chế độ không đổi bởi số hạng  $\ll \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gg$ . Ta thừa nhận rằng các nghiệm

(H.10) :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\rho \left( P, t - \frac{PM}{c} \right) d\tau}{PM}$$

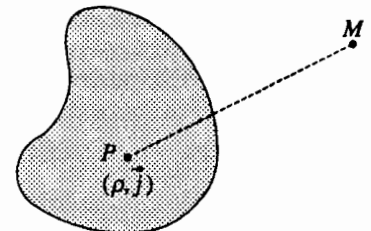
và

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\vec{j} \left( P, t - \frac{PM}{c} \right) d\tau}{PM},$$

cấu thành các nghiệm có thể chấp nhận được về mặt vật lí, được gọi là các thế trễ.

Các nghiệm này đồng dạng với các nghiệm mà ta đã mô tả ở chương 2 trong trường hợp các chế độ không đổi, nhưng trạng thái các nguồn ở điểm P chưa được cảm nhận tức thời tại điểm quan sát M. Thực ra, độ lệch thời gian  $\Delta t = \frac{PM}{c}$  tương ứng với thời gian cần thiết để truyền thông tin từ điểm P đến điểm M với vận tốc c.

Các thế trễ làm thành các nghiệm của các phương trình về thế. Chúng hợp nhất các hiệu ứng của vận tốc truyền tin hữu hạn.



H.10 : Sự quan sát từ M một phân bố theo thể tích của các điện tích và dòng điện.

# 5 Phép tính gần đúng các chế độ chuẩn dừng (GĐ.C.C.D.)

## 5.1. Trường tức thời

Sự chậm trễ của việc truyền tin, trong một môi trường có kích thước đặc trưng  $L$ , là vào cỡ  $\frac{L}{c}$ . Độ lệch thời gian này là không đáng kể (H.11) nếu thời gian đặc trưng cho sự biến đổi  $T$  của các đại lượng vật lí lớn hơn nó rất nhiều:  $T \gg \frac{L}{c}$ .

Trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng, ta bỏ qua sự chậm trễ của việc truyền tin. Vấn đề chính là sự gần đúng của vận tốc lan truyền vô hạn:

$$c \rightarrow \infty$$

Như vậy, trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng, thì mốc đo LORENTZ trùng với mốc đo COULOMB, và các phương trình về thế trùng với các phương trình POISSON đã xét ở chương 2. Các thế trễ lúc đó được coi như các thế "tức thời" đã được mô tả trong trường hợp các chế độ không đổi. Các biểu thức gần đúng:

$$V(M,t) = \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\rho(P,t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\tau}{PM} \quad \text{và} \quad \vec{A}(M,t) = \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P,t)}{4\pi} \frac{d\tau}{PM}$$

ở đây là đủ để xác định trường điện từ.

Từ trường là  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Các phép lấy đạo hàm chỉ được áp dụng cho các biến số không gian. Như vậy, ta thấy từ trường tức thời chính là từ trường xác định bởi định luật BIOT và SAVART (H.12)

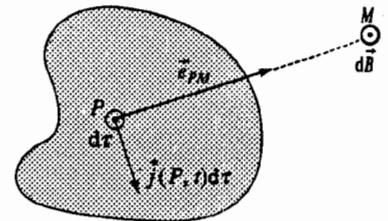
$$\vec{B}(M,t) = \iiint_{\text{phân bố}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P,t) d\tau}{4\pi} \wedge \frac{\vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

Trái lại, điện trường  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , ngay cả trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng, cũng không đồng nhất với một trường COULOMB "tức thời".

Tần số tv (Hz)	Chu kì (s) $T = \frac{1}{\nu}$	Bước sóng (m) $\lambda = cT$ $= \frac{c}{\nu}$
50	$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^6$
$10^5$	$10^{-5}$	300

H.11: Phạm vi hiệu lực của phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng đối với các tín hiệu hình sin:

$$L \ll \lambda$$

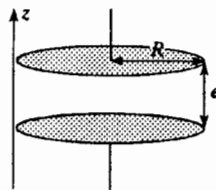


H.12. Từ trường của một phân bố các dòng điện.

# Áp dụng 3

Tụ điện được cung cấp bởi nguồn nuôi cao tần

Một tụ điện phẳng (H.13) được cấu thành bởi hai tấm tròn, trục ( $Oz$ ) và bán kính  $R$ , đặt cách nhau một khoảng  $e$  khá nhỏ so với  $R$ , được nuôi bởi một nguồn phát điện áp hình sin, xung động  $\omega$ .



H.13. Tụ điện phẳng.

1) Đối với hệ đối xứng trụ này, ta sẽ viết điện trường dưới dạng:

$$\vec{E} = E(r) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Tìm phương trình vi phân để hàm  $E(r)$  nghiệm đúng?

Xác định hàm này dưới dạng khai triển đầy đủ thành chuỗi lũy thừa của biến số không thứ nguyên  $x = \frac{r\omega}{c}$ .

2) Cho  $\omega = 20 \pi$  MHz và  $R = 5$  cm, ta có thể nói gì về hàm  $E(r)$  ở bên trong tụ điện?  
 Phép gần đúng các chế độ chuẩn dùng có thích hợp không?

3) Tìm giá trị từ trường ở bên trong tụ điện?

Dữ liệu: trong tọa độ trụ  $(r, \theta, z)$ , laplacien của một hàm  $f(r, \theta, z)$  là:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1) Trong không gian không có điện tích ở giữa các bản của tụ điện thì điện trường sẽ nghiệm đúng phương trình:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{E} = \left( \Delta E(r) + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) \right) \bar{e}_z \\ &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E(r)}{\partial r} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) \right] \bar{e}_z, \end{aligned}$$

nghĩa là 
$$\frac{\partial^2 E(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E(r)}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) = 0.$$

Nếu ta tìm một nghiệm có dạng:

$$E(r) = \sum_n a_n x^2,$$

thì ta được  $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$ , với  $a_1 = 0$  và  $a_0 = E_0$ ,

là giá trị của trường trên trục  $(Oz)$ .

Như vậy, nghiệm tìm được có dạng:

$$E(r) = E_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} (p!)^2} \left( \frac{r\omega}{c} \right)^{2p}.$$

2) Trường hợp về số xét trên tương ứng với  $X = \frac{R\omega}{c} = 10^{-3}$ ; điều này cho một điện trường gần đều ở bên trong tụ điện (h.14). Ta có đúng  $T \gg \frac{R}{c}$ , để phép gần đúng các chế độ chuẩn

dùng có thể chấp nhận được ở đây (Việc bỏ qua các hiệu ứng bờ rất có nguy cơ làm cho phép gần đúng rõ ràng là kém hiệu quả).

Chú ý:

Nhớ rằng điều kiện lực của phép gần đúng các chế độ chuẩn dùng cũng có thể được viết  $R \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$ , nghĩa là  $R \ll \lambda$ , trong đó  $\lambda$  là bước sóng của một sóng điện từ có xung động  $\omega$  trong chân không.

3) Trong tụ điện, đối với bài toán hình học trụ ở đây, thì từ trường có dạng:

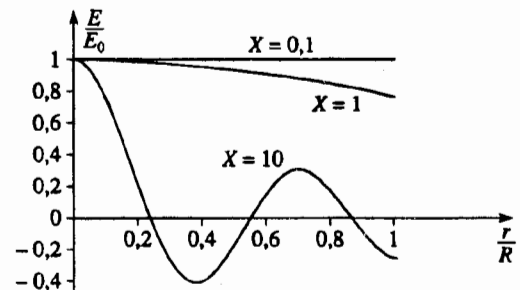
$$\bar{B} = B(r, t) \bar{e}_\theta.$$

Định lí AMPERE suy rộng cho ta thấy lưu thông của từ trường trên một vòng tròn bán kính  $r$  ( $r < R$ ) và trục  $(Oz)$  bằng thông lượng của dòng điện dịch đi qua đĩa tương ứng, nhân với  $\mu_0$ , nghĩa là:

$$2\pi r B(r, t) = \mu_0 r^2 [-\omega \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t)].$$

Lúc đó, từ trường có giá trị:

$$\bar{B} = -\frac{1}{2} \frac{r\omega}{c} \frac{E_0}{c} \sin(\omega t) \bar{e}_\theta.$$



H.14: Sự biến đổi của tỉ số  $\frac{E}{E_0}$  theo biến số rút

gọn  $\frac{r}{R}$ , đối với những giá trị khác nhau của tham

số  $X = \frac{R\omega}{c}$ .

## 5.2. Phép gần đúng các chế độ chuẩn dùng (GĐ.C.C.D) trong các vật dẫn

### 5.2.1. Phép GĐ.C.C.D. trong điện học

Đối với một mạch điện có kích thước  $L$  cỡ 10 cm, thì phép GĐ.C.C.D có thể áp dụng được nếu thời gian đặc trưng cho sự biến  $T$  nghiệm đúng:

$T \gg \frac{L}{c} \approx 3.10^{10} s$ . Điều này tương ứng với các tần số thấp hơn GHz, ở chế độ hình sin.

1.928.1928

Phép G.Đ.C.C.D là phép gần đúng ít có tính chất bắt buộc trong điện từ, nhưng lại hoàn toàn được chứng thực trong kỹ thuật điện (vận tốc quay của một động cơ nhiều nhất cũng chỉ vài ngàn vòng phút)

### 5.2.2. Định luật OHM

Trong các mạch điện này, các dây dẫn đều bằng đồng là kim loại dẫn điện tốt mà thời gian tích thoát  $\tau$  lại vào cỡ  $10^{-14} s$ . Và lại, ta còn biết rằng, trong một dây dẫn, định luật OHM có thể áp dụng được nếu thời gian T đặc trưng cho sự biến đổi của hệ nghiệm đúng  $T \gg \tau$ . Các độ lớn của thời gian đặc trưng T mà ta vừa xét, sẽ cho phép ta phát biểu tính chất sau đây :

**Trong các mạch điện, định luật OHM sẽ có hiệu lực khi phép G.Đ.C.C.D được chứng thực**

### 5.2.3. Dòng điện dịch trong dây dẫn

Ở trong lòng một dây dẫn thuần trở cố định thì dòng điện là  $j = \gamma E$  khi định luật OHM có thể sử dụng được.

Lúc đó, phương trình MAXWELL-AMPÈRE, ở trong lòng dây dẫn, có dạng:

$$\overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_0) = \mu_0 \left( \gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Đối với một thời gian đặc trưng cho sự biến đổi T, ta có thể so sánh các dòng điện dẫn và dòng điện dịch trong dây dẫn như sau :

$$\frac{|\vec{j}|}{|\vec{j}_D|} \approx \frac{|\gamma \vec{E}|}{\left| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|} \approx \frac{\gamma E}{\epsilon_0 \frac{E}{T}} = \frac{\gamma T}{\epsilon_0}$$

Đối với đồng, độ dẫn điện  $\gamma \approx 6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$ , thì tỷ số này cỡ  $10^{18} T$ , với T tính ra giây (nghĩa là lớn hơn  $10^8$  lần khi T vào cỡ  $10^{10} s$ ).

Đối với các chế độ biến đổi chứng thực việc sử dụng định luật OHM, thì dòng điện dịch, ở trong lòng dây dẫn thuần trở, sẽ không đáng kể trước dòng điện dẫn  $|\vec{j}_D| \ll |\vec{j}|$

## 5.3. Các phương trình MAXWELL trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dùng (G.Đ.C.C.D)

Đối với một mạch điện dùng trong phép G.Đ.C.C.D, ta có thể bỏ qua dòng điện dịch trước dòng điện dẫn. Vì vậy, phương trình MAXWELL-AMPÈRE sẽ có dạng gần đúng :  $\overline{\text{rot}} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$

Các phương trình MAXWELL trong phép G.Đ.C.C.D. :

- phương trình MAXWELL - GAUSS (M-G) :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ;
- phương trình MAXWELL-AMPÈRE (M-A) :  $\overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  ;
- phương trình từ thông (M-Φ) :  $\text{div} \vec{B} = 0$  ;
- phương trình MAXWELL-FARADAY (M-F) :  $\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ;

mô tả sự vận động của trường điện từ trong khuôn khổ của phép G.Đ.C.C.D.

• Từ trường nghiệm đúng cùng những phương trình (M-A) và (M-Φ) như ở chế độ không đổi. Ví dụ, định luật BIOT và SAVART vẫn có thể áp dụng được trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng (GĐ.C.C.D)

• Điện trường và từ trường, mặc dù có sự đơn giản hóa của phương trình MAXWELL-AMPÈRE, vẫn được ghép cặp bởi phương trình MAXWELL-FARADAY : một biến thiên theo thời gian của từ trường lại gây cảm ứng một điện trường.

• Nói rằng phương trình MAXWELL-AMPÈRE được đơn giản hóa tương ứng với phạm vi của phép GĐ.C.C.D là một sự lạm dụng ngôn ngữ thông thường. Ví dụ, một tụ điện có thể hoạt động trong phép GĐ.C.C.D (Xem áp dụng 3), trong khi bất đẳng thức  $|j| \gg |j_D|$  lại không có giá trị giữa các bản của tụ điện, vì dòng điện dẫn bằng không !

Trái lại, cách viết này lại có giá trị trong các dây dẫn, vậy là trong các mạch điện, nếu các đường dòng không bị cắt bởi các bề mặt. Ta lại tìm thấy ở đây sự bảo toàn thông lượng của  $j(\text{div} j = 0)$  kết hợp với hiệu lực của phương trình MAXWELL-AMPÈRE đã được đơn giản hóa.

Lúc đó, các phương trình này sẽ cho phép ta thể hiện hiện tượng cảm ứng điện từ bằng cách viết phương trình điện mô tả sự hoạt động của mạch điện đang xét.

## 5.4. Hiệu ứng mặt ngoài

### 5.4.1. Phương trình khuếch tán của trường

Ta tìm cách mô tả cách hoạt động của trường điện từ ở trong lòng một dây dẫn thuần trở tốt (độ dẫn điện  $\gamma$ ) trong phép GĐ. C.C.D, nhờ một mô hình một chiều : kim loại chiếm miền không gian ( $z > 0$ ), và từ trường có dạng (H.15) :  $\vec{B}(\vec{r}, t) = B(z, t)\vec{e}_y$ .

Định luật OHM có dạng  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , và dòng điện dẫn này, ở trong lòng kim loại, lớn hơn nhiều so với dòng điện dịch MAXWELL, từ đó :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

Muốn loại bỏ điện trường, ta lấy rota cả hai vế của phương trình này :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Từ trường, có divergence bằng không, như vậy sẽ nghiệm đúng phương trình :

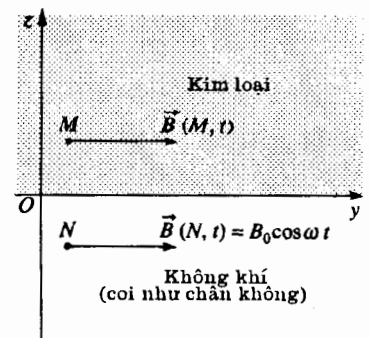
$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Đối với  $\vec{j}$  và  $\vec{E}$  cũng thế.

Phương trình này đồng dạng với phương trình khuếch tán nhiệt trong một vật liệu đồng chất có hệ số khuếch tán  $D$  (xem H. prépa, nhiệt động học, năm thứ hai) :  $\Delta T = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$ .

### 5.4.2. Chiều dày mặt ngoài

Ta giả thiết tồn tại trong không khí, và như vậy là tồn tại ở bề mặt dây dẫn (hiển nhiên là ở đây không có dòng điện theo bề mặt :  $j_s = 0$ ), một từ trường  $\vec{B}(z \leq 0, t) = \vec{B}_0 \cos \omega t$ , và ta đang ở chế độ hình sin đã được thiết lập. Do đó, muốn giải phương trình vi phân tuyến tính, có hệ số không phụ thuộc thời gian, được nghiệm đúng bởi trường, thì tiện nhất là sử dụng kí hiệu phức :  $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$  với  $\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{b}(z)e^{j\omega t}\vec{e}_y$ .



H.15. Từ trường trong một dây dẫn thuần trở.



Khi đó, ta sẽ nhận được phương trình vi phân :  $\frac{d^2 b(z)}{dz^2} = j\mu_0\gamma\omega b(z)$ .

Nghiệm  $b(z)$  có dạng :  $b(z) = b_1 e^{-\alpha z} + b_2 e^{+\alpha z}$ , với  $\alpha^2 = j\mu_0\gamma\omega$ , vậy

$$\alpha = \sqrt{\mu_0\gamma\omega} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\delta}, \text{ do đó } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}.$$

Đại lượng  $\delta$ , đồng chất về một chiều dài, gọi là *chiều dày mặt ngoài*.

Dây dẫn chứa một nửa không gian ( $z > 0$ ) và trường không thể phân kỳ khi  $z$  tiến tới vô cùng, vậy  $b_2 = 0$ . Hơn nữa, giá trị của trường ở  $z = 0$  (trường là liên tục đối với mô hình dẫn điện theo thể tích này) cho phép ta xác định  $b_1 = B_0$ .

Cuối cùng, ta được :

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = B_0 e^{j\omega t - \alpha z} \vec{e}_y, \text{ vậy } \vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_y.$$

Số hạng  $\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$  có cùng giá trị ở thời điểm  $t$  và ở hoành độ  $z$  cũng

như ở thời điểm  $t + dt$  và ở hoành độ  $z + dz$ , với  $dz = (\omega\delta) dt = vdt$ .

Như vậy, thừa số này tương ứng với sự lan truyền của trường điện từ biến thiên có xung động  $\omega$  với vận tốc  $v = \omega\delta$ , trong dây dẫn.

Số hạng  $e^{-\frac{z}{\delta}}$  chỉ cho ta rõ là sự lan truyền này được kèm theo một sự suy giảm : trường điện từ tương tác với các điện tích của môi trường dẫn điện, và năng lượng chứa trong *sóng* điện từ này được chuyển hóa dần dần nhờ hiệu ứng JOULE.

Chiều sâu đặc trưng cho sự xuyên thấu của từ trường là chiều dài  $\delta$  (H.16a).

Chú ý :

*Sự lan truyền kèm theo hấp thụ này cũng tương tự như hiện tượng mà ta đã quan sát trong trường hợp một sóng nhiệt khuếch tán vào trong đất (xem H. Prépa, Nhiệt động học, năm thứ hai). Thật vậy, ta đã nhận xét thấy hai bài toán này đều bị chi phối bởi một phương trình khuếch tán.*

Xét trường hợp của một dây dẫn điện tốt như đồng có độ dẫn điện  $\gamma = 6.10^7 S.m^{-1}$ . Hình 16b chỉ rõ một số giá trị của chiều dày  $\delta$  đối với các tần số từ 10 Hz đến 1 THz, mà đối với chúng, thì định luật OHM có thể áp dụng được (thời gian tích thoát của môi trường vào cỡ  $10^{-14} s$ ).

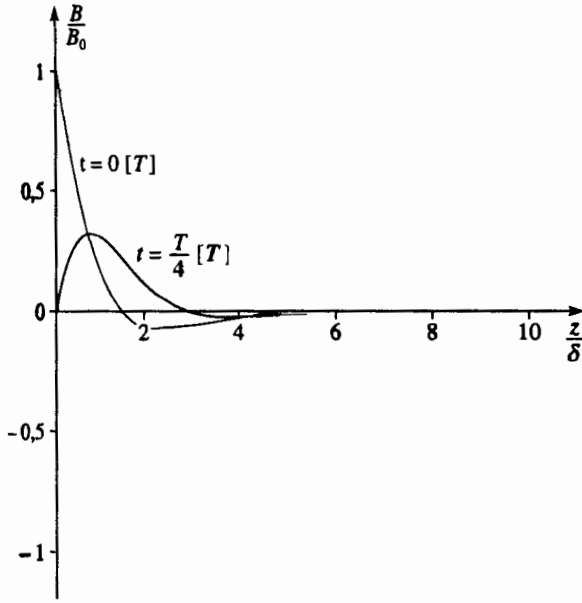
Ta nhận thấy rằng chiều dày mặt ngoài giảm khi tần số tăng. Ở cao tần, từ trường (cũng như điện trường và các dòng điện dẫn) được định xứ trong một màng mỏng chiều dày cỡ  $\delta$ , ở lân cận bề mặt dây dẫn. Điều này giải thích tên gọi chiều dày mặt ngoài đặt cho chiều dài  $\delta$ .

Chú ý :

• Nhớ rằng ở tần số rất cao, thì không có khả năng truyền một tín hiệu điện từ ở bên trong các dây dẫn. Khi nghiên cứu các sóng điện từ, ta sẽ thấy có thể dự kiến cho các sóng lan truyền trong chân không (hay trong không khí), hay kể cả dẫn các sóng điện từ dọc theo các bề mặt dây dẫn.

• Ở tần số cao, sự dẫn điện được thực hiện trên các bề mặt rất mỏng : lúc đó ta sẽ đứng trước các dòng điện có thể mô hình hóa được bằng các dòng điện bề mặt.

• Dây dẫn chống lại sự xâm nhập của trường biến thiên ở trong lòng nó (giống như đất chống lại các sự biến thiên hàng ngày hay hàng năm của nhiệt độ do không khí áp đặt vào lớp tiếp xúc không khí - đất). Ta sẽ xét lại hiệu ứng này, thể hiện bởi định luật điều tiết gọi là định luật LENZ khi nghiên cứu chính xác hơn các hiệu ứng của hiện tượng cảm ứng điện từ (chứa đựng trong phương trình MAXWELL-FARADAY).



	tần số $\nu$	chiều dày mặt ngoài $\delta$	
Kỹ thuật điện Điện tử tần số thấp	10 Hz	30 000 km	6,5 cm
	1 kHz	300 km	
Sóng Hertz	1 MHz	300 m	0,21 mm
	1 GHz	30 cm	
Sóng mét đến xentimét	1 THz	300 $\mu$ m	0,21 $\mu$ m
giới hạn hiệu lực của định luật OHM			
	10 <sup>14</sup> Hz	3 $\mu$ m	$\delta$ rất nhỏ
	Bước sóng $\lambda_0 = \frac{C}{\nu}$ trong chân không		

H.16.

a. Hiệu ứng mặt ngoài : các biến thiên của tỷ số  $\frac{B}{B_0}$  theo  $z$ , ở thời điểm  $t$  cho trước.

b. Sự biến đổi của chiều dày mặt ngoài (trường hợp của đồng) đối với các giá trị khác nhau của tần số.

### 5.4.3. Trường hợp giới hạn của vật dẫn lí tưởng

Chiều dày mặt ngoài  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$  càng nhỏ nếu tần số và độ dẫn điện có

các giá trị càng lớn. Thành thử, thông thường người ta thường xét mô hình của kim loại dẫn điện vô hạn, gọi là kim loại lí tưởng. Theo mô hình này, chiều dày mặt ngoài  $\delta$  bằng không ở mọi tần số : điều này đưa ta đến kết quả là  $\vec{E}, \vec{j}$  và  $\vec{B}$  đều triệt tiêu ở bên trong vật dẫn lí tưởng

Các trường  $\vec{E}, \vec{j}$  và  $\vec{B}$  đều bằng không ở bên trong một vật dẫn lí tưởng, có độ dẫn điện vô hạn. Trong một vật dẫn lí tưởng, các dòng điện đều định xứ ở bề mặt.

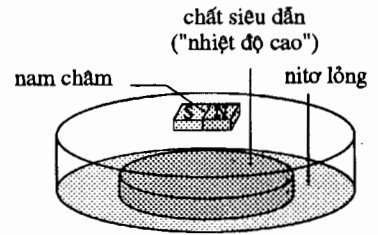
#### ■ Trường hợp đặc biệt của các chất siêu dẫn

Các chất siêu dẫn có thể được coi như các vật dẫn lí tưởng : chúng thực sự có tính chất đẩy các đường sức của từ trường

Các dòng điện xuất hiện ở bề mặt của chất siêu dẫn, tạo ra một trường có khuynh hướng hủy bỏ từ trường mà nam châm "muốn" áp đặt cho vật liệu siêu dẫn.

Vật liệu này, trong khi đẩy từ trường, có khuynh hướng đẩy xa thanh nam châm, khiến nam châm có thể bay lên phía trên chất siêu dẫn (h.17).

► Để tập luyện : bài tập : 4



H.17. Nam châm bay lên trên chất siêu dẫn.

## 6 Năng lượng điện từ

### 6.1. Nghiên cứu cân bằng năng lượng

#### 6.1.1. Công suất do trường cung cấp

Xét một thể tích  $\mathcal{V}$ , cố định trong một hệ quy chiếu Galilée đang xét, mà ở trong đó tồn tại một trường điện từ  $(\vec{E}, \vec{B})$  phụ thuộc  $(\vec{r}, t)$  (H.18). Ta biết rằng trường điện từ có thể cung cấp năng lượng cho các điện tích đang chuyển động trong lòng thể tích đó, công suất trên đơn vị thể tích được truyền cho các điện tích có dạng (xem chương 1).

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

#### 6.1.2. Biểu thức cân bằng năng lượng

$\mathcal{P}_{vol}$  tương ứng với sự truyền năng lượng của trường cho các điện tích. Như vậy, liệu có phải bao giờ ta cũng có thể kết hợp một năng lượng với trường, và biểu thị của biến thiên của nó, ở trong lòng thể tích  $\mathcal{V}$ , bằng một sự cân bằng năng lượng hoàn toàn ?

Nếu ta kết hợp một năng lượng trên đơn vị thể tích  $\mathcal{E}_{vol}$  với trường điện từ, thì năng lượng điện từ chứa trong thể tích  $\mathcal{V}$  có dạng :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{E}_{vol} d\tau.$$

Năng lượng này có thể biến đổi, do có những sự trao đổi năng lượng giữa trường và các điện tích chứa trong thể tích  $\mathcal{V}$ .

Độ biến thiên năng lượng  $\mathcal{E}$  của trường gắn với sự truyền tải đó, được viết :

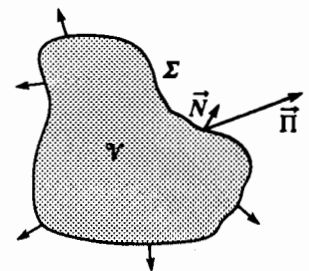
$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\substack{\text{tương tác với} \\ \text{các điện tích} \\ \text{trong } \mathcal{V}}} = \iiint_{\mathcal{V}} -\mathcal{P}_{vol} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Chú ý:

Công suất này là năng lượng do trường nhận được trong đơn vị thời gian, trong khi  $\mathcal{P}_{vol}$  lại là công suất trên đơn vị thể tích mà các điện tích nhận được. Do đó có dấu trừ.

Năng lượng này cũng có thể biến đổi do các truyền đổi năng lượng giữa trường chứa trong thể tích  $\mathcal{V}$  và môi trường bên ngoài. Các truyền tải năng lượng đó xảy ra qua mặt kín  $\Sigma$  giới hạn thể tích  $\mathcal{V}$ . Cũng sẽ là hợp logic nếu ta kết hợp một hướng và một cường độ cho các truyền tải năng lượng đó, ví như một vector mật độ dòng năng lượng mà ta kí hiệu là  $\vec{T}$ . Khi đó, ta có :

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{truyền tải qua } \Sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{T} \cdot d\vec{S}.$$



H.18. Thể tích  $\mathcal{V}$  và mặt kín  $\Sigma$  kết hợp.

Chú ý :

Vector  $\vec{I}$  chỉ rõ hướng truyền tải năng lượng, và mặt kín  $\Sigma$  được quy ước định hướng ra phía ngoài, do đó lại có một dấu trừ.

Độ biến thiên năng lượng của trường điện từ, trong đơn vị thời gian, có dạng :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} d\tau$$

Độ biến thiên đó là do các truyền tải nói trên :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{truyền tải qua } \Sigma} + \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{tương tác với các điện tích trong } \mathcal{V}}$$

Sự cân bằng năng lượng thể hiện sự biến đổi năng thông của trường điện từ chứa trong một thể tích, giới hạn bởi mặt kín  $\Sigma$ , phải có dạng :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} d\tau = \oint_{\Sigma} -\vec{I} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Nhưng đối với một thể tích nguyên tố, thì năng lượng đi qua một mặt kín có thể được biểu thị nhờ divergence của vector  $\vec{I}$  (định lí GREEN - OSTROGRADSKI).

Như vậy, sự cân bằng năng lượng này được biểu thị cục bộ bởi :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} = -\text{div} \vec{I} - \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Chú ý :

Sự cân bằng này tương tự như sự cân bằng thể hiện sự bảo toàn điện tích :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}$ .

Chỉ cần thay mật độ năng lượng  $\mathcal{E}_{\text{vol}}$  và vector mật độ dòng năng lượng  $\vec{I}$  bằng mật độ điện tích  $\rho$  và vector mật độ dòng điện tích  $\vec{j}$  là đủ. Tuy nhiên số hạng bổ sung  $-\vec{j} \cdot \vec{E}$  thể hiện một sự khác biệt chủ yếu :

năng lượng của trường (không được nhầm lẫn với năng lượng toàn phần chứa trong  $\mathcal{V}$ ) không được bảo toàn, vì nó có thể được trao đổi với các điện tích đang chuyển động

Và lại, ta có thể lí giải  $-\vec{j} \cdot \vec{E}$  như một số hạng về nguồn năng lượng của trường điện từ trong đơn vị thể tích, Thành thử cân bằng, mà ta nêu ra ở đây khá gần với cân bằng mà ta đã thực hiện trong trường hợp các trao đổi năng lượng bằng dẫn nhiệt (xem H - prépa, Nhiệt động học, năm thứ hai), trong đó cũng xuất hiện một số hạng về nguồn năng lượng trong đơn vị thể tích.

## 6.2. Cân bằng năng lượng cục bộ

Muốn biểu thị số hạng nguồn năng lượng, ta dùng phương trình MAXWELL-AMPERE. Nó cho phép ta biểu thị mật độ dòng điện theo thể tích.

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \left( \text{rot } \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

nghĩa là, bằng cách thực hiện một tích vô hướng với điện trường  $\vec{E}$ , thì ta có :

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{E} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{B}}{\mu_0} + \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) - \frac{\vec{E} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{B}}{\mu_0} \quad (*)$$

Để nhận được một sự đối xứng tốt nhất giữa điện trường và từ trường, ta viết song song phương trình MAXWELL-FARADAY :

$$\vec{0} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overline{\text{rot}} \vec{E}.$$

Nhân vô hướng cả hai vế với từ trường  $\vec{B}$ , ta được :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{\vec{B} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{E}}{\mu_0} \quad (**)$$

Cộng vế đối vế các phương trình (\*) và (\*\*), ta được :

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \left( \frac{\vec{B} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{B}}{\mu_0} \right).$$

Đồng nhất thức của phép lấy đạo hàm vector  $\text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{B}$ , cho phép ta viết đẳng thức trên đây dưới dạng :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (***)$$

Ở chương 2, ta đã nhận thấy rằng năng lượng  $\frac{1}{2}CU^2$  của một tụ điện có thể được tính bằng cách lấy tổng, theo thể tích tụ điện, của số hạng  $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ , thuận nhất với năng lượng trên đơn vị thể tích.

Khi nghiên cứu hiện tượng cảm ứng điện từ, ta đã nghiệm thấy rằng năng lượng  $\frac{1}{2}LI^2$  dự trữ trong một cuộn dây có thể được tính toán bằng cách

lấy tổng theo không gian của số hạng  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ , đồng nhất với năng lượng trên đơn vị thể tích.

Trong một mạch điện dao động tạo nên bởi một tụ điện và một cuộn dây mắc nối tiếp (H.19), năng lượng của mạch điện vẫn không đổi, nhưng luân lượt chuyển từ dạng điện sang dạng từ và cứ thế qua lại.

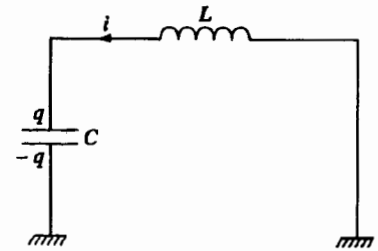
Trong trường hợp tổng quát, ta có thể lại tìm được đồng thời cả số hạng điện và số hạng từ trong biểu thức năng lượng trên đơn vị thể tích của trường điện từ :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Biểu thức này cho phép ta viết hệ thức (\*\*\*) dưới dạng :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} = -\text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Biểu thức này tương thích với dạng tìm được đối với sự cân bằng cục bộ của năng lượng điện từ.



H.19. Mạch dao động điện.

Viết kết hợp vào trường điện từ :

- một mật độ năng lượng thể tích trường điện từ :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0};$$

- một vector mật độ năng thông hay vector Poynting :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ;

cho phép thể hiện một sự cân bằng năng lượng chặt chẽ.

Trường điện từ ở đây mang một dáng vẻ mới : nó không còn là một hình thức trung gian đơn giản để tính toán nữa, nhưng là một đối tượng vật lý mà ta có thể kết hợp với một năng lượng. Trong bài tập, ta sẽ còn kết hợp với trường điện từ một xung lượng, một động lượng ...

Chú ý :

- Tuy ta đã không chứng minh được tính duy nhất của sự lựa chọn, nhưng ta đã đảm bảo được tính chặt chẽ của nó.
- $\vec{\Pi}$ , được xác định là tích vector của điện trường (vector cực) với từ trường (vector trục), lại có các tính chất đối xứng của một vector cực.

# Áp dụng 4

## Cân bằng năng lượng kết hợp với hiệu ứng mặt ngoài

Khi nghiên cứu mô hình khuếch tán một chiều của trường điện từ biến thiên trong một môi trường dẫn điện thuận trở, độ dẫn điện  $\gamma$ , thì ở §5.4.2. ta đã nhận được biểu thức :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_y.$$

Đó là biểu thức của từ trường trong vật dẫn chiếm nửa không gian ( $z > 0$ ).

1) Tìm các biểu thức của các trường  $\vec{E}$  và  $\vec{j}$  kết hợp với từ trường dao động này ?

2) Tìm công suất trung bình  $\mathcal{P}$  được truyền cho vật dẫn điện, đi qua một diện tích đơn vị  $\Delta x \Delta y$  ?

3) Năng lượng này sẽ chuyển hoá ra sao ?

Hãy kiểm tra nhờ biểu thức về mật độ dòng điện thể tích  $\vec{j}$  ở trong lòng vật dẫn.

1) Trong vật dẫn, và ở các chế độ hoạt động đang xét, thì dòng điện dịch là không đáng kể.

Từ đó ta suy ra :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{\text{rot } \vec{B}}{\gamma \mu_0} \\ &= \frac{B_0}{\gamma \mu_0 \delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \left[ -\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right. \\ &\quad \left. -\sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right] \vec{e}_x. \end{aligned}$$

2) Vector POYNTING có giá trị, ở  $z = 0$  :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(0, t) &= \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)_{z=0} \\ &= \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2 \delta} \cos(\omega t) \\ &\quad [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Công suất điện tích trung bình phải tìm thì bằng thông lượng trung bình của vector POYNTING đi qua một diện tích đơn vị của mặt phẳng ( $z = 0$ ), được định hướng theo chiều các giá trị  $z$  tăng (hướng về kim loại), nghĩa là :

$$\mathcal{P} = \langle \vec{\Pi}(0, t) \cdot \vec{e}_z \rangle = \frac{B_0^2}{2\gamma \mu_0^2 \delta}.$$

3) Năng lượng trung bình kết hợp với trường điện từ không thay đổi.

Vậy, công suất này sẽ được truyền cho các điện tích của môi trường dẫn điện, và được chuyển hóa bởi hiệu ứng JOULE.

Ta hãy tính công suất  $\mathcal{P}$ , quy cho một điện tích đơn vị  $\Delta x \Delta y$ , tiêu tán trong vật liệu bằng hiệu ứng JOULE.

Nó có giá trị :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_{z=0}^{\infty} \left\langle \frac{j^2}{\gamma} \right\rangle (\Delta x \Delta y dz) \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \frac{B_0^2}{\gamma \mu_0^2 \delta^2} e^{-2\frac{z}{\delta}} dz = \frac{B_0^2}{2\gamma \mu_0^2 \delta}. \end{aligned}$$

Và xét hợp logic, ta lại tìm được :  $\mathcal{P} = \mathcal{P}$ .

### 6.3. Định lí POYNTING

Từ sự cân bằng năng lượng cục bộ :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} = -\text{div} \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E},$$

ta suy ra biểu thức cân bằng này đối với một thể tích  $\mathcal{V}$  cho trước.

Sự cân bằng năng lượng điện từ đối với một thể tích  $\mathcal{V}$  cho trước, giới hạn bởi mặt kín  $\mathcal{S}$ , có thể được thể hiện bởi định lí Poynting :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau + \oiint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

# Áp dụng 5

#### Cân bằng năng lượng đối với một dây dẫn thuần trở

Một sợi dây dẫn thuần trở độ dẫn điện  $\gamma$ , được coi như một hình trụ, trục ( $Oz$ ) và bán kính  $a$ , chịu tác dụng của một điện trường đều và không đổi :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z.$$

1) Hãy xác định từ trường do các dòng điện của hình trụ sinh ra.

2) Tìm thông lượng của vector POYNTING đi qua một hình trụ, trục ( $Oz$ ), chiều cao  $h$  và bán kính  $r$  ? Ta có thể lí giải như thế nào kết quả này ?

1) Sợi dây được chạy qua bởi mật độ dòng điện thể tích  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = j \vec{e}_z$  đều.

Từ trường tạo ra bởi phân bố này có dạng :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta.$$

Khi áp dụng định lí AMPÈRE, ở chế độ không đổi, cho một vòng tròn trục ( $Oz$ ) và bán kính  $r$ , ta được :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta,$$

ở bên trong dây dẫn, và :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j \pi a^2}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta;$$

ở bên ngoài, với ký hiệu  $I = \pi a^2 j$  là dòng điện chạy qua sợi dây dẫn.

2) Vector POYNTING là :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 I}{2\pi a^2} (-r \vec{e}_r) \text{ với } r \leq a,$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0 I}{2\pi} \left( -\frac{\vec{e}_r}{r} \right) \text{ với } r \geq a.$$

Thông lượng của nó đi qua một hình trụ trục ( $Oz$ ) và bán kính  $r$ , hướng vào phía trong hình

trụ, có giá trị :

$$\Phi = 2\pi r h(-\vec{e}_r \cdot \vec{I}) = \frac{E_0 I}{\pi a^2} (\pi r^2 h)$$

$$= \frac{j^2}{\gamma} (\pi r^2 h) \text{ với } r \leq a.$$

Và  $\Phi = \frac{E_0 I}{\pi a^2} (\pi a^2 h) = \frac{j^2}{\gamma} (\pi a^2 h)$  với  $r \geq a$ .

Ta nhận thấy trong cả hai trường hợp, đó là công suất hấp thụ (bằng hiệu ứng JOULE) bởi

phần dây dẫn chứa trong hình trụ bán kính  $r$  đang xét.

Kết quả này minh họa ở chế độ không đổi, sự cân bằng năng lượng :

$$\iiint_V \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} d\tau = \oiint_{\Sigma} -\vec{I} \cdot d\vec{S} + \iiint_V -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = 0.$$

Thật vậy ta lại tìm thấy, đối với hình trụ đang xét :

$$\oiint_{\Sigma} -\vec{I} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{j^2}{\gamma} d\tau = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

► Để tập luyện : BT 2, 3, 5, 6 và 8.

## ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

### ■ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL-FARADAY

• Một từ trường biến đổi theo thời gian có thể gây cảm ứng một thành phần của điện trường có lưu thông không bảo toàn. Tính chất xoáy của nó được xác định bởi phương trình

$$\text{MAXWELL-FARADAY : } \overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Lưu thông của điện trường trên một đường cong kín  $\Gamma$  có dạng :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

trong đó,  $\Sigma$  chỉ một mặt định hướng dựa lên đường cong kín này. Nếu đường cong kín  $\Gamma$  cố định trong hệ quy chiếu galilée đang xét, thì lưu thông này đồng nhất với độ biến thiên của từ thông qua đi qua diện tích giới hạn bởi đường cong kín này trong đơn vị thời gian nhưng ngược dấu.

$$\oint_{\Gamma \text{ cố định}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

### ■ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL-AMPÈRE

Định lí AMPÈRE suy rộng :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

là dạng tích phân của phương trình MAXWELL - AMPÈRE :  $\overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$ , trong đó,

dòng điện dịch  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  bảo đảm tính tương thích của các phương trình của trường với nguyên lí bảo toàn điện tích.



## ■ BỐN PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

Bốn phương trình MAXWELL, chi phối sự biến đổi cục bộ của trường điện từ trong mọi hệ quy chiếu galilée, là :

- phương trình MAXWELL-GAUSS (M-G) :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ;
- phương trình MAXWELL-AMPÈRE (M-A) :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ;
- phương trình từ thông (M-Φ) :  $\text{div } \vec{B} = 0$  ;
- phương trình MAXWELL-FARADAY (M-F) :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  .

Các hằng số cơ bản :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  và  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$

nghiệm đúng hệ thức  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  , trong đó c kí hiệu vận tốc ánh sáng trong chân không.

Các phương trình MAXWELL cho phép giải thích hiện tượng truyền lan các sóng điện từ với vận tốc c trong tất cả các hệ quy chiếu galilée.

Các phương trình này tương thích, trong gần đúng phi tương đối tính, với các định luật của cơ học cổ điển.

Trong gần đúng này, ta có thể tiếp tục sử dụng hệ thức cơ bản của động lực học cổ điển để nghiên cứu các chuyển động của các hạt tích điện chịu tác dụng của một trường điện từ.

## ■ NHỮNG GIÁN ĐOẠN (BẮT LIÊN TỤC) CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Khi đi qua một lớp, ngăn cách hai môi trường 1 và 2, mang điện tích với mật độ điện mặt  $\sigma$  và dòng điện với mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s$ , thì trường điện từ biểu thị một sự gián đoạn hữu hạn :

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} ; \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}) .\end{aligned}$$

## ■ THỂ VÔ HƯỚNG V VÀ THỂ VECTƠ $\vec{A}$

Các phương trình bản chất của trường điện từ (M-Φ và M-F) bảo đảm sự tồn tại của các thể vô hướng V và vectơ  $\vec{A}$  như :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{và} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} .$$

Trong mốc đo LORENTZ :  $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , các thể vô hướng và vectơ liên kết với các điện tích và dòng điện bởi các phương trình tách cặp riêng rẽ.

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{và} \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} .$$

Các thể trễ tạo thành các nghiệm của các phương trình về thế. Chúng hợp nhất các hiệu ứng do vận tốc hữu hạn của sự lan truyền thông tin gây ra.

## ■ PHÉP GẦN ĐÚNG CÁC CHẾ ĐỘ CHUẨN DỪNG (G.Đ.C.C.D)

Trong GĐ.C.C.D, ta bỏ qua sự chậm trễ trong sự truyền tin. Đây là vấn đề về sự gần đúng khi coi vận tốc truyền tin lớn vô hạn :  $c \rightarrow \infty$ .

### • GĐ.C.C.D trong các vật dẫn

Trong các mạch điện thì định luật OHM có thể dùng được khi phép GĐ.C.C.D được chứng minh.

Đối với các chế độ biến đổi, chứng minh việc dùng định luật OHM, thì dòng điện dịch, ở trong lòng vật dẫn thuần trở, là không đáng kể so với dòng điện dẫn.

### • Các phương trình MAXWELL trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng

Phương trình MAXWELL-GAUSS (M-G) :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ;

Phương trình MAXWELL-AMPÈRE (M-A) :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  ;

Phương trình từ thông (M- $\Phi$ ) :  $\text{div } \vec{B} = 0$  ;

Phương trình MAXWELL-FARADAY (M-F) :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Các phương trình này mô tả sự biến đổi của trường điện từ trong khuôn khổ của GĐ.C.C.D, khi dòng điện dịch không đáng kể so với dòng điện dẫn (đây là trường hợp trong một vật dẫn tốt).

Các đại lượng  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\rho$  và  $\vec{B}$  đều bằng không ở bên trong vật dẫn lí tưởng có độ dẫn điện vô cùng

Như vậy, trong một vật dẫn lí tưởng, các dòng điện định xứ ở bề mặt.

## ■ NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ

Sự cân bằng năng lượng cục bộ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} = -\text{div } \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E}$ , có thể được thể hiện đúng đắn khi coi :

• mật độ năng lượng của trường điện từ là :  $\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$  ;

• vector mật độ dòng năng lượng điện từ, gọi là *vector POYNTING*, có dạng :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Sự cân bằng năng lượng điện từ đối với một thể tích  $\mathcal{V}$  cho trước, giới hạn bởi mặt kín  $\Sigma$ , có thể được thể hiện bởi định lí POYNTING :

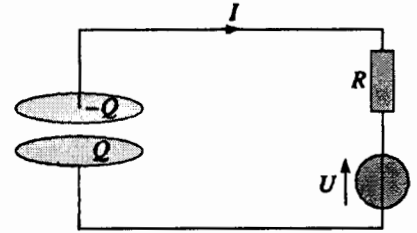
$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau = \oiint_{\Sigma} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} -\vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

# Bài tập có lời giải

## Cân bằng năng lượng kết hợp với một tụ điện

### ĐỀ BÀI

Tụ điện trong mạch điện biểu diễn ở hình bên, gồm hai đĩa kim loại, trục ( $Oz$ ) và bán kính  $a$ , cách nhau một khoảng  $e$ . Hệ thống hoạt động trong khuôn khổ của GĐ.C.C.D (xem áp dụng 3) và người ta bỏ qua mọi hiệu ứng bờ.



- 1) Tính các giá trị của điện trường và từ trường ở bên trong tụ điện.
- 2) Khi so sánh độ lớn của các giá trị năng lượng điện và từ trên đơn vị thể tích, bạn hãy tính giá trị của năng lượng điện từ dự trữ bởi tụ điện.
- 3) Hãy tính vectơ POYNTING kết hợp, sau đó tính năng thông điện từ đi qua "vách" của tụ điện tạo nên bởi hình trụ, trục ( $Oz$ ) bán kính  $a$  và chiều cao  $e$ .
- 4) Với thí dụ trên, hãy thử nghiệm lại biểu thức của định lí POYNTING.

### HƯỚNG DẪN

Áp dụng 3 trong bài giảng đã chứng minh rằng, trong GĐ.C.C.D., điện trường gần như đều ở bên trong tụ điện.

Trong tụ điện, dòng điện dẫn bằng không. Như vậy dòng điện dịch không còn không đáng kể nữa, mà lại còn quan trọng để áp dụng định lí Ampère. Điều này không xét lại căn nguyên của GĐ.C.C.D.

### LỜI GIẢI

1) Trong tụ điện, điện trường là  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z$ .

Tụ điện đối xứng tròn xoay chung quanh trục ( $Oz$ ). Vậy ta sẽ tìm một từ trường có dạng :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

Định lí AMPÈRE suy rộng cho một vòng tròn trục ( $Oz$ ) và bán kính  $r$ , nằm trong tụ điện, cho phép viết :

$$\begin{aligned} 2\pi r B(r, z) &= \oint_{\text{vòng bán kính } r} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\text{đĩa bán kính } r} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\text{đĩa bán kính } r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{\epsilon_0 S} \right) \pi r^2 = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{S} \end{aligned}$$

Vậy  $\vec{B}_{\text{trong tụ điện}} = \frac{\mu_0 I}{2S} r \vec{e}_\theta$

Ở bên ngoài tụ điện, ta được :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ .

2) Trong tụ điện, mật độ năng lượng điện từ là :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2} + \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8S^2}.$$

Một cấp độ lớn của tỷ số  $\frac{Q}{I}$  là thời gian đặc trưng cho sự biến đổi điện tích của tụ điện  $\tau = RC$ .

Ta biết rằng trong GD.C.C.D., thời gian  $\tau$  này nghiệm đúng  $a \ll c \tau$ , trong đó  $c$  là vận tốc ánh sáng trong chân không. Trong các điều kiện đó, tỉ số giữa các phần từ và điện của mật độ năng lượng điện từ trong tụ điện bằng :

$$\frac{\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)}{\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right)} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 I^2 r^2}{4 Q^2}$$

vào cỡ  $\frac{a^2}{c^2 \tau^2} \ll 1$ .

Trong GD.C.C.D., năng lượng được lưu trữ bởi tụ điện, chủ yếu là dưới dạng điện :

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \gg \frac{B^2}{2\mu_0}$$

trong tụ điện.

Năng thông điện từ tương ứng với thông lượng của vector POYNTING.

Thành thử, năng lượng chủ yếu được lưu trữ dưới dạng điện trong tụ điện và có giá trị :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\text{tụ điện}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \frac{e Q^2}{2 \epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

trong đó  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$  là điện dung của tụ điện phẳng.

3) Trên vách của tụ điện, nghĩa là ở  $r = a$ , thì vector POYNTING có giá trị :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z \right) \wedge \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{1}{2\pi \epsilon_0 a S} Q \frac{dQ}{dt} \vec{e}_r,$$

Và năng thông điện từ, nhận được bởi thể tích nằm giữa các bản của tụ điện, tạo thành hình trụ bán kính  $a$  và chiều cao  $e$ , có giá trị :

$$\Phi = \oiint_{\text{hình trụ}} -\vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = 2\pi a e \frac{1}{2\pi a \epsilon_0 S} Q \frac{dQ}{dt} = \frac{e}{\epsilon_0 S} Q \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right).$$

Ta viết đồng nhất thức tương ứng với định lí POYNTING để nghiệm lại sự cân bằng năng lượng của hệ.

4) Ta có thể đồng nhất thông lượng này với độ biến thiên của năng lượng lưu trữ bởi tụ điện :  $\Phi = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ .

Đẳng thức này quy về việc viết sự cân bằng năng lượng cho thể tích  $\mathcal{V}$  của tụ điện dưới dạng :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dt = \oiint_{\Sigma} - \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S}.$$

và tương ứng đúng với biểu thức của định lí POYNTING trong chùng mực không có dòng điện ( $\vec{j} = \vec{0}$ ) giữa các bản của tụ điện.

# Bài tập

## ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

### 1 Mặt cầu phóng xạ

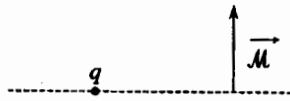
Một mặt cầu phóng xạ, bán kính  $R$ , phát xạ các hạt tích điện đẳng hướng trong toàn không gian. Ta kí hiệu  $Q(r, t)$  là điện tích chứa trong hình cầu bán kính  $r$  ( $r > R$ ) ở thời điểm  $t$ .

1) Tính điện trường và từ trường ở khoảng cách  $r$  tới tâm mặt cầu phóng xạ. Tính vectơ mật độ dòng điện thể tích ở khoảng cách  $r$ .

2) Các kết quả này có phù hợp với phương trình  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  không? Hãy biện luận.

### 2 Vector POYNTING không hay sự truyền tải năng lượng triệt tiêu?

Một điện tích điểm không đổi  $q$  và một lưỡng cực từ có mômen lưỡng cực  $\vec{M}$ , độc lập với thời gian, đều đứng yên, và được xếp đặt như trên hình vẽ.



1) Liệu vector POYNTING có triệt tiêu cho trường hợp như hình vẽ không?

2) Tình huống này có tương ứng với sự truyền tải năng lượng từ miền không gian này sang miền không gian khác không?

Cả hai kết quả này có tương thích với nhau không?

Dữ liệu:  $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\text{rot } \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\text{rot } \vec{b})$

### 3 Dây cáp đồng trục ở chế độ tĩnh

Một dây cáp đồng trục được cấu tạo từ hai hình trụ mỏng dẫn điện lí tưởng  $c_1$  và  $c_2$  với các bán kính  $R_1, R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), và cùng trục ( $Oz$ ).

Các hiện tượng nghiên cứu ở đây đều có tính đối xứng tròn xoay chung quanh trục ( $Oz$ ).

Lõi  $c_1$ , ở điện thế  $V_1$ , mang mật độ điện dài  $\lambda$  và có dòng điện  $I$  chạy qua.

Lõi  $c_2$ , ở điện thế  $V_2$ , mang mật độ điện dài  $-\lambda$  và có dòng điện  $-I$  chạy qua.

Ta ký hiệu  $U = V_1 - V_2$ .

1) Tính mật độ điện mặt  $\sigma_1$  và  $\sigma_2$ , rồi điện trường  $\vec{E}$  ở mọi điểm và mật độ điện năng dài  $\frac{dW_E}{dz}$ .

Từ đó suy ra điện dung dài  $\Gamma$  của cáp đồng trục (đừng quên rằng năng lượng của một tụ điện, có điện dung  $C$  và mang điện tích  $Q$ , có giá trị là  $W_E = \frac{Q^2}{2C}$ ).

2) Tính các mật độ dòng điện mặt trên  $c_1$  và  $c_2$ , rồi tính trường  $\vec{B}$  ở mọi điểm và mật độ năng lượng từ trên đơn vị dài  $\frac{dW_B}{dz}$ ; từ đó suy ra độ tự cảm dài  $L$  của dây cáp đồng trục (đừng quên năng lượng của vật dẫn có độ tự cảm  $L$  và dòng điện  $I$  chạy qua là  $W_B = \frac{LI^2}{2}$ ).

3) Tìm giá trị của tích  $L\Gamma$ ?

Tìm trở kháng  $Z_c$ , biểu thị theo  $R_1$  và  $R_2$ , mà ta có thể tạo thành với  $L$  và  $\Gamma$ ?

4) Tính vector Poynting  $\vec{\Pi}$  trong dây cáp đồng trục, cũng như tính năng thông điện từ  $\Phi$  trong dây cáp (thông lượng  $\Phi$  của năng lượng điện từ). Chứng minh rằng thông lượng này có thể đặt dưới dạng  $\Phi = UI$ . hãy biện luận ngắn gọn.

## VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

### 4 Hiệu ứng mặt ngoài trong một tấm kim loại

Một tấm đồng, độ dẫn điện  $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ , chiều dày  $h$  và chiều rộng  $L \gg h$ , song song với mặt phẳng ( $yOz$ ), và có mật độ dòng điện  $J = J(x, t)\vec{e}_y$  chạy qua.

Ta bỏ qua mọi tác dụng bên ngoài.

1) Xác định hàm  $J(x, t)$  ở chế độ hình sin. Người ta lấy gốc của giá trị  $x$ , trên mặt phẳng trung trục với  $h$  và giả thiết  $J(0, t) = J_m(0)\cos\omega t$ .

2) Xác định tỉ số  $\frac{J_m\left(\frac{h}{2}\right)}{J_m(0)}$  các biên độ của  $J$  ở rìa và ở tâm.

Dữ liệu:  $h = 1 \text{ mm}$  và tần số  $f = 100 \text{ kHz}$ .

3) Tính giá trị cực đại  $I_m$  của cường độ dòng điện.

## 5 Điện trở rò trong một tụ điện hình trụ

Một hệ thống điện hình trụ, chiều cao  $h$ , gồm hai hình trụ kim loại đồng trục bán kính  $R_1$  và  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ).

Lúc đầu, hình trụ trong nhận một điện tích  $Q$  và hình trụ ngoài có điện tích không. Môi trường phân cách hai hình trụ có hằng số điện môi và độ từ thẩm được coi như của chân không ( $\epsilon_0$  và  $\mu_0$ ), nhưng nó hơi dẫn điện. Người ta giả thiết nó là thuần trở và có độ dẫn điện  $\gamma$ .

Trong toàn bài tập, các hiệu ứng bờ đều không đáng kể: mọi việc xảy ra đều dường như các hình trụ chiều cao  $h$  lại trở thành vô hạn.

1) Hệ sẽ biến đổi tới trạng thái cuối cùng nào? Hãy xác định điện trường ở thời điểm ban đầu và thời điểm cuối. Tìm giá trị của từ trường ở mọi thời điểm? Từ đó rút ra biến thiên của năng lượng điện từ kết hợp với sự biến đổi đó.

2) Tìm giá trị của vector POYNTING trong quá trình biến đổi đó?

Ta có thể kết luận gì về sự biến thiên của năng lượng điện từ được tính ở câu hỏi trên?

3) Xác định vector mật độ dòng điện ở mọi thời điểm. Từ đó suy ra năng lượng tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE trong hệ? Kiểm tra các kết luận được thiết lập ở 2) bằng cách tổng hợp các kết quả thu được ở 1) và 3).

## 6\* Năng lượng từ lưu trữ trong cuộn dây

Một cuộn dây, chiều dài  $l$ , bán kính  $a$  và trục ( $Oz$ ), được cấu tạo bởi  $n$  vòng quấn sát nhau trên đơn vị dài. Người ta dùng sự gần đúng của ống dây dài vô hạn để mô tả cuộn dây và đặt mình trong khuôn khổ của G.Đ.C.C.D.

1) Trong những điều kiện đó, từ trường sinh ra bởi cuộn dây trong có dòng điện  $I$  chạy qua, sẽ bằng bao nhiêu?

2) Tính năng lượng từ  $\mathcal{E}_m$ , kết hợp với cuộn dây? Từ đó hãy rút ra độ tự cảm  $L$  của cuộn dây.

Áp dụng số:  $I = 1A$ ,  $l = 10cm$ ,  $a = 10cm$ ,  $n = 5000m^{-1}$  (giá trị lớn này có thể được thực hiện bằng cách quấn các vòng dây chồng lên nhau: mô hình ống dây một lớp vòng quấn, lúc này đã được đơn giản hóa quá mức, nhưng các độ lớn vẫn cứ thích hợp).

3) Cuộn dây được mắc trong mạch điện có một máy phát sức điện động  $e$ , điện trở trong  $R$  khá lớn so với điện trở cuộn dây. Tìm định luật biến đổi của dòng điện chạy trong mạch, đóng điện ở thời điểm  $t = 0$ ?

4) Tính các trường từ và điện sinh ra bởi cuộn dây ở thời điểm  $t$ , tại mọi điểm?

So sánh các giá trị về mật độ khối của năng lượng từ và điện (ta có thể lấy các trị số hợp lý để tính toán).

5) Tìm biểu thức của thông lượng của vector Poynting đi qua một mặt giới hạn thể tích, trong đó cuộn dây tạo một trường không phải là không đáng kể (hình trụ bán kính  $a$  và chiều dài  $l$ )? Hãy giải thích kết quả đó.

## 7\* Chuyển động quay của một quả cầu tích điện

Một quả cầu tâm  $O$ , bán kính  $R$  và khối lượng  $m$ , mang một điện tích  $Q$  (điện tích  $Q$  và khối lượng  $m$  được phân phối đều theo thể tích).

Quả cầu có thể quay tự do quanh một trục ( $Oz$ ) và ta gọi  $J$  là mômen quán tính của quả cầu này đối với ( $Oz$ ):  $J = \frac{2}{5}mR^2$ .

Quả cầu được đặt trong một cuộn dây, trục ( $Oz$ ), gồm  $n$  vòng quấn sát nhau trên đơn vị dài (người ta dùng sự gần đúng của ống dây dài vô hạn để mô tả cuộn dây)

1) Ở thời điểm  $t = 0$ , dòng điện chạy trong ống dây, sẽ tăng rất nhanh từ 0 đến giá trị  $I_0$ . Tại sao quả cầu bắt đầu quay?

2) Biểu thị vận tốc quay lúc cuối của quả cầu theo điện tích, khối lượng của nó và theo từ trường  $B_0 = \mu_0 n I_0$  do ống dây tạo ra.

3) Tính trị số của vận tốc quay này bằng cách đưa ra các giá trị hợp lý để thực hiện thí nghiệm này. Biện luận.

4) Tìm hệ thức liên hệ mômen từ của quả cầu đang quay với trường mà nó chịu tác dụng?

5) Khi quả cầu bắt đầu quay, nó tạo ra một từ trường biến thiên không đáng kể cho tới lúc này. Hãy tính từ trường đó ở tâm  $O$  của quả cầu.

Tìm điều kiện để từ trường đó thực sự là không đáng kể so với từ trường của ống dây?

## 8 Xung lượng của trường điện từ

Điện trường của một sóng phẳng hình sin lan truyền trong chân không theo hướng trục  $(Oz)$ , có dạng như sau :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x.$$

1) Biểu thị từ trường dao động  $\vec{B}$  kết hợp với điện trường nói trên trong sóng đó.

Chúng minh rằng tính tương thích của trường của sóng với các phương trình MAXWELL trong chân không bắt buộc phải có một mối quan hệ giữa  $\omega$  và  $k$  (người ta cho  $k > 0$ , đối với phương truyền theo phía  $z$  tăng)

2) Tìm giá trị trung bình theo thời gian của mật độ năng lượng của sóng này ?

3) Đại lượng  $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$  gọi là xung lượng theo thể tích của trường (hay động lượng trên đơn vị thể tích).

Đơn vị của đại lượng này có phù hợp với định nghĩa này không ?

4) Trong một mô hình hạt người ta kết hợp với sóng này một chùm photon chuyển động với vận tốc  $c$  của sóng.

Ta nhắc lại một photon là một hạt (tương đối tính) có khối lượng không, năng lượng  $\mathcal{E} = h\nu$  (trong đó  $\nu = \frac{2\pi}{\omega}$  là kí hiệu tần số sóng) và xung lượng, hay

$$\text{động lượng } p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Tìm mật độ riêng  $n$  photon có thể được kết hợp với sóng đó ?

Từ đó suy ra biểu thức về xung lượng trên đơn vị thể tích kết hợp với sóng và kiểm nghiệm rằng nó đồng nhất đúng với trung bình theo thời gian của đại lượng  $\vec{g}$  được định nghĩa ở câu 3).

### LỜI GIẢI

1) Phân bố các điện tích và dòng điện có tính đối xứng cầu :

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(r, t) \text{ và } \vec{j}(\vec{r}, t) = j(r, t) \vec{e}_r.$$

Đối với một điểm  $M$  cho trước, mọi mặt phẳng chứa  $M$  và gốc  $O$  ở tâm hình cầu đều là một mặt phẳng đối xứng của phân bố các điện tích và dòng điện này. Hơn nữa, phân bố này còn bất biến đối với phép quay quanh điểm  $O$ . Từ đó suy ra :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t) \vec{e}_r \text{ và } \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

Vì từ trường vuông góc với một mặt phẳng đối xứng tại mỗi điểm của nó.

Khi áp dụng định lí GAUSS cho một hình cầu bán kính  $r$ , ta được :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q(r, t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

Độ biến thiên của điện tích  $Q(r, t)$  gắn với mật độ dòng điện thể tích bởi :

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r, t).$$

Vậy :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} \vec{e}_r.$$

2) Ở đây không thể viết  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , vì từ trường bằng không trong khi vector mật độ dòng điện lại không như thế.

Mật độ dòng điện dịch MAXWELL ở đây bằng :

$$\vec{j}_D(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q(r, t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right) = -\vec{j}(\vec{r}, t).$$

Ta lại thấy rằng dạng  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$  bảo đảm tốt sự kết hợp của các phương trình trường điện từ với sự bảo toàn điện tích.

2) 1) **Lưỡng cực từ, nằm yên, tạo ra một từ trường  $\vec{B}$  không đổi khác không. Điện tích, nằm yên, tạo ra một điện trường  $\vec{E}$  không đổi. Cả hai trường này đều khác không và nói chung không song song nhau. Vector POYNTING không triệt tiêu một cách rõ ràng.**

2) Tuy nhiên, tình trạng tĩnh này không kèm theo bất kì một sự thay đổi nào về năng lượng điện từ ở tất cả mọi điểm.

Hai khía cạnh này dường như mâu thuẫn nhau. Chúng sẽ thực sự mâu thuẫn nếu người ta tìm thấy một mặt kín sao cho thông lượng của vector POYNTING, đi qua mặt đó, phải khác không : lúc đó phần không gian ở bên trong mặt kín sẽ nhận được (hoặc mất đi) một phần năng lượng.

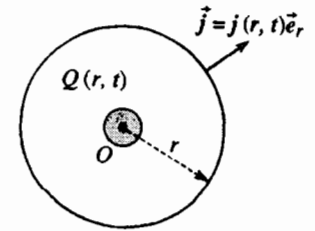
Vector POYNTING là  $\vec{I} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ .

Ta hãy tính divergence của vector này :

$$\mu_0 \text{div} \vec{I} = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\text{rot} \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\text{rot} \vec{B}).$$

Điện trường do điện tích  $q$  sinh ra là không đổi, vậy có rota bằng không. Ở ngoài thể tích chiếm bởi lưỡng cực, thì từ trường do nó tạo ra là xác định và có rota cũng bằng không.

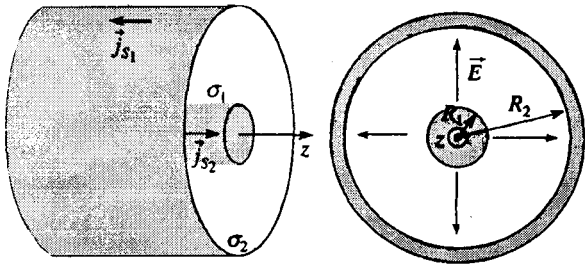
Vector POYNTING khác không, nhưng lại có divergence bằng không. Vậy người ta sẽ không thể tìm được một mặt kín mà qua đó, thông lượng của nó khác không. Vector POYNTING không triệt tiêu, nhưng cũng không có sự truyền tải bất kỳ năng lượng kết hợp với tình huống này.



3) Các điện tích dài của mỗi bản đều ngược dấu nhau và các mật độ điện mặt là :

$$\sigma_1 = \frac{\lambda}{2\pi R_1} \text{ và } \sigma_2 = \frac{-\lambda}{2\pi R_2}.$$

Trường tĩnh điện của phân bố đối xứng trụ sẽ có dạng :  
 $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ .



Khi áp dụng định lí GAUSS cho một hình trụ, trục (Oz) và bán kính r, ta được :

- với  $r < R_1$  :  $\vec{E} = \vec{0}$  ;
- với  $R_1 < r < R_2$  :  $\vec{E} = \frac{2\pi R_1 \sigma_1}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$ .
- với  $R_2 < r$  :  $\vec{E} = \vec{0}$ .

Điện trường khác không giữa lõi và vỏ của dây cáp, và bằng không phía ngoài dây cáp.

Vận năng lượng dự trữ dưới dạng điện trong một chiều dài đơn vị của dây cáp có giá trị :

$$\begin{aligned} \frac{dW_\epsilon}{dz} &= \int_{r=0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 2\pi r dr \\ &= \int_{r=0}^{R_2} \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0 r^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2} \lambda^2 \left[ \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right]. \end{aligned}$$

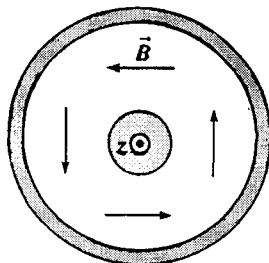
Nó có dạng  $\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\Gamma}$  là năng lượng trên đơn vị dài của một tụ điện mang điện tích dài  $\lambda$ . Khi đó, ta được :

$$\Gamma = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

2) Từ trường của phân bố nêu lên, do các tính đối xứng, có dạng  $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$ . Khi áp dụng định lí AMPÈRE cho một vòng tròn trục (Oz) và bán kính r, ta được :

- với  $r < R_1$  :  $\vec{B} = \vec{0}$  ;
- với  $R_1 < r < R_2$  :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  ;
- với  $R_2 < r$  :  $\vec{B} = \vec{0}$ .

Từ trường khác không ở giữa lõi và vỏ cáp, và triệt tiêu ở ngoài cáp. Ta tính năng lượng từ, trên đơn vị dài tương ứng.



$$\frac{dW_B}{dz} = \int_{r=0}^{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

có thể đồng nhất với :  $\frac{1}{2} \Lambda I^2$ , trong đó  $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ .

3) Tích  $\Lambda \Gamma$  có giá trị  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ .

$$\text{Trở kháng } Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

4) Vector POYNTING bằng không ở bên ngoài dây cáp, nhưng ở giữa lõi và vỏ cáp, thì nó có giá trị :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_z$$

Thông lượng của nó đi qua một tiết diện ở hoành độ z của dây cáp bằng :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\text{tiết diện}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_{r=R_1}^{R_2} \Pi 2\pi r dr \\ &= \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2} 2\pi r dr = \frac{\lambda I}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Người ta có thể đặt điện áp U vào các cực của cáp đồng trục :

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

để biểu thị thông lượng này dưới dạng  $\Phi = UI$ , là biểu thức thường dùng trong động điện, vì đây là vấn đề về biểu thức công suất điện được truyền bởi dây cáp đồng trục.

4) 1)  $J(x, t)$  là nghiệm của phương trình khuếch tán (5-4)

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial J}{\partial t}.$$

Trong phép quay phức, mật độ này có dạng :

$$\underline{J} = \underline{J}_0(x) e^{i\omega t} \text{ và } \frac{d^2 \underline{J}_0}{dx^2} = i \mu_0 \gamma \omega \underline{J}_0 = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 \underline{J}_0.$$

$$\text{Với } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Do đối xứng, J là hàm chẵn của x, và :

$$\underline{J}_0 = A \left[ e^{(1+i)\frac{x}{\delta}} + e^{-(1+i)\frac{x}{\delta}} \right]$$

do đó :

$$\begin{aligned} J(x, t) &= \Re e(\underline{J}_0(x) e^{i\omega t}) \\ &= \frac{J_m(0)}{2} \left[ e^{\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right) + e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right]. \end{aligned}$$



$$2) J_m(x) = |J_0(x)| = \sqrt{J_0 J_0^*} = \frac{J_m(0)}{\sqrt{2}} \sqrt{ch \frac{2x}{\delta} + \cos \frac{2x}{\delta}}, \text{ do đó}$$

$$\frac{J_m\left(\frac{h}{2}\right)}{J_0(0)} = \sqrt{\frac{ch \frac{h}{\delta} + \cos \frac{h}{\delta}}{2}}$$

Áp dụng số:  $\delta = 0,21 \text{ mm}$  và  $\frac{J_m\left(\frac{h}{2}\right)}{J_m(0)} = 5,4$ .

$$3) \underline{I} = L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} J dx$$

$$= \frac{L\delta}{1+i} \left[ e^{(1+i)\frac{h}{2\delta}} - e^{-(1+i)\frac{h}{2\delta}} \right] J_m(0) e^{i\omega t}$$

$$I_m = |\underline{I}|. \text{ do đó } I_m = L\delta J_m(0) \sqrt{ch \frac{h}{\delta} - \cos \frac{h}{\delta}}$$

Chú ý: Nếu  $d \ll \delta$ , thì  $J$  là đều và  $I \approx JhL$ .

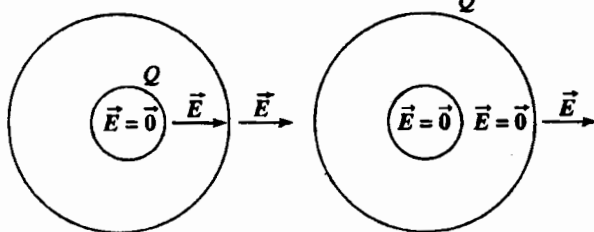
5) Một dòng điện có mật độ thể tích  $\vec{j}$  được thiết lập giữa hai hình trụ, làm cho hình trụ trong phóng điện. Dòng điện này sẽ triệt tiêu khi hình trụ hoàn toàn phóng điện hết: toàn bộ điện tích  $Q$  lúc đó lại được tìm thấy trên hình trụ ngoài.

Vector  $\vec{j}$  và do vậy điện trường  $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$  sẽ không triệt tiêu trong

không gian giữa các vật dẫn cho đến chừng nào mà toàn bộ điện tích chưa phóng hết.

Mọi mặt phẳng chứa trục quay của hệ đều là mặt phẳng đối xứng của phân bố dòng điện, và ta có thể viết:

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r, \text{ và } \vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r.$$



trạng thái đầu

trạng thái cuối

Ở thời điểm ban đầu, có một điện tích  $Q$  trên hình trụ bán kính  $R_1$ . Áp dụng định lí GAUSS cho một hình trụ bán kính  $r$ , ta được điện trường.

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \text{ cho mọi } r > R_1,$$

và điện trường bằng không nếu  $r < R_1$ .

Ở trạng thái cuối, ta cũng được biểu thức như trên, nhưng chỉ trong miền  $r > R_2$ , còn trường triệt tiêu ở mọi chỗ khác.

Đi qua điểm  $M$  có một mặt phẳng chứa trục quay của hệ, cũng như một mặt phẳng vuông góc với trục đó; cả hai mặt phẳng này đều là mặt phẳng đối xứng khi ta bỏ qua các hiệu ứng bờ. Từ đó ta suy ra từ trường triệt tiêu ở mọi thời điểm.

Độ biến thiên năng lượng của hệ là (chú ý dấu):

$$\Delta \mathcal{E} = \left[ \iiint_{\text{không gian}} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau \right]_{t=0}^{t=\infty} = - \iiint_{\text{giữa các hình trụ}} \frac{\epsilon_0 E(r, t=0)^2}{2} d\tau$$

$$\Delta \mathcal{E} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \right)^2 2\pi r h dr = - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} h \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right).$$

2) Từ trường triệt tiêu, vector POYNTING cũng thế. Vậy sự mất năng lượng này xảy ra duy nhất có lợi cho môi trường dẫn điện, do hiệu ứng JOULE. Vậy ta phải

$$\Delta \mathcal{E} = - \int_{t=0}^{t=\infty} \iiint_{\text{giữa các hình trụ}} \frac{j(r, t)^2}{\gamma} d\tau dt.$$

3) Để kiểm tra hệ thức trên, ta tính vector mật độ dòng điện.

Từ trường bằng không, ta có  $\vec{j} = -\vec{j}_D = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , với  $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$ , do

đó:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t=0) e^{-\frac{t}{\tau_R}}$$

Với kí hiệu  $\tau_R = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$  là thời gian tích thoát kết hợp với sự biến đổi của hệ.

Vậy, giữa các hình trụ dẫn điện, ta có:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma Q}{2\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{t}{\tau_R}} \vec{e}_r.$$

Lúc đó, ta có thể nghiệm lại:

$$\int_{t=0}^{t=\infty} \iiint_{\text{giữa các hình trụ}} \frac{j(r, t)^2}{\gamma} d\tau dt = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma Q}{2\pi\epsilon_0} \right)^2 2\pi h \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \tau_R$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} h \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) = -\Delta \mathcal{E}.$$

6) 1) Từ trường là đều ở bên trong cuộn dây:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n \vec{I} z.$$

Còn ở bên ngoài thì nó bằng không.

2) Năng lượng trên đơn vị thể tích kết hợp với từ trường là  $\frac{B_0^2}{2\mu_0}$ .

Vậy năng lượng kết hợp với cuộn dây là:

$$\mathcal{E}_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} l \pi a^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 l \pi a^2) I^2.$$

Đồng nhất kết quả này với biểu thức thường dùng  $\frac{1}{2}LI^2$  là năng

lượng tích lũy trong cuộn dây, thì ta được (các khái niệm được mô tả ở chương 5):  $L = \mu_0 n^2 l \pi a^2$ .

Áp dụng số cho ta:  $L = 100\text{mH}$ .

Để có được các độ tự cảm lớn, cỡ Henry, cần phải đưa vào cuộn dây một lõi sắt.

Lúc đó, nói chung cuộn dây sẽ mất các tính chất có thành phần tuyến tính.

Năng lượng lưu trữ sẽ khá nhỏ:

$$\mathcal{E}_m \approx 50\text{mJ}$$

3) Phương trình biến đổi của dòng điện trong mạch là

$$e = L \frac{dI}{dt} + RI,$$

nếu kể đến các điều kiện ban đầu thì ta có:  $I(t) = \frac{e}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ ,

trong đó  $\tau = \frac{L}{R}$  là thời gian đặc trưng cho sự biến đổi của mạch điện.

4) Từ trường sinh ra bởi cuộn dây là (dùng các tọa độ trụ):

• ở trong cuộn dây (với  $r < a$ ):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{với } \vec{B}_0 = \mu_0 n \frac{e}{R} \vec{e}_z;$$

• ở ngoài cuộn dây (với  $r > a$ ):  $\vec{B} = \vec{0}$ .

(Không có hiệu ứng bờ: các bờ bị "đẩy" ra vô cực trong gần đúng ống dây rất dài).

Từ trường tại mọi điểm  $M$ , đều thuộc về mặt phẳng  $M$  và trục  $(Oz)$ , là một mặt phẳng phản xứng của phân bố các dòng điện của ống dây. Vậy điện trường tại điểm  $M$  sẽ vuông góc với mặt phẳng đó, và có dạng:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta.$$

Ta viết dạng tích phân của phương trình MAXWELL - FARADAY, bằng cách chọn làm đường cong kín là một vòng tròn bán kính  $r$  và trục  $(Oz)$ .

• với  $r \leq a$ :  $2\pi r E(r, t) = -\pi r^2 \left( B_0 \frac{1}{\tau} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right)$ ;

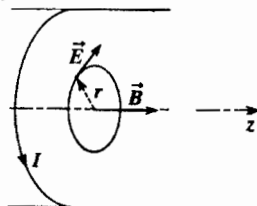
• với  $r \geq a$ :  $2\pi r E(r, t) = -\pi a^2 \left( B_0 \frac{1}{\tau} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right)$ .

Cuối cùng, điện trường sinh ra bởi ống dây là:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} -\frac{r}{2} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_\theta & \text{nếu } r \leq a; \\ -\frac{a^2}{2r} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_\theta & \text{nếu } r \geq a. \end{cases}$$

Các mật độ năng lượng từ và điện trên đơn vị thể tích có giá trị tương ứng, vì  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ :

$$\mathcal{E}_{\text{Bvol}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2},$$



$$\text{và} \quad \mathcal{E}_{\text{Evol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \begin{cases} \frac{r^2 \mu_0 n^2}{8c^2} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 & \text{với } r \leq a; \\ \frac{a^4 \mu_0 n^2}{8r^2 c^2} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 & \text{với } r \geq a. \end{cases}$$

Nếu ta so sánh hai mật độ này ở  $r = a$  (tại đó  $\mathcal{E}_{\text{Evol}}$  là cực đại), thì ta được:

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{Evol}}}{\mathcal{E}_{\text{Bvol}}} = \frac{a^2}{4c^2} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 \approx \left( \frac{a}{2c\tau} \right)^2.$$

Khi lấy các trị số của 2) và  $R = 10\text{k}\Omega$ , thì ta tìm được:

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{Evol}}}{\mathcal{E}_{\text{Bvol}}} \approx 1,7 \cdot 10^{-5}$$

Thành thử, ta nhận thấy mật độ năng lượng điện, trên đơn vị thể tích hoàn toàn không đáng kể so với mật độ năng lượng từ, trên đơn vị thể tích.

5) Trong ống dây, vector POYNTING có giá trị:

$$\vec{II}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\mu_0 n^2 I(t) \frac{dI(t)}{dt} \frac{r}{2} \vec{e}_r = II(r, t) \vec{e}_r.$$

Thông lượng của nó đi qua hình trụ, chiều dài  $l$  và bán kính  $a$ , mà trong đó từ trường không triệt tiêu, có giá trị:

$$-2\pi a l II(r = a, t) = +\mu_0 n^2 \pi a^2 l I(t) \frac{dI(t)}{dt}$$

Kết quả này cũng có thể được viết dưới dạng:

$$LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} LI^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}_m}{dt}.$$

Nó tương ứng với độ biến thiên của năng lượng tích lũy dưới dạng từ, bởi cuộn dây trong đơn vị thời gian.

7) 1) Từ trường không thể trực tiếp khiến các điện tích chuyển động. Tuy nhiên, các độ biến thiên theo thời gian của nó lại gây cảm ứng một điện trường có thể làm cho quả cầu chuyển động.

2) Từ trường sinh ra bởi ống dây ở trong ống không triệt tiêu:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 n I(t) \vec{e}_z.$$

Biểu thức của điện trường bên trong ống dây, trong tọa độ trụ  $(r_{tr}, \theta_{tr}, z)$ , trục  $(Oz)$  (xem bài tập 6) là:

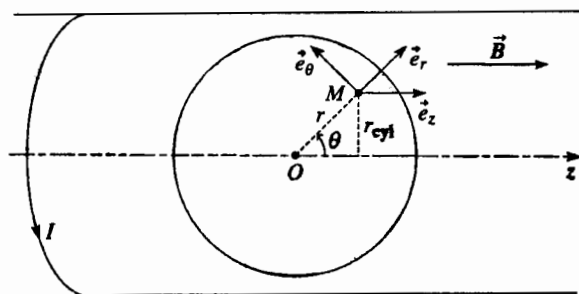
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{r_{tr}}{2} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_{\theta_{tr}}.$$

Trường này là trục xuyên tâm, và cho phép làm quay quả cầu quanh trục quay  $(Oz)$  của nó.

Vì ta cho vật quay hình học cầu, nên về sau, ta cũng dùng biểu thức của trường  $\vec{E}$  trong tọa độ cầu  $(r, \theta, \varphi)$  với  $r \sin \theta = r_{tr}$  tâm 0 và trục  $(Oz)$ , nghĩa là:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{r \sin \theta}{2} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_\varphi = E(r, \theta) \vec{e}_\varphi.$$

Chú ý các kí hiệu: Vector trục xuyên tâm của các tọa độ cầu  $\vec{e}_\varphi$  đồng nhất với vector trục xuyên tâm của các tọa độ trụ  $\vec{e}_{\theta\varphi}$



Ta áp dụng định lí mômen động cho quả cầu, chiếu trên trục quay của nó. Sự quay được giả thiết là tự do (không ma sát), và mômen của các lực tác dụng lên quả cầu, đối với trục (Oz), quy lại là mômen  $\vec{M}$  của các lực tác dụng lên quả cầu do điện trường sinh ra bởi ống dây:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_z$$

$$\text{với } \mathcal{M}_z = \iiint_{\text{quả cầu}} (\vec{OM} \wedge \vec{E} dq) \cdot \vec{e}_z \quad \iiint_{\text{quả cầu}} (dq \cdot E_\varphi) (r \sin \theta).$$

Ta tính tích phân:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( Q \frac{dr r d\theta r \sin \theta d\varphi}{\frac{4}{3} \pi R^3} \right) \\ &\quad \times \left( -\frac{r \sin \theta}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \right) (r \sin \theta) = -\frac{1}{5} \mu_0 n \frac{dI}{dt} QR^2. \end{aligned}$$

Khi tích phân phương trình chuyển động quay giữa thời điểm ban đầu và thời điểm cuối, ta được:

$$\omega = -\mu_0 n I_0 \frac{Q}{2m} = -\frac{QB_0}{2m}.$$

3) Cho trường hợp một quả cầu bán kính 1 cm, khối lượng  $m = 1g$  (càng nhẹ càng tốt, để nó quay "nhanh"), mang điện tích  $Q = 10^{-10} C$  (đối với điện tích này, trường sát bề mặt quả cầu vào cỡ trường đánh thủng không khí, nghĩa là vào cỡ  $10^4 V.m^{-1}$ ).

Chú ý: Không phải hiển nhiên là cứ chọn một quả cầu nhiễm điện, nhưng không được dẫn điện trong toàn thể tích của nó. Nếu quả cầu tích điện ở bề mặt, thì điều đó quy về thay thế trong biểu thức của  $\omega$  thừa số  $\frac{1}{2}$  bằng một thừa số khác, nhưng điều đó cũng sẽ không làm thay đổi đáng kể độ lớn của vận tốc quay.

Đối với ống dây, ta dùng các "biện pháp trung bình": nam châm điện mạnh tạo ra một trường cỡ tesla.

Vận tốc quay đạt được, với các độ lớn như trên, chỉ cỡ  $5.10^{-8} \text{ rad.S}^{-1}$ , nghĩa là khoảng 1 vòng trong bốn năm!

Muốn tăng giá trị đó lên thật lớn, thì phải liệu cho tỉ số  $\frac{Q}{m}$  rất lớn.

Tuy nhiên, điều này ít có khả năng thực hiện, vì người ta đã điều chỉnh tới mức tối đa, tỉ số đó cũng chỉ đạt được  $10^{-7} C.kg^{-1}$ .

Ngược lại, ở thang nguyên tử, tỉ số  $\frac{Q}{m}$  có thể đạt tới

cấp  $\frac{1,6.10^{-19}}{9,1.10^{-31}} \approx 10^{11}$  (giá trị tính cho một elec tron), và phản ứng

của vật chất, đối với một trường áp đặt vào, lúc đó có thể sẽ trở nên rất lớn ...

Nhưng lúc này, lí thuyết lượng tử sẽ rất cần thiết để giải thích một cách thỏa đáng các hiệu ứng quan sát được.

4) Quả cầu đang quay có thể được coi như một tập hợp các vòng khuyên dòng điện. Mật độ dòng điện thể tích ở bên trong quả cầu là:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \frac{3Q}{4\pi R^3} r \sin \theta \omega \vec{e}_\varphi.$$

Cứ mỗi vòng khuyên dòng điện tròn, trục (Oz), bán kính  $r \sin \theta$  và tiết diện nguyên tố  $dS = r dr d\theta$ , chạy qua bởi dòng điện  $di = j dS$ , ta lại có thể kết hợp một mômen từ nguyên tố:

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= \pi (r \sin \theta)^2 di \vec{e}_z \\ &= \frac{3Q\omega}{4R^3} r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Do vậy, mômen từ của quả cầu đang quay là:

$$\vec{M} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{3Q\omega}{4R^3} r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \vec{e}_z = \frac{QR^2}{5} \omega \vec{e}_z.$$

Nó được gắn với trường do ống dây áp đặt theo hệ thức:

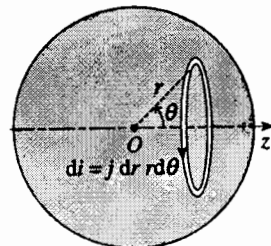
$$\vec{M} = -\frac{Q^2 B_0 R^2}{10m} \vec{e}_z.$$

Ta nhận thấy rằng mômen từ này tỷ lệ với trường áp đặt vào, nhưng hướng theo chiều ngược lại: việc khởi động quay quả cầu là một cách tiếp cận cơ bản một tính chất quan trọng của vật chất gọi là tính nghịch từ (Xem chương 6). Dưới tác dụng của một trường  $\vec{B}$ , các nguyên tử, phân tử cấu thành vật chất có được một mômen từ ngược với trường  $\vec{B}$ . Thành thử vật chất có khuynh hướng nam châm hóa, chống lại trường áp đặt vào nó.

5) Mỗi vòng khuyên dòng điện nguyên tố xét ở 4) tạo ra tại O một từ trường:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2(r \sin \theta)} \sin^3 \theta \vec{e}_z.$$

Bằng cách chồng chất, ta thu được từ trường tạo ra bởi quả cầu tại tâm của nó:



$$\vec{B} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mu_0 \left( \frac{3Q}{4\pi R^3} r \sin\theta \omega r dr d\theta \right)}{2r \sin\theta} \sin^3\theta \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 Q}{4\pi R} \omega \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 Q^2 B_0}{8\pi R m} \vec{e}_z.$$

Trường này nhỏ không đáng kể so với trường của ống dây nếu

$$\frac{\mu_0 Q^2}{8\pi R m} \ll 1, \text{ nghĩa là:}$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \ll 2mc^2.$$

Đối với thí nghiệm "cổ điển" đã xét ở trên, thì bất đẳng thức này hiển nhiên là được nghiệm đúng, và từ trường tạo ra bởi quả cầu lại cực kỳ yếu để có thể quan sát được.

Đối với một electron ( $Q = 1,6 \cdot 10^{-19} C$  và  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$ ), và với  $R = 10^{-10} m$  (kích thước của một "quỹ đạo" electron chung quanh hạt nhân), thì bất đẳng thức này hầu như còn được thỏa mãn một cách thích hợp. Tuy nhiên, ta biết rằng một lý thuyết lượng tử lúc này là cần thiết.

8) 1) Phương trình MAXWELL - FARADAY cho:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} = -kE_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y.$$

Khi tích phân theo thời gian ta được từ trường của sóng.

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

(sai kém một trường tĩnh. Trường này không tham dự vào các hệ thức liên kết giữa các trường điện và từ)

Các phương trình MAXWELL trong chân không ( $\rho = 0$  và  $\vec{j} = 0$ ) buộc các trường này phải có divergence triệt tiêu; điều này đã được thử nghiệm rõ ràng trong trường hợp hiện tại. Phương trình MAXWELL - FARADAY có cấu trúc được nghiệm đúng.

Phương trình MAXWELL - AMPÈRE bắt buộc ở đây:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \text{rot} \vec{B} = -\frac{k^2 c^2}{\omega} E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x.$$

Biết rằng  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x$ , ta suy ra hệ thức:

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

2) Mật độ năng lượng thể tích của trường sóng là:

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E_0^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{k^2}{2\epsilon_0 \mu_0 \omega^2} \right) \cos^2(\omega t - kz)$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz),$$

Và trung bình theo thời gian của nó là:  $\langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$ .

3) Sự phân tích thứ nguyên của  $\vec{g}$  cho:

$$[\epsilon_0 EB] = \left[ \epsilon_0 E^2 \frac{k}{\omega} \right] = \left[ \frac{\epsilon_0}{c} E^2 \right]$$

$$[\epsilon_0 EB] = \frac{\text{mật độ năng lượng thể tích}}{\text{vận tốc}} = \frac{\text{năng lượng}}{\text{thể tích} \times \text{vận tốc}} = \frac{\text{xung lượng}}{\text{thể tích}};$$

Sự phân tích đó chứng tỏ rằng đại lượng này đồng nhất với xung lượng trên đơn vị thể tích.

4) Khi đồng nhất năng lượng trung bình trên đơn vị thể tích

$\langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$  với năng lượng trên đơn vị thể tích của các photon là  $nk\nu$ , thì ta được:

$$n = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2h\nu}.$$

Các photon, kết hợp với sóng cũng hướng theo trục ( $Oz$ ) như sóng.

Xung lượng trên đơn vị thể tích của các photon này sẽ có giá trị:

$$\langle \vec{g} \rangle = n \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c} \vec{e}_z$$

Nhưng, xuất phát từ trường sóng ta lại được:

$$\langle \vec{g} \rangle = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} = \left\langle \epsilon_0 E_0^2 \frac{k}{\omega} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z \right\rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c} \vec{e}_z$$

kết quả hoàn toàn phù hợp với kết quả trước.

# CẢM ỨNG ĐIỆN TỪ

# 4

## Mở đầu

*Các hiện tượng cảm ứng điện từ đã được phát hiện, rồi được hình thức hóa ở thế kỉ XIX, khi đã có khả năng sản sinh và đo lường các dòng điện.*

*MICHAEL FARADAY (1791 – 1867), nhà vật lí và hóa học Anh, đã tiến hành các công trình quan trọng về hóa học (các định luật điện phân) và về tĩnh điện.*

*Ông đã nghiên cứu các tác dụng tương hỗ của một nam châm và một mạch điện.*

*Năm 1831, ông đã phát hiện ra hiện tượng cảm ứng.*

*FRANZ ERNST NEUMANN (1798 – 1895), nhà vật lí Đức, đã công bố vào năm 1845 một lí thuyết toán học về hiện tượng cảm ứng.*

*HENDRIK ANTOON LORENTZ (1853 – 1928), Nhà vật lí Hà Lan, đã chú tâm xây dựng các giải thích vi mô về các hiện tượng điện từ*

*Ông đã được giải thưởng NOBEL năm 1902 về lí thuyết điện từ về vật chất.*

## M U C T I Ê U

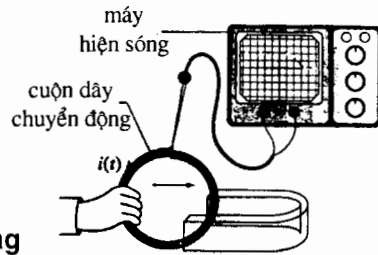
- Nghiên cứu một mạch điện chuyển động trong một từ trường không đổi và sự cân bằng năng lượng.
- Nghiên cứu một mạch điện chịu tác dụng của một từ trường biến thiên.

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Khái niệm về dòng điện.
- Các phương trình MAXWELL.
- Các tính chất của trường điện từ trong phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng (GD.C.C.D)
- Lực PAPLACE.



# 1 Cảm ứng điện từ



## 1.1. Hiện tượng cảm ứng

### 1.1.1. Cuộn dây chuyển động trong một từ trường không

#### ■ Thí nghiệm (H.1)

Ta hãy dịch chuyển một cuộn dây đặt gần các cực của một nam châm (nam châm chữ U chẳng hạn) cố định.

H.1. Cuộn dây chuyển động (được dịch chuyển bởi người quan sát) hoạt động như một máy phát điện.

#### ■ Ta quan sát thấy gì ?

Nếu hai đầu dây của cuộn dây được nối với một máy hiện sóng, thì ta sẽ nhận thấy sự tồn tại của một điện áp  $u(t)$  trong khi không có một máy phát điện nào có mặt trong mạch :

- nếu cuộn dây đứng yên, thì  $u = 0$  ;
- nếu  $u$  dương khi cuộn dây lại gần, thì nó sẽ âm khi cuộn dây ra xa ; biên độ của  $u$  tăng theo vận tốc chuyển dịch  $v_e$  áp đặt cho cuộn dây.

#### ■ Lời bình giải

Thiết bị này hoạt động như một máy phát điện động có khả năng làm chuyển động các điện tích linh động của vật dẫn. Ta nói rằng mạch điện là trung khu của hiện tượng *cảm ứng điện từ*.

Máy phát điện này được gây cảm ứng bởi sự dịch chuyển của mạch điện trong một miền có một từ trường không đổi chi phối.

**Một mạch điện chuyển dịch trong một từ trường không đổi có thể hoạt động như một máy phát động điện : nó là trung khu của một hiện tượng cảm ứng. Ta nói, trong trường hợp này, đó là *cảm ứng LORENTZ*.**

#### Chú ý :

Khi nói về trường không đổi, ta ngầm giả thiết là các nguồn của trường này đều ở bên ngoài mạch điện chuyển động, mà từ trường riêng của nó, là hàm vị trí của mạch điện, lại phụ thuộc tương minh vào thời gian.

### 1.1.2. Cuộn dây cố định trong một từ trường biến thiên

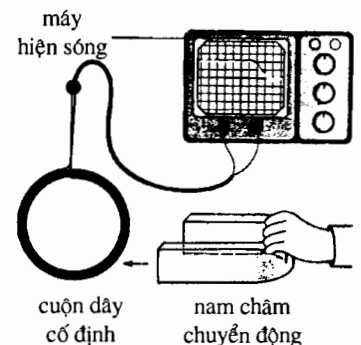
#### ■ Thí nghiệm (H.2).

Ta trở lại thí nghiệm trước, nhưng làm nam châm dịch chuyển và giữ cuộn dây đứng yên.

#### ■ Ta quan sát thấy gì ?

Hai đầu dây của cuộn dây vẫn nối với máy hiện sóng, nên ta cũng lại nhận thấy có sự tồn tại của một điện áp  $u(t)$  trong khi không có một máy phát điện nào có mặt trong mạch ;

- nếu nam châm đứng yên, thì  $u = 0$  ;
- nếu  $u$  dương khi nam châm lại gần, thì  $u$  sẽ âm khi nam châm ra xa ; biên độ của  $u$  tăng theo vận tốc dịch chuyển áp đặt cho nam châm.



H.2. Cuộn dây cố định hoạt động như một máy phát điện nếu nam châm chuyển dịch.

## ■ Lời bình giải

Hệ cũng vẫn hoạt động như một máy phát điện.

Mạch điện lại là trung khu của một hiện tượng cảm ứng điện từ.

• Ở đây, chính là nam châm dịch chuyển trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm : ở đây, mạch điện nhìn thấy một từ trường biến đổi theo thời gian. Chính những biến thiên theo thời gian này của từ trường phải chịu trách nhiệm ở đây về hiện tượng cảm ứng.

**Khi một mạch điện cố định chịu tác dụng của một từ trường biến thiên, thì nó còn là trung khu của một hiện tượng cảm ứng. Ta nói đó là cảm ứng NEUMANN.**

### Chú ý.

*Từ trường riêng của mạch điện có thể được bao gồm trong trường biến thiên quan sát thấy. Trường riêng có một tác dụng cảm ứng ngay lên chính mạch điện ta nói đó là hiện tượng tự cảm.*

• Trong thực tế, ta cũng có thể tạo ra một từ trường biến thiên nhờ một mạch điện cố định. Trong thí nghiệm biểu diễn trên hình 3, ta dùng hai cuộn dây  $b_1$  và  $b_2$ , 1000 vòng mỗi cuộn. Cuộn thứ nhất được nuôi bởi một máy phát điện áp biến thiên  $u_1(t)$  mà ta quan sát trên máy hiện sóng.

Khi nối cuộn thứ hai theo đường khác tới máy hiện sóng, ta quan sát thấy một điện áp  $u_2(t)$ , tỉ lệ rõ rệt với các độ biến thiên của  $u_1(t)$ : các biến thiên theo thời gian của từ trường  $\vec{B}_1$  tạo ra bởi  $b_1$  đều được thu nhận bởi  $b_2$ , là trung khu của một hiện tượng cảm ứng điện từ.

Trong thí nghiệm này, cuộn  $b_2$  đã phát hiện được trường điện từ biến thiên sinh ra bởi  $b_1$ : ta đã thực hiện được một ăngten (thật sơ đẳng !). Ta sẽ thấy rằng hiện tượng cảm ứng điện từ có rất nhiều áp dụng quan trọng.

### Chú ý.

*Cuộn thứ hai, đến lượt nó, lại tạo ra một trường  $\vec{B}_2$  biến thiên, tác dụng lên cuộn  $b_1$ . Ở đây có một hiện tượng hỗ cảm. Mỗi cuộn dây cũng chịu ảnh hưởng của từ trường riêng biến thiên của nó : như vậy lại còn có hiện tượng tự cảm. Ta sẽ trở lại các hiệu ứng này trong chương sau.*

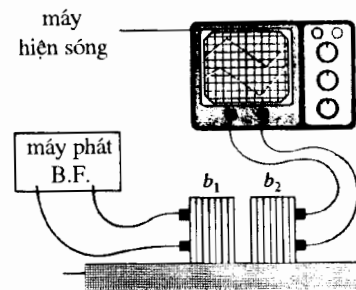
### 1.1.3. Hai mặt của hiện tượng cảm ứng

Trong thí nghiệm thứ nhất, sự dịch chuyển của mạch điện với vận tốc  $\vec{v}_e$  trong trường không đổi  $\vec{B}_0$  của nam châm, kéo theo sự xuất hiện một lực từ dạng  $q\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0$  có khả năng làm các điện tích dẫn của mạch điện chuyển động tuần hoàn.

Ở đây ta giải thích hiện tượng cảm ứng của LORENTZ mà ta sẽ chi tiết hóa ở §2.

Trong thí nghiệm thứ hai, mạch điện, cố định trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, nhìn thấy xuất hiện một từ trường biến thiên tạo nên bởi nam châm. Ở chương trước ta đã thấy rằng các độ biến thiên theo thời gian của từ trường kéo theo sự xuất hiện một điện trường cảm ứng, được thể hiện bởi phương trình MAXWELL - FARADAY.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



H.3. Chỉ mình cuộn  $b_1$  được cung cấp điện : cuộn  $b_2$  hoạt động như một máy phát điện.

Điện trường cảm ứng có khả năng làm chuyển động các điện tích của mạch điện và sự tồn tại của nó chứng thực hiện tượng cảm ứng của NEUMANN (xem § 3.)

Ta cũng có thể nhận thấy rằng thí nghiệm thứ hai, đối với người quan sát chuyển động cùng với nam châm, cũng tương tự thí nghiệm thứ nhất : vì người quan sát này nhìn thấy cuộn dây dịch chuyển trong một từ trường không đổi. Sự phân biệt của hai trường hợp trên gắn với việc lựa chọn cách quan sát (nghĩa là việc chọn hệ quy chiếu nghiên cứu), nhưng hiệu quả thì lại như nhau.

Cái mà ta gọi là hiện tượng cảm ứng LORENTZ trong thí nghiệm thứ nhất, hay hiện tượng cảm ứng NEUMANN trong thí nghiệm thứ hai, thực tế chỉ là cùng một hiện tượng vật lí và là hiện tượng duy nhất được quan sát theo hai quan điểm khác nhau.

**Chú ý.**

- Các hiệu ứng được quan sát trong hai thí nghiệm đều tuyệt đối giống nhau nếu chuyển động tương đối của cuộn dây và nam châm là một chuyển động tịnh tiến thẳng đều, vì các định luật vật lí có cùng cách lập công thức như nhau trong mọi hệ quy chiếu galilée.
- Cũng cần nhớ rằng có thể có khó khăn khi dịch chuyển một máy hiện sóng với vận tốc không đổi để bảo đảm một sự tương đương hoàn hảo giữa hai cách quan sát. Do vậy, độc giả được phép thay máy bằng một bóng điện nối với cuộn dây ...

**Cảm ứng điện từ là một hiện tượng duy nhất, cảm ứng LORENTZ và cảm ứng NEUMANN là hai mặt của cùng một hiện tượng, chỉ phụ thuộc quan điểm của người quan sát.**

Trong bài giảng tiếp sau, ta sẽ nghiên cứu các đặc trưng của hai mặt đó của cảm ứng điện từ.

Sau đó, ta sẽ có thể mô tả hiện tượng cảm ứng điện từ trong trường hợp tổng quát, khi một mạch điện linh động dịch chuyển trong một từ trường biến thiên.

## 1.2. Định luật định tính của LENZ (hay định luật tiết chế)

### 1.2.1. Các hiệu ứng của hiện tượng cảm ứng

Ta hãy phân tích các hệ quả của hiện tượng cảm ứng, nhờ một thí nghiệm mới.

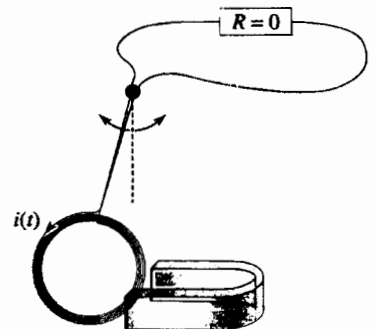
■ **Thí nghiệm (h.4)**

Ta trở lại thí nghiệm đã được mô tả trên hình 1, bằng cách thay máy hiện sóng bằng một ngắn mạch (điều đó không có nghĩa là điện trở tổng cộng của mạch điện bằng không).

Đáng lẽ dùng tay áp đặt một chuyển động cho cuộn dây này, thì ta để nó dao động trong từ trường ngoài không đổi của một nam châm, sau khi dịch chuyển cuộn dây ra khỏi vị trí cân bằng của nó.

■ **Ta quan sát thấy gì ?**

- Các dao động của cuộn dây bị tắt dần.
- Nếu cuộn dây hở mạch thì các dao động cũng tắt dần (do có những ma sát cơ học), nhưng thời gian tắt dần lớn hơn so với khi mạch điện đóng kín.



**H.4.** Cuộn dây được "khép kín" với điện trở ngoài bằng không (điện trở tổng cộng của mạch điện khác không). Trong mạch có một dòng điện  $i(t)$ . Khi được thả lỏng, cuộn dây thực hiện các dao động tắt dần.



## ■ Lời bình giải

Chuyển động tắt dần nhanh hơn khi mạch đóng kín. Nhưng, những lực bổ sung duy nhất có thể tồn tại là các lực LAPLACE : tồn tại một dòng điện  $i(t)$  chạy trong cuộn dây. Dòng điện cảm ứng  $i(t)$  này và trường không đổi  $\vec{B}_0$  kéo theo sự tồn tại của các lực LAPLACE, chống lại chuyển động của mạch điện.

Trong thí nghiệm đã mô tả, thì các lực LAPLACE là các lực chống lại sự dịch chuyển đã gây ra chúng : thành thử từ đó có thể suy ra chiều của dòng điện cảm ứng, trong các pha khác nhau của chuyển động.

Xem xét các hình 5a và 5b.

### • Quan sát hình 5a

Cuộn dây đi vào từ trường (với vận tốc hướng về phía phải) : trường áp đặt (hay được "nhìn thấy" bởi cuộn dây) trở nên ngày càng mạnh khi cuộn dây càng thâm nhập sâu vào trường này. Dòng điện cảm ứng coi như đều trên cuộn dây, và các lực LAPLACE chiếm ưu thế trong miền trường mạnh.

Lực tổng hợp của các lực LAPLACE phải hãm chuyển động lại. Lực đó ngược chiều vận tốc và như vậy là hướng sáng trái. Từ đó suy ra sự định hướng của dòng điện cảm ứng.

Nhớ rằng dòng điện cảm ứng cũng tự nó tạo ra một từ trường (từ trường cảm ứng), đối nghịch với  $\vec{B}_0$ , nhưng nhất là lại đối nghịch với độ biến thiên của từ trường "được nhìn thấy" bởi cuộn dây.

### • Quan sát hình 5b

Cuộn dây đi ra khỏi từ trường (vận tốc hướng về phía trái) : trường áp đặt giảm cường độ khi cuộn dây ngày càng rời khỏi trường này.

Lực tổng hợp của các lực LAPLACE (luôn luôn chiếm ưu thế trong miền trường mạnh) phải hãm chuyển động lại, do đó đối ngược với vận tốc : vậy lực hướng về phía phải, từ đó suy ra sự định hướng của dòng cảm ứng.

Nhớ rằng dòng điện cảm ứng tự nó cũng tạo ra một từ trường (từ trường cảm ứng), hướng theo  $\vec{B}_0$ , nhưng nhất là lại đối nghịch với độ biến thiên của trường "được nhìn thấy" bởi cuộn dây.

Lưu ý rằng, trong thí nghiệm này,  $\|\vec{B}_{\text{cảm ứng}}\|$  rất yếu so với  $\|\vec{B}_0\|$ .

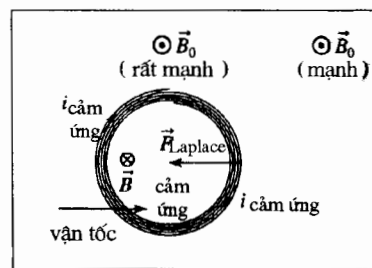
## 1.2.2. Định luật tiết chế

Trong thí nghiệm này, bao giờ ta cũng nhận thấy hệ phản ứng theo cách chống lại nguyên nhân của hiện tượng.

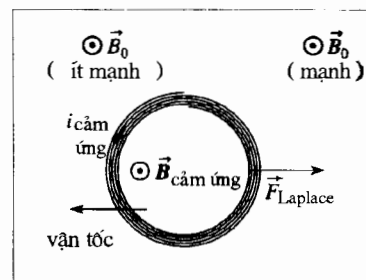
- Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm sự cảm ứng là do sự dịch chuyển của cuộn dây, và hệ phản ứng bằng cách sinh ra một lực để chống lại chuyển động của nó.

- Trong hệ quy chiếu của cuộn dây, hiện tượng cảm ứng được gây ra bởi độ biến thiên của trường  $\vec{B}$  "nhìn thấy" bởi cuộn dây. Hệ phản ứng bằng cách sinh ra một từ trường cảm ứng chống lại độ biến thiên của từ trường áp đặt vào cuộn dây.

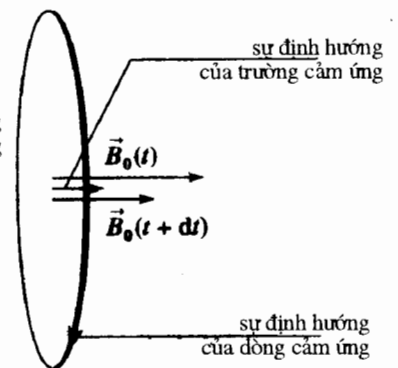
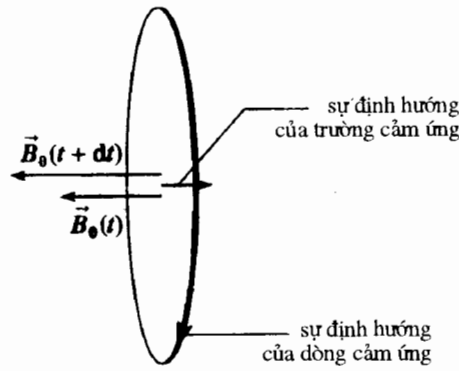
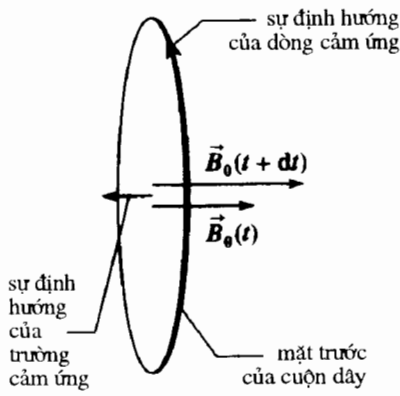
Các hình 6 cho phép trình bày chi tiết các kết quả trên đây.



H.5a. Trường  $\vec{B}_0$  được áp đặt (do được "nhìn thấy" bởi cuộn dây) sẽ ngày càng mạnh khi cuộn dây dần dần đi vào trong miền này : dòng điện đi theo chiều mũi tên để sinh ra một lực ngược chiều vận tốc.



H.5b. Cuộn dây đi ra khỏi miền, tại đó trường áp đặt  $\vec{B}_0$  (được "nhìn thấy" bởi cuộn dây) là mạnh. Dòng điện có chiều mũi tên để sinh ra một lực ngược với vận tốc.



**H.6a và b.** Các sự định hướng của dòng điện và trường cảm ứng khi cuộn dây chịu tác dụng của một trường áp đặt  $B_0$  tăng dần.

**H.6.c.** Các sự định hướng của dòng điện và trường cảm ứng khi cuộn dây chịu tác dụng của một trường áp đặt  $B_0$  giảm dần.

Ta có thể tổng quát hóa các kết luận này bằng cách phát biểu một định luật tiết chế kết hợp với các hiện tượng cảm ứng điện từ: định luật LENZ.

### Định luật LENZ

Các hiệu ứng từ, động điện và cơ học của sự cảm ứng đều được định hướng theo cách chống lại các nguyên nhân đã gây ra chúng.

Trong thực tế, định luật này vô cùng hữu ích, vì nó cho phép phát hiện một cách đơn giản các sai lệch về sự định hướng được thể hiện bằng sai số về dấu.

# Áp dụng 1

## Cuộn dây trong một khe nam châm điện

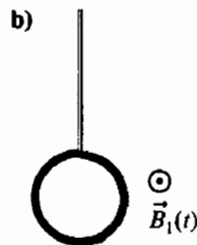
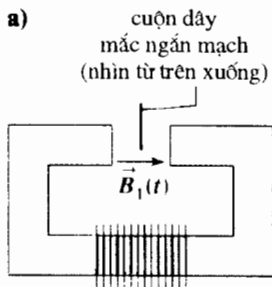
Trong thí nghiệm được mô tả trên các hình 7, cuộn dây tự đóng kín được treo trên một nam châm điện. Thoạt tiên, cuộn dây chỉ được nhúng một phần vào khe và nam châm điện không được cung cấp điện

1) Hãy mô tả các hiện tượng được quan sát kể từ thời điểm người ta cung cấp điện cho nam châm điện.

Người ta phân biệt :

- a) pha (rất ngắn) thiết lập trường ;
- b) pha trong đó trường là không đổi.

2) Hãy mô tả các hiện tượng quan sát thấy kể từ thời điểm  $t_0$  mà người ta cắt nguồn nuôi nam châm điện.



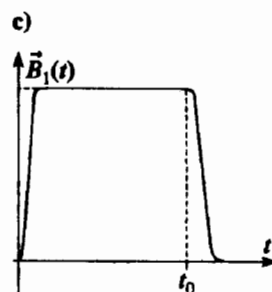
1) a) Trong thời gian của pha thiết lập trường  $\vec{B}_1$ , cuộn dây có khuynh hướng đi đến các miền trường yếu, để chống lại sự tăng của trường mà nó "nhìn thấy".

Ta cũng có thể nói rằng từ trường cảm ứng (yếu) phải ngược chiều với  $\vec{B}_1$  để độ biến thiên của trường tổng cộng bớt nhanh hơn.

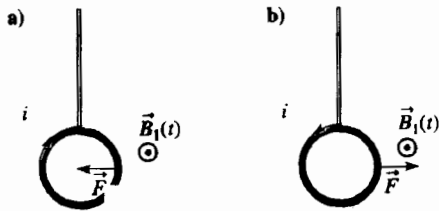
Từ đó ta suy ra chiều dòng điện cảm ứng (H.8a)

Sự phân tích các tác dụng LAPLACE chứng tỏ rằng cuộn dây chịu một lực có khuynh hướng đẩy nó ra khỏi trường

b) Ngay sau khi thiết lập được  $\vec{B}_1$ , thì cuộn dây đã có được một vận tốc hướng ra phía ngoài khe của nam châm điện.



H.7a, b, c. Cuộn dây được nhúng một phần vào từ trường  $\vec{B}_1(t)$  của nam châm điện.



H.8. Dòng điện cảm ứng và các lực LAPLACE :

a. trong suốt pha thiết lập trường ;

b. trong suốt pha cắt đứt trường.

Theo định luật LENZ, tổng hợp các tác dụng LAPLACE là một lực ngược chiều với chuyển động và chuyển động của cuộn dây, có điện trở rất nhỏ nhưng không triệt tiêu, sẽ nhanh chóng bị tắt.

2) Trong thời gian giảm nhanh của  $\vec{B}_0$ , hệ phản ứng bằng một lực có khuynh hướng đẩy cuộn dây về miền trường mạnh, nghĩa là về khe nam châm điện. Một khi trường  $\vec{B}_0$  bị cắt, thì không còn hiện tượng cảm ứng nữa. Chuyển động của con lắc chỉ bị tắt dần do các ma sát cơ học.

## 2 Mạch điện chuyển động trong một từ trường không đổi: cảm ứng LORENTZ

Ta sẽ nghiên cứu một mạch điện chuyển động trong một trường "ngoài" độc lập với thời gian. Nhớ rằng điều này có nghĩa là không kể đến trường cảm ứng, tất yếu phải biến đổi theo thời gian, được tạo ra bởi mạch điện này.

### 2.1. Sức điện động dịch chuyển

Sự dịch chuyển của mạch điện giữ vai trò của máy phát điện. Ta kí hiệu  $e_L$  là sức điện động (s.d.d.) của máy phát này, mà ta gọi là *sức điện động LORENTZ* hay *sức điện động dịch chuyển*. Máy phát cảm ứng này gắn với từ trường không đổi  $\vec{B}$  mà trong đó mạch điện dịch chuyển. Trường này cũng tham gia vào biểu thức của các lực LAPLACE tác dụng lên cũng chính mạch điện này. Sức điện động và các lực LAPLACE là hai biểu hiện, ở thang vĩ mô, các hiệu ứng của số hạng từ của lực LORENTZ tác dụng lên một hạt tích điện. Thế nhưng ta biết rằng công suất kết hợp với số hạng đó bằng không. Ở mức vĩ mô, trường  $\vec{B}$  không thể xuất hiện trong một sự cân bằng năng lượng hoàn toàn : công suất của sức điện động dịch chuyển và công suất của các lực LAPLACE phải bù trừ nhau.

Tác dụng của một từ trường ngoài không đổi lên một mạch điện đang chuyển động, thì tương đương với tác dụng của một máy phát điện áp mà sức điện động  $e_L$  được gọi là sức điện động LORENTZ hay sức điện động dịch chuyển.

Công suất của sức điện động LORENTZ được bù trừ bởi công suất của các lực LAPLACE tác dụng lên mạch điện :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_L i = 0.$$

Chú ý :

- Đồng nhất thức này đúng đối với toàn mạch điện, nhưng cũng đúng đối với mọi phần của mạch điện. Như vậy ta có thể tác động một s.d.d. hoàn toàn xác định ở từng nhánh của mạch điện.
- Một từ trường biến thiên sẽ gây cảm ứng một điện trường có khả năng cung cấp năng lượng cho các điện tích. Sự cân bằng của chúng ta được dành cho trường hợp một từ trường không đổi.

# Áp dụng 2

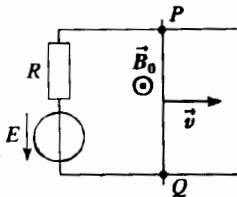
## S.đ.d. LORENTZ và các lực LAPLACE

Giả sử có tình huống như trên hình 9. Thanh dẫn điện PQ, khối lượng m, trượt trên hai ray dẫn điện nằm ngang, nhưng vẫn vuông góc với ray và chịu tác dụng của một trường không đổi và thẳng đứng  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  giả thiết là đều. Nguồn điện được biểu diễn bởi một máy phát điện áp không đổi E và điện trở trong R lớn so với điện trở của các dây dẫn. Một thao tác viên bên ngoài thực hiện một lực để duy trì vận tốc  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  không đổi.

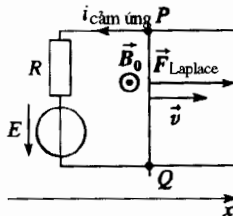
1) Nếu hiện tượng cảm ứng không tồn tại, thì lúc đó :

- phương trình thể hiện định luật OHM ;
  - công suất của các lực LAPLACE ;
  - công suất tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE ;
  - công suất do nguồn cung cấp ;
- sẽ ra sao ?

Tim hệ thức liên hệ các đại lượng đó ? Kết luận.



H.9a. Thanh dẫn điện PQ trượt trên các ray với vận tốc  $\vec{v}$



H.9b. Lựa chọn các định hướng.

2) Chứng minh rằng khi thêm vào mạch điện một sức điện động (s.đ.d.) thì sự cân bằng năng lượng được thỏa mãn. Hãy tính s.đ.d. này. Kết luận.

3) Chứng minh rằng khi một mạch điện dịch chuyển trong một từ trường ngoài không đổi, thì bao giờ ta cũng vẫn có thể khẳng định hai phát biểu sau đây :

- Nếu lực tổng hợp, của các lực ngoại lai LAPLACE tác dụng lên một đoạn mạch điện đang chuyển động với vận tốc v, có dạng :

$$F = k i(t),$$

thì lúc đó s.đ.d. LORENTZ tương ứng sẽ được cho bởi :  $e_L(t) = -k v(t)$ .

- Nếu mômen của các lực này đối với một trục  $\Delta$ , tác dụng lên một đoạn mạch đang quay với

vận tốc góc  $\omega$  chung quanh trục  $\Delta$ , có dạng  $\Gamma_{\Delta} = \Phi_0 i(t)$ , thì lúc đó s.đ.d. sẽ được xác định bởi:

$$e_L(t) = -\Phi_0 \omega(t).$$

1) Ta bắt đầu bằng việc xác định các sự định hướng trên sơ đồ (H.9b)

- Khi không có cảm ứng, định luật OHM có dạng :

$$E = R i$$

- Lực LAPLACE bằng :

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = B_0 i a \vec{e}_x,$$

- Công suất của các lực LAPLACE bằng :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = B_0 i a v = B_0 \frac{E}{R} a v.$$

- Công suất tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE bằng :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R i^2 = \frac{E^2}{R}.$$

- Công suất do máy phát cung cấp :

$$\mathcal{P}_{\text{máy phát}} = E i = \frac{E^2}{R} (= \mathcal{P}_{\text{Joule}})$$

Vận tốc không đổi, lực LAPLACE ngược với lực tác dụng bởi ngoại vi (người thao tác và các ma sát), từ đó  $\mathcal{P}_{\text{ngoài}} = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}}$ .

Vậy sự cân bằng năng lượng hoàn toàn phải có dạng :

$\mathcal{P}_{\text{cung cấp}} = \mathcal{P}_{\text{máy phát}} + \mathcal{P}_{\text{ngoài}} = \mathcal{P}_{\text{tiêu tán}}$ , nghĩa là :

$$\mathcal{P}_{\text{máy phát}} + (-\mathcal{P}_{\text{Laplace}}) = \mathcal{P}_{\text{Joule}}$$

Sự cân bằng này không được nghiệm đúng với các biểu thức tìm thấy trước đây : như vậy là thiếu một số hạng. Thành thử phải kể đến sự cảm ứng được gây ra do chuyển động của một đoạn mạch trong từ trường.

Việc kể đến sự cảm ứng là cần thiết để đạt được một cân bằng năng lượng chính xác khi phải nhờ đến các lực Laplace trong một từ trường không đổi.

2) Giả thiết thanh dẫn điện chuyển động, tương đương với một máy phát s.đ.d.  $e_L$  coi là chưa biết.

Theo định luật OHM ta có :

$$e_L + E = R i$$

Công suất của các lực Laplace là :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = B_0 i a v.$$

- Công suất tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE bằng :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = Ri^2.$$

- Công suất cung cấp bởi máy phát :

$$\mathcal{P}_{\text{phát}} = Ei.$$

Cân bằng chính xác,  $\mathcal{P}_{\text{phát}} - \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}}$ ,  
cho ta :

$$Ei - B_0 avi = Ri^2,$$

nghĩa là :  $E - B_0 av = Ri$ .

Khi đồng nhất hai giá trị của  $i$ , ta được :

$$e_L = -B_0 av,$$

Và ta tìm lại được đúng định luật tổng quát :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_L i = 0.$$

- 3) Nếu lực Laplace  $\vec{F}(t)$ , tác dụng lên một mạch đang chuyển động với vận tốc :

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{e}_x$$

trong một từ trường ngoài không đổi, có dạng :

$$\vec{F}(t) = k i(t) \vec{e}_x,$$

thì công suất của nó  $\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$  bằng  $-e_L(t)i(t)$ , sẽ cho phép nhận được  $e_L$  :

$$e_L(t) = -k v(t).$$

Nếu mômen  $\Gamma_{\Delta}(t)$  của các lực LAPLACE đối với  $\Delta$  (tác dụng lên một mạch điện quay với vận tốc góc  $\vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}_z$  trong một từ trường ngoài không đổi) có dạng :

$$\vec{\Gamma}_{\Delta}(t) = \Phi_0 i(t) \vec{e}_z,$$

thì công suất của nó  $\vec{\Gamma}_{\Delta}(t) \cdot \vec{\omega}(t)$  bằng  $-e_L(t)i(t)$ , sẽ cho phép thu được  $e_L$  :

$$e_L(t) = -\Phi_0 \omega(t).$$

Các kết quả đơn giản này chỉ có giá trị khi có mặt một từ trường ngoài không đổi.

## 2.2. Trường phát động điện LORENTZ

### 2.2.1. Cảm ứng dịch chuyển

Bây giờ ta hãy tìm hiểu cơ chế của "bơm điện tích" của máy phát cảm ứng.

Ta xét một vật dẫn chuyển động  $\mathcal{C}$ . Nhớ rằng  $\vec{v}_e$  là vận tốc của một điểm  $M$  của  $\mathcal{C}$  đối với hệ quy chiếu đang xét  $\mathcal{R}$  và  $\vec{v}_{\mathcal{C}}$  là vận tốc của các điện tích dẫn đối với  $\mathcal{C}$ .

Theo định luật cộng vận tốc, thì vận tốc của các điện tích dẫn đối với  $\mathcal{R}$  có thể viết (H.10), tại  $M$  :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{\mathcal{C}}.$$

Chú ý.

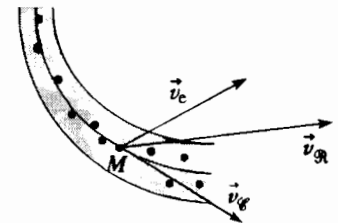
Nói chung,  $\vec{v}_e$  phụ thuộc điểm  $M$  của mạch điện đang xét.

Mỗi điện tích chịu một lực Lorentz tác dụng :

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}_{\mathcal{C}} \wedge \vec{B}).$$

- $\vec{E}$  là điện trường, được xác định trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$ .
- $\vec{v}_{\mathcal{C}} \wedge \vec{B}$  là một đại lượng đồng nhất với một điện trường, chịu trách nhiệm về hiệu ứng HALL đã nói ở chương 1. Pháp tuyến với  $\vec{v}_{\mathcal{C}}$  và do vậy pháp tuyến với các đường dòng, điện trường này không thể giải thích được sự tồn tại của dòng điện.
- Số hạng  $q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$  là một lực phụ bổ sung chỉ được áp đặt vào các điện tích dẫn nếu vật dẫn dịch chuyển. Lực này có thể làm cho các điện tích của mạch điện chuyển động : một s.d.đ. cảm ứng được kết hợp với sự dịch chuyển của mạch điện. Ta gọi trường phát động điện Lorentz là đại lượng vector đồng nhất với một điện trường

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$



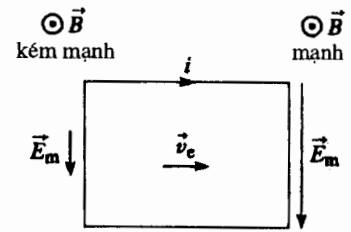
H.10. Vật dẫn đang chuyển động : cộng các vận tốc.

Trong trường hợp biểu diễn trên hình 11, trường phát động điện càng lớn trong miền mà trường  $\vec{B}$  càng mạnh ; sự khác biệt này giải thích đúng chiều của dòng điện cảm ứng và ta có thể xác minh rằng lực tổng hợp của các lực LAPLACE có một chiều đúng với định luật LENZ.

Khi dịch chuyển một vật dẫn trong một từ trường không đổi, thì các điện tích dẫn được khởi động bởi một lực :

$$q\vec{E}_m = q\vec{v}_e \wedge \vec{B} .$$

- $\vec{v}_e$  là vận tốc dịch chuyển của vật dẫn.
- $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$  được gọi là trường phát động điện LORENTZ hay trường phát động điện dịch chuyển



H.11. Mạch điện đi vào miền có trường  $\vec{B}$  mạnh. Trường phát động điện  $\vec{E}_m$  càng mạnh về phía phải, điều này giải thích chiều của dòng điện.

### 2.2.2. Lưu thông của trường phát động điện

Lực LAPLACE tác dụng lên một phần tử mạch điện dạng chỉ, chiều dài  $d\vec{l}$ , trong có dòng điện  $i$  chạy qua và chịu tác dụng của từ trường  $\vec{B}$ , là :

$$d\vec{F}_{Laplace} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} .$$

Khi đoạn mạch AB dịch chuyển (H.12) thì công suất của các lực LAPLACE bằng :

$$\mathcal{P}_{Laplace} = \int_A^B i (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e = -i \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -i \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} .$$

Biết rằng  $\mathcal{P}_{Laplace} = -e_L i$ , ta suy ra kết quả sau đây.

Sức điện động LORENTZ cảm ứng bởi sự dịch chuyển của mạch điện trong một từ trường không đổi  $\vec{B}$ , bằng lưu thông của trường phát động điện dịch chuyển dọc theo mạch điện.

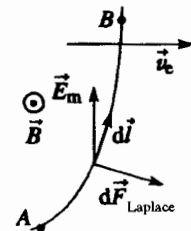
- $e_L = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$  ;
- dòng điện cảm ứng được xác định bằng cách đưa vào một s.đ.đ. bằng  $e_L$  định hướng từ A về B.

Các dòng điện cảm ứng tồn tại nếu s.đ.đ. tổng cộng của một mắt mạng khác 0. nghĩa là nếu lưu thông của trường phát động điện trên một đường cong kín khác 0.

Sự tồn tại của các dòng điện cảm ứng gắn với tính chất không bảo toàn của lưu thông của trường phát động điện.

#### Chú ý.

Để tính toán lưu thông này, ta phải thỏa thuận một sự định hướng của mạch điện. Sự định hướng này là tùy ý, nhưng sẽ được xác định chỉ một lần thôi và sẽ chi phối đồng thời các dấu của s.đ.đ. và của dòng điện chạy trong mạch điện.



H.12. Trường phát động điện và lực LAPLACE.

# Áp dụng 3

## Các dòng cảm ứng trong một bánh xe

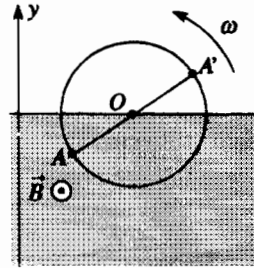
Đường chu vi và một đường kính của một bánh xe bán kính  $a$  là các vật dẫn điện và có cùng điện trở  $R$  như nhau.

Bánh xe chuyển động quanh trục  $(Oz)$ , với vận tốc góc  $\omega$  (H.13a).

Một từ trường không đổi  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  được áp đặt lên nửa  $y < 0$  của bánh xe, và từ trường bằng không đối với  $y > 0$ .

Ta thừa nhận rằng có một trường gián đoạn như vậy tồn tại, biết rằng đây là một sự mô hình hóa được giản lược đi.

Khi không có nguồn điện, hãy xác định các dòng điện và mômen của các lực LAPLACE đối với trục quay.



H.13a. Bánh xe dẫn điện đang quay.

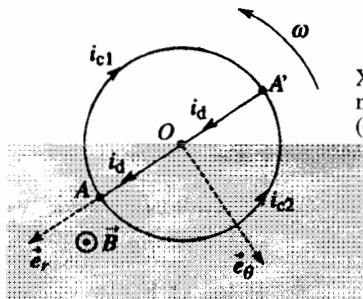
Người ta sẽ dùng hai phương pháp nhờ :

- a) công suất của các lực LAPLACE ;
- b) lưu thông của trường phát động điện.

Dù dùng phương pháp nào, thì lời giải cũng bao gồm bốn bước :

- định hướng mạch điện ;
- tính toán các s.d.d. ;
- vẽ sơ đồ động điện tương đương (rất có ích ngay khi mà mạch điện có từ hai mắt mạng trở lên) ;
- từ đó suy ra các dòng điện và các tác dụng cơ học.

Ta định hướng đường kính từ  $O$  tới  $A$  ở trong trường (H.13b)



H.13b. Chọn lựa các sự định hướng.

Xác định mốc các ly giác (độ dời góc) dương

Xác định mốc cường độ

## a) Phương pháp thứ nhất

• Đối với một phần tử  $dr$  của bán kính được nhúng vào trường, ta có :

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = -Bi_d dr \vec{e}_\theta.$$

Mômen đối với trục quay  $(Oz)$  là :

$$d\mathcal{M} = -Bi_d r dr.$$

Khi tích phân, ta nhận được, đối với bán kính nhúng trong trường :

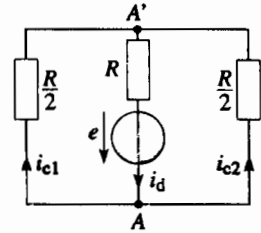
$$\mathcal{M} = -i_d B \frac{a^2}{2},$$

$$\text{và } \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -\omega i_d B \frac{a^2}{2} = -e_{OA} i_d,$$

$$\text{từ đó, s.d.d. } e_{OA} = \omega B \frac{a^2}{2}.$$

• Đối với mọi đoạn của đường chu vi, mômen của các lực LAPLACE, đối với  $(Oz)$ , bằng không ; đối với công suất cũng thế. Như vậy s.d.d. cũng bằng không.

Kết luận, một s.d.d được định xứ duy nhất giữa  $O$  và  $A$ . Từ nay ta có thể xác định các dòng điện bằng cách vẽ một sơ đồ động điện tương đương với hệ được nghiên cứu (H.14).



H.14.

Vì  $i_{c1} = i_{c2}$ , nên ta ký hiệu  $i_c$  là giá trị chung này. Sự phân tích động điện cung cấp kết quả :

$$i_d = 2i_c = \frac{e}{R + \frac{R}{4}} = \frac{2\omega Ba^2}{5R}.$$

Từ đó, mômen của các lực Laplace :

$$\mathcal{M} = -\frac{B^2 a^4}{5R} \omega.$$

Đúng theo định luật LENZ, vấn đề là có một mômen chống lại sự quay của hệ.

## b) Phương pháp thứ hai

Trường phát động điện :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = (\omega r \vec{e}_\theta) \wedge \vec{B} = \omega r B \vec{e}_r,$$

vuông góc với đường chu vi và song song với đường kính.

Đối với đường chu vi, s.đ.đ. cũng bằng không.

Đối với đường kính :

$$e_{OA} = \int_0^a \omega B r dr = \omega B \frac{a^2}{2}.$$

Như vậy, sơ đồ động điện tương đương là sơ đồ trên hình 14.

S.đ.đ. LORENTZ, được định xứ trên đoạn mạch OA, sẽ có dạng :

$$e_L = -\Phi_0 \omega$$

Từ đó ta suy ra (xem áp dụng 2) rằng trên cùng đoạn mạch này sẽ có tác dụng của

mômen  $\mathcal{M} = \Phi_0 i_d$ , với  $\Phi_0 = -B \frac{a^2}{2}$ .

### 2.3. Định luật Faraday

Ta sẽ chứng minh rằng, trong trường hợp một mắt mạng dạng chỉ, s.đ.đ. LORENTZ cũng có thể được biểu thị xuất phát từ thông lượng của trường  $\vec{B}$  không đổi bên ngoài. Đối với một mạch điện kín có đường chu vi  $\Gamma$  :

$$\mathcal{P}_{Laplace} = i \oint_{\Gamma} (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e.$$

Trong thời gian  $dt$ , mỗi điểm  $M$  trên mạch sẽ dịch chuyển được  $d\vec{u} = \vec{v}_e dt$ , và công của các lực LAPLACE có thể có dạng, bằng cách biến đổi tích hỗn hợp :

$$\delta W_{Laplace} = i \oint_{\Gamma} \vec{B} (d\vec{u} \wedge d\vec{l}).$$

nhưng  $d\vec{S}_b = d\vec{u} \wedge d\vec{l}$  có độ dài (chuẩn) là diện tích của bề mặt bị "quét" bởi phần tử mạch điện (H.15)

Tích phân  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{l})$  như vậy, biểu diễn thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua bề mặt  $\Sigma_b$  quét bởi mạch điện kín trong thời gian  $dt$  (H.16).

Ký hiệu  $\Sigma_t$  và  $\Sigma_{t+dt}$  là các mặt có định hướng bị giới hạn bởi mạch điện ở các thời điểm  $t$  và  $t + dt$ . Các mặt  $\Sigma_t$ ,  $\Sigma_b$  và  $\Sigma_{t+dt}$  hợp lại, tạo thành một mặt kín  $\Sigma_0$  mà các pháp tuyến đều định hướng ra phía ngoài với điều kiện là thay đổi sự định hướng của  $\Sigma_{t+dt}$ .

Trường không đổi  $\vec{B}$  có thông lượng bảo toàn, thông lượng của nó qua  $\Sigma_0$  bằng không và, nếu  $\Phi(t)$  biểu diễn thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua mạch điện ở thời điểm  $t$ , thì ta có thể viết :

$$\oiint_{\Sigma_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi(t+dt) + \Phi(t) + \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{l}) = 0.$$

Dấu (-) trước  $\Phi(t+dt)$  là do việc làm thay đổi sự định hướng đối với  $\Sigma_{t+dt}$ .

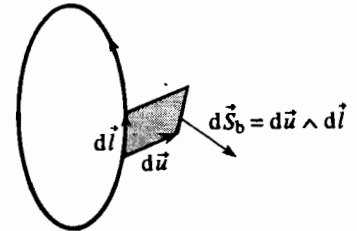
Từ đó ta rút ra :

$$\delta W_{Laplace} = i [\Phi(t+dt) - \Phi(t)] = i d\Phi,$$

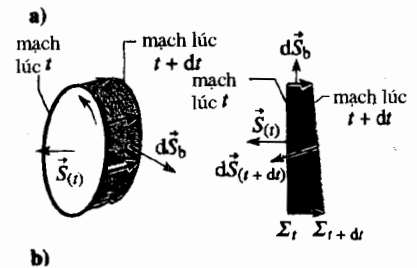
hay 
$$\mathcal{P}_{Laplace} = i \frac{d\Phi}{dt}.$$

Vì, mặt khác  $\mathcal{P}_{Laplace} = -e_L i$ , nên ta có thể từ đó suy ra :

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt}.$$



H.15. Diện tích nguyên tố quét bởi một phần tử mạch điện.



- 1)  $\Sigma_b$  là mặt quét bởi mạch điện trong thời gian  $dt$ .
- 2)  $\Sigma_t, \Sigma_{t+dt}$  và  $\Sigma_b$  tạo thành một mặt kín  $\Sigma_0$  mà các pháp tuyến đều hướng ra phía ngoài với điều kiện thay đổi sự định hướng của  $\Sigma_{t+dt}$ .
- 3) Thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua  $\Sigma_0$  bằng không

H.16a và b. Các sự định hướng của các mặt.



Ví dụ, đối với thanh chuyển động được nghiên cứu trong *áp dụng 2* :

$$\Phi(t) = + B a x,$$

nếu  $x$  là hoành độ của thanh. Vậy  $e_L = -Bav$ .

S.đ.đ LORENTZ đối với một mắt mạng dạng chỉ di động cũng có

thể được xác định bởi định luật Faraday :  $e_L = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

$\Phi(t)$  là thông lượng của từ trường ngoài không đổi đi qua mọi mặt  $\Sigma$  có định hướng, dựa lên đường chu vi  $\Gamma$  của mắt mạng.

Chú ý.

• Không thể xác định được một thông lượng nếu mạch điện không phải dạng chỉ hay nếu trường không được biết tại mọi điểm của một mặt dựa lên mạch điện.

• Sự chứng minh đã dẫn dẫn ta thiết lập định luật FARADAY sẽ sai nếu vận tốc các điểm của mạch điện là bất liên tục, như đã xảy ra ở ngang mức cái tiếp xúc di động. Lúc đó, định luật FARADAY có thể không áp dụng được.

• Khi không quá dễ dàng xác định thông lượng (xem *áp dụng 3*), thì luôn luôn có thể quay về sự tính toán lưu thông của trường phát động điện dịch chuyển.

► Để tập luyện : Bài tập : 1 và 2

## 3 Mạch điện cố định trong một từ trường biến thiên (trường hợp NEUMANN)

### 3.1. Tính tương đương của các hiện tượng

Ta trở lại thí nghiệm ở §1, trong tình huống được biểu diễn trên hình 2. Nam châm chịu một chuyển động tịnh tiến với vận tốc  $\vec{v}_e$  trong hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  đang xét (mà ta có thể giả thiết là hệ Galilée), trong khi cuộn dây lại cố định. Nếu ta giả thiết vận tốc tịnh tiến này là không đổi, thì hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$  gắn với nam châm cũng là hệ Galilée.

Ta thừa nhận quan điểm của người quan sát gắn với hệ quy chiếu  $\mathcal{R}'$ . Mạch điện dịch chuyển với vận tốc  $-\vec{v}_e$  trong trường không đổi nhưng không đều của nam châm đứng yên. Đây là trường hợp cảm ứng Lorentz, và ta đã biết cuộn dây hoạt động như một máy phát có s.đ.đ.

$$e_L = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

• Bây giờ ta thừa nhận quan điểm của người quan sát gắn với hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  của phòng thí nghiệm. Anh ta giải thích hiện tượng cảm ứng (NEUMANN) như là do một s.đ.đ.  $e_N$  có cùng giá trị như  $e_L$ .

Vì, trong gần đúng phi tương đối tính, từ trường, và do vậy  $\Phi(t)$ , có cùng giá trị như nhau trong cả hai hệ quy chiếu, nên người ấy cũng có thể viết :

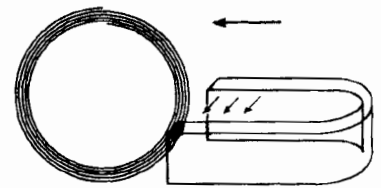
$$e_N = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Trong hai cách mô tả,  $\Phi(t)$  biểu diễn thông lượng của trường  $\vec{B}$  đi qua mạch điện ở thời điểm  $t$ .

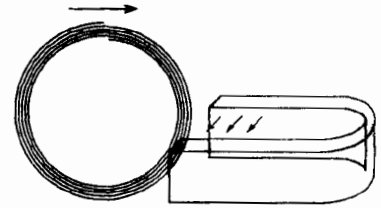
Trong trường hợp thứ nhất, thông lượng thay đổi vì cuộn dây lại gần nam châm, và trong trường hợp thứ hai, thì thông lượng thay đổi vì trường, được nhìn thấy bởi cuộn dây, biến đổi theo thời gian (H. 17). Tuy nhiên sự biến đổi này đều như nhau trong cả hai trường hợp.

**Chú ý.**

Nếu vận tốc  $\vec{v}_e$  không đều, thì định luật về sự dẫn điện, liên kết  $e_L$  và dòng điện trong cuộn dây phải được cải biên vì lí do các lực quán tính. Thực ra hiệu ứng này không đáng kể, và, trong thực tế, ta không bao giờ cần biết là hệ quy chiếu gắn với một mạch điện có phải là hệ Galilée hay không.



H.17a. Ta dịch chuyển nam châm trong hệ  $\mathcal{R}$ .



H.17b. Trong hệ  $\mathcal{R}$ , chính là cuộn dây chuyển động.

Đối với người quan sát gắn với cuộn dây, thì trường của nam châm biến đổi theo thời gian.  
 Đối với người quan sát gắn với nam châm, thì trường của nam châm là không đổi và cuộn dây chuyển động.

### 3.2. Định luật Faraday

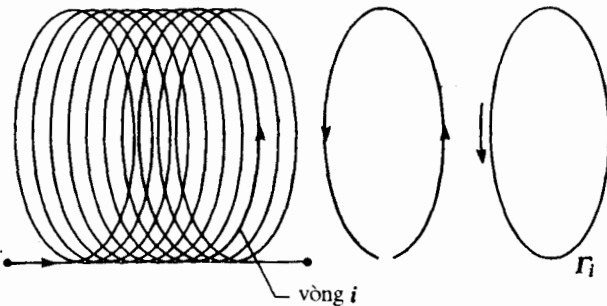
Khi tổng quát hóa, ta thừa nhận rằng có thể kéo dài việc áp dụng định luật FARADAY cho trường hợp cảm ứng NEUMANN.

Đối với một mạch điện cố định chịu tác dụng của một từ trường phụ thuộc thời gian, thì s.d.đ. cảm ứng (NEUMANN) được xác định bởi định luật Faraday :

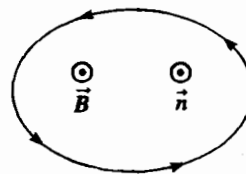
$$e_N = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

### 3.3. Tính toán thực hành về thông lượng

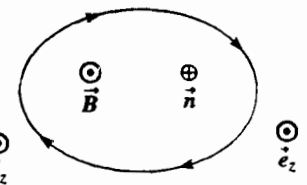
#### 3.3.1. Sức điện động của một cuộn dây



H.18a. Một cuộn dây và đường cong kín tương đương với một vòng dây.



H.18b.  $e_N = -S \frac{dB}{dt}$



H.18c.  $e_N = +S \frac{dB}{dt}$

Rất dễ hình dung mặt  $\Sigma$  dựa lên đường chu vi  $\Gamma$  của mạch điện khi nó có hình dạng đơn giản.

Trái lại, điều này trở thành tinh tế hơn đối với một ống dây !.

S.d.đ. thông thường là rất yếu đối với một mạch điện đơn giản và các hiện tượng cảm ứng thường được định xứ trong các cuộn dây gồm một số vòng rất lớn.

Mỗi một trong  $n$  vòng của một cuộn dây hoạt động như một máy phát.

Để xác định s.d.đ.  $e_i$  của vòng dây thứ  $i$ , ta kết hợp với  $e_i$  một vòng dây ảo khép kín mà đường chu vi  $\Gamma_i$  theo gần đúng đường đi của nó (H.18).

Khi đó, ta có thể xác định và tính toán một thông lượng  $\Phi_i$  đi qua vòng dây ảo đó, rồi viết với sự gần đúng tốt nhất :

$$e_i = - \frac{d\Phi_i}{dt}$$

Trong cả hai trường hợp  $\vec{B} = B(t)\vec{e}_z$   
**b)** Với quy ước định hướng  $\vec{n} = +\vec{e}_z$ , thì ta có :

$$\Phi(t) = B(t) S,$$

do đó :  $e_N = -S \frac{dB}{dt}$

**c)** Với quy ước định hướng  $\vec{n} = -\vec{e}_z$ , thì ta có :

$$\Phi(t) = - B(t) S,$$

do đó :  $e_N = +S \frac{dB}{dt}$

Các định hướng của các mạch điện là ngược nhau, các s.d.đ. vật lí đúng bằng nhau ; đối với các dòng điện cũng đúng như thế.

Khi  $n$  vòng dây mắc nối tiếp, thì cuộn dây hoàn toàn tương đương với một máy phát mà s.đ.đ. là :

$$e = - \frac{d\Phi_{\text{cuộn dây}}}{dt}, \text{ với } \Phi_{\text{cuộn dây}} = \sum_i \Phi_i.$$

### 3.3.2. Sự định hướng

Phải luôn luôn chăm chú theo dõi các sự định hướng. Một khi mạch điện đã được định hướng (một cách tùy ý), thì phải tính toán thông lượng với dấu chính xác, rồi đặt trong sơ đồ động điện tương đương, một máy phát điện áp :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

định hướng theo chiều của mắt mạng.

Tất nhiên nếu ta chọn sự định hướng ngược lại, thì tất cả các dấu đều phải thay đổi, nhưng s.đ.đ và dòng điện vật lí thì không thay đổi (h. 18)

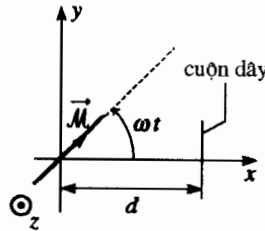
Chú ý.

Hiển nhiên là các nhận xét trên cũng được áp dụng cho phép tính s.đ.đ dịch chuyển.

# Áp dụng 4

## Dòng điện cảm ứng bởi một nam châm quay

Một nam châm, được coi như một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{M}$ , quay với một vận tốc góc không đổi  $\omega$  quanh trục  $(Oz)$  của nó (H.19a).



Hình 19a. Cuộn dây trục giao với trục  $(Ox)$ .

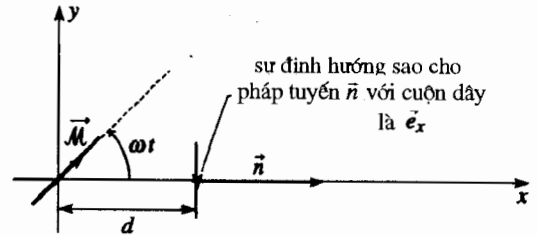
Một cuộn dây dẹt có  $N$  vòng diện tích  $S$  và điện trở  $R$ , pháp tuyến với trục  $Ox$ , được đặt trên trục  $(Ox)$  ở khoảng cách  $d$ , rất lớn so với các kích thước của cuộn dây và nam châm.

1) Hãy tính dòng điện  $i(t)$  trong vòng dây, bỏ qua ảnh hưởng của từ trường riêng của cuộn dây.

2) Tính độ lớn của từ trường riêng ở lân cận tâm cuộn dây; sau đó, biện luận về hiệu lực của giả thiết trên.

Ta bắt đầu bằng việc xác định các định hướng được chọn (H.19b).

1) Nếu  $d$  đủ lớn, thì ta có thể giả thiết rằng trường của nam châm là đều trên toàn cuộn dây.



$\odot \vec{e}_z$  hướng ra trước mặt, xác định vị trí các li độ dương.

H.19b. Chọn các định hướng.

Thành phần  $B_x$  của trường tạo ra bởi nam châm, thực ra là thành phần xuyên tâm của trường của lưỡng cực, nghĩa là :

$$B_x = \frac{\mu_0 M \cos \omega t}{2\pi d^3}.$$

Cuộn dây được định hướng sao cho  $\vec{e}_x$  là vectơ pháp tuyến  $\vec{n}$  của nó ; thông lượng của trường  $\vec{B}$  tạo nên bởi nam châm, đi qua cuộn dây là  $\Phi = N S B_x$ .

Dòng điện  $i$  được xác định bằng cách đưa vào một máy phát có s.đ.đ. :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 M N S \omega}{2\pi d^3} \sin \omega t,$$

được định hướng tùy theo chiều dòng điện.

Vậy, đối với một định hướng đã chọn thì :

$$i = \frac{\mu_0 M N S \omega}{2\pi d^3 R} \sin \omega t .$$

2) Trường được tạo ra ở tâm của nó, bởi một vòng dây bán kính  $a$ , có dòng điện  $i$  chạy qua là :

$$B_{\text{riêng}} = \frac{\mu_0 i}{2a} .$$

Khi tổng quát hóa độ lớn, thì đối với một cuộn dây hình dạng bất kì, trường cảm ứng ở tâm vào cỡ :

$$B_{\text{riêng}} \approx \frac{\mu_0 N i}{\sqrt{S}} = - \frac{\mu_0 N^2 \sqrt{S}}{R} \frac{dB_x}{dt} .$$

Thành thử,  $B_{\text{riêng}}$  là không đáng kể nếu biên độ của nó nhỏ so với biên độ của  $B_x$ , nghĩa là nếu :

$$\frac{\mu_0 N^2 \sqrt{S} \omega}{R} \ll 1 .$$

Ví dụ, nếu  $N = 100$  vòng,  $S = 1 \text{ cm}^2$  và  $R = 1 \Omega$ , thì điều kiện đó trở thành :

$$\omega \ll 10^4 \text{ rad.s}^{-1} .$$

### ► Để tập luyện : Bài tập 3.

#### 3.4. Trường phát động điện NEUMANN

Trong trường hợp cảm ứng LORENTZ, ta đã có thể phân tích nguồn gốc của dòng điện chạy trong cuộn dây khi nó dịch chuyển trong trường của nam châm cố định. Đó là số hạng bổ sung :

$$q\vec{v}_e \wedge \vec{B} = q\vec{E}_m ,$$

nó gây ra một dòng chảy của các điện tích dẫn trong mạch điện.

Trong trường hợp NEUMANN, cơ chế của "bơm điện tích" được lí giải cách khác. Từ trường ở đây phụ thuộc tường minh vào thời gian, và các biến thiên theo thời gian của nó gây cảm ứng một thành phần điện trường mà lưu thông của nó dọc theo một đường cong kín có thể khác không. Hiện tượng này được thể hiện bởi phương trình MAXWELL - FARADAY :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ,$$

Đối với một mạch điện dạng chỉ có đường chu vi  $\Gamma$ , chịu tác dụng của một từ trường biến thiên, thì thông lượng  $\Phi(t)$  có thể, theo định lí GREEN-OSTROGRADSKY, được biểu thị nhờ thế vectơ  $\vec{A}(M, t)$  kết hợp với từ trường  $\vec{B}(M, t)$

$$\Phi(t) = \iint_{\Sigma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{l} ,$$

trong đó,  $\Sigma$  là một mặt có định hướng dựa vào  $\Gamma$ .

Nếu mạch điện cố định, ta có thể viết :

$$e_N = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} - \frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{l} .$$

Trong trường hợp cảm ứng NEUMANN, ta có thể kết hợp với hiện tượng cảm ứng, trường phát động điện Neumann :

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ,$$

để tính s.d.đ. kết hợp dưới dạng  $e_N = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} .$

chọn trường phát động điện  $\vec{E}_m$ , cũng như việc chọn thế vector, cũng phải là duy nhất : nó được xác định sai kém một trường gradien. Hành thử trường  $\vec{E}_m$  phụ thuộc việc chọn mốc đo.

Việc chọn này, tuy nhiên, không có bất kỳ một tác động nào lên sự tính toán s.d.đ. trên một đường cong kín. Sự hạn chế này thực ra cũng ít gây phiền toái, và thông thường ta có thể rút về việc tính toán s.d.đ. cho một mạch điện uốn xoắn (mắt của một mạch điện)

## 4 Các tính chất chung của hiện tượng cảm ứng

Các trường hợp đặc biệt NEUMANN và LORENTZ là hai mặt của hiện tượng cảm ứng. Cả hai nguyên nhân của hiện tượng cảm ứng đều tác động đồng thời nếu một mạch điện dịch chuyển trong một từ trường biến thiên.

### 4.1. Phép gần đúng các chế độ chuẩn dừng (GĐ.C.C.D.)

Các hiện tượng cảm ứng mà ta nghiên cứu, bao giờ cũng tương thích với GĐ.C.C.D., là phép tính gần đúng ít gò bó đối với việc khảo sát các mạch điện ở tần số thường dừng. Trong khuôn khổ của phép gần đúng này, thì điện trường phụ thuộc các độ biến thiên của từ trường nhờ phương trình MAXWELL-FARADAY, nhưng các phương trình vi phân của từ trường lại không thay đổi đối với trường hợp của từ tĩnh.

Các hiện tượng cảm ứng thường được trình bày trong khuôn khổ của phép GĐ.C.C.D. Từ trường lúc đó được xác định bằng cách dùng các phương pháp của từ tĩnh.

### 4.2. Sức điện động cảm ứng

#### 4.2.1. Tính cộng được của các s.d.đ

Ta thừa nhận rằng, nếu hai nguyên nhân của hiện tượng cảm ứng tồn tại đồng thời, thì phải cộng các tác động của chúng lại với nhau.

Sự dịch chuyển của mạch điện tạo ra một s.d.đ.  $e_L$  sao cho :

$$e_L i = - \mathcal{P}_{\text{Laplace}}$$

$$\text{và } e_L = \oint_{\text{mạch điện}} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

$\vec{B}$  ở đây không còn không đổi nữa.

Sự biến thiên của  $\vec{B}$  tạo ra một s.d.đ.  $e_N$  sao cho :

$$e_N = \oint_{\text{mạch điện}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}.$$

Lúc đó, mạch điện sẽ hoạt động như một máy phát mà s.d.đ. bằng :

$$e = e_L + e_N.$$

### 4.2.2. Định luật Faraday

Đối với một mắt có đường chu vi  $\Gamma$ , thì s.d.d. cảm ứng có dạng :

$$e = \oint_{\Gamma} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}.$$

• Nếu mắt mạch điện cố định, thì đẳng thức trên trở thành :

$$e = \oint_{\Gamma} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

• Nếu  $\vec{B}$  không đổi, thì ta có :

$$e = \oint_{\Gamma} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Tích phân lại cho ta  $-\frac{d\Phi}{dt}$  nếu hàm  $\Phi(t)$  biến thiên, cả bằng dịch chuyển của đường chu vi và cả bằng biến đổi theo thời gian của  $\vec{B}$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \iint_{(\mathcal{S}(t) \text{ di động})} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Ta thừa nhận định luật FARADAY suy rộng này mà sự chứng minh nó là rất tinh tế.

Đối với một mắt khép kín, chuyển động trong một trường  $\vec{B}$  biến thiên, thì s.d.d. cảm ứng được xác định bởi định luật FARADAY :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$\frac{d\Phi}{dt}$  biểu diễn đạo hàm toàn phần của  $\Phi(t)$ , có kể đến sự dịch chuyển của mạch điện và sự biến thiên của  $\vec{B}$ .

### 4.2.3. Định luật Ohm suy rộng

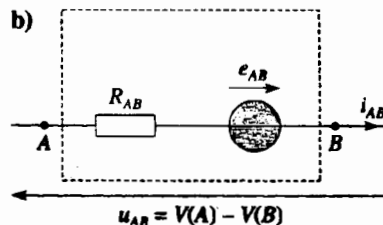
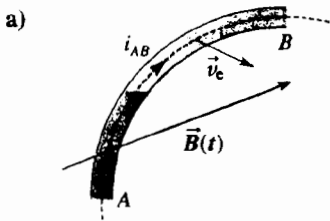
Theo quan điểm động điện, thì hiện tượng cảm ứng bao giờ cũng được biểu hiện bằng một sức điện động  $e$  được đưa vào mạch. Nếu dây dẫn dạng chỉ là thuần trở, thì đặc trưng  $u(i)$  của nó trở thành (H.20a và b).

$$u_{AB} = R i_{AB} - e_{AB}.$$

Biểu thức này mang tên là *định luật Ohm suy rộng*. Nó tương ứng với một sơ đồ động điện tương đương, trong đó s.d.d.  $e_{AB}$  được biểu diễn bởi một máy phát điện áp định hướng từ A về B.

Một phần AB của mạch điện dạng chỉ, nghiệm đúng định luật OHM suy rộng :

$$u_{AB} = R i_{AB} - e_{AB}.$$



◀ H.20a. Dây dẫn dạng chỉ khi có mặt hiện tượng cảm ứng.

b. Tương đương động điện của nó.

### 4.3. Định luật vi phân về sự dẫn điện trong một mạch điện chuyển động

Ở chương 1, ta đã thấy là định luật vi phân về sự dẫn điện trong một vật dẫn đứng yên khi có mặt một từ trường  $\vec{B}$  có dạng :

$$\vec{j} = \gamma [\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}],$$

trong đó,  $R_H$  là hằng số HALL của vật liệu (xem chương 1).

Nếu vật dẫn đang chuyển động với vận tốc  $\vec{v}_e$ , thì phải kể đến lực bổ sung  $q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$  xuất hiện trong lực LORENTZ, và định luật về sự dẫn điện trở thành.

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B}).$$

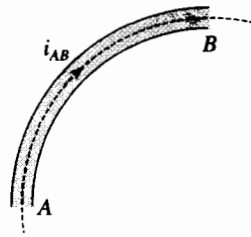
# Áp dụng 5

#### Dạng tích phân của định luật dẫn điện

1) Đối với một đoạn AB của vật dẫn dạng chỉ đứng yên (H.21), hãy nhắc lại định nghĩa của điện trở xét ở chương 1.

2) Tìm số hạng bổ sung phải thêm vào điện trường, nếu vật dẫn chuyển động trong một từ trường ?

3) Biểu thị điện trường nhờ các điện thế  $\vec{A}(M, t)$  và  $V(M, t)$ , rồi từ đó suy ra một chứng minh về định luật OHM suy rộng.



H.21. Vật dẫn được mô hình hóa bởi một mạch điện dạng chỉ.

1) Ở chế độ không đổi, điện trở có giá trị :

$$R = \frac{1}{i_{AB}} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{u_{AB}}{i_{AB}}.$$

2) Nếu vật dẫn dịch chuyển khi có mặt một từ trường, thì giống như trong định luật vi phân, phải thay  $\vec{E}$  bằng  $\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ , nghĩa là :

$$R i_{AB} = \int_A^B (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$3) \vec{E} = - \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Do vậy, định luật tích phân về sự dẫn điện trở thành :

$$R i_{AB} = - \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{l} + \int_A^B - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

•  $\int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{l} = V(A, t) - V(B, t)$  bằng hiệu điện thế  $u_{AB}$ , hay điện áp ở các đầu dây của phần tử mạch điện.

•  $\int_A^B - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$  là sức điện động cảm ứng tổng cộng  $e_{AB}$  của phần tử mạch điện định hướng từ A đến B.

Ta lại tìm thấy đúng định luật OHM suy rộng là :

$$u_{AB} = R i_{AB} - e_{AB}.$$

# ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

## ■ HIỆN TƯỢNG CẢM ỨNG

• Một mạch điện dịch chuyển trong một từ trường không đổi có thể hoạt động như một máy phát động điện : nó là trung khu của một hiện tượng cảm ứng. Trong trường hợp đó ta nói là hiện tượng cảm ứng *LORENTZ*.

Khi một mạch điện cố định chịu tác dụng của một từ trường biến thiên, thì nó cũng là trung khu của một hiện tượng cảm ứng. Ta nói rằng đó là *cảm ứng NEUMANN*.

Cảm ứng điện từ là một hiện tượng duy nhất : Cảm ứng Lorentz và cảm ứng Neumann là hai mặt của cùng một hiện tượng, tùy thuộc quan điểm của người quan sát.

### • Định luật định tính LENZ

Các hiệu ứng từ, động điện và cơ của hiện tượng cảm ứng bao giờ cũng được định hướng theo cách chống lại các nguyên nhân đã gây ra chúng.

## ■ VẬT DẪN CHUYỂN ĐỘNG TRONG MỘT TỪ TRƯỜNG KHÔNG ĐỔI "BÊN NGOÀI"

• Tác dụng của một từ trường không đổi lên một mạch điện chuyển động thì tương đương với tác dụng của một máy phát điện áp, mà sức điện động  $e_L$  được gọi là *sức điện động LORENTZ hay sức điện động dịch chuyển*.

Công suất của sức điện động LORENTZ được bù trừ bởi công suất của các lực Laplace tác dụng lên mạch điện :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_L i = 0 .$$

Khi dịch chuyển một vật dẫn trong một từ trường không đổi, thì các điện tích dẫn được khởi động nhờ một lực  $q \vec{E}_m = q \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ , trong đó :

- $\vec{v}_e$  là vận tốc dịch chuyển của vật dẫn.
- $\vec{E}_m$  được gọi là *trường phát động điện LORENTZ hay trường phát động điện dịch chuyển*.

Sức điện động LORENTZ được gây cảm ứng bởi sự dịch chuyển của mạch điện trong một từ trường  $\vec{B}$ , bằng lưu thông của trường phát động điện dịch chuyển dọc theo mạch đó.

Đối với đoạn  $AB$  của mạch điện dạng chỉ thì ta có :

$$e_L = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} .$$

• Sự tồn tại của các dòng điện cảm ứng gắn với tính chất không bảo toàn của lưu thông của trường phát động điện.

• S.d.d. LORENTZ đối với một mặt mạch điện dạng chỉ, chuyển động, cũng có thể được xác định bởi định luật FARADAY :

$$e_L = - \frac{d\Phi}{dt} .$$

$\Phi(t)$  là thông lượng của từ trường bên ngoài không đổi đi qua mọi mặt  $\Sigma$  có định hướng dựa lên đường chu vi  $\Gamma$  của mặt mạch.



## ■ MẠCH ĐIỆN ĐỨNG YÊN TRONG MỘT TỪ TRƯỜNG PHỤ THUỘC THỜI GIAN

• Đối với một mạch điện cố định chịu tác dụng của một từ trường phụ thuộc thời gian, thì s.đ.đ. cảm ứng (NEUMANN) được xác định bởi định luật FARADAY :

$$e_N = - \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Trong trường hợp cảm ứng Neumann, ta có thể kết hợp với hiện tượng cảm ứng, trường

phát động điện Neumann :  $\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  để tính toán s.đ.đ. kết hợp dưới dạng :

$$e_N = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

## ■ ĐẶC TRƯNG CỦA MỘT MẠCH ĐIỆN CHỊU SỰ CẢM ỨNG

• Đối với một mắt khép kín (hay mở rộng, đối với một cuộn dây) chuyển động trong một từ trường  $\vec{B}$  biến thiên, thì s.đ.đ. cảm ứng được xác định bởi định luật Faraday :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

$\frac{d\Phi}{dt}$  ở đây biểu diễn đạo hàm toàn phần của  $\Phi(t)$ , có kể đến sự dịch chuyển của mạch điện

và sự biến thiên của  $\vec{B}$ .

Một phần  $AB$  của mạch điện dạng chỉ, nghiệm đúng định luật OHM suy rộng :

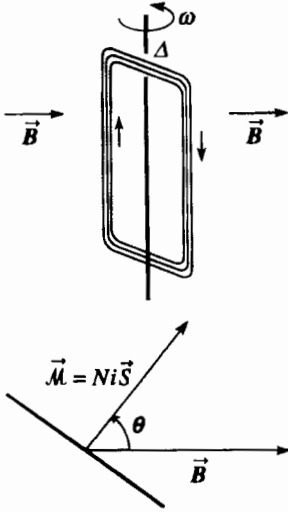
$$u_{AB} = Ri_{AB} - e_{AB}.$$

# Bài tập

## ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

### 1 Máy phát điện xoay chiều đơn giản

Một cuộn dây dẹt có  $N = 200$  vòng, diện tích  $S = 20 \text{ cm}^2$ , quay với vận tốc góc không đổi  $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$  giữa các cực của nam châm chữ "U", tạo ra một trường  $B = 0,2 \text{ T}$  giả thiết là đều và pháp tuyến với trục quay.

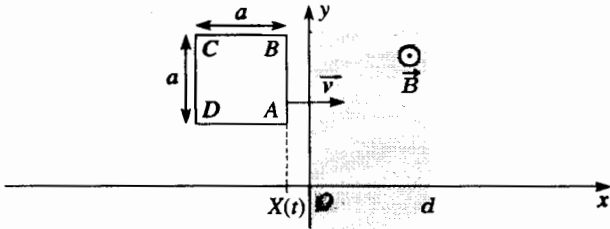


Cuộn dây, hai đầu nối nhau, có điện trở  $R = 1 \Omega$ . Trường do cuộn dây tạo ra, không đáng kể so với trường của nam châm,

- 1) Tính sức điện động cảm ứng gây ra bởi chuyển động của cuộn dây.
- 2) Xác định mômen  $\Gamma$  đối với trục cân phải thực hiện để duy trì chuyển động quay (có thể đưa ra nhiều phương pháp).

### 2 Sự dịch chuyển của một khung dẫn điện

Người ta giả thiết từ trường  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  là đều và không đổi giữa các mặt phẳng ( $x = 0$ ) và ( $x = d$ ), và triệt tiêu ở chỗ khác.



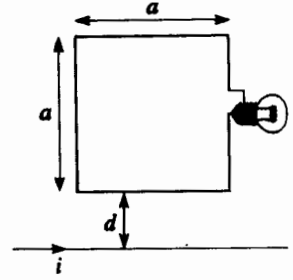
Một khung dây dẫn hình vuông, cạnh  $a$  ( $a < d$ ), điện trở toàn phần  $R$  và các cạnh song song với trục ( $Ox$ ) và ( $Oy$ ), chuyển động với vận tốc không đổi  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ . Ta kí hiệu  $X(t)$  là hoành độ của cạnh trước của khung. Hãy xác định theo  $X$ , cường độ dòng điện  $i$  và lực điện từ tổng hợp  $\vec{F}$  tác dụng lên khung :

- 1) bằng cách tính trường phát động điện ;
- 2) bằng cách dùng định luật Faraday ;
- 3) bằng một sự cân bằng năng lượng.

### 3 Cảm ứng gần một đường điện

Một đường dây cao thế truyền tải một dòng điện hình sin tần số  $50 \text{ Hz}$  và giá trị hiệu dụng  $I = 1 \text{ kA}$ .

Người ta đưa lại gần một cuộn dây dẹt có  $N$  vòng hình vuông cạnh  $a = 30 \text{ cm}$ , cách xa đường dây một khoảng  $d = 2 \text{ cm}$  như trên hình vẽ.



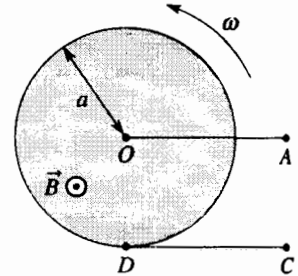
Cuộn dây có độ tự cảm và điện trở không đáng kể, được khép kín qua một bóng điện và sáng lên mỗi khi điện áp hiệu dụng ở hai đầu cực của đèn lớn hơn  $1,5 \text{ V}$ .

Xác định số vòng dây cần thiết.

## SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

### 4 Bánh xe BARLOW phát điện

Một "bánh xe BARLOW" là một đĩa dẫn điện mỏng, bán kính  $a$ , quay quanh trục đối xứng của nó, và chịu tác dụng của một từ trường không đổi.



Bánh xe được nối ở hai đầu cực cố định của nó bởi trục của nó (dẫn điện) và bởi một chỗ tiếp xúc cố định dạng gần hình điểm cọ sát ở  $D$  trên đường chu vi bánh xe.

Để tính toán, người ta giả thiết trường  $\vec{B}$  là đều và pháp tuyến với đĩa.

Xác định điện áp  $u_{AC}$  (có thể đo được ở dòng triệt tiêu) theo vận tốc quay  $\omega$  của bánh xe.

Dữ liệu :  $B = 0,2 \text{ T}$  ;  $a = 3 \text{ cm}$   $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ .

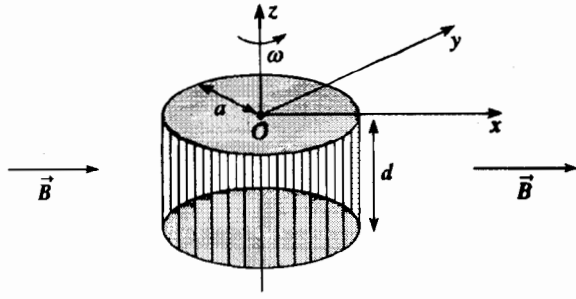
### 5 Hãm phanh điện từ

Hai đĩa bằng đồng bán kính  $a$ , song song, cùng trục ( $Oz$ ) và cách nhau một khoảng  $d$ , được nối với nhau bằng  $N$  sợi mảnh, song song với ( $Oz$ ), phân bố đều trên chu vi và mỗi sợi có điện trở  $R$ .

$N$  rất lớn và bỏ qua điện trở của các đĩa.

Toàn bộ, được nhúng vào một từ trường đều  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ , có thể quay quanh trục  $(Oz)$ .

Ta ký hiệu  $J$  là mômen quán tính của hệ đối với  $(Oz)$ .



1) Chứng minh rằng điện áp  $u$  giữa hai đĩa bằng không.

2) Khi không có mọi ma sát cơ học, hãy xác định định luật biến đổi  $\omega(t)$  của vận tốc góc.

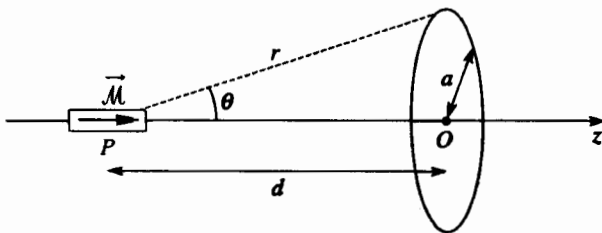
## 6 Tác dụng của một nam châm chuyển động lên một cuộn dây

Một cuộn dây  $b$ , tâm  $O$ , trục  $(Oz)$  được cấu tạo bởi  $N$  vòng bán kính  $a$ . Cuộn dây tự nó khép kín; nó có điện trở  $R$  và độ tự cảm không đáng kể. Ta cho một nam châm lại gần cuộn dây với vận tốc không đổi  $v$  dọc theo trục  $(Oz)$ .

Ta giả thiết rằng trường do nam châm tạo ra cũng giống như trường của một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{M}$ , đặt tại  $P$ , cũng trên đường thẳng với  $(Oz)$

Ta thừa nhận biểu thức của thế vector  $\vec{A}(M)$  tại một điểm  $M$ , tạo ra bởi một lưỡng cực có mômen từ  $\vec{M}$  tại  $P$  là:

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

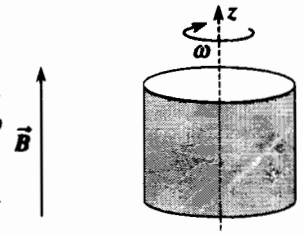


Xác định, theo góc  $\theta$  của sơ đồ, lực  $\vec{F}$  do nam châm tác dụng lên cuộn dây.

Tìm khoảng cách  $d_0$  để lực đó là cực đại? Ta biểu thị  $d_0$  theo  $a$ .

## 7 Trường phát động điện trong một hình trụ đang quay

Một hình trụ dẫn điện, đồng chất, bán kính  $a$  và rất dài, đang quay với vận tốc góc không đổi  $\omega$  quanh trục  $(Oz)$  của nó. Một từ trường đều  $\vec{B} = B\vec{e}_x$  được áp đặt vào.



Chứng minh rằng ở chế độ không đổi, tồn tại các điện tích trong hình trụ và trên bề mặt của nó (người ta có thể thực hiện mọi phép gần đúng có ích).

### LỜI GIẢI

1) Diện tích là dữ liệu duy nhất, ta tính s.d.d. dịch chuyển bằng định luật FARADAY. Góc giữa trường  $\vec{B}$  và pháp tuyến với mạch điện là  $\theta(t) = \omega t + \varphi$ . Ta có  $\Phi = N S B \cos(\omega t + \varphi)$ .

Do đó:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = e_m \sin(\omega t + \varphi)$$

với  $e_m = N S B \omega = 0,8V$ .

$$2) i = \frac{e}{R} = \frac{N S B \omega}{R} \sin(\omega t + \varphi)$$

#### • Phương pháp 1.

Cuộn dây với mômen từ  $\vec{M} = N i \vec{S}$  chịu tác dụng của mômen các lực LAPLACE  $\vec{\Gamma}_{Laplace} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ , mang bởi trục quay và có giá trị đại số:

$$\Gamma_{Laplace} = -\mathcal{M} B \sin\theta = -\frac{(N S B)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t + \varphi).$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \Gamma = -\Gamma_{Laplace} = \frac{(N S B)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Áp dụng số:  $\Gamma_{\max} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}$ .

#### • Phương pháp 2.

Một cân bằng năng lượng đầu tiên cho:

$$\mathcal{P}_{Laplace} = \Gamma_{Laplace} \omega = -e i \text{ và } \Gamma = -\Gamma_{Laplace}$$

và ta lại tìm thấy:

$$\Gamma = \frac{(N S B)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t + \varphi).$$

#### • Phương pháp 3

Một cân bằng năng lượng thứ hai  $\mathcal{P}_{\text{người thao tác}} = \mathcal{P}_{\text{tiêu tán}}$ , nghĩa là:

$$\Gamma \omega = R i^2, \text{ từ đó, suy ra giá trị } \Gamma.$$

2 Ta định hướng khung theo chiều ABCDA.

1)  $\vec{E}_m = -Bv\vec{e}_y$ , nếu  $0 < x < d + a$ .

Lưu thông của  $\vec{E}_m$  bằng không trên các cạnh BC và DA. Ta xét

4 trường hợp:

a)  $X < 0$  và  $X > d + a$ :

$\vec{E}_m$  triệt tiêu,  $e = 0$ ,  $i = 0$  và  $\vec{F} = \vec{0}$ .

b)  $0 < X < a$ : chỉ đơn độc cạnh AB là ở trong trường:

$$e = \int_A^B (-Bv) dy = -Bva:$$

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{Bva}{R} \text{ và } \vec{F} = iaB\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = -\frac{B^2a^2}{R} v\vec{e}_x.$$

c)  $a < X < d$ : các lưu thông của  $\vec{E}_m$  trên AB và CD là nghịch nhau:

$$e = 0, i = 0 \text{ và } \vec{F} = \vec{0}.$$

d)  $d < X < d + a$ : chỉ đơn độc cạnh CD là ở trong trường:

$$e = \int_C^D (-Bv) dy = +Bva:$$

$$i = +\frac{Bva}{R} \text{ và } \vec{F} = iaB(-\vec{e}_y) \wedge \vec{e}_z = -\frac{B^2a^2}{R} v\vec{e}_x.$$

Lực này, khi tồn tại, bao giờ cũng là lực cản và tỉ lệ với vận tốc, phù hợp với định luật LENZ.

Chú ý: Một sự thay đổi định hướng của mạch điện sẽ làm đổi các dấu của  $i$ , nhưng không làm thay đổi các kết luận cuối cùng.

2) a) Nếu  $X < 0$ ,  $a < X < d$  hay  $X > a + d$ : thông lượng không đổi, vậy dòng điện bằng không.

b)  $0 < X < a$ : phần khung nhúng trong trường có diện tích  $S = aX$ , định hướng dương theo chiều  $\vec{e}_z$ .

Từ đó, suy ra

$$\Phi = BaX, \quad e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = Ri \text{ vậy: } \vec{F} = -\frac{B^2a^2}{R} v.$$

c)  $d < X < a + d$ : phần khung nhúng vào trong trường có diện tích  $S = a(a + d - X)$ , định hướng dương theo chiều của  $\vec{e}_z$ .

Lúc đó ta có:  $\Phi = Ba(a + d - X)$ ,  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = +Bav = Ri$

$$\text{vậy: } \vec{F} = -\frac{B^2a^2}{R} v.$$

3)  $\vec{F} = ia[B(X) - B(X - a)]\vec{e}_x$ , và vì thế:

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = ia[B(X) - B(X - a)]v.$$

Vì:  $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -ei$ , vậy ta được:

$$Ri = e = -a[B(X) - B(X - a)]v,$$

Nhờ đó, ta lại có các biểu thức trước đây của  $i$  và  $\vec{F}$ .

a) Nếu  $X < 0$ ,  $a < X < d$  hay  $X > a + d$ :

$$B(X) = B(X - a) \text{ và } i \text{ triệt tiêu.}$$

b)  $0 < X < a$ :  $B(X) = B$  và  $B(X - a) = 0$ , do đó  $i = -\frac{Bav}{R}$ .

c)  $d < X < a + d$ :  $B(X) = 0$  và  $B(X - a) = B$ , từ đó:  $i = +\frac{Bav}{R}$ .

3 Trường  $\vec{B}$  tạo ra bởi đường dây là trục xuyên tâm và có giá trị:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ với } i = I\sqrt{2} \cos \omega t.$$

Thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua cuộn dây là:

$$\Phi = Na \int_d^{d+a} B(r) dr = \frac{\mu_0 N a i}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}.$$

Điện áp hiệu dụng ở các cực của bóng đèn sẽ là:

$$U = \frac{\mu_0 N a \omega I}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}. \quad U \text{ lớn hơn } 1,5V \text{ nếu } N \geq 29.$$

4 Ta dùng các tọa độ trụ:  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .

Tại một điểm M của bánh xe ở cách tâm O một khoảng r, trường phát động điện là:

$$\vec{E}_m = r\omega \vec{e}_\theta \wedge \vec{B} = r\omega B\vec{e}_r.$$

Ta nhận thấy là  $\vec{E}_m = \text{grad} \frac{B\omega r^2}{2}$ .

Ta định hướng mạch điện từ A tới C, lúc đó:

$$u_{AC} = -e_{AC} = -\int_0^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{B\omega a^2}{2} \text{ (dòng điện triệt tiêu).}$$

Áp dụng số:  $u_{AC} = -e_{AC} = -0,9 \text{ mV}$ .

Chú ý:

- Người ta đã không tính, như trong một mạch điện dạng chữ, lưu thông của  $\vec{E}_m$  trên một đường đi xác định.

- Trường phát động điện chỉ bằng  $\text{grad} \frac{B\omega r^2}{2}$  trên bánh xe.

Lưu thông của nó trên một mạch điện hoàn toàn khép kín không nhất thiết bằng không.

5 1) Đối với một sợi dây (hướng lên cao) mà vị trí được xác định bởi góc cực  $\theta_p$ , thì lực LAPLACE là  $iBd\vec{e}_y$ , và công suất của lực này có giá trị:

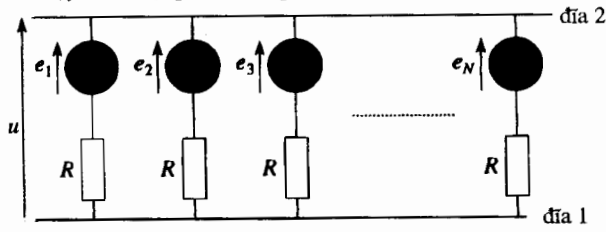
$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = iBd\vec{e}_y \cdot (\omega a\vec{e}_\theta) = \omega iBa \cos \theta_p$$

Do đó, sức điện động là:

$$e_p = -\frac{\mathcal{P}_{\text{Laplace}}}{i} = -\omega aBd \cos \theta_p$$

Ta cũng có thể tính s.đ.đ. cảm ứng theo:  $e_p = \int_0^d (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ .

Như vậy sơ đồ động điện tương đương là như sau :



Tổng các dòng điện triệt tiêu :

$$\sum_{p=1}^N \frac{e_p - u}{R} = 0 \text{ vậy } u = \frac{-B\omega ad}{N} \sum_{p=1}^N \cos \theta_p .$$

Các  $\theta_p$  được phân bố đều, nên  $\sum_{p=1}^N \cos \theta_p = 0$  và vì vậy  $u = 0$ .

2) • Sợi dây p có dòng điện chạy qua (hướng, theo quy ước, lên cao) :

$$i_p = \frac{e_p}{R} = -\frac{B\omega ad}{R} \cos \theta_p .$$

và chịu tác dụng của lực  $\vec{F}_p = -\frac{B^2 \omega a d^2}{R} \cos \theta_p \vec{e}_y$ .

Mômen của lực này đối với (Oz) có giá trị :

$$\mathcal{M}_p = -\frac{B^2 a^2 d^2}{R} \omega \cos^2 \theta_p .$$

• Tóm lại là, hệ chịu tác dụng của mômen  $\mathcal{M} = -\frac{B^2 a^2 d^2}{R} \omega \sum_{p=1}^N \cos^2 \theta_p$ .

N rất lớn và các  $\theta_p$  được phân bố đều, nên ta có thể coi rằng tổng

$\sum_{p=1}^N \cos^2 \theta_p$  bằng N lần giá trị trung bình của  $\cos^2 \theta_p$ , nghĩa là

$$\text{bằng } \frac{N}{2}, \text{ do đó } \mathcal{M} = -\frac{NB^2 a^2 d^2}{2R} \omega .$$

Định lý mômen động khi chiếu lên trục (Oz) lúc đó sẽ cho :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M} \approx -\frac{NB^2 a^2 d^2}{2R} \omega .$$

Từ đó suy ra  $\omega = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}}$ . Với  $\tau_R = \frac{2RJ}{NB^2 a^2 d^2}$ .

Tại một điểm của cuộn dây ta có :  $\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\varphi$ .

S.d.d. là :  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

với  $\Phi = \oint_{\text{cuộn dây}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = N \frac{\mu_0 \mathcal{M} a \sin \theta}{2r^2} = \mu_0 N \frac{\mathcal{M}}{2a} \sin^3 \theta$  ;

dòng điện là :  $i = \frac{e}{R} = -\frac{3\mu_0 N \mathcal{M}}{2aR} \sin^2 \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$ , khi bỏ qua trường do dòng cảm ứng tạo ra.

Trong tọa độ cầu, thì trường  $\vec{B}$  do nam châm tạo ra tại một điểm của cuộn dây là :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin^3 \theta}{4\pi a^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta), \text{ vì } r = \frac{a}{\sin \theta} .$$

Tổng hợp  $\vec{F}$  của các lực LAPLACE tác dụng lên cuộn dây được định hướng theo (Oz).

Đối với một phần tử  $d\vec{l} = dl \vec{e}_\varphi$  của vòng dây, thì thành phần song song với (Oz) của lực LAPLACE là :

$$dF_z = (j dl \vec{e}_\varphi \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin^3 \theta}{4\pi a^3} j dl (-3 \cos \theta \sin \theta) \vec{e}_z .$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } \vec{F} &= -\frac{3\mu_0 N \mathcal{M}}{2a^2} j (\sin^4 \theta \cos^2 \theta) \vec{e}_z \\ &= \left( \frac{3\mu_0 N \mathcal{M}}{2} \right)^2 \frac{1}{Ra^3} (\sin^6 \theta \cos^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z . \end{aligned}$$

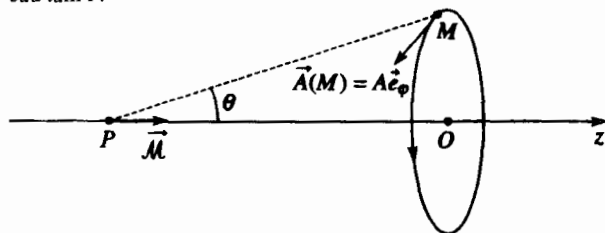
Biết rằng  $\cotan \theta = -\frac{z_p}{a}$  (chú ý các dấu :  $z_p = -d$ ), từ đó suy ra :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{a} \sin^2 \theta, \text{ cuối cùng } \vec{F} = \left( \frac{3\mu_0 N \mathcal{M}}{2} \right)^2 \frac{v}{Ra^4} (\sin^8 \theta \cos^2 \theta) \vec{e}_z$$

Lực bao giờ cũng hướng theo chiều của  $\vec{v}$ , điều này phù hợp với định luật Lenz ; muốn cực tiểu hóa độ biến thiên của thông lượng, lực do hiện tượng cảm ứng gây ra có khuynh hướng làm dịch chuyển mạch điện theo cùng chiều như của nam châm.

Lực sẽ cực đại khi  $\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$ , nghĩa là  $\tan \theta = 2$  và  $d_0 = \frac{a}{\tan \theta} = \frac{a}{2}$ .

6 Ta định hướng vòng dây như trên hình vẽ và dùng các tọa độ cầu tâm P.



7 Ta dùng các tọa độ trụ. Một điểm M của hình trụ này, cách trục (Oz) một khoảng r, có vận tốc  $\vec{v}_e = \omega r \vec{e}_\theta$ .

Ở điểm này, trường phát động điện  $\vec{v}_e \wedge \vec{B} = B\omega r \vec{e}_r$ , xuyên tâm, không thể duy trì dòng điện không đổi, nhưng nó có thể đẩy lùi một số điện tích ra chu vi và hút một số khác về tâm.

Ở chế độ không đổi được thiết lập, tồn tại một mật độ điện khối  $\rho$  trong vật dẫn và một mật độ điện mặt  $\sigma$  trên thành vật dẫn ; các

điện tích này, hiển nhiên, không phụ thuộc thời gian. Ta viết các hệ thức hữu ích khác nhau.

• Giả sử  $m$  là khối lượng các điện tích dẫn và  $q$  là điện tích của chúng. Ở chế độ không đổi, các điện tích dẫn có một chuyển động tròn đều (chuyển động của hình trụ).

Theo hệ thức cơ bản của động lực học :

$$m \vec{a} = -m \omega^2 r \vec{e}_r = q \vec{E} + q B \omega r \vec{e}_r .$$

Số hạng  $m \omega^2 r$  thực tế là không đáng kể so với  $q B \omega r$  (một áp

dụng số học đối với electron sẽ cho :  $\left| \frac{m \omega^2 r}{q B \omega r} \right| = \left| \frac{m \omega}{q B} \right| = 5,6 \cdot 10^{-12} \frac{\omega}{B}$ );

Vậy, còn lại  $\vec{E} = -B \omega r \vec{e}_r = E(r) \vec{e}_r$ .

•  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Biết rằng  $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d(rE(r))}{dr} = -2B\omega$  (xem phụ lục),

từ đó suy ra :  $\rho = -2\epsilon_0 B \omega$

• Hình trụ về toàn bộ vẫn trung hòa. Đối với mọi chiều cao  $h$ , điện tích định xứ ở bề mặt phải ngược dấu với điện tích phân bố theo thể tích, nghĩa là :

$$\pi a^2 h \rho = -\sigma 2\pi a h, \text{ do đó : } \sigma = -\frac{\rho a}{2} = \epsilon_0 B \omega a .$$

# CÁC ÁP DỤNG CỦA HIỆN TƯỢNG CẢM ỨNG

# 5

## Mở đầu

*Việc nghiên cứu đại cương các hiện tượng cảm ứng được trình bày ở chương 4, giờ đây cho phép ta xem xét các hệ quả và các áp dụng rút ra từ đó.*

*Các định luật cảm ứng cho phép hiểu được sự hoạt động của nhiều hệ thống điện hoặc điện cơ : đốt nóng bằng cảm ứng, biến thế, động cơ, máy phát, v.v...*

*Ta có thể nhận thấy rằng sự cảm ứng thường đưa vào một sự ghép đôi giữa hai yếu tố.*

*Thành thử, hai cuộn dây gần nhau sẽ ảnh hưởng lẫn nhau nhờ tác nhân trung gian của từ trường : đó là sự ghép cặp điện từ. Trong trường hợp một vật dẫn chuyển động khi có mặt một từ trường, thì chuyển động và dòng điện sẽ tương tác lẫn nhau : đó là sự ghép cặp điện cơ.*

## M U C T I Ê U

- Vật dẫn ở chế độ chuẩn dừng.
- Hệ số tự cảm và hồ cảm
- Ghép cặp điện cơ.

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động điện : chế độ hình sin và chế độ quá độ, kí hiệu phức.
- Cảm ứng điện từ
- Các hệ thức cơ bản của động lực học vật rắn.
- Định lí động năng đối với vật rắn.

Ta giả thiết các hiện tượng đủ chậm để có thể áp dụng trong một vật dẫn  $\mathcal{C}$  :

• GĐ.C.C.D. (xem chương 3) ;

• định luật Ohm dạng vi phân :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}_{\mathcal{C}} = \gamma \left[ \vec{E}_{\text{phòng thí nghiệm}} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right]$ , nếu ta

bỏ qua hiệu ứng HALL, điều thường được chứng thực trong các vật dẫn thông dụng.

Nhớ rằng điều kiện thứ hai thực tế có tính chất bó buộc hơn điều kiện thứ nhất. Đối với một vật dẫn kim loại, định luật Ohm vi phân không còn áp dụng được nữa nếu tần số vượt quá cỡ  $10^{11}$  Hz, trong khi các phương trình vi phân của GĐ.C.C.D vẫn còn áp dụng được.

Chú ý rằng  $\vec{E}_{\mathcal{C}}$  có thể viết là  $\vec{E}_{\mathcal{C}} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$ , trong đó  $\vec{E}_s$  là một trường có bản chất tĩnh điện và  $\vec{E}_m$  là trường phát động điện :

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

# 1 Cảm ứng trong các mạch điện

## 1.1. Tự cảm

### 1.1.1. Sức điện động tự cảm

Một phần tử mạch điện dạng chỉ (ví dụ, một cuộn dây) chịu ảnh hưởng của từ trường tổng cộng  $\vec{B}$ , tương ứng với tổng của trường  $\vec{B}_{\text{ngoài}}$  tạo nên bởi ngoại vi và của trường riêng tạo nên bởi chính nó :

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ngoài}} + \vec{B}_{\text{riêng}}.$$

S.d.đ. cảm ứng do vậy, cũng bằng tổng của hai số hạng ;

$$e = e_{\text{ngoài}} + e_{\text{riêng}},$$

trong đó  $e_{\text{riêng}}$  được gọi là *s.d.đ. tự cảm*

### 1.1.2. Độ tự cảm của một cuộn dây

Trong thực tế,  $e_{\text{riêng}}$  chỉ có giá trị có thể nhận thấy được nếu trường riêng tự bản thân nó đủ mạnh, nghĩa là đối với các cuộn dây có một số lớn vòng dây.

Đối với một cuộn dây, ta có thể xác định một thông lượng  $\Phi_{\text{riêng}}$  gọi là *thông lượng riêng*. Thông lượng này biểu diễn thông lượng của từ trường tạo ra bởi cuộn dây đi qua mọi mặt dựa lên đường chu vi của nó.

$\vec{B}_{\text{riêng}}$  và do vậy, thông lượng  $\Phi_{\text{riêng}}$  của nó tỉ lệ với cường độ dòng điện  $i$  trong cuộn dây, điều mà ta thể hiện bằng các hệ thức sau :

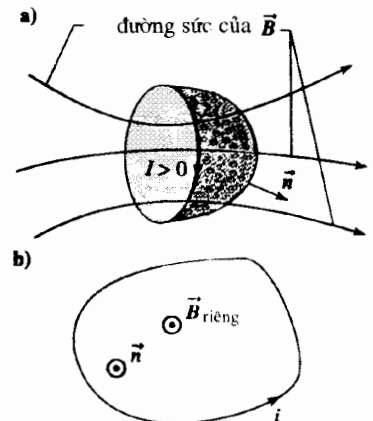
$$\Phi_{\text{riêng}} = Li \text{ và } e_{\text{riêng}} = - \frac{d\Phi_{\text{riêng}}}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt}.$$

$L$ , *độ tự cảm* của cuộn dây, là một hệ số thuần túy hình học, chỉ phụ thuộc vào hình dạng của cuộn dây ở thời điểm  $t$ . Ta nhận thấy (H.1) rằng  $L$  luôn luôn dương.

Trong hệ đơn vị SI,  $L$  được biểu thị ra henry (H).

Ta có thể xác nhận rằng hằng số  $\mu_0$  được biểu thị ra henry trên mét :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}.$$



H.1a và b.  $\vec{B}_{\text{riêng}}$  và  $\vec{n}$  có cùng chiều và  $L$  là dương.



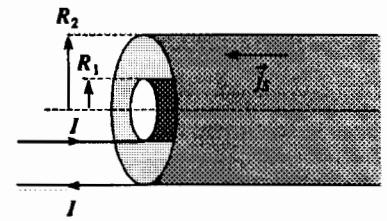
### Chú ý :

• Tính tỉ lệ này là một hệ quả của tính tuyến tính của các phương trình của từ trường trong chân không. Khi có mặt một vật thể mà trong đó các phương trình này không tuyến tính (đặc biệt như sắt), thì độ tự cảm không còn là một hệ số thuần túy hình học nữa.

• Ta sẽ giải quyết chủ yếu các trường hợp, trong đó các cuộn dây đều cứng. Độ tự cảm  $L$  lúc đó là không đổi và  $e_{\text{riêng}} = -L \frac{di}{dt}$ .

• Mô hình mạch điện dạng chỉ, đúng đối với sự tính toán các từ trường, thường không thể dùng được để tính các hệ số tự cảm riêng : tính toán này dẫn tới một tích phân sẽ phân kì trong trường hợp một vòng dây hình tròn chẳng hạn.

• Trong trường hợp các lớp dòng điện bề mặt, thì đôi khi khó xác định chính xác một bề mặt dựa lên đường chu vi của mạch điện. Đó là trường hợp của dây cáp đồng trục (H.2.). Trong trường hợp này người ta thích một định nghĩa khác dựa trên cơ sở năng lượng (xem §1.1.6).



H.2. Dây cáp đồng trục.

# Áp dụng 1

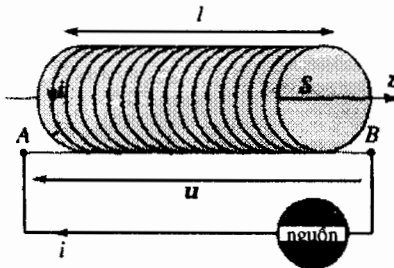
## Độ tự cảm của một ống dây

Một ống dây (H.3) được cấu tạo  $N$  vòng quấn đều và sát nhau, tiết diện  $S$ .

Chiều dài  $l$  của ống rất lớn so với các kích thước ngang và người ta bỏ qua hai đầu ống.

Hay xác định độ tự cảm riêng  $L$  của ống dây.

Tìm giá trị của nó nếu  $N = 5000$ ,  $l = 10$  cm và  $S = 5$  cm<sup>2</sup> ?



H.3. Ống dây.

Giả sử  $\Phi_0$  là thông lượng của  $\vec{B}_{\text{riêng}}$  đi qua một vòng dây ảo khép kín, rất gần một vòng của ống dây.

Trường riêng là đều ở bên trong nên :

$$\vec{B}_{\text{riêng}} = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{e}_z \quad \text{và} \quad \Phi_0 = \mu_0 \frac{N}{l} S i.$$

Từ đó suy ra :

$$\Phi_{\text{riêng}} = N \Phi_0 = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} i,$$

do đó, độ tự cảm  $L$  bằng :

$$L = \frac{\Phi_{\text{riêng}}}{i} = \mu_0 N^2 \frac{S}{l}.$$

Bằng ví dụ này, ta đã kiểm tra đúng  $L$  là một đại lượng dương chỉ phụ thuộc các thông số hình học.

Về trị số, biểu thức đó cho ta :

$$L = 0,157 H.$$

Thành thử, nhờ công thức này, ta có khả năng biết được rất nhanh độ lớn của độ tự cảm riêng của một cuộn dây dùng trong các bài thí nghiệm.

Một cuộn dây 500 vòng, tiết diện vuông, mỗi cạnh 5 cm, được phân bố đều trên chiều dài 8cm sẽ cho một giá trị  $L$  gần 10 mH. Với một cuộn dây giống hệt 1000 vòng, ta sẽ có một độ tự cảm khoảng 4 lần lớn hơn, nghĩa là 40 mH.

### 1.1.3. Định luật Ohm suy rộng

Với các quy ước về dấu trên hình 4, định luật OHM suy rộng, khi có mặt một trường ngoài, sẽ có dạng ;

$$u = R i - e_{\text{riêng}} - e_{\text{ngoài}} = R i + \frac{d(Li)}{dt} - e_{\text{ngoài}}.$$

Trong sơ đồ động điện, s.đ.đ. riêng được kể đến, nhờ một độ tự cảm thuần khiết, nghĩa là một lượng cực mà đặc trưng là :

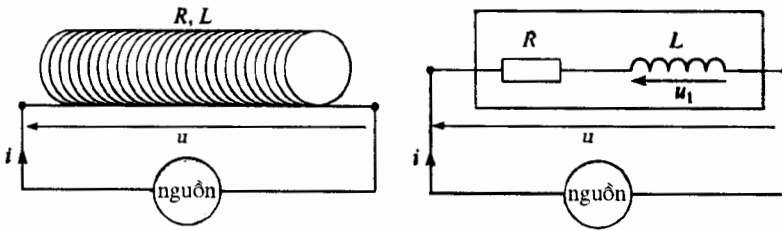
$$u_L = \frac{d(Li)}{dt},$$

Thông thường thì mạch điện là cứng, nên độ tự cảm là không đổi. Lúc đó, ta có thể viết :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{và} \quad u = R i + L \frac{di}{dt} - e_{\text{ngoài}}.$$

Lưu ý rằng phương trình vi phân này làm xuất hiện một hằng số thời gian

$$\tau_R = \frac{L}{R}.$$



◀ H.4a. Cuộn dây.  
b. Sơ đồ động điện tương đương.

### 1.1.4. Năng lượng từ

Ta nuôi một cuộn dây, điện trở  $R$  và độ tự cảm  $L$ , bằng một máy phát điện áp  $u$  ổn định (máy phát THÉVENIN lí tưởng). Ta giả thiết không có bất kì một nguồn từ trường nào khác ( $\vec{B}_{\text{ngoài}} = 0$ ) và độ tự cảm  $L$  là không đổi.

Trong trường hợp này, với các quy ước về dấu trên hình 4, thì phương trình điện có dạng :

$$u = R i - e_{\text{riêng}} = R i + L \frac{di}{dt}.$$

Nếu  $u$  không đổi, dòng điện tăng kể từ thời điểm 0 theo định luật (H.5)

$$i = \frac{u}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{với} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

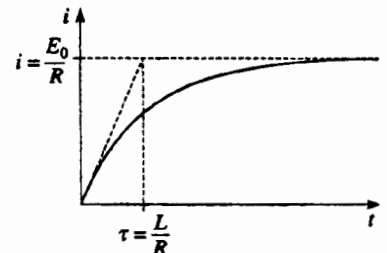
Trong thời gian này, nguồn cung cấp một công suất  $\mathcal{P}_{\text{nguồn}} = ui$  và công suất tiêu tán theo hiệu ứng JOULE là  $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = Ri^2$ .

Ta nhận thấy rằng hai số hạng này không bằng nhau, vì :

$$\mathcal{P}_{\text{nguồn}} - \mathcal{P}_{\text{Joule}} = Li \frac{di}{dt}.$$

Trong thời gian của chế độ quá độ, thì ống dây hấp thụ một công suất bổ sung và như vậy tích lũy một năng lượng từ có dạng :

$$\mathcal{E}_m = \int_0^i L d\left(\frac{i^2}{2}\right) = \frac{1}{2} Li^2.$$



H.5.  $i(t)$  trong cuộn dây.

### 1.1.3. Định luật Ohm suy rộng

Với các quy ước về dấu trên hình 4, định luật OHM suy rộng, khi có mặt một trường ngoài, sẽ có dạng ;

$$u = R i - e_{\text{riêng}} - e_{\text{ngoài}} = R i + \frac{d(Li)}{dt} - e_{\text{ngoài}} .$$

Trong sơ đồ động điện, s.đ.đ. riêng được kể đến, nhờ một độ tự cảm thuần khiết, nghĩa là một lưỡng cực mà đặc trưng là :

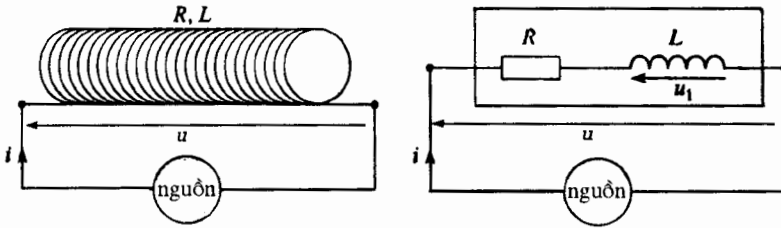
$$u_L = \frac{d(Li)}{dt} ,$$

Thông thường thì mạch điện là cứng, nên độ tự cảm là không đổi. Lúc đó, ta có thể viết :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ và } u = R i + L \frac{di}{dt} - e_{\text{ngoài}} .$$

Lưu ý rằng phương trình vi phân này làm xuất hiện một hằng số thời gian

$$\tau_R = \frac{L}{R} .$$



◀ H.4a. Cuộn dây.  
b. Sơ đồ động điện tương đương.

### 1.1.4. Năng lượng từ

Ta nuôi một cuộn dây, điện trở  $R$  và độ tự cảm  $L$ , bằng một máy phát điện áp  $u$  ổn định (máy phát THEVENIN lí tưởng). Ta giả thiết không có bất kì một nguồn từ trường nào khác ( $\vec{B}_{\text{ngoài}} = 0$ ) và độ tự cảm  $L$  là không đổi.

Trong trường hợp này, với các quy ước về dấu trên hình 4, thì phương trình điện có dạng :

$$u = R i - e_{\text{riêng}} = R i + L \frac{di}{dt} .$$

Nếu  $u$  không đổi, dòng điện tăng kể từ thời điểm 0 theo định luật (H.5)

$$i = \frac{u}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \text{ với } \tau = \frac{L}{R} .$$

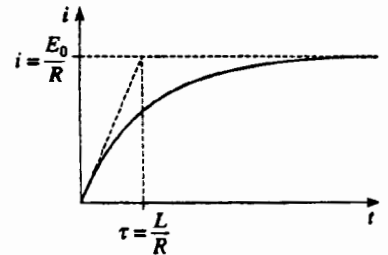
Trong thời gian này, nguồn cung cấp một công suất  $\mathcal{P}_{\text{nguồn}} = ui$  và công suất tiêu tán theo hiệu ứng JOULE là  $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = Ri^2$ .

Ta nhận thấy rằng hai số hạng này không bằng nhau, vì :

$$\mathcal{P}_{\text{nguồn}} - \mathcal{P}_{\text{Joule}} = Li \frac{di}{dt} .$$

Trong thời gian của chế độ quá độ, thì ống dây hấp thụ một công suất bổ sung và như vậy tích lũy một năng lượng từ có dạng :

$$\mathcal{E}_m = \int_0^i L d \left( \frac{i^2}{2} \right) = \frac{1}{2} Li^2 .$$



H.5.  $i(t)$  trong cuộn dây.

Năng lượng được tích lũy này minh họa một kết quả cơ bản đã được thiết lập ở *chương 3*. Năng lượng  $\mathcal{E}_m$  tương ứng chính xác với phần từ của năng lượng kết hợp với trường, mà mật độ năng lượng khối  $\mathcal{E}_{vol}$  bằng :

$$\mathcal{E}_{vol} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Ta kiểm tra kết quả trên trong trường hợp một ống dây lí tưởng có chiều dài  $l$  với  $N$  vòng dây tiết diện  $S$ .

• Trường riêng có giá trị  $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$  ở bên trong và triệt tiêu ở bên ngoài ống dây.

• Mật độ khối của năng lượng từ bằng  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  ở trong ống dây, nghĩa là trong một thể tích bằng  $S l$ , và bằng không ở bên ngoài.

• Như vậy, năng lượng kết hợp với từ trường bằng :

$$\mathcal{E}_m = \frac{B^2}{2\mu_0} S l = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l} i^2.$$

$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$  là độ tự cảm của ống dây (xem *áp dụng 2*), và ta nhận được đúng.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L i^2 = \iiint_{\text{không gian}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.$$

**Chú ý :**

Năng lượng này có "cùng bản chất" như năng lượng tĩnh điện được tích giữ trong một tụ điện. Nhờ mạch điện đơn giản trên hình 6, ta có thể làm thể hiện một sự chuyển dời năng lượng từ sang năng lượng tĩnh điện :

• vị trí 1

Cuộn cảm được "tích điện". Ở chế độ không đổi, thì sẽ có một dòng điện

$$i_0 = \frac{E_0}{R} \text{ chạy qua nó ;}$$

• vị trí 2

Cuộn cảm "phóng điện" vào tụ điện có điện dung  $C$ . Sự có mặt của điốt cho phép bảo toàn năng lượng trong tụ điện và tránh cho nó khỏi mất mát do tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE khi có các dao động tắt dần trong mạch điện ( $L, C$ ).

Với một điốt lí tưởng và một cuộn cảm không có điện trở thuần, thì ta

$$\text{phải có } \frac{1}{2} C u_0^2 = \frac{1}{2} L i_0^2 \text{ với ký hiệu } u_0 \text{ là điện áp ở các nguồn của tụ điện}$$

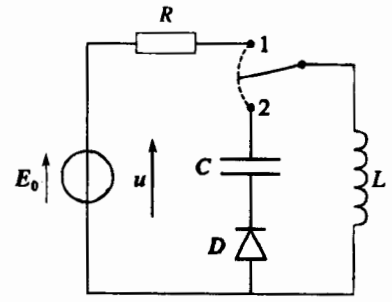
lúc kết thúc thí nghiệm.

**1.1.5. Tia lửa cắt điện**

Năng lượng từ không phải là một loại năng lượng tiêu tán bất thuận nghịch như năng lượng tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE. Nó lại được phục hồi trong mạch nếu dòng điện giảm. Thành thử, khi ta mở cái ngắt điện của một mạch điện, thì một "hồ quang điện" (một tia lửa) có thể hình thành ở thời điểm ngắt các tiếp điểm của cái ngắt điện.

Hiệu ứng này càng mạnh nếu năng lượng được phục hồi càng lớn và, để quan sát được nó, phải có một độ tự cảm lớn và một cường độ mạnh (ta có thể tăng độ tự cảm bằng cách đưa một lõi sắt vào ống dây).

*Áp dụng 2* đưa ra một sự mô hình hóa đơn giản về hiện tượng này.



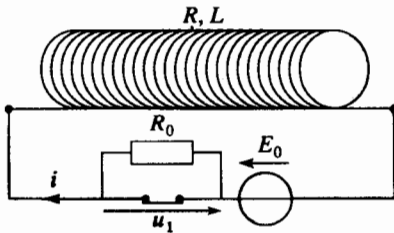
**H.6.** Khi chuyển cái ngắt điện từ vị trí 1 sang vị trí 2, thì năng lượng từ của ống dây có độ tự cảm  $L$  được chuyển vào tụ điện có điện dung  $C$ .

# Áp dụng 2

## Mở cái ngắt điện

Trong mạch điện vẽ trên hình 7, điện trở  $R_0$ , rất lớn so với  $R$ , biểu diễn điện trở của không khí giữa các tiếp điểm của cái ngắt điện ngay sau khi mở ngắt điện. Dòng điện coi như đã được thiết lập từ rất lâu, còn cái ngắt điện được mở ở thời điểm  $t = 0$ .

Hãy xác định điện áp  $u_1(t)$  ở các đầu cực của cái ngắt điện.



H.7. Sự mô hình hóa cái ngắt điện mở, nhờ một điện trở  $R_0 \gg R$ .

### Chú ý:

Sự mô hình hóa đơn giản quá mức, vì điện trở  $R_0$  này có thể biến đổi được. Đặc biệt, nó sẽ sập xuống ngay khi có mỗi một tia lửa điện, tạo thành bởi một chất khí bị ion hóa. Ta cũng bỏ qua khía cạnh điện dung của ống dây: các

vòng dây cạnh nhau coi như những tụ điện rất nhỏ.

Lúc  $t = 0$ , dòng điện là dòng ở chế độ không đổi, nghĩa là:  $i(0) = \frac{E}{R}$ .

Đối với  $t > 0$ , dòng điện là nghiệm của phương trình vi phân:

$$L \frac{di}{dt} + (R + R_0) i = 0$$

Dòng điện trong cuộn dây là một hàm liên tục (nếu không, thì điện áp ở hai đầu cuộn dây sẽ là vô hạn), nên nghiệm là:

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left[-\frac{R + R_0}{L} t\right],$$

Vậy:  $u_1(t) = E \frac{R_0}{R} \exp\left[-\frac{R + R_0}{L} t\right].$

Ở thời điểm mở, điện áp ở hai đầu cực của cái ngắt điện rất cao, đủ để ion hóa không khí và mỗi một tia lửa. Nếu điện áp  $E$  khá lớn, thì hồ quang, một khi được mỗi, sẽ tự duy trì và có thể kéo dài nhiều giây.

## 1.1.6. Định nghĩa thứ hai về độ tự cảm

Ở §1.1.2, ta đã gọi ra những khó khăn trong tính toán và trong việc đánh giá một độ tự cảm riêng. Để mở rộng định nghĩa của  $L$  cho tất cả các mạch điện, ta có thể đồng nhất hai biểu thức của năng lượng từ:

$$\frac{1}{2} L i^2 = \iiint_{\text{không gian}} \frac{1}{2\mu_0} B_{\text{riêng}}^2 d\tau.$$

Như vậy, độ tự cảm bao giờ cũng được xác định: vì các mạch điện thực không có dạng chỉ tuyệt đối, nên trường  $\vec{B}$  là hữu hạn và năng lượng từ của một mạch điện bị giới hạn trong không gian là một đại lượng hữu hạn.

Tuy nhiên, phép tính giải tích lấy tích phân của  $B_{\text{riêng}}^2$  trong toàn không gian nhiều khi là không thể thực hiện được, và giá trị của  $L$  thường phải được coi như một dữ liệu thực nghiệm.

Định nghĩa này cũng bao hàm cả  $e_{\text{riêng}} = -L \frac{di}{dt}$  trong trường hợp một mạch điện cứng.

Muốn chứng minh điều này, chỉ cần đảo lại sự cân bằng năng lượng ở §1.1.4.

$$\mathcal{P}_{\text{nguồn}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt},$$

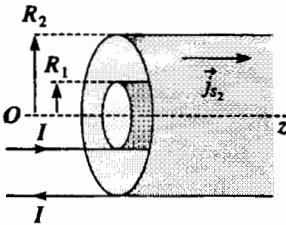
Từ đó :  $ui = (Ri - e_{\text{riêng}})i = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{Li^2}{2}\right)}{dt}$  và như vậy  $e_{\text{riêng}} = -L\frac{di}{dt}$ .

# Áp dụng 3

## Tính hệ số tự cảm riêng của một cáp đồng trục trên đơn vị dài

Cho một cáp đồng trục gồm hai hình trụ chiều dài vô hạn, bán kính  $R_1$  và  $R_2$ , có các dòng điện mật  $\vec{j}_{s1}$  và  $\vec{j}_{s2}$  cộng tuyến với trục đối xứng (Oz) của hai hình trụ, chạy qua.

Hình trụ trong được nuôi bởi một dòng điện cường độ  $I$  chạy vào và trở ra theo hình trụ ngoài (H.8).



H.8. Cáp đồng trục, trong đó các dòng điện mật đều song song với (Oz).

- 1) Hãy tính trường  $\vec{B}$  trong toàn không gian.
- 2) Từ đó suy ra mật độ khối của năng lượng từ trong toàn không gian.
- 3) Tính năng lượng từ được tích giữ trong không gian giữa hai mặt phẳng ở vị trí  $z$  và  $z+l$ ?
- 4) Từ đó suy ra độ tự cảm riêng  $\mathcal{L}$  trên đơn vị dài của cáp đồng trục này.

1) Các sự đối xứng buộc  $\vec{B}$  phải trục xuyên tâm. Việc áp dụng định lí AMPERE trên một vòng tròn bán kính  $r$  và trục (Oz) cho chúng ta:

- với  $r < R_1$  :  $2\pi r B(r) = 0$ , nghĩa là  $B(r) = 0$ ;
- với  $R_1 < r < R_2$  :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I, \text{ nghĩa là } B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r};$$

- với  $R_2 < r$  :  $2\pi r B(r) = 0$ , nghĩa là  $B(r) = 0$ .

2) Mật độ khối của năng lượng từ có dạng :

- với  $r < R_1$  :  $\frac{B^2}{2\mu_0} = 0$ ;

- với  $R_1 < r < R_2$  :  $\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$ ;

- với  $R_2 < r$  :  $\frac{B^2}{2\mu_0} = 0$ .

3) Năng lượng từ  $\mathcal{E}_m$  ở giữa hai mặt phẳng hoành độ  $z$  và  $z+l$  được xác định theo :

$$\mathcal{E}_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r},$$

nghĩa là :  $\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ .

4) Từ đó ta suy ra biểu thức của độ tự cảm riêng  $L$  :

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

nghĩa là độ tự cảm riêng  $\mathcal{L}$  trên đơn vị dài :

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

• Đối với một mạch điện đã cho, thì s.d.đ. do trường riêng được tạo ra bởi mạch điện này là s.d.đ. tự cảm  $e_{\text{riêng}}$ .

• Tồn tại một đại lượng  $L$  tuyệt đối dương, chỉ phụ thuộc hình học của mạch điện sao cho :

$$e_{\text{riêng}} = - \frac{d(Li)}{dt}, \text{ hay đối với một mạch điện cứng thì } e_{\text{riêng}} = -L \frac{di}{dt}.$$

$L$  được gọi là độ tự cảm của mạch điện (hay của phần tử mạch điện). Trong hệ đơn vị quốc tế SI,  $L$  đo bằng henry (H).

• Dòng điện  $i$  chạy qua một mạch điện, sẽ tạo một từ trường riêng  $\vec{B}_{\text{riêng}}$ , kết hợp với một năng lượng từ riêng  $\mathcal{E}_m$  bằng  $\frac{1}{2}Li^2$ .

• Đồng nhất thức :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{không gian}} \frac{1}{\mu_0} B_{\text{riêng}}^2 d\tau = \frac{1}{2}Li^2,$$

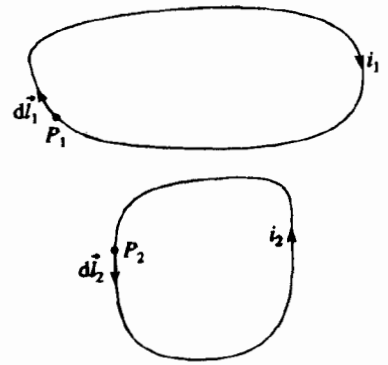
cho phép xác định độ tự cảm của một mạch điện và có thể, tùy tình hình xảy ra, tính được nó một cách đơn giản.

• Nếu có thể xác định thông lượng của trường riêng đi qua mạch điện, thì độ tự cảm của nó có thể được xác định đơn giản hơn bởi :

$$\Phi_{\text{riêng}} = Li.$$

• Đối với một cuộn dây cứng chịu tác dụng của một từ trường ngoài, thì định luật OHM suy rộng có dạng :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} - e_{\text{ngoài}}.$$



H.9. Hai mạch điện ghép cặp.

## 1.2. Sự ghép từ của các mạch điện

### 1.2.1. Hệ số hỗ cảm (độ hỗ cảm) của hai mạch điện

Ta xét hai mạch điện ở các vị trí (1) và (2). Để đơn giản hóa, ta giới hạn ở các mạch điện dạng chỉ khép kín mà đối với chúng có thể xác định được một thông lượng (H.9). Dĩ nhiên là ta có thể mở rộng các kết quả này cho các cuộn dây "hầu như khép kín".

Đối với một cách xếp đặt cho trước của hai mạch điện, thì thông lượng của  $B_1$ , do (1) tạo ra, đi qua (2) sẽ tỉ lệ với  $i_1$ , nghĩa là :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1,$$

trong đó  $M_{12}$  là một hệ số độc lập với  $i_1$  và  $i_2$ , và chỉ phụ thuộc hình học của hệ.

Cũng thế, thông lượng của  $\vec{B}_2$ , do (2) tạo ra, đi qua (1) có dạng :

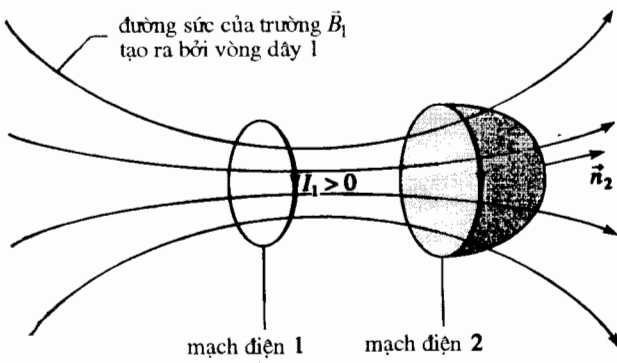
$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2.$$

Thực tế, thì hai hệ số  $M_{12}$  và  $M_{21}$  bằng nhau. Thật vậy, tồn tại một đại lượng duy nhất  $M$ , gọi là độ hỗ cảm (hay hệ số hỗ cảm) của hai mạch điện; nó chỉ phụ thuộc vào sự xếp đặt của hai mạch điện như :

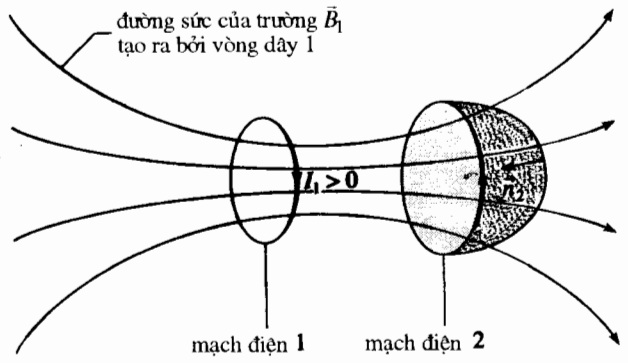
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \text{ và } \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2.$$

Ta chấp nhận tính chất này ; nó được thể hiện trong trường hợp hai vòng dây ở áp dụng 4 sau đây.

Trái với độ tự cảm luôn luôn dương, độ hỗ cảm có thể dương hay âm, tùy theo sự định hướng của hai mạch điện. Độ hỗ cảm đổi dấu nếu ta đảo ngược sự định hướng (tùy ý) của một trong hai mạch điện (H.10).



H.10a. Với các định hướng này thì  $M > 0$ .



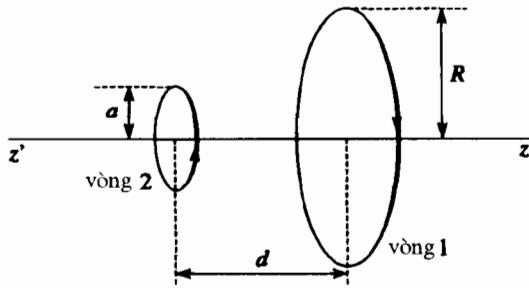
H.10b. Với các định hướng này, thì  $M < 0$ .

# Áp dụng 4

## Độ hồ cảm giữa hai vòng dây

Cho hai vòng dây, một có bán kính  $R$  và trục ( $Oz$ ), và một vòng thứ hai có cùng trục và bán kính  $a$  rất nhỏ so với  $R$ . Hai vòng dây này cách nhau một khoảng  $d$ .

Hãy tính các hệ số  $M_{12}$  và  $M_{21}$ , rồi chứng tỏ rằng  $M = M_{12} = M_{21}$ . Ta lấy các định hướng đã chọn trên hình 11a.



H.11a. Các vòng dây (1) và (2) cách nhau một khoảng  $d$  và có bán kính  $a$  và  $R$  ( $a \ll R$ ).

Ta hãy tính thông lượng của  $\vec{B}_1$  tạo ra bởi vòng dây (1), có dòng  $I_1$  chạy qua, gửi qua vòng dây (2):  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$ , với  $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}}$ .

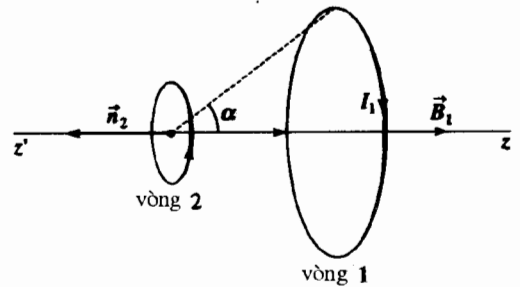
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z, \text{ với } \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}}.$$

Vì  $a \ll R$ , nên  $B_1$  là chuẩn đều trên bề mặt phẳng của vòng (2).

Sự định hướng của  $\vec{B}_1$  và  $\vec{n}_2$  (pháp tuyến với vòng (2)) cho ta một thông lượng của  $\vec{B}_1$  đi qua vòng (2) bằng :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 I_1 \pi a^2}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + d^2)^{3/2}} = M_{12} I_1.$$

$$\text{với } M_{12} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}.$$



H.11b. Các định hướng của  $\vec{B}_1$  (với  $I_1 > 0$ ) và  $\vec{n}_2$ .

Ta hãy tính thông lượng của  $\vec{B}_2$  tạo ra bởi vòng dây (2), có dòng  $I_2$  chạy qua, gửi qua vòng (1). Các điểm của (1) ở rất xa các điểm của (2), vì  $R \gg a$ , nên ta có thể đặt mình trong gần đúng lưỡng cực; vòng dây (2), có tâm  $O_2$ , mômen  $\vec{M} = -M \vec{e}_z$  (với  $M = \pi a^2 I_2$ ), tạo ra tại điểm  $P$  trường  $\vec{B}_2$  với các thành phần  $B_{r_2}$ ,  $B_{\theta_2}$  và  $B_{z_2}$ , trong tọa độ cầu (H.11c) :

$$B_{r_2} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^3} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{2 \cos \beta}{r^3}$$

$$B_{\theta_2} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{\sin \beta}{r^3}$$

$$B_{z_2} = 0$$

Từ trường có thông lượng bảo toàn, nên ta có thể biểu thị thông lượng của  $\vec{B}_2$  đi qua bất kì mặt nào dựa lên vòng dây (1) ;



Ta hãy chọn chỏm cầu có tâm  $O_2$  :

$$\begin{aligned}\Phi_{2 \rightarrow 1} &= \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2(M) \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_1} B_{r_2} dS_1 \\ &= -\frac{2\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \frac{\cos\beta dS_1}{r^3}.\end{aligned}$$

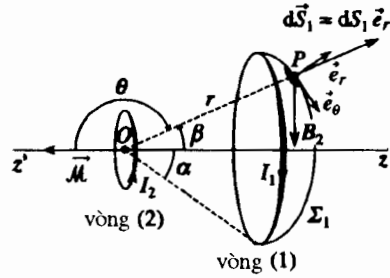
Biết rằng  $dS_1 = r^2 \sin\beta d\beta d\varphi$ , ta được :

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} \frac{\cos\beta dS_1}{r^3} &= \frac{1}{r} \int_0^\alpha \cos\beta \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{r} \pi \sin^2 \alpha,\end{aligned}$$

$$\text{rồi } \Phi_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2r} \sin^2 \alpha$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} I_2 = M_{21} I_2.$$

Qua ví dụ này, ta đã kiểm chứng thực sự là :  
 $M_{12} = M_{21} = M$ .



H.11c. Chỏm cầu  $\Sigma_1$  có tâm  $O_2$ , bán kính  $r$ , dựa lên vòng dây (1).

### 1.2.2. Định luật OHM suy rộng

Nếu không có một nguồn nào khác của từ trường, thì ta có thể viết đối với mỗi mạch điện :

$$\Phi = \Phi_{\text{riêng}} + \Phi_{\text{ngoài}},$$

nghĩa là :  $\Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$  và  $\Phi_2 = \Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}$ ,

hay còn là :  $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  và  $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$ .

Nếu các mạch điện là cứng và đứng yên, thì lúc đó các s.d.đ. cảm ứng là :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{và} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Lúc đó, định luật OHM suy rộng được viết dưới dạng :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{và} \quad u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Các phương trình chi phối hai mạch điện được ghép nối bởi số hạng về hệ số hổ cảm.

Chú ý:

Nếu các mạch điện không cứng, thì ta phải viết :

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d(L_1 i_1)}{dt} + \frac{d(M i_2)}{dt} \quad \text{và} \quad u_2 = R_2 i_2 + \frac{d(L_2 i_2)}{dt} + \frac{d(M i_1)}{dt}.$$

Nếu hai mạch điện dạng chỉ (1) và (2) là những nguồn duy nhất của từ trường, thì các thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua hai mạch điện đó có thể được biểu thị xuất phát từ các dòng điện  $i_1$  và  $i_2$  :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{và} \quad \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

$M$ , được gọi là *độ hổ cảm*, đặc trưng một cách đối xứng sự liên kết từ giữa hai mạch điện. Giá trị tuyệt đối của  $M$  chỉ phụ thuộc vào hình học của hệ và dấu của nó phụ thuộc các định hướng đã chọn.

Nếu hai mạch điện là cứng, đứng yên và cô lập (vậy là  $\vec{B}_{\text{ngoài}}$  triệt tiêu), thì định luật OHM suy rộng trở thành :

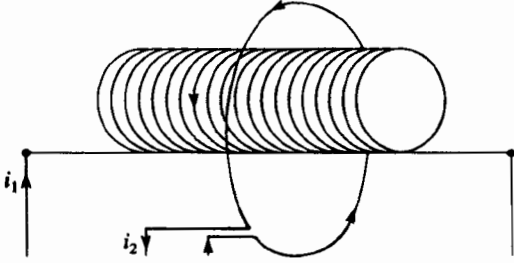
$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{và} \quad u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

# Áp dụng 5

## Ghép một ống dây và một cuộn dây

Một cuộn dây  $N_2$  vòng bao quanh một ống dây lí tưởng  $N_1$  vòng, chiều dài  $l$  và tiết diện  $S$ .

- 1) Tính độ hỗ cảm  $M$  của hai mạch điện này, với các định hướng trên hình 12.
- 2) Cuộn dây có điện trở  $R$ , tự khép kín.



H.12. Ống dây và cuộn dây.

Trong ống dây có dòng điện  $i_1$  chạy qua :

$$i_1 = i_0 \cos \omega t .$$

Ta giả thiết thêm  $N_2 \ll N_1$ .

Chúng minh rằng độ tự cảm  $L_2$  không đáng kể và xác định dòng điện  $i_2$  trong cuộn dây.

3) Hãy đề xuất một phương pháp đơn giản, bằng cách dùng một máy phát hạ tần (B.F) và một máy hiện sóng để đo  $M$ .

- 1) Người ta không biết tính toán trường tạo ra bởi một cuộn dây tại mọi điểm. Trái lại người ta lại biết trường tạo ra bởi ống dây tại mọi điểm.

Như vậy phải tính  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  để xác định  $M$ . Trường tạo ra bởi ống dây bằng :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 \vec{e}_z ,$$

ở bên trong và bằng không ở bên ngoài. Thông lượng của nó đi qua mọi vòng của cuộn dây sẽ là :

$$\Phi_0 = +\mu_0 \frac{N_1}{l} S i_1 ,$$

vì các vòng của cuộn dây có cùng sự định hướng như các vòng của ống dây.

Điều đó cho ta :

$$M = N_2 \Phi_0 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S ,$$

- 2) S.đ.đ. cảm ứng và dòng điện trong cuộn dây là :

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \text{ và } i_2 = \frac{e_2}{R} .$$

Vì độ tự cảm  $L_2$  tỉ lệ với  $N_2^2$ , nên có thể bỏ qua nó so với  $M$ .

Điều đó cho ta ngay :

$$i_2 \approx -\frac{M}{R} \frac{di_1}{dt} = +\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \frac{S}{R} i_0 \omega \sin \omega t .$$

- 3) Cuộn dây hở ( $i_2 = 0$ ) và một máy hiện sóng hai đường cong sẽ đo đồng thời điện áp  $u_2$  giữa các cực của nó và một điện áp tỷ lệ với  $i_1$ , ở hai đầu của một điện trở mắc nối tiếp với ống dây. Ta thu được ở chế độ hình sinh :

$$i_1 = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u_2 = -e_2 = -M i_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) .$$

Thành thử ta có thể đo được :

$$M = \frac{u_{2 \max}}{\omega i_{1 \max}} .$$

### 1.2.3. Trường hợp hai cuộn dây mắc nối tiếp

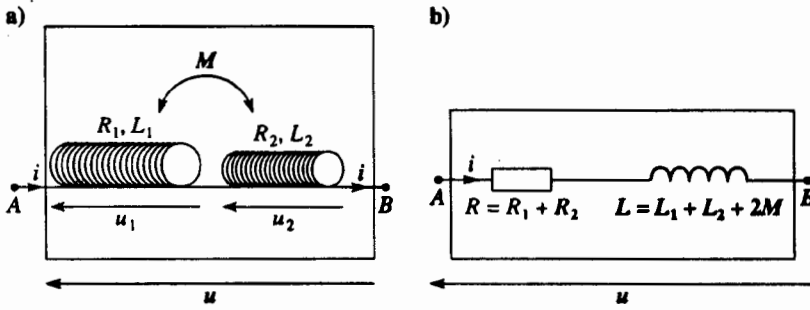
Ta xác định độ tự cảm  $L$  tương đương với hai cuộn dây (1) và (2) mắc nối tiếp, do vậy có cùng dòng điện  $i$  chạy qua (H.13)

Thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua tập hợp các vòng dây là  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , nghĩa là :

$$\Phi = (L_1 i + M i) + (L_2 i + M i) ,$$

hay dưới dạng  $\Phi = L i$  với  $L = L_1 + L_2 + 2M$ .

Thông thường, thì  $L \neq L_1 + L_2$ . Độ tự cảm của hai cuộn dây mắc nối tiếp nhau, nói chung thì không bằng tổng các độ tự cảm.



H.13a. Hai cuộn dây mắc nối tiếp.  
b. Sơ đồ tương đương.

### 1.2.4. Năng lượng từ của một hệ hai mạch điện

Ta hãy xét hai mạch điện (1) và (2) cứng và đứng yên ( $L_1, L_2$  và  $M$  không đổi). Chúng được nuôi bởi các nguồn điện áp biến thiên  $u_1$  và  $u_2$  (H.14). Ta sẽ đồng nhất năng lượng từ của hệ với một hàm số của các dòng điện  $i_1$  và  $i_2$  nhờ sự cân bằng năng lượng.

• Các nguồn cung cấp một công suất :

$$\mathcal{P}_{\text{nguồn}} = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

$$= \left( R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left( R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \right) i_2$$

• Công suất tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE là :  $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$

• Cân bằng năng lượng cho phép viết :  $\mathcal{P}_{\text{nguồn}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt}$ , do đó :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}.$$

Đặt  $\mathcal{E}_m = 0$  khi các dòng điện bằng không, thì ta có thể đưa ra định nghĩa sau :

Năng lượng từ của một hệ hai mạch điện, khi không có các nguồn khác của từ trường, có dạng :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

Chú ý :

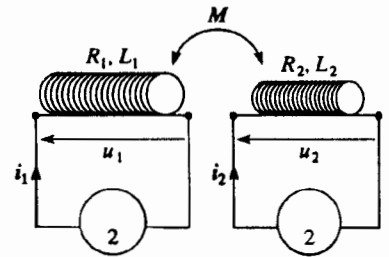
Năng lượng từ của một hệ các dòng điện,  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{không gian}} \frac{1}{\mu_0} B^2 d\tau$  là

một hàm số trạng thái. Đối với một trạng thái cho trước của hệ, đặc trưng bởi hình dạng của các mạch điện và giá trị của các dòng điện, thì trường  $\vec{B}$  ở mọi điểm và năng lượng của trường đều được xác định.

Biểu thức  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$  như vậy còn đúng đối với một hệ có thể biến dạng được.

### 1.2.5. Các giá trị của độ hỗ cảm

Độ hỗ cảm  $M$  của hai mạch điện đã cho, phụ thuộc vào vị trí tương đối của chúng. Để cố định các giới hạn cho các giá trị  $M$ , thì chỉ cần cho rằng năng lượng từ là hoàn toàn dương và hiển nhiên sẽ triệt tiêu nếu không tồn tại bất kỳ một dòng điện nào trong không gian.



H.14. Hai mạch điện được ghép nối bằng độ hỗ cảm.

Khi đặt  $X = \frac{i_1}{i_2}$ , thì lúc đó, ta có  $L_1 X^2 + 2 M X + L_2 > 0$ , dù  $X$  thế nào.

Điều kiện này được thỏa mãn nếu biệt số hoàn toàn là âm, nghĩa là nếu  $M^2 < L_1 L_2$ .

Chú ý rằng, nếu biệt số triệt tiêu, nghĩa là  $M^2 = L_1 L_2$ , thì sẽ tồn tại một hệ các dòng điện được xác định bởi hệ thức :

$$X^* = -\frac{M}{L_1} = -\frac{L_2}{M},$$

nó sẽ có thể xuất hiện trong không gian mà không có phần đóng góp của năng lượng bên ngoài : điều này là không thể được.

Trường hợp giới hạn  $M^2 = L_1 L_2$  thực tế là trường hợp của sự ghép cặp hoàn toàn lí tưởng không có trong thực tế, mà đối với nó, thì tất cả các đường sức của trường được tạo ra bởi một mạch điện này sẽ đi qua mạch điện kia. Tuy nhiên, bao giờ cũng tồn tại những mất mát về từ thông.

► **Để tập luyện : Bài tập : 1, 3, 4, 5 và 6.**

## 2 Các hệ điện cơ

### 2.1. Ví dụ về ghép nối điện cơ : loa có cuộn dây chuyển động

#### 2.1.1. Màng rung

Loa là một bộ chuyển đổi tạo ra một tín hiệu âm thanh ảnh của một tín hiệu điện. Tín hiệu âm thanh được phát ra bởi các dao động của một màng thường có dạng hình nón.

• Công suất âm trung bình được phát xạ qua một mặt  $S$  bởi một sóng âm tần số  $f$  (hay xung động  $\omega$ ) được xác định bởi hệ thức (xem H. prépa, Sóng, năm thứ hai) :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho c v_m^2 S = \frac{1}{2} \rho c S \omega^2 \zeta_m^2,$$

trong đó,  $\rho$  là khối lượng riêng của không khí,  $c$  là vận tốc truyền âm,  $v_m$  là giá trị cực đại của vận tốc dao động của không khí và  $\zeta_m$  là biên độ dao động.

Nếu loa phát xạ 0,1 W và nếu diện tích của màng là 25 cm<sup>2</sup>, thì màng sẽ dao động với biên độ  $\zeta_m$  cỡ 60  $\mu$ m ở 1 kHz và cỡ 600  $\mu$ m ở 100 Hz. Các giá trị này chỉ là cỡ độ lớn, vì toàn bộ màng không dao động thuần nhất.

• Nếu  $z$  biểu diễn độ dời (giả thiết là đều) của màng, thì công suất mất đi do phát xạ có thể được viết dưới dạng :

$$\mathcal{P} = f_1 \dot{z}^2,$$

với  $f_1$  vào cỡ  $\rho c S$ .

• Sự phát xạ sóng âm, với mô hình đơn giản hóa này, sẽ tương đương với một lực ma sát tỷ lệ với vận tốc :

$$\vec{F}_{\text{phát xạ}} = -f_1 \dot{z} \vec{e}_z.$$

### 2.1.2. Sơ đồ nguyên lí

Loa được biểu diễn trên hình 15.

Nam châm vĩnh cửu hình vòng tạo ra một trường xuyên tâm không đổi  $\vec{B} = B\vec{e}_r$ , ở ngang mức các sợi dây của cuộn dây di động. Cuộn dây này liên kết với màng và có  $N$  vòng bán kính  $a$ . Cuộn dây và dây dẫn nối nguồn nuôi có điện trở tổng cộng  $R_0$  và độ tự cảm  $L_0$ .

Ta giả thiết chuyển động của màng, khối lượng  $m$ , là một chuyển động tịnh tiến. Nó được kéo về vị trí cân bằng nhờ một lực đàn hồi mà ta mô hình hóa bằng một lò xo có độ cứng  $k$ . Hoành độ  $z = 0$  tương ứng với lúc đứng im của hệ. Cuối cùng, các ma sát cơ học được biểu diễn bởi một lực ma sát tỉ lệ với vận tốc, với hệ số  $f_0$ .

### 2.1.3. Phương trình cơ học

Tổng hợp của các lực LAPLACE tác dụng lên cuộn dây với các định hướng đã chọn là :

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = -N2\pi a Bi \vec{e}_z.$$

Vậy phương trình cơ học là :

$$m\ddot{z} = -kz - (f_0 + f_1)\dot{z} - N2\pi a Bi.$$

### 2.1.4. Phương trình điện

Công suất của các lực LAPLACE là :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -e_{\text{Lorentz}} i = N2\pi a Bi \dot{z}.$$

Từ đó, ta suy ra s.đ.đ. dịch chuyển :  $e_{\text{Lorentz}} = N2\pi a B \dot{z}$

Vậy phương trình điện là (H.16) :  $u = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} - N2\pi a B \dot{z}$

Nhờ sự có mặt của trường  $\vec{B}$  của nam châm, mà  $\dot{z}$  có mặt trong phương trình điện và  $i$  có mặt trong phương trình cơ. Hệ thống này thực hiện một sự ghép nối điện cơ, thu được gián tiếp qua từ trường không đổi.

### 2.1.5 Trở kháng vào

Ở chế độ hình sin cường độ bách, ta dùng các ảnh phức  $\underline{u}$ ,  $\underline{i}$  và  $\underline{v}$  của  $u(t)$ ,  $i(t)$  và  $\dot{z}(t)$ . Ta viết :

$$\underline{u} = R_0 \underline{i} + jL_0 \omega \underline{i} - N2\pi a B \underline{v}$$

$$\text{và} \quad \left[ f_0 + f_1 + j \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \right] \underline{v} = -N2\pi a B \underline{i}$$

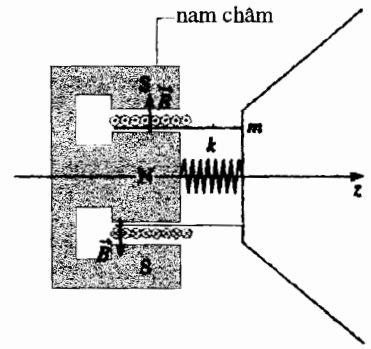
Khi khử  $\underline{v}$ , thì ta được :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \text{ với } \underline{Z} = R_0 + jL_0 \omega + \underline{Z}_m, \text{ với } \underline{Z}_m = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{jL_1 \omega} + jC_1 \omega}$$

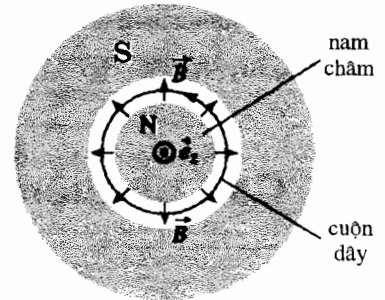
$$\text{và } R_1 = \frac{(2\pi NaB)^2}{f_0 + f_1}; \quad L_1 = \frac{(2\pi NaB)^2}{k}; \quad C_1 = \frac{m}{(2\pi NaB)^2}.$$

Do vậy, sự ghép nối quy về là thêm trở kháng cho cuộn dây, một trở kháng di động  $\underline{Z}_m$ , gắn với chuyển động của màng. Trở kháng di động này tự nó tương đương với  $R_1, L_1, C_1$  mắc song song. Trở kháng vào của loa biểu hiện trên hình 17.

a)



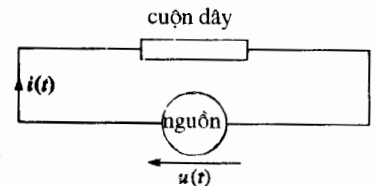
b)



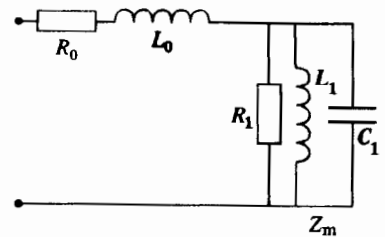
H.15. Nguyên lí của loa

a. Mặt cắt ngang

b. Nhìn trước mặt nam châm



H.16. Sơ đồ mắc điện.



H.17. Sự tương đương ở lối vào.

### 2.1.6. Giảm trở kháng

Trở kháng phức của loa có thể được biểu thị bằng cách tách phần thực  $R_m(\omega)$  và phần ảo  $X_m(\omega)$  có trở kháng đi động :

$$Z(\omega) = R_0 + R_m(\omega) + j(L_0 \omega + X_m(\omega)) .$$

Giản đồ trở kháng (H.18) biểu diễn sự biến đổi của  $Z(\omega)$  trong mặt phẳng phức.

Các tính toán theo biểu thức lí thuyết này cho thấy rõ :

•  $R_m$  tiến tới 0 ở các tần số cao và thấp và giá trị cực đại của nó, bằng

$$R_1 = \frac{(2\pi N a B)^2}{f_0 + f_1} , \text{ được thu nhận với } \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ;$$

•  $X_m$  tiến tới 0 ở cao tần và hạ tần,  $X_m$  cũng triệt tiêu đối với  $\omega = \omega_0$  .

• Ảnh của  $Z_m$  trong mặt phẳng phức sẽ mô tả như vậy một vòng tròn đi qua điểm gốc và có tâm tại điểm tọa vi

$$\frac{(2\pi N a B)^2}{2(f_0 + f_1)} = \frac{R_1}{2} .$$

Muốn làm trùng khít tốt nhất giản đồ lí thuyết với các số đo thực hiện trên một loa "8 Ohm", đường kính gần 10cm, thì ta lấy các giá trị sau đây của các tham số :

$$R_0 = 7\Omega ; L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{H} ; 2\pi N a B = 4,4 \text{T} \cdot \text{m} ;$$

$$f_0 + f_1 = 1,4 \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} ; k = 1,2 \cdot 10^3 \text{N} \cdot \text{m}^{-1} ; m = 10\text{g} .$$

Các số đo trùng khá tốt với các tiên đoán của mô hình tới tận 500 Hz. Trên giá trị đó, thì giá trị thực nghiệm của  $R_1$  tăng, trong khi giá trị thực nghiệm của  $L_1$  giảm. Thật vậy, ở các tần số này, các dòng điện FOUCAULT cảm ứng trong sắt của nam châm không còn không đáng kể nữa.

Năng lượng mà các dòng điện đó tiêu tán được thể hiện bởi sự tăng điện trở tương đương của cuộn dây.

### 2.1.7. Hiệu suất năng lượng

Ta thực hiện một sự cân bằng năng lượng đối với một số nguyên các chu kì.

Vì động năng và năng lượng từ trung bình là không đổi, nên công suất trung bình do nguồn cung cấp bằng tổng các công suất trung bình tiêu tán bởi điện trở và bởi các ma sát cơ học và công suất âm thanh trung bình được phát xạ :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{nguồn}} \rangle = \frac{1}{2} R_0 i_m^2 + \langle \mathcal{P}_{\text{ma sát}} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\text{âm thanh}} \rangle .$$

Mặt khác, theo sơ đồ điện tương đương :

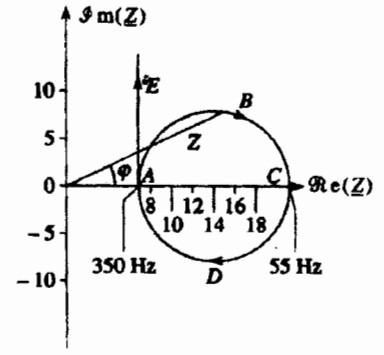
$$\langle \mathcal{P}_{\text{nguồn}} \rangle = \frac{1}{2} (R_m + R_0) i_m^2 .$$

$$\text{Do vậy, ta có : } \langle \mathcal{P}_{\text{ma sát}} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\text{âm thanh}} \rangle = \frac{1}{2} R_m i_m^2 .$$

Vì thông thường, ta có thể bỏ qua  $\langle \mathcal{P}_{\text{ma sát}} \rangle$  so với  $\langle \mathcal{P}_{\text{âm thanh}} \rangle$  , nên ta thu được hiệu suất năng lượng  $\rho(\omega)$  của thiết bị :

$$\rho(\omega) = \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{âm thanh}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{nguồn}} \rangle} = \frac{R_m}{R_0 + R_m} .$$

Ngoài các tần số gần với  $\omega_0$  , thì  $R_m$  rất nhỏ so với  $R_0$  và duy nhất chỉ một tỉ lệ nhỏ của công suất điện tới là được phục hồi dưới dạng công suất âm thanh.



H.18. Giản đồ trở kháng lí thuyết  $Z$  của một cái loa khi tần số  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  biến đổi :

- trên ABC,  $\nu$  biến đổi từ 0 đến 55 Hz ( $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 55\text{Hz}$ ) ;
- trên CDA,  $\nu$  biến đổi từ 55 Hz đến 350 Hz
- trên AE,  $\nu > 350\text{ Hz}$ .

$$\underline{Z} = (R_0 + R_m) + j(L_0 \omega + X_m)$$

với

$$R_m = \frac{1}{1 + \left(\frac{m\omega_0}{f_0 + f_1}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$X_m = \frac{\left(\frac{m\omega_0}{f_0 + f_1}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{1 + \left(\frac{m\omega_0}{f_0 + f_1}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$\underline{Z}_m = R_m + jX_m$  mô tả vòng tròn có phương trình

$$X_m^2 + \left(R_m - \frac{R_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{2}\right)^2 .$$

Chính xác hơn, khi bỏ qua  $f_0$ , thì các phép tính cho ta :

$$\rho(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_{m_{\max}}} \left[ 1 + \left( \frac{m\omega_0}{f_1} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$$

với  $R_{m_{\max}} = \frac{(2\pi N a B)^2}{f_1}$  và  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Đối với các giá trị số học đã kể trên, ta thu được các đường cong lí thuyết trên hình 19, theo thang tuyến tính và thang loga.

Mô hình đơn sơ này cho phép hiểu được rằng một loa chỉ có một hiệu suất chấp nhận được trong một dải tần xác định. Các hộp âm chất lượng tốt bao giờ cũng gồm nhiều loa để có thể phủ toàn bộ phổ nghe được.

### 2.1.8. Hoạt động theo chế độ micrô

Mặc dù thiết bị không phù hợp với cách sử dụng này về mặt kĩ thuật, nhưng loa vẫn có thể hoạt động như một micrô (ống nói). Nếu ta thực hiện thí nghiệm mô tả trên hình 20, thì ta nhận thấy rằng điện áp, đo được trên máy hiện sóng, ở các cực của loa phải là một ảnh (bị suy giảm và lệch pha) của điện áp đặt vào các cực của loa trái.

### 2.1.9. Kết luận

Từ ví dụ này, ta có thể rút ra một vài ý tưởng chung mà ta có thể áp dụng cho các hệ điện cơ khác.

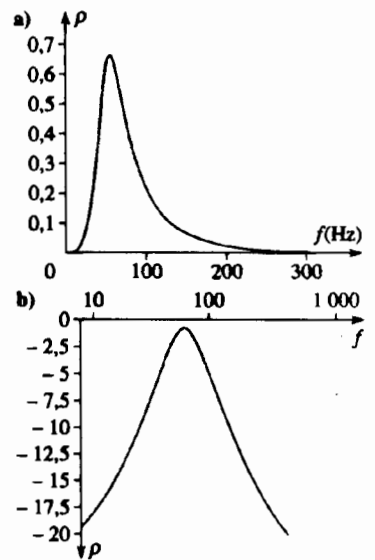
Khi một phần của một mạch điện di động trong một từ trường, thì các đại lượng điện và cơ sẽ không độc lập với nhau. Như vậy có sự *ghép nối điện cơ*.

- Phương trình cơ dùng đến các lực LAPLACE, do vậy sử dụng các dòng điện.
- Phương trình điện kể đến các s.đ.đ. cảm ứng, có nghĩa là kể đến vận tốc của các vật dẫn.
- Đặc trưng động điện phụ thuộc các ứng lực cơ học.
- Ngược lại, hoạt động cơ học phụ thuộc các linh kiện của mạch điện. Thành thử, sự có mặt của điện trở, thường được thể hiện bởi một lực tương đương với một lực ma sát.

## 2.2. Ví dụ chuyển đổi điện cơ : động cơ điện một chiều và máy phát điện

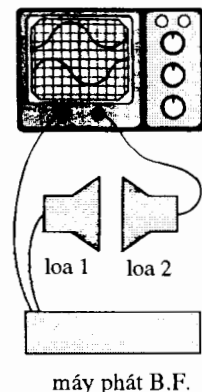
### 2.2.1. Nguyên lí

Một cuộn dây, gồm  $N$  vòng quấn quanh một khung chữ nhật cạnh  $a$  và  $b$ , quay xung quanh một trục  $\Delta$ . Vị trí của nó được xác định bởi góc  $\theta$ . Cuộn dây có điện trở tổng cộng  $R$  và độ tự cảm  $L$ . Nó được nối với một nguồn điện áp  $E$  nhờ các tiếp điểm  $H$  và  $K$ , cứ mỗi nửa vòng, lại chuyển mạch.



H.19. Hiệu suất năng lượng của một cái loa.

- a. thang tuyến tính.  
b. thang loga.



H.20. Loa phát (HP2) hoạt động như một micrô.

Đầu  $K$  của cuộn dây nối với cực  $\oplus$  nếu  $\sin \theta > 0$  và nối với cực  $\ominus$  nếu  $\sin \theta < 0$ . Hệ chuyển động có một mômen quán tính  $J$  đối với trục  $\Delta$ . Một nam châm vĩnh cửu tạo ra một từ trường  $B$  mà ta giả thiết là xuyên tâm và có chuẩn  $B$  là đều ở ngang mức các sợi dây  $MN$  và  $PQ$ . Ta đặt tới gần đúng cấu trúc xuyên tâm này bằng cách sử dụng hình dạng của các cực nam châm và đặt một hình trụ bằng sắt lên trục của cuộn dây. Dĩ nhiên là tồn tại một vùng chuyển tiếp mà tại đó trường không có cấu trúc này, nhưng ta không kể đến điều đó trong nghiên cứu này. Một hệ cơ  $S$  tác dụng lên trục một ngẫu lực cản kí hiệu  $(-\Gamma)$  (H.21). Ta giả thiết rằng  $\Gamma$  không đổi.

### 2.2.2 Phương trình cơ học

Các lực LAPLACE tác dụng lên các cạnh  $NP$  và  $QM$  đều song song với  $\Delta$ . Mômen của chúng đối với  $\Delta$  như vậy sẽ triệt tiêu.

Các lực LAPLACE tác dụng lên các cạnh  $MN$  và  $PQ$  đều bằng  $B i b$ . Vì chuyển mạch nên mômen của chúng bao giờ cũng có cùng dấu (H.22)

$$\mathcal{M}_\Delta = B i b \frac{a}{2}.$$

Tổng cộng là,  $\mathcal{M}_{\text{Laplace}} = 2 N i B b \frac{a}{2} = i \Phi_0$ , nếu đặt  $\Phi_0 = N B a b$  ( $\Phi_0$  có thứ nguyên của một thông lượng).

Kết quả ta có phương trình vi phân

$$J \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\text{Laplace}} - \Gamma \quad \text{hay} \quad J \ddot{\theta} + \Gamma = i \Phi_0$$

### 2.2.3. Phương trình điện

Công suất của các lực Laplace là :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -e_{\text{Lorentz}} i = i \Phi_0 \dot{\theta}.$$

Từ đó, ta suy ra biểu thức về s.d.đ. LORENTZ :  $e_{\text{Lorentz}} = -\Phi_0 \dot{\theta}$ . Theo quan điểm động điện, thì sự quay tương đương với một máy phát lí tưởng có điện áp  $e = \Phi_0 \dot{\theta}$ , ngược với dòng điện. Do đó, đôi khi ta gọi đại lượng này là sức phản điện động. Như vậy, sơ đồ động điện là sơ đồ trên hình 23 và phương trình điện có dạng :

$$R i + L \frac{di}{dt} + \Phi_0 \dot{\theta} = E.$$

### 2.2.4. Chế độ quá độ

Khử  $i(t)$ , ta thu được một phương trình vi phân về  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  :

$$\frac{L}{R} \ddot{\omega} + \dot{\omega} + \omega \frac{\Phi_0^2}{R J} + \frac{\Gamma}{J} = \frac{E \Phi_0}{R J}.$$

$\frac{L}{R} \ddot{\omega}$  bao giờ cũng rất nhỏ so với  $\dot{\omega}$ , thành thử ta bỏ qua số hạng này, và

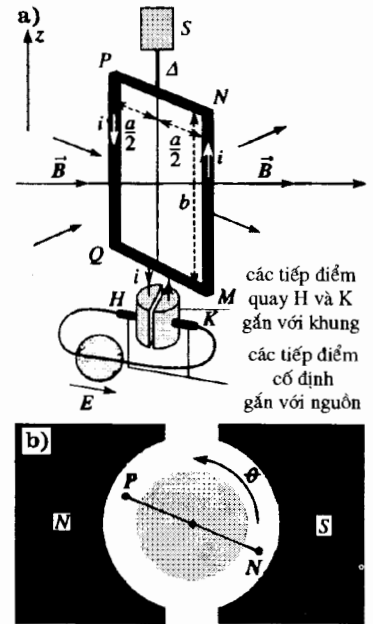
$$\text{phương trình giản lược về : } \dot{\omega} + \omega \frac{\Phi_0^2}{R J} = \frac{E \Phi_0}{R J} - \frac{\Gamma}{J}.$$

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Nếu  $\Gamma$  không đổi và nếu động cơ dừng lại ở  $t = 0$ , thì các nghiệm có dạng :

$$\omega = \omega_l \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad \text{với} \quad \omega_l = \frac{E}{\Phi_0} - \frac{R \Gamma}{\Phi_0^2} \quad \text{và} \quad \tau = \frac{R J}{\Phi_0^2}.$$

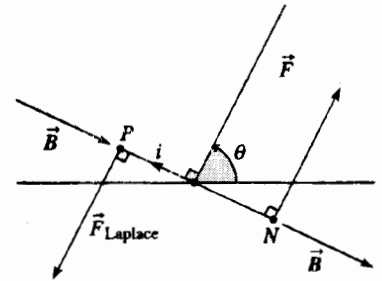
Trong khi chế độ quá độ này xảy ra, thì dòng điện  $i = \frac{E - \Phi_0 \dot{\theta}}{R}$  giảm từ

$$\frac{E}{R} \quad \text{đến} \quad \frac{\Gamma}{\Phi_0}.$$

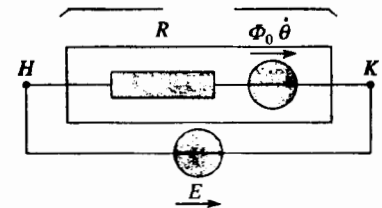


H.21a. Nguyên lí động cơ điện một chiều.

b. Cuộn dây và các nam châm nhìn từ trên xuống.



H.22. Các lực LAPLACE :  $i$  bao giờ cũng "đi lên" ở nhánh phải.



H.23. Sơ đồ động điện.



### 2.2.5. Chế độ không đổi

Ở chế độ không đổi, mômen của các lực LAPLACE, ngược với ngẫu lực cân, bằng  $\Gamma$  và vận tốc góc giới hạn  $\omega_l$  là một hàm afin giảm dần của  $\Gamma$ :

$$\omega_l = \frac{E}{\Phi_0} - \frac{R\Gamma}{\Phi_0^2}.$$

• Giá trị cực đại  $\omega_{\max} = \frac{E}{\Phi_0}$  thu được lúc "không tải" đối với  $\Gamma = 0$ .

• Nếu  $\Gamma > \frac{E\Phi_0}{R}$ , thì lúc đó động cơ không thể quay.

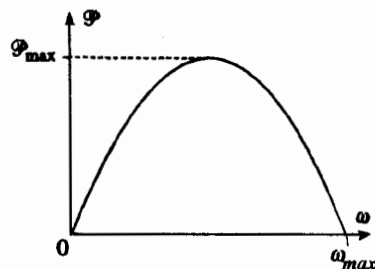
• Công suất cơ  $\mathcal{P}_{\text{cơ}} = \Gamma\omega$ , do động cơ cung cấp (H.24.) là :

$$P_{\text{cơ}} = \frac{\Phi_0 E}{R} \omega \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_{\max}} \right).$$

Ta cũng có thể xác định  $\mathcal{P}_{\text{cơ}}$  nhờ một sự cân bằng năng lượng :

$$\mathcal{P}_{\text{cơ}} + Ri^2 = \mathcal{P}_{\text{nguồn}} = Ei, \text{ với } i = \frac{E}{R} - \frac{\Phi_0}{R} \omega.$$

Công suất cực đại  $\mathcal{P}_{\max} = \frac{E^2}{4R}$  thu được đối với  $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\max}$ .



H.24. Công suất cơ học.

### 2.2.6. Hoạt động theo chế độ máy phát điện

Thiết bị này cũng có thể hoạt động theo chế độ máy phát điện. Bây giờ ta giả thiết một người vận hành áp đặt một vận tốc quay không đổi  $\omega_0$  bằng cách thực hiện một ngẫu lực phát động  $\Gamma' = -\Gamma$ . Ta thay nguồn bằng một điện trở  $R_0$ .

• Phương trình điện trở thành (luôn luôn bỏ qua  $L$ ) :  $i = -\frac{\Phi_0 \omega_0}{R_0 + R}$ .

• Phương trình cơ cho  $\Gamma' = -i\Phi_0$ , nghĩa là  $\Gamma' = \frac{\Phi_0^2 \omega_0}{R_0 + R}$ .

• Theo quan điểm cơ học, thì sự ghép nối được thể hiện nhờ một ngẫu lực ma sát tỉ lệ với vận tốc phụ thuộc điện trở  $R_0$ .

• Theo quan điểm điện học, hệ là tương đương với một máy phát THÉVENIN có s.đ.đ.  $E(t) = \Phi_0 \omega_0$ .

• Nếu ta có thể không kể đến các điện trở và các ma sát nội, thì hiệu suất năng lượng của các bộ chuyển sẽ là 100%. Thật vậy, công suất của người vận hành, lấy trung bình thì ngược với công suất của các lực LAPLACE, bằng công suất của s.đ.đ của máy phát. Trong ví dụ đang nghiên cứu, công suất bị tiêu tán trong điện trở của tải, và ta tìm thấy đúng  $\Gamma' \omega_0 = (R_0 + R)i^2$ .

### 2.2.7. Kết luận

Các động cơ và các máy phát điện là các bộ chuyển đổi công suất có khả năng sinh ra công suất cơ xuất phát từ một nguồn điện, hay sinh ra công suất điện xuất phát từ một kích thích cơ học. Về lí thuyết, thì hai chiều chuyển đổi, nói chung, đều khả dĩ, nhưng các thiết bị thường thích ứng về mặt kĩ thuật với một kiểu hoạt động duy nhất.

Nếu có thể không kể đến các điện trở, thì hiệu suất sẽ là 100%. Thật vậy, công suất cơ là công suất của các lực LAPLACE và công suất điện, khi không có điện trở, là công suất của s.đ.đ. dịch chuyển. Theo các định luật cảm ứng, hai đại lượng này bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

# Áp dụng 6

## Nguyên lý của động cơ không đồng bộ

Các động cơ không đồng bộ thường là các động cơ lớn gồm rất nhiều bộ phận. Ở đây, ta chỉ nghiên cứu nguyên lý hoạt động, bằng cách suy luận trên một mô hình đã được đơn giản hóa đi rất nhiều.

### 1) Tạo ra một trường quay

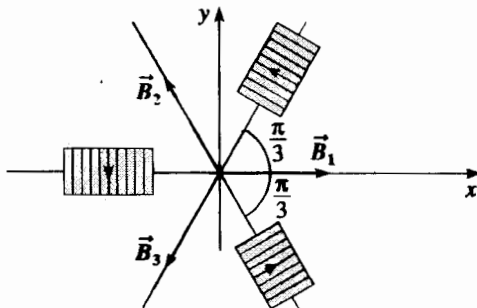
Đối với các thiết bị công suất lớn, thì sự phân phối điện năng được thực hiện theo "ba pha".

Đối với một điện áp chuẩn mốc (dây "trung tính"), thì ba dây "pha" được đưa lên điện áp cùng giá trị hiệu dụng và lệch pha nhau  $\frac{2\pi}{3}$ ,

sao cho (H.25) :

$$u_1 = u_m \cos(\omega t) ; u_2 = u_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) ;$$

$$u_3 = u_m \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$



H.25. Sự thực hiện một trường quay.

Ba nam châm điện tạo ra, ở lân cận điểm O, ba trường từ lệ tương ứng với  $u_1, u_2$  và  $u_3$  (với cùng hằng số tỉ lệ).

Chứng minh rằng trường tổng hợp tại O là một trường quay có chuẩn không đổi.

2) Một cuộn dây N vòng, diện tích S, tự khép kín, có điện trở R, độ tự cảm L và mômen quán tính J đối với (Oz), có thể quay chung quanh trục (Oz) : vị trí của nó được xác định bởi góc :

$$\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{S})$$

Cuộn dây này chịu tác dụng của một trường quay có chuẩn B sao cho :

$$(\vec{e}_x, \vec{B}) = \omega_0 t.$$

Ta giả thiết trường này là đều trên toàn cuộn dây (H.26).

Cuộn dây chịu thêm một ngẫu lực cản giữ cho vận tốc của nó không đổi.

a) Bằng cách áp dụng định luật LENZ, hãy xác định dấu của mômen của các lực LAPLACE.

b) Hãy viết các phương trình vi phân cơ và điện. Người ta đặt :

$$\Phi_0 = N S B.$$

3) Ta nghiên cứu chế độ không đổi  $\theta = \omega t$ , với  $\omega$  không đổi.

a) Xác định dòng điện  $i(t)$  trong cuộn dây, rồi ngẫu lực điện từ  $\Gamma(t)$  tác dụng bởi trường B lên cuộn dây.

b) Thật ra, động cơ có quán tính cơ học lớn và đại lượng có ý nghĩa là giá trị trung bình  $\langle \Gamma \rangle$  của  $\Gamma(t)$ .

Hãy nghiên cứu các biến thiên của  $\langle \Gamma \rangle$  theo  $\omega$ . Muốn thế, người ta đặt :

$$X = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \lambda = \frac{L\omega_0}{R} \quad \text{và} \quad \Gamma_0 = \frac{\Phi_0^2}{2R}.$$

Tại sao động cơ này lại được gọi là "không đồng bộ" ?

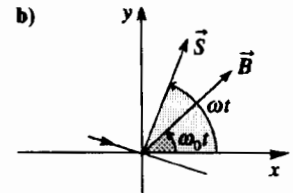
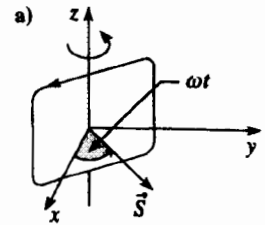
c) Hãy xác định công suất cơ học  $\mathcal{P}_{co}$  do động cơ này cung cấp.

Hãy khảo sát sơ lược các độ biến thiên của  $\mathcal{P}_{co}$  theo  $\omega$ .

$$1) \vec{B}_1(O, t) = B_m \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x ;$$

$$\vec{B}_2(O, t) = B_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y\right) ;$$



H.26a và b. Cuộn dây chuyển động trong một trường quay.

$$\vec{B}_3(O, t) = B_m \cos \left( \omega_0 t + \frac{2\pi}{3} \right) \left( -\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right);$$

Trường tổng cộng ở  $O$  là :

$$\begin{aligned} \vec{B}(O, t) &= \vec{B}_1(O, t) + \vec{B}_2(O, t) + \vec{B}_3(O, t) \\ &= \frac{3}{2} B_m (\cos \omega_0 t \vec{e}_x + \sin \omega_0 t \vec{e}_y). \end{aligned}$$

Vậy  $\vec{B}(O, t)$  là một trường có chuẩn không đổi bằng  $\frac{3}{2} B_m$  và chiều được xác định bởi góc

$$\theta = \omega_0 t.$$

2) a) Thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua cuộn dây, biến đổi theo thời gian, điều này tạo ra một dòng điện cảm ứng. Theo định luật LENZ, thì hiệu ứng cơ học của dòng điện này chống lại nguyên nhân của hiện tượng cảm ứng.

Vậy cuộn dây chịu tác dụng của các lực LAPLACE, có khuynh hướng đưa nó về trạng thái mà tại đó thông lượng không thay đổi, nghĩa là ở một vận tốc góc  $\omega$  bằng  $\omega_0$ . Mômen của các lực LAPLACE như vậy là dương nếu  $\omega$  nhỏ hơn  $\omega_0$ .

### b) Phương trình cơ học

Trong trường đều  $\vec{B}$ , cuộn dây được coi như một lưỡng cực có mômen từ là  $\vec{M} = N i \vec{S}$ .

Định lí vô hướng của mômen động cho ta :

$$(\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z - \Gamma = J \dot{\theta},$$

nghĩa là  $J \ddot{\theta} - \Phi_0 i \sin[\omega_0 t - \theta(t)] + \Gamma = 0$ .

### Phương trình điện

Đối với vòng dây có định hướng, thì thông lượng của trường ngoài là :

$$\Phi_{\text{ngoài}} = \Phi_0 \cos[\omega_0 t - \theta(t)].$$

$$\text{Phương trình điện } Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{d\Phi_{\text{ngoài}}}{dt} = 0$$

như vậy có thể viết :

$$Ri + L \frac{di}{dt} - (\omega_0 - \dot{\theta}) \Phi_0 \sin[\omega_0 t - \theta(t)] = 0.$$

3) Ở chế độ không đổi, phương trình điện được tách cặp khỏi phương trình cơ. Đây là một phương trình tuyến tính mà về thứ hai là một hàm hình sin của xung động  $\Omega = \omega_0 - \omega$ .

Phương trình sẽ có dạng (bằng cách thay đổi góc thời gian) :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = \Omega \Phi_0 \sin \Omega t.$$

Nghiệm ở chế độ cưỡng bức, nghĩa là :

$$i = i_m \sin(\Omega t - \psi),$$

được xác định bằng cách dùng biểu diễn phức.

Ta thu được :

$$i_m = \frac{\Omega \Phi_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \text{ và } \psi = \text{Arctan} \frac{L \Omega}{R}.$$

Đưa biểu thức này vào trong phương trình cơ học, ta tìm được :

$$\Gamma(t) = \frac{\Omega \Phi_0^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t).$$

b) Các độ biến thiên của  $\langle \Gamma \rangle$  phụ thuộc vào :

$$\langle \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t) \rangle = \frac{1}{2} \cos \psi.$$

Suy ra :

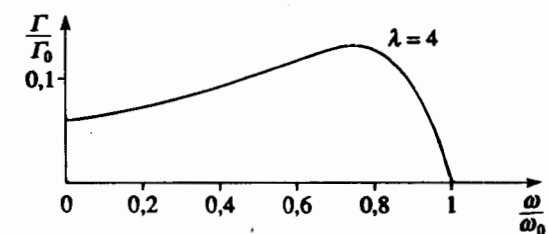
$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\Omega \Phi_0^2}{2\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \cos \psi$$

Khi thay  $\psi$  bằng giá trị của nó, ta được :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{(\omega_0 - \omega) \Phi_0^2 R}{2(R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2)}.$$

$$\text{hay : } \langle \Gamma \rangle = \frac{\Gamma_0 (1 - X)}{1 + \lambda^2 (1 - X)^2}.$$

Các độ biến thiên của  $\langle \Gamma \rangle$  theo  $\omega$  được biểu diễn trên hình 27. Ta đã hạn chế  $\omega$  ở trong khoảng  $[0; \omega_0]$  mà đối với nó thì  $\langle \Gamma \rangle$  là dương. Thực tế, thì hệ bên ngoài áp đặt  $\Gamma$ , và điều này xác định giá trị của  $\omega$ .



H.27. Ngẫu lực phát động biến đổi theo  $\omega$ .

•  $\langle \Gamma \rangle = 0$  nếu  $\omega = \omega_0$ , vì trong trường hợp này, thông lượng là không đổi.

•  $\langle \Gamma \rangle > 0$  nếu  $\omega < \omega_0$  : vì vậy, động cơ quay chậm hơn trường, do đó, có tên là động cơ không đồng bộ.

• Nếu  $\lambda < 1$ ,  $\langle \Gamma \rangle$  là một hàm giảm dần của  $\omega$ .

• Trong thực tế,  $\lambda$  bao giờ cũng lớn hơn 1 và  $\langle \Gamma \rangle$  đi qua một cực đại.

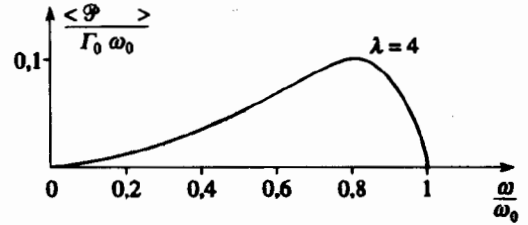
Nếu hai giá trị của  $\omega$  tương ứng với giá trị bất buộc của  $\langle \Gamma \rangle$ , thì chỉ một mình giá trị lớn hơn trong hai giá trị đó là tương ứng với một trạng thái bền, vì  $\langle \Gamma \rangle$  lúc đó là một hàm giảm dần của  $\omega$ .

Thật vậy, một sự tăng vận tốc được thể hiện bởi một sự giảm ngẫu lực phát động; điều này có tác dụng kéo vận tốc trở về giá trị cân bằng của nó.

c) Công suất cơ học trung bình do động cơ cung cấp là :

$$\langle \mathcal{P}_{co} \rangle = \langle \Gamma \rangle \omega .$$

Đường cong cho các giá trị của  $\langle \mathcal{P}_{co} \rangle$  biến đổi theo  $\omega$  là đường cong trên hình 28. Công suất sẽ triệt tiêu đối với  $\omega = 0$  và đối với  $\omega = \omega_0$ .



H.28. Công suất biến đổi theo  $\omega$ .

► Để tập luyện : bài tập : 7, 10, 11 và 12.

## 3 Dòng điện Foucault

### 3.1. Các dòng điện cảm ứng theo thể tích

Một miếng kim loại, được đặt gần một mạch điện trong có một dòng điện biến thiên chạy qua, hay đang chuyển động gần một nam châm, sẽ là trung khu của các dòng điện cảm ứng theo thể tích gọi là các dòng điện *FOUCAULT*. Trái với các dòng điện "cổ điển", các dòng Foucault không bị hướng dẫn bởi các dây dẫn, và thường không thể được tính toán bằng giải tích.

### 3.2. Hiệu ứng mặt ngoài và trường cảm ứng

Ta đã thấy ở chương 3, rằng một trường điện từ phụ thuộc thời gian không thể thâm nhập sâu vào bên trong vật dẫn.

Các trường  $\vec{E}$  và  $\vec{B}$ , cũng như dòng điện theo thể tích  $\vec{j}$ , chịu một sự suy giảm, mà chiều dài đặc trưng  $\delta$  phụ thuộc tần số  $\nu$  và độ dẫn điện  $\gamma$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \pi \nu}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \text{ với } \omega = 2\pi\nu.$$

Ta cũng có thể lí giải định tính hiệu ứng này nếu coi đây là một hiện tượng cảm ứng. Các độ biến thiên của  $\vec{B}$  trong vật dẫn gây cảm ứng các dòng điện thể tích, và chính các dòng điện này lại tạo ra một trường cảm ứng  $\vec{B}_{\text{cảm ứng}}$ . Theo định luật LENZ, thì  $\vec{B}_{\text{cảm ứng}}$  được định hướng sao cho nó chống lại nguyên nhân gây ra cảm ứng, nghĩa là chống lại phần biến thiên của trường  $\vec{B}$ .

Để nghiên cứu các dòng điện cảm ứng thể tích, ta có thể xét hai trường hợp cực đoan, theo chiều dày  $e$  của vật dẫn (kích thước nhỏ nhất)

•  $e \ll \delta$

Chiều dày của vật dẫn rất nhỏ so với  $\delta$ . Hiệu ứng mặt ngoài lúc này là không đáng kể, hay theo cách nói tương đương, trường cảm ứng là không đáng kể so với trường ngoài áp đặt vào.

•  $e \gg \delta$

Chiều dày vật dẫn lớn so với  $\delta$ . Các dòng cảm ứng lúc này có thể được mô hình hóa bằng dòng điện mặt; ở mọi điểm bên trong vật dẫn, trường cảm ứng ngược với trường áp đặt vào và trường tổng hợp triệt tiêu.

### 3.3. Các đặc trưng của dòng điện FOUCAULT

#### 3.3.1. Vật dẫn đang chuyển động trong một trường không đổi

Ta suy luận trên một ví dụ : một tấm kim loại chữ nhật, độ dẫn điện  $\gamma$ , đi vào một miền, trong đó có một từ trường  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  chỉ phối, với vận tốc  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  (H.29). Để đơn giản, ta giả thiết rằng trường  $\vec{B}$  là đều ở mọi phía của biên giới (một trường như thế không tồn tại trong thực tế, nhưng nó cho phép ta làm nổi bật các hiện tượng).

Trường phát động điện LORENTZ  $\vec{E}_m$  bằng  $-Bv\vec{e}_y$  trong phần của tấm kim loại chịu tác dụng của trường và triệt tiêu trong phần còn lại.

Ta hãy nghiên cứu định tính các dòng điện cảm ứng có thể sinh ra từ đó.

• Các đường dòng khi chúng tồn tại là những đường khép kín. Chúng buộc phải tuân theo các điều kiện ở các giới hạn : vì các điện tích không thể ra khỏi vật dẫn, nên  $\vec{j}$  tiếp tuyến với mặt ngoài của vật dẫn.

• Lưu thông của  $\vec{j}$  dọc theo một đường dòng  $\Gamma$ , nhất thiết phải là dương.

Thật vậy,  $\vec{j} = \gamma(\vec{E}_s + \vec{E}_m)$  và  $\oint_{\Gamma} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$ , vì  $\vec{E}_s$  dẫn xuất từ một thế vô hướng  $V$  nếu trường  $\vec{B}$  là không đổi. Do vậy :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} > 0.$$

Nếu tấm kim loại hoàn toàn được nhúng trong một trường  $\vec{B}$  đều, thì  $\vec{E}_m$  cũng là đều và lưu thông của nó triệt tiêu trên mọi đường khép kín. Như vậy, các dòng điện chỉ tồn tại khi tấm đi qua biên giới. Các đường dòng điện đi qua cả bên này và bên kia biên giới.

• Sự phân tích các lực LAPLACE chứng tỏ rằng vật dẫn chịu một lực hãm tổng hợp trong lúc pha này đang xảy ra (H.30). Một sự phân tích tương tự chứng tỏ rằng vật dẫn cũng chịu một lực hãm nếu, do một sự nghịch đảo vận tốc, nó đi ra khỏi trường. Lực hãm này, tỉ lệ với  $\vec{j} \cdot \vec{B}$ , sẽ tỉ lệ với  $B^2 v$  và công suất của nó tỉ lệ với  $B^2 v^2$ . Công suất này được tiêu tán dưới dạng nhiệt do hiệu ứng JOULE.

#### 3.3.2. Suy rộng

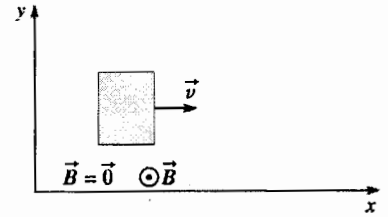
Ta có thể suy rộng sự phân tích định tính này cho tất cả các dòng điện cảm ứng theo thể tích : các dòng điện FOUCAULT sẽ phát triển trong một vật dẫn đang chuyển động hay chịu tác dụng của một trường  $\vec{B}$  biến thiên, nếu có thể tồn tại các đường dòng mà tại đó lưu thông của  $\vec{j}$ , và do vậy lưu thông của trường phát động điện, là dương. Thành thử, không có dòng FOUCAULT trong một vật dẫn rắn đang quay quanh một trục song song với một trường  $\vec{B}$  đều, vì lúc đó  $\vec{E}_m$  là gradient của  $\frac{\omega B}{2} r^2$  (H. 31). Trái

lại, nếu  $\vec{B}$  pháp tuyến với trục, thì sẽ tồn tại các dòng FOUCAULT trong vật dẫn (H.32).

### 3.4. Các áp dụng của dòng điện Foucault

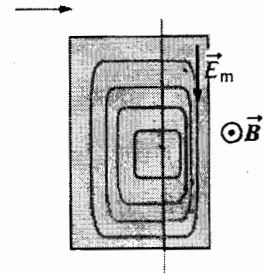
Các dòng điện cảm ứng thể tích, hoặc có các hiệu ứng thứ cấp có hại, hoặc sinh ra một hiệu ứng chủ yếu như mong muốn.

■ Nếu sự cảm ứng được gây ra bởi một trường  $\vec{B}$  biến thiên, thì vectơ  $\vec{j}$  sẽ tỉ lệ với đạo hàm của  $\vec{B}$ , ví dụ ở chế độ hình sin, tỉ lệ với  $\omega B$ .

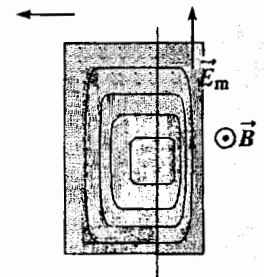


H.29. Tấm dẫn điện đang tịnh tiến thâm nhập vào trong một từ trường.

a) Vận tốc của tấm.



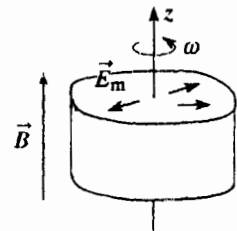
b) Vận tốc của tấm.



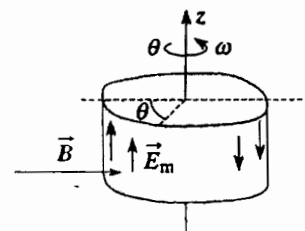
H.30. Các đường dòng khi :

a) tấm đi sâu vào trong trường :

b) tấm đi ra khỏi trường.



H.31.  $\vec{B}$  song song với trục quay : không có dòng điện FOUCAULT.



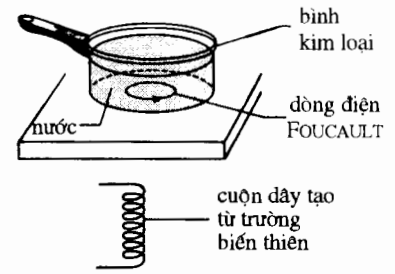
H.32.  $\vec{B}$  vuông góc với trục quay. Bởi vậy  $E_m = \omega r B \cos\theta \vec{e}_z$  và tồn tại các dòng FOUCAULT.

Công suất tiêu tán (do hiệu ứng JOULE) tỉ lệ với  $\omega^2 B^2$ .

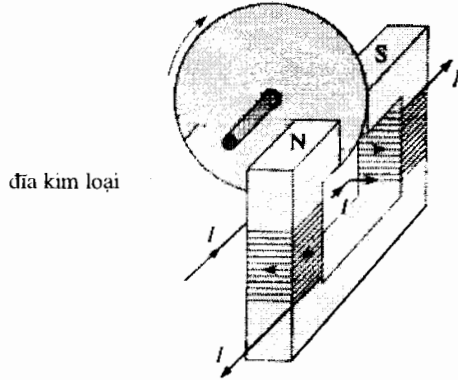
Kiểu đốt nóng này được dùng trong các lò nung cảm ứng, hay, trong lĩnh vực điện gia dụng, trong các tấm cảm ứng (H.33).

■ Các dòng điện FOUCAULT sinh ra do chuyển động của một vật dẫn làm tiêu tán một công suất tỉ lệ với bình phương của vận tốc và tạo ra một lực hãm (H.34) tỉ lệ với vận tốc và bình phương của trường. Những thiết bị như thế được dùng làm các bộ giảm tốc trên các trọng lượng nặng (H.35); các thiết bị này không thể thay thế các phanh ma sát, vì lực hãm, trong một bộ giảm tốc chỉ mạnh ở những vận tốc lớn.

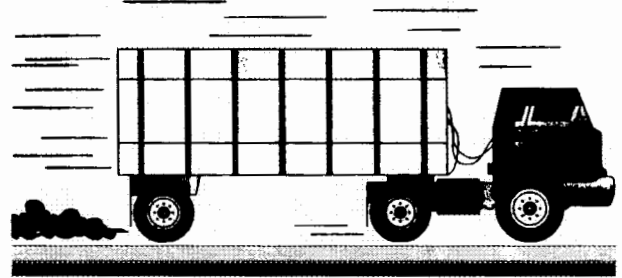
Đối với các động cơ điện và các biến thế, người ta quấn các cuộn dây trên các lõi sắt để làm tăng trị số của từ trường.



H.33. Nguyên lý của một tấm kim loại có hiện tượng cảm ứng: các dòng điện xuất hiện trong bình kim loại chịu tác dụng của một từ trường biến thiên.



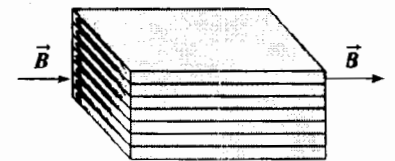
H.34. Nếu không một dòng điện nào chạy vào nam châm điện, thì đĩa quay tự do; nhưng ngay khi nam châm điện bị kích thích, đĩa sẽ bị hãm lại.



H.35. Sự phanh lại bằng cảm ứng đối với một số trọng lượng nặng: các dòng điện FOUCAULT xuất hiện trong một tấm kim loại (gắn với bánh xe) chuyển động trong một từ trường.

Mặc dù không thuộc về mạch điện, các bộ phận này là trung khu của các dòng điện FOUCAULT có thể trở nên rất mạnh và tiêu tán một công suất lớn bởi hiệu ứng JOULE. Muốn giảm bớt các dòng FOUCAULT, người ta cản trở chúng bằng cách thay khối sắt bởi một tập hợp các lá mỏng, cách điện với nhau và được định hướng dọc theo các đường sức của trường  $B$  (H.36)

Trong một vật dẫn đứng yên chịu tác dụng của một từ trường biến thiên hay trong một vật dẫn đang chuyển động trong một từ trường không đổi, thì có thể xuất hiện các dòng điện thể tích gọi là các dòng điện FOUCAULT. Các dòng điện này, làm tiêu tán năng lượng và chịu trách nhiệm, khi vật dẫn chuyển động, về các tác dụng hãm LAPLACE (lực hay mômen) ngược chiều với chuyển dời của vật dẫn.



H.36. Khối sắt gồm nhiều lá mỏng.

# Áp dụng 7

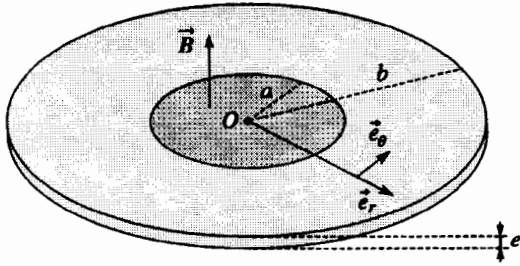
## Các dòng điện FOUCAULT trong một đĩa

Một đĩa dẫn điện mỏng, trục (Oz) bán kính  $b$  và chiều dày  $e$ , được nhúng vào trong một từ trường đều  $\vec{B}(t) = B_m \cos \omega t \vec{e}_z$  định xứ trong một hình trụ bán kính  $a$  và bằng không ở các nơi khác

(H.37). Người ta thỏa thuận bỏ qua trường  $\vec{B}$  cảm ứng tạo nên bởi dòng điện cảm ứng.

- 1) Tìm dạng của các đường dòng?
- 2) Tìm vectơ mật độ dòng điện tại mọi điểm của đĩa.

3) Xác định công suất trung bình tiêu tán trong đĩa. Hãy tính toán đối với một đĩa bằng đồng ( $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ) dày 2 mm, bán kính  $a = 2 \text{ cm}$  được nhúng hoàn toàn ( $a = b$ ) trong một trường có giá trị cực đại  $B_m = 0,1 \text{ T}$  dao động ở 50 Hz.



**H.37. Đĩa dẫn điện.**

4) Tính trường  $\vec{B}_{\text{cảm ứng}}$  được tạo ra ở tâm bởi phân bố các dòng điện cảm ứng, rồi biện luận tính thích đáng của giả thiết ban đầu.

1) Các điều kiện ở giới hạn ( $\vec{j}$  tiếp tuyến với mặt ngoài) và sự đối xứng của bài toán khiến ta đi tìm kiếm một nghiệm dạng  $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$  (trong tọa độ trụ).

2) Trên một đường dòng bán kính  $r$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 2\pi r \frac{j(r, t)}{\gamma} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

• Nếu  $r < a$  :

$$\Phi = \pi r^2 B \text{ và } j(r, t) = \frac{\gamma}{2} \omega r B_m \sin \omega t.$$

• Nếu  $a < r < b$  :

$$\Phi = \pi a^2 B \text{ và } j(r, t) = \frac{\gamma}{2} \omega \frac{a^2}{r} B_m \sin \omega t.$$

3) Công suất trên đơn vị thể tích tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE là (xem chương 1) :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}_m = \frac{j^2}{\gamma}$$

Đối với một vành khăn bán kính  $r$  và độ rộng  $dr$ .

$$d\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \mathcal{P}_{\text{vol}} d\tau = 2\pi r e dr \frac{j^2(r, t)}{\gamma}$$

Công suất tổng cộng tiêu tán bởi đĩa là :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Joule}} &= \frac{r e \gamma}{2} \omega^2 B^2 \sin^2 \omega t \\ &\times \left[ \int_0^a r^3 dr + \int_0^b \frac{a^4}{r} dr \right] \\ &= \frac{\pi e \gamma}{2} \omega^2 a^4 B^2 \sin^2 \omega t \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Trong một thời gian dài so với chu kỳ, thì công suất trung bình tiêu tán là :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{Joule}} \rangle = \frac{\pi e \gamma}{4} \omega^2 a^4 B_m^2 \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right),$$

nghĩa là khi  $a = b$  :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{Joule}} \rangle = \frac{\pi e \gamma}{16} \omega^2 a^4 B_m^2.$$

Chú ý rằng công suất này thực sự tỉ lệ với :

- bình phương của xung động (số hạng có  $\omega^2$ ) ;
- bình phương của từ trường (số hạng có  $B^2$ ) ;
- bình phương của diện tích (số hạng có  $a^4$ ) .

Đĩa đồng tiêu tán một công suất trung bình bằng 3,7 W.

4) Trường dB được tạo ra ở tâm của một vòng bán kính  $r$  và độ rộng  $dr$  là :

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2r} \text{ với } di = j(r, t) e dr.$$

Trường tạo ra bởi tập hợp các dòng điện cảm ứng là :

$$\begin{aligned} B_{\text{cảm ứng}} &= \int_{r=0}^a dB + \int_{r=a}^b dB \\ &= \mu_0 \gamma \omega \frac{e a}{2} \left( 1 - \frac{a}{2b} \right) B_m \sin \omega t. \end{aligned}$$

$B_{\text{cảm ứng}}$  luôn luôn không đáng kể so với  $B_{\text{tổng cộng}}$  nếu :

$$ea \ll \delta^2 \text{ với } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Ta lại tìm thấy đúng quy tắc chung, là : trường cảm ứng nhỏ không đáng kể nếu chiều dày của vật dẫn nhỏ so với  $\delta$ .

Đối với đồng ở 50 Hz,  $\delta = 9,2 \text{ mm}$ .

Nếu  $a = b = 2 \text{ cm}$  và  $e = 2 \text{ mm}$ , thì phép gần đúng đã ở giới hạn của hiệu lực.

# ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

## ■ HIỆN TƯỢNG TỰ CẢM

• Đối với một mạch điện cho trước, thì s.đ.đ. do trường riêng được tạo ra bởi mạch điện này là s.đ.đ. tự cảm  $e_{\text{riêng}}$ .

• Tồn tại một đại lượng  $L$  dương chỉ phụ thuộc vào dạng hình học của mạch điện sao cho :

$$e_{\text{riêng}} = - \frac{d(Li)}{dt},$$

hay đối với mạch điện cứng :

$$e_{\text{riêng}} = - L \frac{di}{dt}.$$

$L$  gọi là độ tự cảm của mạch điện ; trong hệ đơn vị quốc tế,  $L$  được đo bằng henry (H).

• Dòng điện  $i$  chạy trong một mạch điện, sẽ tạo ra một từ trường riêng  $\vec{B}_{\text{riêng}}$ , mà kết hợp với nó là năng lượng từ riêng  $\mathcal{E}_m$  bằng  $\frac{1}{2} Li^2$ .

Đồng nhất thức :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{không gian}} \frac{1}{\mu_0} B_{\text{riêng}}^2 d\tau = \frac{1}{2} Li^2,$$

cho phép xác định độ tự cảm của một mạch điện.

• Nếu có thể xác định thông lượng của trường riêng đi qua mạch điện, thì độ tự cảm của nó có thể được xác định đơn giản hơn nữa bởi hệ thức :

$$\Phi_{\text{riêng}} = Li.$$

• Đối với một cuộn dây cứng chịu tác dụng của một từ trường ngoài, thì định luật Ohm suy rộng có dạng :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} - e_{\text{ngoại}}.$$

## ■ SỰ GHÉP TỪ GIỮA HAI MẠCH ĐIỆN

• Nếu hai mạch điện dạng chỉ (1) và (2) là các nguồn duy nhất của từ trường, thì các thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua hai mạch này có thể được biểu thị xuất phát từ các dòng điện  $i_1$  và  $i_2$ .

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{và} \quad \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

• Độ hồ cảm  $M$  đặc trưng một cách đối xứng sự ghép từ giữa hai mạch điện. Giá trị tuyệt đối của  $M$  chỉ phụ thuộc dạng hình học của hệ và dấu của nó phụ thuộc các định hướng đã chọn.

• Nếu hai mạch điện đều cứng, đứng yên và cô lập ( $\vec{B}_{\text{ngoại}}$  bằng không), thì định luật OHM suy rộng trở thành :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{và} \quad u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

• Năng lượng từ của một hệ hai mạch điện, khi không có các nguồn khác của từ trường, là :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$



## ■ SỰ GHÉP ĐIỆN CƠ

Khi một phần của một mạch điện chuyển động trong một từ trường, thì các đại lượng điện và cơ sẽ không độc lập nhau. Ta nói có một *sự ghép điện cơ*.

- Phương trình cơ dùng đến các lực LAPLACE và do vậy dùng đến các dòng điện.
- Phương trình điện kể đến các s.đ.đ. cảm ứng, do vậy kể đến vận tốc của các vật dẫn.
- Đặc trưng động điện phụ thuộc các điều kiện bó buộc cơ học.
- Ngược lại, hoạt động cơ học phụ thuộc các linh kiện của mạch điện. Thành thử, sự có mặt các điện trở thường được thể hiện bởi một lực tương đương với lực ma sát.

## ■ CHUYỂN ĐỔI CÔNG SUẤT

Các động cơ và các máy phát điện là các bộ chuyển đổi công suất có khả năng sinh ra công suất cơ xuất phát từ một nguồn điện, hay sinh ra công suất điện xuất phát từ một kích thích cơ học.

- Về mặt lí thuyết, hai chiều chuyển đổi đều khả dĩ, nhưng các thiết bị thường chỉ thích ứng về mặt kĩ thuật với một kiểu hoạt động duy nhất.
- Nếu có thể không kể đến các điện trở, thì hiệu suất sẽ là 100%. Thật vậy, công suất cơ là công suất của các lực LAPLACE và công suất điện, khi không có điện trở, là công suất của s.đ.đ. dịch chuyển. Theo các định luật cảm ứng, thì hai đại lượng này bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

## ■ DÒNG ĐIỆN FOUCAULT

Trong một vật dẫn đứng yên chịu tác dụng của một từ trường biến thiên hay trong một vật dẫn đang chuyển động trong một từ trường không đổi, có thể xuất hiện các dòng điện theo thể tích gọi là các *dòng điện FOUCAULT*. Các dòng điện này tiêu tán năng lượng và chịu trách nhiệm, khi vật dẫn đang chuyển động, về các lực *hãm* LAPLACE (lực hay mômen), ngược với sự dịch chuyển của vật dẫn.

## ■ SỰ GHÉP ĐIỆN CƠ

Khi một phần của một mạch điện chuyển động trong một từ trường, thì các đại lượng điện và cơ sẽ không độc lập nhau. Ta nói có một *sự ghép điện cơ*.

- Phương trình cơ dùng đến các lực LAPLACE và do vậy dùng đến các dòng điện.
- Phương trình điện kể đến các s.đ.đ. cảm ứng, do vậy kể đến vận tốc của các vật dẫn.
- Đặc trưng động điện phụ thuộc các điều kiện bó buộc cơ học.
- Ngược lại, hoạt động cơ học phụ thuộc các linh kiện của mạch điện. Thành thử, sự có mặt các điện trở thường được thể hiện bởi một lực tương đương với lực ma sát.

## ■ CHUYỂN ĐỔI CÔNG SUẤT

Các động cơ và các máy phát điện là các bộ chuyển đổi công suất có khả năng sinh ra công suất cơ xuất phát từ một nguồn điện, hay sinh ra công suất điện xuất phát từ một kích thích cơ học.

- Về mặt lí thuyết, hai chiều chuyển đổi đều khả dĩ, nhưng các thiết bị thường chỉ thích ứng về mặt kĩ thuật với một kiểu hoạt động duy nhất.
- Nếu có thể không kể đến các điện trở, thì hiệu suất sẽ là 100%. Thật vậy, công suất cơ là công suất của các lực LAPLACE và công suất điện, khi không có điện trở, là công suất của s.đ.đ. dịch chuyển. Theo các định luật cảm ứng, thì hai đại lượng này bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

## ■ DÒNG ĐIỆN FOUCAULT

Trong một vật dẫn đứng yên chịu tác dụng của một từ trường biến thiên hay trong một vật dẫn đang chuyển động trong một từ trường không đổi, có thể xuất hiện các dòng điện theo thể tích gọi là các *dòng điện FOUCAULT*. Các dòng điện này tiêu tán năng lượng và chịu trách nhiệm, khi vật dẫn đang chuyển động, về các lực *hãm* LAPLACE (lực hay mômen), ngược với sự dịch chuyển của vật dẫn.

# Bài tập có lời giải

## Vôn kế tương tự

### ĐỀ BÀI

#### 1) Microampe kế từ điện

Có  $N$  vòng dây mảnh quấn quanh một khung chữ nhật  $MNPQ$  cạnh  $a$  và  $b$ . Một nam châm vĩnh cửu và một lõi sắt tạo ra một từ trường không đổi gần xuyên tâm và có chuẩn không đổi  $B_0$  trên các cạnh  $QM$  và  $PN$  của khung như vẽ trên các hình dưới đây.

$\vec{B}$  nằm trên  $\vec{e}_r$ , có chuẩn không đổi trên các cạnh  $QM$  và  $PN$ , nhưng giá trị đại số của nó phụ thuộc vào "miền" khảo sát :

- miền 1 :  $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_r$  ;
- miền 2 :  $\vec{B} = +B_0 \vec{e}_r$  .

Các sơ đồ vẽ bên cho thấy microampe kế được nhìn từ trên xuống và làm nổi bật từ trường loại xuyên tâm.

Khung này, được biểu diễn nhìn ra trước mặt ở sơ đồ bên, có thể quay quanh trục  $\Delta$  và mômen quán tính của nó đối với  $\Delta$  là  $J$ .

Một lò xo xoắn ốc (không vẽ ở đây) bảo đảm một ngẫu lực kéo về đàn hồi :

$$\mathcal{M}_{\text{kéo về}} = -C\theta .$$

Các ma sát cơ học (ví dụ ma sát của không khí) được biểu diễn bởi một ngẫu lực ma sát, tỉ lệ với vận tốc :

$$\mathcal{M}_{\text{ma sát}} = -h\dot{\theta}$$

Một cái kim gắn vào khung, chỉ độ lệch.

Sự nối điện được mô tả như hình bên cạnh.

Cuộn dây có điện trở  $R$  và độ tự cảm  $L$  ; người ta giả thiết có thể biểu diễn phần còn lại của mạch điện bằng một máy phát THÉVENIN, s.đ.đ.  $E$  và điện trở trong  $R_e$  .

a) Viết các phương trình vi phân được nghiệm đúng bởi  $i(t)$  và  $\theta(t)$ . Đặt  $\Phi_0 = N B_0 a b$ .  
Tìm thứ nguyên của  $\Phi_0$  ?

b) Xác định  $\theta_p$  và  $i_p$  là các giá trị của  $\theta$  và  $i$  ở chế độ không đổi.

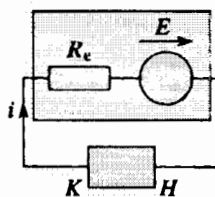
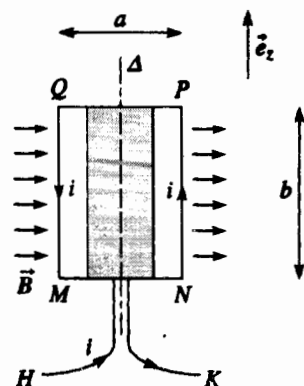
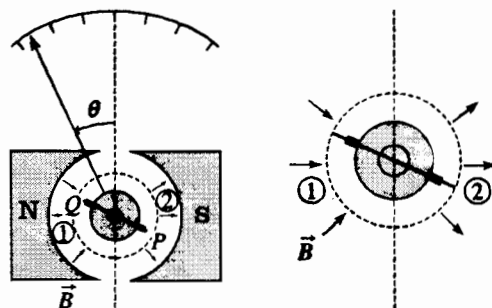
c) Viết phương trình vi phân được nghiệm đúng bởi  $\theta(t)$ . Ta bỏ qua ảnh hưởng của độ tự cảm và đặt :

$$2\lambda = \frac{1}{J} \left( h + \frac{\Phi_0^2}{R + R_e} \right) \text{ và } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} .$$

d) Mô tả sơ lược dạng của các nghiệm. Trường hợp  $\lambda = \omega_0$  có gì hay đối với một thiết bị đo ? Đối với giá trị  $R_{ec}$  nào của  $R_e$  , thì sự tắt (tối hạn) được thực hiện ?

#### 2) Sự thực hiện một vôn kế

Sau đây là sự lắp một vôn kế tương tự : ở các cực của một microampe kế điện trở  $R$ , người ta mắc hai điện trở  $R_{ec}$  (mà trị số đã được tính ở câu 1) d) và  $R_1$  .



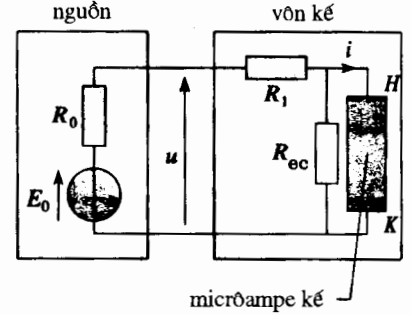
Điện trở  $R_1$  rất lớn trước  $R$  và  $R_{ec}$  là những điện trở dưới 1 k $\Omega$ . Vôn kế này được cung cấp điện bởi một máy phát điện có s.d.d.  $E_0$  và điện trở trong  $R_0$ .

a) Tìm độ lớn của điện trở của máy phát THÉVENIN  $R_{th}$ , tương đương với mạch điện "được đánh giá" bởi microampe kế? Kết luận.

b) Thiết lập hệ thức lấy chuẩn  $\theta_p(u)$  của vôn kế.

c) Độ lệch cực đại của kim thu được đối với  $i = 100$  mA và một điện áp đo được  $u = 10$  V với  $R$  cỡ 100  $\Omega$ .

Xác định độ lớn của  $R_1$  và bình giải.



### HƯỚNG DẪN

1) a) Trong tất cả các bài toán về hiện tượng cảm ứng cần phải chú ý tới dấu của các s.d.d. và dấu của các lực cơ học. Phải định hướng tất cả các đại lượng điện đối với một chiều đi đã chọn, rồi phải bảo đảm chắc chắn rằng các hiệu ứng nhận được nghiệm đúng định luật LENZ.

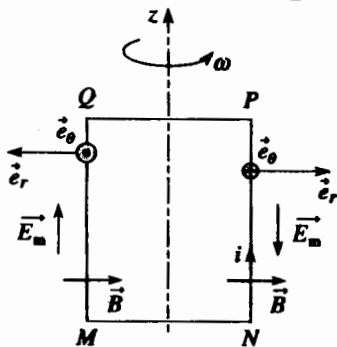
Để xác định s.d.d. dịch chuyển, thường người ta lựa chọn giữa sự cân bằng công suất, sự tính toán lưu thông của trường phát động điện và việc áp dụng định luật FARADAY. Định luật này, ở đây không thể áp dụng được, vì người ta chỉ biết trị số của trường trên các dây dẫn. Sự cân bằng năng lượng thường lại cho ta nghiệm đơn giản nhất. Sự tính toán lưu thông của trường phát động điện cho ta ở đây, trên NP :

$$\vec{E}_{Lorentz} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$= \left( \dot{\theta} \frac{a}{2} \vec{e}_\theta \right) \wedge (B \vec{e}_r)$$

$$= -\dot{\theta} \frac{a}{2} B \vec{e}_z, \text{ do đó :}$$

$$e_{NP} = \int_N^P \vec{E}_{Lorentz} \cdot d\vec{l} = -\dot{\theta} \frac{a}{2} B b.$$



### LỜI GIẢI

#### 1) a) Phương trình cơ học

Đối với mỗi vòng của cuộn dây, các lực LAPLACE tác dụng lên các cạnh NP và QM đều bằng  $B i b$ , và mômen của chúng đối với  $\Delta$  là  $B i b \frac{a}{2}$  (các mômen, tất cả đều cùng chiều). Các lực đều bằng không đối với các cạnh MN và PQ. Tổng cộng lại, ta được :

$$\mathcal{M}_{Laplace} = N i B a b = i \Phi_0.$$

Từ đó, ta suy ra  $J \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Laplace} + \mathcal{M}_{kéo\ về} + \mathcal{M}_{ma\ sát}$ , nghĩa là :

$$J \ddot{\theta} + h \dot{\theta} + C \theta = i \Phi_0.$$

$\Phi_0$  đồng nhất với một thông lượng, nhưng không chút nào biểu diễn thông lượng của  $\vec{B}$  (khác không) đi qua khung

#### Phương trình điện

S.d.d. dịch chuyển  $e_L$  được cho bởi :

$$e_L i = - \mathcal{P}_{Laplace} = - \mathcal{M}_{Laplace} \dot{\theta},$$

do đó :

$$e_L = - \Phi_0 \dot{\theta}.$$

S.d.d. tự cảm là  $e_{tự\ cảm} = -L \frac{di}{dt}$ . Từ đó, suy ra :

$$E - \Phi_0 \dot{\theta} - L \frac{di}{dt} = (R + R_e) i.$$

b) Ở chế độ không đổi, các đạo hàm đều triệt tiêu và ta được :

$$i_p = \frac{E}{R + R_e} \quad \text{và} \quad \theta_p = \frac{\Phi_0}{C} i_p.$$

c) Phương trình điện có dạng :

$$i + \frac{L}{R + R_e} \frac{di}{dt} + \frac{\Phi_0}{R + R_e} \dot{\theta} = i_p = \frac{C}{\Phi_0} \theta_p.$$

Từ phương trình cơ học, ta có :

$$i = \frac{J \ddot{\theta} + h \dot{\theta} + C \theta}{\Phi_0}$$

Nếu ta bỏ qua hiện tượng tự cảm, thì ta được :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_p.$$

Cung theo cùng một cách, ta thu được trên QM :

$$e_{QM} = -\dot{\theta} \frac{a}{2} Bb.$$

Trên MN và trên PQ, các lưu thông của trường  $\vec{E}_{\text{Lorentz}}$  đều triệt tiêu.

Từ đó, tổng cộng lại ta có :  $e_L = -\dot{\theta} BNab$ .

Tốt hơn hết là nên dùng phương pháp đơn giản nhất và chắc chắn nhất để có thể viết được rằng công suất của các lực LAPLACE trong một từ trường không đổi "bên ngoài" bằng  $-e_L i$ .

1) c) Điện trở của mạch điện tiêu tán năng lượng : số hạng có R của phương trình vi phân thì ngược dấu với chuyển động. Hãy kiểm tra dấu của nó. Ở đây,  $\lambda$  là dương, ta có đúng :

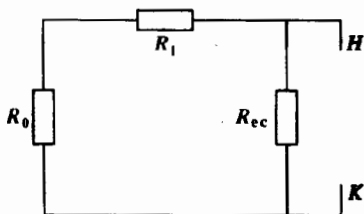
$$\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \omega_0^2\theta + \omega_0^2\theta_p,$$

điều này chỉ rõ rằng số hạng  $-2\lambda\dot{\theta}$  giữ vai trò của một số hạng tắt dần của chất lỏng.

1) d) Đây là một dịp để ôn lại các dao động tự do tắt dần, đã học ở năm thứ nhất (Xem H-prépa, Cơ học I, năm thứ nhất, trang 100).

Đặc biệt, hãy nêu các đặc trưng chủ yếu của ba chế độ giả tuần hoàn, tới hạn, và không tuần hoàn ? Làm thế nào để nhận được các chế độ đó ? Một người sử dụng yêu cầu một thiết bị, ngoài các phẩm chất khác, phải có một thời gian đáp ứng càng ngắn càng tốt.

2) Đây là sơ đồ tương đương để tính toán điện trở trong của máy phát THÉVENIN.

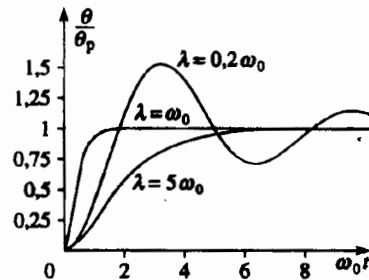


d) Ta đã nhận biết một phương trình cổ điển về dao động tắt dần.

- $\lambda < \omega_0$  : sự tắt dần yếu, chế độ giả tuần hoàn ;
- $\lambda > \omega_0$  : sự tắt dần mạnh, chế độ không tuần hoàn ;
- $\lambda = \omega_0$  : sự tắt dần tới hạn

Ba đường cong dưới đây biểu diễn ba chế độ kể trên đối với cùng giá trị của  $\omega_0$  và cùng các điều kiện ban đầu :

$$\theta(0) = 0 \quad \text{và} \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$



Muốn thiết bị có thể sử dụng được, thì cần phải rất nhanh đạt tới giá trị không đổi, do đó sẽ có lợi khi đến gần chế độ tới hạn với :

$$R_e = R_{ec} = \frac{\Phi_0^2}{2J\omega_0 - h} - R.$$

2) a) Điện trở của máy phát THÉVENIN bằng :

$$R_{th} = \frac{(R_0 + R_1)R_{ec}}{R_0 + R_1 + R_{ec}}.$$

Điện trở  $R_1$  rất lớn trước  $R_{ec}$ , vậy  $R_{th} \approx R_{ec}$ .

Điện trở nguồn của microampe kế như vậy lân cận với  $R_{ec}$ , điều này tối ưu hóa thời gian đáp ứng của vôn kế.

b) Ở chế độ không đổi, hệ tương đương với một mạng điện trở ; suy ra :

$$i_p = \frac{R_{ec}}{R_1(R_{ec} + R) + R_{ec}R} u$$

$$\text{và như vậy : } \theta_p = \frac{\frac{\Phi_0}{C} R_{ec}}{R_1(R_{ec} + R) + R_{ec}R} u.$$

$$c) \frac{R_{ec}}{R_1(R_{ec} + R) + R_{ec}R} = \frac{i_{\max}}{u_{\max}} = 10^{-5} \text{ S.}$$

Nếu  $R_1 \gg R_{ec}$  và  $R_1 \gg R$ , thì phương trình này sẽ giản lược về :

$$R_1 \approx 100 \text{ k}\Omega.$$

Như vậy, các giả thiết tính toán đã được chứng minh.

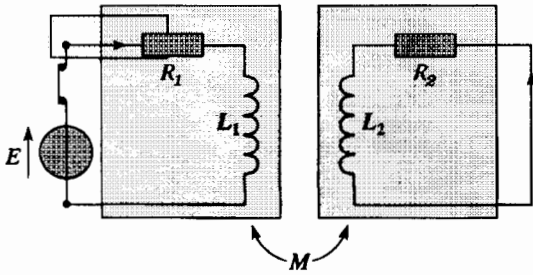
# Bài tập

## ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

### 1 Chế độ quá độ trong hai mạch điện ghép đôi

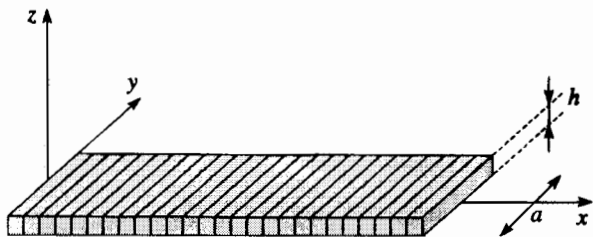
Cho hai mạch điện ghép đôi. Để đơn giản tính toán, ta giả thiết hệ số hỗ cảm  $M$  là dương ( $M > 0$ ),  $L_1 = L_2 = L$  và  $R_1 = R_2 = R$ .  $E$  không đổi.

- Viết hai phương trình vi phân ghép đôi được nghiệm đúng bởi  $i_1(t)$  và  $i_2(t)$  khi đóng cái ngắt điện
- Từ đó suy ra hai phương trình vi phân, tách cặp bằng cách thay đổi biến số đơn giản.
- Cái ngắt điện được đóng ở thời điểm  $t = 0$ .
  - Xác định  $i_1(t)$  và  $i_2(t)$  trong trường hợp  $M$  nhỏ hơn  $L$ .
  - Làm lại phép tính trên cho trường hợp giới hạn của sự ghép lí tưởng ( $L = M$ ).



### 2 Dòng điện FOUCAULT

Người ta quấn trên một hình hộp chiều rộng  $a$ , chiều dày  $h \ll a$  và chiều dài lớn,  $n$  vòng dây dẫn trên đơn vị dài, có dòng điện cường độ  $I = I_m \cos(\omega t)$  chạy qua. Ống dây này, rất dẹt, chứa đầy một kim loại không từ tính, độ dẫn điện  $\gamma$ .



Ở xa các bờ rìa, ta giả thiết điện trường có dạng  $\vec{E} = E(z)\vec{e}_y$ .

1) Hãy chứng tỏ rằng giả thiết này tương thích với các định luật của thuyết điện từ và hình học của hệ. Nghiên cứu tính chẵn lẻ của hàm  $E(z)$ .

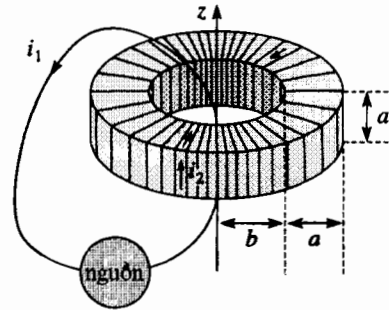
2) Hãy tính vectơ mật độ dòng  $\vec{j}$  và công suất trung bình  $\mathcal{P}$  tiêu tán trên một chiều dài  $l$  đo được theo  $(Ox)$ , bằng cách bỏ qua trường  $\vec{B}$  tạo ra bởi các dòng điện cảm ứng.

3) Với điều kiện nào thì giả thiết vừa nêu được xác minh?

### 3 Hồ cảm của một vòng dây và một cuộn dây hình xuyên

Người ta quấn  $N$  vòng đều nhau lên một hình xuyên, tiết diện vuông cạnh  $a$ , trục  $(Oz)$  và bán kính trong là  $b$ .

Cuộn dây này có điện trở thuần tổng cộng  $R_2$ .



Một vòng dây, có dòng điện  $i_1 = i_{1m} \cos \omega t$  chạy qua, bao quanh hình xuyên như hình vẽ.

1) Tính độ tự cảm  $L_2$  của cuộn dây hình xuyên và độ hỗ cảm  $M$  của hai mạch điện trong khi vẫn giữ nguyên các định hướng của hình vẽ.

2) Cuộn dây hình xuyên tự khép kín. Hãy tính dòng điện  $i_2$  trong cuộn dây này, ở chế độ hình sin.

3) Cuộn dây hình xuyên hở. Hãy xác định hiệu điện thế cực đại giữa hai đầu cực cuộn dây.

### 4 Độ hỗ cảm của hai cuộn dây dẹt

Cho hai cuộn dây dẹt hình tròn  $\mathcal{B}_1$  và  $\mathcal{B}_2$ , có tâm  $O_1$  và  $O_2$ , bán kính  $a_1$  và  $a_2$  và số vòng  $N_1, N_2$ . Hơn nữa, người ta giả thiết  $a_2 \ll a_1$ . Hãy tính độ hỗ cảm  $M$  của chúng trong ba trường hợp sau đây:

1)  $\mathcal{B}_2$  ở trong mặt phẳng của  $\mathcal{B}_1$ , và gần tâm của nó;

2)  $\mathcal{B}_2$  ở trong mặt phẳng của  $\mathcal{B}_1$  và cách  $O_1$  một khoảng  $d$ , với  $d \gg a_1$ ;

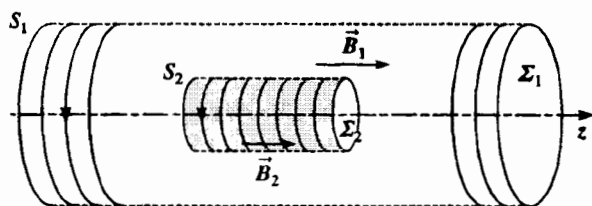
3)  $\mathcal{B}_2$  song song với  $\mathcal{B}_1$ , đường thẳng  $(O_1O_2)$  pháp tuyến với mặt phẳng của các cuộn dây và  $O_1O_2 = d$  với  $d \gg a_1$ .

## 5 Sự ghép giữa hai ống dây

Hai ống dây  $S_1$  và  $S_2$ , tiết diện tròn, có các đặc trưng :

- $n_1$  và  $n_2$  vòng trên đơn vị dài ;
- các tiết diện có diện tích  $\mathcal{E}_1$  và  $\mathcal{E}_2$  ( $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$ ) ;
- các chiều dài  $l_1$  và  $l_2$  ( $l_2 < l_1$ ) đủ lớn để có thể bỏ qua các hiệu ứng ở các đầu ống ;
- điện trở  $R_1$  và  $R_2$ .

Ống  $S_2$  đặt trong ống dây  $S_1$  và các trục đối xứng của chúng trùng nhau.



1) Xác định các độ tự cảm  $L_1$  và  $L_2$  cũng như độ hồ cảm  $M$ .

2)  $S_2$  tự khép kín và trong  $S_1$  có một dòng điện hình sin xung động  $\omega$  chạy qua, tạo ra bên trong  $S_1$  một từ trường  $\vec{B}_1 = B_1(t)\vec{e}_z$  ; Lúc đó, gọi  $\vec{B}_2 = B_2(t)\vec{e}_z$  là từ trường (tổng cộng) chi phối bên trong  $S_2$ .

Hãy xác định tỉ số các biên độ  $\frac{B_{2m}}{B_{1m}}$  của hai trường.

3) Một điện áp dưới dạng các xung chọn  $u_1$ , có trị số  $\pm U_0$  và chu kì  $T$  lớn so với các hằng số thời gian của các ống dây, cung cấp điện cho  $S_1$ . Hơn nữa,  $S_2$  là mạch hở.

Xác định điện áp  $u_2$  ở hai đầu dây của  $S_2$ .

4) Hai ống dây, được quấn theo cùng chiều, mắc song song nhau và được cung cấp một điện áp hình sin, xung động  $\omega$ .

Người ta giả thiết :

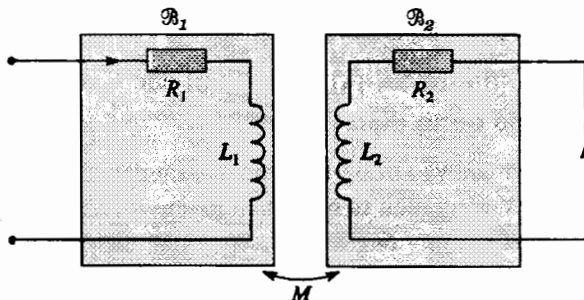
$$R_1 = R_2 = R ; n_1 = n_2 = n \text{ và } l_1 = l_2 = l.$$

Xác định tỉ số các giá trị cực đại của các dòng điện  $i_1$  và  $i_2$ .

## 6 Trở kháng tương đương

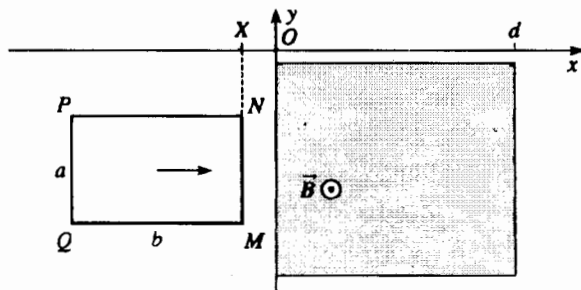
Một cuộn dây  $\mathcal{B}_1$ , có độ tự cảm  $L_1$  và điện trở  $R_1$ , được ghép, với một hệ số hồ cảm  $M$ , vào một cuộn dây  $\mathcal{B}_2$ , có độ tự cảm  $L_2$  và điện trở  $R_2$  tự khép kín.

Hãy xác định trở kháng phức giữa các cực của  $\mathcal{B}_1$ , ở chế độ hình sin, xung động  $\omega$  (hình vẽ).



## 7 Sự hãm phanh điện từ

Một khung dây dẫn điện chữ nhật  $MNPQ$  di động, có cạnh  $a$  và  $b$ , khối lượng  $m$ , điện trở  $R$  và độ tự cảm không đáng kể, đang tịnh tiến song song với  $(Ox)$ .



Khung dây đi qua một miền chiều dài  $d$  lớn hơn  $b$ , trong đó, từ trường là đều và bằng  $B\vec{e}_z$ . Ta thừa nhận trường bằng không ở ngoài miền đó, mà không quan tâm đến vấn đề gắn với tính bất liên tục của  $\vec{B}$ . Ta cũng bỏ qua mọi lực, khác với lực từ (điều này có thể được thực hiện một cách gần đúng bằng cách treo vật dẫn vào một sợi dây rất dài).  $X(t)$  biểu diễn hoành độ của cạnh  $MN$ , chiều dài  $a$ , và  $v$  là vận tốc của khung.

1) Viết các phương trình vi phân được nghiệm đúng bởi  $v(t)$  và bởi  $v(X)$ .

2) Vật dẫn đi vào trong trường với một vận tốc  $v_0$ . Ở điều kiện nào thì nó lại đi ra khỏi trường ? Nếu điều kiện này được nghiệm đúng, thì hãy xác định độ giảm vận tốc  $\Delta v$ .

3) Thực ra, vật dẫn là một tấm đồng mỏng hình vuông, chiều dày  $h$  và cạnh  $a$ . Xuất phát từ một mô hình thô sơ, hãy tính độ lớn của  $\Delta v$ .

Áp dụng số : độ dẫn điện  $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$ ; khối lượng riêng  $\rho = 9.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ;  $B = 0,5 \text{ T}$ ;  $a = 1 \text{ cm}$ .

## VẤN ĐUNG VỐN KIẾN THỨC

### 8 Điện trở tương đương với các tổn hao do dòng điện FOUCAULT

Người ta đưa vào trong một ống dây rất dài, chiều dài  $l$ , gồm  $N$  vòng diện tích  $S$ , pháp tuyến với trục  $(Oz)$ , điện trở  $R_0$ , một ống hình trụ rỗng dẫn điện, độ dẫn điện  $\gamma$ , bán kính  $a$  và cùng chiều dài  $l$ . Thành ống đủ mỏng để có thể bỏ qua hiệu ứng mặt ngoài và chiều dày  $b$  của thành ống nhỏ so với  $a$ .

1) Nhắc lại biểu thức của độ tự cảm  $L_0$  của ống dây khi không có ống rỗng ở trong.

2) Trong ống dây có một dòng điện hình sin,  $i = i_m \cos \omega t$  chạy qua và xuất hiện trong ống rỗng một dòng điện cảm ứng có mật độ dòng điện thể tích  $\vec{j}$ .

a) Bằng cách dùng các tính đối xứng và định lí AMPÈRE, hãy xác định trường  $\vec{B}_0$  do dòng điện  $i$  tạo ra, rồi xác định trường  $\vec{B}_1$  do dòng điện cảm ứng trong ống rỗng gây ra.

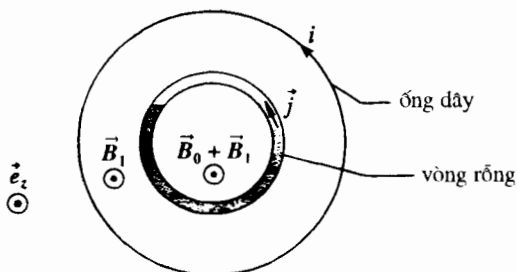
b) Xác định trở kháng phức :

$$Z(\omega) = R(\omega) + j L(\omega) \omega$$

giữa các cực của ống dây biến đổi theo  $L_0$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $a$  và  $b$ .

c) Một ống dây, tiết diện tròn bán kính  $a = 1 \text{ cm}$ , được cuộn trên một vòng (rỗng) bằng đồng, độ dẫn điện  $\gamma = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  và chiều dày  $b = 1 \text{ mm}$ . Ở tần số thấp, điện trở của của ống dây là  $R_0 = 10 \Omega$  và độ tự cảm của nó là  $L_0 = 0,1 \text{ H}$ .

Hãy xác định các tần số mà theo đó mô hình nói trên là chấp nhận được và hãy tính độ lớn của  $R(\omega)$  ở  $1 \text{ kHz}$ .



## 9 \* Sự bay từ

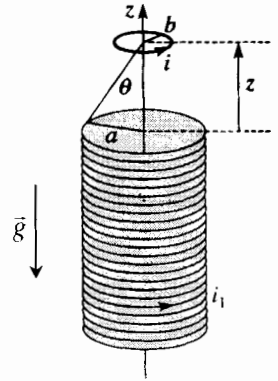
Một ống dây dài, thẳng đứng (bán-vô hạn) tiết diện tròn (bán kính  $a$  và có  $n$  vòng sít nhau trên đơn vị dài) có dòng điện  $i_1 = i_m \cos \omega t$  chạy qua. Một cuộn dây hình tròn, có  $N$  vòng bán kính  $b$  ( $b \ll a$ ), điện trở  $R$ , độ tự cảm  $L$  và khối lượng  $m$ , được đặt ở bên trên ống dây, cách xa đầu ống một khoảng  $z$ . Ta xác định vị trí cuộn dây bằng góc  $\theta$ .

1) Hãy tính lực từ trung bình  $\langle F \rangle$  tác dụng vào cuộn dây.

Tìm giá trị  $i_{01m}$  của  $i_m$  để vòng dây có thể bay lên, ngay phía trên ống dây, ở độ cao  $z$ ? Cân bằng có bền không ?

2) Tìm công suất  $\mathcal{P}_0$  lúc đó, tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE trong cuộn dây ?

3) Áp dụng số :  $L = 0,7 \text{ mH}$ ;  $R = 0,2 \Omega$ ; tần số =  $5 \text{ kHz}$ ;  $b = 1 \text{ cm}$ ;  $a = 3 \text{ cm}$ .  $mg = 0,3 \text{ N}$ ;  $N = 100$ ;  $n = 10^4 \text{ vòng.m}^{-1}$ . So sánh các giá trị của  $R$  và  $L\omega$ ? Tính  $i_{01m}$  và  $\mathcal{P}_0$ .



## 10 Nguyên lí của động cơ tuyến tính

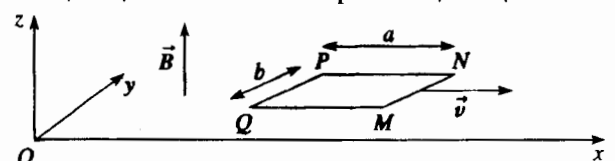
Một tập hợp các nam châm điện (không được biểu diễn dưới đây) tạo ra dọc theo trục  $(Ox)$  một từ trường phụ thuộc thời gian và hoành độ dưới dạng :

$$\vec{B} = f(u) \vec{e}_z \quad \text{với} \quad u = t - \frac{x}{v_0}$$

Một vật dẫn chuyển động dọc theo trục  $(Ox)$  với vận tốc  $v$ . Người ta mô hình hóa vật dẫn này bằng một khung dây chữ nhật  $MNPQ$  kích thước  $a$  và  $b$ , pháp tuyến với  $\vec{e}_z$ , có điện trở  $R$  và độ tự cảm không đáng kể. Hoành độ của cạnh  $MN$  của khung được kí hiệu là  $X(t)$ .

1) Hãy mô tả  $\vec{B}(x, t)$ .

2) Tính lực từ tác dụng lên vật dẫn theo  $b$ ,  $R$ ,  $v_0$ ,  $v$  và các giá trị đặc biệt  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  của hàm  $f$ . Ta sẽ xác định các biểu thức của  $u_1$  và  $u_2$  theo  $t$ ,  $X$ ,  $v_0$  và  $a$ . Biện luận dấu của nó xuất phát từ định luật LENZ.



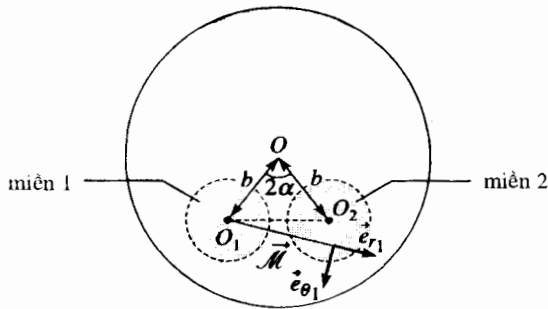
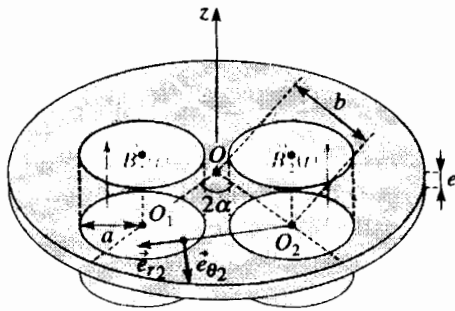


# 11 \* Nguyên lí của bộ đếm điện (công tơ điện)

Hai nam châm điện tạo ra, mỗi cái trong một miền tiết diện tròn bán kính  $a$ , một từ trường biến thiên :  $\vec{B}_1 = B_1(t)\vec{e}_z$  và  $\vec{B}_2 = B_2(t)\vec{e}_z$ .

Các trường này áp đặt lên một đĩa kim loại mỏng, chiều dày  $e$ , độ dẫn điện  $\gamma$ , chuyển động chung quanh trục thẳng đứng ( $Oz$ ). Các tâm  $O_1$  và  $O_2$  của hai miền đều ở cách trục quay một khoảng  $b$ .

Người ta bỏ qua trường cảm ứng bởi các dòng điện FOUCAULT, và sự quay là đủ chậm để có thể bỏ qua trường phát động điện LORENTZ (trên các mô hình cũ của các bộ đếm điện, được trang bị các đĩa chuyển động, thì ta có thể quan sát thấy vận tốc quay của các đĩa này bao giờ cũng yếu).



1) Giả thiết đĩa vô hạn, hãy tính các mật độ dòng  $\vec{j}_1$  và  $\vec{j}_2$  cảm ứng bởi hai trường, ở ngoài miền áp đặt của chúng. Người ta sẽ sử dụng hai hệ tọa độ cực, tâm  $O_1$  và  $O_2$ .

2) Người ta đặt :

$$\vec{I} = \iint_{\text{miền 2}} \frac{\vec{e}_{r_1}}{r_1} dS \text{ và } I = \|\vec{I}\|$$

Hãy biểu thị theo sự biến đổi của  $I$  và các dữ liệu (các trường  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  và các đạo hàm của chúng, ...), mômen  $\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1}$  đối với trục quay của các lực

LAPLACE do tương tác của trường  $\vec{B}_2$  và của mật độ dòng  $\vec{j}_1$ , rồi mômen  $\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$  tương ứng với tương tác của  $\vec{B}_1$  và  $\vec{j}_2$ , và cuối cùng mômen tổng cộng  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} + \mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$ , (ta thừa nhận rằng các phần đóng góp khác có thể xảy ra vào mômen tổng cộng là không đáng kể).

3) Ước tính giá trị gần đúng của mômen này với giả thiết  $a \ll b$  và  $a \ll O_1O_2$ .

4) Ta giả thiết

$$B_1(t) = B_{1m} \cos(\omega t + \psi)$$

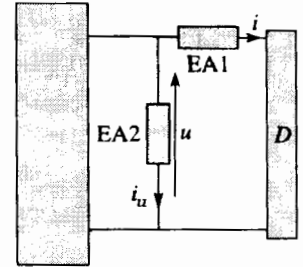
và 
$$B_2(t) = B_{2m} \cos(\omega t).$$

Chứng minh rằng

$$\mathcal{M} = C B_{1m} B_{2m} \sin \psi,$$

Và hãy cho một giá trị gần đúng của  $C$ .

5) Hai nam châm điện EA1 và EA2, được coi như các cuộn cảm thuần khiết  $L_1$  và  $L_2$ , được mắc như hình vẽ bên. Nguồn điện áp hình sin, sinh ra trong mạch điện một điện áp  $u = u_m \cos \omega t$  và một dòng điện  $i = i_m \cos(\omega t + \phi)$ , cung cấp điện cho



lượng cực  $D$  mà ta muốn đo điện năng tiêu thụ. Các trường  $B_1$  và  $B_2$  được tạo ra bởi các nam châm điện EA1 và EA2, lúc đó sẽ tỉ lệ với các dòng điện đi qua chúng, và ta có thể kí hiệu, với  $i$  chạy trong EA1 và  $i_u$  chạy trong EA2 :  $B_1 = K_1 i$  và  $B_2 = K_2 i_u$ .

Một nam châm vĩnh cửu sẽ hãm đĩa lại bằng cách gây ra các dòng điện FOUCAULT. Các dòng điện này thực hiện một mômen hãm bằng  $-f \Omega$ , trong đó  $\Omega$  biểu diễn vận tốc góc của chuyển động quay của đĩa. Chế độ quá độ xảy ra rất ngắn, và ta thừa nhận rằng vận tốc quay  $\Omega$  này liên tục bằng  $\frac{\mathcal{M}}{f}$ .

Chúng tỏ rằng sự quay của đĩa (góc quét bởi đĩa) chỉ rõ năng lượng tiêu thụ trong lượng cực  $D$ .

# 12 \*\* Nguyên lí của đinamô (máy phát điện một chiều) tự kích

Một đĩa dẫn điện, bán kính  $a$ , chiều dày  $e$ , chuyển động quay với vận tốc góc  $\omega$  không đổi, xung quanh trục của nó ( $OA$ ) trùng với trục ( $Oz$ ). Trục ( $OA$ ) dẫn điện và vòng quay của đĩa tiếp xúc điện với một vành cố định nhờ một chổi quét trung gian.

Vành cố định được nối với cực C bởi một dây dẫn cũng cố định.

Toàn bộ được đặt trong một từ trường ngoài không đổi  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

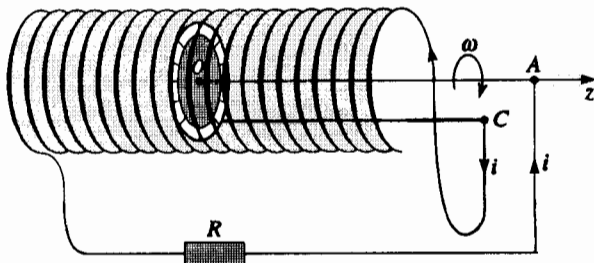
Người ta bỏ qua điện trở của tất cả các dây dẫn.

1) Xác định hiệu điện thế  $u_{AC}$

2) Trường  $\vec{B}$  thực ra là do dòng điện  $i$  tạo ra bởi sự quay của đĩa.

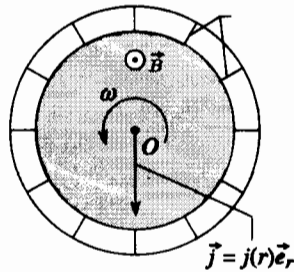
Ta có thể giả thiết rằng đĩa chuyển động, được đặt trong một ống dây độ tự cảm  $L$ , gồm  $n$  vòng sát nhau trên đơn vị dài, như trên sơ đồ điện sau đây.

Điện trở  $R$  bao gồm điện trở của ống dây.



a) Viết phương trình vi phân nghiệm đúng bởi dòng điện  $i$ .

b) Chứng minh rằng với một giá trị  $\omega_0$  của  $\omega$ , thì tồn tại một nghiệm ổn định khác không đối với  $i$ . Điều gì sẽ xảy ra nếu  $\omega$  nhỏ hơn hay lớn hơn  $\omega_0$ ?



c) Trong trường hợp mà  $i$  khác không, hãy xác định theo hai cách, hệ thức tồn tại giữa ngẫu lực phải thực hiện để làm đĩa quay và cường độ dòng điện.

3) Tìm tỉ số có thể tồn tại giữa hệ thống này và từ trường trái đất?

## LỜI GIẢI

1) Khi ngắt điện đóng, ta viết:

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

và: 
$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

2) Đặt  $I = i_1 + i_2$  và  $J = i_1 - i_2$ , ta được hai phương trình vi phân tách cặp:

$$E = RI + (L+M) \frac{dI}{dt} \quad \text{và} \quad E = RJ + (L-M) \frac{dJ}{dt}$$

3) a) Nếu  $L$  khác  $M$ , ta đặt:

$$\tau_1 = \frac{L+M}{R} \quad \text{và} \quad \tau_2 = \frac{L-M}{R}$$

Các điều kiện ban đầu ở  $t = 0$ :

$$i_1(0) = i_2(0) = 0, \text{ nghĩa là } I(0) = J(0) = 0.$$

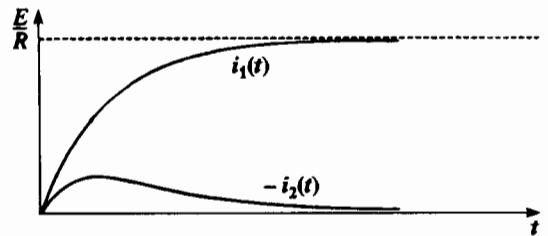
Ta được: nếu  $\tau_2 \neq 0$ , nghĩa là nếu  $L \neq M$ :

$$I = \frac{E}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right] \quad \text{và} \quad J = \frac{E}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

nghĩa là: 
$$i_1 = \frac{E}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

và 
$$i_2 = \frac{E}{2R} \left[ e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right]$$

Các đường cong được biểu diễn dưới đây. Sự phân tích định tính khẳng định rằng trạng thái cuối đúng là:  $i_1 = \frac{E}{R}$  và  $i_2 = 0$ .



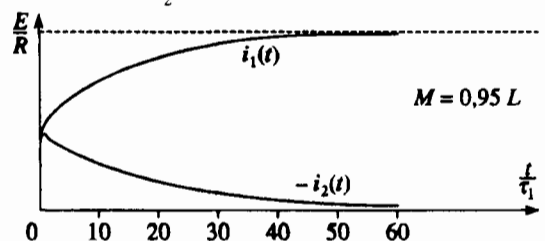
b) Nếu  $L = M$ , thì  $J(t) = \frac{E}{R}$  sẽ gián đoạn ở  $t = 0$ . Sự gián đoạn này không bị cấm, vì nếu  $L = M$ , thì s.đ.đ. tổng cộng sẽ triệt tiêu ở thời điểm  $0^+$  trong mỗi mạch điện.

Nghiệm đối với  $I$  không thay đổi, vậy:

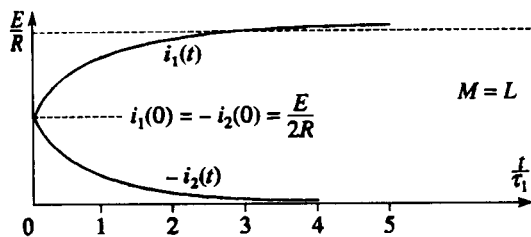
$$i_1 = \frac{E}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right] \quad \text{và} \quad i_2 = -\frac{E}{2R} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Còn một trường hợp giới hạn mà các nghiệm thực hướng tới đối với  $M$  có khuynh hướng tiến đến  $L$ . Các đường cong dưới đây biểu diễn trường hợp  $M = 0,95L$  và trường hợp  $M = L$ . Trong trường hợp sau cùng này, người ta quan sát thấy một sự gián đoạn của các cường độ dòng điện, mặc dù có các độ tự cảm, nghĩa là các quán tính điện. Ở thời điểm  $t = 0^+$ , cả hai dòng điện  $i_1$  và  $i_2$  đều xuất hiện tự phát, vì ta đang ở trong trường hợp mà (xem §1.2.5).

$$\frac{i_1}{i_2} = X = -\frac{M}{L} = -\frac{L}{M} = -1.$$



Mạch này không tồn tại thực tế, nhưng nếu sự quan sát các cường độ dòng điện được thực hiện trong thời gian rất lớn so với  $\frac{L}{R}$ , thì các chỗ gián đoạn có thể quan sát được trong trường hợp giới hạn mà  $M^2 \approx L^2$ .



3) Cho  $\vec{B}_2$  là trường tạo ra bởi  $i_2$ . Theo tính đối xứng của bài toán, thì  $\vec{B}_2 = B_2(r, z)\vec{e}_\theta$ . Theo định lí AMPÈRE, thì  $B_2 = 0$  ở bên ngoài cuộn dây và  $B_2 = -\frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r}$  ở bên trong.

$$\Phi_{\text{riêng}} = n \int_{r=b}^{b+a} \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r} a \, dr = L_2 i_2,$$

với 
$$L_2 = \mu_0 N^2 \frac{a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}.$$

Thông lượng của  $\vec{B}_2$  đi qua vòng dây chỉ giới hạn ở thông lượng của  $\vec{B}_2$  đi qua một tiết diện của hình xuyên. Do đó, với các định hướng đã chọn thì :

$$M = -\mu_0 N \frac{a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}.$$

2)  $R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$  cho theo kí hiệu phức :

$$i_2 = -i_1 \frac{j M \omega}{R_2 + j L_2 \omega}.$$

Vậy :  $i_2 = i_{2m} \cos(\omega t + \phi)$  với :

$$i_{2m} = \frac{i_{1m}}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{R_2}{M \omega}\right)^2}} \text{ và } \phi = \text{Arctan} \frac{R_2}{L_2 \omega}.$$

3)  $u_2 = M \frac{di_1}{dt}$ , hay  $u_{2m} = |M| \omega i_{1m}$ .

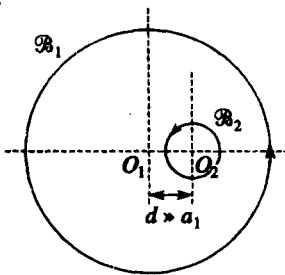
4) Vì  $a_2 \ll a_1$ , nên trong ba trường hợp, ta có thể giả thiết rằng trường được tạo ra bởi  $\mathcal{B}_1$  là chuẩn đều ở mức của  $\mathcal{B}_2$ .

1) Trường ở tâm cuộn dây dẹt là :

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{2a_1},$$

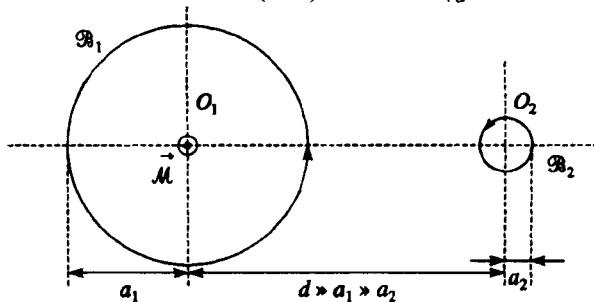
do đó 
$$M = \pm \mu_0 \pi N_1 N_2 \frac{a_2^2}{2a_1},$$

( $\pm$  tùy theo sự định hướng của  $\mathcal{B}_2$  đối với  $\mathcal{B}_1$ ; trên hình vẽ, các định hướng dẫn đến  $M > 0$ ).



2) Ở khoảng cách  $d$  rất lớn so với  $a_1$ , trường  $B_1$  có thể được coi như trường tạo ra bởi một lưỡng cực có mômen  $\mathcal{M}_1 = N_1 \pi a_1^2 i_1$

tại một điểm có tọa độ cực  $\left(d, \frac{\pi}{2}\right)$  :  $B_1 = \mu_0 \frac{N_1 a_1^2 i_1}{4d^3}$ .



2) Trong ống dây, trường  $\vec{B}$  là cộng tuyến với trục  $(Ox)$  và các hiệu ứng bờ là không đáng kể. Trường này có giá trị  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_x$  và bằng không ở ngoài ống.

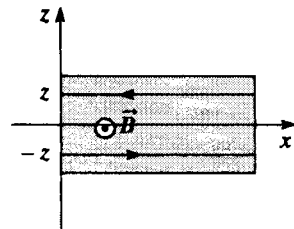
Ta có thể thử nghiệm đối với trường  $\vec{E}$  được đưa ra :

- $\vec{E}$  được định hướng theo  $(Ox)$  như  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;
- mọi mặt phẳng trục giao với  $(Ox)$  đều là mặt phẳng đối xứng đối với các nguồn (ở đây là dòng điện); như vậy  $\vec{E}$  trục giao với  $(Ox)$ ,
- $\text{div } \vec{E} = 0$  (kim loại không được tích điện).

Thành thử,  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  tiếp tuyến với mặt ngoài của kim loại.

Nếu ta quay ngược ống dây (bằng phép quay một góc  $\pi$  quanh trục  $(Ox)$ ), thì hệ không thay đổi và  $\vec{E}(z)$  trở thành  $-\vec{E}(-z)$ ; như vậy  $\vec{E}(z)$  là lẻ.

2) Ta tính lưu thông của  $\vec{E}$  dọc theo hình chữ nhật tạo thành từ hai đoạn chiều dài  $a$ , song song với  $(Oy)$ , có cùng hoành độ  $x$  và độ cao  $+z$  và  $-z$ .



Theo định lí OSTROGRADSKI :

$$\oint_{\text{chữ nhật}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2a E(z) = -2za \frac{dB}{dt}$$

do đó :  $E(z) = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) z$ .

Công suất trung bình trên đơn vị thể tích tiêu tán trong kim loại là :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \gamma \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma (\mu_0 n \omega I_m z)^2.$$

Do đó, đối với một chiều dài  $l$  của kim loại :

$$\mathcal{P} = \iiint \mathcal{P}_{\text{vol}} \, d\tau = \frac{\gamma}{24} (\mu_0 n \omega I_m)^2 a l h^3.$$

3) Giả thiết được xác minh, nếu chiều dày tấm kim loại nhỏ so với chiều sâu thâm nhập của trường, nghĩa là :

$$a \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Như vậy, điều này tương ứng với các tần số thấp.

Do đó :  $M = \pm \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi a_1^2 a_2^2}{4d^3}$  (trên hình vẽ, các định hướng

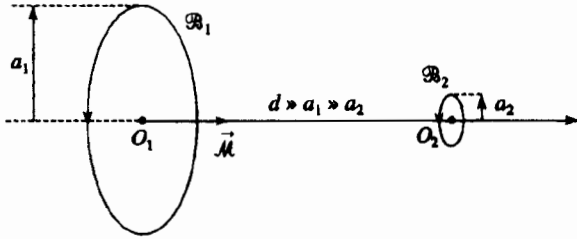
được chọn tương ứng với  $M < 0$ ).

3) Trường được tạo ra bởi một lưỡng cực mômen  $\mathcal{M}_1 = N_1 \pi a_1^2 i_1$  ở một điểm tọa độ cực  $(d, 0)$  có dạng :

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 a_1^2 i_1}{2d^3}$$

do đó :  $M = \pm \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi a_1^2 a_2^2}{2d^3}$  (các định hướng của hình vẽ

dẫn tới  $M > 0$ ).



5)  $L_1 = \mu_0 n_1^2 l_1 S_1$ ;  $L_2 = \mu_0 n_2^2 l_2 S_2$  và  $M = \mu_0 n_1 n_2 l_2 S_2$ .

Phải nhớ rằng phép tính  $M$  được thực hiện xuất phát từ thông lượng của trường  $B_1$  được tạo ra bởi  $S_1$  đi qua  $S_2$ .

2) Dòng điện  $i_2$  là nghiệm của :

$$R_2 i_2 = e_{\text{cảm ứng tổng cộng}} = - \frac{dB_2}{dt} n_2 l_2 S_2,$$

(ta nhớ rằng  $B_2$  là trường tổng cộng trong  $S_2$ ).

Định lí AMPÈRE dẫn đến  $B_2 - B_1 = \mu_0 n_2 i_2$ , từ đó :

$$B_2 - B_1 + \frac{\mu_0 n_2^2 l_2 S_2}{R_2} \frac{dB_2}{dt} = 0.$$

nghĩa là, theo kí hiệu phức :

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{1 + j \frac{L_2 \omega}{R_2}} \text{ và } \frac{B_{2m}}{B_{1m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L_2 \omega}{R_2}\right)^2}}$$

3)  $u_2 = M \frac{di_1}{dt}$  và  $u_1(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$ .

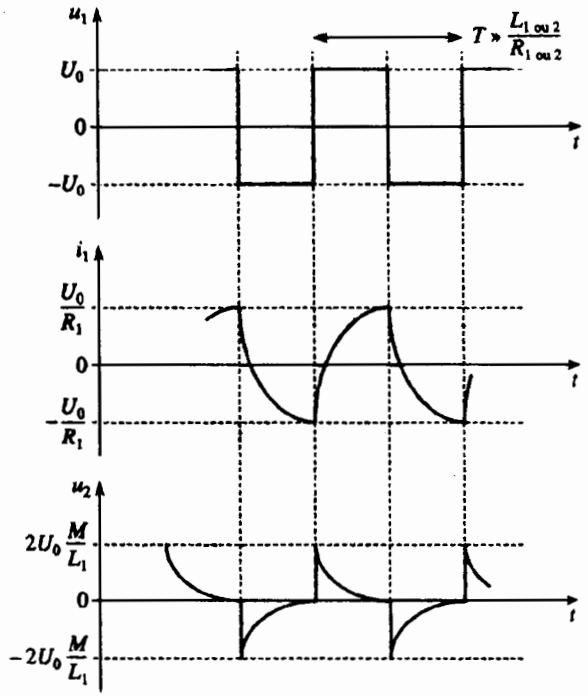
$i_1(t)$  là một dãy liên tiếp các hàm mũ :

$$i_1 = \pm \frac{U_0}{R_1} \left[ 1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \text{ với } \tau = \frac{L_1}{R_1},$$

(lấy  $t = 0$  ở mỗi lần đảo của  $u_1$  và đừng quên rằng  $i_1$  là liên tục ở mỗi lần đảo)

Từ đó, ta rút ra :  $u_2 = \pm 2U_0 \frac{M}{L_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

nghĩa là :  $u_2 = \pm 2U_0 \frac{n_2}{n_1} e^{-\frac{R_1 t}{L_1}}$ .



4)  $u_1 = u_2 = R i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ .

Trong trường hợp nghiên cứu  $L_2 = M$ , suy ra, theo kí hiệu phức :

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{R + j\omega(L_1 - M)}{R} = 1 + j \frac{\mu_0 n^2 l(S_1 - S_2)\omega}{R},$$

từ đó :  $\frac{i_{2m}}{i_{1m}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 n^2 l(S_1 - S_2)\omega}{R}\right)^2}$

6) Ta viết định luật OMM suy rộng cho hai cuộn dây, theo ký hiệu phức

$u_1 = R_1 i_1 + jL_1 \omega i_1 + jM \omega i_2$  và  $0 = R_2 i_2 + jL_2 \omega i_2 + jM \omega i_1$ .

Từ đó suy ra  $u_1$  có dạng :  $u_1 = Z i_1$  với  $Z = R(\omega) + jX(\omega)\omega$ .

$$R(\omega) = R_1 + \frac{R_2}{\frac{L_2^2}{M^2} + \frac{R_2^2}{M^2 \omega^2}} \text{ và } X(\omega) = L_1 - \frac{L_2}{\frac{L_2^2}{M^2} + \frac{R_2^2}{M^2 \omega^2}}$$

Chú ý :

$Z \approx R_1 + jL_1 \omega$  nếu  $\omega$  tiến tới  $\infty$  hay nếu  $M$  tiến tới  $0$ .

Vì  $M^2 \leq L_1 L_2$ , nên  $X(\omega)$  luôn luôn dương

7) 1) Ta định hướng cuộn dây theo chiều MNPQ và chú ý đến các dấu

•  $0 < X < b$

Thông lượng là  $\Phi = BaX$ , do đó :  $e = -B a v$  và  $i = -\frac{B a v}{R}$ .

Phương trình cơ học là  $m \frac{dv}{dt} = +B a i$ , từ đó :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 a^2}{mR} v \text{ hay } \frac{dv}{dX} = -\frac{B^2 a^2}{mR}$$

•  $d < X < d + b$

Theo cách tương tự ta có :  $\Phi = B a (b + d - X)$ , do đó :

$$i = \frac{Bav}{R} \text{ và } m \frac{dv}{dt} = -Bai.$$

Phương trình cuối cùng giống hệ phương trình đã nhận được trước đây.

Ở ngoài các khoảng này,  $\Phi$  không đổi và  $v$  cũng vậy.

2)  $v(X)$  là afin trên hai khoảng chiều dài  $b$ . Vậy, ta suy ra :

$$\Delta v = 2 \frac{B^2 a^2}{mR} b \text{ nếu } v_0 > v_c = 2 \frac{B^2 a^2}{mR} b.$$

Nếu :  $v_0 < v_c = 2 \frac{B^2 a^2}{mR} b$ , thì vật dẫn đứng yên trong trường.

Chú ý :

Nếu  $v_0 > v_c$ , ta có thể xác định biểu thức của vận tốc biến đổi theo thời gian khi khung có một phần thời gian ở trong trường  $\vec{B}$ , đối với  $0 < X < b$  :

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ với } \tau = \frac{mR}{B^2 a^2}.$$

Từ đó, suy ra :  $X(t) = v_0 \tau \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$  và ta lại tìm thấy độ giảm

vận tốc,  $\Delta v = v_0 - v(t_f)$ , với  $t_f$  được xác định bởi  $X(t_f) = 2b$ .

3) Ta đồng nhất vật dẫn với một "sợi dây lớn", chiều dài  $l = 4 \frac{a}{2} = 2a$ , chiều rộng  $\frac{a}{2}$  và chiều dày  $h$ .

Với mô hình này, ta có ;

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S} = \frac{4}{\gamma h}.$$

và vận tốc tới hạn có giá trị :  $v_c = 2 \frac{B^2 a^2}{mR} a = \frac{\gamma B^2 a}{2\rho} \approx 8,3 \text{ m.s}^{-1}$

Nếu vận tốc  $v_0$  nhỏ hơn vận tốc tới hạn  $v_c$ , thì khối kim loại đứng yên trong trường (phù hợp với thí nghiệm).

**8** 1)  $L_0 = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$

2) a) Theo các tính đối xứng, ta biết là  $\vec{j} = j \vec{e}_\theta$  và  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  (đối với  $\vec{B}_0$  hay  $\vec{B}_1$ ).

Khi áp dụng định lí AMPÈRE trên một đường cong kín đã chọn đúng đắn, ta thấy rằng ở bên trong ống dây, ta có :  $B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} i = \frac{L_0}{NS} i.$

Ống kim loại, cũng như ống dây, có một dòng điện  $jb$  trên đơn vị dài của ống, chạy qua. Thành thử, ta thấy rằng :  $B_1 = \mu_0 jb$  ở trong ống kim loại và  $B_1 = 0$  ở bên ngoài ống đó.

b) Khi tính toán lưu thông của vector mật độ dòng  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  trên vòng tròn bán kính  $a$  (thành ống) và dùng phương trình MAXWELL -FARADAY, ta được :  $\oint_{\text{vòng tròn}} \vec{j} \cdot d\vec{r} = 2\pi a j = -\gamma \frac{d(B_0 + B_1)}{dt} \pi a^2,$

hay, vì :  $j = \frac{B_1}{\mu_0 b} ; 2 \frac{B_1}{\mu_0 b} = -\gamma \frac{d(B_0 + B_1)}{dt} a$

Trong kí hiệu phức (với  $j^2 = -1$ ), từ đó, suy ra :

$$\underline{B}_1 = \underline{B}_0 = \frac{1}{-1 + \frac{2j}{\mu_0 \gamma \omega ab}}.$$

Do đó, định luật OHM suy rộng được viết cho ống dây.

$$\underline{u} = R_0 \underline{i} + j \omega N(S \underline{B}_0 + \pi a^2 \underline{B}_1) = \underline{i} \left[ R_0 + j L_0 \omega \left( 1 + \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{-1 + \frac{2j}{\mu_0 \gamma \omega ab}} \right) \right],$$

nghĩa là :  $\underline{u} = Z \underline{i} = [ R(\omega) + j L(\omega) \omega ] \underline{i},$

với :  $R(\omega) = R_0 + \frac{\pi a^2}{S} \frac{2L_0}{1 + \left( \frac{2}{\mu_0 \gamma \omega ab} \right)^2}$

và  $L(\omega) = L_0 \omega \left( 1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{1 + \left( \frac{2}{\mu_0 \gamma \omega ab} \right)^2} \right).$

c) Phép gần đúng này cho phép một độ lớn thích hợp, chừng nào mà  $b$  rất nhỏ so với độ sâu thâm nhập  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ . Vậy nó có thể chấp nhận được ở 1 kHz, vì ta tìm thấy  $\delta = 2 \text{ mm}$ . Trong trường hợp nghiên cứu,  $\pi a^2 = S$  và ta được  $R = 235 \Omega$ .

**9** 1) Phải tính lần lượt dòng điện trong cuộn dây, rồi tổng hợp lực của các lực LAPLACE.

• Trường  $\vec{B}_1$  tạo ra bởi ống dây ở lân cận trực của nó là :

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{e}_z = B_0 (1 - \cos \theta), \text{ với } B_0 = \frac{\mu_0 n i_1}{2} \text{ và } \tan \theta = \frac{a}{z}.$$

Thông lượng của trường này đi qua cuộn dây (được định hướng theo cùng chiều như ống dây) có giá trị :

$$\Phi_{\text{ngoài}} = N B_0 (1 - \cos \theta) \pi b^2 = M i_1,$$

bằng cách đặt  $M = \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} (1 - \cos \theta).$

Vậy trong cuộn dây có một dòng điện  $i$  chạy qua, nghiệm đúng ;

$$Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Ở chế độ hình sin, ta suy ra :

$$i = I \cos \omega t + J \sin \omega t,$$

$$\text{với } I = -\frac{M L \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} i_{1m} \text{ và } J = \frac{M R \omega}{R^2 + L^2 \omega^2} i_{1m}.$$

• Cuộn dây này có thể được coi như một lưỡng cực từ, trong một trường gần đều. Trên lưỡng cực này, có một lực tổng hợp tác dụng :

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{\text{ext}} = F \vec{e}_z, \text{ với } F = N i \pi b^2 \frac{\partial B_1}{\partial z} = i_1 i \frac{dM}{dz}.$$

Giá trị trung bình của lực này là :

$$\langle F \rangle = \langle i_1 i \rangle \frac{dM}{dz} = \frac{1}{2} I i_{1m} \frac{dM}{dz},$$

$$\text{vì } \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0 \text{ và } \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}.$$

Ta xác định  $\frac{dM}{dz}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dz} &= -\frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \frac{d(\cos \theta)}{dz} = \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dz} \\ &= -\frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2a} \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

$$\text{vì khi lấy đạo hàm } \tan \theta = \frac{a}{z}, \text{ ta được } \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dz} = -\frac{a}{z^2}.$$

Cuối cùng ta được một lực đẩy trung bình :

$$\langle F \rangle = \left( \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \right)^2 \frac{(1 - \cos \theta) \sin^3 \theta}{a} \frac{L \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} i_{1m}^2.$$

"Ngay phía trên" ống dây,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , và sự bay lên xảy ra đối với :

$$m g \approx \left( \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \right)^2 \frac{1}{a} \frac{L \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} i_{01m}^2.$$

Cân bằng là bền đối với sự tịnh tiến thẳng đứng, vì lực đẩy là một hàm giảm dần theo độ cao.

Trái lại, các chuyển động khác có thể xảy ra lại không ổn định trong cấu hình này.

2) Công suất tiêu tán bởi hiệu ứng JOULE trong cuộn dây có giá trị

(đối với  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) :

$$\mathcal{P}_0 = R \langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} R (I^2 + J^2) = \frac{1}{2} R i_{01m}^2 \frac{M_0^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\text{với } M_0 = \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2}.$$

3) Với các trị số đưa ra, ta nhận thấy là  $R \ll L \omega$  và ta có thể giản lược các hệ thức trên :

$$m g \approx \left( \frac{\mu_0 N n \pi b^2}{2} \right)^2 \frac{1}{a L} i_{01m}^2, \text{ từ đó } i_{01m} = 12,7 A$$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{2} R \left( \frac{M_0}{L} \right)^2 i_{01m}^2, \text{ hay } \mathcal{P}_0 \approx 1,3 W$$

**10** 1)  $\vec{B}$  có dạng một sóng lan truyền không biến dạng với vận tốc  $v_0$  :

$$B(x, t) = B(x - v_0 \Delta t, t - \Delta t)$$

2)  $X(t)$  chỉ hoành độ của điểm  $M$  người ta định hướng vòng dây theo chiều  $MNPQ$ , rồi xác định thông lượng của trường  $\vec{B}$  đi qua vòng dây :

$$\phi(t) = \int_{x(t)-a}^{X(t)} b B(x, t) dx = -v_0 b \int_{t - \frac{X-a}{v_0}}^{t - \frac{X}{v_0}} f(u) du.$$

vì :  $dx = -v_0 du$ .

Kí hiệu  $F(u)$  là một nguyên hàm của  $f(u)$ , ta có thể biểu thị thông lượng này bởi :

$$\phi(t) = -v_0 b \left[ F\left(t - \frac{X(t)}{v_0}\right) - F\left(t - \frac{X(t)-a}{v_0}\right) \right].$$

Từ đó, ta suy ra dòng điện cảm ứng  $i$  trong vòng dây (trong khi không quên rằng  $v = \frac{dX}{dt}$ ) :

$$e = R i = -\frac{d\phi}{dt} = v_0 b \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right) \left[ f\left(t - \frac{X(t)}{v_0}\right) - f\left(t - \frac{X(t)-a}{v_0}\right) \right]$$

Tổng hợp của các lực LAPLACE lúc đó có giá trị :

$$\vec{F} = b i(t) [B(X, t) - B(X - a, t)] \vec{e}_x.$$

$$\text{nghĩa là } \vec{F} = \frac{b^2}{R} (v_0 - v) \left[ f\left(t - \frac{X(t)}{v_0}\right) - f\left(t - \frac{X(t)-a}{v_0}\right) \right] \vec{e}_x$$

Nếu  $v_0 > v$ , thì định luật LENZ buộc lực phải hướng theo  $\vec{e}_x$  : khung dây sẽ bị trường "dẫn đi".

Thật vậy, muốn chống lại nguyên nhân gây ra cảm ứng, nghĩa là chống lại sự biến đổi của thông lượng, thì mạch điện phải đi theo  $\vec{B}$  trong sự lan truyền của nó. Ở giới hạn  $v = v_0$ , sẽ không còn có sự biến thiên của thông lượng nữa.

Phải ghi nhớ rằng, nếu hàm  $f$  là tuần hoàn, có chu kỳ không gian (bước sóng)  $a$ , thì lực triệt tiêu. Thực tế, thông lượng đi qua mạch điện lúc đó là không đổi dù mạch có vận tốc thế nào và không có hiện tượng cảm ứng.

**11** 1) Khi tính lưu thông của điện trường cảm ứng (trục xuyên tâm, có tâm ở  $0_1$ )  $\vec{E}_1 = E_1(r_1) \vec{e}_{\theta_1}$ , bởi từ trường  $\vec{B}_1$  trên vòng tròn tâm  $0_1$  và bán kính  $r_1$  ( $r_1 > a$ ), thì ta được :

$$2\pi r_1 E_1 = -\pi a^2 \frac{dB_1}{dt},$$

từ đó rút ra :

$$\vec{j}_1 = \gamma \vec{E}_1 = -\frac{\gamma a^2}{2r_1} \frac{dB_1}{dt} \vec{e}_{\theta_1} \text{ với } r_1 > a, \text{ ở ngoài miền } l.$$

Cũng thế, ta có :

$$j_2 = -\frac{\gamma a^2}{2r_2} \frac{dB_2}{dt} \vec{e}_{\theta_2} \text{ với } r_2 > a, \text{ ở ngoài miền } l.$$

2) Trên một phần tử đĩa, diện tích  $dS$ , tác dụng của  $\vec{B}_2$  lên  $\vec{j}_1$  là :

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{j}_1 e dS \wedge \vec{B}_2 = -\frac{\gamma a^2}{2r_1} B_2 \frac{dB_1}{dt} e dS \vec{e}_{r_1},$$

và mômen tương ứng đối với trục  $(Oz)$  có giá trị :

$$d\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\gamma a^2 e}{2r_1} B_2 \frac{dB_1}{dt} (\overline{OM} \wedge \vec{e}_{r_1}) \cdot \vec{e}_z dS.$$

Biết rằng :  $(\overline{OM} \wedge \vec{e}_{r_1}) \cdot \vec{e}_z = (\overline{OO_1} \wedge \vec{e}_{r_1}) \cdot \vec{e}_z$ , ta được :

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\gamma a^2 e}{2} B_2 \frac{dB_1}{dt} (\overline{OO_1} \wedge \vec{I}) \cdot \vec{e}_z.$$

Theo phép đối xứng, ta có thể khẳng định rằng  $\vec{I}$  song song và cùng chiều với vectơ  $\overline{O_1O_2}$ .

Vả lại, ta có :  $\iint_{\text{miền 1}} \vec{e}_{r_2} dS = -\vec{I}$  và  $\overline{OO_1} \wedge \vec{I} = \overline{OO_2} \wedge \vec{I} = I b \cos \alpha \vec{e}_z$ .

Từ đó suy ra :

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\gamma a^2 e}{2} B_1 \frac{dB_2}{dt} (\overline{OO_2} \wedge \vec{I}) \cdot \vec{e}_z$$

và  $\mathcal{M} = \frac{\gamma a^2 e}{2} \left( B_1 \frac{dB_2}{dt} - B_2 \frac{dB_1}{dt} \right) I b \cos \alpha$ .

3) Trên toàn miền 2,  $r_1 \approx O_1O_2 = 2b \sin \alpha$  và do :

$$I \approx \frac{\pi a^2}{2b \sin \alpha}.$$

Từ đó, ta suy ra một giá trị gần đúng của  $\mathcal{M}$ .

$$\mathcal{M} = \frac{\gamma \pi a^4 e}{2 \tan \alpha} \left( B_1 \frac{dB_2}{dt} - B_2 \frac{dB_1}{dt} \right).$$

4)  $B_1 \frac{dB_2}{dt} - B_2 \frac{dB_1}{dt} = B_{1m} B_{2m} \omega [-\sin(\omega t) \cos(\omega t + \psi) + \cos(\omega t) \sin(\omega t + \psi)]$   
 $= B_{1m} B_{2m} \omega \sin \psi$ ,

và như vậy :  $\mathcal{M} = C B_{1m} B_{2m} \sin \psi$ , với  $C = \frac{\gamma \pi a^4 e \omega}{2 \tan \alpha}$

5) Theo giả thiết, ta có :

$$B_1 = K_1 i_m \cos(\omega t + \phi) \text{ và } B_2 = K_2 i_u = \frac{K_2 u_m}{L_2 \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

vì theo kí hiệu phức  $u = j L_2 \omega \underline{i}_u$ .

Độ lệch pha của  $\vec{B}_1$  đối với  $\vec{B}_2$  là :

$$\psi = \phi + \frac{\pi}{2} \text{ và } \sin \psi = \cos \phi.$$

Vậy, vận tốc quay của đĩa có thể viết :

$$\Omega = \frac{\mathcal{M}}{f} = \frac{\gamma \pi a^4 e \omega}{2 \tan \alpha} \frac{K_1 K_2}{L_2 \omega} u_m i_m \cos \phi.$$

Hệ thức có dạng  $\Omega = C \mathcal{P}$ , vì công suất trung bình tiêu thụ bởi toàn bộ  $EA_1$  mắc nối tiếp với  $D$  là :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} u_m i_m \cos \phi.$$

Vì  $EA_1$  không tiêu thụ công suất, nên  $\mathcal{P}$  cũng là công suất trung bình tiêu thụ bởi  $D$ .

Do đó, góc quay của đĩa tỷ lệ với tích phân của  $\mathcal{P}$ , nghĩa là với năng lượng tiêu thụ bởi  $D$ .

12) 1) Tại một điểm của đĩa cách tâm  $O$  một khoảng  $r$ , trường phát động điện LORENTZ là

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = B \omega r \vec{e}_r,$$

do đó :  $u_{AC} = -e_{AC} = -\int_{r=0}^a B \omega r dr = -\frac{1}{2} B \omega a^2$ .

2) a) Phương trình điện là :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{1}{2} B \omega a^2 = \frac{\mu_0 n a^2 \omega}{2} i.$$

Từ trường tạo ra bởi ống dây là :

$$B = \mu_0 n i.$$

b) Phương trình vi phân được nghiệm đúng bởi  $i$  như vậy, sẽ có dạng :

$$\tau_R \frac{di}{dt} + i = 0, \text{ với } \tau_R = \frac{L}{R \left(1 - \frac{\mu_0 n a^2 \omega}{2R}\right)} = \frac{L}{R \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

bằng cách đặt  $\omega_0 = \frac{2R}{\mu_0 n a^2}$ .

• Nếu  $\tau_R > 0$  hay  $\omega < \omega_0$  : mọi thẳng giáng của dòng điện đều bị tắt dần và nghiệm ổn định sẽ nhất thiết là  $i = 0$ .

• Nếu  $\tau_R < 0$ , hay  $\omega > \omega_0$  : nghiệm  $i = 0$  lúc đó sẽ không ổn định. Mọi nhiễu loạn của dòng điện (ví dụ, nhiễu nhiệt) được khuếch đại và tiến đến vô hạn.

Điều đó tạo ra các lực LAPLACE chống lại sự quay và không cho phép duy trì  $\omega > \omega_0$ .

Đối với  $\omega = \omega_0$ ,  $\tau$  là "vô hạn" : mọi nghiệm  $i$  không đổi đều thích hợp lúc đó. Thực ra, người ta khởi động hệ với  $\omega > \omega_0$ , dòng điện tăng và các lực LAPLACE làm giảm vận tốc quay để ổn định nó ở  $\omega_0$ .

c) Giả sử  $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$  là mật độ dòng trong đĩa. Do bảo toàn thông lượng của  $\vec{j}$  đi qua mọi hình trụ bán kính  $r$ , nên ta có :

$$j(r) = \frac{i}{2\pi e r}$$

Lực LAPLACE tác dụng lên một phần tử của đĩa có thể tích nguyên tố  $d\tau = e r dr d\theta$  là:

$$d\vec{F} = -j(r) B e r dr d\theta \vec{e}_\theta.$$

Mômen đối với trục quay là:

$$d\mathcal{M}_{\text{Laplace}} = -j(r) B e r^2 dr d\theta.$$

Sau khi lấy tích phân, ta được:

$$\mathcal{M}_{\text{Laplace}} = -\frac{1}{2} i B a^2 = -\frac{1}{2} \mu_0 n a^2 i^2.$$

Muốn làm đĩa quay ở vận tốc không đổi, thì phải thực hiện một ngẫu lực:

$$\Gamma = -\mathcal{M}_{\text{Laplace}} = \frac{1}{2} \mu_0 n a^2 i^2.$$

Ta cũng thu được cùng một hệ thức như nhau nhờ sự cân bằng năng lượng, năng lượng của trường là không đổi:

$$\mathcal{P}_{\text{người vận hành}} = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \mathcal{P}_{\text{tiêu tán}}$$

nghĩa là  $\Gamma \omega_0 = R i^2$  với  $\omega_0 = \frac{2R}{\mu_0 n a^2}$ .

3) Như thế, một dòng điện và một từ trường có thể xuất hiện trong một tập hợp vật dẫn đang chuyển động tương đối khi không có các nguồn điện.

Thành thử các chuyển động đối lưu ở trong lòng trái đất có thể tạo ra từ trường trái đất.



# CÁC PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL TRONG MÔI TRƯỜNG VẬT CHẤT

# 6

## Mở đầu

Cho đến nay, ta đã nghiên cứu các định luật của điện từ học trong "chân không" khi có mặt các điện tích và dòng điện do các môi trường dẫn điện gây ra. Như vậy, ta đã xác định các biểu thức của điện trường và từ trường được tạo ra, trong chân không, bởi các phân bố điện tích và dòng điện ở trên các vật dẫn kim loại chẳng hạn. Ta cũng đã đề cập tới sự nghiên cứu trường điện từ trong một kim loại (hiệu ứng ngoài mặt).

Trong vật chất, một trường điện từ dĩ nhiên sẽ tác dụng lên các nguyên tử, phân tử hay các ion cấu thành vật chất bằng cách làm biến dạng chúng.

Thành thử, môi trường vật chất sẽ :

- bị phân cực dưới tác dụng của điện trường ;
- bị từ hóa dưới tác dụng của từ trường.

Khi dùng một số mô hình cực kì đơn giản, ta có ý định giải thích làm thế nào mà các hiện tượng vi mô lại được thể hiện ở thang vĩ mô trong biểu thức của các phương trình MAXWELL.

## M U C T I Ê U

- Hiện tượng phân cực và từ hóa trong vật chất.
- Các phương trình MAXWELL trong các môi trường vật chất.
- Các môi trường tuyến tính, đồng chất và đẳng hướng.

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Lượng cực điện và từ.
- Các phương trình MAXWELL trong chân không.

# 1 Mô hình lưỡng cực

## 1.1. Lưỡng cực điện

Ta hãy xét một phân bố các điện tích điểm  $q_i$  tại các điểm  $P_i$  ở trong một miền  $(\mathcal{D})$  của không gian trống rỗng.

Ta giả thiết điện tích tổng cộng của phân bố này bằng không.

$$\sum_i q_i = 0.$$

### 1.1.1. Thế vô hướng của một lưỡng cực

Các điện tích này tạo ra tại một điểm  $M$  một thế tĩnh điện :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}.$$

Ta xét biểu thức này trong trường hợp  $M$  ở "rất xa" miền  $(\mathcal{D})$ . Ta chọn một điểm gốc  $O$  trong  $(\mathcal{D})$  và đặt  $\overline{OM} = r \vec{e}_r$  (H.1).

Biết rằng :

$$P_i M^2 = \overline{P_i M}^2 = (\overline{OM} - \overline{OP}_i)^2 = r^2 + OP_i^2 - 2\overline{OM} \cdot \overline{OP}_i,$$

Từ đó suy ra, đối với  $r \gg OP_i$  :

$$\frac{1}{P_i M} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\overline{OM} \cdot \overline{OP}_i}{r^2} \right) \approx \frac{1}{r} + \frac{\overline{OP}_i \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

bỏ qua các số hạng bậc cao hơn 2 của " $\frac{\overline{OP}_i}{r}$ ".

Như vậy  $V(M)$  có dạng :

$$V(M) = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\left( \sum_i q_i \overline{OP}_i \right) \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Số hạng thứ nhất của  $V(M)$  dĩ nhiên bằng không, vì ta cần điện tích tổng cộng phải triệt tiêu :  $\sum_i q_i = 0$ .

Khi đưa vào mômen lưỡng cực  $\vec{p} = \sum_i q_i \overline{OP}_i$  của phân bố các điện tích,

ta nhận thấy rằng thế  $V(M)$  sẽ có dạng :

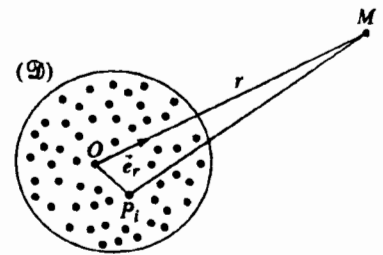
$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Sự phân bố các điện tích cấu thành một lưỡng cực tĩnh điện (xem H-Prépa. Điện từ học, năm thứ nhất). Người ta thường gọi nó là phân bố lưỡng cực của các điện tích.

Chú ý :

Người đọc có thể kiểm tra dễ dàng là vectơ mômen lưỡng cực  $\vec{p}$  độc lập với việc chọn gốc  $O$ , vì ta đã giả thiết :

$$\sum_i q_i = 0.$$



H.1. Phân bố lưỡng cực của các điện tích.

Nếu ta đưa vào, đối với một phân bố các điện tích, các trọng tâm  $P_+$  của các điện tích dương mà tổng bằng  $+q$  và  $P_-$  của các điện tích âm mà tổng bằng  $-q$ , thì mômen lưỡng cực có thể viết dưới dạng :

$$\vec{p} = q\vec{P}_- \vec{P}_+$$

Trong trường hợp một phân bố liên tục, theo thể tích với mật độ điện khối  $\rho(P)$  hay theo diện tích với mật độ điện mặt  $\sigma(P)$ , thì mômen lưỡng cực có dạng, tùy từng trường hợp :

$$\vec{p} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{OP} \rho(P) d\tau \quad \text{hay} \quad \vec{p} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{OP} \sigma(P) dS.$$

### 1.1.2. Điện trường của một lưỡng cực

Biết rằng (xem phụ lục) :

$$\overline{\text{grad}} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \right) = \overline{\text{grad}} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \overline{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{OM}) + (\vec{p} \cdot \vec{OM}) \overline{\text{grad}} \frac{1}{r^3}$$

với  $\overline{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{OM}) = \vec{p}$  và  $\overline{\text{grad}} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \vec{e}_r$ . Từ đó ta suy ra biểu thức

thực chất của trường  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}),$$

hay trong tọa độ cầu (H.2) :

$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

Hình 3 biểu diễn các đường sức của điện trường  $\vec{E}$ .

## 1.2. Lưỡng cực từ

### 1.2.1. Mômen từ của một dòng điện tròn

Xét một vòng tròn có dòng điện  $I$  chạy qua.

$\Sigma$  là một mặt nào đó (H.4) dựa lên vòng tròn và được định hướng bởi dòng điện  $I$ . Mômen từ của dòng điện tròn được xác định bởi :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S} = I \iint_{\Sigma} d\vec{S}.$$

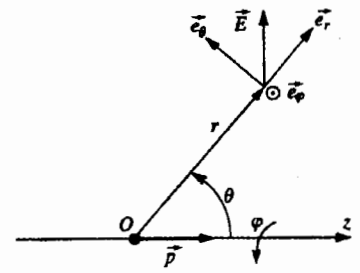
Nếu chọn một gốc  $O$  ở gần vòng tròn và lấy mặt  $\Sigma$  là mặt bên của hình nón đỉnh  $O$  dựa lên vòng tròn, thì ta có thể viết (H.5) :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{\text{vòng tròn}} \vec{OP} \wedge d\vec{l} \quad \text{và} \quad \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint_{\text{vòng tròn}} \vec{OP} \wedge I d\vec{l}.$$

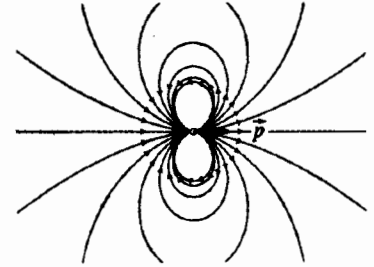
Hệ thức này có lợi là có thể được suy rộng cho trường hợp một phân bố dòng điện theo thể tích với mật độ dòng thể tích  $\vec{j}(P)$  định xứ trong một thể tích  $\mathcal{V}$  (H.6a) hay cho một phân bố dòng điện mặt (với mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_s(P)$ ), định xứ trên một mặt  $\Sigma$  (H.6b) :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) d\tau$$

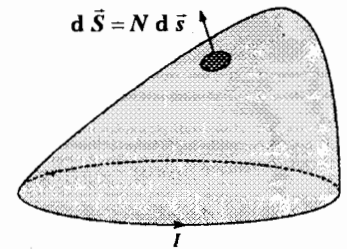
$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \vec{OP} \wedge \vec{j}_s(P) dS.$$



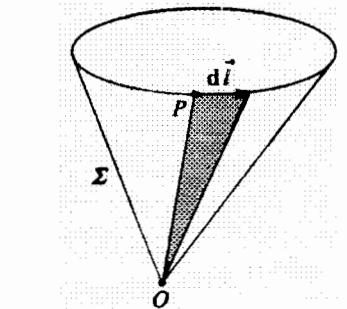
H.2. Điện trường của một lưỡng cực điện.



H.3. Các đường sức của một lưỡng cực điện.

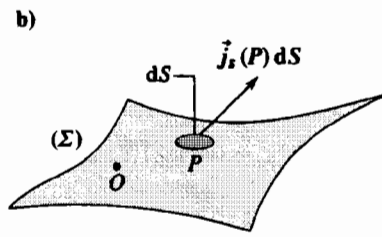
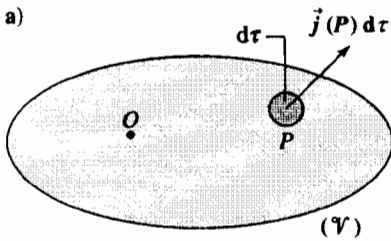


H.4. Một vòng tròn có dòng điện  $I$  chạy qua.



H.5. Diện tích nguyên tố của tam giác màu sẫm là :

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge d\vec{l}.$$



◀ H.6.

- a. Phân bố dòng điện theo thể tích.
- b. Phân bố dòng điện theo diện tích.

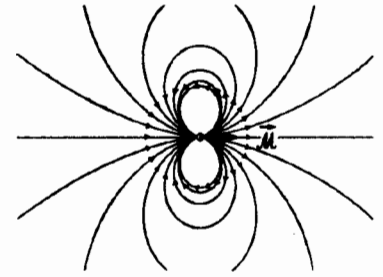
**1.2.2. Từ trường được tạo ra bởi một lưỡng cực từ**

Ta sẽ thừa nhận (xem H-Prépa, điện từ học, năm thứ nhất) rằng tại một điểm M ở khoảng r lớn, cách xa dòng điện tròn (hay cách xa một phân bố dòng điện trong trường hợp tổng quát), thì từ trường  $\vec{B}(M)$  được tạo ra bởi dòng điện tròn sẽ có một biểu thức tương tự biểu thức của điện trường  $\vec{E}$  được tạo ra bởi lưỡng cực điện, nghĩa là biểu thức vốn có :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{M}),$$

và, trong tọa độ cầu  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$

Trong các điều kiện này, dòng điện tròn cấu thành một lưỡng cực từ. Hình 7, biểu diễn các đường sức của trường  $\vec{B}$  đối với một lưỡng cực từ, giống hệt như hình 3.



H.7. Các đường sức của một lưỡng cực từ.

# Áp dụng 1

**Từ trường lưỡng cực**

1) Các đường sức của một lưỡng cực tĩnh điện và một lưỡng cực từ giống hệt nhau.

Điều đó có thể được thấy rõ khi xét sơ đồ các đường sức điện trường của tập hợp hai điện tích  $\{-q; +q\}$  và sơ đồ các đường sức từ trường của một vòng dây khi ở "xa" các nguồn (xem H - Prépa, Điện từ học, năm thứ nhất). Hay nhắc lại biểu thức của trường lưỡng cực tĩnh điện; xuất phát từ nhận xét trên, từ đó suy ra, sai kém một hằng số nhân, một biểu thức của trường lưỡng cực từ.

2) Nhắc lại biểu thức của từ trường, tạo ra bởi một vòng dây có dòng điện I chạy qua, tại một điểm trên trục của nó. Từ đó suy ra biểu thức đầy đủ của từ trường lưỡng cực.

1) Các đường sức đều giống nhau và :

$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta),$$

từ trường lưỡng cực có dạng :

$$\vec{B} = \frac{k}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

2) Từ trường, được tạo ra bởi một vòng dây bán kính a, có dòng điện I chạy qua, tại một điểm trên trục (Oz) của nó được xác định bởi công thức :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \quad \text{với} \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Ở xa vòng dây ( $z \gg a$ ), trường  $\vec{B}$  là

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{z^3} \vec{e}_z = 2 \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi} \frac{1}{z^3} \vec{e}_z,$$

tương ứng với trường lưỡng cực từ theo hướng

$$\theta = 0 \quad \text{với} \quad z = r, \quad \text{nghĩa là} \quad \vec{B} = 2 \frac{k}{r^3} \vec{e}_z.$$

Điều này cho phép ta viết :

$$k = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi},$$

và như vậy  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$

### 1.3. Tác dụng của một trường không đổi lên một lưỡng cực

Tác dụng của một điện trường  $\vec{E}$  lên một lưỡng cực điện có mômen  $\vec{p}$  hay tác dụng của một từ trường  $\vec{B}$  lên một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{M}$ , được thể hiện bởi cùng các công thức như nhau, được ghép thành nhóm trên hình 8.

Đối với các lưỡng cực cứng ( $\vec{p}$  và  $\vec{M}$  độc lập với các trường áp đặt vào), các tác dụng này phát sinh từ một thế năng tương tác  $\mathcal{E}_p$  (giữa trường và lưỡng cực) mà ta cũng đã cho biểu thức.

	Lưỡng cực điện	Lưỡng cực từ
Trường đều	Mômen : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ Lực : $\vec{F} = \vec{0}$	Mômen : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ Lực : $\vec{F} = \vec{0}$
Trường không đều	Mômen : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ Lực : $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}$	Mômen : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ Lực : $\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}$
Thế năng tương tác $\mathcal{E}_p$ trong trường hợp của một lưỡng cực cứng	$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$\mathcal{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

◀ H.8. Tác dụng của một trường không đổi lên một lưỡng cực điện hay từ.

Thành thử, một lưỡng cực (điện hay từ) cứng, đặt trong một trường không đổi ( $\vec{E}$  hay  $\vec{B}$ ) không đều, sẽ chịu chủ yếu một mômen có khuynh hướng làm nó thẳng hàng song song với trường áp đặt theo cùng chiều của trường, điều này tương ứng với cực tiểu của thế năng  $\mathcal{E}_p$ . Một khi đã thẳng hàng, lưỡng cực còn chịu tác dụng của một lực có khuynh hướng làm nó dịch chuyển về miền có trường mạnh (H.9).

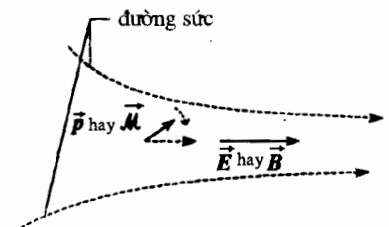
Ta sẽ thấy rằng (sau chương này) một lưỡng cực không cứng (ví dụ một nguyên tử hay một phân tử), dưới tác dụng của một trường, sẽ có một mômen lưỡng cực cộng tuyến với trường. Trong một trường không đều, sẽ chỉ tồn tại tác dụng của một lực có khuynh hướng làm dịch chuyển lưỡng cực :

- Về những miền trường mạnh, nếu mômen lưỡng cực và trường có cùng chiều (đây luôn luôn là trường hợp của lưỡng cực điện) ;
- Về những miền trường yếu, nếu mômen lưỡng cực và trường có chiều ngược nhau (điều có thể xảy ra trong trường hợp của một lưỡng cực từ).

Chú ý :

Trong một trường (điện chẳng hạn) không đều, các thành phần của lực  $\vec{F}$  có thể có dạng :

$$\vec{F} = \begin{cases} F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \\ F_y = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \\ F_z = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \end{cases}$$



H.9. Lưỡng cực cứng định hướng theo phương và chiều của trường, rồi bị kéo về miền trường mạnh (tại đây, các đường sức sát lại nhau).

vì ở ngoài các điện tích tạo ra trường không đối  $\vec{E}$ , thì ta có :  $\overline{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ .

Trong trường hợp một lưỡng cực cứng ( $\vec{p} = \vec{p}_0$  không đổi), ta có thể viết :

$$\vec{F} = \overline{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = -\overline{\text{grad}} \mathcal{E}_p.$$

Các hệ thức này vẫn còn hiệu lực trong trường hợp một trường  $\vec{B}$ , vì trường này cũng nghiệm đúng  $\overline{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ .

## 2 Phân cực của một môi trường vật chất

### 2.1. Hiện tượng phân cực trong các môi trường cách điện

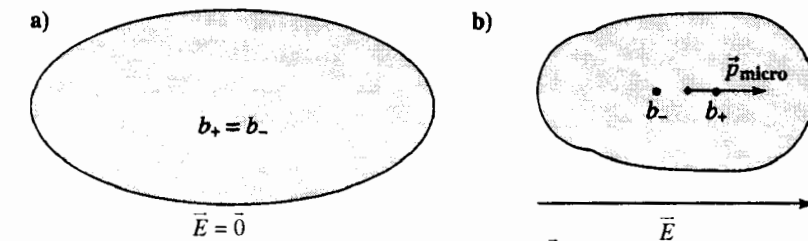
Một môi trường dẫn điện chứa các điện tích (electron hay ion) có khả năng dịch chuyển trong toàn bộ vật liệu dẫn điện (xem chương 2 và 3). Vì lí do đó, các điện tích này được gọi là *điện tích tự do* hay *điện tích dẫn*. Ở thang vĩ mô, các điện tích này chịu trách nhiệm về mật độ điện khối  $\rho$  và mật độ dòng điện theo thể tích  $\vec{j}$ , là những đại lượng xuất hiện trong các phương trình MAXWELL mà ta đã đưa vào trước đây.

Trong một môi trường *cách điện*, còn được gọi là *môi trường điện môi*, thì không tồn tại các điện tích tự do như thế : các electron đều liên kết với các nguyên tử hay phân tử, các ion liên kết với nhau và vì lí do đó, mà các điện tích này được gọi là *điện tích liên kết*.

Tuy nhiên, các điện tích này không hoàn toàn đứng yên, chúng có thể dịch chuyển chút ít (trên những khoảng cách vi mô, cỡ kích thước nguyên tử) xung quanh vị trí trung bình của chúng, dưới tác dụng của một điện trường chẳng hạn. Những dịch chuyển này của các điện tích có thể gây ra sự xuất hiện các mômen lưỡng cực cảm ứng : ta nói *môi trường bị phân cực*. Tồn tại các loại phân cực khác nhau : điện tử, lưỡng cực và ion.

#### 2.1.1. Phân cực điện tử hay nguyên tử

Một vật liệu cách điện, ban đầu trung hòa, có thể được hợp thành bởi các nguyên tử hay phân tử, biểu lộ một sự đối xứng đến nỗi chúng không có được mômen lưỡng cực điện không đổi (như phân tử  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ). Trái lại, khi vật liệu cách điện được nhúng vào trong một điện trường  $\vec{E}$ , thì điện trường này làm biến dạng các nguyên tử hay phân tử (các đám mây điện tử bị biến dạng và các hạt nhân nặng hơn rất nhiều hơn bị dịch chuyển) và như thế, gây ra sự xuất hiện các mômen lưỡng cực  $\vec{p}_{\text{vi mô}}$  "bị gây cảm ứng" bởi  $\vec{E}$  (H.10).



H.10. Mômen lưỡng cực  $\vec{p}_{\text{vi mô}}$  cảm ứng bởi trường  $\vec{E}$ .

Khi không có trường, các trọng tâm  $b_+$  và  $b_-$  của các điện tích dương và âm trùng nhau. Khi có mặt trường  $\vec{E}$ , thì chúng tách biệt ra.

978-8-95-11-05  
 978-8-95-11-05  
 978-8-95-11-05

Do đó, ở thang trung mô, một thể tích  $d\tau$ , vào cỡ một phần trăm của  $\mu\text{m}^3$  và chứa một số rất lớn hạt, dưới tác dụng của trường  $\vec{E}$ , sẽ biểu thị một mômen lưỡng cực  $d\vec{p}$  là tổng của tất cả các mômen nguyên tố  $\vec{p}_{vi\text{mô}}$  chứa trong  $d\tau$ :  $d\vec{p} = \sum \vec{p}_{vi\text{mô}}$ . Một môi trường như thế thể hiện một sự phân cực điện từ hay nguyên tử.

# Áp dụng 2

## Mô hình phân cực êlectrôn của một nguyên tử

Người ta mô hình hóa một nguyên tử hydro bằng một đám mây electron hình cầu tâm  $O$  và bán kính  $R$ , mà điện tích  $-e$  được phân bố đều, và một hạt nhân điểm ở tại  $O$  mang điện tích  $+e$ .

Đặt trong một điện trường đều  $\vec{E}$ , ta thừa nhận rằng đám mây electron dịch chuyển, nhưng không biến dạng, một đoạn  $d$  đối với hạt nhân ( $d \ll R$ ).

Hãy xác định mômen lưỡng cực  $\vec{p}_{vi\text{mô}}$  của nguyên tử này được gây cảm ứng bởi trường  $\vec{E}$ , theo  $\epsilon_0, R$  và  $\vec{E}$ .

Hạt nhân chịu tác dụng của các điện trường ngoài  $\vec{E}$  và  $\vec{E}_n$  tạo ra bởi đám mây electron.

Khi cân bằng, hạt nhân ở tại  $N$  cách tâm  $O$  của đám mây electron một khoảng  $d$  (H.11) và ta có thể viết:

$$e\vec{E} + e\vec{E}_n(N) = \vec{0}.$$

Áp dụng định lí GAUSS trên một hình cầu tâm  $O$ , bán kính  $d$ , ta có thể xác định trường  $\vec{E}_n(N)$ :

$$4\pi d^2 E_n = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = -\frac{ed^3}{\epsilon_0 R^3},$$

do đó: 
$$\vec{E}_n(N) = -\frac{ed}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}.$$

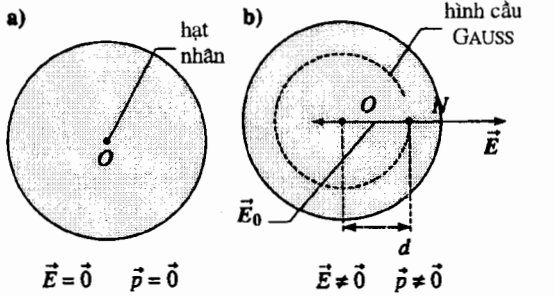
trong đó  $\vec{u}$  kí hiệu một vector đơn vị cộng tuyến với  $\vec{E}$  và cùng chiều.

Thành thử ta suy ra mômen lưỡng cực cảm ứng:

$$\vec{p}_{vi\text{mô}} = ed\vec{u} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E} \text{ có dạng:}$$

$$\vec{p}_{vi\text{mô}} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}.$$

$\alpha$  gọi là hệ số phân cực nguyên tử hay độ phân cực của nguyên tử. Độ lớn của nó vào cỡ độ lớn của thể tích nguyên tử, điều mà thí nghiệm đã xác nhận.

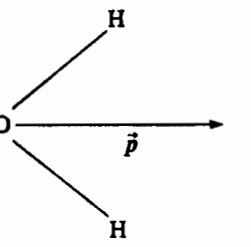


H.11.a. Nguyên tử hidro khi không có trường.  
 b. Độ dịch chuyển của đám mây electron của nguyên tử dưới tác dụng của một điện trường  $\vec{E}$ .

### 2.1.2. Phân cực lưỡng cực hay phân cực định hướng

Một vật liệu cách điện, lúc đầu trung hòa, có thể được cấu thành từ các nguyên tử hay phân tử bất đối xứng biểu thị một mômen lưỡng cực điện không đổi  $\vec{p}_{0vi\text{mô}}$ , như các phân tử nước  $\text{H}_2\text{O}$ , hidro clorua  $\text{HCl}$  hay amoniác  $\text{NH}_3$ , ... (H.12).

Ở thang trung mô, trong thể tích  $d\tau$ , các phân tử này chuyển động hỗn loạn và va chạm lẫn nhau do chuyển động nhiệt.



H.12. Mômen lưỡng cực của phân tử nước.

Do sự kiện này, các mômen lưỡng cực được định hướng một cách ngẫu nhiên và như vậy trong thể tích  $d\tau$  không xuất hiện mômen lưỡng cực.

Trái lại, khi có mặt một điện trường, thì trường này tác dụng một ngẫu lực  $\vec{\Gamma} = \vec{p}_{0vi} m_0 \wedge \vec{E}$  có khuynh hướng định hướng các lưỡng cực theo hướng của  $\vec{E}$ . Trong thể tích  $d\tau$ , lúc đó xuất hiện một mômen lưỡng cực cảm ứng bởi  $\vec{E}$  do các hiệu ứng đối kháng của trường  $\vec{E}$  và nhiễu loạn nhiệt (H.13). Hiệu ứng này hiển nhiên là chống chất lên sự biến dạng của các hạt đã mô tả ở §2.1.1.

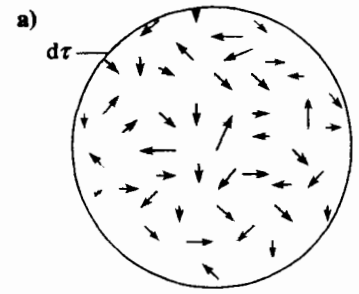
Một môi trường như vậy thể hiện một sự phân cực lưỡng cực (hay sự phân cực định hướng)

### 2.1.3. Phân cực ion

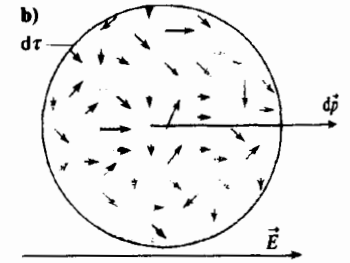
Một vật liệu cách điện, thoát tiên trung hòa, có thể được cấu thành bởi các cation và anion (nếu là một tinh thể ion) thông thường được phân bố theo một trật tự sắp xếp đều đặn, và, một thể tích  $d\tau$  của tinh thể này không biểu hiện một mômen lưỡng cực không đổi.

Khi vật liệu được nhúng vào trong một điện trường  $\vec{E}$ , các ion hơi dịch chuyển xung quanh vị trí trung bình của chúng, tính đều đặn bị phá vỡ và một thể tích  $d\tau$  của tinh thể sẽ biểu lộ lúc đó một mômen lưỡng cực cảm ứng bởi trường (h.14) : một tinh thể biểu thị một sự phân cực ion.

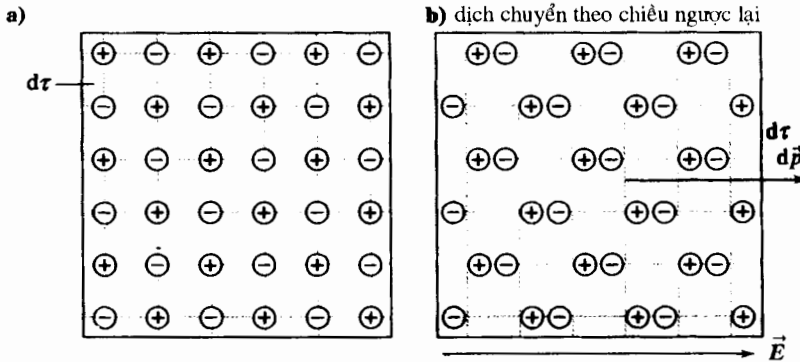
Ta cũng cảnh báo là  $\vec{E}$  còn làm biến dạng các ion và hai hiệu ứng này chống chất lên nhau.



H.13a. Khi không có trường, thì sự định hướng của các lưỡng cực nguyên tử là ngẫu nhiên.



H.13b. Mômen lưỡng cực cảm ứng  $d\vec{p}$  (trung mô) khi có mặt trường  $\vec{E}$  : các lưỡng cực có khuynh hướng định hướng nhiều hơn theo hướng của  $\vec{E}$ .



H.14a. Thể tích  $d\tau$  của tinh thể khi không có trường.

H.14b. Mômen lưỡng cực  $d\vec{p}$  cảm ứng (trung mô) bởi trường  $\vec{E}$  trong tinh thể.

Khi không có trường áp đặt vào, các ion của tinh thể được phân bố đều đặn và trọng tâm các điện tích dương trùng với trọng tâm của điện tích âm.

Nhưng, khi có mặt trường  $\vec{E}$ , các anion và cation bị dịch chuyển theo các chiều ngược nhau : và trọng tâm các điện tích dương không còn trùng với trọng tâm các điện tích âm nữa.

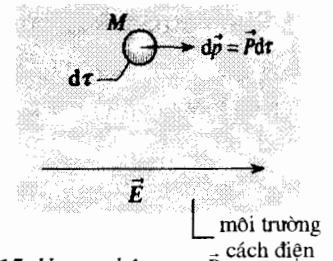
## 2.2. Vector phân cực

Sự xuất hiện các mômen lưỡng cực ở trong lòng môi trường cách điện dưới tác dụng của một điện trường, đặc trưng cho hiện tượng phân cực cảm ứng (môi trường bị phân cực dưới tác dụng của trường).

Người ta đặc trưng trạng thái của môi trường tại mọi điểm M bằng mômen lưỡng cực trên đơn vị thể tích  $\vec{P}(M)$ , được xác định bởi :

$$d\vec{p} = \vec{P}(M) d\tau.$$

Vector  $\vec{P}$  gọi là vector phân cực, phụ thuộc điểm M mà tại đó ta xét nó và cường độ điện trường tại điểm đó (H.15).



H.15. Vector phân cực  $\vec{P}$ .



Nhớ rằng, nếu trường phụ thuộc thời gian,  $\vec{P}$  cũng sẽ phụ thuộc thời gian. Độ phân cực  $\vec{P}$  được đo bằng  $C \cdot m^{-2}$ : như vậy nó đồng nhất với mật độ điện mặt.

**Chú ý:**

Tất cả các vector ( $\vec{E}, \vec{P}, \dots$ ) trong chương này đều là các vector "vi mô" được định nghĩa như những giá trị trung bình không gian, trong các thể tích trung mô  $d\tau$  của các vector vi mô tương ứng. Trong cuốn sách này, chúng tôi không nêu bất kì vấn đề nào liên quan đến phương pháp xác định các giá trị trung bình đó.

Khi được nhúng trong một điện trường, thì một môi trường điện môi sẽ phân cực: mỗi thể tích trung mô  $d\tau$  của vật chất sẽ thu được một mômen lưỡng cực điện  $d\vec{p}$  cảm ứng bởi trường, đặc trưng bởi một mômen lưỡng cực trên đơn vị thể tích  $\vec{P}$  gọi là **vector phân cực** và được xác định bởi  $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$ .

### 2.3. Sự phân cực trong một số tinh thể và trong các môi trường dẫn điện

#### 2.3.1. Trường hợp của một số tinh thể

Thông thường, sự phân cực của môi trường mất đi khi điện trường không còn nữa. Tuy nhiên, có một số tinh thể vẫn bảo toàn độ phân cực của nó khi trường biến mất: các tinh thể này lúc đó biểu hiện một độ phân cực không đổi và được gọi là các chất **sắt điện** (ferroélectrique), vì các tính chất điện của chúng giống các tính chất từ của các chất sắt từ (xem §4). Cũng như trước, ta có thể xác định, đối với các môi trường tinh thể này, một vector phân cực  $\vec{P}$ , mà vector này, khác với các môi trường cách điện thông thường, lại khác không khi tinh thể không chịu tác dụng của bất kì một trường nào.

Các tinh thể khác (đôi khi cũng cùng những tinh thể đó) lại có thể biểu hiện một độ phân cực dưới tác dụng của một ứng lực cơ học và có thể biến dạng dưới tác dụng của một sự phân cực cảm ứng bởi một điện trường. Các tinh thể này, gọi là **tinh thể áp điện**, có rất nhiều ứng dụng: đo lực hay áp suất, sản xuất và thu nhận các siêu âm... Thạch anh (quartz) là tinh thể áp điện, còn được dùng trong đồng hồ (H.16).

Các tinh thể sắt điện hay áp điện có một cấu trúc tinh thể không đối xứng là khởi nguồn của các tính chất đặc biệt của chúng.

**Một số tinh thể có thể biểu hiện một độ phân cực cố định.**

► **Đề tập luyện: bài tập: 5.**

#### 2.3.2. Trường hợp các môi trường dẫn điện

Nếu môi trường dẫn điện có các điện tích tự do, thì nó cũng có các điện tích liên kết. Như vậy, một kim loại được tạo thành bởi các ion (các electron và các hạt nhân) liên kết với nhau, chúng có thể biến dạng hay hơi dịch chuyển xung quanh các vị trí trung bình của chúng như trong một môi trường cách điện. Trong một vật dẫn, tác dụng của điện trường là gấp đôi: nó làm dịch chuyển các điện tích tự do (electron trong kim loại) và nó "phân cực" các điện tích liên kết (các ion dương trong một kim loại).



Sự ghép điện cơ của một tinh thể thạch anh (nhờ tinh áp điện) cho phép chế tạo các bộ lọc có tính chọn lọc cực kì cao có thể vận hành các bộ dao động điện tử ở những tần số rất chính xác. Hơn nữa, thạch anh lại có một tần số cộng hưởng cơ học ổn định rất cao.

Thành thử rất nhiều thiết bị do đã được trang bị các tinh thể thạch anh "đồng hồ thạch anh" đã thay thế đồng hồ có bộ dao động cơ học.

H.16. Đồng hồ thạch anh.

Như vậy, ta cũng có thể xác định đối với một môi trường dẫn điện một vectơ phân cực  $\vec{P}$ . Nhưng ta sẽ không làm điều đó ở đây, vì việc đưa nó vào là khá tinh tế trong chừng mực mà mỗi thể tích trung mô  $d\tau$  của môi trường có thể không trung hòa vì nó có thể mất đi hay thu thêm các điện tích tự do.

Nhớ rằng tác dụng của trường  $\vec{E}$  lên các điện tích linh động thường quan trọng hơn nhiều so với tác dụng của nó lên các điện tích liên kết. Thành thử, sự phân cực của một môi trường kim loại rất thường không đáng kể. Và lại, ta cũng đã không kể đến điều đó khi nghiên cứu hiệu ứng ngoài mặt trong một kim loại.

**Sự phân cực của một môi trường kim loại hầu như bao giờ cũng không đáng kể.**

## 2.4. Điện tích và dòng điện phân cực tương đương

Ta đề nghị thử nghiệm trên hai mô hình rất đơn giản (thậm chí đơn giản hóa quá mức) để có thể nghiên cứu trạng thái điện của một môi trường vật chất bị phân cực bằng cách xác định một mật độ điện tích liên kết theo thể tích, trong chân không.

### 2.4.1. Mô hình một chiều

#### ■ Trường hợp phân cực không đều

Xét một chất điện môi kết tinh, trung hòa điện và không có độ phân cực cố định. Tinh thể này chứa  $n$  cation điện tích  $+q$  và  $n$  anion điện tích  $-q$ , được phân bố "đối xứng" trong đơn vị thể tích. Khi được nhúng trong một điện trường  $\vec{E}$ , có hướng cố định, cộng tuyến với trục ( $Ox$ ) có vectơ đơn vị  $\vec{e}_x$  và có trị số đại số phụ thuộc  $x$ , nghĩa là  $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$  (để đơn giản hóa đề bài, ta có thể giả thiết  $E > 0$ ), thì môi trường tinh thể sẽ phân cực.

Thật vậy, các cation dịch chuyển theo chiều của trường một khoảng vi mô  $\xi_1$  và các anion theo chiều ngược lại một khoảng  $-\xi_2$  (các khoảng  $\xi_1$  và  $\xi_2$  được định nghĩa là dương) kể từ các vị trí trung bình của chúng.

Do vậy, một cặp ion có một mômen lưỡng cực cảm ứng (H.17a và b):

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{vi mô}} &= (q\xi_1 + (-q)(-\xi_2))\vec{e}_x \\ &= q(\xi_1 + \xi_2)\vec{e}_x, \end{aligned}$$

và xuất hiện trên đơn vị thể tích một độ phân cực:

$$\vec{P} = n\vec{p}_{\text{vi mô}} = nq(\xi_1 + \xi_2)\vec{e}_x$$

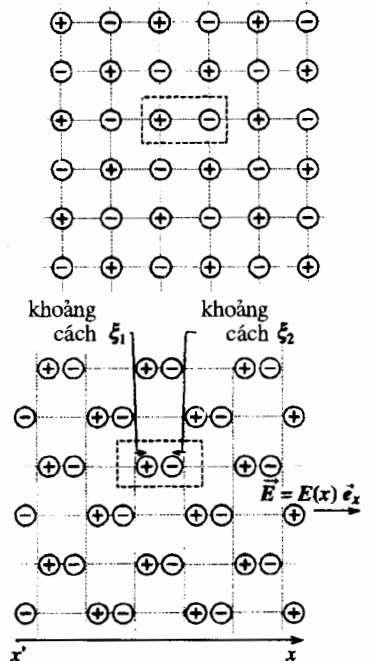
Nhớ rằng, cũng như trường  $\vec{E}$ , các độ dịch chuyển  $\xi_1$  và  $\xi_2$  và do đó độ phân cực  $\vec{P}$  phụ thuộc vào  $x$ :

$$\vec{P} = P(x)\vec{e}_x.$$

Ở thang vĩ mô, ta có thể coi một tinh thể, lúc đầu trung hòa, là gồm các điện tích dương có mật độ thể tích  $\rho_+$  và các điện tích âm có mật độ thể tích  $\rho_-$ .

Khi tinh thể không chịu tác dụng của một điện trường, thì hai phân bố điện tích này là đều và ngược nhau, nghĩa là:

$$\rho_+ = \rho_0 \quad \text{và} \quad \rho_- = -\rho_0.$$



H.17. Sự dịch chuyển của các ion dưới tác dụng của trường  $\vec{E}$ .

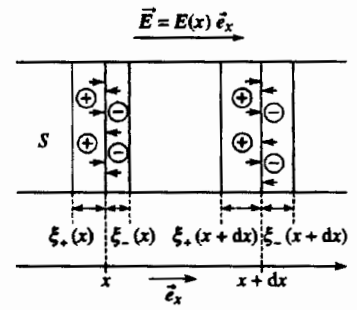
a. Phân bố các ion khi không có trường.

b. Phân bố các ion khi có trường  $\vec{E}$ .

Khi tinh thể được nhúng trong một trường  $\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$ , thì các điện tích dương chịu các dịch chuyển trung bình  $\xi_+(x)$  theo chiều của trường, còn các điện tích âm chịu các dịch chuyển  $\xi_-(x)$  theo chiều ngược với trường ( $\xi_+$  và  $\xi_-$  đều dương). Kết quả là tinh thể biểu hiện một độ phân cực  $\vec{P}(x) = \rho_0 (\xi_+ + \xi_-) \vec{e}_x$  trên đơn vị thể tích.

Lúc đó, ta xét một thể tích trung mô  $d\tau = S dx$  của tinh thể (chứa một số rất lớn các ion), chiều dày  $dx$  và tiết diện  $S$ ; lúc đầu trung hòa, nguyên tố này chứa một điện tích dương  $\rho_0 S dx$  và một điện tích âm  $-\rho_0 S dx$ .

Khi thiết lập trường  $\vec{E}$ , thì nguyên tố thể tích này thu được một điện tích  $dQ$  (H.18).



H.18. Điện tích tương đương  $dQ$  chứa trong một nguyên tố trung mô chất điện môi.

Thật vậy, do sự chuyển dời của các điện tích mà ta thấy :

- ở  $x$  có một điện tích dương  $\rho_0 S \xi_+(x)$  đi vào và một điện tích âm  $-\rho_0 S \xi_-(x)$  đi ra ;
- ở  $x + dx$ , có một điện tích dương  $\rho_0 S \xi_+(x + dx)$  đi ra và một điện tích âm  $-\rho_0 S \xi_-(x + dx)$  đi vào.

Từ đó ta rút ra :

$$\begin{aligned} dQ &= \rho_0 S (\xi_+(x) + \xi_-(x)) + \rho_0 S (-\xi_+(x + dx) - \xi_-(x + dx)) \\ &= S (P(x) - P(x + dx)) \\ &= -\frac{dP}{dx} S dx. \end{aligned}$$

điều này cho phép ta xác định một mật độ điện tích khối do sự phân cực của môi trường.

$$\rho_{\text{pol}} = -\frac{dP}{dx}$$

$\rho_{\text{pol}}$  được gọi là mật độ điện tích phân cực khối (thể tích) hay mật độ điện tích liên kết khối (thể tích).

### ■ Trường hợp phân cực đều

Trong một trường  $\vec{E}$  đều, chất điện môi sẽ có được một độ phân cực đều và mật độ điện tích phân cực theo thể tích triệt tiêu.

Tuy nhiên, nếu tiếp tục lập luận như trên, thì ta có thể dễ dàng nghĩ rằng lúc đó có một sự dư các điện tích liên kết ở bề mặt của tinh thể.

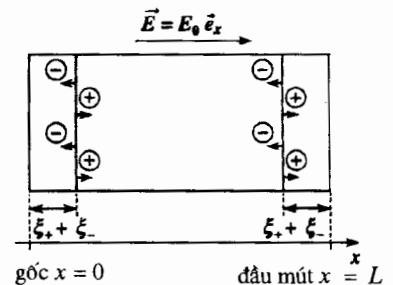
Ví dụ, ta xét một tinh thể dạng hình hộp chữ nhật, tiết diện  $S$  và chiều dài  $L$  (H.19). Trong tinh thể này, các điện tích dương dịch chuyển đi một đoạn trung bình  $\xi_+$  và các điện tích âm dịch chuyển đi cùng một đoạn như thế  $\xi_-$ . Nếu, trong mọi phần tử thể tích  $d\tau$  ở trong lòng tinh thể, điện tích tổng cộng vẫn triệt tiêu, thì vấn đề sẽ không như thế ở hai đầu  $x = 0$  và  $x = L$  : sẽ có một số dư các điện tích liên kết âm trên một khoảng  $|\xi_+ + \xi_-|$  tại  $x = 0$ , và một số dư các điện tích liên kết dương cũng trên khoảng cách như thế tại  $x = L$ .

Thành thử, ở thang trung mô (và do vậy ở thang vĩ mô) mọi việc xảy ra dường như có một điện tích phân cực mặt với mật độ :

$$\sigma_{\text{pol}(x=0)} = -\rho_0 (\xi_+ + \xi_-) = -P \text{ ở } x = 0.$$

$$\sigma_{\text{pol}(x=L)} = +\rho_0 (\xi_+ + \xi_-) = +P \text{ ở } x = L.$$

Một cách tổng quát, mật độ mặt của các điện tích phân cực tại một điểm, có thể được viết dưới dạng  $\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{N}$ , với ký hiệu  $\vec{N}$  là vectơ đơn vị tại điểm đang xét của chất điện môi hướng ra.



H.19. Tinh thể điện môi nhúng trong một trường  $\vec{E}$  đều.

### 2.4.2. Mô hình ba chiều

Ta lại lấy chất điện môi kết tinh ở §2.4.1., và nhúng nó vào một điện trường không đều. Tinh thể sẽ phân cực và độ phân cực cảm ứng  $\vec{P}$  lúc đầu, chính nó, cũng không đều :  $\vec{P} = \vec{P}(M)$ , trong đó  $M$  là một điểm bất kì của chất điện môi. Ở tiết §2.4.1., ta đã thấy rằng, khi phân cực, thì điện tích đi qua tiết diện  $S$  ở hoành độ  $x$  (theo chiều : từ trong thể tích  $d\tau$  đi ra phía ngoài thể tích  $d\tau$ ), sẽ có dạng :

$$-S P(x) = \vec{P}(x) \cdot (-\vec{e}_x) S,$$

trong đó  $-\vec{e}_x$  biểu diễn vectơ đơn vị pháp tuyến đi ra khỏi thể tích  $d\tau$  (Xem H.18). Xét một thể tích  $\mathcal{V}$  (vĩ mô) bất kì của chất điện môi giới hạn bởi mặt kín  $\Sigma$ .  $M'$  là một điểm của mặt  $\Sigma$ , ta kí hiệu  $\vec{N}(M')$  là vectơ đơn vị đi ra, pháp tuyến với phần tử bề mặt  $dS$  bao quanh  $M'$  (H.20). Tương tự với kết quả trước, ta có thể viết điện tích đi qua (từ trong ra ngoài)  $dS$  dưới dạng :  $dQ_{\text{đi ra}} = \vec{P}(M') \cdot \vec{N}(M') dS$ .

Do đó, khi phân cực, thể tích  $\mathcal{V}$  của chất điện môi, lúc đầu trung hòa, sẽ thu được một điện tích :

$$Q = -Q_{\text{đi ra}} = -\oiint_{\Sigma} \vec{P}(M') \cdot \vec{N}(M') dS.$$

Khi dùng định lí OSTROGRADSKI, ta được :

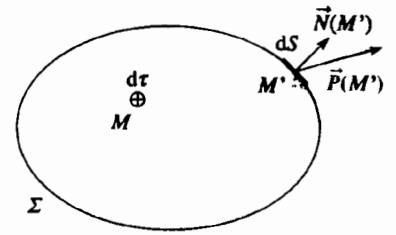
$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} -\text{div } \vec{P}(M) d\tau \quad \text{từ dạng} \quad Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_{\text{pol}}(M) d\tau$$

Hệ thức này cho phép ta xác định lại một lần nữa một mật độ thể tích của các điện tích phân cực :

$$\rho_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P},$$

hệ thức này khái quát hóa hệ thức mà ta đã tìm thấy ở §2.4.1. trong trường hợp mô hình một chiều.

Ta giả thiết kết quả này là phổ biến và ta thừa nhận rằng, ở thang vĩ mô, độ phân cực  $\vec{P}$  (cảm ứng hay cố định) của một môi trường vật chất nào đó tương đương với mật độ thể tích của các điện tích phân cực  $\sigma_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P}$  (tùy tình huống xảy ra, người ta còn có thể thêm vào đó, mật độ mặt của các điện tích phân cực  $\rho_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{N}$ ). Thành thử trong một môi trường vật chất, ta có thể dùng các phương trình MAXWELL "trong chân không" (xem chương 3), với điều kiện phải kể đến các mật độ thể tích của các điện tích phân cực  $\rho_{\text{pol}}$  và mật độ mặt  $\sigma_{\text{pol}}$  của chúng.



H.20. Điện tích chứa trong một thể tích ở trong môi trường điện môi.

## Áp dụng 3

### Xác định các điện tích phân cực xuất phát từ thể tinh điện

Một môi trường điện môi thể tích  $\mathcal{V}$ , giới hạn bởi một mặt  $\Sigma$  sẽ có tại mọi điểm  $M$  một độ phân cực (cảm ứng hay cố định)  $\vec{P} = \vec{P}(M)$ .

1) Tìm biểu thức của thế tĩnh điện  $V(H)$  được tạo ra bởi toàn bộ môi trường điện môi bị

phân cực tại mọi điểm  $H$  ở ngoài chất điện môi ?

2) Hay biến đổi biểu thức nhận được để làm xuất hiện các mật độ thể tích  $\rho_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P}$  và mật độ mặt :

$$\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{N}$$

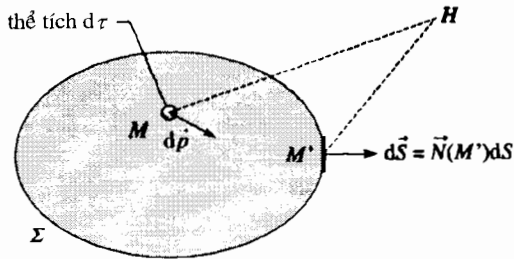
của các điện tích phân cực.

1) Một lượng cực, có mômen  $d\vec{p} = \vec{P}(M)d\tau$ , tạo ra tại một điểm  $H$  ở xa, một điện thế (H.21):

$$dV(H) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \overline{MH}}{MH^3},$$

từ đó, người ta suy ra:

$$V(H) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{P}(M) \cdot \overline{MH}}{MH^3} d\tau.$$



H.21. Điện thế được tạo ra bởi một môi trường điện môi.

2) Biết rằng:

$$\begin{aligned} \vec{P}(M) \cdot \left( \frac{\overline{MH}}{MH^3} \right) &= \vec{P}(M) \cdot \text{grad}_M \left( \frac{1}{MH} \right) \\ &= \text{div}_M \left( \frac{\vec{P}(M)}{MH} \right) - \frac{\text{div} \vec{P}(M)}{MH}, \end{aligned}$$

ta có thể viết:

$$\begin{aligned} V(H) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{-\text{div} \vec{P}(M)}{MH} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \text{div}_M \left( \frac{\vec{P}(M)}{MH} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Khi áp dụng định lí OSTROGRADSKI cho số hạng thứ hai, thì ta được:

$$\begin{aligned} V(H) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{-\text{div} \vec{P}(M)}{MH} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{P}(M') \cdot \vec{N}(M')}{M'H} dS. \end{aligned}$$

Như vậy, ta đã làm xuất hiện biểu thức của một điện thế được tạo ra bởi một phân bố các điện tích phân phối trong thể tích  $V$  của chất điện môi với một mật độ thể tích:

$$\rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P},$$

và phân phối trên bề mặt của chất điện môi với một mật độ mặt:

$$\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{N}.$$

### 2.4.3. Trường hợp của chế độ biến thiên

Được nhúng trong một điện trường biến thiên, môi trường vật chất sẽ biểu lộ một độ phân cực cảm ứng phụ thuộc thời gian.

Như vậy, điện tích  $Q = -Q_{\text{đi ra}}$  từ thể tích  $V$  của chất điện môi (xem §2.4.2., H.20 và 22) cũng phụ thuộc thời gian và như vậy, ta có thể xác định một cường độ  $I_{\text{đi ra}}$  khỏi thể tích này:

$$I_{\text{đi ra}} = \frac{dQ_{\text{đi ra}}}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{P}(M', t)}{\partial t} \cdot \vec{N}(M') dS.$$

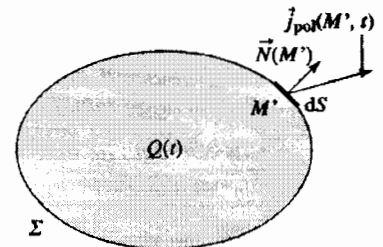
Như vậy ta làm xuất hiện một mật độ dòng điện thể tích:

$$\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}(M', t)}{\partial t}$$

gọi là mật độ thể tích của dòng điện liên kết hay mật độ thể tích của dòng điện phân cực.

Ở đây ta còn giả thiết rằng kết quả này là chung và ta thừa nhận rằng, ở thang vĩ mô, trong một môi trường vật chất bất kì, ta có thể làm tương ứng với độ phân cực  $\vec{P}(M', t)$  phụ thuộc thời gian, một mật độ dòng điện phân cực theo thể tích:

$$\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}(M', t)}{\partial t}.$$



H.22. Dòng phân cực đi qua một thể tích của môi trường vật chất.

Chú ý :

Ta có thể dễ dàng kiểm tra thấy mật độ điện tích phân cực theo thể tích  $\rho_{\text{pol}}$  và mật độ dòng điện phân cực theo thể tích  $\vec{j}_{\text{pol}}$  nghiệm đúng phương trình vi phân bảo toàn điện tích :

$$\text{div } \vec{j}_{\text{pol}} + \frac{\partial \rho_{\text{pol}}}{\partial t} = 0.$$

Khi nghiên cứu, ở thang vĩ mô, trường điện từ trong một môi trường vật chất, ta có thể thay thế độ phân cực  $\vec{P}$  của môi trường bằng :

- một mật độ thể tích của các điện tích phân cực  $\rho_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P}$  ;
- một mật độ điện tích của các điện tích phân cực  $\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{N}$  ( $\vec{N}$  được định hướng ra phía ngoài của môi trường vật chất) /;
- một mật độ thể tích của dòng điện phân cực  $\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  ở chế độ

biến thiên.

Thành thử, trong một môi trường vật chất, ta có thể sử dụng các phương trình MAXWELL "trong chân không", với điều kiện phải kể đến các mật độ thể tích khác nhau về điện tích và dòng điện.

## 3 Sự từ hóa một môi trường vật chất

### 3.1. Các môi trường từ khác nhau

Trong đoạn này, ta không phân biệt vật cách điện và dẫn điện.

Trong một bức tranh cổ điển (và do vậy được đặc biệt đơn giản hóa quá mức), ta có thể tưởng tượng một nguyên tử, một phân tử, một ion được cấu thành bởi các electron quay quanh các hạt nhân. Thành thử, ta có thể coi nguyên tử, phân tử hay ion như những dòng điện tròn nhỏ, nghĩa là các lưỡng cực từ.

## Áp dụng 4

### Mômen từ quỹ đạo của một nguyên tử

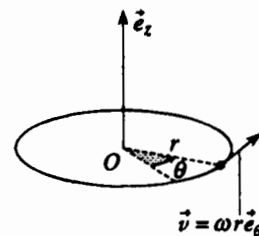
Trong cách biểu diễn cổ điển một nguyên tử, ta có thể coi rằng một electron, có điện tích  $-e$ , khối lượng  $m$ , vẽ một quỹ đạo tròn chung quanh một hạt nhân. Chuyển động này gọi là chuyển động quỹ đạo của electron.

Hãy xác định hệ thức giữa mômen động quỹ đạo  $\vec{L}_0$  và mômen từ quỹ đạo  $\vec{M}_0$  của electron.

Dưới tác dụng của lực điện xuyên tâm do hạt nhân gây ra, electron có một vận tốc góc không đổi  $\omega$  trên quỹ đạo của nó (muốn tự thuyết phục

về vấn đề này, nếu cần, ta chỉ việc áp dụng hệ thức cơ bản của động lực học cho electron). Mômen động của electron có giá trị (H.23) :

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\omega\vec{e}_z.$$



H.23. Chuyển động quỹ đạo của electron.

Để xác định mômen từ, ta có thể coi electron Từ đó suy ra :

$$\text{nghư một dòng điện tròn cường độ } I = \frac{-e}{T},$$

$$\vec{M}_0 = -\frac{e}{2m} \vec{L}_0.$$

trong đó chu kỳ quay  $T$  bằng  $\frac{2\pi}{\omega}$ , từ đó :

$$\vec{M}_0 = I \pi r^2 \vec{e}_z = -\frac{e}{2\pi} \omega r^2 \vec{e}_z.$$

Tỷ số  $-\frac{e}{2m}$  được gọi là *tỉ số từ hồi chuyển* quỹ đạo của electron.

Mômen từ quỹ đạo mà ta đã tính toán trong *áp dụng 4*, không thể tự mình giải thích các tính chất từ của vật chất. Phải cấp bách cấu trúc cơ học lượng tử (lí thuyết duy nhất có thể dùng được ở thang vi mô) để hiểu được các tính chất đó. Theo lí thuyết này, người ta đã chứng minh rằng electron, và cả proton, neutron đều có một mômen động nội tại gọi là *spin*, và do vậy có một mômen từ nội tại (đôi khi người ta cho spin của electron hình ảnh cổ điển của một hạt quay quanh mình nó : hình ảnh này dẫn đến các kết quả sai lầm mà ta phải bác bỏ). Do đó mômen từ của nguyên tử, phân tử, ion đều do sự chồng chất của các mômen từ quỹ đạo và các mômen từ spin của các electron và các hạt nhân tạo thành các hạt đó. Thật ra, mômen tổng hợp này chủ yếu là do các mômen từ của các electron đơn độc của hạt tạo ra.

Ta phân biệt hai loại vật thể

■ Các vật thể được cấu tạo từ các hạt không có mômen từ.

Các hạt này không chứa các electron đơn độc (phân tử  $N_2, Cl_2$ ). Các vật thể này hiển nhiên không biểu hiện một sự từ hóa cố định ở thang vĩ mô và được gọi là *chất nghịch từ*,

■ Các vật thể được cấu tạo từ các hạt có một mômen từ.

• Do chuyển động nhiệt, mà các mômen này định hướng một cách ngẫu nhiên đối với nhau. Và, nói chung, các vật thể này không biểu hiện một sự từ hóa cố định ở thang vĩ mô (*H.24a*) ; chúng được gọi là *chất thuận từ* (Ví dụ phân tử  $NO, O_2$  - xem các lí thuyết các obitan phân tử trong hóa học).

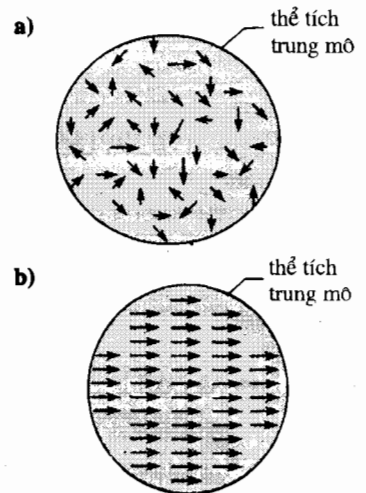
• Tuy nhiên, có thể tồn tại, trong một số vật thể, các tương tác rất mạnh giữa các mômen từ của các nguyên tử kề nhau.

Các mômen này lúc đó có khuynh hướng định hướng song song với nhau và chuyển động nhiệt không đi đến phá hủy hoàn toàn sự định hướng ưu tiên này. Các chất này có thể biểu hiện một độ từ hóa cố định rất mạnh và được gọi là các *chất sắt từ* (*H.24b*).

Cũng còn tồn tại các chất ferit từ, phản sắt từ mà ta không nói tới ở đây.

### 3.2. Tác dụng của $\vec{B}$ trên một vật liệu từ

Khi vật liệu được nhúng vào trong một từ trường  $\vec{B}$ , thì trường này tác dụng lên các electron và các hạt nhân cấu thành môi trường vật chất (và lại, ảnh hưởng của  $\vec{B}$  lên electron rõ ràng là lớn hơn rất nhiều so với hạt nhân, tuy electron rất nhẹ đối với hạt nhân).



Trong một chất thuận từ, các mômen từ vi mô được định hướng một cách ngẫu nhiên.

Trong một chất sắt từ, các mômen từ vi mô được định hướng theo một chiều ưu tiên bên trong một thể tích trung mô. Tuy nhiên sự định hướng ưu tiên này có thể thay đổi từ một thể tích trung mô này sang thể tích trung mô khác : một thanh sắt từ không biểu hiện một cách hệ thống một sự từ hóa cố định (xem chương 7).

**H.24a.** Chất thuận từ (khi không có từ trường).

**b.** Chất sắt từ (khi không có từ trường).

### 3.2.1. Trường hợp một chất nghịch từ

Trên một chất nghịch từ,  $\vec{B}$  làm biến dạng các đám mây electron, và như thế làm xuất hiện trong lòng các nguyên tử và phân tử các mômen từ cảm ứng.

Định luật LENZ cho ta thấy các từ trường sinh ra bởi các mômen vi mô này chống lại trường  $\vec{B}$  ban đầu. Như vậy, ở thang vĩ mô, môi trường, dưới tác dụng của trường  $\vec{B}$ , sẽ thu được một độ từ hóa ngược chiều với  $\vec{B}$  (H. 25a).

Độ từ hóa cảm ứng này, bao giờ cũng rất yếu, hầu như độc lập với nhiệt độ.

### 3.2.2. Trường hợp một chất thuận từ

Trên một chất thuận từ, ngoài tác dụng trên,  $\vec{B}$  còn có khuynh hướng định hướng các lưỡng cực nguyên tử theo chiều của nó. Thật vậy, ta nhớ lại rằng một trường  $\vec{B}$  tác dụng một ngẫu lực  $\vec{T} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  lên một lưỡng cực từ có mômen  $\vec{M}$ .

Tác dụng này quan trọng hơn trong trường hợp chất nghịch từ, vì môi trường thu được một độ từ hóa cảm ứng cùng chiều với  $\vec{B}$  (H.25b).

Độ từ hóa cảm ứng  $\vec{M}$  này, cũng vẫn rất yếu, nhưng nó phụ thuộc mạnh vào nhiệt độ, vì chuyển động nhiệt cản trở sự định hướng ưu tiên của các lưỡng cực.

### 3.2.3. Trường hợp một chất sắt từ

Khi được nhúng trong một trường  $\vec{B}$ , một vật liệu sắt từ sẽ thu được một độ từ hóa rất lớn, không có phạm vi chung với các độ từ hóa của các chất nghịch từ hay thuận từ.

Vả lại, độ từ hóa này, nói chung, còn tồn tại sau khi trường ban đầu biến mất (ta sẽ trở lại vấn đề này ở chương 7)

### 3.2.4. Vector từ hóa

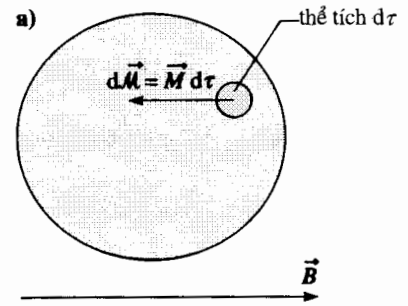
Trong tất cả các trường hợp, khi một vật liệu chịu tác dụng của một từ trường  $\vec{B}$ , thì mọi thể tích trung mô  $d\tau$  của vật liệu đó biểu hiện một mômen từ  $d\vec{M} = \vec{M} d\tau$ ; vector  $\vec{M}$ , được gọi là vector từ hóa, phụ thuộc vào điểm mà ta xét nó và cường độ từ trường tại điểm đó. Thành thử, khi có mặt một trường triệt tiêu, thì  $\vec{M}$  cũng triệt tiêu đối với một chất nghịch từ hay thuận từ. Nếu trường phụ thuộc thời gian, thì  $\vec{M}$  cũng sẽ phụ thuộc thời gian.

Độ từ hóa  $\vec{M}$  đo bằng  $A.m^{-1}$ , và như vậy đồng nhất với mật độ dòng điện mặt.

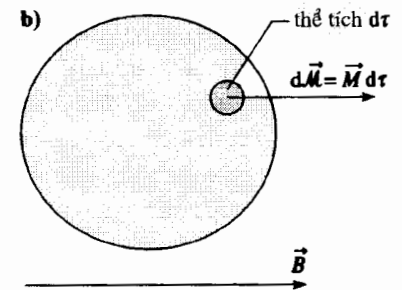
Khi được nhúng trong một từ trường, thì một môi trường sẽ được từ hóa: mỗi thể tích trung mô  $d\tau$  của vật chất sẽ thu được một mômen lưỡng cực  $d\vec{M}$  cảm ứng bởi trường, được đặc trưng bởi một mômen lưỡng cực  $\vec{M}$  trên đơn vị thể tích gọi là vector từ hóa và được xác định bởi :

$$d\vec{M} = \vec{M} d\tau.$$

Một số môi trường, gọi là môi trường sắt từ, có thể biểu hiện một độ từ hóa cố định.



H.25a. Đối với một chất nghịch từ, độ từ hóa cảm ứng  $\vec{M}$  và trường  $\vec{B}$  ngược chiều nhau.



H.25b. Đối với một chất thuận từ, độ từ hóa cảm ứng  $\vec{M}$  và trường  $\vec{B}$  đều cùng chiều.



### 3.3. Các dòng điện từ hóa tương đương

#### ■ Trường hợp một độ từ hóa bất kì

Cũng như ở § 2.4, khi nghiên cứu sự phân cực, ta đã đề xuất việc kiểm tra, xuất phát từ một phép tính rất đơn giản, xem có khả năng nghiên cứu trạng thái từ của một môi trường vật chất bằng cách xác định một mật độ thể tích của các dòng điện từ hóa trong chân không.

Giả thiết một môi trường có một độ từ hóa  $\vec{M}$  (cảm ứng hay cố định) cộng tuyến với trục ( $Oz$ ) và chỉ phụ thuộc vào  $y$ , nghĩa là (H.26) :

$$\vec{M} = M_z(y) \vec{e}_z.$$

Tại một điểm  $P$  tọa độ  $(x, y, z)$ , một thể tích nguyên tố (trung mô)  $d\tau = dx dy dz$  của vật liệu có một mômen từ :

$$d\vec{M} = M_z(y) dx dy dz \vec{e}_z,$$

và được coi như một dòng điện tròn có mômen :

$$d\vec{M} = dI(y) dx dy \vec{e}_z.$$

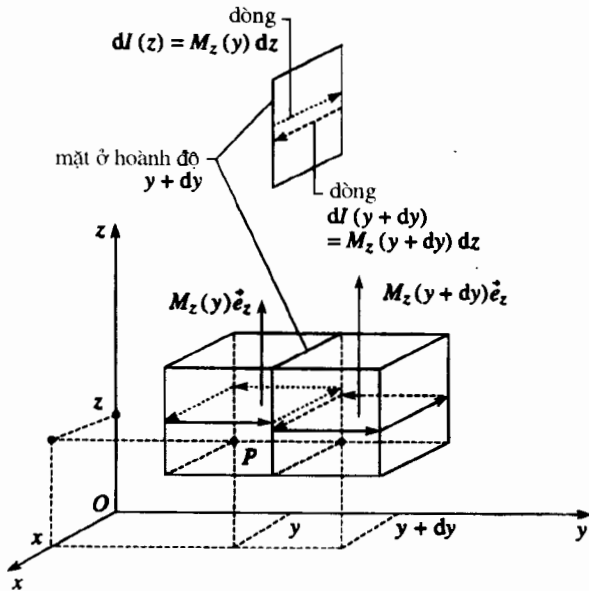
Do đó, ta nhận thấy, trên hình 26, mặt có hoành độ  $y + dy$ , chung của hai nguyên tố thể tích kề nhau, được một dòng điện chạy qua :

$$(-dI(y) + dI(y + dy)) = (-M_z(y) + M_z(y + dy)) dz = \frac{dM_z}{dy} dy dz,$$

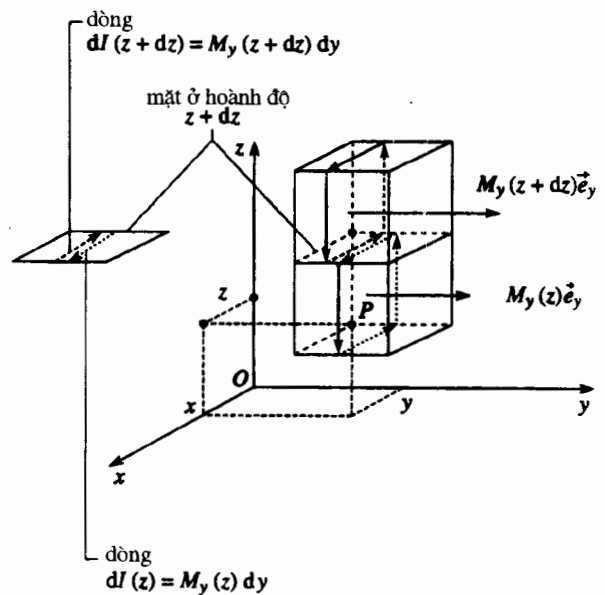
theo chiều của trục ( $Ox$ ).

Mọi điều xảy ra dường như có một dòng điện  $\frac{dM_z}{dy} dy dz$  với mật độ thể

tích  $j_{x_1} = \frac{dM_z}{dy}$  đi qua phần tử thể tích  $d\tau$  đang xét, theo phương và chiều của trục ( $Ox$ ), nghĩa là đi qua một tiết diện có diện tích  $dy dz$ .



H.26. Các dòng điện từ hóa trong một vật liệu có độ từ hóa  $\vec{M} = M_z(y) \vec{e}_z$ .



H.27. Các dòng điện từ hóa trong một vật liệu có độ từ hóa  $\vec{M} = M_y(z) \vec{e}_y$ .

Khi xét một độ từ hóa  $\vec{M}$  cộng tuyến với trục  $(Oy)$  và chỉ phụ thuộc vào  $z$ , nghĩa là  $\vec{M} = M_y(z) \vec{e}_y$  (H.27), thì thể tích nguyên tố  $d\tau$  có một mômen từ  $d\vec{M} = M_y(z) dx dy dz \vec{e}_y$ , và nó có thể được coi như một dòng điện tròn có mômen :

$$d\vec{M} = dI(z) dz dx \vec{e}_y.$$

Lúc đó, mặt ở hoành độ  $z + dz$ , chung cho hai nguyên tố thể tích kề nhau (H.27), được một dòng điện chạy qua :

$$dI(z) - dI(z + dz) = - \frac{dM_y}{dz} dy dz.$$

Mọi điều xảy ra dường như có một dòng điện  $- \frac{dM_y}{dz} dy dz$  với mật độ

thể tích  $j_{x_2} = \frac{dM_y}{dz}$  đi qua nguyên tố thể tích  $d\tau$  theo phương và chiều của trục  $(Ox)$ .

Thành thử, khi chồng chất hai trường hợp trên, đối với một độ từ hóa :

$$\vec{M} = M_z(y) \vec{e}_z + M_y(z) \vec{e}_y.$$

thì sẽ có một dòng điện mật độ  $j_x = j_{x_1} + j_{x_2} = \frac{dM_z}{dy} - \frac{dM_y}{dz}$  đi qua

nguyên tố thể tích  $d\tau$  theo phương và chiều của trục  $(Ox)$ . Ta có thể nhận thấy  $\frac{dM_z}{dy} - \frac{dM_y}{dz}$  là thành phần trên trục  $(Ox)$  của vector  $\text{rot } \vec{M}$ .

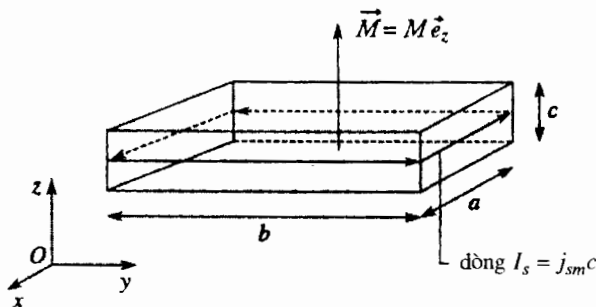
Tính toán trên có thể dễ dàng suy rộng cho trường hợp một độ từ hóa  $\vec{M} = M_x(x, y, z) \vec{e}_x + M_y(x, y, z) \vec{e}_y + M_z(x, y, z) \vec{e}_z$  bất kì và cho phép xác định một mật độ dòng điện thể tích :

$$\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M},$$

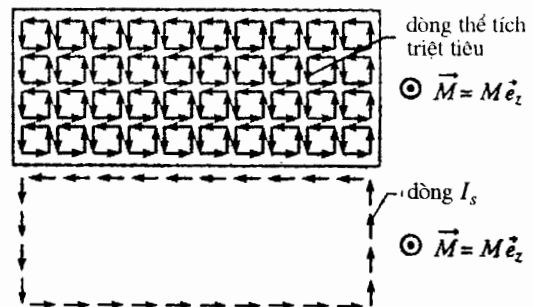
gọi là mật độ dòng điện từ hóa theo thể tích.

### ■ Trường hợp độ từ hóa đều

Trong trường hợp độ từ hóa  $\vec{M}$  là đều, thì mật độ dòng điện từ hóa theo thể tích sẽ triệt tiêu. Tuy nhiên, khi lấy lại lập luận trước, ta nhận thấy sự tồn tại của một dòng điện mật ở bề mặt của môi trường vật chất. Ví dụ, ta xét một vật liệu dạng hình hộp chữ nhật cạnh  $a, b, c$ , có độ từ hóa đều  $\vec{M} = M \vec{e}_z$  (H.28a). Tất cả các dòng điện từ hóa nguyên tố ở trong thanh vật liệu sẽ triệt tiêu nhau từng đôi một. Ngược lại, tất cả các dòng điện từ hóa nguyên tố ở bề mặt của thanh đều quay theo cùng một chiều (H.28b).



H.28a. Thanh vật liệu có độ từ hóa đều  $\vec{M} = M \vec{e}_z$ .



H.28b. Cánh nhìn từ trên xuống các dòng điện từ hóa đều  $\vec{M} = M \vec{e}_z$  trong thanh vật liệu.

Dòng điện mặt  $I_s$  này được xác định bởi  $M_{abc} = I_s ab$  và tương ứng với một mật độ dòng điện mặt :

$$J_{sm} = \frac{I_s}{c} = M.$$

Ta có thể xác minh rằng vectơ mật độ dòng điện mặt  $\vec{j}_{sm}$ , gọi là *vector mật độ dòng điện từ hóa theo diện tích*, tại một điểm có thể được viết dưới dạng  $\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{N}$  với ký hiệu  $\vec{N}$  là vectơ đơn vị đi ra khỏi thanh (tức là ra khỏi môi trường vật chất) ở điểm đang xét.

Ta thừa nhận rằng kết quả mà ta vừa thiết lập, nhờ một ví dụ rất đơn giản, là tổng quát và, ở thang vĩ mô, độ từ hóa  $\vec{M}$  của một môi trường vật chất bất kỳ sẽ tương đương với mật độ dòng điện từ hóa theo thể tích  $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$  (và tùy tình hình, ta sẽ lại thêm vào đó mật độ dòng điện từ hóa theo diện tích  $\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{N}$ ).

Hoàn toàn như các dòng phân cực, các dòng từ hóa đều là các dòng "liên kết" : chúng tương ứng với một giá trị trung bình trên một thể tích trung mô của các dòng điện vi mô, do các dịch chuyển "tại chỗ" của các hạt tích điện nguyên tố (electron, hạt nhân) cấu thành vật liệu.

Thành thử, trong một môi trường vật chất, ta có thể dùng các phương trình MAXWELL "trong chân không" (xem chương 3), với điều kiện phải kể đến mật độ dòng điện từ hóa theo thể tích  $\vec{j}_m$ .

**Khi nghiên cứu, ở thang vĩ mô, trường điện từ trong một môi trường vật chất, ta có thể thay thế độ từ hóa  $\vec{M}$  của môi trường bằng :**

- một mật độ dòng điện từ hóa theo thể tích  $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$  ;
- một mật độ dòng điện từ hóa theo diện tích  $\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{N}$  ( $\vec{N}$  là pháp tuyến định hướng ra phía ngoài của môi trường vật chất).

Trong một môi trường vật chất, ta có thể dùng các phương trình MAXWELL "trong chân không", với điều kiện phải kể đến mật độ dòng điện từ hóa theo thể tích.

► **Đề tập luyện : bài tập 2.**

## 4 Các định luật điện từ học trong môi trường vật chất \_\_\_\_\_

### 4.1. Các phương trình MAXWELL trong một môi trường vật chất

Ta xét các phương trình MAXWELL trong một môi trường vật chất, bằng cách một mặt phân biệt các mật độ điện tích tự do khối  $\rho$  và mật độ các dòng điện tự do khối  $\vec{j}$ , mặt khác phân biệt các mật độ điện tích liên kết

khối  $\rho_{pol}$  và mật độ các dòng điện liên kết, phân cực  $\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  và từ

hóa  $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$ , nghĩa là :

$$\rho_{\text{tổng}} = \rho + \rho_{\text{pol}},$$

$$\text{và } \vec{j}_{\text{tổng}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_m.$$

Ta nhận được các phương trình sau :

- phương trình MAXWELL - GAUSS (M - G) :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho - \operatorname{div} \vec{P}}{\epsilon_0}$  ;
- phương trình MAXWELL - AMPÈRE (M - A) :  

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_m + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$
 ;
- phương trình từ thông (M - Φ) :  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  ;
- phương trình MAXWELL - FARADAY (M - F) :  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  .

Ta có thể viết phương trình MAXWELL - GAUSS dưới dạng :

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho ,$$

nghĩa là, khi đưa vào vector *điện dịch*  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  , (hay kích thích điện) :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho .$$

Do đó, phương trình MAXWELL - AMPÈRE có thể viết dưới dạng :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad \text{hay} \quad \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Khi đưa vào vector *kích thích từ*  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  , ta được :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Ta không sửa đổi hai phương trình khác vì chúng không dùng đến cả điện tích lẫn dòng điện.

Việc đưa vào các vector *điện dịch*  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  , và *kích thích từ*

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  , cho phép viết các phương trình MAXWELL mà chỉ xuất

hiện các điện tích tự do  $\rho$  và các dòng điện tự do  $\vec{j}$  :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{M - F}) ;$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{M - G}) ;$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{M - Φ}) ;$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{M - A}).$$

Tính đơn giản của các phương trình trên không được che giấu tính phức tạp của các hiện tượng phân cực và từ hóa : các hệ thức liên kết  $\vec{D}$  với  $\vec{E}$  và  $\vec{H}$  với  $\vec{B}$  phụ thuộc môi trường vật chất, và thoát nhìn thì không đơn giản.

Cuối cùng, ta cần lưu ý rằng vector  $\vec{D}$  giống như vector  $\vec{P}$  biểu thị ra  $\text{C.m}^{-2}$  và vector  $\vec{H}$  biểu thị giống vector  $\vec{M}$  ra  $\text{A.m}^{-1}$  .

## 4.2. Các định lí GAUSS và AMPÈRE

Trong một môi trường vật chất, định lí GAUSS được áp dụng cho vector  $\vec{D}$ . Thật vậy, phương trình MAXWELL - GAUSS cho ta (H.29) :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D}(L, t) \cdot \vec{N}(L) dS = Q_{\text{int}}(t).$$

Thông lượng đi ra của vector  $\vec{D}$  của một phân bố điện tích, đi qua một mặt kín  $\Sigma$  thì bằng điện tích của phân bố này ở bên trong  $\Sigma$  (không được kể đến sự ước tính các điện tích phân cực  $Q_{\text{int}}$ )

Trong một môi trường vật chất, định lí GAUSS được áp dụng cho vector điện dịch  $\vec{D}$ .

Trong một môi trường vật chất, định lí AMPÈRE được áp dụng cho vector  $\vec{H}$ . Phương trình MAXWELL - AMPÈRE dẫn đến (H.30)

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}(K, t) \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{j}(L, t) \cdot \vec{N}(L) dS + \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{D}(L, t)}{\partial t} \cdot \vec{N}(L) dS.$$

Lưu thông của vector  $\vec{H}$  trên một đường cong kín  $\Gamma$  bằng tổng thông lượng, đi qua bất kì mặt  $\Sigma$  nào có định hướng dựa lên  $\Gamma$ , của các vector  $\vec{j}$

(không được kể đến các dòng điện phân cực và từ hóa) và  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Thực ra,

định lí này chỉ hầu như được dùng trong khuôn khổ của GD.C.C.D., trong

đó, vector  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  là không đáng kể và trong đó thông lượng của vector  $\vec{j}$  đi

qua  $\Sigma$  biểu diễn dòng điện ("tự do") được bao quanh bởi  $\Gamma$ .

Trong một môi trường vật chất, định lí AMPÈRE được áp dụng cho vector kích thích từ  $\vec{H}$ .

## 4.3. Các vector $\vec{E}$ , $\vec{D}$ , $\vec{B}$ và $\vec{H}$ ở mặt phân cách giữa hai môi trường

Hai môi trường vật chất (một cách điện và một dẫn điện hay cả hai đều cách điện, nhưng cũng có thể một môi trường cách điện và chân không,...) có một mặt chung  $S$  (H.31). Mặt này có thể chứa một mật độ điện mặt  $\sigma(M, t)$  các điện tích tự do và một mật độ mật  $\vec{j}_s(M, t)$  các dòng điện tự do. Các phương trình MAXWELL - FARADAY và phương trình từ thông có cùng biểu thức trong chân không và trong các môi trường vật chất, các kết quả nhận được ở chương 3, § 3.4. là không thay đổi.

Tại mọi điểm  $M$  của mặt  $S$ , có :

- sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của trường  $\vec{E}$  :  $\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2}$  ;

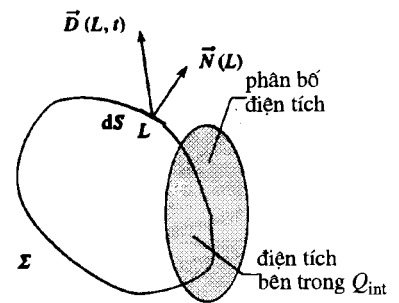
- sự liên tục của thành phần pháp tuyến của trường  $\vec{B}$  :  $\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2}$  .

Khi theo cùng một phương pháp tiến hành như đã làm ở chương 3, thì ta sẽ thu được, xuất phát từ các phương trình MAXWELL - GAUSS và MAXWELL - AMPÈRE, tại mọi điểm  $M$  của mặt  $S$  :

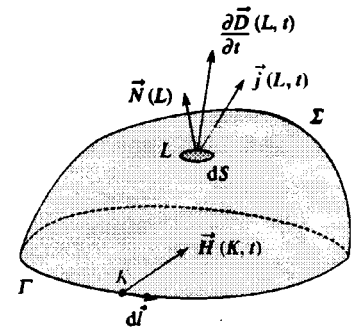
- đối với thành phần pháp tuyến của  $\vec{D}$  :  $\vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  ;

- đối với thành phần tiếp tuyến của  $\vec{H}$  :  $\vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  ;

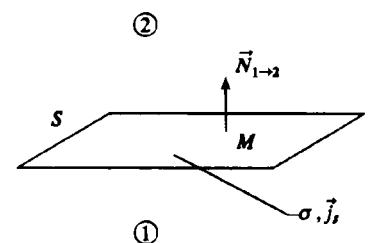
với kí hiệu  $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  là vector đơn vị pháp tuyến với mặt  $S$  ở  $M$  và được định hướng từ môi trường 1 đến môi trường 2.



H.29. Thông lượng của vector  $\vec{D}$ .



H.30. Lưu thông của vector  $\vec{H}$ .



H.31. Mặt phân cách giữa hai môi trường.

## 4.4. Vectơ POYNTING trong một môi trường vật chất

Thiết lập một sự cân bằng năng lượng điện từ trong một môi trường vật chất bao giờ cũng tỏ ra là một phép tính rất tinh tế. Thật vậy, trường điện từ tương tác với vật chất bằng cách tạo ra trong đó một độ phân cực và một độ từ hóa. Các hiện tượng này lại tạo ra một trường điện từ chồng chất lên trường ban đầu : các trường khác nhau tác động trong các phương trình MAXWELL, hiển nhiên là biểu diễn các trường tổng hợp ví mô. Duy nhất chỉ có việc nghiên cứu sâu ở thang vi mô, mới cho phép đem lại một lời giải nghiêm chỉnh cho mọi cân bằng năng lượng. Loại nghiên cứu này, tất nhiên rất phức tạp, vượt quá xa khuôn khổ của giáo trình này.

Vậy nên, ta đưa vào vectơ POYNTING, và bằng sự tương tự đơn giản, ta làm lại các tính toán của *chương 3*, § 6.2.

Trong môi trường vật chất, các phương trình MAXWELL liên kết các vectơ  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  và  $\vec{H}$  cho phép viết :

$$\operatorname{div} \vec{E} \wedge \vec{H} = -\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{E} \cdot \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \vec{H} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Rút gọn các số hạng, ta có :

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{E} \wedge \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

Ta lại tìm thấy một hệ thức, tương tự hệ thức nhận được ở *chương 3*, trong đó mỗi số hạng đều đồng nhất với một công suất trên đơn vị thể tích.

Thành thử ta định nghĩa vectơ POYNTING  $\vec{\Pi}$  trong một môi trường vật chất bằng hệ thức :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}.$$

Thông lượng của vectơ này đi qua một bề mặt, biểu diễn năng thông (công suất) điện từ đi qua bề mặt đó.

Trong một môi trường, vectơ POYNTING  $\vec{\Pi}$  là  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ .

# 5 Các môi trường tuyến tính, đồng chất và đẳng hướng (T. Đ. Đ)

## 5.1. Hằng số điện môi của một môi trường vật chất

### 5.1.1. Môi trường tuyến tính

Phân nhiều các môi trường không biểu hiện một độ phân cực cố định. Đối với các môi trường này, khi cường độ điện trường  $\vec{E}$  (có thể biến thiên theo thời gian) không quá lớn, thì sự liên kết giữa độ phân cực của môi trường và  $\vec{E}$  vẫn là tuyến tính :

- khi điện trường biến thiên nhanh, thì độ phân cực cảm ứng không bao giờ đi theo tức thời các biến thiên của trường ; các thành phần của  $\vec{E}$  và  $\vec{P}$  gắn với nhau bởi các phương trình vi phân tuyến tính ;
- khi điện trường không biến đổi quá nhanh theo thời gian, thì độ phân cực cảm ứng đi theo tức thời các biến thiên của trường, các đạo hàm đối

với thời gian chứa trong các phương trình vi phân là không đáng kể và các thành phần của  $\vec{E}$  và  $\vec{P}$  lúc đó gắn với nhau bởi các hệ thức tuyến tính dạng :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{exx} & \chi_{exy} & \chi_{exz} \\ \chi_{eyx} & \chi_{eyy} & \chi_{eyz} \\ \chi_{ezx} & \chi_{ezy} & \chi_{ezz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

nghĩa là, dưới dạng cô đọng :  $\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$ .

Chú ý :

Khi trường  $\vec{E}$  biến đổi hình sin theo thời gian, thông thường ta chấp nhận kí hiệu phức. Hệ thức ma trận giữa  $\vec{P}$  và  $\vec{E}$  nêu trên vẫn còn hiệu lực, kể cả khi các dao động của  $\vec{E}$  là nhanh : Các hệ số  $\chi_{eij}$  thoạt tiên là phức và phụ thuộc tần số của trường (Xem H-prépa, năm thứ hai, Sóng).

► **Đề tập luyện : bài tập : 3.**

Trong tất cả các phần tiếp theo của giáo trình này, ta giả thiết rằng các biến thiên của điện trường không quá nhanh để có thể dùng hệ thức thực  $\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$ .

**5.1.2. Môi trường tuyến tính, đồng chất và đẳng hướng (T.Đ.Đ)**

Môi trường là đồng chất nếu các tính chất của nó không phụ thuộc điểm  $M$  đang xét. Môi trường là đẳng hướng nếu ma trận  $[\chi_e]$  là vô hướng (không có các hướng ưu tiên).

Các tính chất điện môi của môi trường lúc đó được mô tả một cách đơn giản bởi :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (\chi_e + 1) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$\chi_e$ , được gọi là *độ cảm điện* của môi trường, là một số dương (ta đã thấy rằng độ phân cực bao giờ cũng có cùng chiều như trường), không thứ nguyên.

$\epsilon_r = \chi_e + 1$  là *hằng số điện môi tương đối* của vật liệu và  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  là hằng số điện môi của vật liệu (còn gọi là *hằng số điện môi tuyệt đối*) ;  $\epsilon_r$  là không thứ nguyên, còn  $\epsilon$  được biểu thị, giống như  $\epsilon_0$ , ra  $F.m^{-1}$ .

Các hằng số khác nhau này là các đặc trưng của môi trường và phụ thuộc nhiệt độ, áp suất (nhất là đối với các chất khí), ... Hình 32 tập hợp các giá trị  $\epsilon_r$  của một số môi trường điện môi thường dùng trong các điều kiện bình thường về nhiệt độ và áp suất. Đừng quên rằng các giá trị này chỉ thích hợp khi các biến thiên của điện trường bao quanh các vật thể này không quá nhanh.

Chú ý :

Ta đã cảnh báo rằng độ phân cực trong một môi trường dẫn điện thường là không đáng kể. Như vậy ta thường xuyên coi như có một môi trường như thế :  $\epsilon = \epsilon_0$

Trong một môi trường tuyến tính, đồng chất và đẳng hướng (T.Đ.Đ), khi điện trường không biến đổi quá nhanh theo thời gian, thì các vector  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$ , và  $\vec{D}$  liên kết với nhau bởi các hệ thức :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \text{ và } \vec{D} = \epsilon_0 (\chi_e + 1) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

môi trường	$\epsilon_r$
không khí	1,0057
nước	82
kính mắt	4 ÷ 6
mica	5
dầu hỏa	2,1

H.32. Hằng số điện môi tương đối của một số vật liệu.

# Áp dụng 5

## Điện dung của một tụ điện phẳng chứa một chất điện môi

Ta đã tính toán ở chương 2, áp dụng 3, điện dung  $C$  của một tụ điện phẳng.

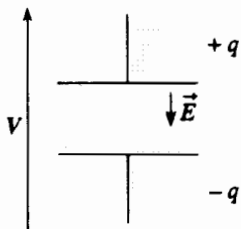
Một tụ điện phẳng được tạo thành bởi hai bản kim loại hoàn toàn dẫn điện, giống hệt nhau, phẳng và song song, có diện tích chung  $S$  và cách nhau một khoảng  $e$ .

Khi các bản, đặt trong không khí, ở các điện thế  $0$  và  $V$ , thì chúng mang riêng rẽ một điện tích  $-q$  và  $+q$  (phân bố đều trên mỗi bản) sao cho  $q = CV$  với  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ .

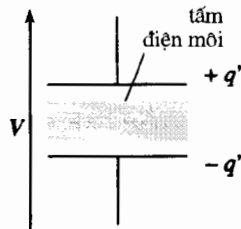
Trong một tụ điện phẳng, điện trường giả thiết là đều giữa các bản

Lúc đó, ta đặt vào giữa các bản của tụ điện, một tấm điện môi chiều dày  $d < e$ , có hằng số điện môi tương đối  $\epsilon_r$  (H.33)

Với giả thiết trường là đều trong mỗi phần, không khí - điện môi - không khí, hãy xác định giá trị mới  $C'$  của điện dung tụ điện biến đổi theo  $C$ ,  $e$ ,  $d$  và  $\epsilon_r$ .



H.33a. Tụ điện không có tấm điện môi.

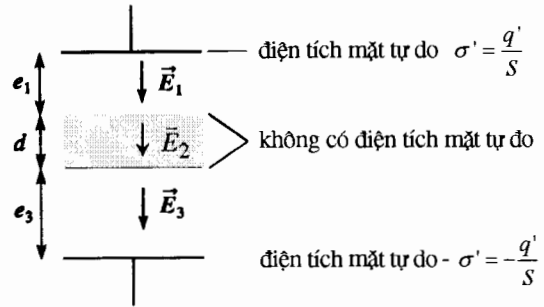


H.33b. Tụ điện với tấm điện môi.

Điện trường (vuông góc với các mặt đẳng thế của các bản) lấy các giá trị  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  (H.34) giả thiết là đều trong mỗi phần của thể tích giữa các bản.

Vì trường triệt tiêu bên trong một vật dẫn lí tưởng, nên các điều kiện áp đặt cho trường ở các mặt phân giới khác nhau cho ta :

$$\sigma' = \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 \epsilon_r E_2 = \epsilon_0 E_3.$$



H.34. Điện trường trong tụ điện.

Thành thử ta nhận thấy vectơ điện dịch là đều trong toàn bộ không gian giữa các bản :

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}_3$$

Ta hãy tính lưu thông của trường giữa hai bản :

$$V = e_1 E_1 + d E_2 + e_3 E_3.$$

Từ đó, ta suy ra :

$$V = q' \left( \frac{e_1}{\epsilon_0 S} + \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} + \frac{e_3}{\epsilon_0 S} \right) = \left( \frac{e-d}{\epsilon_0 S} + \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right),$$

của dạng  $V = \frac{q'}{C'}$ , với :

$$C' = \frac{1}{\frac{e-d}{\epsilon_0 S} + \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S}} = \frac{C}{1 - \frac{d}{e} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)}.$$

Ta có thể xác minh rằng sự có mặt của chất điện môi làm tăng trị số của điện dung vì  $C' > C$ .

Chú ý :

Ta có thể nhận thấy rằng trị số của  $C'$  tương ứng với điện dung của một lưỡng cực được cấu thành từ ba tụ điện phẳng mắc nối tiếp, vì :

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

với  $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e_1}, C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$

và  $C_3 = \frac{\epsilon_0 S}{e_3}.$



## 5.2. Độ từ thẩm của một môi trường vật chất

### 5.2.1. Các môi trường nghịch từ và thuận từ

Phần nhiều các môi trường là nghịch từ hay thuận từ. Chúng biểu lộ các tính chất từ cực kì yếu và, chỉ trừ những trường hợp rất đặc biệt, độ từ hóa cảm ứng  $\vec{M}$  mới tỉ lệ với từ trường  $\vec{B}$  (cả khi  $\vec{B}$  biến đổi nhanh theo thời gian) : các môi trường này là tuyến tính và đẳng hướng về các tính chất từ của chúng. Ta còn giả thiết chúng là đồng chất. Vì những lý do lịch sử, người ta định nghĩa *độ cảm từ*  $\chi_m$  của một môi trường như thế bởi hệ thức.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} .$$

Biết rằng  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , từ đó ta suy ra :

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} ,$$

bằng cách đặt  $\mu_r = 1 + \chi_m$ , trong đó  $\mu_r$  là *độ từ thẩm tương đối* của môi trường và  $\mu = \mu_0 \mu_r$  là *độ từ thẩm* của môi trường (hay *độ từ thẩm tuyệt đối*).

$\chi_m$  và  $\mu_r$  là không thứ nguyên và  $\mu$  (cũng như  $\mu_0$ ) được biểu thị ra  $\text{H.m}^{-1}$ .

Trái với độ cảm điện  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  có thể dương hay âm và dấu của  $\chi_m$  phân biệt các môi trường nghịch từ với các môi trường thuận từ. Nếu ta nhớ lại những điều đã nói ở § 3.2, thì ta có thể khẳng định rằng :

- các vật liệu *nghịch từ* có một độ cảm từ  $\chi_m$  âm phụ thuộc ít vào nhiệt độ ;
- các vật liệu *thuận từ* có một độ cảm từ  $\chi_m$  dương (nói chung) giảm với nhiệt độ.

Hình 35 cho các giá trị  $\chi_m$  của một số chất thường dùng trong các điều kiện thông thường về nhiệt độ và áp suất. Ta nhận thấy rằng các giá trị này thực sự là rất yếu.

Độ cảm từ  $\chi_m$  là rất yếu, nên thông thường ta viết đối với một môi trường nghịch từ hay thuận từ :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)} \approx \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} .$$

#### Chú ý :

Trong vật chất, trường tổng cộng  $\vec{B}$  là do sự chồng chất của trường được tạo ra bởi các nguồn bên ngoài môi trường (các dòng điện hay nam châm) và của trường được tạo ra bởi chính vật chất tự nó (nghĩa là bởi các lưỡng cực từ nguyên tử). Trong môi trường nghịch từ hay thuận từ, thì trường thứ hai này vẫn thường không đáng kể và ta giả thiết  $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$ .

Phần nhiều các môi trường biểu lộ các tính chất từ cực kì yếu. Nói chung, các môi trường này là tuyến tính, đồng chất và đẳng hướng (T.Đ.Đ). Trong trường hợp này, các vectơ  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$  và  $\vec{H}$  liên kết với nhau bởi các hệ thức :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\text{và } \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$\chi_m$  là âm đối với các môi trường nghịch từ và là dương đối với các môi trường thuận từ.

chất nghịch từ	
chất	$\chi_m$
dihydro	$-0,002 \cdot 10^{-6}$
diazot	$-0,006 \cdot 10^{-6}$
nước	$-9,1 \cdot 10^{-6}$
kim cương	$-21,6 \cdot 10^{-6}$
đồng	$-9,6 \cdot 10^{-6}$
chì	$-15,8 \cdot 10^{-6}$
bạc	$-23,8 \cdot 10^{-6}$
chất thuận từ	
chất	$\chi_m$
dioxy	$+ 4,8 \cdot 10^{-6}$
không khí	$+ 0,37 \cdot 10^{-6}$
natri	$+ 8,5 \cdot 10^{-6}$
nhôm	$+ 20,7 \cdot 10^{-6}$
can xi	$+ 19,5 \cdot 10^{-6}$
sắt (III) clorua $\text{FeCl}_3$	$+ 3.300 \cdot 10^{-6}$

H.35. Độ cảm từ của một số môi trường.

# Áp dụng 6

## Đo một độ cảm từ

1) Một chất lỏng nghịch từ hay thuận từ có độ cảm từ  $\chi_m$ , được nhúng trong một trường không đều  $\vec{B} = B(z) \vec{e}_x$ .

a) Khi coi một phần tử thể tích :

$$d\tau = dx dy dz$$

chất lỏng như một vòng dây nhỏ hình chữ nhật có cạnh  $dy$  và  $dz$ , và vector diện tích :

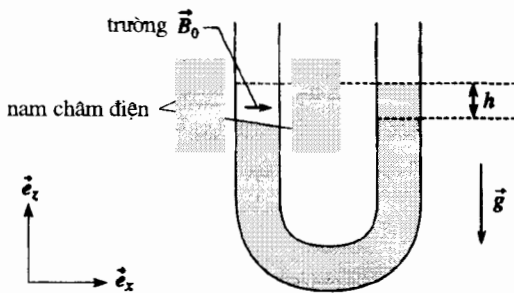
$$d\vec{S} = dydz \vec{e}_x,$$

hay xác định dòng điện  $dI$  đi qua vòng dây này.

b) Từ đó suy ra lực từ  $d\vec{F}$  tác dụng lên vòng dây này và do vậy tác dụng lên phần tử thể tích  $d\tau$  của chất lỏng.

2) Chất lỏng này có khối lượng riêng  $\rho$ , được đựng trong một ống chữ U, tiết diện  $s$  không đổi (H.36). Một trong hai nhánh của ống được đặt trong khe của một nam châm điện.

Ở mức mặt thoáng của chất lỏng có một trường nằm ngang, gần đều  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$  chi phối.



H.36. Một chất lỏng thuận từ "dâng lên" giữa hai đầu cực của nam châm điện (ống QUINCKE).

a) Hãy xác định độ chênh cao  $h$  giữa hai mặt thoáng của chất lỏng trong hai nhánh ống.

Liệu người ta có thể phân biệt được hoạt động của các chất lỏng nghịch từ và thuận từ không ?

b) Tính độ cảm từ  $\chi_m$  của một dung dịch sắt (III) clorua thuận từ mà ta đo được độ chênh cao  $h = 10\text{m}$ .

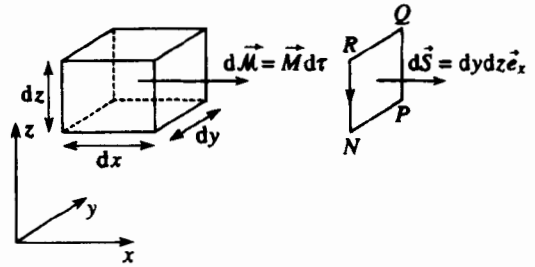
Dữ liệu :

$$g = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

$$B_0 = 1 \text{ T} ;$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} ;$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$



H.37. Một phần tử thể tích chất lỏng được coi như một dòng điện kín nhỏ.

1) a) Phần tử thể tích  $d\tau$  của chất lỏng có một mômen lưỡng cực (H.37) :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \vec{M} d\tau = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\tau$$

$$= \chi_m \frac{B(z)}{\mu_0} dx dy dz \vec{e}_z = \chi_m \frac{B(z)}{\mu_0} dx d\vec{S},$$

dưới dạng  $d\vec{\mathcal{M}} = dI d\vec{S}$ , với :

$$dI = \chi_m \frac{B(z)}{\mu_0} dx$$

b) Trên dòng điện kín nhỏ  $NPQR$  có tác dụng một lực tổng hợp :

$$d\vec{F} = dI (\overline{NP} \wedge B(z) \vec{e}_x + \overline{QR} \wedge B(z+dz) \vec{e}_x),$$

vì trường không phụ thuộc  $y$ , nên các lực tác dụng lên các cạnh  $PQ$  và  $RN$  bù trừ nhau.

Từ đó ta suy ra :

$$d\vec{F} = dI dy (-B(z) + B(z+dz)) \vec{e}_z$$

$$= dI \frac{dB}{dz} dy dz \vec{e}_z.$$

nghĩa là :

$$d\vec{F} = d\mathcal{M} \frac{dB}{dz} \vec{e}_z = \chi_m \frac{B(z)}{\mu_0} \frac{dB}{dz} dx dy dz \vec{e}_z$$

$$= \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{d(B^2)}{dz} d\tau \vec{e}_z.$$

Chú ý :

Ta cũng còn có thể dùng biểu thức về lực đã được nhắc lại ở đầu chương này, mà các thành phần là :

$$F_x = d\vec{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} ; F_y = d\vec{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} ; F_z = d\vec{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}.$$

Thành thử lực tác dụng bởi một trường  $\vec{B}$  không đều trên một lưỡng cực có mômen :

$$d\vec{M} = \vec{M} d\tau = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\tau,$$

hiển nhiên sẽ dẫn ta đến cùng một kết quả :

$$d\vec{F} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \text{grad}(B^2) d\tau.$$

2) a) Từ trường tác dụng chủ yếu lên phần chất lỏng ở gần kề các rìa khe nam châm, mà ở đó, trường là không đồng nhất, bằng cách biến thiên từ 0 ở ngoài khe đến  $B_0$  ở phần trung tâm của khe. Trong miền này, một phần tử thể tích  $d\tau = s dz$  chịu tác dụng của lực :

$$d\vec{F} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{d(B^2)}{dz} s dz \vec{e}_z = \frac{\chi_m}{2\mu_0} s d(B^2) \vec{e}_z.$$

Thành thử ta suy ra lực từ tổng cộng tác dụng lên chất lỏng :

$$\vec{F} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} s B_0^2 \vec{e}_z.$$

Như vậy một chất lỏng thuận từ sẽ dâng lên giữa các đầu của nam châm điện ( $\chi_m > 0$ ), trong khi một chất lỏng nghịch từ lại tụt xuống ( $\chi_m < 0$ ).

Khi cân bằng, lực từ được bù trừ bởi trọng lượng cột chất lỏng có chiều cao bằng độ chênh cao  $h$ , do đó :

$$\frac{\chi_m}{2\mu_0} B_0^2 = \rho h g.$$

Ta nhận được cùng một kết quả như kết quả nhận được bằng phương pháp năng lượng.

b)  $\chi_m = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Hiển nhiên là ta tìm thấy một giá trị nhỏ hơn giá trị trên hình 35, vì ta đã thử nghiệm một dung dịch sắt (III) clorua.

## 5.2.2. Trường hợp các môi trường sắt từ

Ta đã thông báo rằng các môi trường này có thể biểu lộ một độ từ hóa rất lớn khi chúng được nhúng trong một trường  $\vec{B}$  và độ từ hóa này có thể tồn tại khi trường ngoài đã bị loại bỏ. Các kim loại như sắt (thật hiển nhiên!), kền, coban, một vài hợp kim của chúng hay oxyt của chúng là các chất sắt từ.

Chú ý, Các vật liệu này không tuyến tính. Tuy nhiên, đối với một số các vật liệu này (lúc đó, chúng nhất thiết phải đẳng hướng và đồng chất) và trong một số miền của các trường, vẫn có khả năng xác định một độ từ thẩm tương đối  $\mu_r$  nhờ hệ thức  $\|\vec{B}\| = \mu_0 \mu_r \|\vec{H}\|$ .

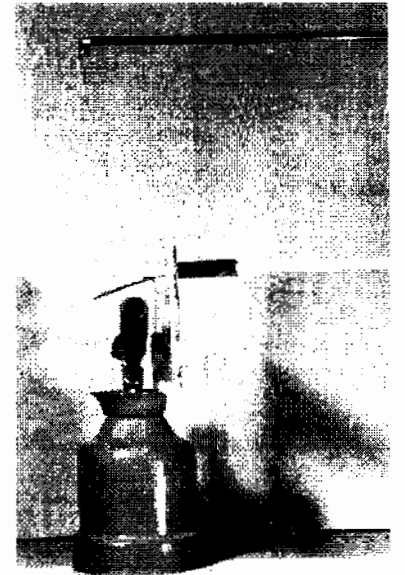
Độ từ thẩm này có thể phụ thuộc khá phức tạp vào cường độ của kích thích từ và có thể lấy những giá trị rất lớn, cỡ nhiều nghìn, mà không có các số đo thường thấy như các giá trị đo của các chất nghịch từ hay thuận từ.

Ta cũng thông báo rằng ngoài một nhiệt độ đặc trưng nào đó của vật liệu, gọi là nhiệt độ CURIE, thì vật thể sẽ mất các tính chất sắt từ của nó và trở thành thuận từ : ở thang vi mô, các tương tác rất mạnh giữa các mômen từ của các nguyên tử kề nhau, biến mất (H.38).

Các vật liệu sắt từ trở nên cần thiết. Người ta gặp chúng trong các động cơ và các máy phát điện, trong các biến thế, các loa (vì người ta mong muốn có trong đó các từ trường mạnh để tạo ra các thông lượng lớn), và cả trong các đĩa tin học, vé xe điện ngầm, v.v....

Ta sẽ trở lại sắt từ ở chương 7. Ngoài ra, cần nhớ rằng việc nghiên cứu nhiệt động hiện tượng sắt từ được thực hiện trong H-Prépa. Nhiệt động học, năm thứ hai, PC-PC\* - PSI - PSI\*.

H.38. Nguyên lí của một hệ dao động từ tích thoát. ▶



Cái đinh bằng sắt, được nung nóng bởi ngọn lửa, trở thành thuận từ và không còn bị nam châm hút nữa : nó đi ra khỏi ngọn lửa. Khi nguội đi, nó lại trở thành sắt từ và, lại bị nam châm hút : dính lại nằm trong ngọn lửa... Như vậy ta đã thực hiện được một bộ dao động tích thoát từ. Tắm cách nhiệt là cần thiết để nam châm không bị đốt nóng, nhờ đó bảo toàn được các tính chất từ của nó.

# Áp dụng 7

## Trường trong khe của một nam châm điện

1) Trên một vật liệu T.Đ.Đ, dạng hình xuyên, bán kính trung bình  $r = 10 \text{ cm}$  và độ từ thẩm tương đối  $\mu_r$ ; có quấn đều dẫn  $n = 500$  vòng dây kế nhau và có một dòng điện  $I = 0,1 \text{ A}$  (H.39) độc lập với thời gian chạy qua. Hãy xác định trường  $\vec{B}_0$  trong vật liệu ở cách trục của vòng xuyên một khoảng  $r$ .

2) Người ta cắt trong vật liệu một khe nhỏ xác định bởi góc  $\alpha$ . Giả thiết rằng sự có mặt của khe không làm nhiễu loạn dạng các đường sức (điều này càng được nghiệm đúng tốt hơn khi  $\alpha$  càng nhỏ), hãy xác định trường  $\vec{B}$  trong vật liệu cách trục hình xuyên một khoảng  $r$ .

3) a) Hãy xác định chuẩn của trường  $\vec{B}_0$  trong trường hợp hình xuyên khép kín ( $\alpha = 0$ ):

• bằng nhôm (thuận từ) :

$$\mu_r = 1,00002;$$

• được cấu thành bởi một hợp kim sắt - silic (sắt từ) :

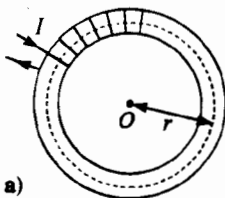
$$\mu_r = 5000$$

b) Xác định về trị số, chuẩn của trường  $\vec{B}$  trong trường hợp một vòng xuyên với khe góc  $\alpha = 5^\circ$ , bằng nhôm, rồi bằng sắt - silic. So sánh các chuẩn của các trường  $\vec{B}_0$  và  $\vec{B}$ .

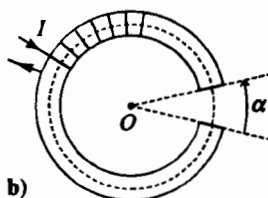
1) Các đường sức đều hình tròn. Khi áp dụng định lí AMPÈRE cho vectơ kích thích  $\vec{H}_0 = H_0(r) \vec{e}_\theta$ , với  $\vec{e}_\theta$  là vectơ đơn vị trục xuyên tâm trên một vòng tròn bán kính  $r$ , thì ta được :

$$2\pi r H_0 = I_{\text{bị bao}} = nI, \text{ do đó } \vec{H}_0 = \frac{nI}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

$$\text{rồi } \vec{B}_0 = \mu_0 \mu_r \vec{H}_0 = \mu_0 \mu_r \frac{nI}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$



a)



b)

H.39a. Mạch hình xuyên không có khe.

b. Mạch hình xuyên có khe.

2) Ta giả thiết các các đường sức vẫn hình tròn. Ở ngang mức khe, trường  $\vec{B}$  vuông góc với các mặt phân giới không khí - vật liệu và như vậy, trường là liên tục (trường  $\vec{B}$  có cùng giá trị trong vật liệu cấu thành hình xuyên và trong khe). Do đó, kích thích  $\vec{H}$  là không liên tục và có các trị số :

• trong khe :  $\vec{H}_{\text{khe}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{B(r)}{\mu_0} \vec{e}_\theta;$

• trong vật liệu :  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B(r)}{\mu_0 \mu_r} \vec{e}_\theta.$

Định lí AMPÈRE trên vòng tròn bán kính  $r$  bây giờ cho ta :

$$(2\pi - \alpha)r H + \alpha r H_{\text{khe}} = nI.$$

do đó, ta rút ra :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \frac{nI}{2\pi r} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2\pi}(\mu_r - 1)} \vec{e}_\theta.$$

3) a) Vòng xuyên không khe :  $B_0 = \mu_0 \mu_r \frac{nI}{2\pi r};$

• nhôm :  $B_0 \approx \mu_0 \frac{nI}{2\pi r} = 0,1 \text{ mT};$

• sắt-silic :  $B_0 = 500 \text{ mT}.$

Trong nhôm thuận từ ( $\mu_r \approx 1$ ) hay trong không khí, từ trường có cùng một giá trị như nhau. Trái lại, trường mạnh hơn nhiều trong một vòng xuyên sắt từ ( $\mu_r = 5000$ )

b) Vòng xuyên có khe :

• nhôm :  $B \approx \mu_0 \frac{nI}{2\pi r} = 0,1 \text{ mT};$

• sắt - silic :  $B \approx \mu_0 \frac{nI}{\pi \alpha} = 7 \text{ mT}.$

Sự có mặt của khe hầu như không làm thay đổi giá trị của từ trường trong trường hợp một vòng xuyên bằng nhôm, nhưng làm giảm đáng kể giá trị của trường này trong trường hợp một vòng xuyên bằng sắt - silic.

• đối với nhôm :  $\frac{B}{B_0} \approx 1;$

• đối với sắt - silic :

$$\frac{B}{B_0} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2\pi}(\mu_r - 1)} = \frac{2\pi}{\mu_r \alpha} = 0,014.$$

► Để tập luyện : Bài tập 1.

# ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

## ■ ĐỘ PHÂN CỰC CỦA MỘT MÔI TRƯỜNG

Khi được nhúng trong một điện trường, thì một môi trường vật chất sẽ phân cực : mỗi thể tích trung mô  $d\tau$  của vật chất sẽ thu được một mômen lưỡng cực điện  $d\vec{p}$  cảm ứng bởi trường, đặc trưng bởi một mômen lưỡng cực trên đơn vị thể tích  $\vec{P}$  gọi là *vector phân cực*, và được xác định bởi  $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$ .

Một số các tinh thể có thể biểu lộ một độ phân cực cố định.

Khi nghiên cứu, ở thang vĩ mô, trường điện từ trong một môi trường vật chất, ta có thể thay thế độ phân cực  $\vec{P}$  của môi trường bởi các phân bố sau đây trong chân không :

- một mật độ thể tích các điện tích phân cực  $\rho_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P}$  ;
- một mật độ mặt các điện tích phân cực  $\vec{\sigma}_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{N}$  ( $\vec{N}$  là pháp tuyến định hướng ra phía ngoài của môi trường vật chất) ;
- một mật độ thể tích của dòng phân cực  $\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  ở chế độ biến thiên.

## ■ ĐỘ TỪ HÓA CỦA MỘT MÔI TRƯỜNG

Khi được nhúng trong một từ trường, thì một môi trường sẽ bị từ hóa, mỗi thể tích trung mô  $d\tau$  của vật chất sẽ có được một mômen lưỡng cực từ  $d\vec{\mathcal{M}}$  cảm ứng bởi trường, đặc trưng bởi một mômen lưỡng cực trên đơn vị thể tích  $\vec{M}$  gọi là *vector từ hóa* và được xác định bởi  $d\vec{\mathcal{M}} = \vec{M} d\tau$ .

Một số các môi trường, gọi là môi trường *sắt từ*, có thể biểu lộ một độ từ hóa cố định.

Khi nghiên cứu, ở thang vĩ mô trường điện từ trong một môi trường vật chất, ta có thể thay thế độ từ hóa  $\vec{M}$  của môi trường bằng các phân bố sau đây trong chân không

- một mật độ thể tích của dòng từ hóa  $\vec{j}_{\text{m}} = \text{rot } \vec{M}$  ;
- một mật độ mặt của dòng từ hóa  $\vec{j}_{\text{sm}} = \vec{M} \wedge \vec{N}$  ( $\vec{N}$  là pháp tuyến định hướng ra phía ngoài của môi trường vật chất)

## ■ CÁC PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

Trong một môi trường vật chất, ta có thể dùng các phương trình MAXWELL "trong chân không", với điều kiện phải kể đến các mật độ thể tích của các điện tích phân cực, các dòng điện phân cực và từ hóa.

Việc đưa vào các vector *điện dịch*  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , và *kích thích từ*  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ , cho phép viết các

phương trình MAXWELL mà chỉ xuất hiện các điện tích tự do và các dòng điện tự do :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{M - F}) ;$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{M - G}) ;$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{M - } \Phi) ;$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{M - A}).$$

Trong một môi trường vật chất :

- định lý GAUSS được áp dụng cho vectơ điện dịch  $\vec{D}$  ;
- định lý AMPÈRE được áp dụng cho vectơ kích thích từ  $\vec{H}$  .

Ở mặt phân cách S giữa hai môi trường 1 và 2 có ;

- sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của trường  $\vec{E}$  :  $\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2}$  ;
- sự liên tục của thành phần pháp tuyến của trường  $\vec{B}$  :  $\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2}$  .

Nếu ký hiệu  $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  là vectơ đơn vị pháp tuyến với S, định hướng từ môi trường 1 sang môi trường 2, thì thành phần pháp tuyến của  $\vec{D}$  và thành phần tiếp tuyến của  $\vec{H}$  sẽ nghiệm đúng riêng rẽ các hệ thức sau :

$$\vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma \vec{N}_{1 \rightarrow 2} ,$$

$$\text{và } \vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2} .$$

Trong một môi trường, vectơ POYNTING  $\vec{\Pi}$  là  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  .

### ■ CÁC MÔI TRƯỜNG T.Đ.Đ.

Phần nhiều các môi trường biểu lộ các tính chất từ cực kỳ yếu và là tuyến tính, đồng chất và đẳng hướng. Khi điện trường không biến đổi quá nhanh theo thời gian, thì các vectơ  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  và  $\vec{D}$  liên hệ với nhau theo :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \text{ và } \vec{D} = \epsilon_0 (\chi_e + 1) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} .$$

Các vectơ  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$  và  $\vec{H}$  gắn với nhau bởi :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \text{ và } \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} .$$

Môi trường là *ngịch từ* nếu  $\chi_m < 0$  và là *thuận từ* nếu  $\chi_m > 0$

### ■ CÁC MÔI TRƯỜNG SẮT TỪ

Các môi trường này có thể biểu lộ một độ từ hóa rất lớn khi chúng được nhúng trong một trường  $\vec{B}$  và độ từ hóa này có thể vẫn tồn tại khi trường ngoài đã bị loại bỏ.

# BÀI TẬP

## ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

### 1 Khúc xạ của các đường sức

Một mặt phẳng phân cách hai môi trường điện môi tuyến tính đồng chất và đẳng hướng, có hằng số điện môi tương đối  $\epsilon_{r_1}$  và  $\epsilon_{r_2}$  và độ từ thẩm tương đối  $\mu_{r_1}$  và  $\mu_{r_2}$ .

1) Xét một đường sức của điện trường. Hãy xác định hệ thức giữa các góc  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  mà đường sức hợp với pháp tuyến của mặt phân cách riêng rẽ trong môi trường 1 và môi trường 2.

2) Xét một đường sức của từ trường. Hãy xác định hệ thức giữa các góc  $\beta_1$  và  $\beta_2$  mà đường sức hợp với pháp tuyến của mặt phân cách riêng rẽ trong môi trường 1 và môi trường 2.

Khi giả thiết môi trường 1 là không khí ( $\mu_{r_1} \approx 1$ ) người ta bàn luận về hai trường hợp đặc biệt mà môi trường 2 là :

- a) một môi trường nghịch từ hay thuận từ; ( $\mu_{r_2} \approx 1$ );
- b) một môi trường sắt từ mà đối với nó, có khả năng xác định một độ từ thẩm tương đối  $\mu_{r_2}$  lúc đó có thể lấy các giá trị rất lớn (cỡ vài nghìn, điển hình là 5000)

### 2 Thanh hình trụ được từ hóa đều

Một thanh hình trụ chiều dài rất lớn, biểu lộ một độ từ hóa  $\vec{M}$  đều, song song với trục của nó.

Hãy xác định từ trường  $\vec{B}$  được tạo ra tại mọi điểm bởi thanh này.

### 3 Điện môi có hằng số điện môi phức

Một bản điện môi T.Đ.Đ được nhúng trong một điện trường  $\vec{E}_0$ , độc lập với thời gian, biểu lộ một độ phân cực cảm ứng :

$$\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0,$$

và một hằng số điện môi tương đối :

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e.$$

Khi bản được nhúng trong một điện trường hình sin, xung động  $\omega$ , thì độ phân cực cảm ứng trong bản không biến đổi tức thời theo các biến thiên của

trường và do đó tồn tại một độ lệch pha  $\phi$  giữa trường  $\vec{E}$  và độ phân cực  $\vec{P}$  :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t \text{ và } \vec{P} = \vec{P}_0 \cos(\omega t - \phi),$$

với  $\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0$ .

1) Chứng minh rằng, trong ký hiệu phức,  $\vec{E}$  và  $\vec{D}$  gắn với nhau bởi  $\vec{D} = \epsilon_0 \underline{\epsilon}_r \vec{E}$ .

Đặt  $\underline{\epsilon}_r = \epsilon_1 - j\epsilon_2 = \epsilon_r e^{-j\delta}$ .

Biểu thị  $\epsilon_1$  và  $\epsilon_2$ , rồi  $\tan \delta$  theo  $\chi_e$  và  $\phi$ .

2) Một tụ điện phẳng chứa bản điện môi trên, được cung cấp một hiệu điện thế hình sin,  $V = V_0 \cos \omega t$ . Điện dung của tụ điện, theo kí hiệu phức, là  $\underline{C} = \epsilon_r C_0$ , với  $C_0$  là thực.

a) Tính công suất trung bình  $\mathcal{P}_m$  tiêu tán trong tụ điện này theo  $V_0$ ,  $C_0$ ,  $\epsilon_r$  và  $\delta$ .

b) Chứng minh rằng trở kháng phức của tụ điện có thể được giải thích như trở kháng của một tụ điện có điện dung thực  $C_r$  và một điện trở  $R$  mắc song song mà ta sẽ xác định.

Hãy tìm lại biểu thức của công suất trung bình  $\mathcal{P}_m$  ở câu 2) a)

c) Hãy ước tính sự tăng nhiệt độ  $\Delta\theta$  của chất điện môi sau một thời gian hoạt động  $\Delta t$ , nếu giả thiết toàn bộ công suất điện đều bị chất điện môi hấp thụ.

Dữ liệu:  $C_0 = 1 \text{ nF}$ ;  $\epsilon_r = 10$ ;  $\tan \delta = 1$ ;  $\omega = 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ ;  $V_0 = 50 \text{ V}$ ;  $\Delta t = 5 \text{ phút}$ ; nhiệt dung của chất điện môi:  $\Gamma = 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

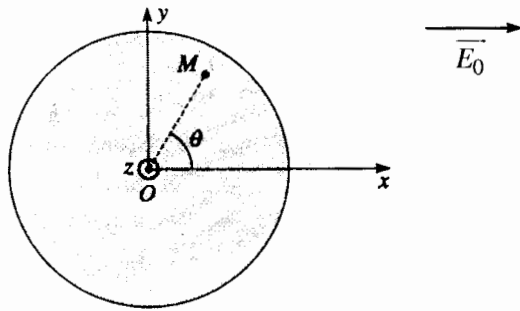
## VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

### 4 Nghiên cứu so sánh một môi trường điện môi và một môi trường dẫn điện

Một hình trụ rất dài, trục ( $Oz$ ) bán kính  $R$ , cô lập, lúc đầu trung hòa và đặt trong chân không, chịu tác dụng của một trường tĩnh điện đều  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$  cộng tuyến với trục ( $Ox$ ).

Trong tọa độ trụ ( $r, \theta, z$ ), laplacien của một hàm vô hướng  $f(M) = f(r, \theta, z)$  có biểu thức :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



1) Hình trụ là một chất điện môi tuyến tính, đồng chất, đẳng hướng có hằng số điện môi tương đối  $\epsilon_r$ .

a) Hãy thiết lập phương trình được nghiệm đúng bởi thế tĩnh điện  $V$  trong toàn không gian.

b) Người ta tìm các nghiệm dưới dạng :

$$V(r, \theta) = F(r) G(\theta)$$

$F(r)$  và  $G(\theta)$  là các hàm thực của các biến  $r$  đối với  $F$  và  $\theta$  đối với  $G$ .

Chứng minh rằng  $G(\theta)$  là nghiệm của phương trình :

$$\frac{d^2 G}{d\theta^2} \pm A^2 G = 0,$$

trong đó  $A$  là một hằng số thực dương.

c) Dùng các sự đối xứng của bài toán, chứng minh rằng  $G(\theta) = \cos\theta$  sai kém một hằng số nhân.

d) Khi thử các nghiệm  $F(r) = a_n r^n$ , với  $n$  là số nguyên và  $a_n$  là hằng số, chứng minh rằng

$$F(r) = \left( ar + \frac{b}{r} \right)$$

$a$  và  $b$  là hai hằng số.

e) Chú ý rằng, thế trong hình trụ khác với thế trong chân không và dùng các điều kiện khác nhau ở các giới hạn, hãy xác định thế trong toàn không gian, hoàn toàn phụ thuộc vào  $r, \theta, E_0, R$  và  $\epsilon_r$ .

f) Từ đó suy ra trường tĩnh điện và độ phân cực trong chất điện môi.

g) Hãy tính mật độ thế tích và mật độ mặt của các điện tích phân cực của chất điện môi.

2) Hình trụ bây giờ là vật dẫn điện không biểu hiện một độ phân cực cố định.

a) Các điện tích tự do của một vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện, không dịch chuyển ở thang vĩ mô được sử dụng trong nghiên cứu này (theo định nghĩa).

Từ đó suy ra rằng, trong một vật dẫn ở cân bằng, thì điện trường và mật độ điện tích theo thể tích đều nhất thiết triệt tiêu ở mọi điểm.

Do đó, một vật dẫn ở cân bằng chỉ có thể có một sự phân bố các điện tích theo bề mặt.

b) Cũng theo phương pháp lập luận tương tự phương pháp trong câu 1), hãy tính điện thế trong toàn không gian.

c) Từ đó suy ra mật độ điện mặt trên vật dẫn. Người ta có thể xác minh được điều gì ?

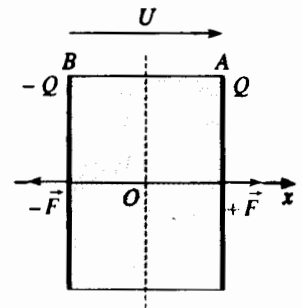
## 5 \*Tấm thạch anh áp điện

Một tấm thạch anh có hằng số điện môi tương đối  $\epsilon_r$ , tiết diện không đổi  $S$ , chiều dày  $d$ , trục ( $Ox$ ) mà hai mặt song song đều mạ phun kim loại, tạo thành một tụ điện phẳng có điện dung  $C_0$ . Mặt  $A$  đặt ở  $x = \frac{d}{2}$  và mặt  $B$  ở  $x = -\frac{d}{2}$ .

1) Khi tấm thạch anh chịu một hiệu điện thế không đổi  $U = U_{AB}$ , thì mặt  $A$  mang điện tích  $Q_0$  và mặt  $B$  mang điện tích  $-Q_0$  được phân bố đều.

a) Giả thiết điện trường  $\vec{E}$  là đều trong tấm thạch anh, hãy tìm biểu thức của nó.

b) Từ đó suy ra biểu thức của điện dung  $C_0$ .



2) Ta nhận thấy rằng việc áp đặt đồng thời một lực không đổi  $\vec{F} = F \vec{e}_x$  do mật độ điện mặt đều trên bản  $A$  và một lực không đổi  $-\vec{F}$  do mật độ điện mặt đều trên bản  $B$ , làm cho chiều dày của hệ này từ  $d$  chuyển sang  $d + 2y$  và gây ra một độ phân cực đều bổ sung

$\vec{P}_s$  sao cho  $\vec{P}_s = \frac{\alpha}{S} \vec{F}$  (với  $\alpha$  không đổi) : đó là hiệu ứng áp điện.

a) Biết rằng  $F$  và  $y$  liên hệ với nhau bởi  $F = K S y$ , trong đó hằng số  $K$  đặc trưng cho tính đàn hồi của thạch anh, chứng minh rằng điện tích  $Q$  của bản  $A$  và điện áp  $U$  nghiệm đúng  $U = \frac{Q}{C_0} + \beta y$ .

b) Tính  $\alpha$

$$\text{Áp dụng số: } \beta = 9,2 \cdot 10^9 \text{ V.m}^{-1}; \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1};$$

$$\epsilon_r = 4,5; K = 5,8 \cdot 10^{13} \text{ N.m}^{-1}; d = 2,75 \text{ mm.}$$



3) Tương ứng với tính áp điện thuận mô tả ở trên, có một hiện tượng ngược. Việc áp đặt một điện tích  $Q$  lên bản A và điện tích  $-Q$  lên bản B kéo theo sự xuất hiện một lực  $\vec{F}$ . Lúc đó, ta có thể đặt, đối với các biến dạng nhỏ :

$$F = k'y + \beta'Q \text{ với } k' = KS \text{ và } \beta' \text{ không đổi.}$$

a) Hãy biểu thị công nguyên tố mà thạch anh nhận được khi điện tích của bản A biến đổi một lượng  $dQ$  dưới điện áp  $U$  không đổi và chiều dày của thạch anh biến đổi một lượng  $2dy$ .

b) Hãy biểu thị vi phân của hàm năng lượng tự do của thạch anh.

Từ đó rút ra hệ thức giữa  $\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_{y,T}$  và  $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{Q,T}$

trong đó  $T$  chỉ nhiệt độ.

c) Biểu thị hệ thức gắn  $\beta'$  với hằng số  $\beta$  được xác định ở câu 2) a).

4) Thạch anh được mắc vào một mạch điện ở chế độ hình sin không đổi. Điện áp ở các cực của thạch anh  $u_{AB}(t)$  có dạng :

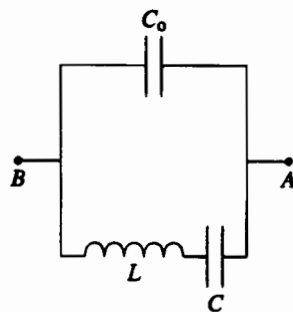
$$u_{AB}(t) = u(t) = U_m \sin \omega t .$$

Hiện tượng toàn bộ có thể được sơ đồ hóa, khi không có tác dụng cơ học từ bên ngoài, nhờ các phương trình sau, trong đó  $m$  chỉ một khối lượng đặc trưng kết hợp với tinh thể thạch anh,  $q$  là điện tích của bản A và  $y$  là độ dịch chuyển của bản đó :

$$u(t) = \frac{q}{C_0} + \beta y \text{ và } m \frac{d^2 y}{dt^2} + k'y + \beta'q = 0 .$$

Chúng minh rằng trở kháng phức  $Z$  của thạch anh tương đương với trở kháng của mạch điện về bên và tính các giá trị của  $C$  và  $L$  theo :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}}, m, \beta \text{ và } C_0$$



## LỜI GIẢI

1) Hiển nhiên là người ta giả thiết các môi trường không chứa bất kì một điện tích (tự do) nào

1) Trên mặt phân cách có :

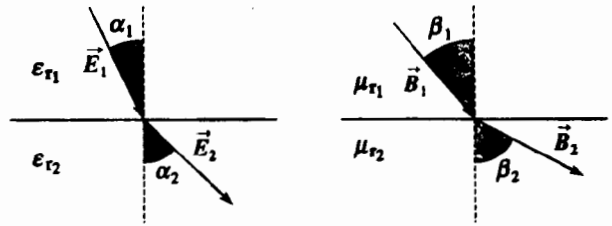
- sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của  $\vec{E}$  ;
- sự liên tục của thành phần pháp tuyến của  $\vec{D}$ , với  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  trong từng môi trường.

Thành thử, đường sức vẫn ở trong cùng một mặt phẳng khi đi qua mặt phân cách (trong mặt phẳng chứa pháp tuyến với mặt phân cách) và trong mặt phẳng này, ta có thể viết :

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2 \text{ và } \epsilon_{r1} E_1 \cos \alpha_1 = \epsilon_{r2} E_2 \cos \alpha_2 ,$$

do đó :

$$\epsilon_{r1} \cotan \alpha_1 = \epsilon_{r2} \cotan \alpha_2$$



2) Cũng như thế, ta có :

- sự liên tục của thành phần pháp tuyến của  $\vec{B}$  ;
- sự liên tục của thành phần tiếp tuyến của  $\vec{H}$ , với  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$  trong từng môi trường

Do đó, đường sức cũng vẫn ở trong cùng một mặt phẳng khi đi qua mặt phân cách (trong mặt phẳng chứa pháp tuyến với mặt đó) và trong mặt phẳng này, ta có :

$$\frac{1}{\mu_{r1}} B_1 \sin \beta_1 = \frac{1}{\mu_{r2}} B_2 \sin \beta_2 \text{ và } B_1 \cos \beta_1 = B_2 \cos \beta_2 ,$$

do đó :

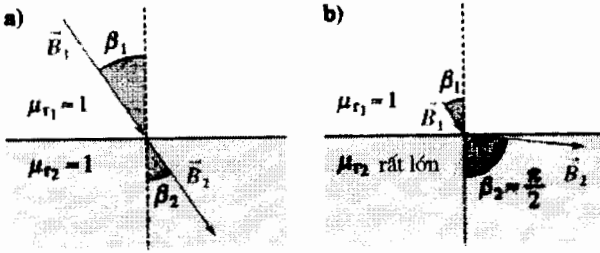
$$\mu_{r1} \cotan \beta_1 = \mu_{r2} \cotan \beta_2$$

a) Đối với các vật liệu nghịch từ hay thuận từ,  $\mu_{r1}$  và  $\mu_{r2}$  đều gần bằng đơn vị. Đường sức đi qua mặt phân cách vẫn hầu như bảo toàn cùng một hướng : đó là trường hợp của một vật nghịch từ hay thuận từ tiếp xúc với không khí.

b) Khi một thanh sắt từ (môi trường 2,  $\mu_{r2}$  rất lớn) được nhúng vào không khí (môi trường 1,  $\mu_{r1} \approx 1$ ),  $\tan \beta_2 \approx \mu_{r2} \tan \beta_1$ . Do đó, trừ trường hợp trong đó  $\beta_1$  tuyệt đối triệt tiêu (trường  $\vec{B}_1$  lúc đó pháp tuyến với mặt phân giới không khí - thanh),  $\beta_2$  gần kề  $\frac{\pi}{2}$  và các đường sức trong thanh gần như tiếp tuyến với thành của thanh. Ngoài ra, các điều kiện ở mặt phân giới dẫn đến tại đây  $B_2 \approx \mu_{r2} B_1 \sin \beta_1$ . Điều này chỉ rõ rằng từ trường trong thanh có cường độ lớn hơn rất nhiều so với trong không khí.

Chú ý : Các tính chất này, có hiệu lực đối với mọi thanh sắt từ, sẽ được nhắc lại ở chương 7.

Một thanh sắt từ sẽ hướng dẫn (hay dồn về một hướng) các đường sức của từ trường và thực tế cấu thành một ống trường đối với từ trường. Vả lại, từ trường trong thanh rất mạnh.



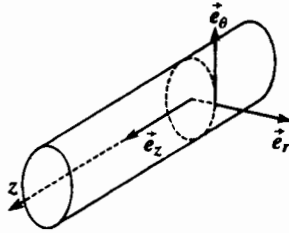
Trên đây người ta đã sơ đồ hóa các trường hợp tiếp xúc :

- a) không khí - chất nghịch hay thuận từ ;      b) không khí - chất sắt từ.

Việc nghiên cứu trường có thể được tiến hành bằng cách thay thế độ từ hóa  $\vec{M}$  bằng các dòng điện từ hóa mà các mật độ thể tích  $\vec{j}_{sm}$  và mật độ mặt  $\vec{j}_{sm}$  ở đây lần lượt là :

- $\vec{j}_{in} = \text{rot } \vec{M} = \vec{0}$ ,
- $\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{N} = \vec{M} \wedge \vec{e}_r = M \vec{e}_\theta$ ,

với ký hiệu  $\vec{e}_r$  và  $\vec{e}_\theta$  là các vector xuyên tâm và trục xuyên tâm trên mặt bên của thanh.



Thành thử ta nhận thấy rằng thanh tương đương với một ống dây "vô hạn" có một dòng điện mặt với mật độ  $\vec{j}_{sm} = j_{sm} \vec{e}_\theta = M \vec{e}_\theta$  chạy qua.

- Từ trường trong  $\vec{B}_{int}$  cộng tuyến với trục của thanh :

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 j_{sm} \vec{e}_z = \mu_0 M \vec{e}_z = \mu_0 \vec{M}.$$

- Từ trường ngoài  $\vec{B}_{ext}$  bằng không .

Kích thích từ  $\vec{H}$  bằng không khắp mọi nơi, kể cả ở trong thanh.

### 3) Theo ký hiệu phức

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (\epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}_0 e^{-j\phi}) e^{j\omega t} = \epsilon_0 (1 + \chi_e e^{-j\phi}) \vec{E}_0 e^{j\omega t}.$$

Do đó  $\epsilon_1 = 1 + \chi_e \cos \phi$ ,  $\epsilon_2 = \chi_e \sin \phi$  và  $\tan \delta = \frac{\chi_e \sin \phi}{1 + \chi_e \cos \phi}$ .

a) Theo ký hiệu phức, thì công suất trung bình tiêu tán, trong một lưỡng cực được nuôi bởi một điện áp  $\underline{V} = V_0 e^{j\omega t}$  và có một dòng điện  $\underline{I} = I_0 e^{j\omega t}$  chạy qua, có dạng :

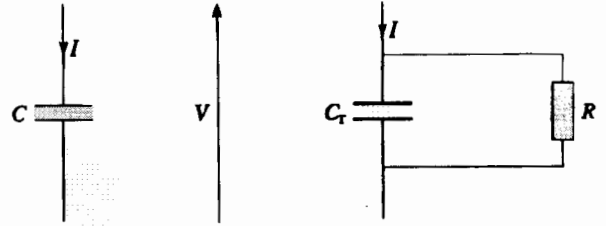
$$\mathcal{P}_m = \mathcal{R}e \left( \frac{1}{2} \underline{V} \underline{I}^* \right) = \mathcal{R}e \left( \frac{V}{2} \frac{V^*}{Z} \right).$$

Đối với tụ điện có độ dẫn nạp phức  $\frac{1}{Z} = j \underline{C} \omega = j \epsilon_r C_0 \omega e^{-j\delta}$ , thì ta được :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 V_0^2 \omega \sin \delta.$$

b) Ta có :  $\frac{1}{Z} = j \underline{C} \omega = j \epsilon_r C_0 \omega (\cos \delta - j \sin \delta) = j C_r \omega + \frac{1}{R}$ ,

với  $C_r = \epsilon_r C_0 \cos \delta$  và  $R = \frac{1}{\epsilon_r C_0 \omega \sin \delta}$ .



Cho sơ đồ điện tương đương trên đây. Tụ điện  $C_r$  không tiêu thụ bất kỳ một công suất nào (điện áp và cường độ dòng điện ở đó lệch pha  $\frac{\pi}{2}$ ). Điện trở  $R$  tiêu thụ một công suất trung bình  $\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}$  và ta lại tìm thấy đúng giá trị công suất  $\mathcal{P}_m$  của câu 2) a).

c) Nếu toàn bộ công suất điện được tiêu tán trong chất điện môi, thì ta có :

$$\mathcal{P}_m \Delta t = \Gamma \Delta \theta, \text{ do đó } \Delta \theta = 53^\circ \text{C}$$

Tính chất này của các điện môi được dùng trong công nghiệp để làm nóng một số môi trường cách điện (ở tần số cao); đó cũng là nguyên lý hoạt động của các lò vi-sóng.

## 4) 1) Hình trụ điện môi

a) Trong chân không và trong chất điện môi tuyến tính (không có các điện tích tự do), các phương trình tĩnh điện được viết theo cùng cách thức như nhau, nhưng dùng các hằng số điện môi  $\epsilon_0$  đối với chân không và  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  đối với điện môi :

- trong chân không,  $\text{div } \epsilon_0 \vec{E} = 0$  và  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , từ đó  $\Delta V = 0$ ;

- trong chất điện môi,  $\text{div } \epsilon_r \vec{E} = 0$  và  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , do đó  $\Delta V = 0$ .

b) Phương trình  $\Delta V = \Delta (FG) = 0$  dẫn tới :

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\theta^2} = -\frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right).$$

Số hạng thứ hai là hàm của  $r$  và số hạng thứ nhất là hàm của  $\theta$  độc lập với  $r$ , từ đó ta suy ra rằng hai số hạng chỉ có thể bằng nhau nếu chúng bằng một hằng số, do đó :

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\theta^2} = \pm A^2 \quad \text{và} \quad \frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) = -(\pm A^2).$$

c) Ta xét phương trình về  $G$ , mà không cần giữ lại dấu + đối với phương trình này, vì dấu này dẫn tới một nghiệm dạng hàm mũ có khả năng phân kỳ, điều không có bất kỳ một ý nghĩa nào.

Dấu trừ áp đặt một nghiệm dạng  $G = C_1 \cos A\theta + C_2 \sin A\theta$ . Biết rằng nghiệm tìm được phải nhất thiết là tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  và chẵn của  $\theta$ , từ đó suy ra phải lấy  $C_2 = 0$  và  $A$  nguyên. Ta chọn  $A = 1$ , điều này không làm thay đổi gì tính tổng quát của nghiệm này. Vả lại, ta có thể chọn  $C_1 = 1$  vì, như ta sẽ thấy điều đó ở câu hỏi sau,  $F(r)$  cũng còn phụ thuộc các hằng số nhân.

d) Khi đưa  $F = a_n r^n$  vào phương trình  $\frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) = -1$ ,

thì ta được  $n^2 = 1$ , do đó  $n = \pm 1$  và  $F(r)$  có biểu thức :

$$F(r) = \left( ar + \frac{b}{r} \right).$$

Cuối cùng, điện thế có dạng :

$$V(r, \theta) = \left( ar + \frac{b}{r} \right) \cos \theta,$$

và điện trường có dạng :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V = \left( -a + \frac{b}{r^2} \right) \cos \theta \vec{e}_r + \left( a + \frac{b}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

e) Các hằng số  $a$  và  $b$  dĩ nhiên sẽ lấy các giá trị khác nhau trong chân không và trong hình trụ. Người ta kí hiệu chúng là  $a_v$  và  $b_v$  trong chân không và  $a_c$ ,  $b_c$  trong hình trụ. Người ta sẽ xác định các hằng số này khi xét các điều kiện khác nhau ở các giới hạn.

• Trong chân không, khi  $r$  trở nên rất lớn, điện trường phải đồng nhất với :

$$\vec{E}_0 = E_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta), \text{ do đó } a_v = -E_0.$$

• Điện thế không thể phân kì trong hình trụ khi  $r$  trở nên quá nhỏ, do đó :  $b_c = 0$ .

**Đối với  $r = R$  (và với  $\theta$  bất kì)**

• Thành phần tiếp tuyến của điện trường là liên tục, do đó :

$$a_c = \left( -E_0 + \frac{b_v}{R^2} \right), \text{ và ta có thể xác minh rằng sự liên tục của}$$

điện thế ở  $r = R$  áp đặt cùng một điều kiện như nhau :

• Thành phần pháp tuyến của điện dịch là liên tục (chắc chắn là không có bất kỳ một điện tích tự do nào trên hình trụ), do đó

$$-\varepsilon_r a_c = \left( E_0 + \frac{b_v}{R^2} \right).$$

Cả hai hệ thức sau cùng này dẫn đến :

$$b_v = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} E_0 R^2 \text{ và } a_c = -\frac{2}{\varepsilon_r + 1} E_0.$$

Như vậy, điện thế có biểu thức :

• trong hình trụ :  $V_c(r, \theta) = -\frac{2}{\varepsilon_r + 1} E_0 r \cos \theta ;$

• trong chân không :  $V_v(r, \theta) = \left( -r + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{R^2}{r} \right) E_0 \cos \theta.$

f) Trong hình trụ điện môi, ta nhận thấy rằng điện trường  $\vec{E}_c$ , và do đó, độ phân cực  $\vec{P}$  là đều :

$$\vec{E}_c = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) E_0 = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} \vec{E}_0$$

và  $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}_c = 2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \vec{E}_0.$

g) Các mật độ điện tích phân cực được xác định bởi :

• mật độ thể tích  $\rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P} = 0 ;$

• mật độ mặt  $\rho_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{N} = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = 2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} E_0 \cos \theta.$

## 2) Hình trụ dẫn điện

a) Nếu điện trường không triệt tiêu trong vật dẫn, thì nó sẽ tác dụng lên các điện tích tự do một lực điện có khuynh hướng làm chúng dịch chuyển. Tuy nhiên, các điện tích tự do lại đứng yên trong vật dẫn ở cân bằng tĩnh điện, nên điện trường phải bằng không trong đó.

Lúc đó, phương trình MAXWELL - GAUSS bắt buộc  $\rho = 0$ .

b) Trường bằng không trong hình trụ dẫn điện, thì hình trụ dẫn này tạo thành một thế tích đẳng thế :

$$V_c(r, \theta) = V_0.$$

Trong chân không, điện thế được tính theo cùng cách thức như ở câu 1), vì các sự đối xứng là như nhau. Vậy, khi kể đến điều kiện áp đặt cho điện trường lúc  $r$  rất lớn, thì :

$$V_v(r, \theta) = \left( -E_0 r + \frac{b_v}{r} \right) \cos \theta.$$

Chỉ duy nhất các điều kiện trên bề mặt của hình trụ là thay đổi đối với  $r = R$ . Thành phần tiếp tuyến của điện trường là liên tục, vậy là bằng không, do đó :

$$b_v = E_0 R^2$$

Từ đó ta suy ra :

$$V_v(r, \theta) = \left( -r + \frac{R^2}{r} \right) E_0 \cos \theta$$

và  $\vec{E}_v = \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) E_0 \cos \theta \vec{e}_r + \left( -1 + \frac{R^2}{r^2} \right) E_0 \sin \theta \vec{e}_\theta.$

Do tính liên tục của điện thế ở  $r = R$ , nên điện thế của hình trụ có dạng :

$$V_c(r, \theta) = V_0 = 0.$$

c) Mật độ  $\sigma$  của các điện tích mặt (tự do) trên vật dẫn được xác định bởi điều kiện đặt lên thành phần pháp tuyến của  $\vec{D}$  với bề mặt hình trụ.

Biết rằng  $\vec{D}$  bằng không trong hình trụ (một trường bằng không, sẽ không phân cực hình trụ!), ta tìm thấy:

$$\sigma = 2\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Ta có thể dễ dàng xác minh rằng điện tích tổng cộng của vật dẫn bằng không; kết quả này hoàn toàn hợp logic, vì hình trụ, cô lập, lúc đầu lại trung hòa.

**5 a)** Điện trường, giả thiết là đều, cộng tuyến với trục (Ox):

$$\vec{E} = -E\vec{e}_x \text{ với } U = Ed.$$

b) Mật độ mặt của điện tích (tự do)  $\sigma_0$  được giả thiết là không đổi trên mỗi bán, do đó  $Q_0 = \sigma_0 S$ . Điều kiện áp đặt cho thành phần pháp tuyến của vector  $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = -\epsilon_r \epsilon_0 E \vec{e}_x$  (nó đồng nhất hóa ở đây với chính vector  $\vec{D}$ ) ở mặt phân giới bản - thạch anh, dẫn đến  $\epsilon_r \epsilon_0 E = 0$  (xem bài tập 4: trong một vật dẫn, vector  $\vec{D}$  bằng không).

Biết rằng, theo định nghĩa của điện dung,  $Q_0 = C_0 U$ , ta tìm thấy:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

2) a) Với ký hiệu  $\vec{P}$  là độ phân cực cảm ứng "bình thường" của vật liệu điện môi thạch anh, ta có thể viết, có kể đến hiệu ứng áp điện:

$$\vec{D} = (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) + \vec{P}_s = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} + \vec{P}_s.$$

Hằng số điện môi  $\epsilon_r$  đặc trưng cho độ phân cực duy nhất cảm ứng bởi điện trường. Điều kiện áp đặt cho vector  $\vec{D} = -D\vec{e}_x$  ở mặt phân giới bản - thạch anh, cho ta ở đây:  $D = \sigma = \frac{Q}{S}$ .

Khi dùng  $\vec{E} = -E\vec{e}_x = -\frac{U}{d}\vec{e}_x$  và  $\vec{P}_s = \frac{\alpha}{S}\vec{F} = \frac{\alpha}{S}F\vec{e}_x = \alpha K y \vec{e}_x$ , ta được:

$$U = \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} Q + \frac{\alpha K d}{\epsilon_0 \epsilon_r} y,$$

đúng là nó có dạng  $U = \frac{Q}{C_0} + \beta y$  với  $\beta = \frac{\alpha K d}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ .

b)  $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{N}^{-1}$ .

3) a) Công nguyên tố  $\delta W$ , mà thạch anh nhận được, gồm công nguyên tố của các lực  $\vec{F}$  và  $-\vec{F}$  và công của lực điện trường, do đó:

$$\delta W = 2 F dy + U dQ.$$

b) Năng lượng tự do (mà ta ký hiệu ở đây là  $\mathcal{E}_\ell$  thay cho  $F$ ) có vi phân  $d\mathcal{E}_\ell = 2 F dy + U dQ - S dT$ , do đó:

$$2 \left( \frac{\partial F}{\partial Q} \right)_{y,T} = \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{Q,T}.$$

c) Biết rằng  $U = \frac{Q}{C_0} + \beta y$  và  $F = k'y + \beta' Q$ , từ đó ta suy ra:

$$2\beta' = \beta.$$

4) Thạch anh thực hiện các dao động cưỡng bức với xung động  $\omega$  của điện áp kích thích.

Nhờ ký hiệu phức, ta tìm các nghiệm dưới dạng:

$$\underline{q} = \underline{q}_m e^{j\omega t} \text{ và } \underline{y} = \underline{y}_m e^{j\omega t}.$$

Ta được:  $U_m = \frac{q_m}{C_0} + \beta y_m$  và  $(-m\omega^2 + k')y_m + 2\beta q_m = 0$ .

Từ đó suy ra, khi khử  $y_m$ , cường độ  $\underline{i} = \underline{I}_m e^{j\omega t} = j\omega \underline{q}$  đi qua tinh thể thạch anh:

$$\underline{I}_m = \frac{U_m}{\frac{1}{jC_0\omega} + \frac{2\beta^2}{j\omega(m\omega^2 - k')}} \text{ của dạng } \underline{I}_m = \frac{U_m}{\underline{Z}}.$$

$$\begin{aligned} \text{với } \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\frac{1}{jC_0\omega} + \frac{2\beta^2}{j\omega m(\omega^2 - \omega_0^2)}} = \frac{jC_0\omega m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m(\omega^2 - \omega_0^2) + 2C_0\beta^2} \\ &= jC_0\omega - \frac{2jC_0^2\beta^2\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2) + 2C_0\beta^2} \\ &= jC_0\omega + \frac{1}{j\omega \left( \frac{m}{2C_0^2\beta^2} \right) + \frac{1}{j\omega} \left( \frac{m\omega_0^2 - 2C_0\beta^2}{2C_0^2\beta^2} \right)}. \end{aligned}$$

Mạch điện đề xuất có trở kháng  $\underline{Z}$  xác định bởi:

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC_0\omega + \frac{1}{\left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)}.$$

Khi đồng nhất hai biểu thức của  $\underline{Z}$ , ta tìm được:

$$L = \frac{m}{2C_0^2\beta^2}$$

$$\text{và } C = \frac{2C_0^2\beta^2}{m\omega_0^2 - 2C_0\beta^2} = \frac{C_0}{\frac{m\omega_0^2}{2C_0\beta^2} - 1}$$

Điều này biểu diễn một sự mô hình hóa "cổ điển" của một tấm thạch anh.

978.958.958

# BIẾN THỂ: TIẾP CẬN THỰC NGHIỆM VỀ HIỆN TƯỢNG SẮT TỪ



## Mở đầu

*Biến thể là một thiết bị rất thông dụng. Ta thường gặp chúng ở mọi kích cỡ: từ biến thể điện áp thấp khoảng một trăm gam, các bộ thích phối mạng điện của các thiết bị điện nhỏ, đến các biến thể nặng nhiều tấn dùng để truyền tải điện năng ở điện áp cao.*

*Các đặc trưng của một biến thể chỉ có thể được giải thích bằng các tính chất đặc biệt của lõi từ của nó. Lõi được cấu thành từ một môi trường, gọi là sắt từ, biểu hiện một độ từ hóa  $M$  lớn đối với một kích thích từ  $H$  yếu. Môi trường này cũng biểu hiện một trí nhớ về các trạng thái trước của nó: đó là hiện tượng từ trễ.*

*Lưu ý rằng phần này cũng đã được trình bày trong cuốn sách H-Prépa, Điện tử II, PSI và PSI<sup>\*</sup>, mà ở đây nó đã được phát triển thành hai chương, vì phần này có liên quan mật thiết với toàn bộ các thiết bị chuyển đổi năng lượng (đặc biệt là các động cơ) hiện có trong các chương trình vật lý của PSI.*

## M U C T I Ê U

- Mô hình biến thể lí tưởng.
- Các yếu tố đặc trưng của một biến thể.
- Chu trình từ trễ của một chất sắt từ.

## ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các khái niệm về hiện tượng cảm ứng:
  - Độ tự cảm riêng và độ hổ cảm;
  - Định luật FARADAY.
- Khái niệm về các môi trường từ (từ môi):
  - từ trường và kích thích từ;
  - Sự từ hóa.

# 1 Giới thiệu máy biến thế

## 1.1. Vai trò

Biến thế là một bộ đổi điện năng tĩnh. Nó truyền, bằng *điện xoay chiều* và duy nhất bằng *điện xoay chiều*, công suất điện, từ một nguồn đặt trong mạch sơ cấp đến một tải đặt trong mạch thứ cấp. Sự chuyển đổi này được thực hiện mà không làm biến đổi tần số và với một hiệu suất cao tuyệt vời, vì trong các biến thế công nghiệp, các tổn hao năng lượng là dưới 1%.

Vì sự chuyển đổi xảy ra không có biến đổi năng lượng điện cơ, nên sự chuyển đổi này gọi là *tĩnh*.

Sự truyền tải năng lượng này là cần thiết trong hai trường hợp.

### • Sự thích phối của nguồn với trở kháng của tải

Khi điện áp (hay dòng điện) do nguồn cung cấp không thích ứng với tải (đây là trường hợp phổ biến nhất, xem H.1), thì người ta dùng một biến thế.

Trong trường hợp chuyển từ điện áp rất cao (400 kV) sang điện áp trung bình (< 32 kV, dùng trong công nghiệp), rồi sang điện áp thấp (220V), biến thế được gọi là *biến thế hạ áp* hay *bộ hạ áp*.

Trong trường hợp chuyển từ điện áp trung bình (ở đầu ra của các máy phát điện xoay chiều của các nhà máy điện) lên điện áp cao, biến thế là *biến thế tăng áp* hay *bộ tăng áp*.

### • Sự cách ly điện giữa tải và nguồn

Trong trường hợp các thiết bị ở môi trường ẩm ướt (ví dụ trong các phòng tắm, ...) thì việc dùng một biến thế cách ly làm giảm đáng kể các khả năng gây điện giật chết người.

Một biến thế phải được thích phối với nguồn và tải mà nó được mắc nối. Vì lẽ đó mà các nhà chế tạo xác định các đặc trưng sau: tần số sử dụng, điện áp nuôi cuộn sơ cấp, điện áp ra không tải và công suất biểu kiến.

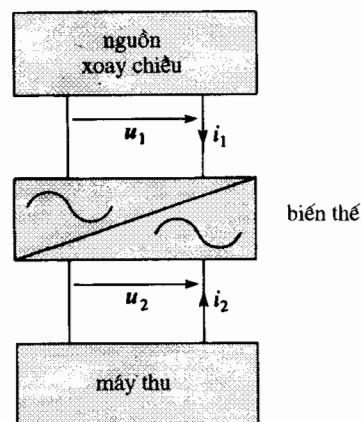
Công suất biểu kiến là tích của cường độ danh định (tương ứng với các điều kiện sử dụng tối ưu của biến thế) với điện áp ra không tải; nó được biểu thị ra VA chứ không ra oát.

Ví dụ, một biến thế (220 V, 24 V, 100 VA) phải được nối với một nguồn điện áp hiệu dụng 220 V và cung cấp cho cuộn thứ cấp một cường độ  $\frac{100}{24} = 4,2 \text{ A}$  với điện áp 24 V, trong các điều kiện danh định.

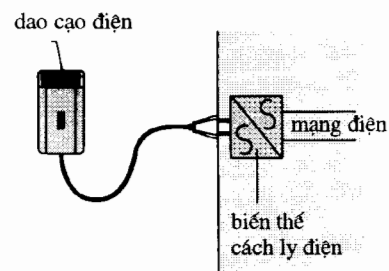
Ta sẽ chỉ nghiên cứu các biến thế một pha, nghĩa là các biến thế mà đối với chúng, nguồn và tải chỉ có hai đầu nối (thường một đầu là trung hoà và một đầu là pha).

## 1.2. Mô tả

Một biến thế được cấu thành từ một *mạch từ kín* (lõi), trên đó quấn hai cuộn dây độc lập điện với nhau là cuộn *sơ cấp* (nối với nguồn) và cuộn *thứ cấp* (nối với tải).



H.1. Sự thích phối từ lõi ra đến tải.

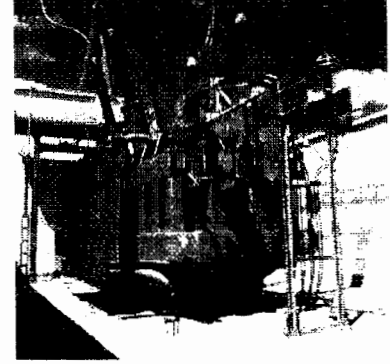
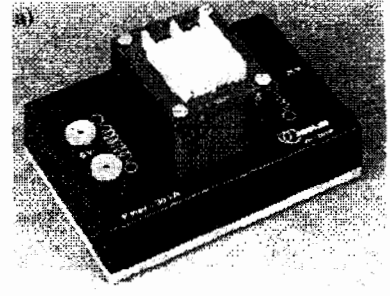


H.2. Biến thế cách ly điện: hệ được gọi là "cách ly kép".

Mạch từ được cấu thành từ một vật liệu sắt từ, thông thường là các lá tôn sắt silic mỏng, chiều dài trong khoảng 0,05 và 0,5 mm, cách điện với nhau bằng lớp vecni hay bằng sự oxy hóa bề mặt và được nén chặt nhờ hệ thống siết kẹp.

Mỗi mạch điện được cấu tạo bằng dây đồng hay nhôm, tráng men hay quấn sợi bông, giấy hay vải để cách điện. Các mạch điện này được tẩm nhựa hay nhúng trong vecni và được ép chặt để chống lại các lực điện từ.

Trong các biến thế công suất lớn, mạch điện được cách điện với mạch sắt từ và vỏ bọc ngoài bằng một chất điện môi (đầu hay pyralen trước khi cấm động đến nó). Chất lỏng này cũng cho phép tản nhiệt tiêu tán trong biến thế ra ngoài (H.3).



H.3a. Biến thế điện áp thấp.

b. Biến thế điện áp cao.

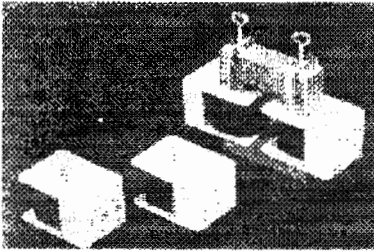
### 1.3. Các đặc tính của mạch từ

Nhờ các tính chất sắt từ của vật liệu cấu thành, mà mạch từ dẫn về một hướng các đường sức từ trường (xem chương 6, bài tập 1) và từ trường có thể được coi như gần bằng không bên ngoài vật liệu, ở đây được gọi là lõi (H.4).

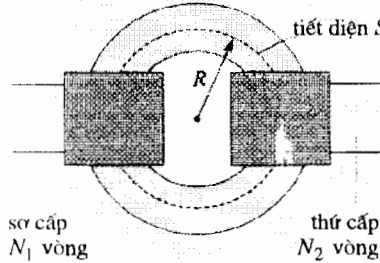
Sự ghép nối giữa hai cuộn dây lúc này, gần như hoàn toàn, vì hầu như tất cả các đường sức từ trường đều đi qua hai cuộn dây này.

Hơn nữa, mạch sắt từ làm cho cường độ trong mạch sơ cấp rất yếu khi không có dòng điện trong mạch thứ cấp (xem §2.1.2).

Để mô hình hóa một biến thế, ta chọn một dạng hình xuyên cho mạch từ. Gọi  $l$  là chu vi trung bình của hình xuyên ( $l = 2\pi R$ ) và  $S$  là tiết diện thẳng của nó. Ta kí hiệu  $N_1$  là số vòng dây cuộn sơ cấp và  $N_2$  là số vòng dây cuộn thứ cấp, quấn trên hình xuyên (H.5).



H.4. Biến thế thực nghiệm.



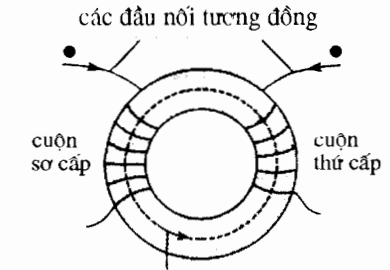
H.5. Biến thế hình xuyên.

#### 1.3.1. Quy ước về sự định hướng

Ta hãy định hướng tùy ý một mạch từ. Việc chọn này cho phép xác định sự định hướng các cuộn sơ cấp và thứ cấp : sự định hướng của các vòng dây được chọn, sao cho pháp tuyến của chúng phải định hướng theo chiều đã chọn đối với sự định hướng của mạch từ (H.6).

Ở đây, ta sẽ định hướng các cường độ dòng điện trong hai cuộn dây theo cách chọn này : thành thử, pháp tuyến với các vòng dây được định hướng theo chiều đã chọn cho sự định hướng của mạch từ.

Quy ước này cho phép xác định một cặp đầu nối tương đồng của biến thế. Cặp này gồm đầu nối cuộn sơ cấp và đầu nối cuộn thứ cấp mà đi vào đó có một dòng điện dương với quy ước định hướng như trên. Cặp tương đồng này được đánh dấu theo quy ước bởi các chấm đen ở mức ngang các đầu nối.



sự định hướng tùy ý của mạch từ

H.6. Sự định hướng các mạch ; sự thể hiện các đầu nối tương đồng và quy ước định hướng các cường độ dòng điện.

### 1.3.2. Từ thông chung

Với giả thiết từ trường bên ngoài mạch từ là không đáng kể, thì lõi hoạt động như một ống trường (H.7). Thật vậy, tính liên tục của thành phần pháp tuyến của từ trường ở mặt phân giới giữa môi trường sắt từ và bên ngoài, buộc  $\vec{B}$  phải tiếp tuyến với bề mặt của mạch từ.

Từ trường có thông lượng bảo toàn. Như vậy, thông lượng của  $\vec{B}$  đi qua một tiết diện thẳng bất kỳ của lõi đều không đổi; ta gọi đại lượng với kí hiệu  $\Phi_c$  này là từ thông chung.

Từ thông đi qua mạch sơ cấp khi đó là  $\Phi_1 = N_1 \Phi_c$  và từ thông đi qua mạch thứ cấp  $\Phi_2 = N_2 \Phi_c$  (với các quy ước định hướng được xác định ở §1.3.1).

Nếu tiết diện thẳng S của mạch từ là không đổi, thì các đường sức song song nhau và từ trường rỗng rết là có môđun không đổi:

$$B = \frac{\Phi_c}{S},$$

nếu bán kính trung bình R của vòng xuyên lớn hơn đường kính một vòng dây rất nhiều.

### 1.3.3. Dòng điện từ hóa

Gọi  $i_1$  và  $i_2$  (không phải  $I_1$  và  $I_2$ ) là các cường độ tức thời chạy trong các mạch sơ cấp và thứ cấp, rồi xác định kích thích từ  $\vec{H}$  ở bên trong lõi.

Ta áp dụng định lí AMPÈRE trên một đường sức ở bên trong xuyên, nghĩa là  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{\text{bi bao}}$ . Cường độ dòng điện bị bao bằng  $N_1 i_1 + N_2 i_2$ .

Hệ thức nhận được  $\oint_{\text{đường sức}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2$  chứng tỏ rằng lưu

thông của kích thích từ độc lập với đường sức đã chọn.

Ta định nghĩa dòng điện từ hóa  $i_m$  bằng  $i_m = i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2$ .

Ta nhận thấy là  $\oint_{\text{đường sức}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 i_m$ .

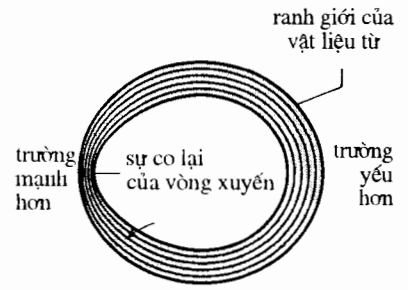
Dòng từ hóa  $i_m$  là cường độ dòng điện chạy qua cuộn sơ cấp khi không có dòng điện chạy trong cuộn thứ cấp và tạo ra cùng một kích thích từ như ở điểm làm việc xác định bởi các cường độ  $i_1$  và  $i_2$ .

Mẫu hình xuyên đã chọn biểu hiện tính đối xứng tròn xoay đối với trục (Oz) của hình xuyên, vậy  $\vec{H}$  là trục xuyên tâm và không phụ thuộc vào biến số góc  $\varphi$  (H.8).

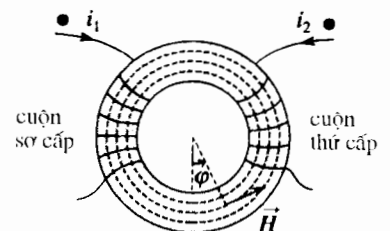
Như vậy các đường sức của  $\vec{H}$  là những vòng tròn có tâm trên trục (Oz). Vì  $H$  độc lập với  $\varphi$ , nên:

$$\oint_{\text{đường sức}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi R H \approx l H,$$

khi coi bán kính vòng tròn là bán kính trung bình R của hình xuyên.



H.7. Sự dồn về một hướng của các đường sức.



H.8. Mẫu hình xuyên và các ký hiệu.



Vậy  $lH \approx N_1 i_1 + N_2 i_2 = N_1 i_m$ , nghĩa là  $H = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{l} = \frac{N_1 i_m}{l}$ .

### 1.3.4. Hệ thức giữa thông lượng chung và dòng điện từ hóa

Hệ thức tồn tại giữa thông lượng chung  $\Phi_c$  và dòng điện từ hóa  $i_m$  phụ thuộc hệ thức tồn tại giữa  $\vec{H}$   $\left( H = \frac{N_1 i_m}{l} \right)$  và  $\vec{B}$   $\left( B = \frac{\Phi_c}{S} \right)$ , là hệ thức

cấu thành của vật liệu sắt từ và thoát nhìn thì không đơn giản. Ta sẽ thấy ở tiết § 4 rằng hệ thức này là phi tuyến và còn biểu thị cả hiện tượng từ trễ. Tuy nhiên, đối với một số vật liệu sắt từ và trong một số điều kiện nào đó, ta cũng có thể dùng một mô hình tuyến tính, mà trong đó  $\vec{B}$  và  $\vec{H}$  liên hệ với nhau bởi hệ thức  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ .

Ta đã thông báo ở chương 6 rằng độ từ thẩm tương đối  $\mu_r$  của một môi trường sắt từ có thể lấy những giá trị rất lớn (vài nghìn).

## 2 Biến thế lí tưởng

Các hệ thức giữa các đại lượng đặc trưng của biến thế không cho phép trình bày đơn giản các hệ thức điện, liên kết các cường độ dòng điện và các hiệu điện thế của các cuộn dây của biến thế.

Như vậy, ta phải đưa ra các giả thiết đơn giản hóa để có được các hệ thức đơn giản.

### 2.1. Nghiên cứu biến thế lí tưởng

#### 2.1.1. Hệ thức giữa các điện áp

Giả sử ta chấp nhận giả thiết từ trường ở ngoài lõi là không đáng kể (xem § 1.3).

Nếu từ thông chung biến đổi theo thời gian, thì sẽ xuất hiện một s.d.đ cảm ứng ở các đầu nối các cuộn dây, nghĩa là với các định hướng trên hình 9 :

• ở cuộn sơ cấp :  $e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_c}{dt}$  ; • ở cuộn thứ cấp :  $e_2 = -N_2 \frac{d\Phi_c}{dt}$  ;

Tỉ số các giá trị tức thời của các s.d.đ cảm ứng này là  $\frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1}$ .

Với giả thiết điện trở các cuộn dây là không đáng kể, thì hiệu điện thế giữa các đầu nối của mạch sơ cấp có giá trị  $u_1 = -e_1$ , do đó :

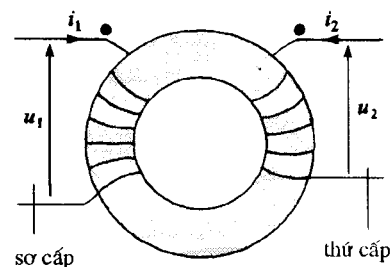
$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi_c}{dt}$$

Giữa các đầu nối của cuộn thứ cấp, ta có  $u_2 = -e_2$ , do đó :

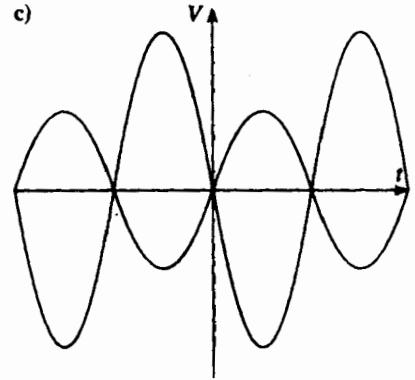
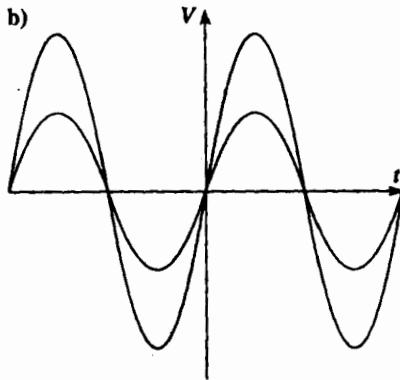
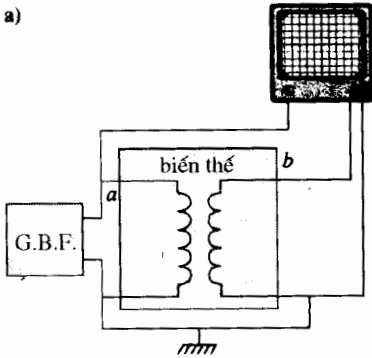
$$u_2 = N_2 \frac{d\Phi_c}{dt}$$

Tỉ số  $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$  được gọi là tỉ số biến đổi. Đối với một biến thế lí

tuởng, tỉ số này độc lập với tải nối với cuộn thứ cấp của biến thế. Với quy ước dùng ở tiết § 1.3.1, thì ta có  $m > 0$ .



H.9. Các dòng điện và các điện áp ở các đầu nối của biến thế.



**Chú ý :**

• Điều gì sẽ xảy ra nếu một biến thế được nuôi bằng một điện áp có giá trị trung bình khác không (ví dụ một điện áp một chiều) ? Một dòng điện một chiều trong một cuộn dây của mạch sẽ tạo ra một từ thông chung không đổi. Như vậy, sẽ không xuất hiện s.d.d ở các đầu nối của các cuộn dây. Hiệu điện thế lúc đó sẽ chỉ do điện trở các mạch điện xác định. Các phương trình điện của biến thế chỉ có hiệu lực ở chế độ xoay chiều (nghĩa là đối với các tín hiệu có giá trị trung bình triệt tiêu).

• Làm thế nào để xác định bằng thực nghiệm các đầu nối tương đồng ? Ở chế độ hình sin, và với các quy ước đã chấp nhận, thì các điện áp  $u_1$  và  $u_2$  đều đồng pha. Để xác định các đầu nối tương đồng của một biến thế, chỉ cần nối một đầu dây của mỗi cuộn với đất (mát) và quan sát các điện áp ở hai đầu nối còn lại. Nếu chúng đồng pha, thì có nghĩa là các đầu nối đó tương đồng (H.10).

**H.10a.** Nghiên cứu các đầu nối tương đồng.

**b.** Các đầu nối a và b đều tương đồng.

**c.** Các đầu nối a và b không tương đồng.

# Áp dụng 1

**Công thức BOUCHEROT**

Cuộn sơ cấp của một biến thế, giả thiết lí tưởng ( $N_1$  vòng dây ở cuộn sơ cấp,  $N_2$  vòng dây ở cuộn thứ cấp,  $S$  là tiết diện của mạch từ) được cung cấp một điện áp hình sin, tần số  $f$ .

Chúng minh rằng khi bỏ qua điện trở các cuộn dây, thì các điện áp hiệu dụng  $U_1$  và  $U_2$  ở các cuộn sơ cấp và thứ cấp sẽ liên hệ với từ trường cực đại  $B_m$  bởi công thức Boucherot :

$$U_1 = 4,44 N_1 S B_m f \text{ hay } U_2 = 4,44 N_2 S B_m f.$$

Hãy tìm số vòng cần thiết cho cuộn sơ cấp và thứ cấp của một biến thế (220 V // 12V) để từ trường trong lõi không vượt quá 1T.

Dữ liệu :  $f = 50 \text{ Hz}$  ;  $S = 5 \text{ cm}^2$ .

Ta có :  $u_1 = N_1 \frac{d\Phi_c}{dt}$  và  $u_2 = N_2 \frac{d\Phi_c}{dt}$  với

$\Phi_c = SB$ . Nhưng  $u_1$  là hàm hình sin của thời gian,  $\Phi_c$  và  $B$  cũng như thế.

Nếu  $u_1(t) = U_1 \sqrt{2} \cos \omega t$ ,  $\Phi_c = \frac{U_1 \sqrt{2}}{\omega N_1} \sin \omega t$

và  $B = \frac{U_1 \sqrt{2}}{\omega N_1 S} \sin \omega t$ , vậy  $B_m = \frac{U_1 \sqrt{2}}{\omega N_1 S}$ .

Khi đưa vào tần số  $f$  của tín hiệu, thì :

$$U_1 = \pi \sqrt{2} N_1 S B_m f \approx 4,44 N_1 S B_m f.$$

Cũng vậy :

$$U_2 = \pi \sqrt{2} N_2 S B_m f \approx 4,44 N_2 S B_m f.$$

Khi cho  $B_m = 1 \text{ T}$  và  $U_1 = 220 \text{ V}$ , thì ta được  $N_1 \approx 2000$  vòng dây và  $N_2 \approx 110$  vòng dây, những trị số tương ứng thực tế với một biến thế điện áp thấp thường dùng.

### 2.1.2. Hệ thức giữa các dòng điện

Chỉ tồn tại một hệ thức đơn giản giữa các cường độ dòng điện trong các cuộn sơ cấp, thứ cấp và các điện áp tương ứng, trong trường hợp môi trường từ là tuyến tính. Giả thiết này nói chung không được xác minh và ta phải tìm cách mô hình hóa biến thế theo phương pháp khác.

Ta hãy xác định độ lớn của dòng điện từ hóa trong một biến thế (220 V // 12 V) có công suất danh định 75 VA. Muốn vậy, ta hãy đo dòng điện hiệu dụng trong cuộn sơ cấp của biến thế khi cuộn thứ cấp là không tải : ta tìm thấy khoảng 40 mA. Ta nhớ lại là dòng điện từ hóa  $I_m$  bằng dòng điện chạy qua cuộn sơ cấp của biến thế khi cuộn thứ cấp là không tải ; từ đó suy ra  $I_m = 40$  mA. Giờ ta hãy đo dòng điện hiệu dụng ở cuộn sơ cấp của biến thế có tải là một máy thu, điện trở  $2 \Omega$  ; điều này tương ứng với một công suất tiêu tán vào cỡ giá trị danh định, nghĩa là  $\frac{12^2}{2}$ . Ta tìm thấy khoảng

350 mA, nghĩa là  $I_1 = 350$  mA. Dòng từ hóa chỉ biểu thị khoảng 10% dòng danh định ở cuộn sơ cấp. Ta thừa nhận kết quả sau đây là phổ biến.

**Khi sử dụng bình thường, thì dòng điện từ hóa yếu so với dòng điện trong cuộn sơ cấp.**

Nếu ta bỏ qua dòng từ hóa so với  $i_1$ , thì hệ thức :

$$i_2 = \frac{N_1}{N_2} (i_m - i_1) \text{ trở thành } i_2 = -\frac{N_1}{N_2} i_1, \text{ nghĩa là } \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}.$$

Với ví dụ ở trên, ta có thể đo cường độ hiệu dụng ở cuộn thứ cấp :  $I_2 = 6,2$  A.

Tỉ số các cường độ dòng điện bằng nghịch đảo của tỉ số biến đổi nhưng trái dấu, nếu dòng điện từ hóa là không đáng kể, điều này thường là trường hợp của một biến thế "tốt". Nó độc lập với các điện áp  $u_1$  và  $u_2$  ở các đầu nối của biến thế.

Hệ thức này chỉ có hiệu lực nếu các cường độ dòng điện là xoay chiều. Đừng quên rằng điện áp và cường độ dòng điện ở cuộn thứ cấp đều do các hiện tượng cảm ứng gắn với các biến thiên điện áp ở cuộn sơ cấp.

# Áp dụng 2

## • Dòng điện trong mô hình tuyến tính

Ta hãy nghiên cứu một biến thế trong khuôn khổ mô hình tuyến tính của môi trường sắt từ, mà trong đó thông lượng qua mạch sơ cấp có giá trị :

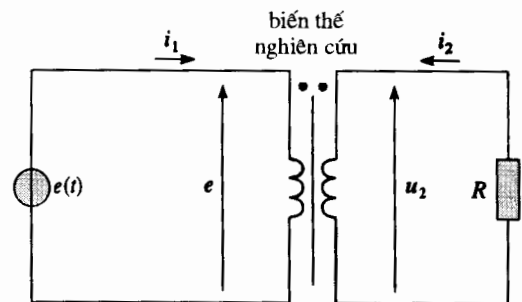
$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

và thông lượng qua mạch thứ cấp là :

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

Người ta bỏ qua điện trở các cuộn dây (H.11)

1) Tìm hệ thức giữa  $L_1$ ,  $L_2$  và  $M$  thể hiện một sự ghép nối toàn bộ ?



H.11. Các dòng điện trong mô hình tuyến tính.

968.968

### 2.1.2. Hệ thức giữa các dòng điện

Chỉ tồn tại một hệ thức đơn giản giữa các cường độ dòng điện trong các cuộn sơ cấp, thứ cấp và các điện áp tương ứng, trong trường hợp môi trường từ là tuyến tính. Giả thiết này nói chung không được xác minh và ta phải tìm cách mô hình hóa biến thế theo phương pháp khác.

Ta hãy xác định độ lớn của dòng điện từ hóa trong một biến thế (220 V // 12 V) có công suất danh định 75 VA. Muốn vậy, ta hãy đo dòng điện hiệu dụng trong cuộn sơ cấp của biến thế khi cuộn thứ cấp là không tải : ta tìm thấy khoảng 40 mA. Ta nhớ lại là dòng điện từ hóa  $I_m$  bằng dòng điện chạy qua cuộn sơ cấp của biến thế khi cuộn thứ cấp là không tải ; từ đó suy ra  $I_m = 40$  mA. Giờ ta hãy đo dòng điện hiệu dụng ở cuộn sơ cấp của biến thế có tải là một máy thu, điện trở  $2 \Omega$  ; điều này tương ứng với một công

suất tiêu tán vào cỡ giá trị danh định, nghĩa là  $\frac{12^2}{2}$ . Ta tìm thấy khoảng 350 mA, nghĩa là  $I_1 = 350$  mA. Dòng từ hóa chỉ biểu thị khoảng 10% dòng danh định ở cuộn sơ cấp. Ta thừa nhận kết quả sau đây là phổ biến.

**Khi sử dụng bình thường, thì dòng điện từ hóa yếu so với dòng điện trong cuộn sơ cấp.**

Nếu ta bỏ qua dòng từ hóa so với  $i_1$ , thì hệ thức :

$$i_2 = \frac{N_1}{N_2}(i_m - i_1) \text{ trở thành } i_2 = -\frac{N_1}{N_2}i_1, \text{ nghĩa là } \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}.$$

Với ví dụ ở trên, ta có thể đo cường độ hiệu dụng ở cuộn thứ cấp :  $I_2 = 6,2$ A.

Tỉ số các cường độ dòng điện bằng nghịch đảo của tỉ số biến đổi nhưng trái dấu, nếu dòng điện từ hóa là không đáng kể, điều này thường là trường hợp của một biến thế "tốt". Nó độc lập với các điện áp  $u_1$  và  $u_2$  ở các đầu nối của biến thế.

Hệ thức này chỉ có hiệu lực nếu các cường độ dòng điện là xoay chiều. Đừng quên rằng điện áp và cường độ dòng điện ở cuộn thứ cấp đều do các hiện tượng cảm ứng gắn với các biến thiên điện áp ở cuộn sơ cấp.

# Áp dụng 2

## • Dòng điện trong mô hình tuyến tính

Ta hãy nghiên cứu một biến thế trong khuôn khổ mô hình tuyến tính của môi trường sắt từ, mà trong đó thông lượng qua mạch sơ cấp có giá trị :

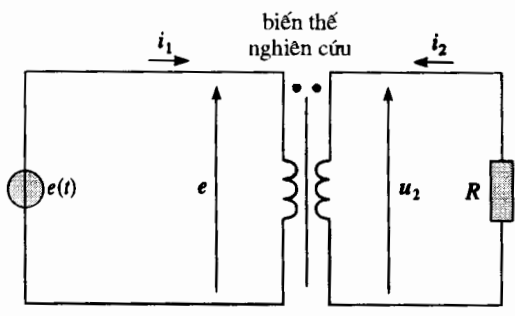
$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

và thông lượng qua mạch thứ cấp là :

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

Người ta bỏ qua điện trở các cuộn dây (H.11)

- 1) Tìm hệ thức giữa  $L_1$ ,  $L_2$  và  $M$  thể hiện một sự ghép nối toàn bộ ?



H.11. Các dòng điện trong mô hình tuyến tính.

Ta tự đặt mình trong trường hợp lí tưởng hóa sự ghép nối toàn bộ để tiếp tục bài tập này.

2) Biểu thị tỉ số biến đổi  $m$  theo  $L_1$  và  $M$ .

3) Cuộn sơ cấp của biến thế được nuôi bởi một máy phát s.d.đ hình sin :

$$e(t) = e_m \cos \omega t$$

Một điện trở có trị số  $R$  được đặt giữa các đầu nối của cuộn thứ cấp.

a) Xác định các cường độ dòng điện  $i_1(t)$  trong cuộn sơ cấp và  $i_2(t)$  trong cuộn thứ cấp ở chế độ cường bách hình sin và dòng điện từ hóa.

b) Liệu ta có thể có  $i_1(t) = -mi_2(t)$  không ?

4) Tìm giá thiết về môi trường từ tương đương với giá thiết bỏ qua dòng điện từ hóa ?

1) Toàn thông lượng đều đi qua mạch từ, nên ta có (xem chương 5) :  $L_1 L_2 = M^2$ .

2) Theo 1) :

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = m \Phi_1 = m(L_1 i_1 + M i_2),$$

độc lập với  $i_1$  và  $i_2$ , với :

$$m = \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M}.$$

3) a) Ở cuộn sơ cấp :  $e(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ ,

nghĩa là  $\frac{e_m}{\omega} \sin \omega t = L_1 i_1 + M i_2$  (không có thành phần một chiều).

Hệ thức giữa điện áp sơ cấp và thứ cấp có dạng

$$u_2 = m u_1 = m e(t) = -R i_2(t).$$

Chú ý,  $i_2$  trở về trong biến thế.

Do đó :

$$i_2(t) = -m \frac{e_m}{R} \cos \omega t$$

$$\text{và } i_1(t) = e_m \left[ \frac{\sin \omega t}{L_1 \omega} + m^2 \frac{\cos \omega t}{R} \right].$$

Từ đó, ta suy ra :

$$i_m = i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 = i_1 + m i_2 = e_m \frac{\sin \omega t}{L_1 \omega}.$$

Ta có thể nhận thấy rằng  $e(t) = L_1 \frac{di_m}{dt}$  (tính

chất của dòng điện từ hóa).

b) Không thể nhận được  $i_1(t) = -m i_2(t)$ .

Hệ thức giới hạn này có thể nhận được bằng cách cho  $R \rightarrow 0$ , vì  $u_2 = 0$  buộc phải có :

$$L_2 i_2 + M i_1 = 0$$

và do đó  $m i_2 + i_1 = 0$ .

Tỉ số dòng điện giữa cuộn sơ cấp và thứ cấp bằng về giá trị tuyệt đối với tỉ số biến đổi nếu cuộn thứ cấp bị ngắn mạch.

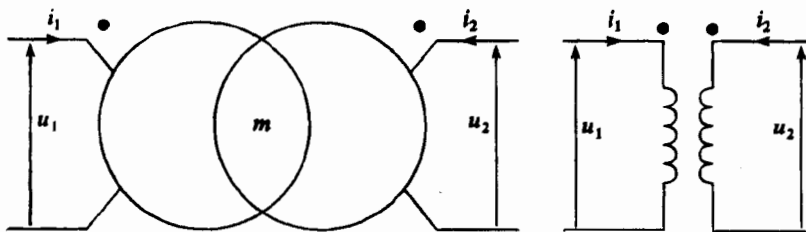
4) Việc bỏ qua dòng điện từ hóa  $i_m$  tương đương với việc coi mạch từ của biến thế được cấu thành từ một môi trường có độ từ thẩm tương đối, lớn vô hạn. Từ thông chung vẫn là hữu hạn, vậy cần thiết là kích thích từ phải triệt tiêu (ta nhắc lại rằng trong các điều kiện của bài tập, thì  $\Phi_c$  tỉ lệ với tích  $\mu_r i_m$ ).

## 2.2. Mô hình của biến thế lí tưởng

### 2.2.1. Xác định mô hình

Mô hình của biến thế lí tưởng tập hợp lại các giả thiết đã nêu trong mục

§2.1. H.12 cho một cách biểu diễn tượng trưng về nó.



◀ H.12. Các biểu diễn tượng trưng của biến thế lí tưởng.

Biến thế lí tưởng được đặc trưng duy nhất bằng tỷ số biến đổi  $m$ . Các hệ thức giữa các điện áp và các cường độ dòng điện (chú ý về dấu, xem

§1.3.1) là  $u_2 = m u_1$  và  $i_2 = -\frac{i_1}{m}$ .

8.959.958

**Chú ý :**

Các hệ thức này cũng có thể được viết:  $u_1 = \frac{1}{m}u_2$  và  $i_1 = -mi_2$ .

Một biến thế lí tưởng có tính thuận nghịch (coi chừng ! không phải theo ý nghĩa của nhiệt động học !) : các vai trò của các mạch sơ cấp và thứ cấp có thể được đổi lẫn cho nhau. Lúc đó, tỉ số biến đổi trở thành  $\frac{1}{m}$ .

Với mô hình của biến thế lí tưởng, các phương trình liên kết  $u_1, u_2, i_1$  và  $i_2$  đều là tuyến tính. Vậy mô hình là *tuyến tính*. Nếu phần còn lại của mạch điện gồm các phần tử tuyến tính, thì các phương trình chi phối phần đó cũng là tuyến tính. Như vậy mạch có thể được nghiên cứu với các kĩ thuật đã được dùng trên các mạch tuyến tính cổ điển.

**2.2.2. Công suất tức thời**

Công suất điện tức thời mà biến thế (dù lí tưởng hay không) nhận được là tổng công suất nhận được bởi cuộn sơ cấp  $u_1 i_1$  và cuộn thứ cấp  $u_2 i_2$  :

$$\mathcal{P} = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

Tuy nhiên, phải chú ý đến các dấu vì chúng còn phụ thuộc vào quy ước đã chọn ở tiết §1.3.1.

Vì đối với một biến thế lí tưởng ta có :  $u_2 = mu_1$  và  $i_2 = -\frac{i_1}{m}$ , nên công suất tổng cộng này bằng không.

**Công suất tức thời, cung cấp cho cuộn sơ cấp của biến thế lí tưởng, được chuyển nguyên vẹn cho tải bởi cuộn thứ cấp. Không có sự tích giữ, cũng không có sự tiêu tán năng lượng trong một biến thế lí tưởng.**

**2.2.3. Sự truyền đạt trở kháng**

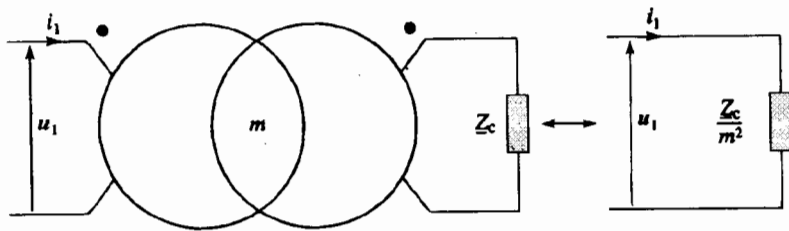
Nhìn từ cuộn sơ cấp, thì toàn bộ (biến thế + tải) tương đương với một lưỡng cực mà các đặc trưng của nó phụ thuộc vào tải và tỉ số biến đổi.

**Phép thay thế toàn bộ (biến thế + tải) bằng một lưỡng cực tương đương, được gọi là sự truyền đạt các đặc trưng của tải cho cuộn sơ cấp.**

Làm thế nào để xác định các đặc trưng của tải được truyền đạt cho cuộn sơ cấp ? Đặc trưng dòng điện - điện áp của tải cho ta hệ thức giữa  $u_2$  và  $i_2$ . Các phương trình ghép nối cuộn sơ cấp và cuộn thứ cấp cho phép xác định hệ thức giữa  $u_1$  và  $i_1$ . Trong trường hợp chế độ cưỡng bức hình sin với xung động  $\omega$  và dùng kí hiệu phức, thì tải được biểu diễn bởi một lưỡng cực tuyến tính có trở kháng phức  $\underline{Z}_c$ .

Phương trình  $u_2 = -\underline{Z}_c i_2$  buộc phải có hệ thức  $u_1 = i_1 \frac{\underline{Z}_c}{m^2}$  (H.13).

Trở kháng phức được đánh giá xuất phát từ cuộn sơ cấp của biến thế là  $\frac{\underline{Z}_c}{m^2}$ , nghĩa là trở kháng của tải  $\underline{Z}_c$  (mắc trong mạch thứ cấp) chia cho bình phương của tỉ số biến đổi  $m$ .



◀ H.13. Sự truyền đạt trở kháng.

Trở kháng, được đánh giá xuất phát từ cuộn sơ cấp của biến thế lí tưởng, có cùng pha như trở kháng của tải. Đặc biệt, một điện trở được coi như một điện trở, một tụ điện như một tụ điện và một cuộn dây như một cuộn dây.

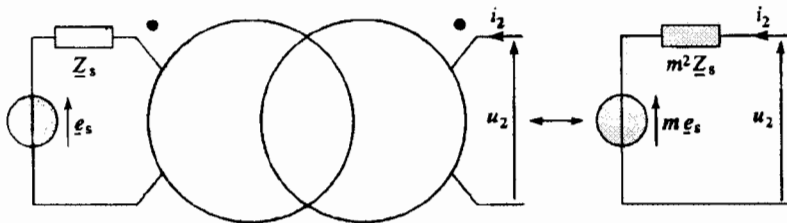
## 2.2.4. Sự truyền đạt nguồn

Ngược lại, nhìn từ cuộn thứ cấp, thì toàn bộ (biến thế + nguồn) tương đương với một lưỡng cực mà các đặc trưng của nó phụ thuộc vào nguồn và tỉ số biến đổi.

**Phép thay thế toàn bộ (biến thế + nguồn) bằng một lưỡng cực tương đương, được gọi là sự truyền đạt các đặc trưng của nguồn cho cuộn thứ cấp.**

Ta hãy xuất phát từ tải để đi tìm lưỡng cực tương đương với biến thế được nuôi bởi một máy phát. Hệ thức giữa điện áp  $u_1$  ở các cực của máy phát và dòng điện ra  $i_1$  của nó quyết định hệ thức giữa  $u_2$  và  $i_2$ .

Trong trường hợp ở chế độ cường bức hình sin, có xung động  $\omega$ , thì ta mô hình hóa nguồn bằng một máy phát THÉVENIN có s.đ.đ.  $\underline{e}_s$  và trở kháng  $\underline{Z}_s$  theo khái niệm phức (H.14).



◀ H.14. Sự truyền đạt nguồn.

Từ các hệ thức  $\underline{u}_1 = \underline{e}_s - \underline{Z}_s \underline{i}_1$  xác định máy phát, và tập hợp các hệ thức

$\underline{u}_2 = m \underline{u}_1$  và  $\underline{i}_2 = -\frac{\underline{i}_1}{m}$  đặc trưng cho biến thế, ta suy ra :

$$\underline{u}_2 = m \underline{e}_s - m^2 \underline{Z}_s \underline{i}_2.$$

Nguồn, được nhìn qua biến thế lí tưởng, tương đương với một máy phát THÉVENIN có s.đ.đ  $m \underline{e}_s$  và trở kháng  $m^2 \underline{Z}_s$ .

**Nguồn được truyền đạt cho cuộn thứ cấp, có s.đ.đ  $m \underline{e}_s$  và trở kháng  $m^2 \underline{Z}_s$  :**

- s.đ.đ  $\underline{e}_s$  của nguồn (mắc trong cuộn sơ cấp) được nhân với tỉ số biến đổi  $m$  ;
- trở kháng  $\underline{Z}_s$  của nguồn này được nhân với bình phương của tỉ số biến đổi  $m$ .

# Áp dụng 3

## Sự phối hợp trở kháng

Một tải được coi là thích ứng với một máy phát có những đặc trưng xác định, nếu công suất tiêu tán trong tải là cực đại. Người ta xét một máy phát có s.đ.đ hình sin  $e(t) = e_0 \cos \omega t$  và trở kháng là điện trở thuần  $R_s$  mắc trong cuộn sơ cấp của một biến thế lí tưởng có tỉ số biến đổi  $m$ . Người ta mắc vào cuộn thứ cấp một tải có trở kháng phức :

$$Z_c = R_c + jX_c \text{ với } R_c \text{ và } X_c \text{ là thực.}$$

Tìm trị số của  $m$  mà ta phải chọn để công suất tiêu tán trong tải là cực đại ?

Tìm giá trị của nó lúc đó, biểu thị theo  $R_s$ ,

$$R_c \text{ và } Z_c = \sqrt{R_c^2 + X_c^2} ?$$

Người ta có thể nêu lên nhận xét gì nếu  $X_c = 0$  ?

Nguồn, nhìn từ cuộn thứ cấp tương đương với một máy phát s.đ.đ.  $me_0 \cos \omega t$  và trở kháng  $m^2 R_s$ . Cường độ dòng điện trong tải là :

$$i_2 = \frac{me_0}{m^2 R_s + R_c + jX_c} e^{j\omega t}.$$

Công suất trung bình được cho bởi hệ thức :

$$\mathcal{P}_{moy} = \frac{1}{2} R_c |i_2|^2,$$

$$\text{nghĩa là : } \mathcal{P}_{moy} = \frac{1}{2} \frac{m^2 R_c e_0^2}{(m^2 R_s + R_c)^2 + X_c^2}.$$

Biểu thức này là hàm của  $m^2$  ; ta sẽ có cực đại của công suất khi  $\frac{d\mathcal{P}_{moy}}{d(m^2)} = 0$ , nghĩa là :

$$(m^2 R_s + R_c)^2 + X_c^2 = 2m^2 R_s (m^2 R_s + R_c),$$

$$\text{do đó : } m^4 = \frac{R_c^2 + X_c^2}{R_s^2} \text{ hay } m = \sqrt{\frac{Z_c}{R_s}}.$$

Thay  $m$  trong  $\mathcal{P}_{moy}$ , ta tìm được :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{moy} &= \frac{1}{2} \frac{Z_c R_c e_0^2}{R_s [(Z_c + R_c)^2 + X_c^2]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Z_c R_c e_0^2}{R_s (Z_c^2 + R_c^2 + 2Z_c R_c + X_c^2)}, \end{aligned}$$

$$\text{hay } \mathcal{P}_{moy} = \frac{1}{4} \frac{R_c e_0^2}{R_s (Z_c + R_c)}.$$

Nếu  $X_c$  bằng không,  $m = \sqrt{\frac{R_c}{R_s}}$  tương ứng với

$$\text{công suất cực đại } \mathcal{P} = \frac{1}{8} \frac{e_0^2}{R_s}.$$

Công suất này độc lập với giá trị của tải và đó là giá trị cực đại của công suất có thể dùng được, vì  $Z_c \geq R_c$ .

## 3 Mô hình hóa biến thế thực

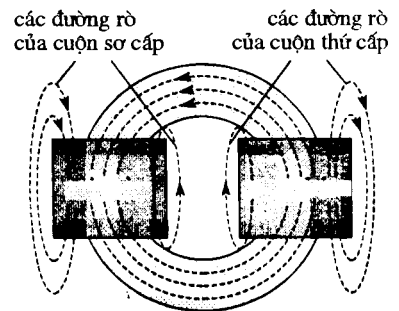
Ta sẽ chỉ mô hình hóa ở đây các hiệu chỉnh do các rò từ và do điện trở khác không của các cuộn dây.

Thật vậy, chúng được biểu diễn đúng trong một mô hình tuyến tính của biến thế. Các khuyết tật liên quan đến mạch sắt từ, đều là phi tuyến và sẽ được xét ở §4.

### 3.1. Độ tự cảm rò

Một phần nhỏ các đường sức của từ trường, được tạo ra bởi cuộn sơ cấp, không hoàn toàn được mạch từ dẫn về một hướng (H.15.)

Các đường sức này chủ yếu ở bên ngoài lõi, trong một môi trường được coi như chân không.



H.15. Các đường sức rò mất.



Như vậy, phần đóng góp của chúng vào từ thông đi qua cuộn sơ cấp được biểu diễn đúng bởi một hàm tuyến tính của cường độ dòng điện  $L_{f1}i_1$ , trong đó  $L_{f1}$  được gọi là *độ tự cảm rò của cuộn sơ cấp*.

Khi đó, ta viết :

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_c + L_{f1} i_1.$$

Cũng như thế, ta có thể xác định *độ tự cảm rò của cuộn thứ cấp*  $L_{f2}$  và viết :

$$\Phi_2 = N_2 \Phi_c + L_{f2} i_2.$$

Ta nhận thấy s.đ.đ. tự cảm ở cuộn sơ cấp là :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_c}{dt} - L_{f1} \frac{di_1}{dt},$$

nghĩa là tổng của s.đ.đ. ở cuộn sơ cấp của biến thế lí tưởng và s.đ.đ. ở các đầu nối của một cuộn cảm  $L_{f1}$ .

# Áp dụng 4

## Độ tự cảm rò của một hệ các mạch điện ghép tuyến tính

Cho một hệ hai mạch điện ghép. Thông lượng đi qua mạch sơ cấp có dạng :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

và thông lượng đi qua mạch thứ cấp là :

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1,$$

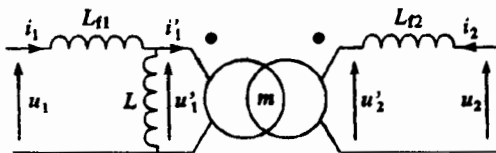
với  $M^2 < L_1 L_2$ .

Cho  $k = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}$  là hệ số ghép các mạch điện.

Chúng minh rằng hệ có thể được mô hình hóa như hình 16, mà theo đó ta có :

$$L_{f1} = (1-k)L_1, \quad L_{f2} = (1-k)L_2,$$

$$L = k L_1 \quad \text{và} \quad m = \frac{M}{k L_1} = \frac{k L_2}{M}.$$



H.16. Mô hình của một hệ hai mạch điện ghép tuyến tính.

Các hệ thức của biến thế lí tưởng cho ta :

$$u'_2 = m u'_1 \quad \text{và} \quad i'_1 = -m i_2.$$

Ở cuộn sơ cấp của biến thế :

$$u'_1 = L \frac{d(i_1 - i'_1)}{dt} = L \frac{di_1}{dt} + m L \frac{di_2}{dt},$$

đó đó :

$$u_1 = L_{f1} \frac{di_1}{dt} + u'_1 = (L_{f1} + L) \frac{di_1}{dt} + m L \frac{di_2}{dt}.$$

Ở cuộn thứ cấp của biến thế :

$$u_2 = L_{f2} \frac{di_2}{dt} + u'_2 = L_{f2} \frac{di_2}{dt} + m u'_1$$

$$= (L_{f2} + m^2 L) \frac{di_2}{dt} + m L \frac{di_1}{dt}.$$

Bằng cách đồng nhất với :

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

và 
$$u_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt},$$

ta được :

$$L_1 = L_{f1} + L, \quad L_2 = L_{f2} + m^2 L \quad \text{và} \quad M = m L.$$

Điều này được nghiệm đúng đối với :

$$L_{f1} = (1-k)L_1, \quad L_{f2} = (1-k)L_2, \quad L = k L_1 \quad \text{và}$$

$$m = \frac{M}{k L_1} = \frac{k L_2}{M}.$$

Lưu ý rằng cả ba hệ thức này không cho phép xác định  $L_{f1}$ ,  $L_{f2}$ ,  $L$  và  $m$  một cách duy nhất.

### 3.2. Điện trở các cuộn dây

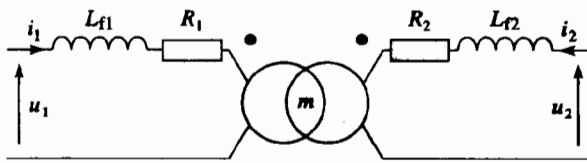
Điện trở các cuộn dây gây ra sự sụt áp  $R_1 i_1$  ở cuộn sơ cấp và  $R_2 i_2$  ở cuộn thứ cấp. Điện áp ở hai đầu nối của cuộn sơ cấp có dạng :

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi_c}{dt} + L_{f1} \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 .$$

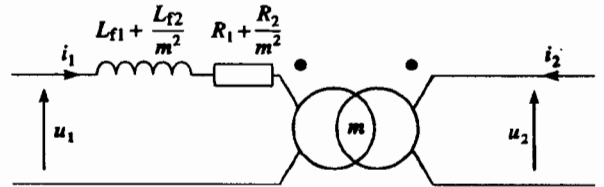
Điện trở các cuộn sơ cấp và thứ cấp có thể được mô hình hóa bằng một điện trở mắc nối tiếp với cuộn sơ cấp và cuộn thứ cấp của biến thế lí tưởng.

### 3.3. Mô hình của biến thế thực

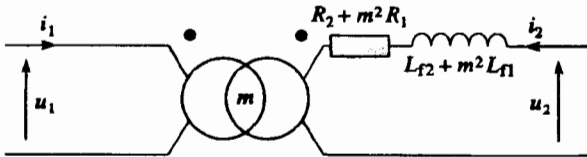
Xuất phát từ mô hình (H.17) làm nổi bật các độ tự cảm rò và điện trở các cuộn dây, ta có thể xác định hai mô hình tương đương bằng cách sử dụng sự truyền đạt trở kháng. Như vậy, ta thu được các hình 18 và 19, tương ứng riêng rẽ với sự truyền đạt tất cả các trở kháng sang cuộn sơ cấp và thứ cấp của biến thế.



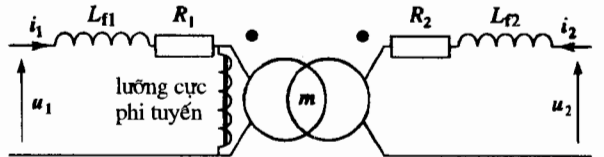
H.17. Mô hình biến thế thực với các độ tự cảm rò và điện trở các cuộn dây.



H.18. Mô hình biến thế thực với các độ tự cảm rò và điện trở các cuộn dây quy về cuộn sơ cấp.



H.19. Mô hình biến thế thực với các độ tự cảm rò và điện trở các cuộn dây quy về cuộn thứ cấp.



H.20. Mô hình phi tuyến của biến thế thực.

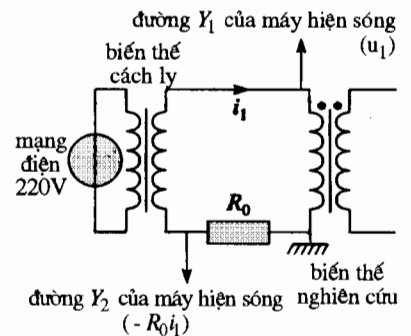
Sự mô hình hóa này thường rất không đầy đủ. Nó có thể được cải thiện bằng cách thêm vào một lượng cực mắc song song với cuộn sơ cấp của biến thế (H.20). Lượng cực này có kể đến các đặc trưng của mạch từ. Đáng tiếc là nó không thể được mô hình hóa bằng một phần tử tuyến tính. Việc nghiên cứu một mạch điện gồm các biến thế, thường đòi hỏi phải có các công cụ tính toán mạnh.

## 4 Các tính chất từ của lõi

### 4.1. Dòng điện và điện áp trên cuộn sơ cấp

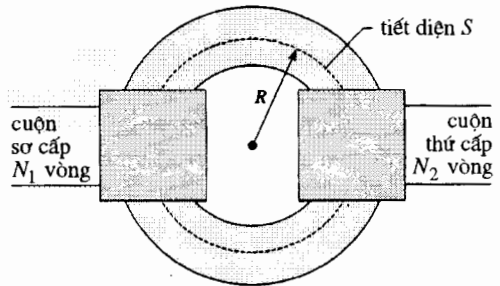
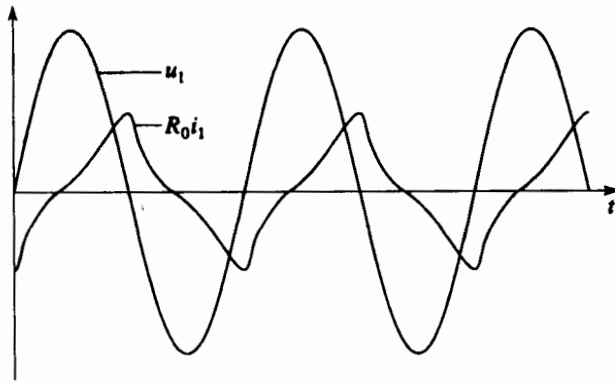
Ta dùng mạch trên hình 21 để quan sát đồng thời cường độ dòng điện và điện áp của cuộn sơ cấp của một biến thế trên máy hiện sóng, khi không có dòng điện trong cuộn thứ cấp (cuộn thứ cấp không tải).

Vì lí do an toàn, nên nhất thiết phải cách ly mạch điện nghiên cứu với mạng điện (xem H.Prépa, Điện tử học II, năm thứ nhất) : không bao giờ được nối một trong các dây của mạng 220V với mát (vỏ) của máy hiện sóng !



H.21. Quan sát cường độ dòng điện và điện áp của cuộn sơ cấp trên máy hiện sóng.

Chính vì những lí do đó mà ta sử dụng trong mạch trên hình 21, một biến thế cách li để cách điện biến thế nghiên cứu với mạng điện. Ta nhận xét thấy (H.22) tương ứng với một điện áp hình sin là một cường độ dòng điện xoay chiều không hình sin và không đối xứng. Đặc trưng dòng điện - điện áp của mạch như vậy là không tuyến tính.



H.22. Cường độ dòng điện và điện áp ở cuộn sơ cấp của một biến thế.

H.23. Biến thế hình xuyên.

## 4.2. Đường chu trình từ trễ

Trong lõi sắt từ của biến thế, hệ thức giữa trường  $\vec{B}$  và kích thích từ  $\vec{H}$  :  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}(\vec{H})$ , trong đó  $\vec{M}$  chỉ độ từ hóa của vật liệu, là không tuyến tính.

Khi trở lại mô hình biến thế hình xuyên ở mục § 1 (H.23), ta có thể giả thiết rằng tất cả các trường đều cộng tuyến trong lõi. Ta đề nghị vẽ đường cong  $B(H)$  bằng cách hơi biến đổi mạch trên hình 21. Nếu  $S$  là tiết diện lõi và  $l$  và chiều dài trung bình của nó,  $N_1$  và  $N_2$  là số vòng ở cuộn sơ cấp và thứ cấp, thì ta có :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 S \frac{dB}{dt}, \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt};$$

và 
$$H = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{l} = \frac{N_1 i_m}{l}.$$

Khi cuộn thứ cấp là mạch hở, thì  $i_2 = 0$  và các biểu thức này rút gọn về :

$$u_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 S \frac{dB}{dt} \quad \text{và} \quad H = \frac{N_1 i_1}{l}.$$

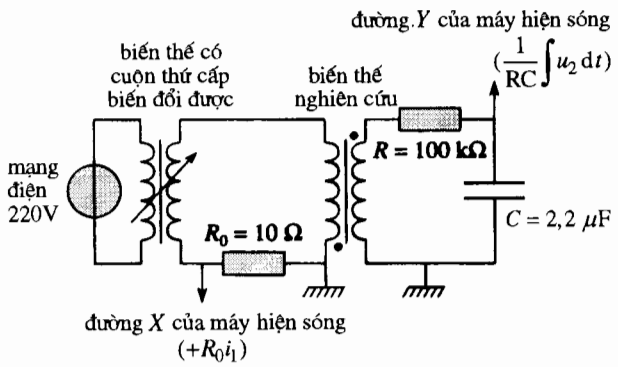
Ta thừa nhận rằng các kết quả này vẫn còn giá trị trong trường hợp một biến thế bất kì.

Ta hãy nghiên cứu mạch trên hình 24. Một biến thế có cuộn thứ cấp biến đổi được hay một biến thế cách li kèm theo một biến thế tự ngẫu (H.25 và 26) cho phép cô lập mạch nghiên cứu với mạng điện và cho phép chọn các biên độ khác nhau đối với điện áp ở cuộn sơ cấp.

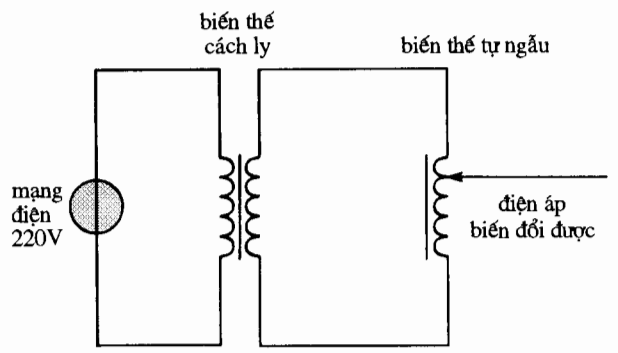
Điện áp ở hai đầu điện trở  $R_0$  tỉ lệ với cường độ  $i_1$  chạy qua cuộn sơ cấp và do vậy cũng tỉ lệ với  $H(t)$ , vì  $i_2$  không đáng kể. Ở cuộn thứ cấp, cầu chia điện áp RC giữ vai trò của bộ giả - tích phân.

Thật vậy, trở kháng vào của máy hiện sóng vào cỡ megaôm có thể bỏ qua so với  $R$ , và hằng thời gian  $RC = 0,22$  s là lớn so với chu kì  $T$  (20 ms) của tín hiệu ở 50 Hz.

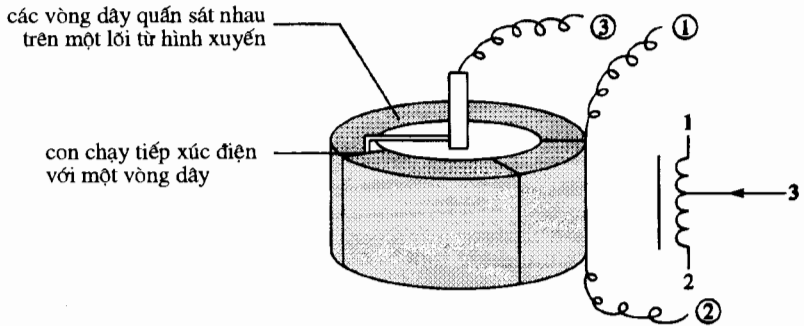
1.900.01.908



H.24. Mạch dùng để vẽ một chu trình từ trễ.



H.25. Một biến thế cách ly và một biến thế tự ngẫu có thể thay cho một biến thế có cuộn thứ cấp biến đổi được.



H.26. Biến thế tự ngẫu : nó được cấu thành từ một cuộn dây duy nhất, trải với biến thế "cổ điển". Mạch sơ cấp tương ứng với toàn bộ số vòng dây giữa 1 và 2, còn cuộn thứ cấp gồm các vòng giữa con chạy 3 và đầu nối 2.

Ta tìm được điện áp  $u_C$  ở các cực của  $C$  xuất phát từ :

$$u_2 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C \approx RC \frac{du_C}{dt} \text{ vì } RC \gg T$$

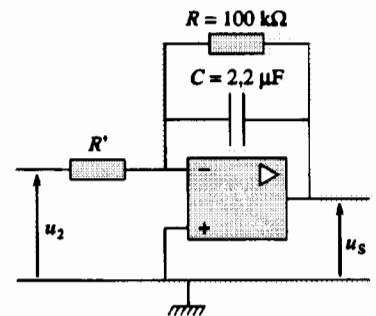
do đó :

$$u_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int u_2 dt = \frac{N_2 S}{RC} B(t),$$

vì hằng số tích phân bằng không ( $u_C$  và  $B(t)$  đều có giá trị trung bình triệt tiêu).

Điện áp ở các cực của  $C$  như vậy sẽ tỉ lệ với  $B(t)$ .

Vậy có thể thay thế mạch ( $R, C$ ) này bằng một máy tích phân có bộ khuếch đại thuật toán, mà lợi ích là trở kháng ra của nó gần triệt tiêu (H.27).



H.27. Một bộ tích phân A.O. (khuếch đại thuật toán) có thể thay cho mạch ( $R, C$ ). Nó có lợi là trở kháng ra nhỏ.  $R'$  phải được chọn theo điện áp ở cuộn thứ cấp của biến thế.

# Áp dụng 5

Tại sao lại đo  $B$  ở cuộn thứ cấp ?

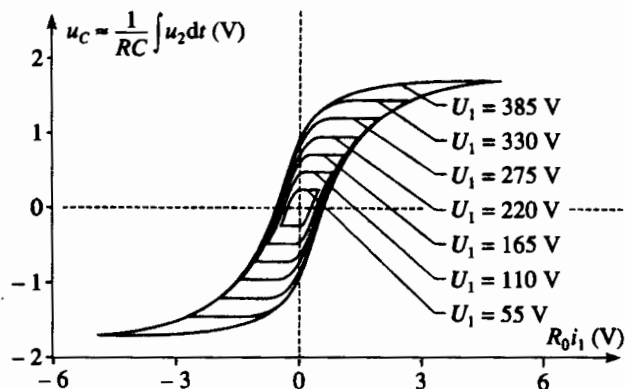
Vì những lí do nào mà người ta lại ưa dùng mạch thứ cấp để đo  $B$  hơn là dùng mạch sơ cấp ?

Ta đã chọn mạch thứ cấp mà không chọn mạch sơ cấp của biến thế để đo từ trường, vì có một dòng điện chạy tuần hoàn trong mạch sơ cấp (cỡ ampe) trong khi gần như không có một dòng điện nào trong mạch thứ cấp (cỡ vài chục microampe).

- Dòng điện này ở trong mạch sơ cấp gây ra một sự sụt áp vì cuộn dây có điện trở.
- Các cuộn dây của biến thế biểu hiện một độ tự cảm rò. Từ thông đi qua cuộn sơ cấp như

vậy sẽ khác với  $N_1 S B$ .

Ngược lại, ở cuộn thứ cấp, cường độ dòng điện bằng không và do vậy thông lượng rò cũng bằng không.



H.28. Các chu trình từ trễ.  $u_C = 1 \text{ V}$  tương ứng với khoảng  $B = 1 \text{ T}$  và  $R_0 i_1 = 0,5 \text{ V}$  ở  $H = 100 \text{ A.m}^{-1}$ .

Đối với các giá trị khác nhau của điện áp nuôi biến thế, ta thu được một chuỗi các đường cong khép kín và đối xứng đối với điểm gốc (H.28). Các đường cong này được gọi là các chu trình từ trễ (Xem phần đóng khung).

Chú ý :

Ta còn có thể gặp các chu trình từ trễ giữa hai đại lượng  $x$  và  $y$  trong các lĩnh vực khác của vật lí. Ví dụ bộ so sánh từ trễ đã được nghiên cứu trong điện từ học năm thứ nhất (xem H.Prépa, Điện từ học II, năm thứ nhất).

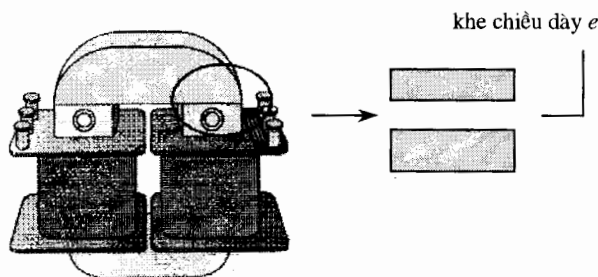
Trừ trên các hình mẫu được thiết kế đặc biệt để vẽ các đường chu trình từ trễ, nhà chế tạo không cho biết số vòng của các cuộn dây của một biến thế. Các thông số  $S$  và  $l$  lại rất khó đo trong trường hợp một biến thế không tháo lắp được. Như vậy, sẽ không dễ dàng tìm thấy các hằng số tỉ lệ giữa  $u_C$  và  $B$ , và giữa  $R_0 i_1$  và  $H$ .

Đối với mạch dùng trên hình 28, các hệ số vào khoảng :

$$H = 100 \text{ A.m}^{-1} \text{ đối với } R_0 i_1 = 0,5 \text{ V và } B = 1 \text{ T đối với } u_C = 1 \text{ V.}$$

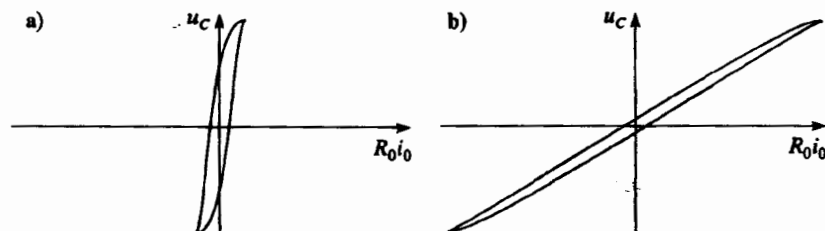
Đối với một biến thế tháo lắp được, thì các thông số này dễ dàng đo được, nhưng lại có điều bất tiện là không có một mạch từ liên tục (H.29).

Tính không liên tục này làm thay đổi đáng kể chu trình từ trễ nhận được theo phương pháp đã dùng ở đây. (H.30). Vấn đề này cũng đã được trình bày ở chương 6, áp dụng 7.



H.29. Khe trong một biến thế có thể tháo lắp được. Các lá tôn của mạch từ không hoàn toàn khít chặt.

Trong nửa chu kỳ mà  $H$  (nghĩa là  $i_1$ ) tăng, thì điểm biểu diễn đi qua phần phải của chu trình. Trong nửa chu kỳ sau mà  $H$  giảm, điểm biểu diễn đi qua phần trái của chu trình. Thành thử, tương ứng với một giá trị của  $H$  có hai giá trị của  $B$ , và giá trị của  $B$  trong lõi phụ thuộc trạng thái trước của lõi (khi  $H$  tăng : phần phải của chu trình ; khi  $H$  giảm : phần trái của chu trình).



H.30. Tác động do sự làm biến đổi khe.

- Chu trình từ trễ không có khe.
- Chu trình từ trễ với một khe 0,1 mm, nghĩa là cỡ chiều dày của một tờ giấy.

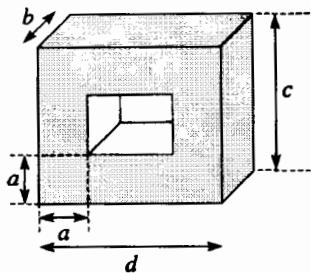
# Áp dụng 6

## Xác định định lượng B và H

Lõi của một biến thế tháo lắp được có các đặc trưng hình học như sau :

$$a = b = 5 \text{ cm và } c = d = 15 \text{ cm (H.31)}.$$

Cuộn sơ cấp có 1000 vòng dây và cuộn thứ cấp có 250 vòng dây.



H.31. Lõi của một biến thế tháo lắp được.

Hay tính độ lớn các hệ số tỉ lệ giữa cường độ dòng điện trong mạch sơ cấp và H, rồi giữa điện áp ở các cực của mạch tích phân (R, C), (với  $R = 100 \text{ k}\Omega$  và  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ), và B.

Sự áp dụng định lí AMPERE cho ta :  $Hl = N_1 i_1$ , trong đó  $l$  là chiều dài trung bình của mạch từ :

$$l \approx 2(c - a + d - a) = 2c + 2d - 4a = 40 \text{ cm},$$

$$\text{do đó } H = 2,5 i_1$$

với  $H$  ra  $\text{A.m}^{-1}$  và  $i_1$  ra mA.

Điện áp ở các cực của tụ điện là :

$$u_C \approx \frac{1}{RC} \int u_2 dt = \frac{\Phi_2}{RC} \approx \frac{N_2 ab B}{RC},$$

nghĩa là  $B \approx 0,16 u_C$  ( $B$  ra tesla và  $u_C$  ra vôn).

► Để tập luyện : bài tập 9.

## 4.3. Các đặc trưng của chu trình từ trễ

### 4.3.1. Tính chất sắt từ

Ta đưa vào độ từ hóa  $\vec{M}$  của mạch từ :  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ . Khi có sự biến thiên xoay chiều của kích thích từ, thì độ từ hóa cũng vẽ một chu trình. Đối với một giá trị  $H$  cho trước, thì  $M$  sẽ có giá trị khác nhau tùy theo  $H$  tăng hay  $H$  giảm.

Ta nhận thấy thông thường  $B$  rất lớn so với  $\mu_0 H$  ( $B \gg \mu_0 H$ ), vậy  $M$  cũng rất lớn so với  $H$  ( $M \gg H$ ) và  $\mu_0 M$  có thể lẫn với  $B$  ( $B \approx \mu_0 M$ ).

Thông thường, thì  $B \gg \mu_0 H$ , vậy  $M \gg H$  và  $B \approx \mu_0 M$ .

Ta sử dụng các kết quả trên hình 28 để xác định cỡ độ lớn, trong ứng dụng thường ngày, của tỉ số :

$$\frac{|\vec{M}|_{\max}}{|\vec{H}|_{\max}} \approx \frac{|\vec{B}|_{\max}}{\mu_0 |\vec{H}|_{\max}}.$$

Đối với một từ trường 1 T, ta có một kích thích cực đại  $300 \text{ A.m}^{-1}$ , điều này cho một tỉ số cực tiểu gần 2500 (vào khoảng đó). Giá trị này cho ta cỡ độ lớn của độ từ thẩm tương đối  $\mu_r$  của vật liệu (ta nhớ rằng  $B = \mu_0 \mu_r H$ ), thường lấy giá trị lân cận 5000. Trong các điều kiện đó, ta được :

$$\frac{|\vec{M}|_{\max}}{|\vec{H}|_{\max}} \approx \mu_r = 5000.$$

Tỉ số này rất lớn và ta có đúng  $M \gg H$ .

Hệ thức giữa độ từ hóa và kích thích từ là không tuyến tính và phụ thuộc vào các trạng thái trước của môi trường từ.

Độ từ hóa  $\bar{M}$  luôn là lớn đối với một kích thích từ  $\bar{H}$ , kể cả là yếu :  $M \gg H$ , và do vậy  $B \approx \mu_0 M$ .

Các tính chất này tương ứng với hiện tượng sắt từ.

### 4.3.2. Độ từ hóa bão hòa

Ta hãy dùng một điện áp nuôi lớn hơn hẳn điện áp danh định của biến thế. Dòng điện trong mạch sơ cấp tăng đáng kể. Điều này có nghĩa là  $H_{max}$  lúc đó tăng nhanh hơn  $B_{max}$  rất nhiều.

Chú ý :

- Khi tiến hành thí nghiệm, phải chăm chú theo dõi giá trị cực đại của dòng điện ở cuộn sơ cấp. Để tránh có một điện áp nuôi quá lớn, thì có thể nuôi biến thế bằng cuộn thứ cấp của nó đối với một biến thế hạ áp.
- Khi độ từ hóa của lõi từ đạt tới giá trị bão hòa của nó, thì lõi sẽ không dẫn các đường sức về một hướng nữa. Từ trường không còn đều nữa và cách thức thực nghiệm để vẽ chu trình từ trở sẽ không cho các kết quả chính xác.

Chu trình từ trở  $B(H)$  nhận được lúc đó sẽ có hai miền (a) và (c) (H.32), tại đó hai nhánh của chu trình hợp làm một, và cũng tại đó  $B$  biến đổi tuyến tính theo  $H$ . Độ dốc ở đây rất nhỏ, vào cỡ trị số của  $\mu_0$ , nghĩa là  $1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ . Trong miền này, ta có thể viết  $B = \mu_0(H + M_{sat})$ .

Độ từ hóa của lõi lúc đó là không đổi và cực đại. Nó được gọi là độ từ hóa bão hòa.

Giá trị  $\mu_0 M_{sat}$ , được rút ra từ các số đo, là vào cỡ 1,8 T. Nó phụ thuộc vào thành phần hợp kim cấu tạo các lá tôn làm lõi từ và có thể biến đổi từ 0,8 đến 3 T.

### ► Để tập luyện : bài tập 8.

### 4.3.3. Trường còn dư

Ta hãy nghiên cứu phần chu trình tương ứng với sự giảm của  $H$  bắt đầu từ giá trị cực đại của nó, nghĩa là miền (b) trên hình 32. Ta nhận thấy rằng khi  $H = 0$  (điểm  $A_R$  trên đường cong), thì từ trường không triệt tiêu.

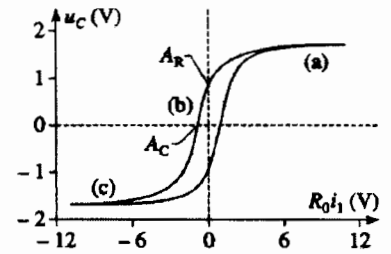
Giá trị  $B_r$  của  $B$  tương ứng, được gọi là trường dư (cảm ứng từ dư).

Tại điểm này,  $\bar{B}_r = \mu_0 \bar{M}_r$  : như vậy, mạch từ biểu hiện một độ từ hóa  $M_r$  khi không có kích thích từ, gọi là độ từ hóa còn dư.

Từ trường trong một nam châm vĩnh cửu là trường dư của nó.

Hiện tượng còn dư có hại trong các hệ đọc từ tính.

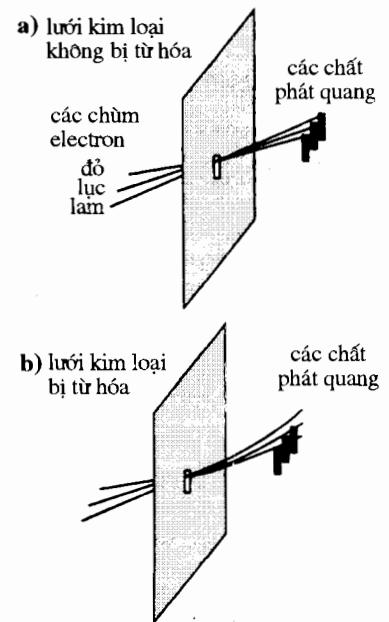
Thành thử, các đầu đọc băng từ phải được khử từ nếu chúng ngẫu nhiên bị từ hóa. Đó cũng là trường hợp của các màn hình máy tính (H.33a và b).



H.32. Sự bão hòa.

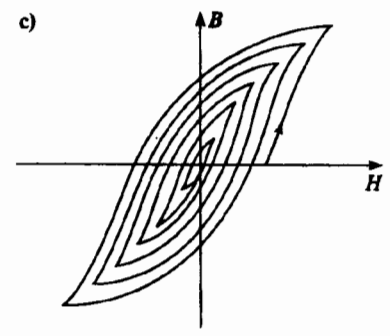
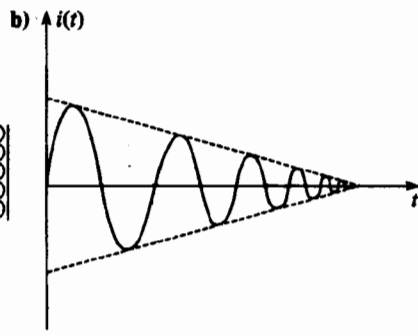
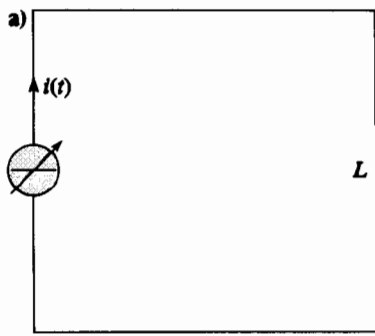
$H_C \approx 150 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$  với  $B_r \approx 1 \text{ T}$  và  $B_{sat} \approx 1,8 \text{ T}$ .

- $u_C = 1 \text{ V}$  tương ứng với :  $B = 1 \text{ T}$
- $R_0 i_1 = 0,5 \text{ V}$  tương ứng với  $H = 100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ .



H.33. Màn hình máy tính.

- a. Các chùm electron bắn phá màn hình ngang tâm các chất phát quang đã dự kiến : ảnh chất lượng tốt.
- b. Các chùm electron không bắn phá màn hình ngang tâm các chất phát quang đã dự kiến : ảnh chất lượng xấu.



Muốn thực hiện sự khử độ từ hóa này, người ta cho vẽ các chu trình từ trở ngày càng nhỏ ở môi trường từ (H.34), cho tới khi gần như hủy được độ từ hóa của nó.

**H.34.** Sự khử độ từ hóa : ta làm cho vật liệu phải chịu các chu trình từ trở ngày càng nhỏ.

#### 4.3.4. Trường kháng từ

a. Mạch.

Khi tiếp tục giảm mãi  $H$ , thì  $B$  sẽ triệt tiêu ứng với một giá trị âm của  $H$  (điểm  $A_C$  trên đường cong ; H.32).

b. Dạng sóng.

c. Chu trình từ trở.

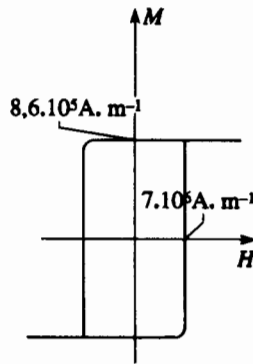
Giá trị của kích thích tương ứng với sự triệt tiêu của từ trường là  $-H_C$ , tại đó  $H_C$  được gọi là trường kháng từ hay kích thích kháng từ.

# Áp dụng 7

### Vật liệu có chu trình từ trở hình chữ nhật

Một số vật liệu (đặc biệt các nam châm) biểu thị các trường kháng từ rất mạnh. Trong trường hợp này từ trường có thể khác đáng kể với  $\mu_0 M$ .

1) Hãy vẽ dáng đi của chu trình từ trở  $B(H)$  đối với vật liệu  $Nd_2Fe_{14}B$ . Vật liệu này cho phép chế tạo các nam châm có tính năng cao, giá cả hợp lí, nhờ đặc trưng của nó (H.35).



**H.35.** Chu trình từ trở  $M(H)$  có trường kháng từ lớn.

2) Xác định độ từ hóa bão hòa, rồi trường còn dư và trường kháng từ.

1) Hệ thức giữa  $B$ ,  $M$  và  $H$  là

$$B = \mu_0(H + M).$$

Các giá trị của  $H$  không cho phép ta nhầm lẫn  $B$  với  $\mu_0 M$ .

Như vậy, ta nhận được chu trình sau đây bằng cách dùng các điểm mà ta biết tọa độ của chúng (H.36)

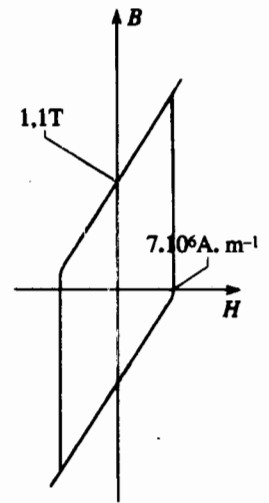
2) Trường dư tương ứng với điểm mà tại đó  $H$  bằng không, nghĩa là :

$$B_r = \mu_0 M = 1,1 \text{ T}$$

Trường kháng từ tương ứng với điểm mà  $B$  triệt tiêu. Vì chu trình có dạng hình chữ nhật :  $H_C \approx 7.10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ , (giá trị cực kì lớn và không cổ điển). Độ từ hóa bão hòa là giá trị giới hạn của  $M$ , nghĩa

là  $M_{sat} = 8,6.10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$  và giá trị tương ứng  $B_{sat} \approx \mu_0 M_{sat} = 1,1 \text{ T}$ .

Các chu trình này cần thiết phải có các kích thích từ rất lớn và ta không thu được chúng bằng phương pháp đã xét trong chương này.

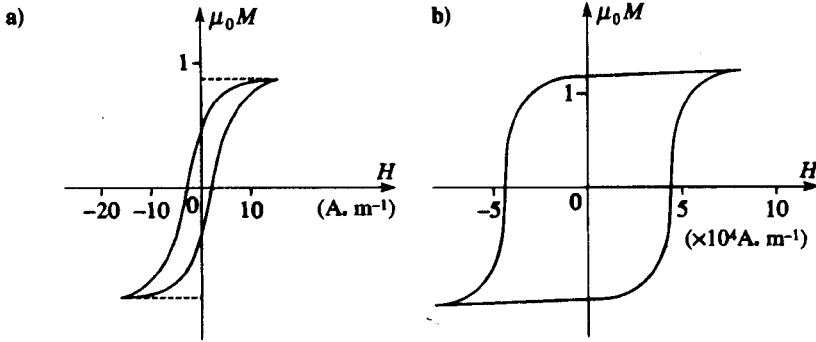


**H.36.** Chu trình từ trở  $B(H)$  có trường còn dư lớn.



## 4.4. Phân loại các môi trường sắt từ

Các môi trường sắt từ được phân loại theo hình dạng chu trình từ trễ của chúng (H.37).



◀ H.37. Các chu trình từ trễ :  
a. môi trường mềm ;  
b. môi trường cứng.

Nếu chu trình hẹp, thì môi trường là *mềm* ; trường kháng từ lúc đó rất yếu (nhỏ hơn  $100 \text{ A.m}^{-1}$ ). Đó là trường hợp các hợp kim sắt-silic, hay sắt-kẽm, các lõi biến thế.

Nếu chu trình rộng, thì môi trường là *cứng* ; trường kháng từ lúc này rất lớn (lớn hơn  $1000 \text{ A.m}^{-1}$ ). Đó là trường hợp của thép (sắt với 1% cacbon) và tất cả các vật liệu cấu tạo nam châm.

Thật vậy, trong một nam châm vĩnh cửu, trường kháng từ phải càng cao hơn càng tốt, sao cho nó tránh được sự khử ngẫu nhiên độ từ hóa của nó.

Một số vật liệu như ferit biểu hiện ngay cả một chu trình hình vuông, vì độ từ hóa của chúng bao giờ cũng gần kề giá trị bão hòa của chúng. Tác dụng nhớ của chúng được dùng để lưu trữ thông tin trong các máy tính thế hệ đầu tiên.

		Trường kháng từ $H_C (\text{A.m}^{-1})$	Trường còn dư $B_r (\text{T})$
Vật liệu mềm	sắt-silic	8	1,4
	ferit mangan kẽm	100	0,35
Vật liệu cứng	thép (sắt tôi cacbon)	$4.10^3$	1,0
	alnico (nam châm vĩnh cửu)	$5.10^4$	0,7

H.38. Ví dụ về một số vật liệu sắt từ.

## 4.5. Sự tiêu tán năng lượng trong lõi

### 4.5.1. Dòng điện FOUCAULT

Vật liệu sắt từ cấu thành lõi biến thế thường là một chất dẫn điện thuận trở tốt (hợp kim gốc sắt).

Vì lõi được đặt trong một từ trường biến thiên, nên phương trình

MAXWELL-FARADAY,  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , áp đặt vào lõi một điện trường khác

không. Trường này là nguồn các dòng điện ngày càng mạnh chừng nào mà độ dẫn điện của lõi càng lớn.

Các dòng điện được tạo ra do cảm ứng trong khối lượng của một vật dẫn, được gọi là các dòng điện FOUCAULT. Chúng là nguồn tiêu tán năng lượng theo hiệu ứng JOULE.

# Áp dụng 8

## Các dòng điện FOUCAULT trong một tập hợp các hình trụ dẫn điện.

Một hình trụ dẫn điện, trục ( $Oz$ ), bán kính  $R$ , chiều cao  $h$  và độ dẫn điện  $\gamma$ , được đặt trong một từ trường cộng tuyến với trục của nó  $B_0 \cos \omega t$  giả thiết là đều (người ta bỏ qua từ trường tạo ra bởi các dòng điện cảm ứng trong hình trụ).

1) Xác minh rằng  $\vec{E} = \frac{r}{2} \omega B_0 \sin \omega t \vec{e}_\theta$  trong tọa độ trụ là tương thích với bài toán đang nghiên cứu.

Người ta cho  $\overline{\text{rot}} \vec{A}$  trong tọa độ trụ :

$$\overline{\text{rot}} \vec{A} = \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Từ đó suy ra công suất trung bình tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong hình trụ và biểu diễn tường minh công suất đó theo thể tích hình trụ, tiết diện  $S$  và tần số biến đổi của  $B$ .

Cho :  $S = 5 \text{ cm}^2$ ;  $h = 10 \text{ cm}$ ;  $B_0 = 0,3 \text{ T}$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$  và  $\gamma = 2.10^6 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Chú thích : các dữ liệu này tương ứng với một biến thể có công suất danh định nhỏ (nhỏ hơn 100 W).

2) Hình trụ bán kính  $R$  được thay bằng  $N$  hình trụ giống hệt nhau bán kính  $\frac{R}{\sqrt{N}}$ .

Theo cách này thì thể tích vật chất là đồng nhất. Hãy so sánh các công suất tiêu tán.

1) Điện trường tiếp tuyến với bề mặt vật dẫn, điều này bảo đảm rằng không một dòng điện nào có thể đi ra khỏi bề mặt đó.

Hơn nữa  $\overline{\text{rot}} \vec{E} = \omega B_0 \sin \omega t \vec{e}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  và nghiệm

đúng phương trình MAXWELL-FARADAY.

Công suất tiêu tán trên đơn vị thể tích bởi hiệu ứng JOULE được cho bởi  $\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ , do đó công suất trung bình là :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \iiint_{\text{hình trụ}} \frac{r^2 \omega^2}{8} \gamma B_0^2 r dr d\theta dz,$$

vì  $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ . do đó:

$$\mathcal{P} = \frac{\pi h R^4 \omega^2}{16} \gamma B_0^2 = \frac{\pi}{4} h S^2 \gamma f^2 B_0^2$$

Áp dụng số :  $\mathcal{P} = 9 \text{ W}$ .

Giá trị này không nhỏ so với công suất danh định. Như vậy phải giới hạn tác dụng của các dòng điện FOUCAULT.

2) Đối với mỗi hình trụ, công suất là :

$$\mathcal{P} = \frac{\pi}{4} h S'^2 \gamma f^2 B_0^2 \quad \text{với } S' = \frac{S}{N}.$$

Công suất trung bình tổng cộng bị tiêu tán bởi các dòng điện FOUCAULT  $\mathcal{P}'_{\text{moy}} = N \frac{\pi}{4} h S'^2 \gamma f^2 B_0^2$

như vậy sẽ phải chia cho thừa số  $N$ .

Khi  $N = 100$ , công suất này trở thành không đáng kể.

Áp dụng 8 chỉ rõ rằng những tổn hao do dòng điện FOUCAULT phải tỉ lệ với :

- độ dẫn điện của môi trường ;
- bình phương của tần số ;
- bình phương của tiết diện các lá tôn ;
- bình phương giá trị cực đại của từ trường.

Để giảm tới mức thấp nhất các tổn hao này trong một khối lượng kim loại lớn, thì khối kim loại phải được cấu thành từ các lá mỏng, xếp song song với từ trường, và cách điện với nhau (H.39).

### Chú ý :

- Sự xếp đan xen các lá tôn làm hạn chế các dòng điện FOUCAULT mà không tạo ra các khe rộng.
- Chất cách điện giữa các lá tôn làm thay đổi tiết diện hiệu dụng của vật liệu từ, khiến cho tiết diện này khác với tiết diện của lõi.
- Tỉ số của hai số hạng này là độ phình (độ tăng thể tích) của mạch từ (cỡ 0,9).

### 4.5.2. Các tổn hao do từ trễ

Trở lại mô hình dạng xuyên ở mục § 4.2, cuộn thứ cấp hở. Giả thiết các tổn hao do dòng điện FOUCAULT và do hiệu ứng JOULE trong cuộn sơ cấp là không đáng kể.

Công suất  $\mathcal{P}_H = u_1 i_1$ , tiêu tán trong biến thế lúc đó, chỉ duy nhất là do các tính chất sắt từ của lõi mà thôi.

Theo nghiên cứu ở § 4.2, thì  $H = \frac{N_1 i_1}{l}$  và  $u_1 = -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt}$

(bỏ qua điện trở thuần của cuộn sơ cấp).

Vậy  $\mathcal{P}_H = S l H \frac{dB}{dt}$ . Vì tích số  $S l$  biểu diễn thể tích  $\mathcal{V}$  của lõi từ, nên

công suất  $\mathcal{P}_{H,vol}$  tiêu tán trên đơn vị thể tích của lõi có giá trị :

$$\mathcal{P}_{H,vol} = H \frac{dB}{dt}$$

Năng lượng  $\mathcal{E}_H$  tiêu tán trên đơn vị thể tích trong một chu kỳ  $T$  sẽ là :

$$\mathcal{E}_H = \int_t^{t+T} H \frac{dB}{dt} dt = \oint_{\text{chu trình}} H dB$$

Tích phân này biểu diễn diện tích của chu trình từ trễ.

**Mật độ năng lượng thể tích tiêu tán trong một chu kỳ bằng diện tích của chu trình từ trễ ; công suất trung bình trên đơn vị thể tích tương ứng được xác định bởi :**

$$\langle \mathcal{P}_{H,vol} \rangle = f \oint_{\text{chu trình}} H dB, \text{ trong đó } f \text{ là tần số.}$$

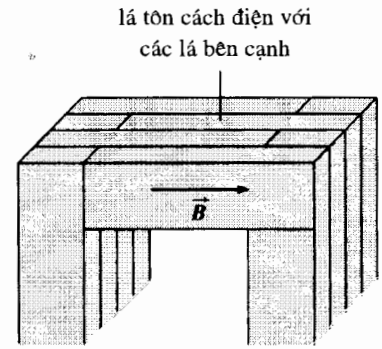
### 4.5.3. Các tổn hao trong sắt

Các tổn hao do các dòng điện FOUCAULT và do từ trễ của lõi chỉ phụ thuộc vào từ trường ở trong lõi. Nếu điện trở và độ tự cảm rò của cuộn sơ cấp đều nhỏ, thì hệ thức giữa trường này và hiệu điện thế ở các cực của cuộn sơ cấp sẽ độc lập với dòng điện chạy trong đó. Thật vậy,  $B$  và  $u_1$  liên hệ với nhau theo :

$$u_1 \approx -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt}.$$

**Các tổn hao trong sắt, theo định nghĩa, thì bằng tổng các công suất tiêu tán trong một biến thế, một phần do các dòng điện FOUCAULT và một phần do từ trễ của lõi.**

Trong gần đúng bậc nhất, các tổn hao trong sắt này chỉ phụ thuộc điện áp nuôi cuộn sơ cấp của biến thế (tần số và biên độ), mà không phụ thuộc dòng điện.



H.39. Sự xếp đan xen các lá tôn để làm lõi biến thế.

#### 4.5.4. Chọn vật liệu

Vật liệu được chọn để làm lõi phải thỏa mãn các điều kiện sau đây :

- Các tổn hao do từ trễ phải cực tiểu, vì chu trình từ trễ phải càng hẹp càng tốt. Thành thử phải chọn một môi trường mềm.
- Các tổn hao do dòng điện FOUCAULT phải rất nhỏ, nên lõi hoặc phải gồm nhiều lá mỏng (điều này chỉ có hiệu quả ở tần số thấp) cách điện với nhau, hoặc được thực hiện trong một vật liệu cách điện.
- Độ từ hóa bão hòa phải rất lớn. Từ trường trong biến thế phải nhỏ hơn giá trị bão hòa của nó để có một sự hoạt động tốt.

Hệ thức  $u_1 \approx -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt}$  chứng tỏ rằng :

$$U_{\max} = N_1 S \omega B_{\max} .$$

Vậy nếu  $B_{\max}$  càng lớn, thì tích  $N_1 S$  có thể càng nhỏ. Lúc đó, kích thước và giá cả của biến thế sẽ giảm.

Trong các biến thế hạ tần, các dòng FOUCAULT bị hạn chế bởi sự xếp lớp của lõi. Lõi gồm các lá hợp kim gốc sắt, như :

- lá hợp kim sắt-silic, được cách điện nhờ sự oxy hóa nhiệt bề mặt của chúng;
- lá hợp kim sắt-silic có các hạt định hướng (các tinh thể cấu thành lá được định hướng bằng cách cán nguội); sự cách điện được thực hiện nhờ một lớp mage-silicat hình thành bằng cách ủ các lá hợp kim;
- lá hợp kim sắt-kẽm, rất nhạy với các va chạm.

Trong các biến thế cao tần (biến thế xung, biến thế nuôi phân đoạn, biến thế dùng cho các tín hiệu vô tuyến điện có tần số tới 1 GHz), thì sự xếp lớp của lõi là không đủ. Nhất thiết phải dùng các vật liệu sắt từ cách điện: các ferit.

##### Chú ý:

*Ferit là một loại gốm kim loại có công thức  $MeFe_2O$ , trong đó Me là một hợp chất các kim loại hóa trị hai, phổ biến nhất là mangan và kẽm. Nó được chế tạo bằng một hỗn hợp các bột oxyt và cacbonat của các kim loại bị nghiền này, rồi được tạo dạng nhờ một chất gắn kết hữu cơ, rồi cho thiêu kết ở nhiệt độ khoảng  $1200^\circ C$ .*

So sánh với các lá tôn silic, thì ferit có lợi thế về tính chất cách điện của chúng, nhưng cũng có những nhược điểm là độ từ hóa bão hòa thấp, độ từ thẩm tương đối nhỏ, dễ gãy vỡ (vật liệu cứng và giòn) và giá thành cao.

▼ H.40. Các đặc trưng của một số môi trường sắt từ.

Thành phần	chiều dày lá tôn (mm)	$\mu_0 M_{sat}$ (T)	$B_r$ (T)	$H_C$ ( $A.m^{-1}$ )	$\mu_r$ max	điện trở suất ( $\mu\Omega \cdot cm$ )	tổn hao ( $W \cdot kg^{-1}$ )
sắt 3% silic	0,3-0,5	2	1	25	7000	48	1 ( $B_{\max} = 1 T, 50 Hz$ )
sắt silic (các hạt có định hướng)	0,05	3	1,4	8	> 40.000	48	0,2 ( $B_{\max} = 1 T, 50 Hz$ )
anhyster (36% Ni, 64%Fe)	0,5	1,3	0,6	56	6.000	75	1,1 ( $B_{\max} = 1 T, 50 Hz$ )
ferit (Mn Zn)	một khối	0,48	0,15	30	2.500	$10^8$	$10^{-3} f$ ( $B_{\max} = 0,2 T, \text{tần số } f$ )

# 5 Đo các đặc trưng của một biến thế

Các phép đo nêu ra ở đây sử dụng một oát kế và các ampe kế, vôn kế hiệu dụng. Biến thế được dùng ưu tiên là công suất lớn (ví dụ 300V.A.) để thực hiện các phép đo tin cậy, đặc biệt là khi nghiên cứu không tải.

## ■ Nguyên lí và cách dùng oát kế (H.41 và 42)

Một oát kế đo công suất trung bình tiêu thụ trong một lưỡng cực, bằng cách đo đồng thời cường độ dòng điện đi qua lưỡng cực và điện áp ở các cực của nó.

Các đại lượng này có thể là không hình sin và cũng không xoay chiều. Ở chế độ hình sin, các phép đo đồng thời công suất trung bình  $\mathcal{P}$ , điện áp hiệu dụng  $U$  và cường độ hiệu dụng  $I$  cho phép tính toán hệ số công suất  $\cos\varphi$  ( $\varphi$  là độ lệch pha giữa cường độ dòng điện và điện áp) theo hệ thức  $\mathcal{P} = UI \cos\varphi$ .

Oát kế gồm hai mạch điện: một mạch cường độ dòng điện và một mạch điện áp.

Điện trở của mạch điện áp thường nhỏ (cỡ một chục kilo ôm trên cứ chuẩn 100 V) và độ sụt điện áp ở các cực của mạch cường độ không thể bỏ qua (cỡ vôn).

Hai mạch lắp ráp của oát kế đều khả dĩ, tùy theo phép đo điện áp ở phía trên hay ở phía dưới phép đo cường độ (H.43).

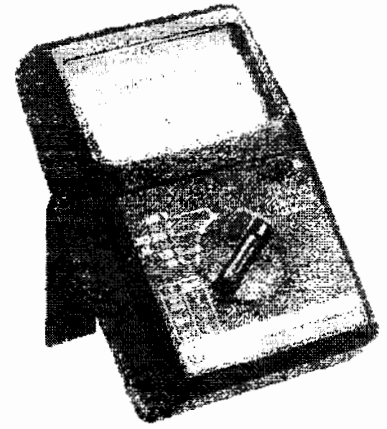
Trong cách mắc mạch phía trên, sai số đo là do độ sụt thế giữa các cực của mạch cường độ dòng điện (vôn kế đo điện áp ở các cực của lưỡng cực và của mạch cường độ dòng điện của oát kế).

Trong cách mắc mạch phía dưới, sai số đo là do dòng điện trong mạch điện áp (ampe kế đo tổng các dòng điện chạy trong lưỡng cực và trong mạch điện áp của oát kế).

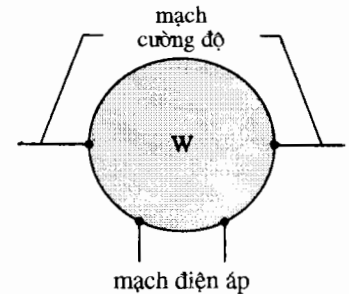
Nếu điện áp ở các cực của lưỡng cực là lớn đối với một cường độ dòng điện nhỏ, thì cách mắc mạch phía trên tốt hơn. Còn cách mắc mạch phía dưới được dùng trong các trường hợp khác.

Một số oát kế có một mạch bù để khử sự tiêu thụ của mạch điện áp được mắc phía dưới. Trong trường hợp này, thì cách mắc mạch phía dưới bao giờ cũng tốt hơn.

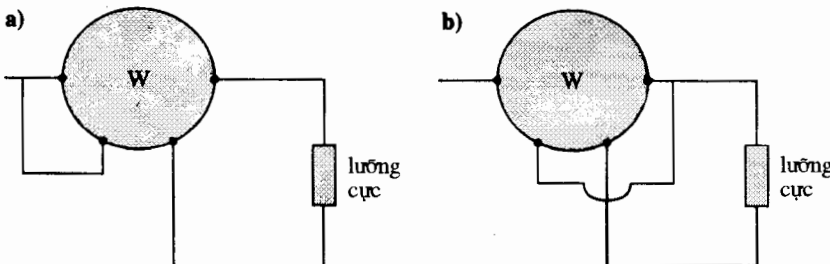
Khi dùng oát kế, phải coi trọng riêng rẽ các cứ chuẩn điện áp và cường độ dòng điện, chứ không phải coi trọng một cứ chuẩn giả thiết về công suất. Trong trường hợp hệ số công suất nhỏ (trường hợp của biến thế không tải), thì oát kế phải chấp nhận các quá tải lớn trên hai cứ chuẩn để đo đúng công suất.



H.41. Oát kế.



H.42. Biểu diễn tượng trưng cho oát kế.



H.43. Các cách mắc mạch phía trên và phía dưới.

a. Mạch mắc phía trên hay mạch rẽ nhánh dài: mạch đo điện áp ở phía trên mạch đo cường độ dòng điện.  
b. Mạch mắc phía dưới hay mạch rẽ nhánh ngắn: mạch đo điện áp ở phía dưới mạch đo cường độ dòng điện.

# Áp dụng 9

## Đo công suất bởi mạch mắc phía trên và phía dưới

Cuộn dây điện áp của một óát kế có điện trở  $15 \text{ k}\Omega$  trên cơ chuẩn  $100 \text{ V}$  và cuộn dây cường độ dòng điện có điện trở  $0,16 \Omega$  trên cơ chuẩn  $2,5 \text{ A}$ .

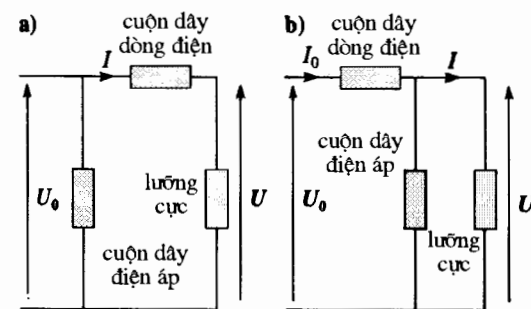
Các cuộn dây có thể chịu một quá tải tương ứng với  $1,5$  lần giá trị của cơ chuẩn.

Người ta muốn đo công suất trung bình tiêu tán bởi một lưỡng cực cảm ứng có trở kháng  $Z = 20 \Omega$  và  $\cos \varphi = 0,15$ , đối với các giá trị khác nhau của điện áp nuôi của nó bằng dòng xoay chiều  $50 \text{ Hz}$ .

1) Tìm điện áp cực đại có thể dùng được, mà không có quá tải làm hỏng óát kế?

2) Lưỡng cực được nuôi ở  $60 \text{ V}$ .

Tìm công suất đo được bằng mạch mắc trên và mạch mắc dưới, rồi so sánh nó với công suất hiệu dụng tiêu thụ bởi lưỡng cực.



**H.44.** Các phép đo khi mắc mạch (điện áp) ở: a. phía trên; b. phía dưới (mạch dòng điện).

1) Cường độ cực đại cho phép là:

$$2,5 \times 1,5 = 3,75 \text{ A}$$

và điện áp cực đại cho phép là:

$$100 \times 1,5 = 150 \text{ V}$$

Công suất cực đại có thể đo được là  $250 \text{ W}$  (giới hạn của thang đo)

Hệ thức  $U = ZI$  ở các đầu của lưỡng cực chứng tỏ rằng  $U$  phải bị giới hạn ở:

$$20 \times 3,75 = 75 \text{ V}$$

và công suất tương ứng  $UI \cos \varphi$  là:

$$75 \times 3,75 \times 0,15 = 42 \text{ W}.$$

2) a) Nếu lưỡng cực được đấu nối trực tiếp, thì công suất là:

$$\frac{U_0^2}{Z} \cos \varphi = 27 \text{ W}.$$

b) Mạch mắc phía trên (H.44a)

Trở kháng phức của lưỡng cực là :

$$Z = Z (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 3 + j 19,8 \Omega.$$

Tập hợp cuộn dòng - lưỡng cực có trở kháng phức :

$$Z' = 3,16 + j 19,77 \Omega,$$

và cường độ dòng điện đi qua tập hợp là :

$$I = \frac{U_0}{|Z'|} = 3,0 \text{ A}.$$

Công suất được đo là :

$$\mathcal{P}'_1 = \text{Re}(Z') I^2 = 28,4 \text{ W},$$

và công suất hiệu dụng tiêu thụ là :

$$\mathcal{P}_1 = \text{Re}(Z) I^2 = 27 \text{ W}.$$

Sai số khoảng  $5\%$ .

c) Mạch mắc phía dưới (H.44b)

Dẫn nạp phức của lưỡng cực là :

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = 7,5 \cdot 10^{-3} - j 0,0494 \Omega^{-1}$$

Dẫn nạp của tập hợp (cuộn dây điện áp - lưỡng cực) là :

$$\underline{Y}'' = 7,57 \cdot 10^{-3} - j 0,0494 \Omega^{-1},$$

nghĩa là một trở kháng :

$$Z'' = 3,03 + j 19,78 \Omega.$$

Trở kháng tổng cộng của óát kế và của lưỡng cực là :

$$Z''' = Z'' + 0,16 \Omega = 3,19 + j 19,78 \Omega$$

Điện áp  $U$  được xác định bởi

$$U = \left| \frac{Z''}{Z'''} \right| U_0 = 59,9 \text{ V}.$$

Vậy, thực ra, điện áp này bị thay đổi rất ít.

Công suất đo được là :

$$\mathcal{P}'_2 = \text{Re}(\underline{Y}'') U^2 = 27,2 \text{ W}$$

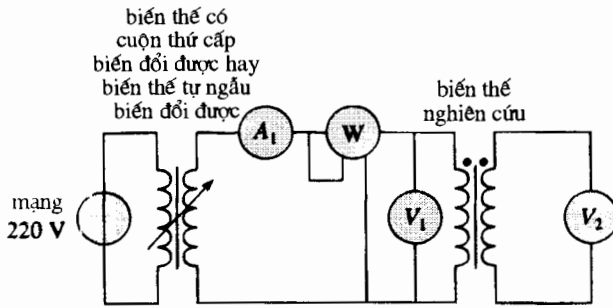
và công suất tiêu thụ là :

$$\mathcal{P}_2 = \text{Re}(\underline{Y}) U^2 = 27 \text{ W}.$$

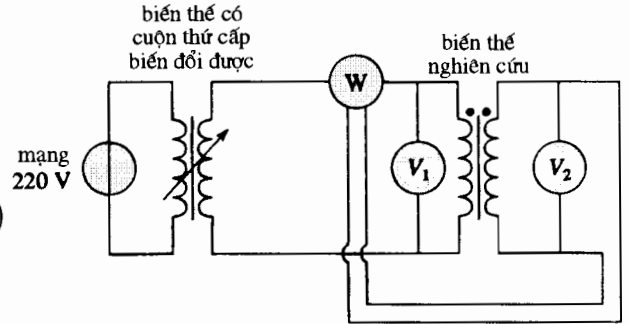
Sai số là  $1\%$ . Cường độ dòng điện  $I$  lớn, vậy ở đây mạch mắc phía dưới được ưa thích hơn.

## 5.1. Nghiên cứu không tải, tổn hao trong sắt

Ta dùng mạch ở hình 45, mà trên đó ta đo các điện áp (hiệu dụng)  $U_{1V}$ ,  $U_{2V}$ , cường độ (hiệu dụng)  $I_{1V}$  và công suất (trung bình)  $\mathcal{P}_{1V}$ . Trở kháng của vôn kế ở cuộn thứ cấp phải đủ lớn để hoạt động của biến thế phải rất gần hoạt động lúc không tải. Oát kế được nối theo mạch mắc phía trên, vì cường độ được đo rất nhỏ.



H.45. Nghiên cứu không tải. Ampe kế  $A_1$  đo  $I_{1V}$ , vôn kế  $V_1$  chỉ  $U_{1V}$ ,  $V_2$  đo  $U_{2V}$  và oát kế đo  $\mathcal{P}_{1V}$ .



H.46. Phương pháp EPSTEIN: các vôn kế  $V_1$  và  $V_2$  cho phép đo tỉ số biến đổi  $m$ .

### 2.1.1

Cường độ trong cuộn sơ cấp không phải hình sin, nên chỉ duy nhất giá trị cho bởi một ampe kế hiệu dụng thực hay sắt từ là có ý nghĩa. Trái lại, nguyên lý của oát kế lại cho phép nó hoạt động với các đại lượng không hình sin.

Công suất đo được bởi oát kế là tổng các tổn hao do hiệu ứng JOULE trong cuộn sơ cấp của biến thế và các tổn hao trong sắt. Ta có thể:

- hoặc bỏ qua các tổn hao do hiệu ứng JOULE, (vì dòng điện không tải rất nhỏ), và coi số chỉ của oát kế là các tổn hao trong sắt;
- hoặc đo các tổn hao trong sắt bằng phương pháp EPSTEIN (H.46)

Oát kế ở hình 46 thực sự chỉ rõ công suất:

$$\mathcal{P}_{\text{Epstein}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_2(t') i_1(t') dt' = m_v \mathcal{P}_{\text{sắt}},$$

trong đó,  $m_v$  là tỉ số biến đổi không tải của biến thế.

Ta hãy bình luận các kết quả thu được khi có các số đo (H.47).

### ■ Điện áp ở cuộn thứ cấp

Đường cong  $U_{2V}$  biến đổi theo  $U_{1V}$  là một đường thẳng, mà độ dốc là  $m_v$ , tỉ số biến đổi không tải. Điều này tương ứng với hệ thức giữa các điện áp đối với biến thế lí tưởng.

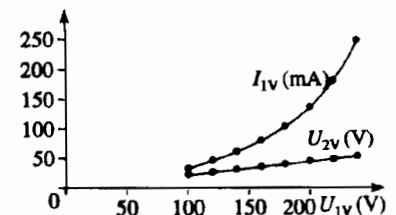
Giá trị này cho phép tính tỉ số của các số vòng (ít khi được nhà chế tạo cho biết):

$$\frac{U_{2V}}{U_{1V}} = m_v \approx m = \frac{N_2}{N_1}.$$

Ở không tải, một biến thế thực trở thành lí tưởng đối với các điện áp.

### ■ Cường độ dòng điện ở cuộn sơ cấp

Đường cong  $I_{1V}$  biến đổi theo  $U_{1V}$  không phải là một đường thẳng: vậy biến thế không thể được coi như một lưỡng cực tuyến tính.



H.47. Ví dụ về các phép đo.

## ■ Công suất

Đường cong công suất biến đổi theo bình phương của điện áp hiệu dụng  $U_1$  ở cuộn sơ cấp (hay ở cuộn thứ cấp) gần là một đường thẳng (H.48).

Giá trị hiệu dụng  $U_2$ , tỉ lệ với  $U_1$ , sẽ tỉ lệ với giá trị cực đại  $B_{\max}$  của từ trường. Như vậy, các tổn hao trong sắt tỉ lệ rất rõ rệt với bình phương của  $B_{\max}$  (nghĩa là với bình phương của giá trị hiệu dụng của điện áp nuôi).

### Chú ý:

Một nghiên cứu sâu hơn chứng tỏ rằng các tổn hao do dòng điện FOUCAULT, kí hiệu  $\mathcal{P}_F$ , tỉ lệ với  $B_{\max}^2$ , trong khi các tổn hao do từ trễ  $\mathcal{P}_H$  lại tỉ lệ với  $B_{\max}^\eta$ , trong đó  $\eta$  là hệ số STEINMETZ, có giá trị nằm giữa 1,6 đối với các vật liệu khối và 2 đối với các lá tôn, phụ thuộc vào bản chất của lõi:

$$\mathcal{P}_F = K_F f^2 B_{\max}^2 \text{ (xem § 4.5.1.)}$$

$$\mathcal{P}_H = K_H f^2 B_{\max}^\eta \text{ (xem § 4.5.2.)}$$

## 5.2. Nghiên cứu ngắn mạch, tổn hao trong đồng

Chú ý, Cuộn thứ cấp của một biến thế chỉ được nối ngắn mạch khi điện áp đặt vào cuộn sơ cấp rất nhỏ so với điện áp danh định để sử dụng. Trong trường hợp ngược lại, sự nung nóng bên trong các cuộn dây có nguy cơ làm hỏng chúng.

Trên mạch ở hình 49, ta nuôi biến thế ở điện áp nhỏ hơn 10% giá trị danh định của nó.

Ta đo đồng thời các cường độ dòng điện ở cuộn sơ cấp  $I_{1cc}$ , ở cuộn thứ cấp  $I_{2cc}$ , điện áp ở cuộn sơ cấp  $U_{1cc}$  và công suất tiêu thụ  $\mathcal{P}_{1cc}$ . Trở kháng của ampe kế ở cuộn thứ cấp phải đủ nhỏ để hoạt động của biến thế gần với hoạt động của nó lúc ngắn mạch. Oát kế được nối trong mạch mắc phía dưới, vì cường độ đo được là lớn.

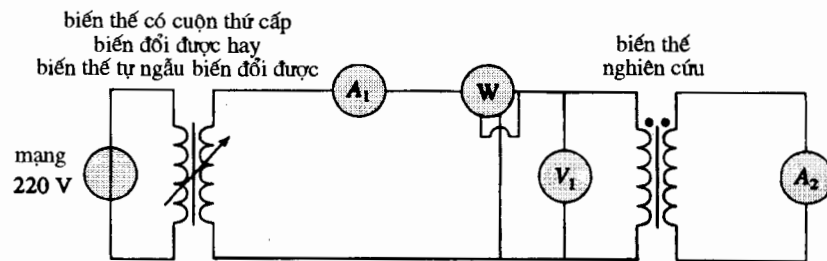
Ta hãy nhận xét các kết quả thu được khi có các số đo trên (hình 50).

### ■ Cường độ dòng điện ở cuộn thứ cấp

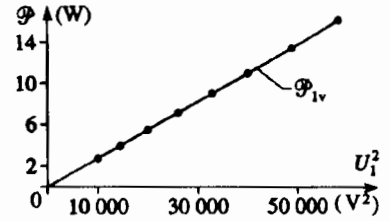
Đường cong  $I_{2cc}$  biến đổi theo  $I_{1cc}$  là một đường thẳng. Tỉ số  $\frac{I_{1cc}}{I_{2cc}}$  rõ

ràng là không đổi và bằng tỉ số biến đổi  $m$ . Điều này tương ứng với hệ thức giữa các cường độ dòng điện của biến thế lí tưởng.

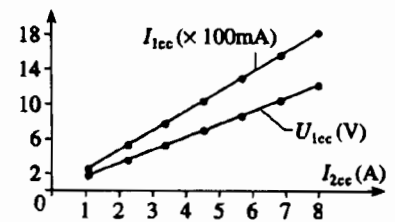
Khi ngắn mạch, một biến thế thực trở thành lí tưởng đối với các dòng điện.



H.49. Nghiên cứu ngắn mạch. Ampe kế  $A_1$  đo  $I_{1cc}$ ,  $A_2$  đo  $I_{2cc}$ , vôn kế  $V_1$  chỉ thị  $U_{1cc}$  và oát kế cho  $\mathcal{P}_{1cc}$ .



H.48. Công suất ở không tải biến đổi theo  $U_1^2$ .



H.50. Ví dụ các phép đo.



### ■ Điện áp ở cuộn sơ cấp

Đường cong  $U_{1cc}$  biến đổi theo  $I_{2cc}$  là một đường thẳng; tình hình cũng như thế đối với sự biến đổi của  $U_{1cc}$  theo  $I_{1cc}$ . Hệ thức giữa dòng điện ngắn mạch và điện áp ngắn mạch là tuyến tính.

### ■ Công suất

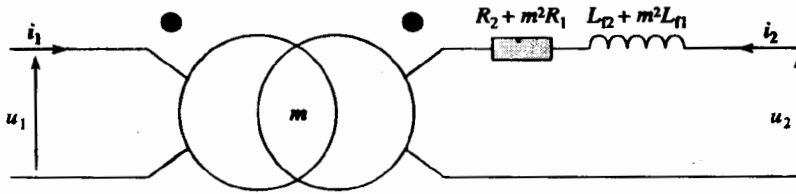
Đường cong công suất trung bình  $\mathcal{P}_{1cc}$  biến đổi theo bình phương của  $I_{2cc}$  là một đường thẳng (H.51)

Công suất tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong các cuộn dây được gọi là các *tổn hao trong đồng*. Công suất này tỉ lệ với bình phương của dòng thứ cấp (hay sơ cấp).

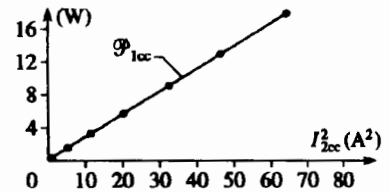
Ta có thể lí giải các kết quả này như thế nào ?

Điện áp ở cuộn thứ cấp bằng không, nghĩa là  $u_2 = 0 = e_2 - R_2 i_2$ . Độ sụt điện áp  $R_2 i_2$  là nhỏ, vậy s.đ. cảm ứng và từ thông trong biến thế đều nhỏ và dòng điện từ hóa là không đáng kể so với cường độ dòng điện ở cuộn sơ cấp.

Biến thế có thể được coi như tuyến tính và ta có thể dùng mô hình của mục § 3.3 (H.52).



H.52. Mô hình tuyến tính của biến thế, với các độ tự cảm rò và điện trở của các cuộn dây quy về cho cuộn thứ cấp.



H.51. Công suất ngắn mạch biến đổi theo  $I_2^2$

# Áp dụng 10

## Xác định trở kháng quy về cho cuộn thứ cấp của biến thế

Dùng các kết quả của các phép đo (H.50 và 51) để xác định trở kháng của biến thế quy về cho cuộn thứ cấp của biến thế nghiên cứu (H.52), rồi xác định giá trị của trở kháng quy về cho cuộn sơ cấp.

Công suất trung bình tiêu tán bởi biến thế là do điện trở của các cuộn dây (một cuộn cảm lí tưởng không tiêu thụ năng lượng), từ đó  $\mathcal{P}_{1cc} = R_{e2} I_{2cc}^2$ , với  $R_{e2} = R_2 + m^2 R_1$ .

Độ dốc của đường thẳng ở hình 51 như vậy sẽ là  $R_{e2}$  ( $\approx 0,3 \Omega$ ).

Điện áp đo ở cuộn sơ cấp bằng  $\frac{1}{m}$  lần điện áp

ra của biến thế lý tưởng của mô hình, nghĩa là :

$$U_{1cc} = \frac{Z_{e2} I_{2cc}}{m} \text{ với } Z_{e2}^2 = R_{e2}^2 + L_{e2}^2 \omega^2,$$

trong đó :  $L_{e2} = L_{f2} + m^2 L_{f1}$ .

Độ dốc của đường thẳng  $I_{1cc}$  biến đổi theo  $I_{2cc}$  cho tỉ số  $m$  ( $\approx 0,25$ ). Độ dốc của đường thẳng  $U_{1cc}$  biến đổi theo  $I_{2cc}$  cho  $\frac{Z_{e2}}{m}$  ( $\approx 1,5 \Omega$ ), do đó  $Z_{e2} \approx 0,37 \Omega$  và  $L_{e2} = 0,7 \text{ mH}$ .

Hệ thức giữa các trở kháng ở cuộn sơ cấp và cuộn thứ cấp là  $Z_1 = \frac{Z_2}{m^2}$ , do đó :

$$R_{e1} = 4,8 \Omega \text{ và } L_{e1} = 11 \text{ mH}.$$

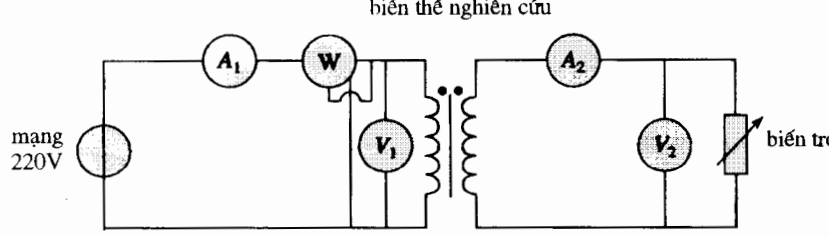
### 5.3. Các đặc trưng khi có tải

Một nghiên cứu khi có tải đầy đủ đòi hỏi phải chọn một tải có cảm kháng hay dung kháng hay thuần trở.

Ta thỏa thuận một tải thuần trở là một biến trở. Trong trường hợp này, công suất cung cấp cho tải đơn giản là  $\mathcal{P}_2 = U_2 I_2$ .

Như vậy, đặt một vôn kế và một ampe kế trong mạch thứ cấp là đủ.

Ta dùng mạch ở hình 53 cho phép đo  $I_1$ ,  $U_1$ ,  $\mathcal{P}_1$ ,  $U_2$  và  $I_2$  đối với các giá trị khác nhau của điện trở tải và ta thực hiện được bảng sau đây (H.54).



H.53. Nghiên cứu có tải. Ampe kế  $A_1$  đo  $I_1$ ,  $A_2$  đo  $I_2$ , vôn kế  $V_1$  cho  $U_1$ ,  $V_2$  cho  $U_2$  và oát kế chỉ  $\mathcal{P}_1$ .

$m_u$  biểu diễn tỉ số các điện áp giữa cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp,  $m_I$  là tỉ số các cường độ dòng điện,  $\eta$  là hiệu suất và  $\Delta U_2$  là độ sụt điện áp ở cuộn thứ cấp (hiệu số giữa  $U_2$  ở không tải và  $U_2$  có tải).

Ta phân tích các đường cong khác nhau đã thu được (H.55).

- Ở công suất danh định, độ sụt điện áp  $\Delta U_2$  không vượt quá 5% điện áp ở cuộn thứ cấp không tải.

Tỉ số biến đổi  $m_u$  giảm rất ít khi cường độ ở cuộn thứ cấp tăng :

$$m_u = \frac{U_2}{U_1} < m_v = \frac{U_{2v}}{U_1} \approx m = \frac{N_2}{N_1}$$

( $m_v$  là tỉ số biến đổi không tải được định nghĩa ở mục § 5.1)

- Nếu biến thế là lí tưởng, thì tỉ số các cường độ sẽ bằng nghịch đảo của tỉ số biến đổi  $I_1 = m I_2$ .

Cường độ ở cuộn thứ cấp càng tăng, thì  $I_1$  càng gần tới giá trị  $m I_2$ . Khoảng cách, giữa cường độ thật tức thời ở cuộn sơ cấp và giá trị lí thuyết của nó, tương ứng với dòng điện từ hóa. Vì dòng điện này gần như không đổi, nên tỉ số các cường độ dòng điện  $m_I$  giảm và tiến về  $m$  khi  $I_2$  tăng.

Tỉ số các cường độ dòng điện giảm để tiến tới  $m$  :

$$m_I = \frac{I_1}{I_2} > m = \frac{N_2}{N_1}$$

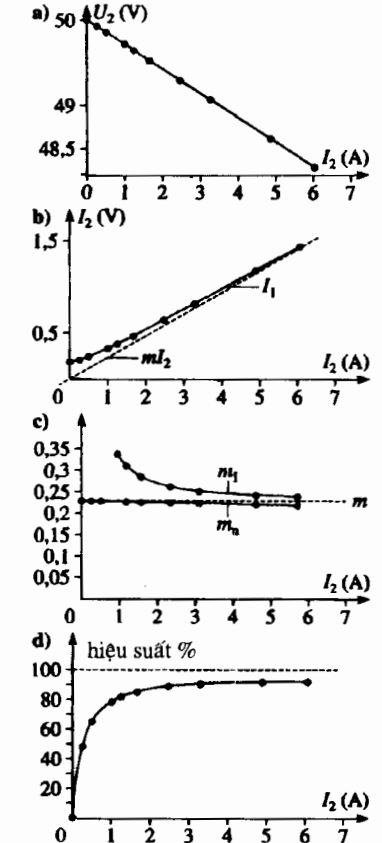
Hoạt động của biến thế có tải gần với hoạt động của biến thế lí tưởng khi được sử dụng gần các giá trị danh định của nó.

- Hiệu suất của biến thế tăng với  $I_2$  tới vùng lân cận công suất danh định ; ngoài vùng đó, hiệu suất giảm. Nó gần đơn vị, trừ đối với các công suất nhỏ.

► **Đề tập luyện : bài tập 5.**

đo	tính
$I_1$ (A)	$\mathcal{P}_2 = U_2 I_2$
$U_1$ (V)	$\Delta U_2$ (V)
$\mathcal{P}_1$ (W)	$m_u = \frac{U_2}{U_1}$
$I_2$ (A)	$m_I = \frac{I_1}{I_2}$
$U_2$ (V)	$\eta = \frac{\mathcal{P}_{2\text{moy}}}{\mathcal{P}_{1\text{moy}}}$

H.54. Đo và khai thác các số đo.



H.55. Ví dụ về các đường cong biến đổi theo cường độ dòng điện ở cuộn thứ cấp.

- Điện áp ở cuộn thứ cấp.
- Cường độ ở cuộn sơ cấp.
- Các tỉ số biến đổi :

$$m_u = \frac{U_2}{U_1} ; m_I = \frac{I_1}{I_2}$$

- Hiệu suất.

## 5.4. Phối hợp trở kháng

Một nguồn xoay chiều, điện trở trong  $R_1$ , giải phóng một công suất cực đại vào một lưỡng cực thuận trở có điện trở  $R_2$  khi trở kháng của nguồn và của tải "thích ứng" với nhau. Có một cách thực hiện sự phối hợp này là xen vào giữa nguồn và tải một biến thế có tỉ số biến đổi đúng, hợp lí. Việc dùng một biến thế có cuộn thứ cấp biến đổi được, cho phép thực hiện một cách đơn giản sự phối hợp này.

Ta thực hiện mạch ở hình 56, trong đó điện trở  $R_2$  của biến trở vẫn luôn luôn nhỏ hơn  $R_1$ .

Ta làm biến đổi dần dần tỉ số biến đổi của biến thế, bằng cách chú ý không để vượt quá các cường độ cực đại cho phép trong các điện trở. Công suất chỉ bởi oát kế đi qua một cực đại đối với một giá trị  $m_0$  của tỉ số biến đổi.

Giá trị này còn chưa được biết, nhưng ta thu được nó bằng một phép đo ở không tải tỉ số các điện áp ở cuộn thứ cấp và sơ cấp của biến thế (xem § 5.1).

Khi tiến hành các phép đo tương ứng với các giá trị khác nhau của  $R_2$ , ta có thể kiểm tra thấy  $m_0^2$  rõ ràng là bằng  $\frac{R_2}{R_1}$ , nếu dòng điện ở cuộn sơ cấp là lớn so với dòng điện ở không tải của biến thế.

### Giải thích

Nếu dòng điện ở cuộn sơ cấp là lớn so với dòng điện ở không tải và các tổn hao là không đáng kể, thì biến thế có thể được coi như một biến thế lí tưởng.

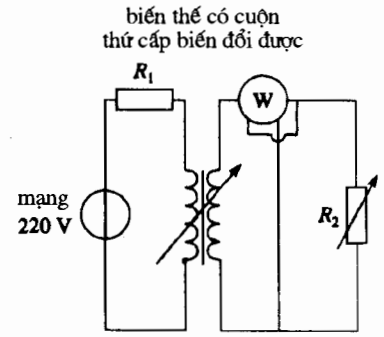
Lưỡng cực tương đương với máy phát và nguồn, nhìn từ cuộn thứ cấp, lúc đó sẽ là một máy phát có s.d.đ  $mE$  và điện trở trong  $m^2R_1$ . Công suất trung bình tiêu tán trong  $R_2$  là :

$$\mathcal{P}_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{1}{R_2} \left( \frac{R_2 m E}{m^2 R_1 + R_2} \right)^2 = \frac{1}{R_2} \left( \frac{R_2 E}{m R_1 + \frac{R_2}{m}} \right)^2.$$

$\mathcal{P}_2$  là cực đại nếu  $m R_1 + \frac{R_2}{m}$  là cực tiểu, nghĩa là nếu :

$$R_1 - \frac{R_2}{m^2} = 0, \text{ do đó } m^2 = m_0^2 = \frac{R_2}{R_1}$$

Lưu ý rằng nếu  $R_2$  lớn hơn  $R_1$ , thì sự phối hợp trở kháng đòi hỏi phải dùng một biến thế tăng thế ( $m > 1$ ).



H.56. Mạch phối hợp trở kháng.

# ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

## ■ BỘ ĐỔI NĂNG LƯỢNG

Biến thế là một bộ đổi điện năng tĩnh. Nó truyền bằng điện xoay chiều và duy nhất bằng điện xoay chiều, công suất điện từ một nguồn đặt trong mạch sơ cấp sang một tải đặt trong mạch thứ cấp. Sự chuyển đổi này được thực hiện mà không làm biến đổi tần số và với một hiệu suất cao tuyệt vời : trong các biến thế công nghiệp, các tổn hao năng lượng nhỏ hơn 1%.

## ■ CÁC ĐẠI LƯỢNG DANH ĐỊNH

Một biến thế phải được phối hợp với nguồn và tải mà nó được mắc nối. Vì lẽ đó mà các nhà chế tạo xác định các đặc trưng sau đây : tần số sử dụng, điện áp nuôi sơ cấp, điện áp ra không tải và công suất biểu kiến.

Công suất biểu kiến là tích số của cường độ danh định (tương ứng với các điều kiện sử dụng tối ưu của biến thế) với điện áp ra không tải ; nó được biểu thị ra VA, chứ không phải ra óát.

## ■ CÁC ĐẦU NỐI TƯƠNG ĐỒNG

- Một sự định hướng tùy ý của mạch từ cho phép xác định sự định hướng của các cuộn dây và, đối với tải liệu này, là sự định hướng của các cường độ dòng điện.
- Nó cũng cho phép xác định một cặp đầu nối tương đồng của biến thế, được đánh dấu theo quy ước bởi các chấm đen ở ngang các đầu nối, gồm đầu nối cuộn sơ cấp và đầu nối cuộn thứ cấp mà qua đó đi vào một dòng điện dương. Về thực nghiệm, thì các điện áp của hai đầu nối tương đồng đều đồng pha.

## ■ CÁC ĐẶC TRƯNG ĐIỆN TỪ CỦA MỘT BIẾN THẾ

- Từ thông chung  $\Phi_c$  là thông lượng của từ trường đi qua một vòng dây bất kì của cuộn dây.

- Dòng điện từ hóa được xác định bởi  $i_m = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{N_1}$ . Đó là cường độ dòng điện chạy

qua cuộn sơ cấp khi không có mặt dòng điện trong cuộn thứ cấp, tạo ra cùng một kích thích từ như ở điểm hoạt động xác định bởi các cường độ  $i_1$  và  $i_2$ .

- Nếu từ trường có thể được bỏ qua ở bên ngoài mạch từ (từ trường  $\vec{B}$  được "dồn về một hướng" bởi lõi từ) và nếu các điện trở của các cuộn dây rất nhỏ, thì lúc đó :

$$u_1 \approx -e_1 = N_1 \frac{d\Phi_c}{dt} \quad \text{và} \quad u_2 \approx -e_2 = N_2 \frac{d\Phi_c}{dt}$$

Trong các điều kiện đó, tỉ số  $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$ , được gọi là tỉ số biến đổi, sẽ độc lập với tải nối với cuộn thứ cấp của biến thế.

- Tỉ số các dòng điện bằng nghịch đảo của tỉ số biến đổi nhưng ngược dấu, nếu dòng điện từ hóa là không đáng kể (đây là trường hợp của một biến thế "tốt") :

$$\frac{i_2}{i_1} \approx -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}$$

Trong các điều kiện này, tỉ số trên độc lập với các điện áp  $u_1$  và  $u_2$  ở các đầu nối của biến thế.

• Các phương trình điện của biến thế chỉ có giá trị ở chế độ xoay chiều (nghĩa là đối với các tín hiệu có giá trị trung bình triệt tiêu).

## ■ MÔ HÌNH CỦA BIẾN THẾ LÝ TƯỞNG

Biến thế lý tưởng được đặc trưng bởi  $u_2 = m u_1$  và  $i_2 = -\frac{i_1}{m}$ , trong đó  $m$  là tỉ số biến đổi.

Công suất tức thời cung cấp cho cuộn sơ cấp của biến thế lý tưởng được truyền toàn bộ sang tải nhờ cuộn thứ cấp. Không có lưu trữ, cũng không có tiêu tán năng lượng.

## ■ SẮT TỪ

Hệ thức giữa từ trường  $B$  (hay độ từ hóa  $M$ ) và kích thích từ  $H$  là phi tuyến (không tuyến tính) và phụ thuộc các trạng thái trước của môi trường từ.

Chu trình  $B(H)$ , thu được ở chế độ không đổi, được gọi là *chu trình từ trễ* của môi trường nghiên cứu.

Độ từ hóa  $M$  lớn đối với một kích thích từ  $H$  dù là rất yếu.

Đối với các kích thích từ lớn, độ từ hóa biểu hiện tính bão hòa. Trong trường hợp này, khi giảm kích thích, từ trường đi qua một giá trị khác không (gọi là *từ trường dư*) đối với một kích thích bằng không, và triệt tiêu đối với một giá trị âm của kích thích (mà môđun được gọi là *kích thích kháng từ*).

Các môi trường từ được phân loại theo hình dạng các chu trình từ trễ của chúng : các vật liệu mềm có một chu trình hẹp và các vật liệu cứng có một chu trình rộng.

## ■ TIÊU TÁN NĂNG LƯỢNG TRONG MỘT BIẾN THẾ THỰC

• Trong lõi từ : *tổn hao trong sắt*

*Tổn hao do các dòng điện FOUCAULT* : các dòng điện được tạo ra do cảm ứng trong khối lượng của một vật dẫn được gọi là các dòng điện FOUCAULT và là nguồn tiêu tán năng lượng do hiệu ứng JOULE.

*Tổn hao do từ trễ* : Mật độ thể tích của năng lượng tiêu tán trong một chu kì, do các tính chất từ của lõi, bằng diện tích của chu trình từ trễ. Công suất trung bình trên đơn vị thể tích tương ứng được xác định bởi :

$$\langle \mathcal{P}_{H, \text{vol}} \rangle = f \oint_{\text{chu trình}} H dB, \text{ trong đó } f \text{ là tần số.}$$

• Trong các cuộn dây : *tổn hao trong đồng*.

Công suất trung bình tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong các cuộn dây được gọi là các *tổn hao trong đồng*.

## ■ BIẾN THẾ THỰC

Ở không tải, một biến thế thực trở thành lý tưởng đối với các điện áp. Khi ngắn mạch, một biến thế thực trở thành lý tưởng đối với các dòng điện.

Hoạt động của biến thế có tải, ở lân cận giá trị sử dụng theo danh định, rất gần với hoạt động của biến thế lý tưởng, nghĩa là :

$$U_2 = m U_1 \quad \text{và} \quad I_1 = m I_2 \quad (\text{các giá trị hiệu dụng}).$$

# Bài tập

## ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

### 1 Các đặc trưng của một biến thế lí tưởng

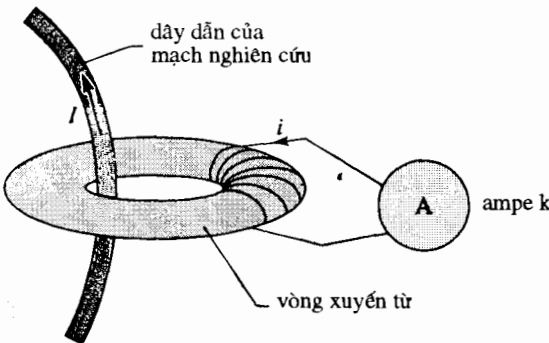
Tỉ số biến đổi của một biến thế lí tưởng là 0,22.

Cuộn thứ cấp có 100 vòng dây.

- 1) Tìm số vòng dây ở cuộn sơ cấp ?
- 2) Cuộn sơ cấp được cung cấp điện với điện áp 1000V (giá trị hiệu dụng) tần số 50 Hz và cuộn thứ cấp được nối với một động cơ công suất trung bình 1000 W và  $\cos\varphi = 0,8$ .
  - a) Tìm giá trị hiệu dụng của điện áp ở cuộn thứ cấp ?
  - b) Tìm các dòng điện trong các mạch sơ cấp và thứ cấp ?

### 2 Kim ampe kế

Kim ampe kế là một thiết bị cho phép đo các cường độ dòng điện xoay chiều thường là lớn, mà không cần thiết phải rẽ nhánh dòng điện trong mạch nghiên cứu. Kim gồm một lõi từ hình xuyên, có thể mở ra để cho vật dẫn đi vòng qua xuyên, và một cuộn dây có  $N$  vòng quấn quanh xuyên. Cuộn dây này được nối với một ampe kế cổ điển.



Người ta giả thiết mạch từ là lí tưởng (nghĩa là độ từ thẩm tương đối của nó được coi là vô hạn)

- 1) Dùng định lí Ampère để xác định hệ thức giữa cường độ dòng điện  $I$  trong mạch nghiên cứu và cường độ  $i$  đo được bởi ampe kế.  
Tìm số vòng dây nếu cỡ chuẩn của ampe kế là 1 A và cường độ cần đo là 500 A ?
- 2) Vì lí do nào mà ở đây ta không thể áp dụng hệ thức giữa các điện áp trong một biến thế lí tưởng ?

### 3 Sự truyền đạt trở kháng và công suất

Cho một biến thế được coi là lí tưởng, có một tỉ số biến đổi  $m = 0,22$ .

Cuộn sơ cấp của nó được nối với một nguồn điện áp có giá trị hiệu dụng 1 kV và tần số 50 Hz.

Cuộn thứ cấp của nó được nối với một động cơ, tiêu thụ một công suất trung bình 5 kW. Động cơ này được coi như một lưỡng cực cảm ứng có  $\cos\varphi = 0,9$ .

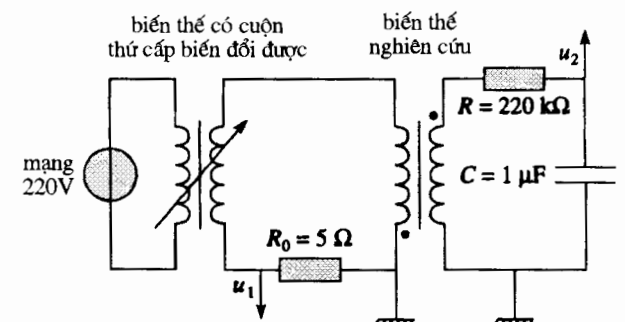
- 1) Tính trở kháng của động cơ.
- 2) Tính trở kháng này quy về cho cuộn sơ cấp của biến thế.
- 3) Thực ra thì đường dây nuôi cuộn sơ cấp của biến thế biểu thị một điện trở  $R = 1 \Omega$ .
  - a) Tìm công suất cung cấp cho động cơ ? Tìm công suất cung cấp bởi nguồn ở 1 kV ?
  - b) So sánh các kết quả này với các kết quả mà ta sẽ nhận được nếu động cơ được nối trực tiếp với cùng đường nuôi ở 220 V (không có biến thế). Kết luận.

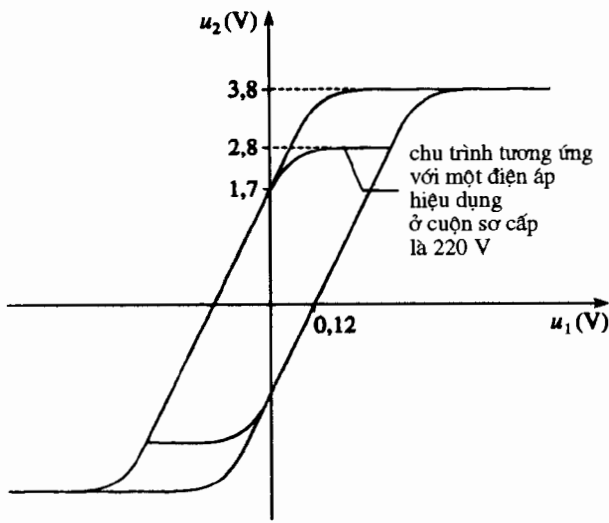
### 4 Các trường đặc trưng của một vật liệu sắt từ

Nhờ mạch dưới đây, người ta ghi được các chu trình từ trễ khác nhau đối với một biến thế, mà cuộn sơ cấp có 1000 vòng và cuộn thứ cấp có 250 vòng.

Chiều dài trung bình  $l$  của lõi là 40 cm và tiết diện của nó là  $25 \text{ cm}^2$ .

- 1) Xác định các hệ thức giữa  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $H$  và  $B$  (với giả thiết  $i_2 \ll i_1$ ).
- 2) Từ đó suy ra từ trường dư, độ từ hóa bão hòa và trường kháng từ của vật liệu.
- 3) Biến thế được dùng ở 220 V, 50 Hz. Đánh giá các tổn hao do từ trễ.





## VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

### 5 Hiệu suất cực đại của một biến thế thực

Với khái niệm một biến thế chịu một điện áp nuôi, thì việc chọn lựa bản chất và hình dạng lõi cũng như số vòng dây ở cuộn sơ cấp, sẽ xác định các trường  $\vec{B}$  và  $\vec{H}$ , và do đó xác định các tổn hao trong sắt của biến thế (được giả thiết là độc lập với cường độ dòng điện trong cuộn thứ cấp). Sau đó còn phải lựa chọn đường kính các dây quấn các mạch sơ cấp và thứ cấp để đạt được hiệu suất cực đại ở chế độ danh định. Giả sử cho một biến thế mà cuộn thứ cấp được nối với một lưỡng cực không nhất thiết là thuận trở, có  $\cos\varphi$  cho trước. Điện trở các cuộn dây rất nhỏ, đến mức có thể coi điện áp  $U_2$  ở các cực của lưỡng cực là độc lập với cường độ dòng điện  $I_2$  chạy qua nó.

1) Chứng minh rằng các tổn hao trong đồng (công suất tiêu tán do hiệu ứng JOULE trong các cuộn dây) có thể được viết  $\mathcal{P}_C = K_2 I_2^2$ , trong đó  $K_2$  là một hàm số không đổi của các điện trở của hai cuộn dây và của tỉ số biến đổi của biến thế (người ta giả thiết biến thế là lí tưởng đối với các dòng điện).

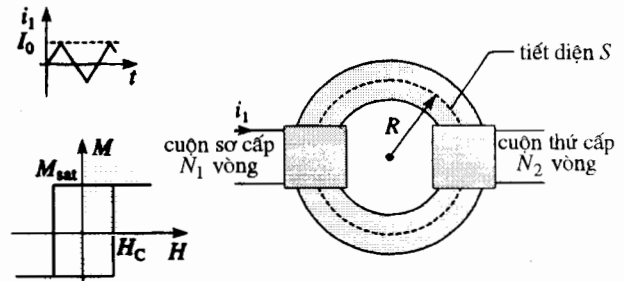
2) Chứng minh rằng hiệu suất (về công suất) là cực đại, nếu cường độ  $I_2$  có giá trị sao cho các tổn hao trong sắt bằng các tổn hao trong đồng. Vẽ dạng của hiệu suất biến đổi theo  $I_2$  đối với :

$$U_2 = 220 \text{ V}, \mathcal{P}_F = 100 \text{ W}, K_2 = 1 \Omega$$

và  $\cos\varphi = 1$ , rồi  $\cos\varphi = 0,7$ .

### 6 Chu trình từ trễ hình chữ nhật

Giả sử chu trình từ trễ cho ta độ từ hóa biến đổi theo kích thích từ có dạng chữ nhật đối với lõi từ của một biến thế.



chu trình từ trễ

Người ta áp đặt vào cuộn sơ cấp của một biến thế kiểu này, một dòng điện dưới dạng tín hiệu tam giác, còn cuộn thứ cấp ở không tải.

Xác định dạng của điện áp thứ cấp khi  $H$  không đáng kể so với  $M_{\text{sat}}$ .

### 7 \* Nghiên cứu một vật liệu sắt từ

Ta nhắc lại các giá trị của số AVOGADRO :

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

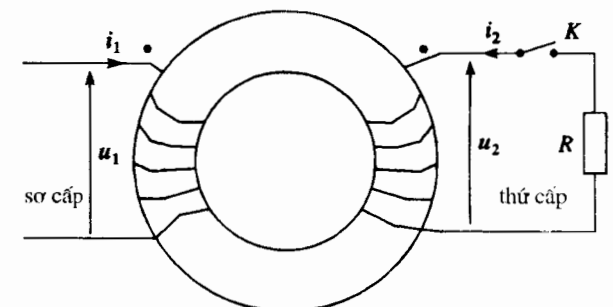
và hằng số BOLTZMANN :

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Giả sử cho một mạch từ hình xuyên chiều dài trung bình  $\ell = 41,3 \text{ cm}$  và tiết diện thẳng  $S = 1,5 \text{ cm}^2$ , được cắt gọt trong một vật liệu sắt từ, đồng chất và dẫn điện, gồm hai cuộn dây mà số vòng là  $N_1 = 250$  và  $N_2 = 500$ .

Cái ngắt mạch  $K$  thoát tiền mở.

Người ta bỏ qua mọi hiện tượng từ trễ và rò từ, cũng như điện trở các cuộn dây.



Ta kí hiệu  $B$  là chuẩn của từ trường,  $H$  là chuẩn của kích thích từ và  $i_1$  là chuẩn của dòng điện trong cuộn 1.

Người ta coi  $B$  có một giá trị duy nhất trong toàn mạch từ và phụ thuộc vào  $H$  tùy theo bảng ghi, theo thực nghiệm dưới đây :

$I_1$ (A)	$H$ (A . m <sup>-1</sup> )	$B$ (T)
$4,38 \cdot 10^{-2}$	26,5	0,10
$8,76 \cdot 10^{-2}$	53,0	0,2
0,175	106	0,4
0,506	307	1,00
0,999	605	1,30
3,003	1 818	1,65
9,651	5 842	2,00
22,8	13 800	2,01

1) Xác định mối liên hệ giữa  $H$  và  $i_1$  theo các số đo ghi trong bảng.

Tìm lại kết quả trên bằng lí thuyết.

2) Biểu diễn dáng đi của đồ thị  $B(H)$ .

Mô tả vật lí đường cong  $B(H)$ , nhất là đối với :

- $H < 150$  A . m<sup>-1</sup> ;
- $H > 5000$  A . m<sup>-1</sup> .

3) Xác định độ lớn của độ từ hóa  $\mathcal{M}$ , kí hiệu  $M_{sat}$ , khi vật liệu bị bão hòa.

4) Khối lượng riêng của vật liệu là :

$$\rho = 7860 \text{ kg.m}^{-3},$$

và khối lượng mol của nó là  $56 \text{ g.mol}^{-1}$ .

Từ đó suy ra độ lớn của mômen từ lưỡng cực  $\mathcal{M}$  mà ta có thể gán cho từng nguyên tử.

5) Bằng cách so sánh năng lượng tương tác của  $\overline{\mathcal{M}}$  trong môi trường  $\overline{B}$  và năng lượng của chuyển động nhiệt ở nhiệt độ chung quanh, hãy tìm độ lớn của  $B$ , ký hiệu là  $B_{sat}$ , mà ta sẽ thu được lúc bão hòa. Bạn nghĩ gì về kết quả này ? Bạn giải thích giá trị thực nghiệm của  $B_{sat}$  như thế nào ?

6) Người ta tìm cách liên kết  $H$  với  $B$  bằng một biểu thức bán thực nghiệm dạng  $H = aB + bB^n$ ,  $n$  là số nguyên lẻ.

Hãy đề xuất các giá trị cho  $a$ ,  $b$  và  $n$ , hệ số  $a$  được ước tính trong miền tuyến tính.

7) Người ta áp vào một điện áp  $u(t) = U_m \cos \omega t$  với  $\omega = 800 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Hãy xác định  $B(t)$  biến đổi theo  $N_1$ ,  $S$ ,  $U_m$  và  $\omega$ .

Áp dụng số : biên độ của  $B$  là 2 T, hãy tính biên độ  $U_m$ .

8) Hãy tính  $i_1(t)$ . Ta thừa nhận rằng biểu thức tìm được đối với  $I_1(t)$  có khai triển thành chuỗi FOURIER :

$$i_1 = 5,675 \sin \omega t - 2,880 \sin(3 \omega t) + 0,959 \sin(5 \omega t) - 0,136 \sin(7 \omega t).$$

9) Cuộn dây 1 chịu một điện áp  $u_1(t)$  kể trên, ta đóng ngắt điện  $K$  : cuộn dây 2 lúc đó mắc nối tiếp với một điện trở  $R = 23 \Omega$ .

Xác định  $B(t)$ . Tìm biểu thức  $i_2(t)$ , cũng như biên độ của nó.

10) Xác định biểu thức mới của  $i_1(t)$  và chứng minh rằng chỉ duy nhất số hạng cơ bản của dòng điện  $i_1(t)$  nói trên là bị thay đổi.

11) Xác định công suất trung bình hấp thụ bởi cuộn dây 1.

Đặt công suất này dưới dạng  $\frac{U_m^2}{2R_{eq}}$ . Biểu thị đơn

giản  $R_{eq}$  biến đổi theo  $R$ ,  $N_2$  và  $N_1$ . Tính  $R_{eq}$ . Tính trị số của công suất trung bình này.

## 8 Nghiên cứu một chu trình từ trễ

Một ferit sắt từ biểu hiện, trong một miền có độ từ hóa yếu, một chu trình từ trễ được xác định bởi hệ

$$\text{thức : } B = \mu_o((\mu_r + \alpha H_o)H + \varepsilon \frac{\alpha}{2}(H_o^2 - H^2)) \text{ với}$$

$\mu_r$ ,  $\alpha$  và  $H_o$  là các hằng số dương và  $\varepsilon = \pm 1$ .

1) Vẽ chu trình từ trễ gọi là chu trình RAYLEIGH, khi  $H$  biến đổi giữa  $-H_o$  và  $+H_o$ .

2) Giải thích trường hợp riêng biệt của một vật liệu tuân theo hệ thức trên với  $\alpha = 0$ .

3) Ta xét một thể tích hình xuyên bằng ferit, có tiết diện  $S$ , mà chu vi trung bình có chiều dài  $l$  (người ta giả thiết  $S \ll l^2$ ). Trên vòng xuyên này, người ta quấn đều đặn  $N$  vòng dây đồng, điện trở không đáng kể, và ta nuôi cuộn dây này bằng một máy phát dòng điện hình sin :

$$i = i_0 \cos \omega t$$

( $i_0$  tương ứng với giá trị  $H_o$  của  $H$ ).

Chứng minh rằng điện áp  $u(t)$  ở các đầu nối của cuộn dây có thể được đặt dưới dạng :

$$u(t) = a \sin \omega t + \varepsilon b \sin 2 \omega t ;$$

Tính các giá trị của  $a$ ,  $b$  và xác định dấu của  $\varepsilon$  theo các giá trị của  $t$ .



Tính năng lượng  $W_h$  tiêu tán do từ trở trong vòng xuyên trong một chu trình.

5) Tìm lại kết quả trên bằng cách dùng các tính chất của chu trình từ trễ.

## 9 \* Mạch hình xuyên gồm nhiều vật liệu

Ta xét một thể tích hình xuyên tiết diện  $S$ , bán kính trung bình  $R$  sao cho  $R^2 \gg S$ , gồm ba phần :

- một miếng vật liệu sắt từ cứng (nam châm) chiều dài  $a = 4\text{ cm}$  ;
- hai miếng vật liệu sắt từ mềm chiều dài tổng cộng  $b = 20\text{ cm}$  ;
- một khe chiều dày  $e$  ( $e > 1\text{ mm}$ ) và tiết diện  $S$ .

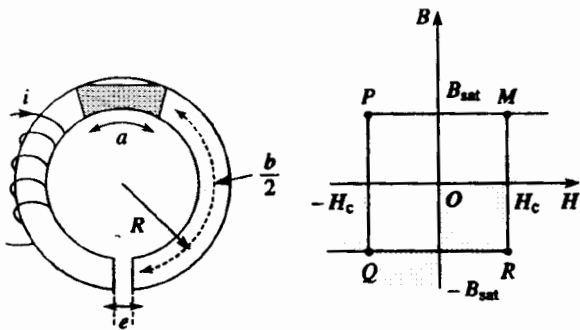
Vật liệu cứng được đặc trưng bởi một chu trình từ trễ hình chữ nhật như dưới đây với các giá trị đáng chú ý :

$$B_{sat} = 1\text{ T và } H_c = 5 \cdot 10^4\text{ A.m}^{-1}.$$

Vật liệu mềm là tuyến tính,  $B = \mu_0 \mu_r H$  với  $\mu_r = 5000$ .

Ta quấn trên mạch từ  $N = 4000$  vòng dây và cho chạy vào cuộn dây một dòng điện cường độ  $i$ . Ta thừa nhận rằng không có bất kì một sự rò từ nào.

1) Trong nam châm, trường  $B$  và kích thích  $H$  liên kết nhau bằng chu trình từ trễ ; nó cho ta hệ thức thứ nhất giữa  $B$  và  $H$ . Hãy xác định hệ thức thứ hai liên kết trường  $B$  và kích thích  $H$  trong nam châm. Hãy đơn giản hóa hệ thức nhận được bằng cách tính đến các giá trị bằng số. Trong suốt phần tiếp theo ta sẽ sử dụng hệ thức đã được đơn giản hóa này.



2) Ta giả thiết  $e = e_1 = 5\text{ mm}$ .

a) Dùng các giá trị bằng số, hãy viết biểu thức trên giữa  $B$  và  $i$ .

b)  $i$  giảm từ  $i_{01} = 2\text{ A}$  đến  $-i_{01}$ .

Hãy biểu diễn bằng đồ thị các biến thiên của  $B$  theo  $i$  trong sự giảm dần này.

Hãy bổ sung đồ thị đối với pha tăng dần trong đó  $i$  chuyển từ  $-i_{01}$  đến  $+i_{01}$ , có chỉ rõ bằng các mũi tên chiều đi của chu trình thu được.

Xác định các trị số đáng chú ý của  $i$  tương ứng với các điểm  $M, P, Q, R$  của chu trình từ trễ của nam châm.

3) Trở lại nghiên cứu của 2) b) với :

$$e = e_2 = 2\text{ mm và } i_{02} = 1,2\text{ A}.$$

4) Tìm giá trị của từ trường  $B$  trong khe, nếu, sau một dãy các chu trình, ta đưa  $i$  từ  $i_0$  về 0 ? Ta sẽ xử lí hai trường hợp  $e = e_1 = 5\text{ mm}$  và  $e = e_2 = 2\text{ mm}$ .

5) Tìm chiều dài nhỏ nhất cho  $a$ , còn tất cả các kích thước khác và các đặc trưng vẫn giữ không đổi, sao cho, một khi cuộn dây được lấy ra sau khi từ hóa, thì từ trường dư trong khe sẽ bằng  $B_{sat} = 1\text{ T}$  đối với  $e = e_1 = 5\text{ mm}$  ?

## LỜI GIẢI

1) Ta dùng công thức  $m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$  liên kết các số vòng dây, các điện áp hiệu dụng, các cường độ hiệu dụng và tỉ số biến đổi ;

$$1) m = 0,22 \text{ và } N_2 = 100, \text{ do đó : } N_1 = \frac{100}{0,22} = 455 \text{ vòng.}$$

2) a) Giá trị hiệu dụng của điện áp ở cuộn thứ cấp là :

$$U_2 = mU_1 = 220\text{ V}.$$

b) Công suất cung cấp cho động cơ là  $U_2 I_2 \cos \varphi$ , do đó cường độ dòng điện ở cuộn thứ cấp là :

$$I_2 = 5,68\text{ A}.$$

Cường độ ở cuộn sơ cấp được cho bởi  $I_1 = mI_2 = 1,25\text{ A}$ .

2) 1) Xuyên từ là lí tưởng. Hệ thức  $B = \mu_0 \mu_r H$  buộc  $H$  phải bằng không để từ trường vẫn là hữu hạn.

Việc áp dụng định lí AMPÈRE trên một vòng tròn, ở bên trong xuyên từ, có  $I - Ni = 0$  vì  $H$  triệt tiêu (dấu trừ (-) là do các định hướng của các dòng điện trên sơ đồ). Vậy  $i = \frac{I}{N}$

Áp dụng số :  $I = 500\text{ A}$  và  $i = 1\text{ A}$ , do đó :  $N = 500$ .

2) Có thể người ta muốn coi mạch này như một biến thể lí tưởng. Tuy nhiên còn thiếu một điều kiện để có được trường hợp trên, nghĩa là : trong mạch không được có từ trường rò.

Sự kiện cuộn dây sơ cấp (nghĩa là sợi dây) chỉ được cấu tạo bởi một nửa vòng dây không cho phép kiểm nghiệm điều kiện này.

Hệ thức giữa các điện áp như vậy sẽ không được xác minh.

3) Nhờ công thức  $m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$  liên kết các số vòng

dây, các điện áp hiệu dụng, các cường độ hiệu dụng và tỉ số biến đổi, ta được:  $U_2 = 220 \text{ V}$ . Hệ thức giữa trở kháng và công suất là:

$$\mathcal{P} = U_2 I_2 \cos \varphi = |Z| \cos \varphi I^2 = \frac{U^2 \cos \varphi}{|Z|},$$

do đó  $|Z| = 8,7 \Omega$  và vì động cơ là cảm ứng, nên:

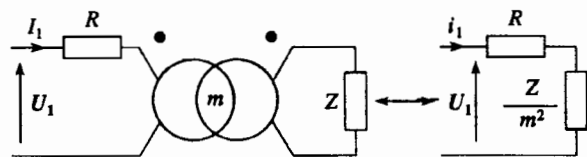
$$Z = 7,8 + j 3,8 \Omega$$

2) Dùng hệ thức giữa trở kháng quy về cuộn sơ cấp và trở kháng của cuộn thứ cấp:  $Z_{\text{sơ cấp}} = \frac{Z}{m^2}$ , ta được:

$$Z_{\text{sơ cấp}} = 162 + j 78 \Omega \text{ và } |Z_{\text{sơ cấp}}| = 180 \Omega.$$

Ta nhớ rằng  $\cos \varphi$  vẫn hết như thế.

3) a) Khi dùng trở kháng quy về cuộn sơ cấp của biến thế, ta có sự tương đương của các mạch dưới đây.



Trở kháng tương đương của tập hợp (dây - biến thế - động cơ) như vậy sẽ là:

$$Z' = R + Z_{\text{sơ cấp}} = 163 + j 78 \Omega$$

Công suất trung bình do nguồn cung cấp được xác định bởi:

$$\mathcal{P}_{\text{nguồn}} = \mathcal{R}e(Z') I_1^2 = \frac{\mathcal{R}e(Z') U_1^2}{|Z'|^2}$$

vì  $U_1 = |Z'| I_1$  do đó  $\mathcal{P}_{\text{nguồn}} = 4 990 \text{ W}$ .

Công suất trung bình tiêu tán do hiệu ứng JOULE là:

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R I_1^2 \approx 30 \text{ W}.$$

Công suất trung bình cung cấp cho động cơ là:

$$\mathcal{P}_{\text{động cơ}} = \mathcal{P}_{\text{nguồn}} - \mathcal{P}_{\text{Joule}} \approx 4 960 \text{ W}.$$

Các tổn hao công suất đối với giá trị danh định là 0,8%.

b) Khi không có biến thế, thì chỉ cần lấy cùng những công thức như ở a) với  $U_1 = 220 \text{ V}$  và thay  $Z'$  bằng:

$$Z' = Z + R = 8,8 + j 3,8 \Omega$$

Do đó:  $\mathcal{P}'_{\text{nguồn}} = 4 640 \text{ W}$ ,  $\mathcal{P}'_{\text{Joule}} = 527 \text{ W}$

và  $\mathcal{P}'_{\text{động cơ}} = \mathcal{P}'_{\text{nguồn}} - \mathcal{P}'_{\text{Joule}} \approx 4 110 \text{ W}$

Các tổn hao công suất đối với giá trị danh định là 11%.

	$\mathcal{P}'_{\text{nguồn}}$ (W)	$\mathcal{P}'_{\text{Joule}}$ (W)	$\mathcal{P}'_{\text{động cơ}}$ (W)	các tổn hao (%)
với biến thế	4 990	30	4 960	0,8
không biến thế	4 640	527	4 110	11

Ví dụ này chứng minh lợi ích của việc sử dụng các đường dây cao áp kèm theo một biến thế hạ áp để vận chuyển điện năng đi xa.

4) 1) Đối với một đường cong kín bên trong lõi, và với giả thiết H có môđun không đổi, định lí AMPÈRE cho ta:

$$N_1 i_1 = l H.$$

Do đó:  $H = \frac{N_1 i_1}{l R_0} \approx 500 u_1$  với  $u_1$  ra vôn và H ra A . m<sup>-1</sup>.

Hệ thức giữa thông lượng chung  $\Phi_c = S B$  và s.d.đ cảm ứng ở cuộn thứ cấp  $e_2 = - N_2 \frac{d\Phi_c}{dt}$  cho ta:

$$e_2 = - S N_2 \frac{dB}{dt}.$$

Hằng số thời gian của mạch RC có giá trị 0,22 s và đó là một giá trị rất lớn so với chu kỳ 20 ms của tín hiệu tần số 50 Hz. Vậy, mạch sẽ tích phân điện áp ra của biến thế và ta được:

$$u_2 \approx \frac{1}{RC} \int - e_2 dt = \frac{S N_2}{RC} B,$$

nghĩa là  $B \approx 0,35 u_2$  ( $u_2$  ra vôn và B ra tesla).

2) Ta có được trường dư khi  $H = 0$ , nghĩa là  $u_1 = 0$  và  $u_2 = 1,7 \text{ V}$ , do đó  $B_r = 0,60 \text{ T}$ .

Ta nhận được kích thích kháng từ khi  $B = 0$ , nghĩa là  $u_1 = 0,12 \text{ V}$  và  $u_2 = 0$ , do đó  $H_C = 60 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Ta nhận được từ trường bão hòa khi  $u_2$  là không đổi. Vậy, đối với  $u_2 = 3,8 \text{ V}$ , thì từ đó  $B_{\text{sat}} = 0,35 u_2 = 1,33 \text{ T}$  và độ từ hóa tương ứng bằng:

$$M_{\text{sat}} = \frac{B_{\text{sat}}}{\mu_0} = 1,06 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3) Khi cuộn sơ cấp được nuôi bằng điện áp hiệu dụng 220 V, thì giá trị cực đại của từ trường tương ứng với  $u_2 = 2,8 \text{ V}$ , nghĩa là  $B_{\text{max}} = 0,98 \text{ T}$ .

Năng lượng tiêu tán trên đơn vị thể tích trong một chu kì, do các hiện tượng từ trễ, sẽ bằng tích của diện tích chu trình từ trễ với tần số (xem §4.5.2), nghĩa là một công suất:

$$\langle \mathcal{P}_{H, \text{vol}} \rangle = f \oint_{\text{chu trình}} H dB.$$

Diện tích của chu trình khoảng  $4 B_{\text{max}} H_C = 235 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$ , do đó:

$$\langle \mathcal{P}_{H, \text{vol}} \rangle \approx 11,8 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-3}$$

như vậy, công suất tiêu tán trong biến thế là:

$$\mathcal{P}_H = l S \langle \mathcal{P}_{H, \text{vol}} \rangle = 11,8 \text{ W}.$$

5 1) Công suất JOULE có dạng  $\mathcal{P}_C = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$ , trong đó  $R_1$  và  $R_2$  là điện trở các cuộn dây sơ cấp và thứ cấp.

Các cường độ dòng điện nghiệm đúng hệ thức  $I_1 = m I_2$ , khi bỏ qua dòng điện không tải ở cuộn sơ cấp, do đó:  $\mathcal{P}_C = (R_2 + m^2 R_1) I_2^2$ , nghĩa là hệ thức đòi hỏi ở trên với  $K_2 = R_2 + m^2 R_1$ .

2) Hiệu suất được xác định bởi công thức

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_F + \mathcal{P}_C}$$

trong đó  $\mathcal{P}_F$  tương ứng với các tổn hao

trong sắt,  $\mathcal{P}_C$  với các tổn hao trong đồng và  $\mathcal{P}_2$  ứng với công suất giải phóng vào tải.

Các tổn hao trong sắt độc lập với cường độ dòng điện, các tổn hao trong đồng tỉ lệ với bình phương của  $I_2$  (hiệu ứng JOULE):  $\mathcal{P}_C = K_2 I_2^2$ .

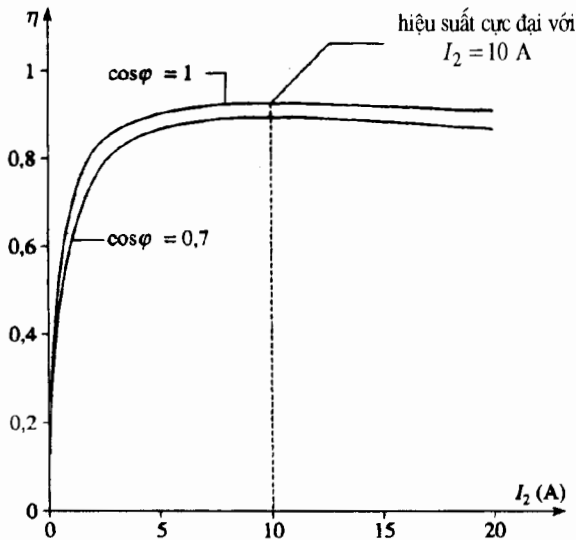
Công suất ở cuộn thứ cấp là  $\mathcal{P}_2 = U_2 I_2 \cos \varphi$ , trong đó  $\varphi$  là độ lệch pha giữa dòng điện và điện áp của lưỡng cực.

Từ đó ta suy ra: 
$$\eta = \frac{U_2 \cos \varphi}{U_2 \cos \varphi + \frac{\mathcal{P}_F}{I_2} + K_2 I_2}$$

$U_2$  phụ thuộc ít vào  $I_2$ , vì độ sụt điện áp ở cuộn thứ cấp là không đáng kể. Hiệu suất cực đại khi  $\frac{\mathcal{P}_F}{I_2} + K_2 I_2$  là cực tiểu, nghĩa là:

$$-\frac{\mathcal{P}_F}{I_2^2} + K_2 = 0, \text{ do đó } \mathcal{P}_F = K_2 I_2^2 = \mathcal{P}_C.$$

Hiệu suất của biến thế là cực đại khi các tổn hao trong đồng của nó bằng các tổn hao trong sắt của nó.



Về trị số, ta được:

- với  $\cos \varphi = 1, \eta = \frac{220 I_2}{100 + 220 I_2 + I_2^2}$ ;

- với  $\cos \varphi = 0,7, \eta = \frac{154 I_2}{100 + 154 I_2 + I_2^2}$

Giá trị của  $I_2$  cho hiệu suất cực đại là 10 A, nghĩa là:

- với  $\cos \varphi = 1, \eta_{\max} = 0,92$
- với  $\cos \varphi = 0,7, \eta_{\max} = 0,89$ .

Hiệu suất cực đại lớn hơn trên tải thuần trở.

6 Kích thích từ liên kết với dòng điện sơ cấp theo:

$$N_1 i_1 = 2 \pi R H.$$

Hệ thức  $B = \mu_0 (H + M)$  sẽ đơn giản đi nếu ta bỏ qua  $H$  so với  $M_{\text{sat}}$  và có dạng:

$$B = \pm \mu_0 M_{\text{sat}}.$$

Hệ thức giữa điện áp thứ cấp và từ trường là:  $u_2 = N_2 S \frac{dB}{dt}$ .

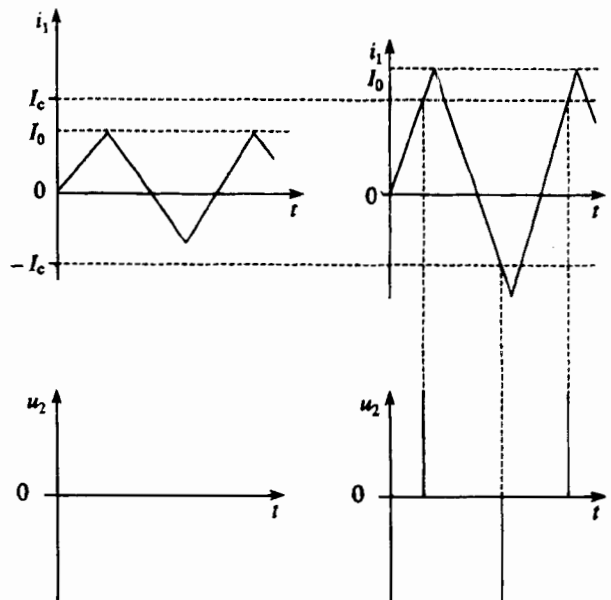
Hai trường hợp có thể xảy ra:

- $I_0 < I_C = \frac{2\pi R}{N_1} H_C$ .  $|H|$  bao giờ cũng nhỏ hơn  $H_C$ . Độ từ hóa của lõi từ không thể thay đổi. Từ trường gần như không đổi, vậy  $u_2$  vẫn luôn triệt tiêu.

- $I_0 > I_C = \frac{2\pi R}{N_1} H_C$ . Độ từ hóa của lõi thay đổi tuần hoàn:

- khi  $i_1$  tăng và đạt tới giá trị  $I_C = \frac{2\pi R}{N_1} H_C$  thì  $M$  chuyển từ  $-M_{\text{sat}}$  sang  $M_{\text{sat}}$ . Điều này gây ra một sự biến đổi mạnh đột ngột của  $B$  từ  $-\mu_0 M_{\text{sat}}$  sang  $\mu_0 M_{\text{sat}}$ , như vậy gây ra một xung điện áp dương đối với  $u_2$ .

- khi  $i_1$  giảm và đạt giá trị  $-\frac{2\pi R}{N_1} H_C$ , thì  $M$  chuyển từ  $M_{\text{sat}}$  sang  $-M_{\text{sat}}$ . Điều này gây ra một sự biến đổi mạnh đột ngột của  $B$  từ  $\mu_0 M_{\text{sat}}$  sang  $-\mu_0 M_{\text{sat}}$ , như vậy gây ra một xung âm điện áp đối với  $u_2$ .



7) 1) Bằng thực nghiệm, ta nhận thấy rằng  $H$  và  $i_1$  tỉ lệ với nhau, phù hợp với định lí AMPÈRE :

$$Hl = N_1 i_1.$$

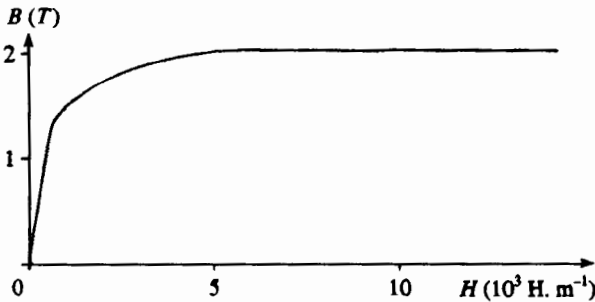
2) Trên đồ thị dưới đây, ta thấy rằng :

• với  $H < 150 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ , thì  $B$  và  $H$  tỉ lệ với nhau :

$$B = \mu_0 \mu_r H ;$$

• với  $H > 5000 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ , thì sẽ đạt tới độ bão hòa :

$$B = B_{\text{sat}}.$$



3)  $B = \mu_0 (H + M_{\text{sat}}) \approx \mu_0 M_{\text{sat}}$  lúc bão hòa, do đó :

$$M_{\text{sat}} \approx \frac{B_{\text{sat}}}{\mu_0},$$

cỡ  $1 \text{ } \epsilon \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ , rất lớn so với  $H = 13.800 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

$$4) \mathcal{M} = \frac{M_{\text{sat}}}{\frac{\rho}{\text{khối lượng mol}} \mathcal{N}_A} \approx 1,9 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

5) Phải đạt được độ bão hòa khi năng lượng từ  $\mathcal{M}B$  của nguyên tử lớn hơn hẳn năng lượng của chuyển động nhiệt của nó  $\frac{3}{2} k_B T$  do

$$\text{đó } B_{\text{sat}} \approx \frac{3}{2} \frac{k_B T}{\mathcal{M}} \text{ cỡ } 100 \text{ T}.$$

Kết quả này hiển nhiên là không phù hợp với các kết quả thực nghiệm ( $B_{\text{sat}} \approx 2 \text{ T}$ ). Người ta đã thông báo ở chương 6 là, thêm vào tương tác giữa mômen từ của một nguyên tử và trường  $B$ , còn tồn tại, trong một vật liệu sắt từ, các tương tác rất mạnh giữa các mômen từ của các nguyên tử kề nhau.

6) Với các giá trị nhỏ của  $B$ , ta phải tìm lại được một định luật tuyến tính :

$$H = aB, \text{ với } a = \frac{106}{0,4} = 265 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}.$$

Đối với các giá trị lớn của  $B$ , khi  $B$  chuyển từ  $1,65 \text{ T}$  sang  $2 \text{ T}$  (người ta không lấy điểm đo cuối cùng mà giá trị  $B = 2,01 \text{ T}$  quá gần với giá trị của điểm trước  $B = 2 \text{ T}$ ) thì  $H$  chuyển từ  $1818 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$  đến  $5842 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ , do đó :

$$\left( \frac{2}{1,65} \right)^n = \frac{5842 - 265 \times 2}{1818 - 265 \times 1,65} \text{ do đó } n = 7.$$

Giá trị của  $b$  có thể được tìm thấy bằng cách xét giá trị trung gian  $B = 1 \text{ T}$  :

$$H = 307 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}, \text{ do đó } b = 42 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{T}^{-7}.$$

Cuối cùng ta tìm thấy hệ thức  $H = 265 B + 42 B^7$ ; nó cho phép lại tìm được gần hết các giá trị thực nghiệm.

7)  $u_1 = N_1 S \frac{dB}{dt}$ , do đó  $B(t) = \frac{U_m}{N_1 S \omega} \sin \omega t$ ; đối với một biên độ của  $B$  là  $2 \text{ T}$ , ta tìm thấy  $U_m = 60 \text{ V}$ .

8)  $i_1 = \frac{Hl}{N_1} = \frac{(aB + bB^7)l}{N_1}$ ; ta sẽ gọi giá trị này là  $i_{10}$  và thừa nhận rằng, theo đề bài,  $i_{10}$  có dạng :

$$i_{10} = 5,675 \sin \omega t - 2,880 \sin(3\omega t) + 0,959 \sin(5\omega t) - 0,136 \sin(7\omega t).$$

9) Khi cái ngắt  $K$  đóng, hệ thức  $u_1 = N_1 S \frac{dB}{dt}$  ở cuộn sơ cấp bao giờ cũng vẫn có hiệu lực; trường  $B$  bảo toàn cùng một giá trị và do đó kích thích  $H$  cũng như vậy.

Ở cuộn thứ cấp, khi đưa vào tỉ số biến đổi  $m = \frac{N_2}{N_1}$ , ta có :

$$u_2 = N_2 S \frac{dB}{dt} = m u_1 = -R i_2 \text{ (cẩn thận về dấu !)}$$

$$\text{Do đó: } i_2 = -\frac{1}{R} m u_1 = -\frac{1}{R} m U_m \cos \omega t.$$

10) Bây giờ, định lí AMPÈRE cho :  $Hl = N_1 i_1 + N_2 i_2$ , do đó :

$$i_1 = -\frac{1}{N_1} (Hl - N_2 i_2) = i_{10} - m i_2.$$

$i_2$  là dòng điện hình sin, có xung động  $\omega$ , ta nhận thấy rằng chỉ duy nhất số hạng cơ bản của cường độ  $i_1$  ở cuộn sơ cấp là bị thay đổi.

11) Công suất tức thời bị hấp thụ ở cuộn sơ cấp có dạng  $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1$ , nó cho ta :

$$\mathcal{P}_1 = U_m \cos \omega t (5,675 \sin(\omega t) - 2,880 \sin(3\omega t) + 0,959 \sin(5\omega t) - 0,136 \sin(7\omega t) + m \frac{1}{R} m U_m \cos \omega t)$$

do đó, về giá trị trung bình, thì  $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2R} m^2 U_m^2$  thuộc dạng

$$\mathcal{P}_1 = \frac{U^2}{2R_{\text{eq}}} \text{ với } R_{\text{eq}} = \frac{R}{m^2}.$$

Đối với  $U_m = 60 \text{ V}$ , ta tìm thấy  $\mathcal{P}_1 = 313 \text{ W}$ .

8) 1) Chu trình từ trễ.

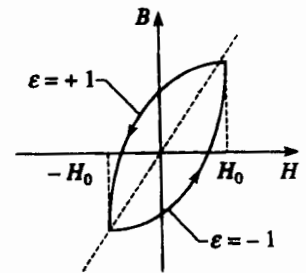
2) Một vật liệu nghiệm đúng  $\alpha = 0$  là tuyến tính :

$$B = \mu_0 \mu_r H \text{ (T.D.Đ)}$$

3) Kích thích  $H$  được xác định bởi định lí AMPÈRE :

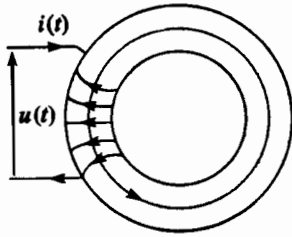
$$Hl = N i = N i_0 \cos \omega t,$$

do đó :  $H = H_0 \cos \omega t$  vì  $H_0 = \frac{N i_0}{l}$ .



Ở các đầu nối của cuộn dây, điện áp  $u(t)$  được xác định bởi định luật FARADAY:

$$u(t) = -e = \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{dB}{dt}$$



nghĩa là:

$$u(t) = NS\mu_0 \left( (\mu_r + \alpha H_0) \frac{dH}{dt} + \varepsilon \frac{\alpha}{2} \left( -2H \frac{dH}{dt} \right) \right)$$

$$= NS\mu_0 \omega \left( -(\mu_r + \alpha H_0) H_0 \sin \omega t + \varepsilon \frac{\alpha}{2} (H_0^2 \sin 2\omega t) \right).$$

Từ đó suy ra:  $a = -NS\mu_0 \omega H_0(\mu_r + \alpha H_0)$  và  $b = NS\mu_0 \omega \frac{\alpha}{2} H_0^2$ :

- $\varepsilon = +1$  khi  $H$  giảm dần đối với  $\omega t \in [(2p)\pi; (2p+1)\pi]$ ;
- $\varepsilon = -1$  khi  $H$  tăng dần đối với  $\omega t \in [(2p+1)\pi; (2p+2)\pi]$ ;

4) Công suất tức thời tiêu tán trong xuyên có giá trị:

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t) = (a \sin \omega t + \varepsilon b \sin 2\omega t) i_0 \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2} i_0 (a \sin 2\omega t + \varepsilon b (\sin 3\omega t + \sin \omega t)).$$

Từ đó ta suy ra năng lượng tiêu tán trong mạch trên một chu kỳ  $T$ :

$$W_h = \int_0^T u i dt$$

$$= \frac{1}{2} i_0 \left( a \int_0^T \sin 2\omega t + b \left( \int_0^{T/2} (\sin 3\omega t + \sin \omega t) dt - \int_{T/2}^T (\sin 3\omega t + \sin \omega t) dt \right) \right) dt,$$

nghĩa là:  $W_h = \frac{8}{3} \frac{i_0 b}{\omega} = \frac{8}{3} \frac{\ell H_0 b}{N\omega} = \frac{4}{3} \mu_0 \alpha l S H_0^3.$

Năng lượng này thực sự là tương ứng với năng lượng tiêu tán do từ trễ trong hình xuyên suốt một chu trình vì ferit là cách điện (không có các dòng điện FOUCAULT) và điện trở của cuộn dây đồng là không đáng kể.

5) Diện tích của chu trình từ trễ cho ta năng lượng tiêu tán do từ trễ trong đơn vị thể tích của hình xuyên trên một chu trình (nghĩa là một chu kỳ  $T$ ), do đó, khi nhân với thể tích  $lS$  của xuyên, thì ta được:

$$W_h = lS \oint_{\text{chu trình}} H dB.$$

Biết rằng, đối với một mặt khép kín (xem sơ đồ dưới đây), ta có thể viết:

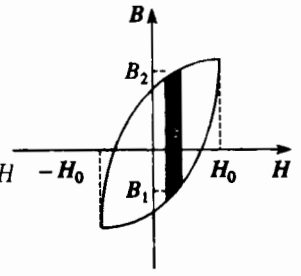
$$\oint_{\text{chu trình}} H dB = \oint_{\text{chu trình}} B dH,$$

từ đó suy ra:

$$\oint H dB = \int_{-H_0}^{H_0} (B_2 - B_1) dH$$

$$= \mu_0 \alpha \int_{-H_0}^{H_0} (H_0^2 - H^2) dH$$

$$= \frac{4}{3} \mu_0 \alpha H_0^3$$



và hiển nhiên ta lại tìm thấy biểu thức của câu hỏi trước.

9) Các điều kiện ở giới hạn (tính liên tục của thành phần pháp tuyến của  $B$ ) trên các mặt phân cách khác nhau, áp đặt cùng giá trị như nhau của  $B$  trong nam châm, trong vật liệu mềm và trong khe. Theo định lí AMPÈRE trên vòng tròn bán kính  $R$ , ta có

$$Ha + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} b + \frac{B}{\mu_0} e = Ni.$$

Biết rằng  $\frac{b}{\mu_r} = 0,04 \text{ mm} \ll e$ , ta có thể đơn giản hóa về

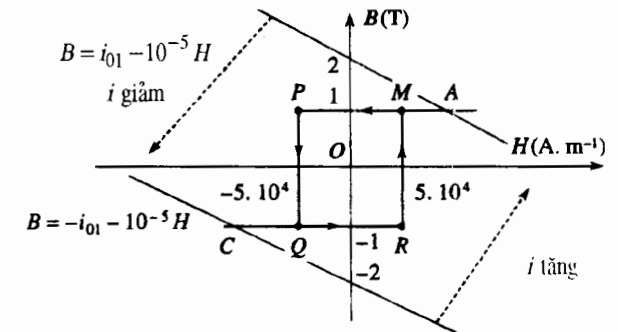
$$Ha + \frac{B}{\mu_0} e \approx Ni.$$

2) a) Với  $e = e_1 = 5 \text{ mm}$ , thì hệ thức trên cho ta:

$$B = i - 10^{-5} H,$$

với  $B$  ra T,  $i$  ra A, và  $H$  ra  $\text{A.m}^{-1}$ .

b) Để có được đường cong  $B(i)$  khi  $i$  giảm dần từ  $i_{01} = 2 \text{ A}$  đến  $-i_{01}$ , ta chỉ cần làm "trượt" đường thẳng  $B = i - 10^{-5} H$  trên chu trình từ trễ và sau đó vẽ quỹ tích các giao điểm của hai đường cong đó (phần AMPQC của chu trình):



- từ A đến P,  $B$  vẫn không đổi ở giá trị  $B_{\text{sat}} = 1 \text{ T}$ ; ở M:  $i = 1,5 \text{ A}$  và ở P:  $i = 0,5 \text{ A}$ ;
- từ P đến Q,  $B$  giảm theo định luật  $B = i + 10^{-5} H_c = i + 0,5$ ;
- từ Q đến C,  $B$  vẫn không đổi ở giá trị  $-B_{\text{sat}} = -1 \text{ T}$ ; ở Q ta có:  $i = -1,5 \text{ A}$ .

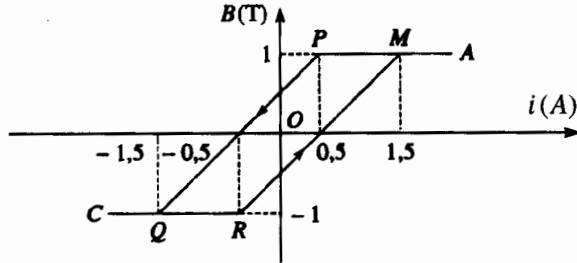
Khi  $i$  tăng từ  $-i_{01}$  đến  $+i_{01}$ , thì giao điểm giữa đường thẳng  $B = i - 10^{-5} H$  và chu trình, sẽ đi theo phần CQORMA:

• từ C đến R, B vẫn không đổi ở giá trị  $-B_{sat} = -1 \text{ T}$ ; ở R ta có :  
 $i = -0,5 \text{ A}$ .

• từ R đến M, B tăng theo định luật  $B = i - 10^{-5} H_c = i - 0,5$  ;

• từ M đến A, B vẫn không đổi ở giá trị  $B_{sat} = 1 \text{ T}$  ;

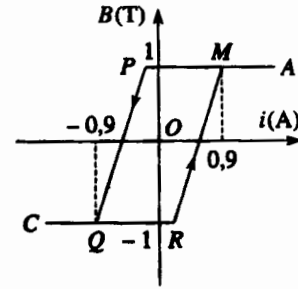
Từ đó, ta suy ra chu trình  $B = B(i)$  được biểu diễn dưới đây :



3) Với  $e = e_2 = 2 \text{ mm}$ , thì B và H liên hệ với nhau bởi  
 $B = 2,5 i - 2,5 \cdot 10^{-5} H$ . Khi  $i$  thay đổi giữa  $i_{02} = 1,2 \text{ A}$  và  $-i_{02}$ ,  
 thì ta thu được chu trình dưới đây, nghiêng ít hơn chu trình ở câu  
 hỏi trước, với :

ở M :  $i = 0,9 \text{ A}$  ; ở P :  $i = -0,1 \text{ A}$  ;

ở Q :  $i = -0,9 \text{ A}$  ; và ở R :  $i = 0,1 \text{ A}$  ;



4) Khi người ta bỏ dòng điện, thì kích thích H triệt tiêu và còn lại  
 trường dư  $B_r$ , nghĩa là :

•  $B_r = 0,5 \text{ T}$  với  $e = 5 \text{ mm}$  (không đạt tới bão hòa ở câu 2) ;

•  $B_r = 1 \text{ T}$  với  $e = 2 \text{ mm}$  (đạt tới bão hòa ở câu hỏi 3).

5) Muốn có bão hòa khi dòng điện  $i$  bằng không, thì điểm P của chu  
 trình  $B(i)$  phải tương ứng với một cường độ âm, ở giới hạn không.

Trong trường hợp giới hạn, đường thẳng  $H a + \frac{B}{\mu_0} e = N i$  hơi cắt

MP của chu trình từ trễ của nam châm ở P đối với  $i = 0$ , do đó

$$-H_c a + \frac{B_{sat}}{\mu_0} e = 0.$$

Từ đó, ta suy ra  $a = \frac{B_{sat} e}{\mu_0 H_c}$ , nghĩa là đối với  $e = e_1 = 5 \text{ mm}$  thì :

$a = 8 \text{ cm}$ .

# PHỤ LỤC

Tất cả các hệ thức trình bày ở đây đã được nêu chi tiết trong *H-Prépa, Cơ học chất lỏng, năm thứ hai*.

Ta ký hiệu  $U$  và  $V$  là các trường vô hướng :

$$U = U(M, t) \text{ và } V = V(M, t).$$

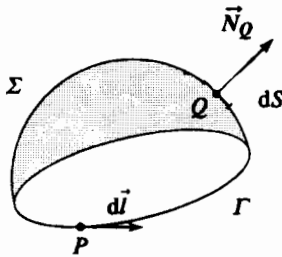
Ta ký hiệu  $\vec{A}$  và  $\vec{B}$  là các trường vector :

$$\vec{A} = \vec{A}(M, t) \text{ và } \vec{B} = \vec{B}(M, t).$$

## 1 HAI ĐỊNH LÝ QUAN TRỌNG

### ■ Định lý STOKES-AMPÈRE

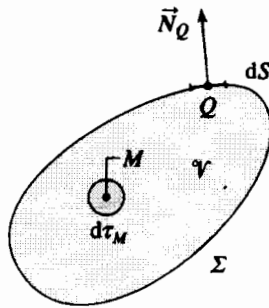
Lưu thông của một trường vector  $\vec{A}$  dọc theo một đường cong kín  $\Gamma$  thì bằng thông lượng của rota của nó đi qua mọi mặt tựa lên đường cong kín đó ( $\vec{A}$  được giả thiết là liên tục) :



$$\oint_{\text{đường cong } \Gamma} \vec{A}(P) \cdot d\vec{l} = \iint_{\text{mặt } \Sigma} \text{rot}(\vec{A}(Q)) \cdot \vec{N}_Q dS.$$

### ■ Định lý GREEN-OSTROGRADSKI

Thông lượng ra của một trường vector  $\vec{A}$  (không biểu hiện sự bất liên tục trên một mặt kín hay không, ở bên trong thể tích  $\mathcal{V}$ ) đi qua một mặt kín  $\Sigma$  thì bằng tích phân divergence của nó lấy theo thể tích  $\mathcal{V}$  giới hạn bởi mặt kín đó :



$$\oiint_{\text{mặt kín } \Sigma} \vec{A}(Q) \cdot \vec{N}_Q dS = \iiint_{\text{thể tích } \mathcal{V}} \text{div}_M(\vec{A}(M)) \cdot d\tau_M.$$

## 2 MỘT SỐ HỆ THỨC HỮU ÍCH

### ■ $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$

• Nếu  $\vec{A}$  là một gradien ( $\vec{A} = \text{grad } U$ ), thì lúc đó  $\text{rot } \vec{A} = \vec{0}$  tại mọi điểm của không gian.

• Ngược lại, nếu  $\text{rot } \vec{A} = \vec{0}$ , thì lúc đó sẽ tồn tại  $U$  sao cho  $\vec{A} = \text{grad } U$  với  $U$  được xác định sai kém một hằng số.

• Mọi trường vector có rota bằng không, sẽ có lưu thông được bảo toàn : lưu thông của nó dọc theo mọi đường cong kín bằng không và lưu thông của nó giữa hai điểm là độc lập với đường đi giữa chúng.

### ■ $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$

•  $\text{div } \vec{B} = 0$ , tương đương với  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  tại mọi điểm trong không gian, và  $\vec{A}$  được xác định sai kém một gradien.

• Điều kiện cần và đủ để một trường  $\vec{B}$  có thông lượng bảo toàn, là nó phải là một trường xoáy :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

• Thông lượng của trường  $\vec{B}$  này, đi qua mọi mặt kín, bằng không.

### ■ Các hệ thức khác

$$\text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U.$$

$$\text{rot}(U\vec{A}) = U \text{rot } \vec{A} + \text{grad } U \wedge \vec{A}.$$

$$\text{div}(U\vec{A}) = U \text{div } \vec{A} + \text{grad } U \cdot \vec{A}.$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}.$$

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U).$$

$$\Delta \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{A}).$$

$$\text{hay } \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div } \vec{A}).$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \text{rot } \vec{B} + (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

$$+ \vec{B} \wedge \text{rot } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A}.$$

$$\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{div } \vec{B} - (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

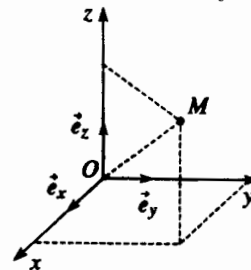
$$- \vec{B} \text{div } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A}.$$

## 3 DÙNG CÁC TỌA ĐỘ DESCARTES

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

$$U(M, t) = U(x, y, z, t).$$

$$\vec{A}(M, t) = A_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + A_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + A_z(x, y, z, t)\vec{e}_z.$$



■ **Gradien (toán tử grad)**

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z.$$

■ **Toán tử (A . grad)**

$$(\vec{A} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Hay  $(\vec{A} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B} = \left( A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$ .

■ **Dive (toán tử div)**

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

■ **Rota (toán tử rot)**

$$\overline{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$

■ **Laplacien (toán tử Laplace) của một trường vô hướng**

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

■ **Laplacien của một trường vector**

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

$$\overline{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

$$U(M, t) = U(r, \theta, z, t).$$

$$\vec{A}(M, t) = A_r(r, \theta, z, t)\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, z, t)\vec{e}_\theta + A_z(r, \theta, z, t)\vec{e}_z.$$

■ **Các toán tử**

• **Gradien (toán tử grad)**

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

• **Dive (toán tử div)**

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

• **Rota (toán tử rot)**

$$\overline{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

• **Laplacien của một trường vô hướng**

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

■ **Một số kết quả hữu ích**

•  $\overline{\text{grad}} (U(r)) = \frac{dU}{dr} \vec{e}_r.$

•  $\text{div} (\vec{e}_r) = \frac{1}{r}.$

•  $\text{div} (\vec{r}) = \text{div} (r\vec{e}_r) = 2.$

•  $\text{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r} \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 0.$

trừ ở  $r = 0$  mà tại đó dive là vô hạn).

•  $\text{div} (f(r)\vec{e}_\theta) = 0$  : trường vector  $(f(r)\vec{e}_\theta)$  có thông lượng được bảo toàn.

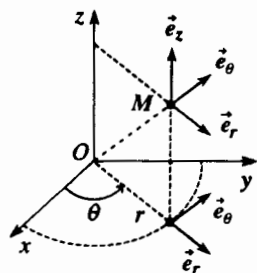
Đặc biệt,  $\vec{e}_\theta$  là một trường vector có thông lượng được bảo toàn.

•  $\overline{\text{rot}} \left( \frac{\vec{e}_\theta}{r} \right) = \vec{0}$  (trừ ở  $r = 0$ , mà tại đó rota là vô hạn) :

$\left( \frac{\vec{e}_\theta}{r} \right)$  là một trường vector có lưu thông bảo toàn (với  $r \neq 0$ ).

•  $\Delta(U(r)) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right).$

## 4 DÙNG CÁC TỌA ĐỘ TRỤ



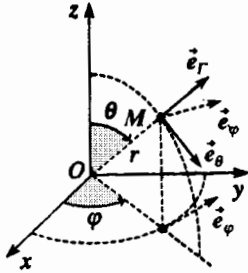


## 5 DÙNG CÁC TỌA ĐỘ CẦU

$$\overline{OM} = r \vec{e}_r$$

$$U(M, t) = U(r, \theta, \varphi, t)$$

$$\overline{A}(M, t) = A_r(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\varphi.$$



### ■ Các toán tử

#### • Gradient (toán tử grad)

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

#### • Divergence (toán tử div)

$$\text{div} \overline{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

#### • Rota (toán tử rot)

$$\overline{\text{rot}} \overline{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi.$$

#### • Laplacien (toán tử Laplace) của một trường vô hướng

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

### ■ Một số kết quả hữu ích

$$\overline{\text{grad}}(U(r)) = \frac{dU}{dr} \vec{e}_r.$$

$$\text{div}(\vec{e}_r) = \frac{2}{r}.$$

$$\text{div}(\vec{r}) = \text{div}(r \vec{e}_r) = 3.$$

$$\text{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

(trừ ở  $r = 0$  mà tại đó divergence là vô hạn).

$$\begin{aligned} \Delta(U(r)) &= \frac{1}{r} \frac{d^2(rU)}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) \\ &= \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{d^2U}{dr^2} \end{aligned}$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \text{ tất nhiên là trừ ở } r = 0.$$

## ĐIỆN TỬ HỌC 2

Mã số : 7K485T6 - DAI

In 1.000 bản, khổ 19 x 27 cm, tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội.

Số xuất bản: 194 - 2006/CXB/19 - 323/GD

In xong và nộp lưu chiểu quý I/2006.



# ĐIỆN TỬ HỌC

## 2



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ  
**HEVOBCO**  
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội



Giá: 32.000đ