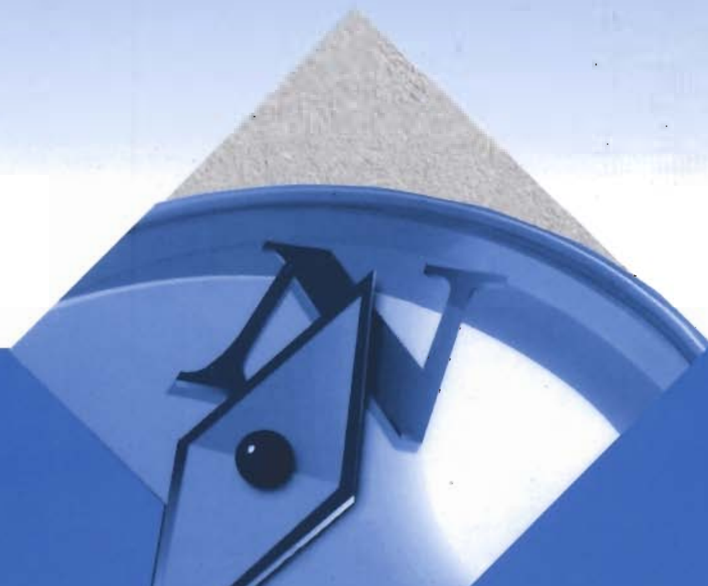
P.F.I.E.V

ĐIỆN TỪ HỌC
1



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HACHETTE
Supérieur

"Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kĩ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam".

"Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République socialiste du Vietnam".

194 – 2006/CXB/18 – 323/GD

Mã số: 7K484T6 – DAI

Điện từ học 1

(Tái bản lần thứ tư)

Dưới sự hướng dẫn của

JEAN - MARIE BRÉBEC
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Saint - Louis ở Paris

PHILIPPE DENÉVE
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Henri - Wallon ở Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Vaugelas ở Chambéry

MARC MÉNÉTRIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Thiers ở Marseilles

BRUNO NOËL
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

CLAUDE ORSINI
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Dumont - d'Urville ở Toulon

Người dịch : NGUYỄN HỮU HỒ

Năm thứ nhất

MPSI - PCSI
PTSI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Électromagnétisme

sous la direction de

JEAN - MARIE BRÉBEC
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Saint - Louis à Paris

PHILIPPE DENÈVE
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Henri - Wallon à Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Vaugelas à Chambéry

MARC MÉNÉTRIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Thiers à Marseilles

BRUNO NOËL
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

CLAUDE ORSINI
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Dumont - d'Urville à Toulon

1re année

MPSI - PCSI
PTSI

HACHETTE
Supérieur

Lời nói đầu

Bộ giáo trình này có liên quan đến các chương trình mới của các lớp dự bị vào các trường đại học, được áp dụng cho kì tựu trường tháng 9/1995 đối với các lớp năm thứ nhất MPSI, PCSI và PTSI, và cho kì tựu trường tháng 9/1996 đối với các lớp năm thứ hai MP, PC, PSI.

Theo tinh thần của các chương trình mới, thì bộ giáo trình này đưa ra một sự đổi mới trong việc giảng dạy môn vật lí ở các lớp dự bị đại học.

- Trái với truyền thống đã in sâu đậm nét, theo đó vật lí bị xếp vào hàng môn học thứ yếu sau toán học các hiện tượng đã bị che lấp bởi khía cạnh tính toán, các tác giả đã cố gắng thu xếp để đặt toán học vào đúng chỗ của nó bằng cách ưu tiên cho sự tư duy và lập luận vật lí, đồng thời nhấn mạnh vào các thông số có ý nghĩa và các hệ thức đã kết hợp chúng lại với nhau .
- Vật lí là một môn khoa học thực nghiệm nên phải được giảng dạy theo tinh thần đó. Các tác giả đã quan tâm đặc biệt đến việc mô tả các thiết bị thí nghiệm nhưng vẫn không bỏ qua khía cạnh thực hành. Mong sao những cố gắng của các tác giả sẽ thúc đẩy thày và trò cải tiến hoặc tạo ra các hoạt động thí nghiệm luôn luôn đầy chất sáng tạo.
- Vật lí không phải là một khoa học coi thường vật chất, chỉ chú trọng đến lập luận trừu tượng mà dửng dưng với thực tiễn công nghệ. Mỗi khi thấy một vấn đề thích hợp thì các tác giả đã dành một chỗ xứng đáng cho các áp dụng khoa học hay công nghiệp, đặc biệt để kích thích các nhà nghiên cứu và các kĩ sư tương lai.
- Vật lí không phải là một khoa học thuần khiết và vĩnh hằng, mà vật lí là sản phẩm của một thời đại và không tự tách ra khỏi phạm vi hoạt động của con người.

Các tác giả không coi thường các cứ liệu về lịch sử các khoa học để mô tả sự biến đổi của các mô hình lí thuyết cũng như thay thế các thí nghiệm trong bối cảnh của họ.

Nhóm tác giả mà Jean-Marie Brebec đã phối hợp, gồm các giáo sư các lớp dự bị rất từng trải, đã có một bề dày kinh nghiệm trong các kì thi tuyển vào các trường đại học và có năng lực khoa học cao được mọi người nhất trí công nhận. Nhóm này cộng tác chặt chẽ với các tác giả của các bộ giáo trình của Durandeau và Durupthy cho cấp hai các trường trung học (tương đương trung học phổ thông của Việt Nam).

Sách cho các lớp dự bị đã kế tiếp hoàn hảo sách ở cấp trung học cả về hình thức, nội dung, lẫn ý tưởng.

Chúng tôi bảo đảm rằng các cuốn sách này là những công cụ quý báu cho sinh viên để chuẩn bị có hiệu quả cho các kì thi tuyển, cũng như để có được một sự trau giồi khoa học vững chắc.

J.P.DURANDEAU

Các phép đối xứng và bất biến của các phân bố điện tích và dòng cho phép nghiên cứu lần lượt những tính chất của trường tĩnh điện và của từ trường. Lưu số bảo toàn và nghiên cứu thông lượng của trường tĩnh điện dẫn tới khái niệm về thế (và thế năng tĩnh điện), và tới định lí Gauss. Định lí Ampère được phát biểu sau khi nghiên cứu lưu số của từ trường. Nhiều mô phỏng được đưa ra nhằm thấy rõ hơn các tôpô và các tính chất của hai trường này. Sau đó nghiên cứu các trường (và thế tĩnh điện) tạo ra bởi các lưỡng cực tĩnh điện và các lưỡng cực từ, đồng thời nhấn mạnh vào tính giống nhau tồn tại giữa các trường tạo ra bởi các lưỡng cực.

Mục lục

CÁC PHÂN BỐ ĐIỆN TÍCH

1

Mở đầu

Vật chất xuất hiện như một tập hợp các hạt như các êlectrôn, prôtôn và nơtrôn ; chúng là thành phần cấu tạo của các nguyên tử.

Để giải thích một vài tính chất của chúng, cần gán cho các hạt đó một đại lượng đặc trưng gọi là điện tích.

Sự mô tả những tập hợp điện tích, còn gọi là các phân bố điện tích, sẽ dẫn tới xác định phạm vi nghiên cứu của điện từ học mà ta sẽ chấp nhận trong giáo trình này.

MỤC TIÊU

■ Chọn một mô hình để mô tả các phân bố điện tích.

■ Nhận biết tính đối xứng của chúng.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Những thí nghiệm sơ cấp về sự nhiễm điện ở cấp trung học.

1 Điện tích

1.1. Sự nhiễm điện - Điện tích nguyên tố

1.1.1. Các thí nghiệm định tính

Các thí nghiệm về sự nhiễm điện đã được biết từ thời cổ xưa : chúng cho thấy rõ một vài tính chất điện của vật chất (xem trong các lớp học dưới) :

• một số vật liệu (thủy tinh, plexiglat...), sau khi được cọ xát với các vật liệu khác, có tính chất hút được những vật nhẹ. Ta nói chúng đã bị nhiễm điện.

• Những tác dụng cơ học quan sát được giữa các vật mang điện cho thấy có hai loại nhiễm điện : các vật tích điện giống nhau thì đẩy nhau, trong trường hợp ngược lại, chúng hút nhau.

Sự nghiên cứu định lượng các định luật hút và đẩy đã được COULOMB thực hiện và đưa ra định luật tương tác mang tên ông vào năm 1785.

1.1.2. Các hạt sơ cấp và điện tích nguyên tố

Từ các thí nghiệm ở cuối thế kỉ 19 (J.J.THOMSON, J.PERRIN) dẫn tới sự giải thích vật chất bằng các hạt sơ cấp mang điện tích dương hoặc âm.

Đơn vị của điện tích là coulomb, kí hiệu là C.

• Các prôtôn, tích điện dương, cùng với các nơtrôn, không tích điện, tạo thành các hạt nhân nguyên tử.

• Các êlectrôn, tích điện âm, tạo thành lớp vỏ (*đám mây êlectrôn*) của cũng những nguyên tử đó.

• Điện tích của êlectrôn bằng $-e = -1{,}602.10^{-19}$ C. Điều đặc biệt là điện tích của một prôtôn lại đúng bằng nhưng trái dấu với điện tích của êlectrôn, và bằng $+e$.

Trong những thí nghiệm cổ điển về sự nhiễm điện, các điện tích dương, gắn với hạt nhân, vẫn ở lại trong lòng của các hạt nhân (nền vật chất). Có sự nhiễm điện dương hay âm của vật thí nghiệm khi các êlectrôn bị bứt ra khỏi vật hay được mang thêm tới vật.

Các điện tích quan sát thấy luôn luôn là những bội số nguyên lần điện tích nguyên tố e : điện tích đã bị lượng tử hóa.

Chú thích :

Được biết hiện nay, các hạt quac là các thành phần cuối cùng của vật chất hạt nhân, mang những điện tích là bội số nguyên lần của $\frac{e}{3}$.

Chúng không được quan sát một cách riêng rẽ, mà ở bên trong của những cấu trúc có điện tích là bội số nguyên của e.

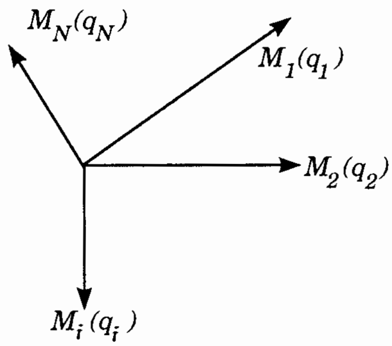
1.2. Sự bảo toàn điện tích

Điện tích là một đại lượng cơ bản tham dự trong các biểu thức của trường điện từ tạo ra bởi các phân bố điện tích đứng yên (tĩnh) hay chuyển động (dòng điện).

Hơn nữa, mọi tương tác được biết cho tới nay đều có tính chất bảo toàn điện tích. Điều này đã được kiểm nghiệm khi các hạt va chạm nhau trong các máy gia tốc hạt, các phản ứng hóa học, v.v.

Đối với một hệ kín, tức hệ không trao đổi vật chất với bên ngoài, điện tích luôn không đổi.

Điện tích là một đại lượng không phụ thuộc vào hệ quy chiếu quan sát.



Hình 1. *Phân bố của N điện tích điểm.*

2 Các phân bố điện tích

2.1. Các điện tích điểm

Nói chung, một hạt là một vật có kích thước không gian rất hạn chế. Kích thước của một nuclôn (thành phần của hạt nhân nguyên tử : prôtôn hay nơtrôn) chẳng hạn, vào cỡ fecmi hay femtômét (10^{-15} m).

Các định luật của điện từ vẫn mô tả đầy đủ hành vi (đặc tính) của các hạt mang điện chừng nào những khoảng cách đang dùng còn lớn hơn khoảng cách nguyên tố này.

Như vậy, với một sự gần đúng thích hợp, có thể coi các hạt sơ cấp mang điện là những chất điểm mang điện tích.

Một phân bố của N điện tích điểm sẽ được xác định bởi tập hợp các vị trí $\vec{r_i}$ của các điện tích q_i, i biến thiên từ 1 tới N.

2.2. Mô hình hóa một phân bố điện tích

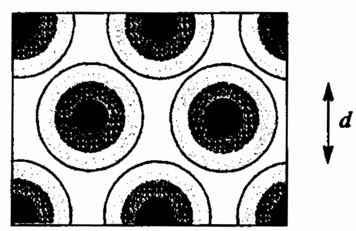
2.2.1. Thang vi mô

• Ở thang vi mô, đặc trưng bởi một chiều dài kí hiệu d, cấu trúc của vật chất là *không liên tục*.

Trong một môi trường cô đặc (rắn, lỏng), khoảng cách này sẽ vào cỡ một vài chục nanômét, vì kích thước của một nguyên tử là vào cỡ 0,1nm.

Trong một tinh thể, những khoảng cách giữa các nguyên tử hoặc các iôn biến thiên vào khoảng từ 0,2nm đến 1nm.

Đối với một người quan sát có khả năng quan sát môi trường một cách rất tinh tế, thì ở thang vi mô, môi trường này có thể có dáng vẻ giống như hình vẽ 2.



Hình 2. *Phân bố các điện tích ở thang vi mô.*

Chú ý

Dùng một kính hiển vi hiệu ứng đường hầm cho phép thực hiện loại quan sát này. Chẳng hạn, nhờ dụng cụ này, ta có thể quan sát bề mặt của một vật rắn để phân biệt các lớp xếp chồng của các nguyên tử cấu thành vật. Quan sát những kết quả của sự tương tác giữa sóng điện từ với môi trường cũng cho phép đạt tới những chi tiết vào cỡ độ lớn của bước sóng của bức xạ đang dùng.

Áp dụng 1

Cỡ lớn của d trong một platma

Hãy ước lượng cỡ lớn của d trong một platma, môi trường iôn hóa gồm các êlectrôn và iôn có mật độ giống nhau $n_e = n_i = 10^{21} m^{-3}$.

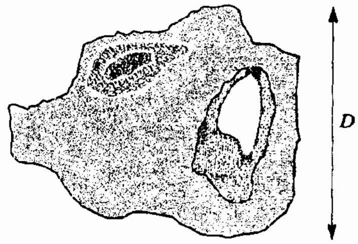
Nếu gán cho mỗi hạt một thể tích tương đương với d^3 thì một cỡ lớn của d là :

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 10^{-7} m = 10^2 nm$$

2.2.2. Thang vĩ mô

Đó là thang đặc trưng của thí nghiệm, được xác định bởi một chiều dài ký hiệu là D. Trong đa số các trường hợp, chiều dài vĩ mô D này lớn hơn rất nhiều chiều dài vi mô d.

Một sự quan sát môi trường ở thang vĩ mô sẽ được miêu tả tương tự như hình vẽ 3. Chẳng hạn, trên hình vẽ này, những miền đậm (hoặc nhạt) hơn tượng trưng cho sự tập trung điện tích mạnh (hoặc yếu) hơn.



Hình 3. *Quan sát ở thang vĩ mô.*

2.2.3. Thang trung mô

Sự miêu tả trên đây làm xuất hiện những thay đổi ở thang vĩ mô của một đặc tính (hành vi) cục bộ trung bình.

Đặc tính được miêu tả là cục bộ chừng nào ở đó đại lượng tượng trưng có khả năng biến thiên liên tục, và có thể đáng kể, ở thang vĩ mô.

Gọi là trung bình vì ta ngầm giả thiết rằng các miền đậm hoặc nhạt hơn giải thích một cách đúng đắn sự tập trung của đại lượng miêu tả.

Phương pháp này có thể chấp nhận được nếu ta định nghĩa thêm một thang thứ ba, gọi là thang trung mô, xác định bởi một chiều dài l, trung gian giữa các thang vi mô và vĩ mô.

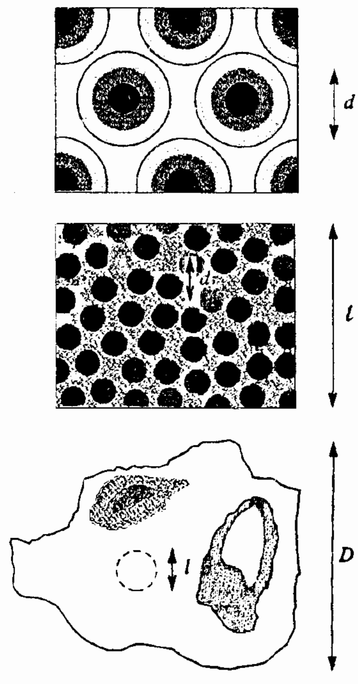
Một mặt, nếu l là lớn so với d, ta có thể xác định một cách thích hợp giá trị trung bình cục bộ của một đại lượng, vì một thể tích cỡ l^3 chứa một số lớn các thực thể vi mô.

Mặt khác, nếu l rất nhỏ so với D, thì thể tích này vẫn là nhỏ ở thang vĩ mô. Khi đó, giá trị trung bình trên cho phép mô tả khá chính xác môi trường.

Với điều kiện tồn tại một thang trung mô sao cho $d << l << D$, ta sẽ có thể thực hiện phép toán san bằng (đánh bóng) các đại lượng nghiên cứu và chấp nhận sự mô tả này bằng từ môi trường liên tục, đủ chính xác cho một nghiên cứu ở thang vĩ mô. Hình vẽ 4 tóm tắt sự mô tả môi trường bằng các giá trị cục bộ trung bình.

Chính trong khuôn khổ mô tả này mà ta sẽ làm việc từ nay về sau :

Ở một thang vĩ mô các phân bố điện tích, các thực thể vi mô, sẽ được miêu tả nhờ một đại lượng san bằng ở một thang trung mô : mật độ điện tích.



Hình 4. *Các thang vi mô d, san bằng l và vĩ mô D.*

Chú ý :

- *Sự mô tả bằng các giá trị san bằng này (mật độ điện tích, trường trung bình...) đơn giản hóa sự tiếp cận của chúng ta đối với một sự nghiên cứu triệt để ở thang vi mô. Nhưng mà ta lại mất đi thông tin về đặc tính cục bộ của môi trường đang mô tả và có lúc ta sẽ phải thừa nhận các đặc tính của tổng thể vì thiếu một sự nghiên cứu tinh tế các cơ chế vận dụng ở thang vi mô.*
- *Mặt khác, ta cũng sẽ phải thực hiện một phép toán san bằng thứ hai. Quan niệm về điện tích điểm chỉ là một sự mô hình hóa đơn giản và sẽ phải thay thế hình ảnh đó bằng hình ảnh một đám mây tích điện không định vị.*

Áp dụng 2

Đồng có nguyên tử số Z = 29, có khối lượng phân tử $M = 64\ \text{g.mol}^{-1}$, có khối lượng riêng $\mu = 8{,}9.10^3\ \text{kg.m}^{-3}$.

1) *Một quả cầu nhỏ bằng đồng bán kính a = 1 mm được tích điện ở điện thế V = 3000V (ở bên ngoài, điện trường của quả cầu có thể gây ra sự iôn hóa không khí bao quanh nó). Khi đó, điện tích của quả cầu là $Q = 4\pi\varepsilon_0 aV$, trong đó :*

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ \text{SI}.$$

2) *Sự mang tới một điện tích nguyên tố kéo theo một sự biến dạng của các đám mây êlectrôn lân cận quả cầu. Điện tích có dư như vậy xuất hiện không định vị, được san bằng cục bộ trên một thể tích có kích thước đặc trưng vào cỡ 10 nm.*

Hỏi các giá trị bằng số đưa ra trong đề bài này có phù hợp với những bất đẳng thức giữa d, l và D không ?

1) Quả cầu chứa :

$$N = N_A\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)\frac{\mu}{M} \text{ nguyên tử đồng,}$$

trong đó $N_A = 6{,}02.10^{23} mol^{-1}$ là số AVOGAĐRO. Vậy số prôtôn chứa trong quả cầu bằng $N_p = Z.N = 10^{22}$. Số êlectrôn cũng như vậy nếu quả cầu trung hòa điện. Điện tích dương Q mang bởi quả cầu tương ứng với một sự giảm số êlectrôn (tự do) bằng :

$$N_e = N_p - \frac{Q}{e} = 10^{22} - 6.10^{12}$$

Ta nhận thấy sự khác biệt tương đối giữa N_p và N_e rất nhỏ : môi trường ít bị nhiễu bởi điện tích.

2) Ta có thể xác định một chiều dài vi mô d bằng cách gán cho mỗi nguyên tử đồng một thể tích vào cỡ d^3, tức là

$$Nd^3 = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

suy ra : $d = \left(N_A.\dfrac{\mu}{M}\right)^{-\frac{1}{3}} = 0{,}23.10^{-9}\text{m} = 0{,}23\ \text{nm}$

Khoảng cách đặc trưng cho sự trải ra của điện tích có dư cho phép ta xác định một thang l độ vài nanômét, rất lớn trước d và còn rất nhỏ so với thang vĩ mô, chẳng hạn, xác định bởi bán kính của quả cầu đồng.

2.3. Các điện tích khối

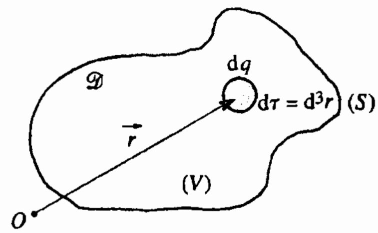
Sự có mặt của các điện tích trong một môi trường, nói chung được mô hình hóa bằng một điện tích không định vị, san bằng, mô tả bởi mật độ điện khối ρ.

Đối với một môi trường tích điện có thể tích V, sự phân bố điện tích $\mathscr{D}$ khi đó tương ứng với dữ liệu của ρ ở bên trong mặt S chứa V (*hình* 5).

Điện tích chứa trong một *thể tích nguyên tố* $d\tau$ (nhỏ ở thang vĩ mô, vào cỡ l^3) bằng :

$$dq = \rho d\tau.$$

Mật độ điện khối ρ được đo bằng C.m^{-3}.



Hình 5. *Phân bố khối của các điện tích.*

2.4. Các điện tích mặt

Giả sử phân bố điện tích $\mathscr{D}$ có hình dáng của một lớp tích điện : mật độ điện khối khác không ở bên trong một lớp vỏ có bề dày h rất nhỏ ở thang vĩ mô đang nghiên cứu (*hình* 6a).

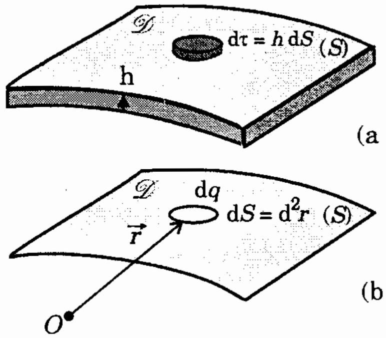
Với một diện tích nguyên tố dS của lớp này, điện tích mang bởi thể tích $d\tau = hdS$ tương ứng bằng $dq = \rho.d\tau = \rho hdS$.

Bề dày h rất nhỏ, ta hãy xét sự miêu tả giới hạn "*h* tiến tới không" với điện tích dq không đổi đối với một phần tử diện tích dS đã cho. Tích ρh, sẽ được kí hiệu là σ, phải được giữ không đổi khi xét sự miêu tả giới hạn này của phân bố $\mathscr{D}$ (*hình* 6b).

Ta đã có một phân bố bề mặt của các điện tích, có mật độ σ.

Điện tích mang bởi một *diện tích nguyên tố dS* (nhỏ trong thang vĩ mô, và cỡ l^2) khi đó bằng $dq = \sigma dS$.

Mật độ điện mặt σ được đo bằng $C.m^{-2}$.



Hình 6. *Lớp vỏ tích điện* (**a**) *và sự mô hình hóa bề mặt* (**b**).

Áp dụng 3

Bề dày của lớp vỏ tích điện

*Khi hòn bi bằng đồng trong áp dụng **2** được tích điện, thì các điện tích có dư có khuynh hướng được phân bố ở lân cận bề mặt của hòn bi. Bằng cách xem xét các giá trị bằng số ở trên và gán một điện tích nguyên tố có dư cho mỗi nguyên tử đồng của lớp này, hãy đưa ra một sự đánh giá về bề dày h. Bình luận*

Sự nhiễu loạn của môi trường do các điện tích có dư là rất nhỏ. Vì vậy bề dày h cũng phải nhỏ so với bán kính của hòn bi, sao cho thể tích của lớp vỏ tích điện xấp xỉ bằng $4\pi a^2 h$.

Lớp vỏ này khi đó chứa $\dfrac{N_A(4\pi a^2 h)\mu}{M}$ nguyên tử đồng. Mỗi một êlectrôn có dư được giả thiết liên kết với một trong các nguyên tử này, bề dày h được cho bởi:

$$Q = \frac{eN_A(4\pi a^2 h)\mu}{M}, \text{ hay } h = \frac{\varepsilon_0 VM}{a\mu eN_A}$$

Tính toán bằng số, ta thu được $h = 3.10^{-14}$ m.

Giá trị bằng số này rõ ràng là vô lý : nó rất nhỏ hơn kích thước của một nguyên tử đồng !

Gán một điện tích có dư e cho mỗi nguyên tử đồng của lớp tích điện dĩ nhiên là rất quá mức, nhưng rõ ràng rằng ngay cả khi phân bố điện tích có dư này trên một vài tỉ nguyên tử, ta cũng sẽ thu được một bề dày h cực nhỏ. Điện tích bề mặt khi đó có vẻ là một mô hình phù hợp để mô tả sự phân bố điện tích mang bởi vật dẫn.

▶ **Để luyện tập : BT6**

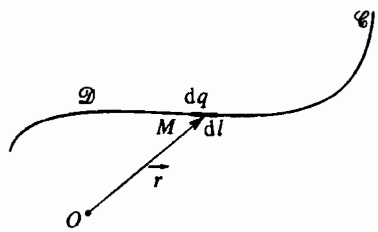
2.5. Các điện tích dài

. Theo cách tương tự, khi $\mathscr{D}$ có hình dáng một sợi chỉ, thì ta coi nó như một sự phân bố điện tích theo chiều dài dọc theo một đường cong $\mathscr{C}$, tương ứng với một điện tích trên một đơn vị dài λ (hình 7).

Điện tích mang bởi một *đoạn dài nguyên tố dl* bằng $dq = \lambda dl$.

Mật độ điện dài λ được đo bằng $C.m^{-1}$.

▶ **Để luyện tập : BT8.**

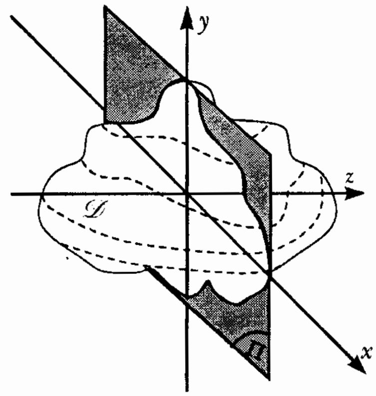


Hình 7. *Điện tích* $dq = \lambda dl$ *tại M.*

3 Tính đối xứng của các phân bố điện tích

3.1. Các phép đối xứng thường dùng

Ta sẽ nghiên cứu ảnh hưởng của các thao tác đơn giản (các dịch chuyển) trên một phân bố điện tích $\mathcal{D}$. Các phép đối xứng cơ bản, có lợi cho phần tiếp theo của giáo trình, sẽ là phép đối xứng phẳng $\mathcal{S}$, phép tịnh tiến $\mathcal{T}$ hay phép quay $\mathcal{R}$ xung quanh một trục.



Hình 8. *Phân bố bất biến đối với phép đối xứng phẳng.*

3.1.1. Phép đối xứng phẳng

Gọi x, y và z là tọa độ Descartes sao cho (xOy) *là mặt phẳng đối xứng* (hay phẳng - gương) của sự phân bố, kí hiệu là Π (*hình* 8).

Gọi M là một điểm của phân bố $\mathcal{D}$, có tọa độ Descartes (x, y, z) và M' có tọa độ $(x, y, -z)$ điểm đối xứng với nó qua mặt phẳng Π.

Sự phân bố là bất biến đối với phép đối xứng qua mặt phẳng $\Pi = (xOy)$ nếu các mật độ điện tích tại M và M' là giống hệt nhau.

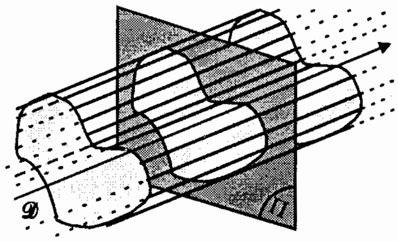
Điện tích của một phân bố bất biến đối với phép đối xứng phẳng qua mặt phẳng (xOy) nếu như :

$$\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$$

3.1.2. Phép phản đối xứng phẳng

Ta nói mặt phẳng là *phản đối xứng* (hay phẳng - phản gương), kí hiệu $\Pi^* = (xOy)$, nếu sự phân bố thỏa mãn :

$$\rho(M') = -\rho(M) \text{ hay } \rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$$


Hình 9. *Phân bố bất biến đối với phép tịnh tiến dọc theo một trục.*

3.1.3. Bất biến do phép tịnh tiến

Ta nói phân bố là bất biến do phép tịnh tiến song song với một trục khi mật độ điện tích là như nhau tại một điểm M của phân bố và tại mọi điểm M' có được bằng phép tịnh tiến song song với trục ấy.

Ta hãy chọn một mốc là trục (Oz) song song với trục ấy :

Mật độ điện tích của một phân bố bất biến do phép tịnh tiến theo trục (Oz) nếu như :

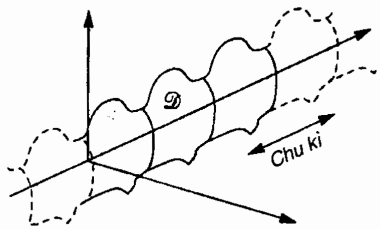
$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$$

Hình 9 minh họa cho trường hợp này : phân bố điện tích chứa trong một hình trụ có các đường sinh song song với trục (Oz) là bất biến do phép tịnh tiến song song với trục (Oz).

Lưu ý rằng mọi mặt phẳng vuông góc với trục này đều tạo ra một mặt phẳng đối xứng của phân bố.

<u>*Chú ý :*</u>

Ta cũng có thể sẽ gặp những trường hợp các phân bố là bất biến đối với các phép tịnh tiến gián đoạn dọc theo một trục. Các phân bố này sẽ mô tả một đặc tính tuần hoàn dọc theo trục như hình 10 minh họa.



Hình 10. *Phân bố bất biến do phép tịnh tiến.*

3.1.4. Tính bất biến bằng phép quay

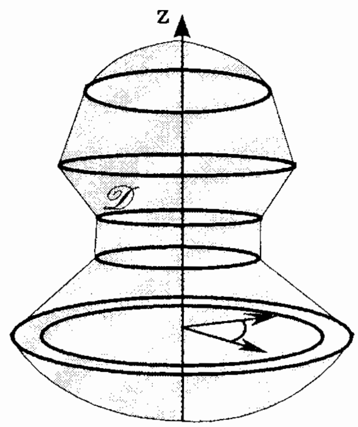
Một phân bố $\mathscr{D}$ là bất biến bằng phép quay xung quanh một trục (Oz) nếu mật độ điện tích là như nhau tại một điểm M của phân bố và tại mọi điểm M' thu được bằng một phép quay bất kì của M xung quanh trục. Gọi (r, θ, z) là các tọa độ trụ trục (Oz) của điểm M. Đối với một phân bố như thế, sự phân phối các điện tích phải không phụ thuộc vào góc θ.

Điện tích của một phân bố là bất biến đối với phép quay xung quanh một trục (Oz) nếu như $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$.

Chú ý rằng mọi mặt phẳng chứa trục quay tròn (Oz) là một mặt phẳng đối xứng của phân bố điện tích (*hình* 11).

Chú ý :

Ta cũng có thể sẽ gặp các trường hợp những phân bố bất biến đối với các phép quay gián đoạn xung quanh một trục. Một tập hợp ba điện tích giống nhau nằm tại ba đỉnh của một tam giác đều là bất biến đối với phép quay một góc α là bội số nguyên của $\frac{2\pi}{3}$ xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng của tam giác và đi qua tâm của nó.



Hình 11. *Phân bố bất biến đối với phép quay xung quanh một trục (Oz).*

3.2. Các phân bố đối xứng bội

Ta sẽ thường gặp các phân bố bất biến đối với nhiều phép đối xứng cơ bản. Ta cũng đã lưu ý rằng các phân bố bất biến đối với phép tịnh tiến hoặc phép quay, có vô số các mặt phẳng - gương.

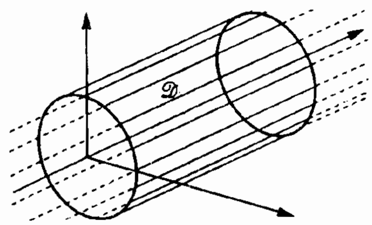
Ta còn nêu ra hai loại phân bố điện tích đáng chú ý bởi độ đối xứng cao của chúng. Việc sử dụng các tính chất trên đây cho phép chứng minh các mệnh đề sau đây.

3.2.1. Phân bố có tính đối xứng trụ

Phân bố đối xứng trụ là bất biến đối với phép tịnh tiến song song với một trục kí hiệu (Oz) (mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz) đều là mặt phẳng đối xứng) và quay tròn xung quanh trục đó (mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) đều là mặt phẳng đối xứng).

Sử dụng các tọa độ trụ, trục (Oz), ta có (*hình* 12) :

Phân bố đối xứng trụ : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$



Hình 12. *Phân bố đối xứng trụ.*

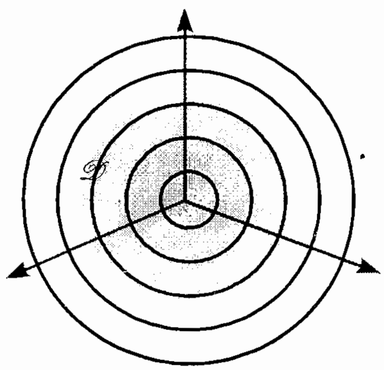
3.2.2. Phân bố có tính đối xứng cầu

Phân bố đối xứng cầu là bất biến đối với phép quay xung quanh tất cả các trục đi qua tâm đối xứng.

Hơn nữa, cần chú ý rằng mọi mặt phẳng chứa gốc đều là mặt phẳng đối xứng của phân bố.

Sử dụng các tọa độ cầu r, θ và ϕ với gốc là tâm đối xứng, ta có (*hình* 13) :

Phân bố đối xứng cầu : $\rho(r, \theta, \phi) = \rho(r)$.



Hình 13. *Phân bố đối xứng cầu.*

▶ Để luyện tập : BT 1, 2, 3, 4, 5 và 7.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐIỆN TÍCH

• Đơn vị của điện tích là coulomb, kí hiệu C.

• Các điện tích quan sát được luôn luôn là các bội số nguyên lần điện tích nguyên tố e : điện tích bị lượng tử hóa.

• Đối với một hệ kín, tức không trao đổi vật chất với bên ngoài, điện tích được bảo toàn.

■ SỰ PHÂN BỐ ĐIỆN TÍCH

Ở một thang vĩ mô, các phân bố điện tích, các thực thể vi mô, sẽ được miêu tả nhờ vào một đại lượng san bằng ở thang trung mô : mật độ điện tích.

• *Các điện tích khối*

Điện tích chứa trong một thể tích nguyên tố $d\tau$ bằng :

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}\tau.$$

Mật độ điện khối ρ được đo bằng $\mathrm{C.m^{-3}}$.

• *Các điện tích bề mặt*

Điện tích mang bởi một diện tích nguyên tố dS bằng :

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S.$$

Mật độ điện mặt σ được đo bằng $\mathrm{C.m^{-2}}$.

• *Các điện tích dài*

Điện tích mang bởi một chiều dài nguyên tố dl bằng :

$$\mathrm{d}q = \lambda dl$$

Mật độ điện dài λ được đo bằng $\mathrm{C.m^{-1}}$.

■ TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA CÁC PHÂN BỐ

• Điện tích của một phân bố là bất biến bởi phép đối xứng phẳng đối với mặt phẳng $\Pi = (xOy)$ nếu như :

$$\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z).$$

• Ta nói mặt phẳng là phản đối xứng (hay phẳng - phản gương, kí hiệu $\Pi^* = (xOy)$) nếu phân bố thỏa mãn :

$$\rho(M') = -\rho(M) \text{ hay còn là } \rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z).$$

• Mật độ điện tích của một phân bố là bất biến đối với phép tịnh tiến theo (Oz) nếu :

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$$

• Điện tích của một phân bố là bất biến đối với phép quay xung quanh trục (Oz) nếu :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$$

• Phân bố có tính đối xứng trụ (các tọa độ trụ) :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r).$$

• Phân bố có tính đối xứng cầu (các tọa độ cầu) :

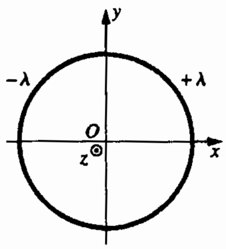
$$\rho(r, \theta, \phi) = \rho(r)$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Chiếc vòng tích điện

Có những phép đối xứng nào của sự phân bố vòng tròn dưới đây ?



2 Quả cầu tích điện đều

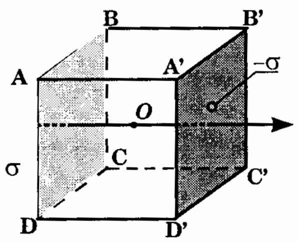
Cho một quả cầu bán kính a, tâm O, mang một phân bố điện tích bề mặt σ.

Hỏi có những phép đối xứng nào của phân bố điện tích này?

3 Lập phương tích điện

Cho một lập phương cạnh a. Các mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$ mang các điện tích bề mặt đều, trái dấu σ và $-\sigma$.

Hỏi có những phép đối xứng nào của phân bố này ?



4 Quả cầu phân cực

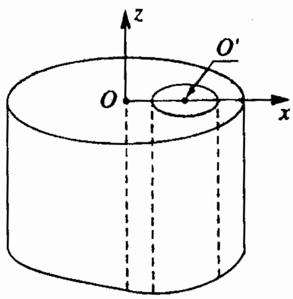
Một quả cầu bán kính a, mang mật độ điện mặt : $\sigma = \sigma_o \cos\theta$.

Hỏi có những phép đối xứng nào của phân bố này ?

5 Trụ có lỗ hổng tích điện

Một khối trụ vô hạn trục (Oz), có chứa một lỗ hổng hình trụ trục $(O'z)$, mang một mật độ điện khối đều ρ.

Hỏi có thể gán cho phân bố điện tích này những phép đối xứng nào ?



6 Mô hình hóa một mật độ điện tích mặt

Ta đã ngầm giả thiết rằng sự phân bố điện tích là đều ở bên trong lớp vỏ dày h, điều này là không cần thiết. Chẳng hạn ta hãy xét một môi trường chiếm nửa không gian $z < 0$, tích điện ở lân cận bề mặt của nó với mật độ điện khối

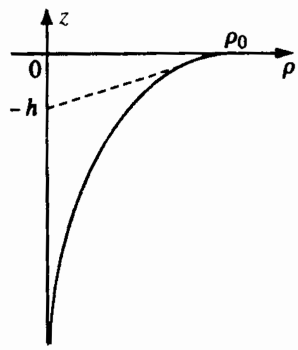
$$\rho = \rho_o \exp\left(\frac{z}{h}\right),$$

trong đó h là một khoảng cách nhỏ ở thang vĩ mô.

1) Hỏi với độ sâu z_0 nào của lớp bao hàm giữa $z = 0$ và $z = z_0$ thì lớp chứa 90% điện tích mang bởi môi trường ?

2) Xác định mật độ điện mặt tương đương.

3) Hãy bình luận tình huống giới hạn $\rho_o \to \infty$ và $h \to 0$, với $\rho_o h = \sigma_o = cte$.



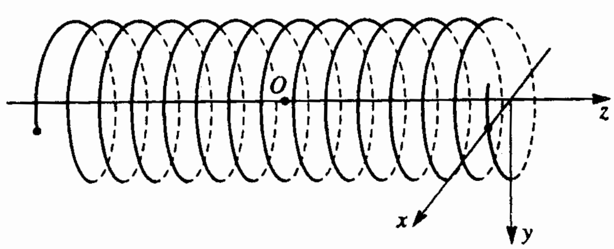
VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

7 Đường đinh ốc vô hạn

Sơ đồ dưới đây mô tả một đường đinh ốc trục (Oz), tương ứng với tập hợp các điểm có tọa độ Descartes :

$$(x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta,\ z = \frac{p\theta}{2\pi})$$

khi θ biến thiên từ $\theta_{\min}$ đến $\theta_{\max}$.

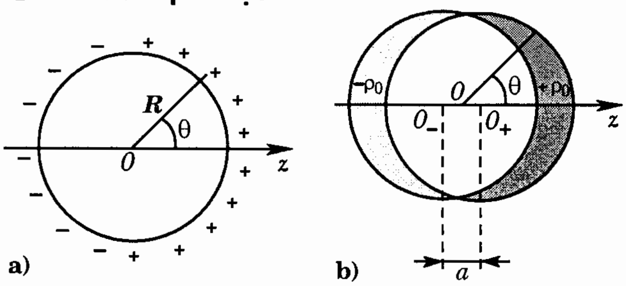


Đường đinh ốc này mang một mật độ điện dài đều λ.

Hãy đưa ra những phép đối xứng nào cho một phân bố như thế ?

Hãy xét trường hợp một đường đinh ốc vô tận.

8 Các lớp trượt



Sơ đồ **a** mô tả một quả cầu tâm O bán kính R mang mặt độ điện mặt $\sigma = \sigma_o \cos\theta$.

Sơ đồ **b** mô tả hai khối cầu bán kính R, có các tâm lần lượt là O_+ và O_- có các hoành độ $+a$ và $-a$ trên trục (Oz), tích điện đều với các mật độ lần lượt bằng $+\rho_o$ và $-\rho_o$.

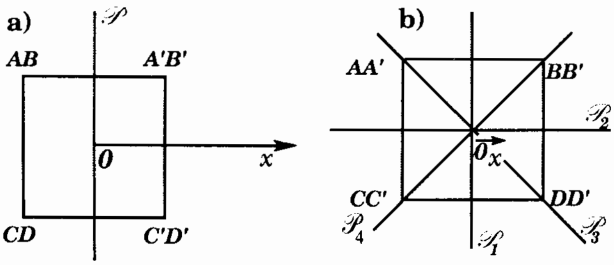
Hãy chứng tỏ rằng phân bố thứ nhất có thể thu được như là giới hạn của phân bố thứ hai khi khoảng cách a tiến tới không, với điều kiện phải áp đặt một hệ thức đặc biệt nối ρ_0, a và σ_0.

LỜI GIẢI

1 *Các mặt phẳng (xOy) và (xOz) là các mặt phẳng - gương của sự phân bố : đó là các mặt phẳng đối xứng của các điện tích.. Mặt phẳng (yOz) là một mặt phẳng - phản gương : đó là một mặt phẳng phản đối xứng của các điện tích.*

2 *Mọi mặt phẳng đi qua điểm O tâm của quả cầu đều là một mặt phẳng đối xứng của các điện tích.*

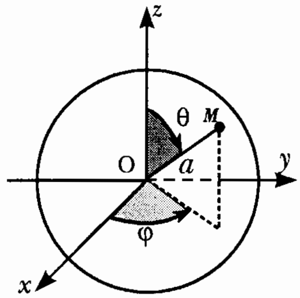
3 *Mặt phẳng $\mathscr{P}$ song song với hai mặt đang xét và đi qua tâm O của lập phương là một mặt phẳng phản đối xứng (sơ đồ a) ($\mathscr{P} = \Pi^*$) các mặt phẳng $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$, $\mathscr{P}_4$ ($\mathscr{P}_i = \Pi_i$) chỉ rõ trên sơ đồ b đều là các mặt phẳng đối xứng của các điện tích.*



4 *Mật độ điện mặt không phụ thuộc vào góc φ: phân bố là bất biến đối với phép quay xung quanh trục (Oz). Thay đổi θ thành $\pi - \theta$, σ đảo dấu ; mặt phẳng (xOy) = Π^*, tương ứng với*

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

là một mặt phẳng phản đối xứng của phân bố điện tích này.



5 *Phân bố này là bất biến đối với phép tịnh tiến song song với trục (Oz). Mặt phẳng (xOz), chứa trục (O'z) của phần rỗng, là một mặt phẳng - gương của sự phân bố ; đó là một mặt phẳng đối xứng của các điện tích. Sự phân bố là không bất biến đối với phép quay xung quanh trục (Oz) nếu O' khác O.*

6 *1) Ta nhận thấy rằng phân bố theo hàm mũ của điện tích tương ứng với bề dày ở đó mật độ điện tích nhanh chóng không đáng kể ở bên ngoài độ sâu h*

($\rho = \rho_o$ khi $z = 0$; $\frac{\rho_0}{5}$ khi $z = -(1,6)h$; $\frac{\rho_0}{1000}$ khi $z = -7h$).

Điện tích nằm trong một thể tích hình trụ trục (Oz), có đáy dS và có bề dày $-Z$, bằng $dQ = \int_Z^0 \rho(z)\mathrm{d}S\mathrm{d}z = \rho_0 h[1 - e^{\frac{z}{h}}]\mathrm{d}S$ với $Z < 0$.

Nó bằng $dQ_{tot} = \rho_o h dS$ nếu bề dày là vô tận và 90% của giá trị này với $Z = z_0 = -h\ln(10) = -2{,}3h$. Như vậy ta thấy rằng phần chủ yếu của điện tích của môi trường là nằm trong bề dày có độ lớn vào cỡ h.

2) Như vậy sự phân bố có thể được coi như ở trên bề mặt nếu h đủ nhỏ :

$$\sigma dS = \int_{-\infty}^{0} \rho(z)\mathrm{d}S\mathrm{d}z = \rho_0 h\mathrm{d}S \quad \text{với } \sigma = \rho_0 h$$

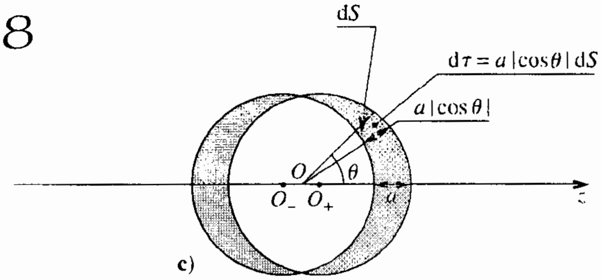
3) Tình huống giới hạn này chỉ là một sự lí tưởng hóa trường hợp đã xét, và σ_0 trùng với mật độ điện mặt được xác định trước đó. Chú ý rằng cách viết $h \to 0$ chỉ có ý nghĩa ở thang vĩ mô : h là vào cỡ l (chiều dài vĩ mô).

7 *Ta có thể nghĩ tới các phép đối xứng sau đây :*

- *bất biến đối với phép tịnh tiến, song song với trục (Oz), một đoạn bằng bội số nguyên lần bước p của đường đinh ốc ;*
- *đối xứng đối với một mặt phẳng chứa trục (Oz), hay tổng quát hơn, đối xứng tròn xoay xung quanh trục (Oz).*
- *đối xứng đối với một mặt phẳng vuông góc với trục (oz), cắt đường đinh ốc thành hai phần có các chiều dài bằng nhau.*

Trên thực tế, một sự khảo sát cẩn thận hơn cho ta thấy đường đinh ốc hữu hạn không có một phép đối xứng nào của các phép đối xứng cơ bản này. Đường đinh ốc vô tận chỉ có phép đối xứng đầu tiên trong ba phép đối xứng đã gợi ra ở trên.

8



c)

Xét một phần tử diện tích dS của quả cầu, được đánh dấu bởi các góc trung bình θ và φ : $dS = R^2 \sin\theta . d\theta\, d\varphi$

Phần tử này mang điện tích :

$$dq = \sigma dS = \sigma_0 R^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Bây giờ ta hãy xét hai khối cầu mang điện. Trong không gian chung của chúng, điện tích toàn phần bằng không. Như vậy, khi a tiến tới không, các điện tích của phân bố này được định vị trong một màng mỏng, lân cận bề mặt của quả cầu tâm O, bán kính R, mang mật độ điện khối $+\rho_0$ *hoặc* $-\rho_0$*, theo dấu của z, tức của cosθ.*

Phần tử thể tích $d\tau$ *bao hàm giữa hai quả cầu này, trên đó, với a << R, nó cắt ra cùng một diện tích nguyên tố* dS *(sơ đồ c) bằng :*

$$dS.a\,|\cos\theta|$$

Phần tử này chứa điện tích $dq = \rho_0 \cos\theta\, a\, dS$

So sánh hai biểu thức của phần tử điện tích dq, ta có thể thấy được quả cầu tích điện là giới hạn của tập hợp hai khối cầu tích điện khi a tiến tới không với điều kiện áp đặt $\rho_0 a = cte = \sigma_0$.

TRƯỜNG TĨNH ĐIỆN

2

Lịch sử

Sau khi đã đặt cơ sở cho lí thuyết về sức bền vật liệu (1773), nghiên cứu sự ma sát rắn (1779), sau đó mô tả các định luật về sự xoắn (1784), Charles – Augustin COULOMB (1736 – 1806) hiệu chính một chiếc cân xoắn rất nhạy, cho phép ông mô tả tương tác giữa các hạt mang điện đứng yên.

Định luật mà ông phát biểu vào năm 1785, mang tên ông, từ đó đã được kiểm nghiệm với một độ chính xác tăng dần

Trường tĩnh điện là đối tượng cho phép mô tả ảnh hưởng của các điện tích đứng yên lên không gian bao quanh chúng.

MỤC TIÊU

- Tương tác tĩnh điện.
- Trường tĩnh điện.
- Các tính chất đối xứng.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Sự phân bố điện tích :
  - Các mô hình hóa.
  - Các phép đối xứng.

1 Định luật COULOMB

1.1. Lực tương tác giữa các điện tích đứng yên

Hai điện tích điểm q_1 và q_2, cố định tại các điểm M_1 và M_2 tác dụng lên nhau một lực:

- tỉ lệ với tích của các điện tích ;
- tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.
- hướng song song với M_1M_2.

Lực này là lực đẩy nếu các điện tích cùng dấu, là lực hút nếu các điện tích trái dấu.

Lực COULOMB do điện tích q_1 tác dụng lên điện tích q_2 (đều nằm trong chân không) bằng $\vec{f}_{1\to2} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{\vec{e}_{1\to2}}{(M_1M_2)^2}$.

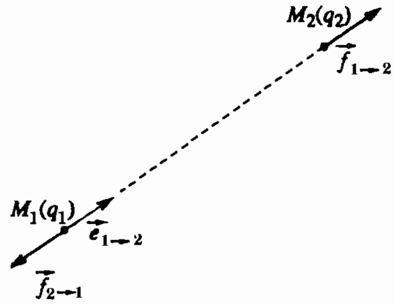
$\vec{e}_{1\to2}$ là vectơ đơn vị hướng từ M_1 sang M_2 (*hình* 1).

Lực này ngược với lực do q_2 tác dụng lên q_1 : $\vec{f}_{1\to2} = -\vec{f}_{2\to1}$; và tuân theo nguyên lí lực và phản lực.

Ta nhận thấy có sự *tương tự về mặt hình thức với định luật hấp dẫn*, nếu thay các khối lượng hấp dẫn m_1 và m_2 (luôn luôn dương) bằng các điện tích q_1 và q_2 (có dấu thay đổi) và hằng số hấp dẫn G bằng hằng số tương tác tĩnh điện $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$.

Hằng số ε_o, hằng số điện môi của chân không gần bằng $\dfrac{1}{36\pi 10^9}$ và đo bằng $F.m^{-1}$, F là farad (đơn vị điện dung).

Hằng số điện môi ε của không khí xấp xỉ bằng ε_o ($\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$, với ε_r = 1,0006), định luật trên đây vẫn còn giá trị trong không khí.



Hình 1. *Lực tương tác giữa hai điện tích đứng yên* ($q_1q_2 > 0$).

Áp dụng 1

**Cường độ
của các lực tĩnh điện và hấp dẫn**

Hằng số hấp dẫn bằng $6{,}67.10^{-11}$ SI.

Hằng số tương tác tĩnh điện bằng 9.10^9 SI.

1) *Hãy xác định các đơn vị của hệ đơn vị quốc tế tương ứng với hai hằng số trên.*

2) *So sánh các tương tác hấp dẫn và tĩnh điện giữa hai êlectrôn.*

Cho : điện tích $-e = -1{,}6.10^{-19}$C và khối lượng $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.

1) Một lực được biểu thị bằng kg.m.s^{-2}, ta có :

$$[G] = [\text{lực} \times \text{khoảng cách}^2 \times \text{khối lượng}^{-2}] = kg^{-1}.m^3.s^{-2}$$

$$\text{và}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right] = [\text{lực} \times \text{khoảng cách}^2 \times \text{điện tích}^{-2}] = kg.C^{-2}.m^3.s^{-2}$$

Đơn vị biểu thị ở trên là đồng nhất, nhưng đơn giản hơn cả là nhớ lấy đơn vị này.

2) Sự phụ thuộc của các tương tác này vào khoảng cách giữa hai êlectrôn là giống nhau, nên ta có ngay :

$$\frac{f_c}{f_g} = \left(\frac{e}{m}\right)^2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o G}\right) = 4{,}2.10^{42}$$

Cỡ lớn này giải thích tại sao khi nghiên cứu chuyển động của các hạt mang điện, nói chung việc tính đến các lực hấp dẫn là hoàn toàn vô ích.

1.2. Trường của một điện tích điểm

Lực tác dụng lên q_2 được đặt dưới dạng :

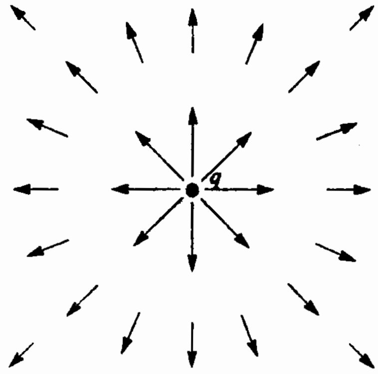
$$\vec{f}_{1\to 2} = q_2 \vec{E}_1(M_2),\ \text{với}\ \vec{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}$$

$\vec{E}_1(M_2)$ là trường tĩnh điện tạo ra bởi điện tích q_1 tại điểm M_2 trong chân không (hay trong không khí).

Trường tạo bởi q_1 đặc trưng cho ảnh hưởng của điện tích này lên không gian bao quanh nó.

Cũng vậy, trường tĩnh điện tạo ra trong không gian bởi một hạt mang điện q, cố định tại điểm gốc O của hệ tọa độ cầu, có biểu thức (*hình* 2) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$



Hình 2. *Trường của một điện tích điểm* ($q > 0$).

2 Trường của một phân bố

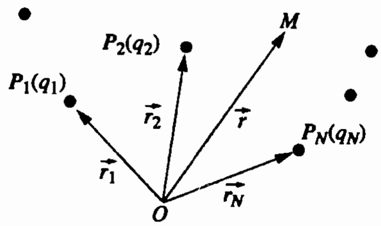
2.1. Nguyên lí chồng chất

Thực nghiệm dẫn tới tiên đề sau : các tương tác tĩnh điện có hiệu ứng tuyến tính.

Thí dụ, lực do một tập hợp N điện tích q_1, q_2, ..., q_N tác dụng lên điện tích q là tổng của N lực do từng điện tích q_i ($i = 1,..., N$) tác dụng lên khi chúng chỉ có một mình trước điện tích q.

Vậy trường tạo ra bởi N điện tích bằng tổng của N trường tạo ra bởi từng điện tích.

Sự tiên đề hóa *tính tuyến tính của các hiệu ứng* chính là nội dung của **nguyên lí chồng chất.**



Hình 3. *Phân bố các điện tích điểm.*

2.2. Trường tạo ra bởi các phân bố điện tích

2.2.1. Các điện tích điểm

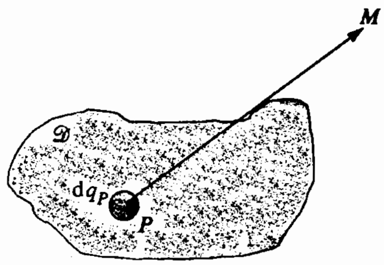
Sử dụng nguyên lí chồng chất, ta có ngay :

Trường tĩnh điện $\vec{E}$ tạo ra tại M bởi các điện tích q_i khác nhau, nằm tại các điểm P_i, cho bởi :

$$\vec{E}_{(q_i,\, i=1,\,...,\,N)}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}.$$

2.2.2. Tổng quát hóa cho các phân bố điện tích

Ta sẽ áp dụng nguyên lí chồng chất cho một phân bố điện tích $\mathscr{D}$ sau khi đã phân tích nó thành một tập hợp các mẩu nguyên tố mang điện (trung mô) được coi như các điện tích điểm.



Hình 4. *Phân bố điện tích* $\mathscr{D}$.

Gọi P là một điểm vạch ra không gian chiếm bởi phân bố. Một phần nguyên tố của $\mathscr{D}$, bao quanh P, chứa một điện tích dq_p và tạo ra một trường nguyên tố $\overrightarrow{dE}$ tại điểm quan sát M. Trường toàn phần tạo ra bởi phân bố $\mathscr{D}$ tại M thu được bằng sự chồng chất các trường của từng phần nguyên tố của $\mathscr{D}$:

$$\overrightarrow{E_{\mathscr{D}}}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{P \in \mathscr{D}} \mathrm{d}q_p \frac{\vec{e}_{P \to M}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum dq_P \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Ta chỉ còn phải xác định phần tử tích phân $\mathrm{d}q_P$ theo bản chất của phân bố đang xét.

■ Phân bố theo thể tích

Một thể tích nguyên tố $\mathrm{d}\tau$ chứa một điện tích :

$$\mathrm{d}q_P = \rho(P)\mathrm{d}\tau \ ;$$

Vậy, ta có :

$$\overrightarrow{E_{\mathscr{D}}}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint_{\mathscr{D}} \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \mathrm{d}\tau$$

■ Phân bố theo bề mặt

Một diện tích nguyên tố $\mathrm{d}S$ chứa một điện tích :

$$\mathrm{d}q_P = \sigma_{(P)}\mathrm{d}S \,,$$

và trường tạo ra bởi $\mathscr{D}$ tại M là :

$$\overrightarrow{E_{\mathscr{D}}}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iint_{\mathscr{D}} \sigma(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \mathrm{d}S$$

■ Phân bố theo chiều dài

Một đoạn dài nguyên tố $\mathrm{d}l$ chứa một điện tích :

$$\mathrm{d}q_P = \lambda(P)\mathrm{d}l$$

nghĩa là :

$$\overrightarrow{E_{\mathscr{D}}}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\mathscr{D}} \lambda(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \mathrm{d}l$$

<u>Chú ý :</u>

• *Như một điều tiên nghiệm, các biểu thức này chỉ áp dụng được cho những trường hợp các phân bố có kích thước hữu hạn (phân bố vật lí), để đảm bảo sự hội tụ của tích phân do có sự đóng góp của các điểm "ở xa". Tuy nhiên, cũng có những trường hợp các phân bố có kích thước vô hạn mà với chúng các tích phân trên hội tụ.*

• *Trong trường hợp một phân bố điện tích theo thể tích $\rho(P)$ hữu hạn, có kích thước bất kì, tích phân* $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \mathrm{d}\tau$ *hội tụ với mọi điểm M.*

Áp dụng 2

Tính trường tạo ra bởi một bán cầu, bán kính R mang điện đều mật độ điện mặt σ, tại "tâm" của nó.

Trường tạo ra tại M bởi một phần tử bề mặt, vị trí xác định bởi các góc θ và φ (*hình* 5), có diện tích :

$$dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

bằng : $d\vec{E}_{\mathscr{D}}(\vec{r}) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sigma dS\dfrac{\vec{e}_r}{R^2}$.

Để vạch ra bán cầu, góc θ biến thiên từ 0 đến $\dfrac{\pi}{2}$ và góc φ từ 0 đến 2π, với

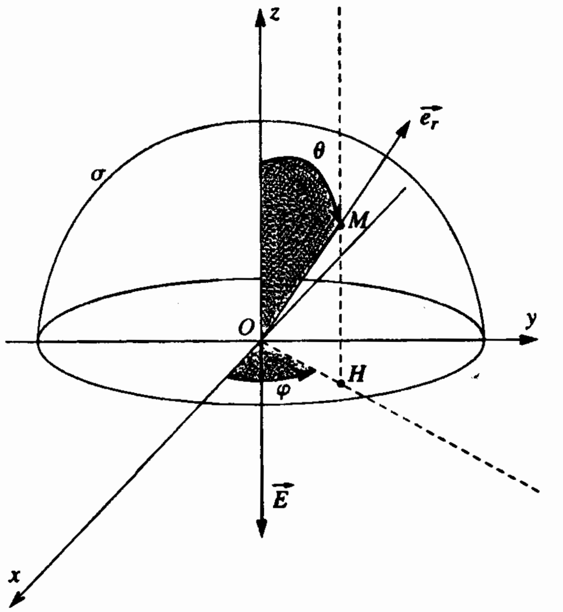
$$\vec{e}_r = \sin\theta[\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y] + \cos\theta\,\vec{e}_z .$$

Trường toàn phần tại O sẽ được mang bởi trục (Oz) :

$$\vec{E}_{\mathscr{D}}(0) = E\,\vec{e}_z ,$$

và: $E = -\dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cos\theta = -\dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

Vậy : $\vec{E}(0) = -\dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{e}_z$.



Hình 5. *Trường tạo ra bởi một bán cầu tại "tâm" của nó :* $\sigma > 0$.

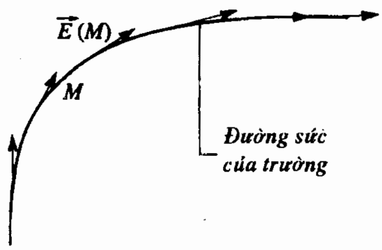
▶ **Để luyện tập : BT.1**

3 Tôpô của trường

3.1. Đường sức của trường

3.1.1. Định nghĩa

Trường luôn luôn tiếp xúc với các đường cong gọi là các *đường sức của trường* (*hình* 6). Các đường sức này được định hướng bởi chiều của trường.

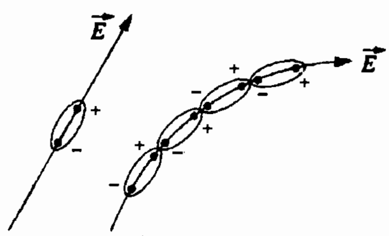


Hình 6. *Đường sức của trường.*

3.1.2. Sự làm hiện rõ các đường sức của trường bằng thực nghiệm

Để thấy rõ các đường sức điện trường tĩnh, ta có thể rắc các hạt cách điện, trung hòa (các hạt bột mì, hay các hạt nhẹ) lên bề mặt của một chất lỏng trong đó (và ở trên bề mặt của chất lỏng) có một điện trường $\vec{E}$.

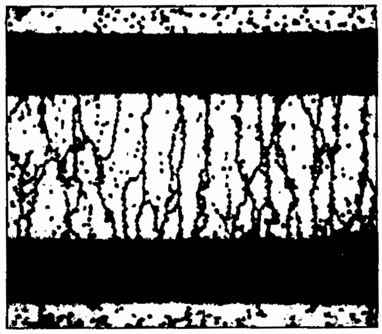
Các hạt này có tính chất sắp xếp thẳng hàng, song song với trường $\vec{E}$ nhờ sự xuất hiện một sự mất đối xứng về điện tích gây ra bởi trường $\vec{E}$ (*hình* 7).
Hơn nữa, sự phân bố các điện tích còn cho phép các hạt sắp thẳng hàng nối đuôi nhau dọc theo các đường sức của trường (các điện tích trái dấu hút nhau).



Hình 7. *Cụ thể hóa một đường sức của trường.*

Nhờ có chất lỏng mà các hạt định hướng "dễ dàng" hơn là trên bề mặt rắn.

Khi đó mỗi hạt được coi như một phần tử $d\overrightarrow{M}$ song song với trường địa phương tại M.



Hình 8. *Giữa hai bản song song một chất lỏng cách điện mang những hạt rất nhẹ. Khi các bản có điện áp, các hạt được xếp thẳng hàng theo hướng của trường tĩnh điện.*

3.1.3. Phương trình của một đường sức trường

Sự làm hiện rõ ở trên cho phép ta khẳng định rằng một phần tử dài $d\overrightarrow{M}$ dọc theo một đường sức trường là song song với trường $\overrightarrow{E}$. Do vậy, phương trình vi phân (vectơ) của một đường sức trường là :

$$d\overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$

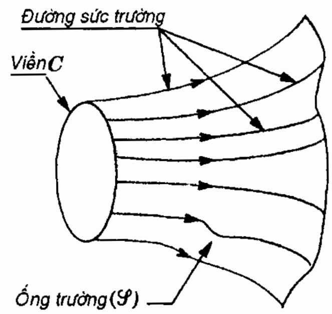
Ta sẽ thu được đường sức trường xuất phát từ một điểm ban đầu đã cho bằng phép lấy tích phân phương trình vi phân này.

Ví dụ, trong tọa độ Descartes, ta viết :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

3.2. Ống trường

Tập hợp các đường sức trường tựa trên một đường cong kín (hay đường viền) C tạo ra một mặt $\mathscr{S}$ gọi là *ống trường*, được mô tả trên *hình* 9.



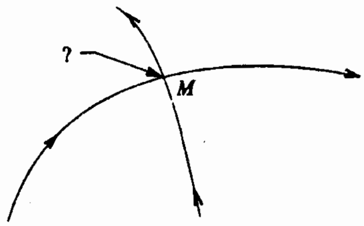
Hình 9. *Ống trường.*

3.3. Các điểm trường bằng không, các điểm kì dị

Hai đường sức trường không cắt nhau tại một điểm M ở đó điện trường tĩnh là xác định và khác không (*hình* 10) ; nếu không, hướng của trường, tức chính bản thân trường đó sẽ không xác định tại điểm M.

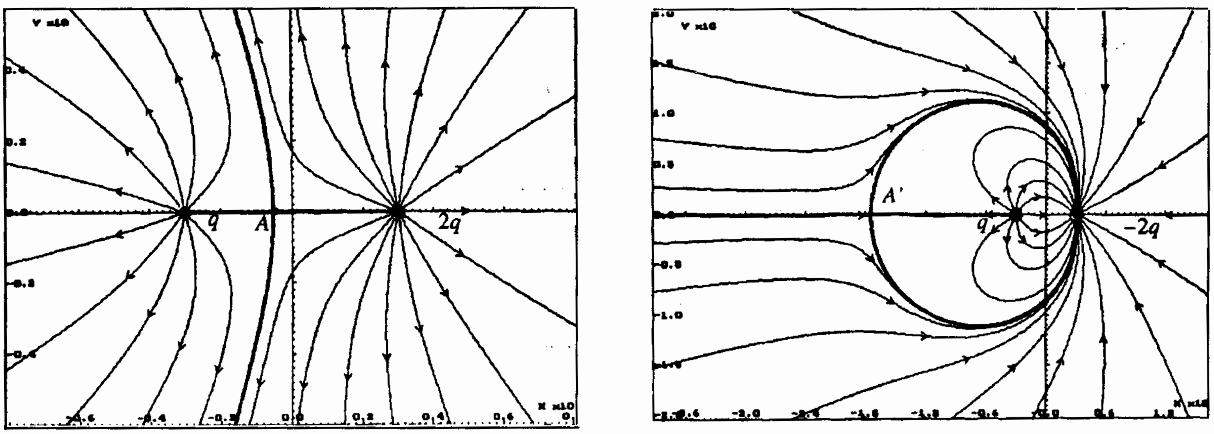
Hai đường sức trường có thể cắt nhau tại điểm M nếu :

- trường bằng không tại điểm M : M được gọi là điểm trường bằng không (hay điểm dừng).
- trường là không xác định tại điểm M : tại M có một điện tích điểm, hoặc M nằm trên một mặt hay một đường mang điện.



Hình 10

Một số đường sức trường của một hệ hai điện tích điểm q và Q được mô tả trên các hình 11a (trường hợp $Q = 2q > 0$) và 11b (trường hợp $Q = -2q < 0$). Ta có thể quan sát thấy rằng các đường sức trường phân kì ra từ các điện tích dương, hội tụ về các điện tích âm, hoặc "đi ra" vô cùng. Chúng cắt nhau ở ngang mức với các điện tích cũng như ở các điểm trường bằng không A và A'.



Hình 11. *Các đường sức trường của hệ hai điện tích điểm q và Q.*

a. $Q = 2q$

b. $Q = -2q$

Áp dụng 3

Ở đây, ta khẳng định rằng trường là bằng không tại A và A'. Hãy nghiệm lại kết quả này bằng cách tính toán vị trí của chúng nhờ vào các dữ kiện và bằng cách so sánh với các sơ đồ.

Gọi (Oz) là trục mang hai điện tích và chọn gốc là tâm của các điện tích mà các hoành độ là $+a$ đối với Q và $-a$ đối với điện tích q. Các điểm dừng sẽ nằm trên trục (Oz) vì các trường của hai điện tích phải cộng tuyến để có thể triệt tiêu lẫn nhau.

Tại một điểm dừng có hoành độ $-a < z < a$, ta có: $\dfrac{Q}{(z-a)^2} - \dfrac{q}{(z+a)^2} = 0$, hay là :

$$(Q-q)z^2 + 2a(Q+q)z + (Q-q)a^2 = 0$$

Biệt số rút gọn của phương trình bậc hai này bằng $\Delta' = 4qQ$. Trường hợp này dự tính xảy ra nếu q và Q là cùng dấu, vậy ở đây $Q = 2q$. Khi đó phương trình trên đây trở thành $z^2 + 6az + a^2 = 0$ (1)

Nghiệm nằm giữa $-a$ và a là :

$$z = (-3+\sqrt{8})a \approx -0{,}16a.$$

Tương tự, một nghiệm ở ngoài khoảng trên thỏa mãn :

$$(Q+q)z^2 + 2a(Q-q)z + (Q+q)a^2 = 0$$

Trường hợp này dự tính xảy ra nếu Q và q khác dấu nhau, tương ứng với $Q = -2q$, điều này cũng dẫn tới phương trình (1) mà nghiệm chấp nhận được bây giờ là :

$$z = (-3-\sqrt{8})a \approx -5{,}8a$$

Việc nghiệm lại sự phù hợp giữa các kết quả tính toán và vị trí của các điểm A và A' có thể được tiến hành trên các mô phỏng của hình 11.

▶ **Để luyện tập : BT14 và 15**

4 Các tính chất đối xứng của trường

4.1. Sử dụng các tính đối xứng và phản đối xứng

Sự tính toán giá trị của trường, từ các tích phân, thường là khá vất vả. Tuy nhiên, ta sẽ thường gặp các tình huống mà sự phân bố điện tích có các tính đối xứng đáng chú ý.

Một vài phép đơn giản hóa (khử đi một số tọa độ của điểm cần tính toán M, loại bỏ các thành phần của trường...) có thể được thực hiện mà không cần một phép tính toán nào, nhờ vào các nhận xét về tính đối xứng ; vì vậy, dưới đây ta nghiên cứu các tính chất đối xứng và phản đối xứng của trường tĩnh điện.

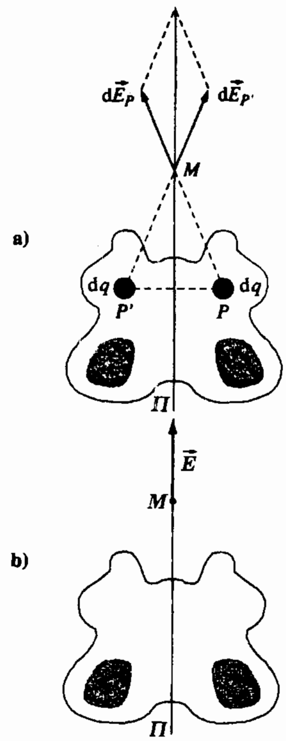
4.2. Các phép đối xứng cơ bản

4.2.1. Phép đối xứng phẳng

Phân bố $\mathcal{D}$ là bất biến đối với một phép đối xứng phẳng $\mathcal{S}$ qua một mặt phẳng Π.

Tại một điểm M của mặt phẳng đối xứng, ta hãy xét những phần đóng góp nguyên tố $d\vec{E}_P(M)$ và $d\vec{E}_{P'}(M)$ vào trường toàn phần của hai phần tử có cùng thể tích $d\tau$ gắn vào các điểm P và $P' = \mathcal{S}(P)$. Tổng của chúng $d\vec{E}_P + d\vec{E}_{P'}$ là một vectơ song song với mặt phẳng Π. Tính chất này vẫn còn đúng đối với mọi cặp điểm đối xứng P và P' vạch nên toàn bộ phân bố. Do đó :

Trên một mặt phẳng - gương Π của một phân bố điện tích $\mathcal{D}$, trường tĩnh điện tạo ra là song song với mặt phẳng Π.



Hình 12. *Đối xứng phẳng*
a. *Các phần đóng góp nguyên tố của P và P'.*
b. *Trường toàn phần trên mặt phẳng – gương.*

Tại các điểm M và M' đối xứng qua mặt phẳng - gương Π của một phân bố điện tích $\mathcal{D}$, các trường tĩnh điện $\vec{E}$ và $\vec{E'}$ là đối xứng với nhau.

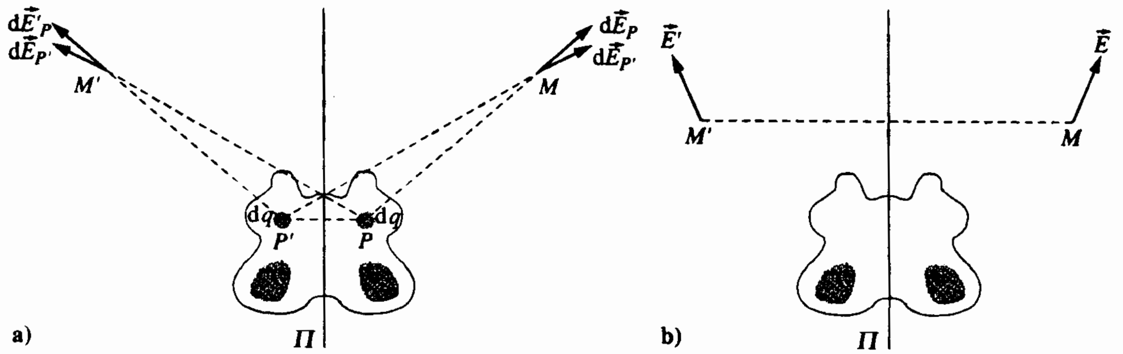
Áp dụng 4

Đối xứng phẳng và trường tĩnh điện

Nhờ một lập luận tương tự như trên, hãy so sánh trường tĩnh điện tại một điểm M với điểm đối xứng M' của nó qua mặt phẳng – gương của phân bố, khi điểm M nằm tại một vị trí bất kì trong không gian.

Hình 13 minh họa cho tính chất tìm được : trường $\vec{E'}$ tại M' là đối xứng vectơ của trường $\vec{E}$ tại M.

Như vậy kết quả trên đây là tổng quát.



Hình 13. *Đối xứng phẳng và trường tĩnh điện*

4.2.2. Phản đối xứng phẳng

Với một phân bố $\mathcal{D}$ có một mặt phẳng phản đối xứng Π^* và đối với một điểm M của mặt phẳng này thì trong các lập luận ở trên, ta chỉ cần đổi chiều của trường nguyên tố $d\vec{E}_{P'}$. Khi đó, ta có (*hình* 14a và b).

Trên một mặt phẳng – phản gương Π^* của một phân bố $\mathcal{D}$, trường tĩnh điện tạo ra vuông góc với mặt phẳng Π^*.

Tổng quát hơn, nếu lấy lại *áp dụng* 4, ta cũng có thể khẳng định (*hình* 14c) :

Tại điểm M' đối xứng của điểm M qua mặt phẳng – phản gương Π^* của phân bố điện tích $\mathcal{D}$, trường tĩnh điện $\vec{E'}$ là vectơ đối của vectơ đối xứng của trường $\vec{E}$ rạo ra bởi phân bố tại M.

Ví dụ về mặt phẳng – gương Π:

Trên hình 15a, bốn điện tích điểm được đặt trong mặt phẳng (xOy), −q tại (2, 2) và (−2, 2), 2q tại (1, −1) và (−1, −1). Mặt phẳng (yOz) là mặt phẳng – gương của phân bố này. Một vài đường sức trường đã được vẽ trên mặt phẳng (xOy).

Ta nhận thấy các đường sức trường tiến lại gần mặt phẳng (yOz), nói chung, tiếp tuyến với mặt phẳng đó : trên mặt phẳng – gương, trường tĩnh điện tiếp tuyến với mặt phẳng. Chú ý rằng tại điểm A, ở đó có bốn đường sức trường vuông góc cắt nhau, thì có hai trong các đường này vuông góc với mặt phẳng – gương. Điều này không mâu thuẫn với trường thuộc về mặt phẳng này, vì điểm A là một điểm trường bằng không. Điểm A' là một điểm trường bằng không khác.

Như ta đã thấy ở trên, tại hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua mặt phẳng (yOz), các trường tĩnh điện $\vec{E}$ và $\vec{E}'$ đối xứng với nhau.

Ví dụ về mặt phẳng – phản gương Π^* :

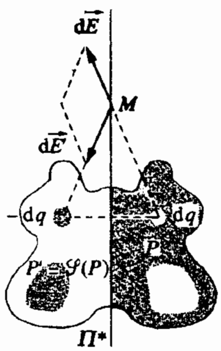
Trên hình 15b, bốn điện tích điểm được đặt trong mặt phẳng (xOy) : q tại $(2, 2)$, $-q$ tại $(-2, 2)$, $-2q$ tại $(1, -1)$ và $2q$ tại $(-1, -1)$. Mặt phẳng (yOz) là mặt phẳng – phản gương của phân bố này. Một số đường sức trường đã được vẽ trên mặt phẳng (xOy).

Các đường sức trường cắt vuông góc với mặt phẳng (yOz) : trên mặt phẳng – phản gương, trường tĩnh điện trực giao với mặt phẳng.

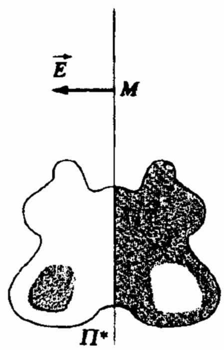
Chú ý rằng tại điểm A có bốn đường sức trường không vuông góc với (yOz) cắt nhau. Điểm A là một điểm trường bằng không và trường thì vẫn cứ vuông góc với (yOz).

Tổng quát hơn, tại điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz), điện trường tĩnh $\vec{E}'$ là vectơ đối của vectơ đối xứng của trường $\vec{E}$ tại M.

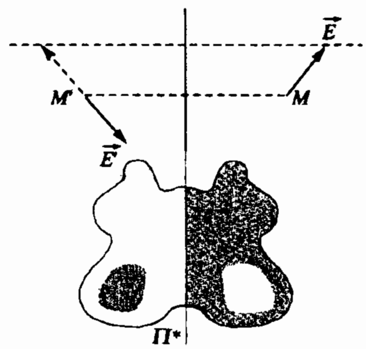
▶ **Để luyện tập : BT2**



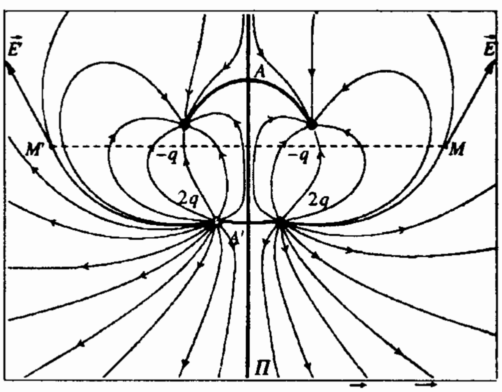
H.14a. *Phản đối xứng phẳng.*



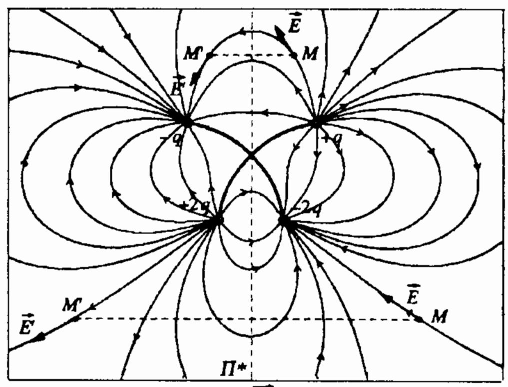
H.14b.



H.14c.



Hình 15a. *Sự đối xứng của các trường $\vec{E}$ và $\vec{E}'$.*

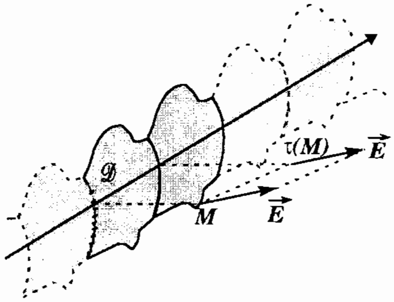


Hình 15b. *Trường tĩnh điện $\vec{E}'$ là vectơ đối của đối xứng của $\vec{E}$.*

4.2.3. Bất biến với phép tịnh tiến

Khi một phân bố $\mathscr{D}$ là bất biến với một phép tịnh tiến Δz song song với trục (Oz), thì một quan sát viên sẽ nhận thấy cùng một phân bố nếu họ đứng tại điểm có tọa độ Descartes (x, y, z) hoặc tại một điểm cho bởi phép tịnh tiến trên có tọa độ ($x, y, z + n\Delta z$), trong đó n là một số nguyên. Như vậy trường sẽ giống nhau tại hai điểm đó :

$$\vec{E}(x, y, z + n\Delta z) = \vec{E}(x, y, z) \text{ (hình 16)}$$



Hình 16. *Phân bố bất biến với phép tịnh tiến.*

Áp dụng 5

Phân bố bất biến với phép tịnh tiến song song với một trục

Hãy chỉ rõ hình dạng của trường tĩnh điện tạo ra bởi một phân bố bất biến với mọi phép tịnh tiến song song với trục (Oz).

Sự bất biến với mọi phép tịnh tiến cũng có nghĩa trường là như nhau tại mọi điểm có tọa độ (x, y, z) với mọi giá trị của z, vậy $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)$.

Mọi mặt phẳng vuông góc với trục Oz đều là một mặt phẳng đối xứng của phân bố và trên mặt phẳng này, trường song song với mặt phẳng.

Cuối cùng, trường có dạng :

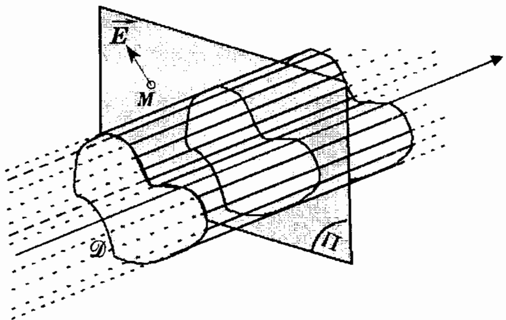
$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y.$$

Hình 17. ▶ *Phân bố bất biến với phép tịnh tiến song song với một trục.*

<u>*Chú thích :*</u>

Dạng này là dạng đã đơn giản hóa, nhưng cũng không cần tạo ra dạng tổng quát hơn của trường tạo ra bởi một phân bố bất biến với phép tịnh tiến. Trong thực tế, trường hợp một trường tĩnh điện được hạn chế hơn nhiều :

trường tĩnh $\vec{E}$ có nhiều tính chất phụ, mà ta không khai thác ở đây, làm cho các thành phần $E_x(x,y)$ và $E_y(x, y)$ không độc lập với nhau. Ta sẽ trở lại điểm này ở chương 3.

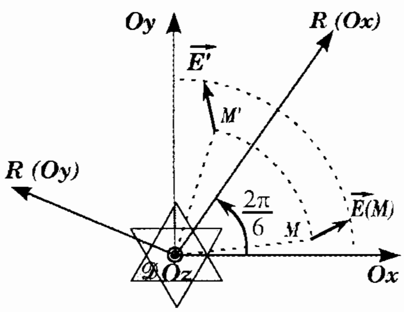


4.2.4. Bất biến với phép quay

Bây giờ ta xét một phân bố $\mathscr{D}$ bất biến với một phép quay $\mathscr{R}$, một góc $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (n nguyên) xung quanh trục (Oz). Hai người quan sát đứng ở các điểm M và $M' = \mathscr{R}(M)$ sẽ thấy cùng một phân bố (*hình* 18 đã vẽ trường hợp $n = 6$).

Các trường tĩnh điện tìm thấy ở các điểm M và M' đều có cùng các thành phần trong các hệ tọa độ (Ox, Oy, Oz) và ($\mathscr{R}(Ox)$, $\mathscr{R}(Oy)$, $\mathscr{R}(Oz)$) tương ứng.

Trường tại điểm M' cũng giống như trường tại điểm M với một phép quay xung quanh vectơ $\vec{e}_z$ sai kém một góc α.



Hình 18. *Phân bố bất biến với phép quay.*

Áp dụng 6

Trường của một phân bố có tính đối xứng tròn xoay

Hãy chỉ rõ hình dạng của trường của một phân bố có tính đối xứng tròn xoay đối với trục (Oz).

Đối với một phân bố tròn xoay xung quanh trục (Oz), mọi mặt phẳng chứa trục này là mặt phẳng đối xứng, vậy :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z .$$

Tính bất biến đối với phép quay một góc bất kì xung quanh trục (Oz) chỉ rõ thêm rằng các tọa độ trụ của trường không phụ thuộc góc quay θ.

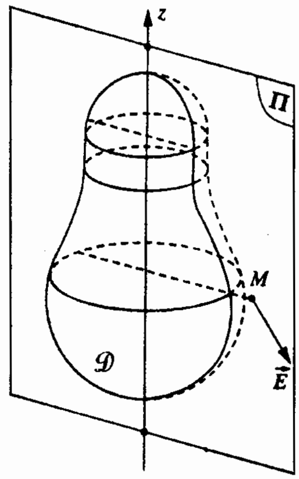
Như vậy, trường của một phân bố có tính đối xứng trụ có dạng :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z .$$

(Lưu ý rằng vectơ trường còn phụ thuộc vào góc θ do sự định hướng của $\vec{e}_r$)

<u>*Chú ý :*</u>

Cũng như đối với áp dụng 5, cần lưu ý rằng các thành phần $E_r(r, z)$ và $E_z(r, z)$ của một trường tĩnh điện là không độc lập.



Hình 19. *Trường của một phân bố có tính đối xứng tròn xoay.*

4.2.5. Trường tĩnh điện là một vectơ cực

Những nghiên cứu trước dẫn tới một kết luận đơn giản : khi thao tác phép đối xứng (đối xứng phẳng, tịnh tiến, quay xung quanh một trục) cho phân bố điện tích 𝒟, trường tĩnh điện biến đổi như một vectơ "thực sự". Khi đó, ta sẽ nói rằng :

Trường tĩnh điện là một đối tượng ba chiều có các tính chất đối xứng của một *vectơ cực* hay *vectơ "thực sự"*.

<u>*Chú ý :*</u>

Có thể như một điều đương nhiên nếu nói $\vec{E}$ là một vectơ. Tuy nhiên, sự nghiên cứu từ trường sẽ cho ta thấy cần nghiên cứu các tính chất đối xứng "cơ bản" này một cách cẩn thận : một sự sử dụng chớp nhoáng những nhận xét về tính đối xứng cho phép có thể dự kiến một điều như là điều trái ngược với nó.

Áp dụng 7

Trường trên trục của một đĩa mang điện

Tính trường tạo ra bởi một đĩa bán kính R, mang mật độ điện mặt σ = cte, tại một điểm trên trục của nó.

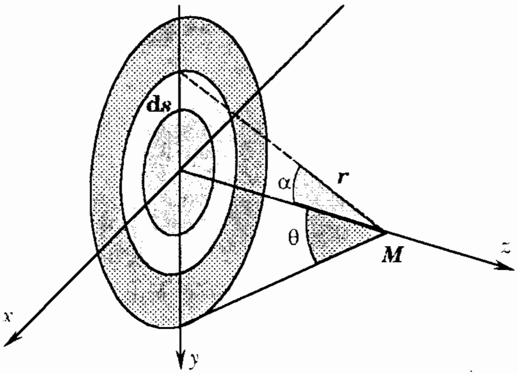
Trục của đĩa là một trục tròn xoay của phân bố điện tích. Tại một điểm M của trục này, trường phải bất biến đối với phép quay xung quanh trục tròn xoay, vậy $\vec{E}(M) = E_{trục}\vec{e}_z$.

Với các kí hiệu của *hình* 20, thành phần trục của trường tại M là :

$$E_{trục}(z) = \int_{\alpha=0}^{\theta} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\frac{ds}{r^2}\cos\alpha \; .$$

với $ds = 2\pi\, z\tan\alpha d(z\tan\alpha) = \dfrac{2\pi z^2 \sin\alpha d\alpha}{\cos^3\alpha}$

và $r = \dfrac{z}{\cos\alpha}$ (với $z > 0$)



Hình 20.

Khi đó, ta thu được :

$$E_{trục}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}[1 - \cos\theta]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]$$

Hơn nữa, tại điểm đối xứng của M đối với mặt phẳng của đĩa, ta sẽ có :

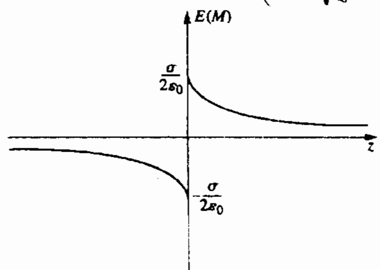
$$E_{trục}(-z) = -E_{trục}(z)$$

điều này cho phép ta viết một biểu thức của $E_{trục}(z)$ có giá trị với mọi dấu của z (*hình* 21) :

$$E_{trục}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \text{ dấu } (z)\left[1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right].$$

nghĩa là

- nếu $z > 0$, $E_{trục} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$;
- nếu $z < 0$, $E_{trục} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 + \dfrac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$.



Hình 21.

4.3. Các phép đối xứng bội

Các trường hợp này tương ứng với nhiều phép đối xứng cơ bản.

Thuộc về trường hợp này còn có các phân bố bất biến đối với phép tịnh tiến song song với một trục hoặc tròn xoay xung quanh một trục.

Ta hãy nêu thêm hai trường hợp đối xứng cao mà ta sẽ trình bày như sự áp dụng trực tiếp của việc sử dụng các tính chất đối xứng cơ bản :

- trường của một phân bố có tính đối xứng trụ, trục (Oz) (sự phân phối điện tích chỉ là hàm của khoảng cách tới trục (Oz)) trong tọa độ trụ, có dạng $\vec{E}(r, \theta, z) = E(r)\vec{e}_r$.
- trường của một phân bố có tính đối xứng cầu tâm O, trong tọa độ cầu, có dạng $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r)\vec{e}_r$.

▶Để luyện tập : BT 3 và 4.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỊNH LUẬT COULOMB

Lực COULOMB, lực tương tác tĩnh điện do điện tích q_1 tác dụng lên điện tích q_2 (hai điện tích đặt trong chân không) bằng :

$$\vec{f}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_{1\to 2}}{(M_1M_2)^2}$$

■ TRƯỜNG CỦA MỘT PHÂN BỐ

• Trường tĩnh điện $\vec{E}$ tại M tạo ra bởi các điện tích khác nhau q_i nằm tại các điểm p_i cho bởi :

$$\vec{E}_{(q_i,\, i=1,\, ...,\, N)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}.$$

• Phân bố theo thể tích : $\vec{E}_{\mathscr{D}}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_{\mathscr{D}} \rho(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\mathrm{d}\tau.$

• Phân bố theo bề mặt : $\vec{E}_{\mathscr{D}}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \sigma(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\mathrm{d}S.$

• Phân bố theo chiều dài : $\vec{E}_{\mathscr{D}}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\mathscr{D}} \lambda(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\mathrm{d}l.$

• Trường tĩnh điện của một phân bố điện tích $\mathscr{D}$ cho bởi :

$$\vec{E}_{\mathscr{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{P\in\mathscr{D}} \mathrm{d}q_P \frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \mathrm{d}q_P \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$

■ CÁC TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA TRƯỜNG

• Trường tĩnh điện là một đối tượng ba chiều có tính chất đối xứng của một vectơ cực hay vectơ "thực sự".

• Đối xứng phẳng

Trên một mặt phẳng - gương Π của một phân bố điện tích $\mathscr{D}$, trường tĩnh điện tạo ra song song với mặt phẳng Π.

Tại các điểm M và M' đối xứng qua một mặt phẳng - gương Π của một phân bố điện tích $\mathscr{D}$, các trường tĩnh điện $\vec{E}$ và $\vec{E}'$ là đối xứng với nhau.

• Phản đối xứng phẳng

Trên một mặt phẳng - phản gương Π^* của một phân bố điện tích $\mathscr{D}$, trường tĩnh điện tạo ra vuông góc với mặt phẳng Π^*.

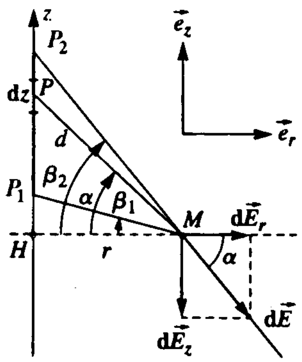
Tại điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng - phản gương Π^* của một phân bố điện tích $\mathscr{D}$, trường tĩnh điện $\vec{E}'$ là vectơ đối của vectơ đối xứng của trường $\vec{E}$ tạo ra bởi phân bố tại M.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Trường tạo ra bởi một đoạn dài tích điện

1) Tính trường tại một điểm M có tọa độ trụ (r, θ, z), tạo ra bởi một đoạn của trục (Oz), có mật độ điện dài đều λ, bao hàm giữa các điểm P_1 và P_2 có các hoành độ z_1 và z_2, được xác định vị trí bởi các góc β_1 và β_2.



2) Biện luận trường hợp dây thẳng vô hạn tích điện đều.

2 Trường tạo ra tại tâm của một quả cầu tích điện

Giả sử người ta có thể tích điện cho một quả cầu tâm O với mật độ điện mặt $\sigma = \sigma_o \cos\theta$ (tọa độ cầu trục (Oz) với gốc tại O). Hỏi giá trị trường của nó tại điểm O.

3 Trường của một phân bố có tính đối xứng trụ

Hãy chỉ rõ hình dạng của trường tạo ra bởi một phân bố có tính đối xứng trụ trục (Oz).

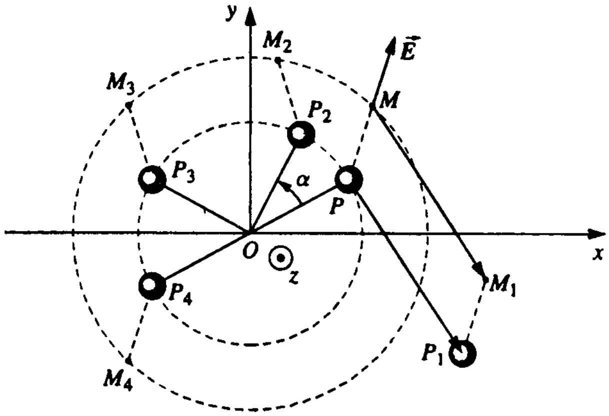
4 Trường của một phân bố có tính đối xứng cầu

Cũng câu hỏi trên đối với một phân bố có tính đối xứng cầu tại tâm O.

5 Tính đối xứng và tính bất biến

Cho một mặt phẳng được xác định bởi các trục (Ox) và (Oy). Một điện tích q đặt tại P tạo ra tại M một trường tĩnh điện $\vec{E}$. Ta hãy thực hiện cùng một phép biến đổi cho các điểm P và M.

Hãy nghiên cứu trường $\vec{E}$ trong phép biến đổi này, trong các trường hợp sau :



Trường hợp 1	$P, M \xrightarrow{\text{tịnh tiến}} P_1, M_1$
Trường hợp 2	$P, M \xrightarrow{\text{quay góc } \alpha} P_2, M_2$
Trường hợp 3	$P, M \xrightarrow{\text{đối xứng qua } (yOz)} P_3, M_3$
Trường hợp 4	$P, M \xrightarrow{\text{đối xứng qua } O} P_4, M_4$

6 Trường tạo ra bởi một quả cầu tích điện đều trên bề mặt

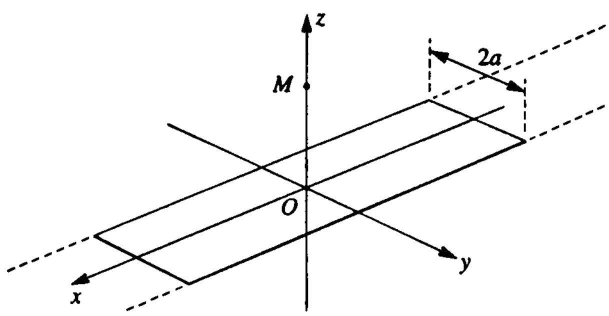
Cho một quả cầu tâm O ; bán kính a mang điện tích được phân phối đều trên bề mặt (mật độ điện mặt σ).

1) Sử dụng các nhận xét về tính đối xứng, hãy xác định trường của quả cầu tại tâm O.

2) Hãy nghiên cứu trường $\vec{E}$ (sự định hướng và các thông số mà nó phụ thuộc) tại mọi điểm trong không gian.

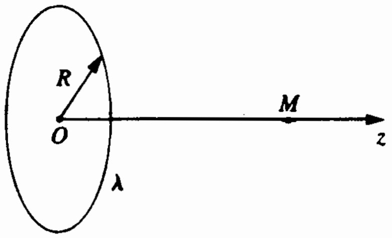
7 Trường của một mặt băng (dải) tích điện

Một băng có bề mặt vô hạn, được mô tả trên sơ đồ, mang mật độ điện mặt đều σ_o. Hãy tính trường tĩnh điện tạo ra bởi băng tại điểm $M(O, O, z)$.



8 Trường tạo ra bởi một vòng tại một điểm trên trục của nó

Cho một vòng dây hình tròn bán kính R trục (Oz) mang một mật độ điện dài không đổi λ.



Hãy tính trường tạo ra bởi phân bố điện tích này tại một điểm M trên trục của nó.

VẬN DỤNG VỐN KIẾN THỨC

9 Trường tạo ra bởi một đĩa tại một điểm trên trục của nó.

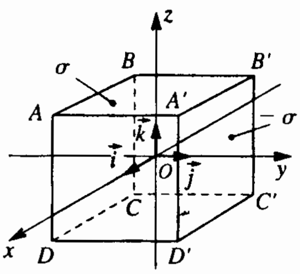
Bằng cách sử dụng các kết quả của bài tập 8 (vòng tích điện), hãy tìm lại trường tạo ra bởi một đĩa bán kính R mang mật độ điện mặt đều σ, tại một điểm M trên trục của nó.

10 Trường tạo ra bởi một đĩa tại một điểm trên trục của nó

Hãy tìm lại trường tạo ra bởi một đĩa bán kính R mang mật độ điện mặt đều σ, tại một điểm M trên trục của nó, bằng cách sử dụng các góc đặc.

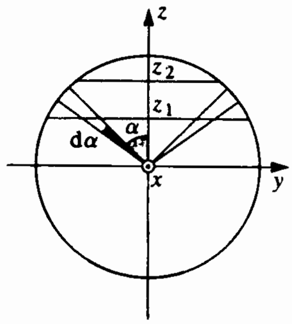
11 Trường tại tâm của một lập phương

Cho một lập phương cạnh a, mà các mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$ mang các mật độ điện mặt đối xứng σ và $-\sigma$. Hãy tính trường tại tâm của lập phương.



12 Trường tạo ra tại tâm của một quả cầu tích điện một phần

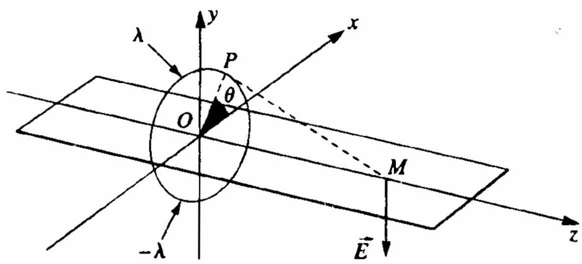
Tính trường tạo ra bởi một quả cầu bán kính R, mang mật độ điện mặt phân bố đều trên bề mặt của nó nằm giữa hai mặt phẳng có độ cao z_1 và z_2 $(-R \leq z_1 \leq z \leq z_2 \leq R)$, tại tâm O của cầu. Hãy tìm lại trường hợp bán cầu tích điện đã gặp trong áp dụng 2.



13 Trường của một chiếc vòng, một nửa tích điện + λ, một nửa tích điện âm −λ, trên trục của nó

Một chiếc vòng bán kính R, tâm O, trục (Oz) mang mật độ điện dài λ. dấu (y), λ là một số không đổi.

Hãy xác định hướng của trường tạo ra bởi vòng tại một điểm M của trục (Oz). Tính trường tại điểm M.



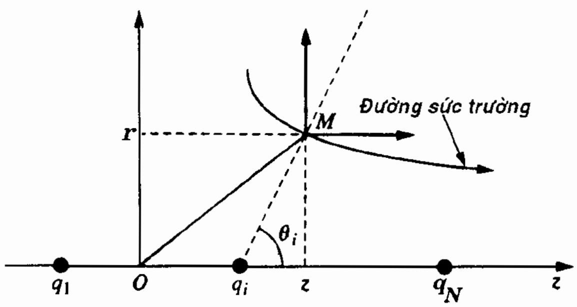
14 Phương trình của một đường sức trường cho một tập hợp các điện tích

N điện tích $q_1, ..., q_N$ được phân bố trên trục (Oz).

Chứng tỏ rằng phương trình của một đường sức trường có dạng :

$$\sum_{i=1}^{N} q_i \cos\theta_i = cte$$

trong đó các góc θ_i được xác định trên sơ đồ sau :

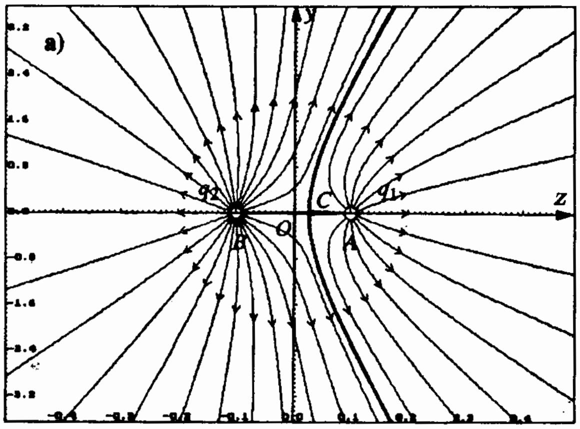


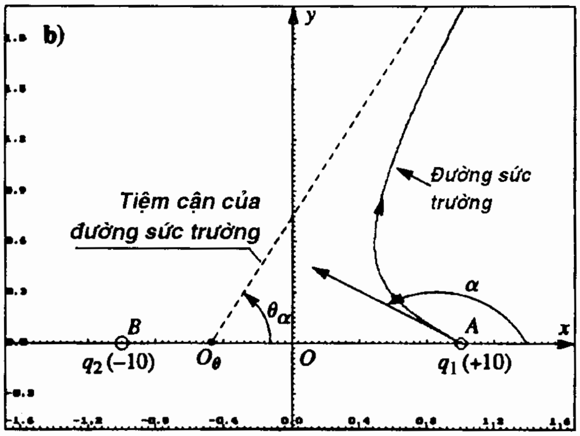
15 Các đường sức trường của một hệ hai điện tích cùng dấu

Hai điện tích điểm q_1 và q_2 cùng dấu được đặt tại A và B trên trục (Oz) có hoành độ lần lượt là D và $-D$. Gốc O được chọn là điểm giữa của A và B.

Một vài đường sức trường của hệ này được mô tả trên sơ đồ *a*. Chúng được vẽ cho trường hợp $q_2 = 3q_1$.

Trong mặt phẳng của sơ đồ *b*, phương trình của đường sức trường có dạng $q_1\cos\theta_1 + q_2\cos\theta_2 = cte$ (x. bài tập 14). Hãy giải thích tại sao các đường sức trường lại nhận một phương tiệm cận ở vô cùng. Ta sẽ kí hiệu O_θ là giao điểm của tiệm cận với trục (AB).





Ta quan tâm đến một đường sức trường xuất phát từ A tại đó nó hợp với trục (AB) một góc α. Hãy xác định góc θ_α hợp bởi tiệm cận (ở khoảng cách lớn) của đường sức này với trục (Ox). Suy ra góc θ_L đặc trưng cho giới hạn ngăn cách các đường sức trường xuất phát từ A và các đường sức trường xuất phát từ B, ở khoảng cách lớn. Thực hiện sự áp dụng bằng số đối với trường hợp đã mô phỏng và kiểm lại giá trị này trên hình vẽ.

Chứng tỏ rằng mọi đường tiệm cận đều cắt nhau tại cùng một điểm, nghĩa là điểm O_θ không phụ thuộc vào θ. Hãy giải thích kết quả này.

LỜI GIẢI

1 1) *Trường tạo ra tại M bởi một phần tử của dây dài dz, có vị trí xác định bởi α, là một phần tử dài dE :*

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda dz\frac{(\cos\alpha.\vec{e}_r - \sin\alpha.\vec{e}_z)}{d^2}$$

Vậy trường tại M nằm trong mặt phẳng (OM, Oz), và ta có :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\lambda dz\frac{(\cos\alpha.\vec{e}_r - \sin\alpha.\vec{e}_z)}{d^2}$$

với $dz = d(r\tan\alpha) = \dfrac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$ và $d = \dfrac{r}{\cos\alpha}$.

Khi đó, ta được :

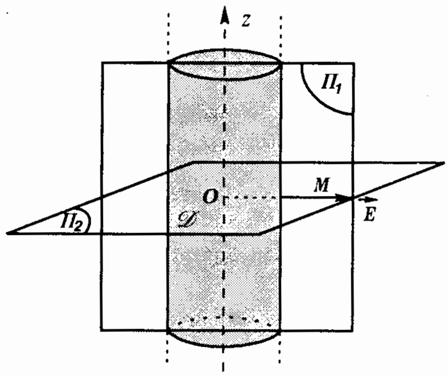
$$\vec{E} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\right][(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\vec{e}_r + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)\vec{e}_z].$$

2) Ta thu được trường hợp sợi dây vô hạn bằng cách lấy giới hạn β_1 *tiến tới* $-\dfrac{\pi}{2}$ *và* β_2 *tiến tới* $\dfrac{\pi}{2}$, *tức là* $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$.

2 *Phân bố điện tích là tròn xoay xung quanh trục (Oz). Tại điểm O thuộc hai mặt phẳng đối xứng (xOy) và (yOz), trường tĩnh điện phải song song với hai mặt phẳng này, vậy song song với trục (Oz).*

Mặt phẳng (xOy) cũng là một mặt phẳng đối xứng của phân bố điện tích (thay z thành −z tức là thay θ thành π − θ). Tại điểm O thuộc mặt phẳng đối xứng này, trường tĩnh điện phải song song với mặt phẳng đó. Như vậy, không cần tính toán, ta thu được $\vec{E}(O) = \vec{0}$.

3 *Hai mặt phẳng đối xứng chứa một điểm M : mặt phẳng* Π_1 *chứa M và trục (Oz) là một trục đối xứng tròn xoay của phân bố, và mặt phẳng* Π_2 *chứa M và vuông góc với trục (Oz).*



Tại M, trường $\vec{E}$ song song với hai mặt phẳng này, vậy là trường xuyên tâm. Nghĩa là, trong các tọa độ trụ :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E(r,\theta,z)\vec{e}_r.$$

Phân bố là bất biến đối với phép tịnh tiến song song với trục (Oz), và đối với phép quay xung quanh trục (Oz), ta thu được hai sự đơn giản hóa phụ :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r,\theta) = E(r)\vec{e}_r.$$

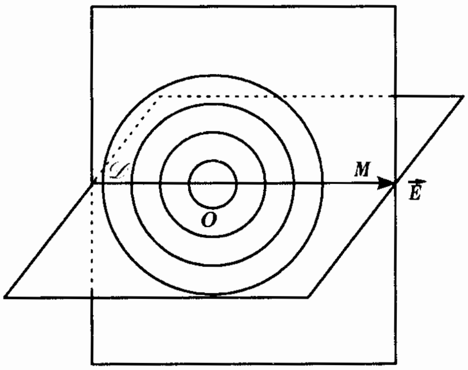
4 *Xét hai mặt phẳng vuông góc chứa tâm đối xứng O và điểm M, chúng là các mặt phẳng đối xứng của phân bố điện tích. Các mặt phẳng này chứa trường tại điểm M. Từ đó, trong các tọa độ cầu, ta suy ra :*

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r$$

Phân bố đã là bất biến với mọi phép quay có trục chứa điểm O, ta thu được :

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\vec{e}_r.$$

Chuẩn của trường phụ thuộc r, hướng của nó phụ thuộc θ và φ.



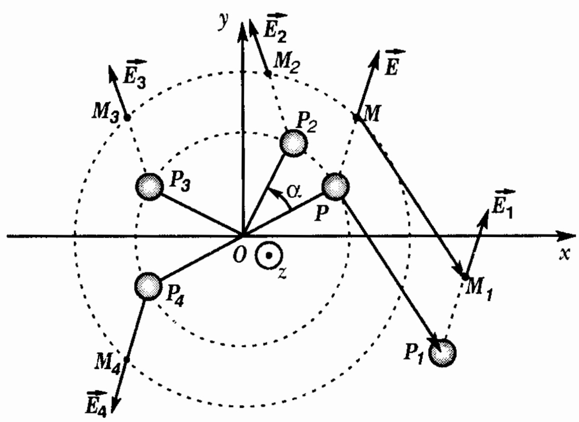
5 $\vec{E_1} = \vec{E}$;

$\vec{E_2}$ *thu được bằng phép quay $\vec{E}$ một góc α quanh (Oz) ;*

$\vec{E_3}$ *là đối xứng của $\vec{E}$ đối với (yOz) ;*

$\vec{E_4} = -\vec{E}$

Ta chú ý rằng trường $\vec{E}$ chịu cùng một phép biến đổi



6 1) *Mọi mặt phẳng chứa tâm O của quả cầu đều là một mặt phẳng đối xứng của các điện tích. Như vậy $\vec{E}$ mang bởi giao tuyến của hai mặt phẳng này, ở đây phải thu về một điểm, từ đó $\vec{E}$ phải bằng không tại O.*

2) Ta hãy nghiên cứu trường $\vec{E}$ tại một điểm M trong không gian. Các phép đối xứng của các điện ***tích đối với một mặt phẳng chứa điểm M*** *là : tất cả các mặt phẳng chứa các điểm O và M đều là các mặt phẳng đối xứng của các điện tích. $\vec{E}$ ở các giao tuyến của chúng được mang bởi $\overrightarrow{OM}$, vậy $\vec{E} = E\vec{e}_r$.*

Phép đối xứng cầu của các điện tích buộc trường này chỉ phụ thuộc vào :

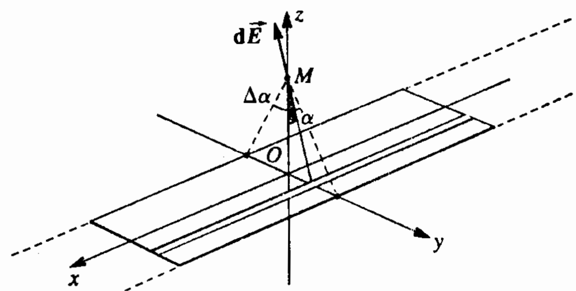
$$OM = r, \text{ nghĩa là } \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

(Ta sẽ còn thấy rằng ngoài ra trường $\vec{E}$ còn bằng không tại mọi điểm bên trong quả cầu).

7 • Tìm sự định hướng của trường

Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng của các điện tích, vậy trường tĩnh điện phải nằm trong mặt phẳng này. Mặt phẳng (yOz) cũng là một mặt phẳng đối xứng điện tích, vậy trường tĩnh điện cũng nằm trong mặt phẳng này. Như vậy trường $\vec{E}$ được mang bởi giao tuyến của hai mặt phẳng này $\vec{E} = E_z.\vec{e}_z$.

Phân bố điện tích là bất biến với phép tịnh tiến theo trục (Ox) : trường này không phụ thuộc vào x. Vậy ta có : $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$.



• Tính trường

Ta đã thấy ở bài tập 1, trường của một sợi dây vô hạn mang mật độ điện dài λ bằng $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$. Ta hãy sử dụng kết quả này bằng cách phân tích dải băng thành một dãy liên tiếp các dây vô hạn rộng dy mang mật độ điện dài nguyên tố $d\lambda = \sigma_0 dy$, như đã chỉ rõ trên hình vẽ. Hình chiếu của trường nguyên tố này trên trục (Oz) cho bởi :

$$dE_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r}dy$$

Biết rằng $r = \dfrac{z}{\cos\alpha}$ *và* $y = z\tan\alpha$ $\left(\text{tức } dy = z\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$, *trường phải tìm bằng :* $E_z = \dfrac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0 z}\displaystyle\int_{\substack{\text{bề rộng}\\ \text{băng}}}\cos^2\alpha\, dy = \dfrac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\substack{\text{bề rộng}\\ \text{băng}}} d\alpha = \dfrac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\Delta\alpha$

$\Delta\alpha$ *biểu thị góc toàn phần dưới đó ta nhìn bề rộng của băng từ điểm M.*

Nghĩa là : $\vec{E} = \dfrac{\sigma_0}{\pi\varepsilon_0}\arctan\left(\dfrac{a}{z}\right)\vec{e}_z$.

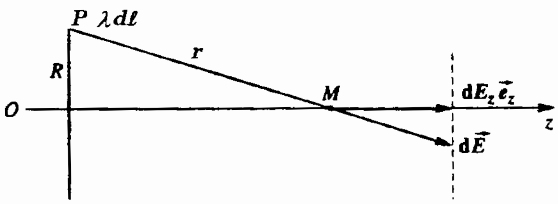
- Nghiệm lại

Thành phần của trường theo (Oy) cho bởi :

$$E_y = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\substack{\text{bề rộng}\\ \text{băng}}}\frac{\sin\alpha\, dy}{r} = -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\substack{\text{bề rộng}\\ \text{băng}}}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha$$

$$= -\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\sin^2\alpha}{2}\right]_{-\frac{\Delta\alpha}{2}}^{+\frac{\Delta\alpha}{2}} = 0.$$

8



- Sử dụng các phép đối xứng

Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) (**vậy chứa M**) *là một mặt phẳng đối xứng điện tích.*

Vậy trường mang bởi trục (Oz), từ đó $\overrightarrow{E(z)} = E_z(z).\vec{e}_z$

- Tính toán trường

Xét trường hợp $z > 0$ *: trường* $d\vec{E}$ *tạo ra tại M bởi một điện tích nguyên tố* λdl*, mang bởi một phần tử dài dl của vòng tại điểm P, cho bởi :*

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_{PM}}{PM^2}.$$

Vậy phần đóng góp của nó trên trục (Oz) là :

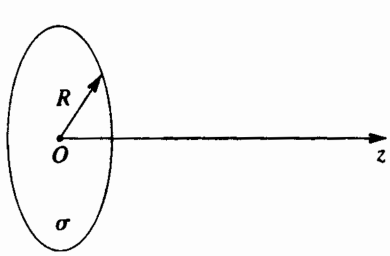
$$dE_z = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2}.$$

Với mọi điểm P của vòng, α *và r đều như nhau, từ đó có biểu thức của trường tổng hợp* $\left(r = \dfrac{R}{\sin\alpha}\right)$:

$$E_z = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{R} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{zR}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Biểu thức trên cũng đúng với $z < 0$ $(E_z < 0)$.

9



- Sử dụng phép đối xứng

Mọi mặt phẳng chứa (Oz) (**vậy chứa điểm M**) đều là một mặt phẳng đối xứng điện tích. Vậy trường mang bởi trục (Oz) : $\overrightarrow{E(z)} = E_z(z)\vec{e}_z$.

- Tính toán trường

Xét trường hợp $z > 0$ *: trường cần tìm là sự chồng chất của những trường nguyên tố tạo ra bởi các vòng có cùng trục.*

Các vòng này là các phần diện tích nằm giữa hai vòng tròn bán kính r và r + dr. Mật độ điện dài trên các vòng này bằng $d\lambda = \sigma dr$ *(ta cũng có* $2\pi r\, dr.\sigma = 2\pi r\, d\lambda$*). Biết rằng trường nguyên tố của một vòng bán kính r cho bởi :*

$$dE_z = \frac{d\lambda}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{zr}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ta thu được :

$$E_z = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{zr}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right).$$

Ta đã tìm lại đúng giá trị của trường :

$$\text{nếu } z > 0 : E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right);$$

$$\text{nếu } z < 0 : E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right).$$

10

- Sử dụng các phép đối xứng

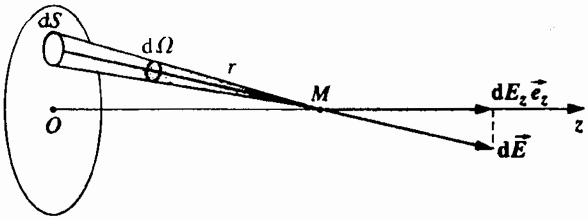
Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) (**vậy chứa điểm M**) *đều là một mặt phẳng đối xứng điện tích.*

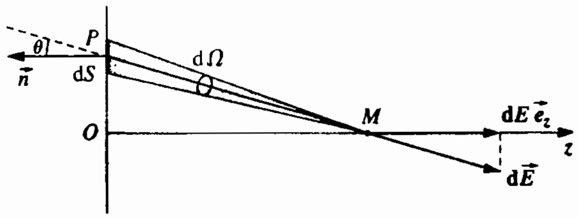
Vậy trường mang bởi trục (Oz) : $\overrightarrow{E(z)} = E_z(z)\vec{e}_z$.

- Tính toán trường

Xét trường hợp $z > 0$ *:* $d\vec{E}$ *tạo ra tại M bởi điện tích* σds*, nằm tại P, cho bởi :*

$$d\vec{E} = \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$





Vậy phần đóng góp của nó vào trường ở trên trục bằng

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS.\cos\theta}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega.$$

với $d\Omega$, là góc đặc dưới đó ta nhìn phần tử diện tích dS tại P từ điểm M. Từ đó $E = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$, với Ω, là góc đặc dưới đó ta nhìn diện tích của đĩa từ điểm M. Biết rằng góc đặc định ra bởi một hình chóp có nửa góc ở đỉnh α bằng $\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$, ở đây :

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

Ta lại thu được đúng giá trị của trường :

$$\text{nếu } z > 0: \; E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right);$$

$$\text{nếu } z < 0: \; E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right).$$

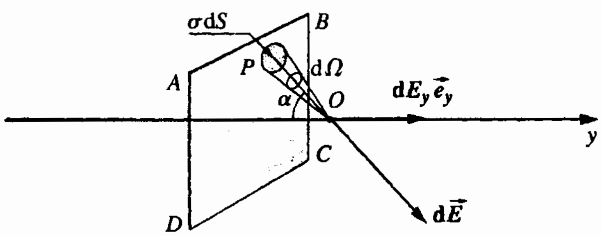
11 Ta xét các mặt phẳng khác nhau qua O :

- các mặt phẳng đối xứng điện tích :

(xOy) và (yOz), vậy $\vec{E}$ được mang bởi giao tuyến của chúng, nghĩa là $\vec{E}_0 = E\vec{e}_y$;

- các mặt phẳng phản đối xứng điện tích :

(xOz), $\vec{E}$ đúng là vuông góc với mặt phẳng này.



- Tính giá trị của E

Ta hãy tính trường tạo ra bởi mặt ABCD tại O : $d\vec{E}$ tạo ra tại O bởi điện tích σdS, nằm tại P cho bởi :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}.$$

Vậy, phần đóng góp của nó bằng $dE = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dS\cos\alpha}{r^2} = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$,

với $d\Omega$, là góc đặc dưới đó ta nhìn phần tử diện tích dS từ điểm O. Do đối xứng, trường tạo ra bởi ABCD cũng bằng trường tạo ra bởi A'B'C'D', từ đó $E = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\Omega$, với Ω là góc đặc dưới đó ta nhìn diện tích ABCD từ điểm O. Các góc đặc dưới chúng ta nhìn 6 mặt của lập phương đều giống nhau. Biết rằng góc đặc của toàn không gian bằng 4π, nên trường cần tìm bằng $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0}\vec{e}_y$.

12 • Sử dụng các tính đối xứng

Điểm O thuộc về các mặt phẳng đối xứng (xOz) và (yOz) của phân bố điện tích : trường được mang bởi trục (Oz), tức $\vec{E}(O) = E\vec{e}_z$.

- Tính toán trường

Trường cần tìm là sự chồng chập của các trường nguyên tố tạo ra bởi các vòng có cùng trục (Oz). Các vòng này là các phần diện tích, trên mặt cầu, định ra bởi không gian (góc đặc $d\Omega$) nằm giữa hai hình nón có nửa góc ở đỉnh α và $\alpha + d\alpha$ ($d\Omega = 2\pi\sin\alpha\, d\alpha$). Mật độ điện dài trên các vòng này bằng :

$$d\lambda = \sigma R\frac{d\Omega}{2\pi} = \sigma R\sin\alpha\, d\alpha \;\; \textit{(ta cũng có } R^2 d\Omega.\sigma = 2\pi R\, d\lambda\textit{).}$$

Biết rằng trường nguyên tố của một vòng bán kính $r = R\sin\alpha$ cho bởi :

$$dE_z = -\frac{d\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{r},$$

ta thu được :

$$dE_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}d(\sin^2\alpha),$$

từ đó :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma[z_2^2 - z_1^2]}{4\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_z.$$

Cho toàn bộ quả cầu $(-z_1 = z_2 = R)$, hiển nhiên ta có trường bằng không tại tâm, và cho nửa quả cầu ($z_1 = 0$, và $z_2 = R$) ta tìm lại được :

$$\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{e}_z.$$

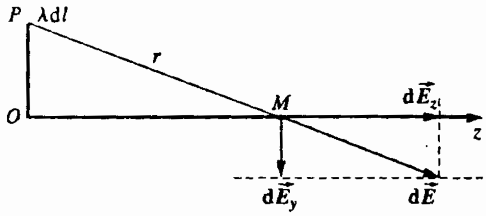
13 • Sử dụng các tính đối xứng

M thuộc về mặt phẳng phản đối xứng (xOz) của phân bố điện tích. Trường tại M, vuông góc với mặt phẳng này, sẽ song song với (Oy) : $E(z) = E_y(z)\vec{e}_y$.

• Tính toán trường

Gọi z $(z > 0)$ là hoành độ của điểm M đánh dấu điểm P vạch ra chiếc vòng như đã chỉ rõ trên hình vẽ của đề bài.

Phần đóng góp của hai nửa vòng là như nhau : vậy trường toàn phần bằng hai lần phần đóng góp theo trục (Oy) của nửa vòng trên.



Phần đóng góp của trường $dE_y = dE_y.\vec{e}_y$ do một phần tử dài dl, nằm tại P $(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$, mang điện tích λdl, bằng :

$$dE_y(M) = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_{P\to M}.\vec{e}_y}{PM^2}, \text{ với } PM^2 = R^2 + z^2$$

và $\vec{e}_{P\to M}.\vec{e}_y = -\dfrac{R\sin\theta}{PM}$.

Ta thu được E_y (toàn phần tại z) $= -\dfrac{2\lambda R^2}{4\varepsilon_0 PM^3}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = -\dfrac{\lambda R^2}{\pi\varepsilon_0 PM^3}$.

14

Hệ là tròn xoay xung quanh trục (Oz) và các đường sức trường đều nằm trong các mặt phẳng chứa trục tròn xoay như là mặt phẳng hình vẽ.

Trường tạo ra tại M, có tọa độ trụ r và z, bởi N điện tích điểm có tọa độ z_i bằng:

$$\vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta_i\vec{e}_r + \cos\theta_i\vec{e}_z}{[r^2 + (z - z_i)^2]}.$$

Với một dịch chuyển nguyên tố $d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + dz\vec{e}_z$ dọc theo một đường sức trường $d\vec{r} \wedge \vec{E} = 0$, nghĩa là :

$$0 = \sum_{i=1}^{N} q_i\frac{\sin\theta_i dz - \cos\theta_i dr}{r^2 + (z - z_i)^2} = \sum_{i=1}^{N} q_i\frac{rdz - (z - z_i)dr}{[r^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{N} q_i d\left(\frac{(z - z_i)}{[r^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{1}{2}}}\right),$$

điều này đảm bảo cho kết quả đã yêu cầu $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} q_i d(\cos\theta_i) = 0$

15

Ở khoảng cách lớn, một người quan sát sẽ chỉ nhìn thấy phân bố dưới dạng một điện tích duy nhất $Q = q_1 + q_2$ ở khoảng cách $(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, sao cho các đường sức trường khi đó gần như xuyên tâm và ta sẽ thừa nhận có một hướng tiệm cận (sau này ta sẽ thấy sự tồn tại của một tiệm cận khi xác định điểm O_θ.)

Phương trình của đường sức trường đang xét là :

$$q_1\cos\theta_1 + q_2\cos\theta_2 = \text{cte} = q_1\cos\alpha + q_2.$$

Ở khoảng cách lớn $q_1\cos\theta_1 + q_2\cos\theta_2 \approx (q_1 + q_2)\cos\theta_\alpha$, vậy :

$$\cos\theta_\alpha = \frac{(q_1\cos\alpha + q_2)}{(q_1 + q_2)}.$$

Khi góc α vạch ra khoảng $[-\pi\,;\pi]$, thì góc θ biến thiên trong khoảng $[-\theta_L\,;\theta_L]$ với $\cos\theta_L = \dfrac{|q_1 - q_2|}{|q_1 + q_2|}$. Đối với trường hợp đã mô phỏng, $\theta_L = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60^0$. Phương trình đường sức trường là:

$$\frac{q_1(z - D)}{[r^2 + (z - D)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{q_2(z + D)}{[r^2 + (z + D)^2]^{\frac{1}{2}}} = q_1\cos\alpha + q_2.$$

Tiệm cận nhận một phương trình có dạng $r = (z - z_0)\tan\theta$, trong đó z_0 là hoành độ của điểm O_θ.

Thay r bằng biểu thức này và khai triển phương trình trên theo mũ của $\dfrac{1}{z}$, ta được :

$$(q_1\cos\alpha + q_2) = (q_1 + q_2)\cos\theta$$

$$+\cos\theta\sin^2\theta\left[(q_2 - q_1)\frac{D}{z} + (q_1 + q_2)\frac{z_0}{z}\right] + \ldots$$

Bằng cách đồng nhất các số hạng bậc không, ta tìm lại được giá trị của $\cos\theta$ đã xác định. Bây giờ bằng cách đồng nhất các số hạng theo $\dfrac{1}{z}$, ta được $z_0 = \dfrac{D(q_1 - q_2)}{(q_1 + q_2)}$. Vậy vị trí của điểm O_θ không phụ thuộc vào góc θ.

Kết quả này là khá tự nhiên : ở xa hai điện tích, người quan sát khám phá ra môi trường rất giống với trường tạo ra bởi một điện tích $Q = q_1 + q_2$ đặt tại tâm tỉ cự của q_1 và q_2.

THẾ TĨNH ĐIỆN 3

MỤC TIÊU

- Lưu số của trường tĩnh điện
- Thế tĩnh điện
- Thế năng tương tác tĩnh điện.

Mở đầu

Trường tĩnh điện có thể được đặc trưng một cách đơn giản nhờ một hàm số gọi là thế tĩnh điện

Việc chọn danh từ này sẽ được giải thích rõ bởi hàm số này có quan hệ với thế năng của một điện tích đặt dưới tác dụng của trường tương ứng.

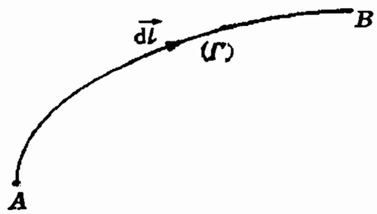
ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Trường tĩnh điện
- Gradien

1 Lưu số của trường tĩnh điện

1.1. Định nghĩa

Xét một đường cong Γ nối liền hai điểm A và B. Lưu số C của một trường vectơ $\vec{E}$, trên đường cong Γ, từ A tới B, được xác định bởi $C_{AB(\Gamma)} = \int_{A\,(\Gamma)}^{B} \vec{E}\mathrm{d}\vec{l}$, trong đó $\mathrm{d}\vec{l}$ là vectơ dịch chuyển nguyên tố dọc theo đường cong Γ (*hình* 1).



Hình 1.

1.2. Lưu số của trường của một điện tích điểm

1.2.1. Sự bảo toàn lưu số của trường

Trường $\vec{E}$ tạo ra bởi một điện tích điểm q, đặt tại điểm O được chọn làm gốc, trong tọa độ cầu, bằng : $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$.

Lưu số nguyên tố $\vec{E}.\mathrm{d}\vec{r}$ liên kết với một chuyển dời nhỏ $\mathrm{d}\vec{r}$ bằng :

$$\vec{E}.\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{e}_r}{r^2}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right).$$

Lưu số từ A tới B trên đường cong Γ (không đi qua O), do vậy, bằng :

$$\int_{A(\Gamma)}^{B} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Nó không phụ thuộc vào sự lựa chọn đường đi C (không đi qua gốc O) phải theo để đi từ A tới B : $C_{AB(\Gamma)} = C_{AB(\Gamma')}$.

Lưu số của trường, từ một điểm A tới một điểm B được bảo toàn khi ta chuyển từ một đường đi Γ sang một đường đi Γ' nối hai điểm đó : *lưu số của trường là bảo toàn.*

1.2.2. Trường có građien

Lưu số nguyên tố của trường là $\vec{E}.\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}V(\vec{r})$, với

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} + \mathrm{cte}$$

Ta có thể đồng nhất trường tạo ra bởi điện tích điểm với một *trường có građiên* $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\mathrm{d}V$

1.3. Lưu số của trường của một phân bố

1.3.1. Lưu số bảo toàn của trường

Nguyên lí chồng chất cho phép ta thu được trường tạo ra bởi một phân bố bằng cách cộng các tác dụng của các phần nguyên tố của phân bố.

Lưu số $\int_{A\,(\Gamma)}^{B} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l}$ có cùng một giá trị đối với mọi đường đi nối A với B, điều đó có nghĩa là :

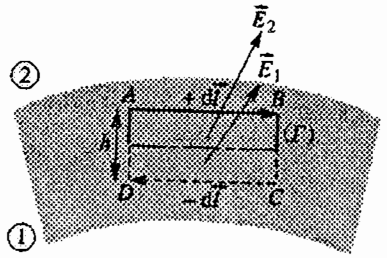
Lưu số của trường tĩnh điện được bảo toàn.

Hay, điều này tương đương với :

Lưu số của trường tĩnh điện trên một đường cong khép kín (đường viền) bằng không :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

Khi vẽ các đường sức trường, ta cần chú ý tới một hệ quả của tính chất trên : *một đường sức trường tĩnh điện, không thể có dạng một cái vòng khép kín trên chính nó*. Thực vậy, lưu số của trường trên vòng, đã được định hướng bởi trường, chỉ có thể là một số dương (nếu không trường phải bằng không trên toàn vòng hoặc không xác định tại một vài điểm, điều này không cho phép coi vòng như một đường sức trường nữa).



Hình 2. *Thành phần tiếp tuyến của $\vec{E}$ là liên tục khi đi qua một mặt mang điện.*

▶ **Để luyện tập : BT12**

1.3.2. Tính liên tục của thành phần tiếp tuyến của trường khi đi qua một mặt mang điện

Ta sẽ thấy ở *chương* 4, trường tĩnh điện là gián đoạn khi đi qua một mặt mang điện. Tuy nhiên, thành phần tiếp tuyến của nó lại vẫn liên tục, điều mà ta sắp chứng minh ở đây.

Muốn vậy, ta hãy xét một vòng nhỏ (đường cong khép kín) Γ như đã chỉ rõ trên *hình* 2, đi qua từ phía này sang phía kia của một mặt ; mặt này có thể mang một mật độ điện mặt σ và ngăn cách hai môi trường, kí hiệu ① và ②.

Trên vòng kín này $\oint_\Gamma \vec{E}.d\vec{l} = 0$. Nếu kích thước d$l$ của vòng là đủ nhỏ, thì có thể coi trường như không đổi trên các phần của vòng và được kí hiệu là $\vec{E_1}$ hoặc $\vec{E_2}$ tùy theo môi trường, nghĩa là :

$$\vec{E}_2.d\vec{l} + C_{BC} + \vec{E}_1(-d\vec{l}) + C_{DA} = 0$$

Hơn nữa, ta sẽ quan tâm đến hệ thức giữa các trường ở hai phía của mặt phân cách này. Khi h tiến về không, thì các trường $\vec{E_1}$ hoặc $\vec{E_2}$ vẫn bị chặn (X. *Chương* 2, *áp dụng* 7). Các lưu số C_{BC} và C_{DA} bằng không. Các phần đóng góp chủ yếu vào lưu số của trường trên vòng khi đó tương ứng với các phần AB và CD ở hai phía của mặt phân cách, vậy $(\vec{E_2} - \vec{E_1})d\vec{l} = 0$.

Sự định hướng của phần tử $d\vec{l}$ là bất kì trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt phân cách, vì vậy :

Các thành phần tiếp tuyến của trường là liên tục khi đi qua một mặt mang điện hoặc không :

$$\vec{E}_{2//} = \vec{E}_{1//} \text{ hay } (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n}_{12} = \vec{0}$$

$\vec{n}_{12}$ là vectơ đơn vị trực giao với mặt, hướng từ môi trường ① sang môi trường ②.

2 Thế tĩnh điện

2.1. Lưu số của trường và thế

2.1.1. Hàm thế

Lưu số của trường tĩnh điện là bảo toàn, ta có thể định nghĩa đại lượng $C_{AB} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$, độc lập với đường đi từ A tới B để tính lưu số của trường.

Cũng như vậy, ta có thể định nghĩa hàm $V(\vec{r})$ bởi $V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E}.d\vec{l}$, giá trị của hàm số này tại A có thể được xác định một cách tùy ý (hằng số tích phân).

Ta gọi đại lượng V *là hàm thế tĩnh điện*, được xác định sai kém một hằng số :

Hiệu điện thế giữa điểm A và B là :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}.$$

Áp dụng 1

Thế của một sợi dây thẳng vô hạn

Hãy xác định thế liên kết với một sợi dây thẳng vô hạn mang mật độ điện dài đều λ. (Trường của phân bố này đã được tính ở chương hai bài tập 1).

Ta đã biết trường của phân bố này, trong tọa độ trụ có trục (Oz) trùng với sợi dây, có biểu thức $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.\vec{e}_r$

Biểu thức của một dịch chuyển nguyên tố là :

$$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta + dz.\vec{e}_z$$

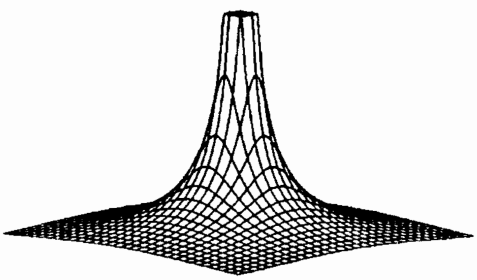
Trong tọa độ trụ, ta thu được :

$$V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E}.d\vec{r}$$

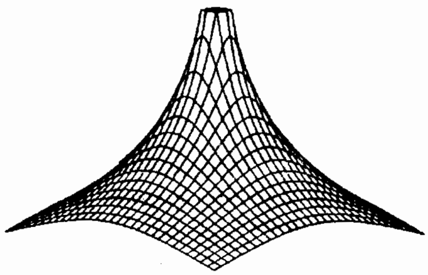
$$= V_A + \int_A^B -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = V_A - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{r_B}{r_A}\right]$$

Chú ý rằng đối với mô hình phân bố vô hạn này, ta không thể chọn thế bằng không ở vô cùng. Chẳng hạn, nếu ta chọn $V = 0$ ở cách dây một khoảng R, ta sẽ có :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{r}{R}\right]$$



Hình 3. *Thế của một điện tích điểm $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, ở vô cùng $V = 0$.*



Hình 4. *Thế của một sợi dây thẳng vô hạn $V = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}$. Ta làm rõ đẳng thế O ở khoảng cách hữu hạn R của dây. Ở vô cùng, V là vô cùng.*

▶ **Để luyện tập : BT1.**

2.1.2. Trường có gradien

Lưu số nguyên tố của trường, sai kém về dấu, đồng nhất hóa với vi phân (đúng) của hàm số $V(M)$:

$$\vec{E}.\vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)dz = -dV$$

<u>*Chú thích :*</u>

Sự chọn dấu trừ lúc này là tùy ý ; tuy nhiên, ta sẽ thấy nó cũng rất thích hợp cho một sự liên kết trực tiếp giữa thế tĩnh điện và khái niệm thế năng.

Trường tĩnh điện là một trường có gradien, viết là :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}_M V(M)$$

Phép tính về gradien nằm trong *phụ lục* 2.

Như vậy ta có thể nhận ra :

Một trường vectơ $\vec{E}$ có lưu số bảo toàn là một trường có gradien

▶ **Để luyện tập : BT 4 và 13.**

2.1.3. Sự bất biến với mức (jauge)

Thế tĩnh điện được tạo ra là không duy nhất.

Thế tĩnh điện được xác định sai kém một hằng số.

$V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) + V_0$ (V_0 là một hằng số tùy ý) là một thế khác có thể chấp nhận được.

Sự chọn gốc này, còn gọi là *chọn mức*, không làm thay đổi trường, đại lượng vật lí có thể đo được bởi những tác dụng của nó (lực COULOMB) :

Trường tĩnh điện là bất biến với mức, nghĩa là với mốc để tính thế.

Áp dụng 2

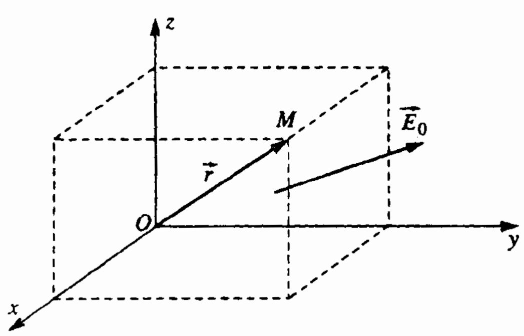
Thế liên kết với một trường đều

1) *Tính* $\overrightarrow{grad}(\vec{E}_0.\overrightarrow{OM})$, *trong đó* $\vec{E}_0$ *là một hằng vectơ.*

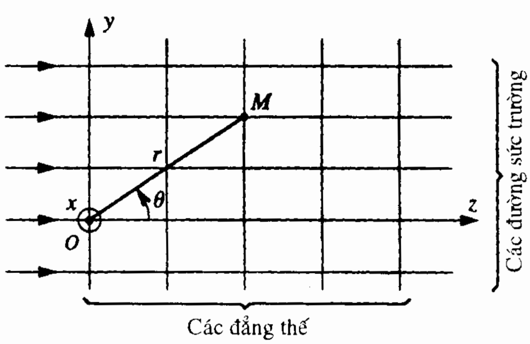
2) *Hãy biểu thị thế liên kết với một trường tĩnh điện đều* $\vec{E}_0$

1) Bằng cách biểu thị tích vô hướng cần đạo hàm nhờ các tọa độ Descartes, ta có ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{E}_0.\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(E_{0x}x + E_{0y}y + E_{0z}z) = E_{0x}$$



Hình 5



Hình 6. $\vec{E} = E_o\vec{u}_z$

Thành phần của gradien trên (Ox) đã bằng E_{0x}, trên (Oy) sẽ bằng E_{0y} và trên (Oz) bằng E_{0z}.

Vậy ta thu được :

$$\overrightarrow{grad}\,(\vec{E}_0.\vec{r}) = \vec{E}_0$$

Kết quả cuối cùng là độc lập với hệ tọa độ đã chọn để thực hiện phép tính.

2) Chỉ cần dùng biểu thức của thế theo lưu số của trường, ta có :

$$V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E}.\mathrm{d}\vec{l} = V_A - \vec{E}_0(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

nghĩa là : $V(\vec{r}) = -E_0 r\cos\theta + cte$

Kết quả này phù hợp với phép tính sơ cấp ở trên.

3 Thế tạo ra bởi một phân bố điện tích

3.1. Sự chồng chất của các tác dụng

Toán tử gradien là một toán tử tuyến tính nên ta cũng có thể thu được thế tĩnh điện của một phân bố bằng sự chồng chất các phần đóng góp nguyên tố, tương tự như thế tạo ra (sai kém một hằng số) bởi một điện tích điểm :

$$\delta V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\delta q_P}{PM} \text{ (mốc thế không, ở vô cùng)}$$

Biểu thức tích phân của thế, triệt tiêu ở vô cùng, tạo ra bởi một phân bố điện tích $\mathscr{D}$ có kích thước hữu hạn, có dạng :

$$V(M) = \iiint_{\mathscr{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta q_P}{PM}$$

Chỉ còn phải xác định phần tử điện tích đối với loại phân bố $\mathscr{D}$ đang xét, và tùy theo trường hợp nêu ra, ta sẽ sử dụng một trong các biểu thức sau đây cho thế tĩnh điện tạo ra bởi $\mathscr{D}$, sai kém một hằng số.

3.2. Các biểu thức của thế

■ **Tập hợp các điện tích điểm :**

Với các điện tích q_i đặt tại các điểm P_i

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{P_iM}$$

■ **Phân bố điện tích theo thể tích :**

$$V(M) = \iiint_{\mathscr{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)d\tau}{PM}$$

■ **Phân bố điện tích theo bề mặt**

$$V(M) = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

Thành phần của gradien trên (Ox) đã bằng E_{0x}, trên (Oy) sẽ bằng E_{0y} và trên (Oz) bằng E_{0z}.

Vậy ta thu được :

$$\overrightarrow{grad}\,(\vec{E}_0.\vec{r}) = \vec{E}_0$$

Kết quả cuối cùng là độc lập với hệ tọa độ đã chọn để thực hiện phép tính.

2) Chỉ cần dùng biểu thức của thế theo lưu số của trường, ta có :

$$V_B = V_A + \int_A^B -\vec{E}.d\vec{l} = V_A - \vec{E}_0(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

nghĩa là : $V(\vec{r}) = -E_0 r\cos\theta + cte$

Kết quả này phù hợp với phép tính sơ cấp ở trên.

3 Thế tạo ra bởi một phân bố điện tích

3.1. Sự chồng chất của các tác dụng

Toán tử gradien là một toán tử tuyến tính nên ta cũng có thể thu được thế tĩnh điện của một phân bố bằng sự chồng chất các phần đóng góp nguyên tố, tương tự như thế tạo ra (sai kém một hằng số) bởi một điện tích điểm :

$$\delta V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta q_P}{PM} \text{ (mốc thế không, ở vô cùng)}$$

Biểu thức tích phân của thế, triệt tiêu ở vô cùng, tạo ra bởi một phân bố điện tích $\mathscr{D}$ có kích thước hữu hạn, có dạng :

$$V(M) = \iiint_{\mathscr{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta q_P}{PM}$$

Chỉ còn phải xác định phần tử điện tích đối với loại phân bố $\mathscr{D}$ đang xét, và tùy theo trường hợp nêu ra, ta sẽ sử dụng một trong các biểu thức sau đây cho thế tĩnh điện tạo ra bởi $\mathscr{D}$, sai kém một hằng số.

3.2. Các biểu thức của thế

■ **Tập hợp các điện tích điểm :**

Với các điện tích q_i đặt tại các điểm P_i

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{P_iM}$$

■ **Phân bố điện tích theo thể tích :**

$$V(M) = \iiint_{\mathscr{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)d\tau}{PM}$$

■ **Phân bố điện tích theo bề mặt**

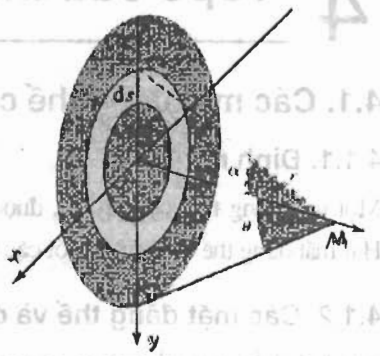
$$V(M) = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

■ **Phân bố điện tích theo chiều dài**

$$V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lambda(P) \frac{\mathrm{d}l_P}{PM}$$

<u>*Chú ý :*</u>

- *Trước hết, để đảm bảo cho các tích phân có ý nghĩa, các biểu thức trên chỉ được áp dụng cho trường hợp các phân bố có kích thước hữu hạn. Trong trường hợp này ta chọn thế bằng không ở vô cùng cho các biểu thức.*
- *Đối với trường hợp dây vô hạn đã được nghiên cứu trong áp dụng 1, sự áp dụng biểu thức cuối cùng sẽ dẫn tới một sự phân kì lôga của tích phân, mặc dầu tích phân tương ứng với trường lại hội tụ. Ta đã biết cách thức giải quyết khó khăn này và đã nhận thấy đối với mô hình trên thì không thể chọn V = 0 ở vô cùng.*
- *Cũng về sự hội tụ của tích phân, một vấn đề khác này sinh nếu ta muốn tính thế tại một điểm của phân bố, nghĩa là tại một điểm mà PM = 0 khi tính tích phân. Với một phân bố theo thể tích, nếu không có các điện tích ở vô cùng thì tích phân sẽ hội tụ.*



Hình 7.

3.3. Thế trên trục của một đĩa tích điện

- Ta hãy thực hiện phép tính thế tạo ra bởi một đĩa bán kính R, mang mật độ điện mặt $\sigma = cte$ tại một điểm trên trục của đĩa.

Với các kí hiệu trên hình 7, thế được viết là :

$$V(M) = \int_{\alpha=0}^{\theta} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dS}{r},$$

với $dS = 2\pi(z\tan\alpha)d(z\tan\alpha) = 2\pi z^2 \dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} d\alpha$ và $r = \dfrac{z}{\cos\alpha}$ (với $z > 0$).

Như vậy, ta có : $V_{trục}(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$

- Khi đi qua mặt tích điện, trường tĩnh điện ở trên trục (được tính ở *chương* 2) chịu một sự gián đoạn hữu hạn $\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\right)\vec{e}_z$ và thế là liên tục **(*hình* 8)**.

<u>*Chú thích :*</u>

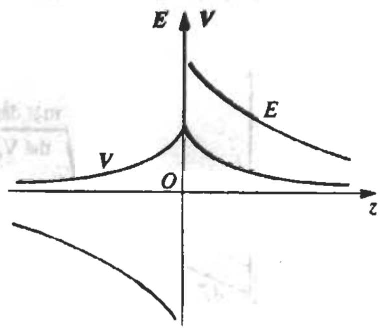
Cần nhớ rằng việc biết giá trị của thế ở trên trục cũng không cho phép xác định trường ở trên trục này : V(0, 0, z) đã biết và ta chỉ có thể tính :

$$E_z(0,0,z) = \frac{\partial V(0,0,z)}{\partial z}.$$

*Tuy nhiên, vì trục (Oz) **là một trục tròn xoay của phân bố, nên trên trục** này $E_x = E_y = 0$, ta đã **xác định xong trường trên trục (Oz), phù hợp với** kết quả đã thiết lập ở chương 2.*

Khi đi qua mặt mang một mật độ điện mặt σ, thế là liên tục ; điều này cho ta khẳng định :

Thế là liên tục nếu nó được xác định



Hình 8. *Thế là liên tục khi đi qua một mặt mang điện.*

▶ **Để luyện tập : BT 2 và 7.**

4 Tôpô của thế tĩnh điện

4.1. Các mặt đẳng thế của một phân bố

4.1.1. Định nghĩa

Một mặt đẳng thế, có thế V_0, được xác định bởi phương trình $V(M) = V_0$. Hai mặt đẳng thế tương ứng với các thế khác nhau không thể cắt nhau.

4.1.2. Các mặt đẳng thế và đường sức trường

Xét hai điểm rất gần nhau nằm trên cùng một mặt đẳng thế có thế V_0 (*hình* 9). Gọi M là điểm thứ nhất, N là điểm thứ hai. N có được từ M bằng một phép dịch chuyển nguyên tố $d\vec{r}$ có hướng bất kì trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt đẳng thế tại M. Theo định nghĩa của điện thế $V(N) = V_M - \vec{E}(M).d\vec{r}$ và theo định nghĩa của mặt đẳng thế $V(N) = V(M)$. Vậy trường tĩnh điện trực giao với mặt đẳng thế (tính chất của gradien)

<u>*Chú thích :*</u>

Tổng quát hơn, một mặt xác định bởi $f(\vec{r}) = \text{cte}$ *nhận vectơ* $\overrightarrow{\text{grad}}f$ *như một vectơ trực giao.*

Bây giờ ta xét một đường sức trường gặp (nói chung là vuông góc) hai mặt đẳng thế, có các thế V_1 và V_2, tại các điểm M_1 và M_2 (hình 10). Nếu trường hướng theo đường từ M_1 đến M_2, ta có :

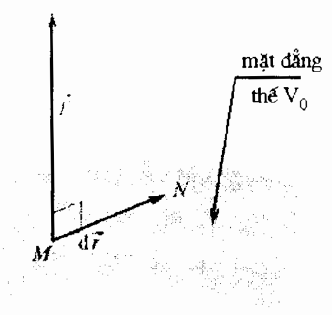
$$V_2 - V_1 = V(M_2) - V(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{E}.\vec{dl} < 0$$

Trường là vuông góc với các mặt đẳng thế và các đường sức trường hướng theo chiều các điện thế giảm.

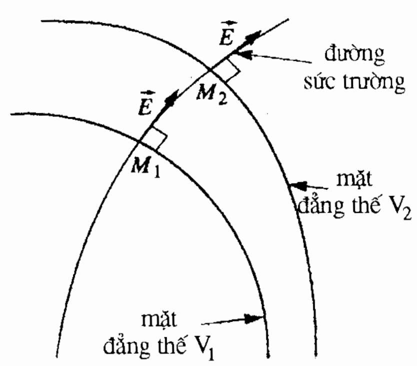
<u>*Chú ý :*</u>

Cần nhớ những kết luận trên đây để thực hiện các hình vẽ định tính các đường sức trường và mặt cắt các mặt đẳng thế trên một hình vẽ.

Tuy nhiên, phải cẩn thận : trường tĩnh điện, bằng không hay khác không, đều vuông góc với các mặt đẳng thế. Có thể ta sẽ gặp trường hợp một đường sức trường không vuông góc với một mặt đẳng thế, khi điểm mà nó tới mặt này là một điểm trường bằng không.



Hình 9.



Hình 10

Áp dụng 3

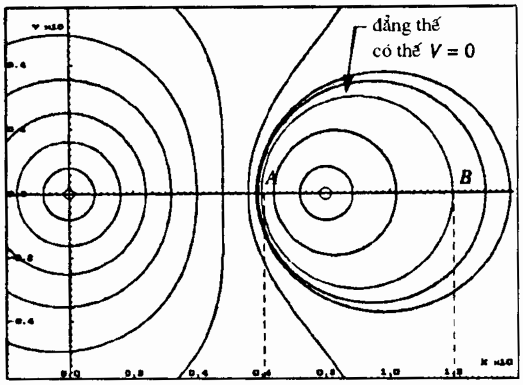
Mặt thế không
của một hệ hai điện tích điểm

1) *Bằng cách chọn thế không ở vô cùng, hãy nêu đầy đủ đặc tính của mặt đẳng thế $V = 0$ của một hệ hai điện tích điểm Q (> 0) tại O và $-q$ (< 0) tại điểm có hoành độ d trên trục (Oz).*

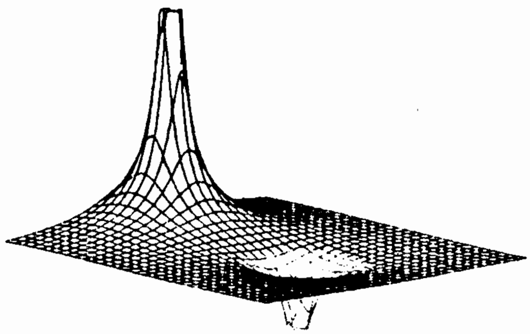
2) *Trên hình vẽ 11, các vết của các mặt đẳng thế đã được vẽ trong một mặt phẳng chứa trục (Oz).*

Đẳng thế $V = 0$ được vẽ bằng màu nhạt. Hỏi về giá trị tuyệt đối, điện tích nào lớn hơn. Tìm giá trị của tỉ số $\left|\dfrac{Q}{q}\right|$.

3) *Hãy cho dáng vẻ của các đường sức trường nếu $Q > 0$.*



Hình 11. *Đẳng thế có thế $V = 0$ là một vòng tròn có đường kính AB, với A(+6) và B(+12).*



Hình 12. *Sơ đồ này cho thấy rõ đẳng thế tròn $V = 0$ (màu đậm $V > 0$ và màu nhạt $V < 0$).*

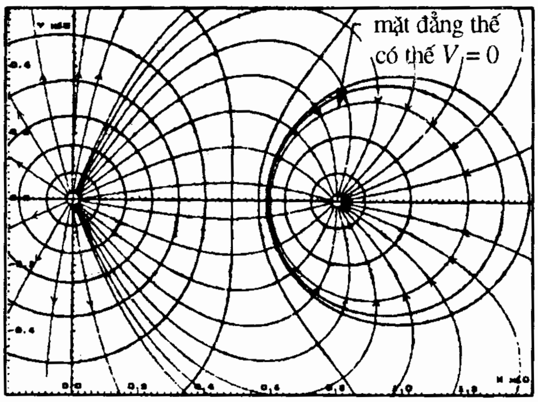
1) Điện thế tạo ra tại một điểm M có tọa độ cầu (r, θ, φ) bằng $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$, với $r' = [r^2 - 2dr\cos\theta + d^2]^{\frac{1}{2}}$. Mặt có thế bằng không tương ứng với $\dfrac{r}{r'} = \dfrac{Q}{q}$ (điều này chỉ có nghĩa nếu hai điện tích ngược dấu nhau). Nếu $q = Q$, đó là mặt phẳng trung trực của hai điện tích. Nếu $q \neq Q$, đó là một quả cầu. Trong tọa độ Descartes, phương trình của nó là :

$$x^2 + y^2 + \left[z + \frac{d}{\left(\dfrac{q^2}{Q^2} - 1\right)}\right]^2 = \frac{d^2}{\left[\dfrac{q}{Q} - \dfrac{Q}{q}\right]^2},$$

tâm của nó là một điểm có hoành độ $z_C = \dfrac{d}{\left[1 - \dfrac{q^2}{Q^2}\right]}$ trên trục (Oz) và bán kính của nó bằng $R = \dfrac{d}{\left|\dfrac{Q}{q} - \dfrac{q}{Q}\right|}$.

2) Đẳng thế $V = 0$ bao quanh điện tích $-q$. Hoành độ z_C của tâm của nó là dương, vậy $Q > -q$. Ta có thể đọc thấy tỉ số $\dfrac{R}{|z_C|}$, bằng $\left|\dfrac{q}{Q}\right|$, bằng $\dfrac{1}{3}$.

3) *Hình* 13 cho hình dáng của các đường sức trường



Hình 13. *Hình dáng của các đường sức trường.*

▶ **Để luyện tập : BT 6, 8, 9 và 10**

4.2. Các nhận xét về tính đối xứng

4.2.1. Trường vô hướng

Lưu số nguyên tố $\vec{E}.d\vec{l}$ liên quan đến tích của hai vectơ (cực), và có tính chất đối xứng của một trường vô hướng.

Ta có thể sẽ chọn mốc (hằng số tích phân) để thu được một thế $V(\vec{r})$ có các tính chất đối xứng của phân bố điện tích.

Ví dụ, trong trường hợp phân bố $\mathscr{D}$ nhận một mặt phẳng phản đối xứng Π^*, ta sẽ chọn $V = 0$ trên mặt phẳng đó. Tại một điểm M và tại điểm đối xứng M' của nó qua mặt phẳng Π^*, thì thế khi đó có các giá trị đối nhau. Trong trường hợp phân bố $\mathscr{D}$ nhận một mặt phẳng đối xứng Π, thì thế tại một điểm M và điểm đối xứng M' của nó qua mặt phẳng Π, có cùng một giá trị. Các tính chất đối xứng của thế cũng có thể có được dựa vào tính chất đối xứng của trường tạo ra bởi phân bố đang xét. Đối với các phép đối xứng thông thường, thì các tính chất của thế thu được ngay bằng trực giác như các ví dụ dưới đây sẽ minh họa.

4.2.2. Các bất biến

Ta hãy nghiên cứu biểu thức tổng quát của thế đối với các bất biến khác nhau :

• Với một phân bố bất biến đối với mọi phép tịnh tiến song song với trục (Oz), thế chỉ có thể phụ thuộc vào các biến số vị trí x và y. Điều này có thể được khẳng định bởi kết quả đã thu được ở chương 2, cho dạng của trường :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y$$

• Với một phân bố có tính đối xứng tròn xoay đối với trục (Oz), thì thấy rõ ngay hàm thế chỉ phụ thuộc vào các biến r và z của các tọa độ trụ, trục (Oz), phù hợp với trường đã thu được :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$$

• Với một phân bố có tính đối xứng trụ trục (Oz), thì hàm thế chỉ có thể phụ thuộc vào khoảng cách r tới trục (Oz)

$$V(\vec{r}) = V(r, \theta, z) = V(r),$$

phù hợp với dạng của trường :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r)\vec{e}_r .$$

• Với một phân bố có tính đối xứng cầu tâm O, thì hàm thế chỉ phụ thuộc vào khoảng cách r tới tâm O :

$$V(\vec{r}) = V(r, \theta, \varphi) = V(r) .$$

Vả chăng, trường cũng có dạng :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r)\vec{e}_r .$$

5 Thế năng tương tác tĩnh điện

5.1. Thế năng của một điện tích đặt trong một trường

5.1.1. Công của lực tĩnh điện

Công nguyên tố của lực $\vec{f} = q\vec{E}$ trong một chuyển dời $d\vec{M}$ của lực này bằng:

$$\delta W = \vec{f}.d\vec{M} = qd\vec{M}.\vec{E} = -qd\vec{M}.\overrightarrow{\text{grad}}\ V = -qdV = -d(qV)$$

Như vậy, công của lực ứng với một chuyển dời của điện tích q từ một điểm A tới một điểm B bằng : $W_{AB} = -q(V_B - V_A)$

5.1.2. Thế năng

Công này không phụ thuộc vào đường đi và đồng nhất với độ biến thiên của một hàm số trạng thái, hàm này chỉ phụ thuộc vào vị trí của hạt.

Thế năng tương tác giữa một điện tích q và một trường tĩnh điện $\vec{E}$, tạo ra thế V, bằng $\mathscr{E}_p = qV$.

Lực COULOMB $\vec{f} = q\vec{E}$ do trường tĩnh điện tác dụng, dẫn xuất từ thế năng này, được xác định (giống như thế tĩnh điện) sai kém một hằng số $\vec{f} = q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{E}_p$.

Công nguyên tố của nó bằng và ngược dấu với độ biến thiên của thế năng:

$$\vec{f}.d\vec{M} = q\vec{E}.d\vec{M} = -d\mathscr{E}_p$$

Công của lực tĩnh điện bằng $W_{AB} = -\mathscr{E}_{P(B)} + \mathscr{E}_{P(A)} = -\Delta\mathscr{E}_P$.

Áp dụng 4

Công của người điều khiển dịch chuyển điện tích.

Hỏi công cung cấp bởi một người điều khiển khi dịch chuyển một điện tích q rất chậm chạp trong một trường tĩnh điện $\vec{E}$ đã cho ?

Người điều khiển dịch chuyển điện tích mà không cung cấp cho nó động năng : nếu vận tốc dịch chuyển rất nhỏ, thì lực $\vec{f}_{\text{op}}$ mà người điều khiển tác dụng lên điện tích dùng để bù trừ với lực do trường $\vec{E}$ tác dụng lên điện tích, từ đó $\vec{f}_{\text{op}} = -q\vec{E}$.

Khi người điều khiển dịch chuyển điện tích một đoạn $d\vec{M}$, nó sẽ cung cho điện tích một công nguyên tố :

$$\delta W_{\text{op}} = \vec{f}_{\text{op}}.d\vec{M} = d(qV) = +d\,\mathscr{E}_P.$$

▶ **Để luyện tập : BT. 3 và 11.**

5.2. Năng lượng tương tác của hai điện tích điểm

5.2.1. Công để thành lập hệ hai điện tích

Bây giờ người điều khiển tìm cách đưa hai điện tích q_1 và q_2 từ một tình huống tương tác không, trong đó các điện tích ở xa nhau vô cùng, về các vị trí cuối cùng M_1 và M_2, mà không cung cấp động năng cho chúng.

■ **Trường hợp đặc biệt**

Trước hết, ta hãy tưởng tượng một sự biến đổi đặc biệt rất đơn giản để nghiên cứu. Lúc đầu, người điều khiển đưa một mình điện tích q_1 từ vô cùng về điểm M_1 mà không phải cung cấp năng lượng. Sau đó, giữ q_1 cố định, vậy q_1 không nhận công. Đưa q_2 về điểm M_2 bằng cách dịch chuyển nó trong trường tĩnh điện tạo ra bởi q_1, người điều khiển cung cấp công $W_{\text{op}} = q_2V_1(M_2)$, trong đó $V_1(M_2)$ là thế (lấy bằng không ở vô cùng) tạo ra bởi q_1 tại điểm M_2 : $V_1(M_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 M_1M_2}$.

Vậy công để thành lập hệ bằng : $W_{op} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2}$.

■ **Trường hợp tổng quát**

Lực do q_1 tác dụng lên q_2 là $\vec{f}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3}$, ngược với lực do q_2 tác dụng lên q_1. Người điều khiển phải cân bằng hai lực này. Khi dịch chuyển q_1 đi $\mathrm{d}\overrightarrow{M_1}$ và q_2 đi $\mathrm{d}\overrightarrow{M_2}$, người này thực hiện công nguyên tố :

$$\delta W_{op} = \vec{f}_{op\to q_1}.\mathrm{d}\overrightarrow{M_1} + \vec{f}_{op\to q_2}.\mathrm{d}\overrightarrow{M_2} = -\vec{f}_{1\to 2}.d\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\left(\frac{1}{M_1 M_2}\right)$$

Như vậy công toàn phần cung cấp bởi người điều khiển đồng nhất với kết quả đã thu được trong trường hợp đặc biệt, đơn giản ở trên.

5.2.2. Thế năng tương tác

Thế năng tương tác tĩnh điện giữa hai điện tích q_1 và q_2 là $\mathscr{E}_{P12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2}$.

Bằng cách kí hiệu $V_1(M_2)$ là thế tạo bởi điện tích q_1 tại điểm M_2 và $V_2(M_1)$ là thế tạo bởi q_2 tại điểm M_1, ta cũng có thể viết năng lượng này dưới các dạng sau :

$$\mathscr{E}_{P12} = q_1 V_2(M_1) = q_2 V_1(M_2) = \frac{1}{2}\left[q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)\right].$$

Áp dụng 5

Tương tác quyết định sự cố kết của một nguyên tử.

1) *Các chất rắn và lỏng đều có một khối lượng riêng μ có độ lớn vào cỡ* kg.dm^{-3} *(gần bằng 1 đối với nước lỏng và nước đá, 9 đối với thủy ngân,...). Hỏi cỡ lớn d của kích thước của một nguyên tử hay một phân tử gồm một vài nguyên tử bằng bao nhiêu ?*

2) *Năng lượng iôn hóa của nguyên tử hyđrô (trong trạng thái cơ bản) bằng 13,6 eV. Để giải thích cấu trúc của nguyên tử, ít nhất ở phép gần đúng bậc một, ta nên dựa vào các lực hấp dẫn (hằng số hấp dẫn bằng* G = 6,67.10^{-11} SI, *prôton có khối lượng gấp khoảng 2000 lần khối lượng của êlectrôn), tương tác điện từ hay là các tương tác mạnh hay yếu (có phạm vi rất nhỏ, vào cỡ* 10^{-15} m*) ?*

1) Các chất lỏng và rắn rất ít chịu nén, các nguyên tử như "tiếp xúc với nhau" ở bên trong của các môi trường này. Khối lượng mol M của các chất đã nêu trong ví dụ là vào cỡ vài chục gam (18 g.mol^{-1} đối với nước). Bằng cách coi không gian chiếm bởi một nguyên tử hay một phân tử đơn giản có một thể tích vào cỡ d^3, ta ước lượng được giá trị của d bằng cách viết :

$\frac{M}{\mu}$ = thể tích chiếm bởi một mol $\approx \mathrm{N_A} d^3$,

nghĩa là : $d \approx \left(\frac{10.10^{-3}}{10^3 \times 6.10^{23}}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 10^{-10}$ m.

(Thực vậy, ta biết rằng kích thước của một nguyên tử hay một phân tử sơ cấp là vào cỡ 10^{-10} m).

2) Tưởng tượng một êlectrôn lượn quanh gần một prôtôn, ở khoảng cách vào cỡ 10^{-10} m sao cho tương tác mạnh và yếu bỏ qua được ; ta chỉ còn phải so sánh cỡ lớn của các năng lượng tương tác hấp dẫn và tương tác điện từ với cỡ đặc trưng cho bởi năng lượng iôn hóa của nguyên tử.
Vậy ta hãy tính :

$$\mathscr{E}_{P(\text{điện từ})} \approx -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \approx 2.10^{-18}\,J \approx -10eV \text{ và}$$

$$\mathscr{E}_{P(\text{hấp dẫn})} \approx -\frac{2000\,m_e^2 G}{d}$$

$$\approx 10^{-57}\,J \approx 10^{-38} \times 10\,\text{eV}.$$

Như vậy, nên xây dựng một mô hình nguyên tử trong đó các điện tích dương của hạt nhân và đám mây êlectrôn bao quanh được liên kết với nhau bởi tương tác điện từ.

▶ **Để luyện tập : BT,5,**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ LƯU SỐ CỦA TRƯỜNG TĨNH ĐIỆN

• **Lưu số của trường tĩnh điện là bảo toàn**

• **Lưu số của trường tĩnh điện trên một đường cong kín bằng không :**

$$\oint_\Gamma \vec{E}.d\vec{l} = 0,$$

• **Các thành phần tiếp tuyến là liên tục khi đi qua một mặt mang điện hoặc không :**

$$\vec{E}_{2//} = \vec{E}_{1//} \text{ hay } \vec{E}_2 = \vec{E}_1 \wedge \vec{n}_{12} = \vec{0}.$$

■ THẾ TĨNH ĐIỆN

• **Hiệu điện thế giữa hai điểm A và B bằng :**

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}$$

• **Thế tĩnh điện được xác định sai kém một hằng số.**

• **Trường tĩnh điện là bất biến đối với mốc của điện thế.**

■ TRƯỜNG CÓ GRAĐIEN

• **Trường tĩnh điện là một trường có građien, biểu thị bởi :**

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V(M).$$

• **Một trường vectơ $\vec{E}$ có lưu số bảo toàn là một trường có građien.**

• **Trường thì vuông góc với các mặt đẳng thế, còn các đường sức trường thì hướng theo chiều các điện thế giảm.**

■ THẾ CỦA MỘT PHÂN BỐ CÓ KÍCH THƯỚC HỮU HẠN

• **Biểu thức tích phân của thế, triệt tiêu ở vô cùng, tạo ra bởi một phân bố điện tích $\mathscr{D}$ có kích thước hữu hạn, có dạng :**

$$V(M) = \iiint_{\mathscr{D}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta q_P}{PM}$$

• **Thế, nếu đã xác định, là liên tục.**

■ THẾ NĂNG

• **Thế năng tương tác giữa một điện tích q và một trường tĩnh điện $\vec{E}$ tạo ra thế V là :**

$$\mathscr{E}_P = q.V.$$

• **Thế năng tương tác giữa hai điện tích điểm q_1 và q_2 tại M_1 và M_2 bằng :**

$$\mathscr{E}_{P_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2}.$$

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

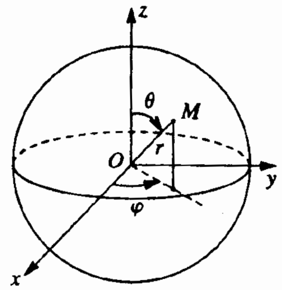
1 Thế của một điện tích điểm

Hãy xác định thế tạo ra bởi một điện tích điểm q đặt tại gốc O.

2 Thế tạo ra ở tâm của một quả cầu

Một quả cầu tâm O, bán kính R mang một điện tích Q được phân bố với mật độ điện mặt $\sigma = g(\theta)\, h(\phi)$ trong tọa độ cầu.

Hãy tìm giá trị của thế tĩnh điện tạo ra bởi quả cầu tại tâm của nó.



3 Sự tăng tốc cho các êlectrôn bằng một hiệu điện thế

Các êlectrôn phát ra bởi sợi đốt của một tấm chắn dao động kí có một vận tốc không đáng kể và được tăng tốc bởi một hiệu điện thế V_0.

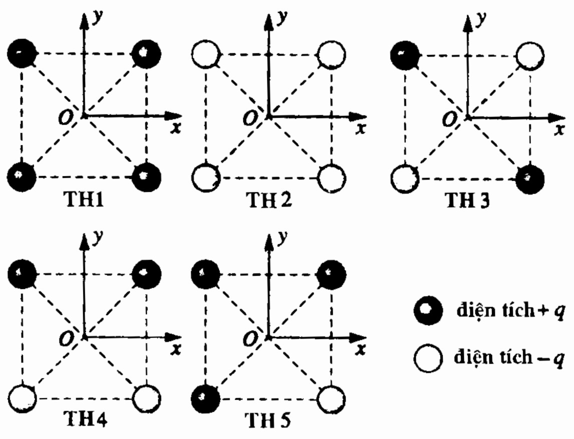
1) Hỏi các êlectrôn tăng tốc đạt tới vận tốc nào ?

2) Hỏi với điều kiện nào thì có thể coi kết quả trên, tính được bằng cơ học cổ điển, là thỏa mãn ?

Cho : $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV.

4 Các giá trị của E và V có liên kết với nhau không ?

Cho bốn điện tích đặt tại đỉnh của một hình vuông có đường chéo dài $2a$. Tính E và V tại tâm hình vuông trong các hình thế sau :



SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

5 Cân bằng của một điện tích trong trường tĩnh điện của hai điện tích cố định

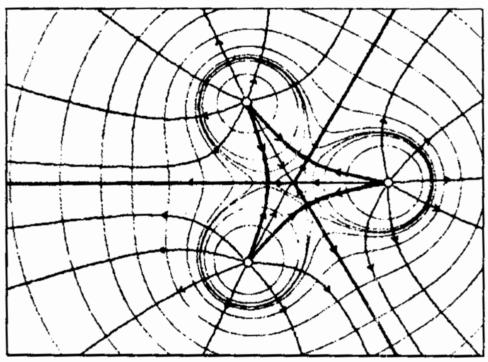
Cho một mặt phẳng vị trí xác định bởi hai trục (Ox) và (Oy). Cho hai điện tích q cố định, giống nhau, đặt tại $A(-a, 0)$ và $B(a, 0)$. Hãy khảo sát vị trí cân bằng và tính bền của một điện tích Q có thể dịch chuyển trong mặt phẳng này.

6 Ba điện tích tại đỉnh của một tam giác đều

Xét ba điện tích giống nhau ($q > 0$) tại đỉnh của một tam giác đều cạnh a.

1) Hãy tìm một điểm hiển nhiên có trường bằng không. Tính giá trị của điện thế tại đó.

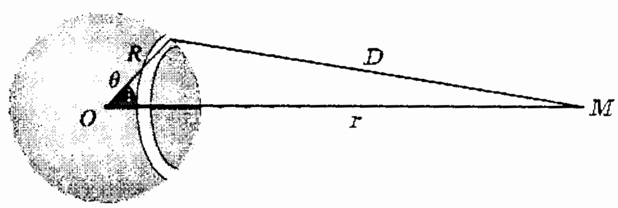
2) Mô phỏng sau đây, biểu diễn các đường sức trường và các đẳng thế, chúng tỏ rằng có ba điểm trường bằng không khác. Hãy đo vị trí của chúng và cho giá trị của thế tại các điểm đó.



7* Thế của một quả cầu tích điện đều trên bề mặt

Cho một quả cầu bán kính R, tâm O, có mật độ điện mặt đều σ. Lấy mốc điện thế bằng không ở vô cùng.

1) Tính điện thế tại O.



2) Bằng cách dùng mặt cắt nêu ra ở sơ đồ trên, hãy tính thế tại một điểm M ở bên trong hoặc bên ngoài quả cầu này.

8* Các mặt đẳng thế của một đường hai dây

Hai sợi dây thẳng dài vô hạn, song song với trục (Oz) và có phương trình Descartes lần lượt là $x = +a$ và $x = -a$, có mật độ điện dài đều $+\lambda$ và $-\lambda$ $(\lambda > 0)$. Kí hiệu A_1 và A_2 lần lượt là giao điểm của chúng với mặt phẳng (xOy).

Một điểm M có vị trí xác định bởi các tọa độ trụ (r, θ, z) và ký hiệu r_1 và r_2 là các khoảng cách , một là, giữa M và dây thứ nhất, một là, giữa M và dây thứ hai. Ta sẽ chọn gốc của các thế là gốc tọa độ O. Hãy nêu đặc tính của mặt đẳng thế, trong tọa độ trụ, của phân bố này. Hãy biểu diễn một cách định tính các đường sức trường và vết của các mặt đẳng thế trong mặt phẳng (xOy).

9* Đường lưỡng cực

Cũng như trong bài tập 8, ta hãy xét một đường hai dây được cấu tạo bởi hai sợi dây thẳng dài vô hạn, song song với trục (Oz), có phương trình Descartes $x = \pm a$ và có mật độ điện dài đều $\pm \lambda$ $(\lambda > 0)$.

Đường lưỡng cực được coi là giới hạn của phân bố này khi a tiến tới không, nhưng giữ cho tích $(2a).\lambda$ không đổi. Khi đó, ta kí hiệu $K = \dfrac{\lambda a}{\pi\varepsilon_0}$, là hằng số đặc trưng cho đường này.

Một điểm M có vị trí xác định bởi các tọa độ trụ (r, θ, z). Để thu được đặc tính giới hạn của đường lưỡng cực, sau đây, ta sẽ coi khoảng cách r từ điểm M đến trục (Oz) là rất lớn trước a và ta sẽ bằng lòng với các biểu thức thu được của thế và trường của đường lưỡng cực bằng cách chỉ giữ lại bậc thấp nhất không tầm thường của khai triển của chúng theo lũy thừa của tỷ số $\dfrac{a}{r}$.

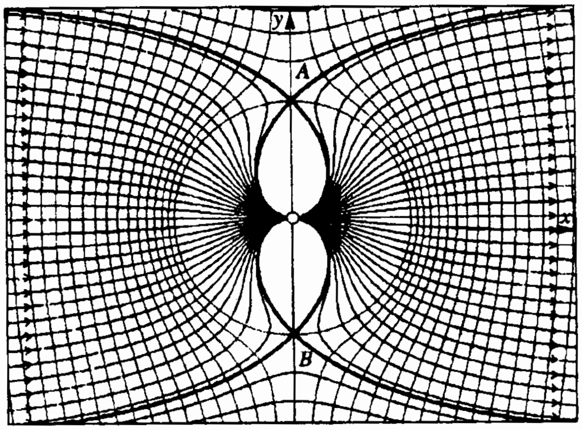
1) Trong những điều kiện đó, hãy tìm biểu thức của thế tạo ra bởi một đường lưỡng cực.

2) Từ đó suy ra trường của đường lưỡng cực.

3) Tìm phương trình của các mặt đẳng thế và các đường sức trường của đường lưỡng cực ? Hãy biểu diễn chúng một cách định tính.

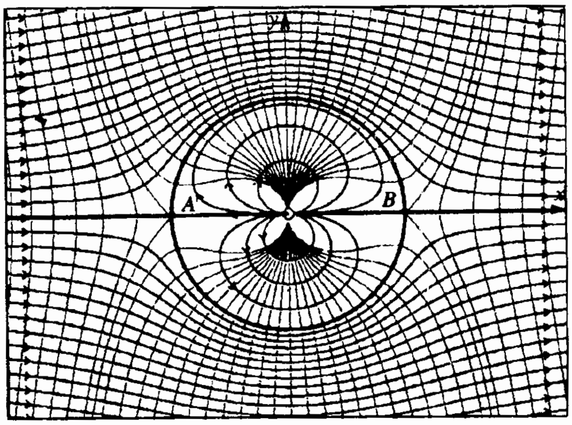
10 Đường lưỡng cực đặt trong điện trường đều

Một trường đều $\overrightarrow{E_0} = E_0\vec{e}_x$ $(E_0 > 0)$ được chồng chất lên trường của một đường lưỡng cực $\vec{E}_{\text{đường lưỡng cực}} = K\left(\dfrac{\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta}{r^2}\right)$ (biểu thị trong cơ sở của các tọa độ trụ trục (Oz)) (xem bài tập 9).



$K > 0.$

Trong mặt phẳng (xOy), trên những hình vẽ có biểu diễn một vài đường sức trường (nét đậm) và vết của các mặt đẳng thế (nét nhạt) tương ứng với một tình huống như thế, trong hai trường hợp $K > 0$ và $K < 0$.



$K < 0.$

1) Điều gì sẽ xảy ra ở khoảng cách lớn với trục (Oz) ?

2) Ta có thể nói gì về các điểm A và B đã làm rõ trong hai trường hợp mà không cần phải tính toán.

3) Tìm biểu thức của thế, chọn bằng không trên mặt phẳng $x = 0$, tương ứng với sự chồng chất của hai trường này. Hỏi có một mặt đẳng thế có thế bằng không nào khác ngoài mặt phẳng (yOz) không ?

4) Hãy thiết lập phương trình của các đường sức trường và của các mặt đẳng thế.

5) Nếu có, hãy xác định các điểm trường bằng không. Làm thế nào để có thể liên kết về mặt hình học các trường hợp $K < 0$ và $K > 0$?

6) Tại các điểm trường bằng không, ta nhận thấy gì đối với các đường sức trường và các mặt đẳng thế ? Xác định góc tạo bởi một đường sức trường với vết của một mặt đẳng thế ở ngang mức của một điểm trường bằng không.

11 Năng lượng iôn hóa của nguyên tử BOHR

Trong khuôn khổ của cơ học cổ điển, một mô hình đơn giản của nguyên tử tương ứng với một êlectrôn (điện tích $-e$, khối lượng m_e) coi là điểm, chuyển động trên một quỹ đạo tròn bán kính R xoay quanh một hạt nhân coi là chuẩn điểm cố định (khối lượng $M >> m_e$, điện tích Ze), theo các kết quả thực nghiệm của RUTHERFORD.

1) Tìm biểu thức động năng của êlectrôn, thế năng tương tác giữa êlectrôn và hạt nhân, và cơ năng theo R và các hằng số của bài toán

2) Cũng như vậy, tìm biểu thức của mômen động lượng L của êlectrôn

3) BOHR đã đưa ra tiên đề về sự lượng tử hóa mômen động lượng $L = n\hbar$ (n là số nguyên dương), trong đó $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, h là hằng số PLANCK ($h = 6{,}62.10^{-34}\,J.s$).

Chứng tỏ rằng điều này buộc sự lượng tử hóa của bán kính quỹ đạo có dạng $R_n = n^2 \dfrac{R_{1(H)}}{Z}$ và sự lượng tử hóa năng lượng của nguyên tử.

4) Năng lượng iôn hóa của nguyên tử hiđrô (trong trạng thái cơ bản) bằng $\mathscr{E}_i = 13{,}6\,eV$.

Hỏi mô hình đã đưa ra có mâu thuẩn nhiều với giá trị bằng số này không ? giá trị bằng số thu được với $R_{1(H)}$ có cho được một cỡ lớn thỏa mãn không ?

5) Ta có thể bằng lòng với cách giải quyết cổ điển mà không nhờ tới cơ học tương đối tính nếu vận tốc của êlectrôn vẫn còn nhỏ trước vận tốc c của ánh sáng. Ta có thể nghĩ gì về các hiệu chỉnh mang lại bởi cách giải quyết tương đối tính ?

6) Ta có thể bằng lòng với các kết quả của cơ học cổ điển mà không phải nhờ tới cơ học lượng tử nếu tác dụng của hạt, nghĩa là Rp, trong đó p là động lượng của êlectrôn, vẫn còn lớn trước $\hbar$. Có cần bắt buộc phải giải quyết vấn đề này bằng cơ học lượng tử không ?

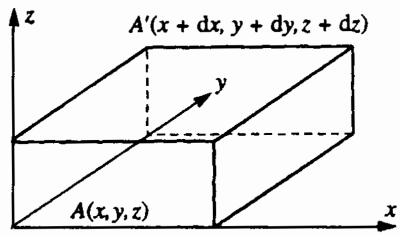
12 Định luật MAXWELL - FARADAY trong tĩnh điện

Cho hình hộp chữ nhật nguyên tố như trên hình vẽ. Các điểm A và A' có tọa độ Descartes lần lượt là :

$$(x, y, z) \text{ và } (x + dx, y + dy, z + dz)$$

Bằng cách sử dụng các con đường khác nhau để đi từ một đỉnh của hình hộp tới một đỉnh khác, theo hai cạnh kề, hãy chứng tỏ rằng các thành phần Descartes của trường tĩnh điện thỏa mãn các hệ thức "chéo nhau" sau đây :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}, \text{ và } \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$



13** Trường có gradien với lưu số không bảo toàn

1) Hỏi trường nào $\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ dẫn xuất từ thế $V(r, \theta, z) = k\theta$ (trong các tọa độ trụ trục (Oz), n là một số nguyên) ?

2) Trường này có điểm kì dị không ?

3) Tìm giá trị của lưu số của trường này trên một đường cong kín Γ? Bình luận

LỜI GIẢI

1 *Ta đã biết, trong tọa độ cầu tâm O, điện tích q tạo ra trường* $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$. *Ta cũng đã thấy lưu số nguyên tố của trường này là*

$$\vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right).$$ *Vậy, thế tạo ra bằng :*

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0$$

2 *Bất kể sự phân bố đúng của các điện tích trên bề mặt của quả cầu như thế nào, các điện tích này cũng đều cách điểm O một khoảng R. Vậy thế tạo ra tại O bằng :*

$$V(O) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

3 1) *Áp dụng định lí động năng cho các êlectrôn có điện tích* $-e$ *:* $\Delta\mathscr{E}_K = W = -\Delta\mathscr{E}_p = +eV_0$ *. Bỏ qua vận tốc ban đầu, vận tốc đạt được sau khi tăng tốc bằng :*

$$v = \left[\frac{2eV_0}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

2) *Kết quả này vẫn còn hiệu lực nếu v vẫn còn nhỏ hơn c. Như vậy, ta phải xác minh rằng :*

$$K = \frac{1}{2}mv^2 << mc^2$$

Năng lượng eV_0 *do trường tăng tốc cung cấp phải giữ nhỏ hơn năng lượng tiềm ẩn của êlectrôn* $m_e c^2$ *, tức là :*

$$V_0 << \frac{m_e c^2}{e} = 5{,}11.10^5\ V$$

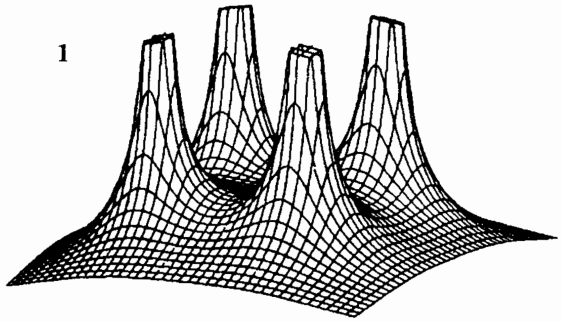
Điện áp tăng tốc của các dao động kí không vượt quá vài nghìn vôn, cách giải quyết cổ điển là quá đầy đủ để nghiên cứu chuyển động của các êlectrôn được tăng tốc

4

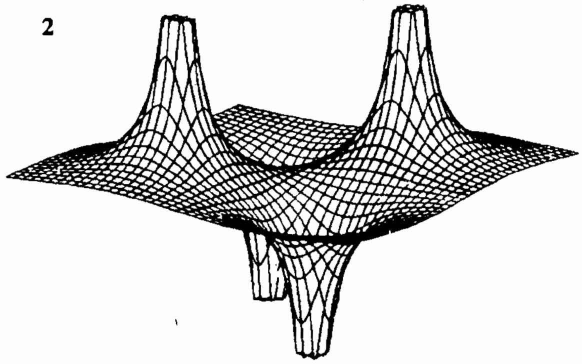
Trường hợp nghiên cứu	Thế tại tâm	Trường tĩnh điện tại tâm: Thành phần E_x	Trường tĩnh điện tại tâm: Thành phần E_y
1	$4\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$	0	0
2	$-4\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$	0	0
3	0	0	0
4	0	0	$-2\sqrt{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$
5	$2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$	$\sqrt{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$	$-\sqrt{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

Trên các hình biểu diễn thế khác nhau sau đây, ta làm thấy rõ các trường hợp, trong đó, trường $\vec{E}$ *bằng không (cực trị của thế ; ta cũng nói rằng thế là dừng) và các trường hợp trong đó trường này không bằng không (khi đó, trường hướng về phía điện thế giảm). Các hình này cũng biểu diễn thế năng của một điện tích dương trong hình thế của trường : hạt này sẽ hướng về phía điện thế giảm.*

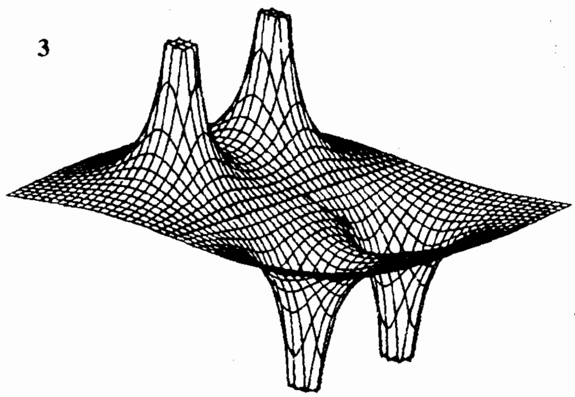
1



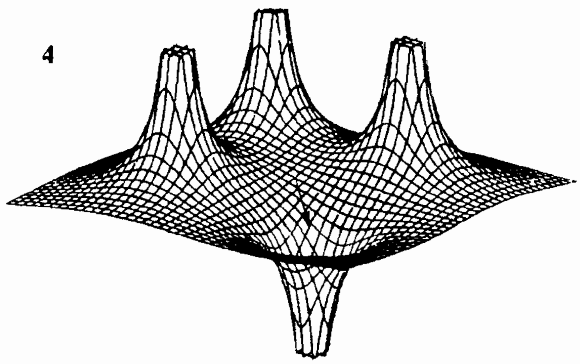
2



3

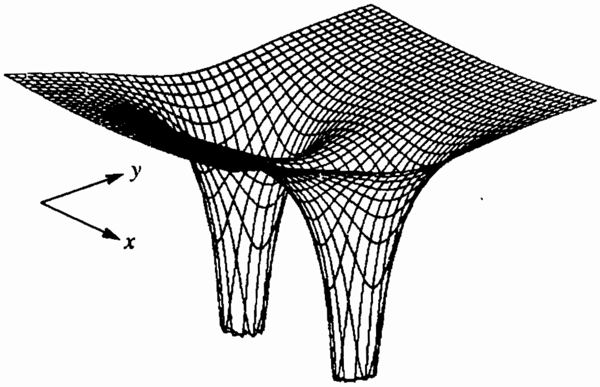


4

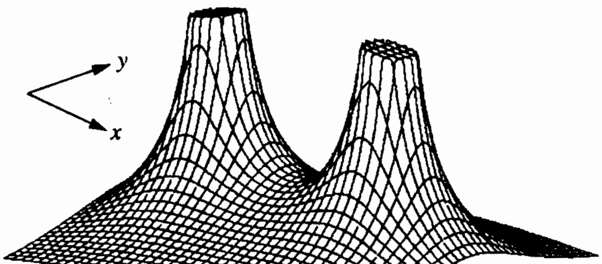


5 *Vị trí cân bằng của điện tích Q nằm tại O (0, 0), bất kể dấu của điện tích này như thế nào : đó là điểm trường bằng không duy nhất.*

• $Q < 0$: thế năng của điện tích này (bằng $QV(M)$, thế $V(M)$ là thế tạo ra bởi hai điện tích q tại A và B) không có cực tiểu trong mặt phẳng này. Cũng ra là nếu chuyển động của hạt điện đã bị giới hạn ở trục (Oy), thì vị trí cân bằng O sẽ là bền.

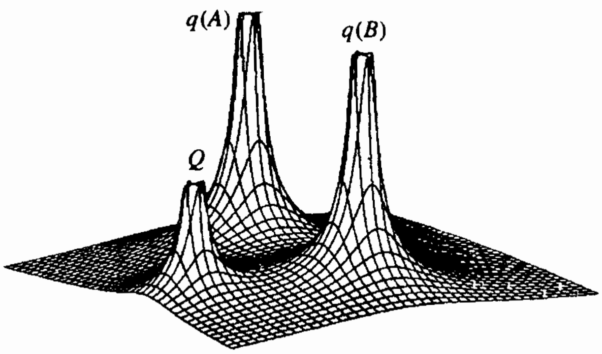


• $Q > 0$: thế năng của điện tích này không có cực tiểu trong mặt phẳng này. Cùng ra thì nếu chuyển động của hạt điện đã bị giới hạn ở trục (Ox), vị trí cân bằng O sẽ là bền.

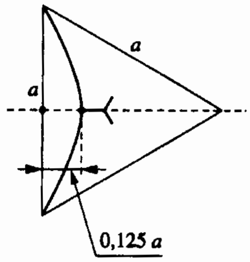


<u>Chú ý :</u>

Thế xuất hiện trong các biểu thức trên đây là thế tạo ra bởi hai điện tích cố định tại A và B. Các hình vẽ cho phép thấy rõ dáng vẻ của thế năng $QV(M)$ trong mặt phẳng (xOy). Một điện tích không thể tác dụng lực lên chính nó, điều cần xem xét đúng là thế tạo ra bởi hai điện tích q ở A và B và không phải là thế toàn phần biểu diễn dưới đây đối với q và $Q > 0$.



6 1) Tại tâm O của tam giác trường tĩnh điện bằng không và thế bằng :



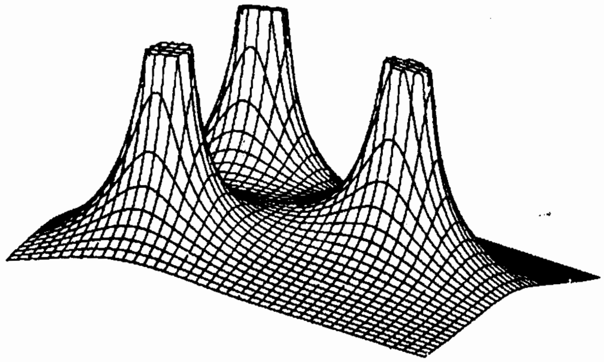
$$V(O) = 3\sqrt{3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = 5{,}20\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

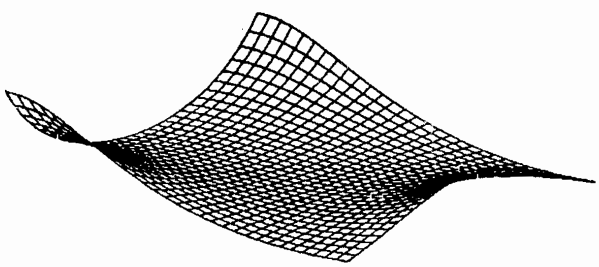
2) Tọa độ của các điểm này (đọc được trên hình vẽ) nằm trên các chiều cao, cách đáy là $0{,}125a$ (giá trị đúng là $0{,}1258$).

Tại các điểm này, thế có giá trị :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{0{,}875} + \frac{2}{\sqrt{0{,}25 + (0{,}125)^2}}\right) = 5{,}31\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Thế thay đổi rất ít tại tâm của tam giác. Các miêu tả sau đây cho phép xác nhận thế biến đổi ít tại tâm của tam giác.





Đúng là thế có một cực tiểu.

7 1) Thế tại điểm O bằng $V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{R}$ (trong đó Q biểu thị điện tích toàn phần của quả cầu), vì mọi điện tích đều cách tâm O một khoảng R. Nghĩa là : $V(O) = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0}$

2) Thế được cho bởi công thức :

$$V(M) = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{D} = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R d\theta . 2\pi R\sin\theta}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\theta + R^2}}{rR}\right]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_o r}(|r+R| - |r-R|)$$

$V(M) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$ (không đổi) ở bên trong quả cầu : vậy trường tĩnh điện bằng không ở bên trong quả cầu này ; $V(M) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$ ở bên ngoài..

Ta hãy chú ý đến sự liên tục của thế khi đi qua mặt tích điện. Hơn nữa, nếu kí hiệu Q là điện tích toàn phần của quả cầu, thì thế ở bên ngoài quả cầu giống như thế tạo ra bởi một điện tích điểm Q đặt tại O :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

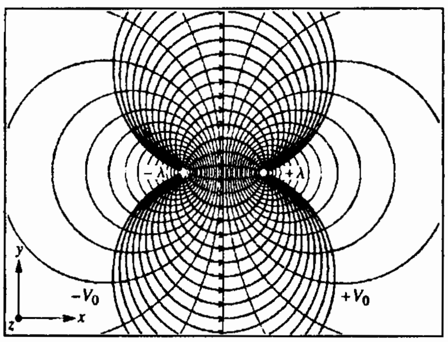
8 Dựa vào sự chọn gốc của các thế và biết thế tạo ra bởi một sợi dây thẳng vô hạn (x. áp dụng 2), thế tĩnh điện tạo ra bởi đường là :

$$V(M) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\right)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Các mặt đẳng thế đặc trưng bởi $\dfrac{r_2}{r_1}$ = cte, do vậy, là các hình trụ có trục song song với (Oz) nếu thế khác không ; đẳng thế V = 0 tương ứng với mặt phẳng (yOz). Nếu kí hiệu $k = \exp\left(\dfrac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$, thì phương trình Descartes của trụ có thế V_0 là :

$$\left[\frac{x + a(1+k^2)}{(1-k^2)}\right]^2 + y^2 = \left[\frac{2ak}{(1-k^2)}\right]^2$$

Tâm của nó nằm tại điểm có hoành độ $\dfrac{a(k^2+1)}{(k^2-1)}$ trên trục (Ox), bán kính của nó bằng $\dfrac{2a}{\left[\dfrac{k-1}{k}\right]}$.

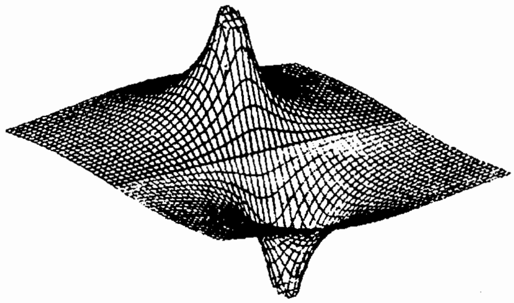


Các trụ có thế V_0 và $-V_0$ thì đối xứng với nhau qua mặt phẳng (yOz), đi từ trụ này sang trụ khác có nghĩa là thay k bằng $\dfrac{1}{k}$. Khi k (tức là thế) tiến tới $+\infty$, thì trụ tiến tới sợi dây thẳng tích điện $+\lambda$; khi k tiến tới O, trụ tiến về sợi dây tích điện $-\lambda$.

Trên hình vẽ, vết của các trụ đẳng thế là các vòng tròn bao quanh mỗi dây. Từ đó các đường sức trường được suy ra bằng đồ thị vì chúng song song với mặt phẳng hình vẽ và vuông góc với các mặt đẳng thế, hướng từ dây tích điện dương sang dây tích điện âm.

Sự phát triển của thế trong không gian được mô tả như dưới đây.

Ta làm cho thấy rõ đẳng thế V = 0 vuông góc với trục của hai dây.



9 1) Ta đã thu được (bài tập 8) thế của đường :

$$V(M) = \left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\right]\ln\left[\frac{r_2}{r_1}\right],$$

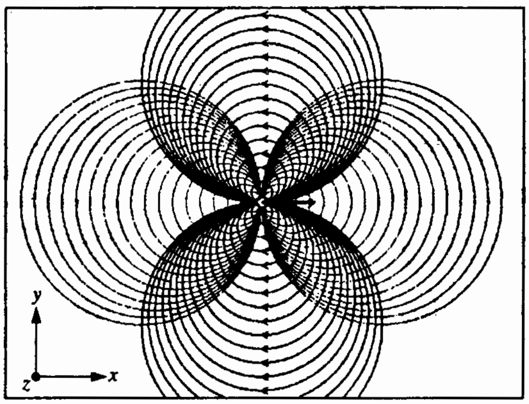
với : $r_1 = [r^2 - 2ar\cos\theta + a^2]^{\frac{1}{2}}$ và $r_2 = [r^2 + 2ar\cos\theta + a^2]^{\frac{1}{2}}$

Sự khai triển của thế theo lũy thừa $\dfrac{a}{r}$ cho ở bậc thấp nhất khác không :

$$V = \frac{K\cos\theta}{r}$$

2) Từ đó suy ra trường tĩnh điện của đường lưỡng cực :

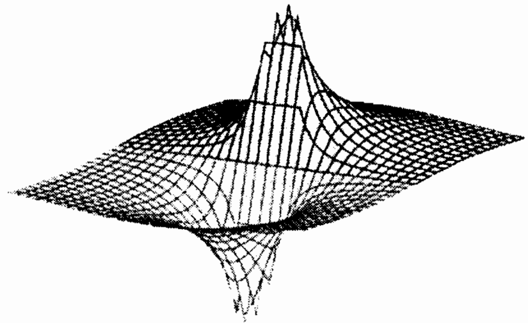
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(\vec{r}) = K\left(\frac{\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta}{r^2}\right).$$



3) Phương trình của một đẳng thế có dạng $r = r_0\cos\theta$. Đó là một hình trụ có đáy tròn, có trục song song với (Oz) và cắt (Ox), tiếp xúc với (Oz). Các đường sức trường đều nằm trong các mặt phẳng song song với (xOy). Đối với một chuyển dời nguyên tố $d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta$ dọc theo một đường sức trường :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = K\left(\frac{\sin\theta\, dr - r\cos\theta\, d\theta}{r^2}\right)\vec{e}_z = -Kd\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\vec{e}_z$$

bằng không, vậy phương trình của một đường sức trường có dạng $r = r_0\sin\theta$. Đó là một vòng tròn có trục song song với (Oz) và cắt (Oy), tiếp xúc với (Oz). Hình vẽ trên đây, trong một mặt phẳng z = cte, mô tả một vài đường sức trường và vết của các mặt đẳng thế. Trong mặt phẳng này, bước chuyển từ các đường sức trường sang các vết của những đẳng thế được thực hiện bằng phép quay hình vẽ 90^o xung quanh trục (Oz).



Hình vẽ trên đây chứng tỏ vết của thế tạo bởi đường lưỡng cực này rất giống với thế thu được trong bài tập 8.

10 1) Ở khoảng cách lớn, trường của đường lưỡng cực trở nên không đáng kể trước trường đều đã chồng chất lên nó. Trong các miền này, các đường sức trường về thực tế là song song với trục (Ox) và các mặt đẳng thế song song với mặt phẳng (yOz), cho trong mặt phẳng hình vẽ các vết hầu như thẳng và song song với (Oy).

2) Bất kể trường hợp hình vẽ nào, ta đều thấy rằng các đường sức trường, có phương riêng biệt, có một giao điểm tại hai điểm này. Các điểm A và B tất yếu là các điểm trường bằng không.

Trường toàn phần bằng :

$$\vec{E}_{\text{đường lưỡng cực}} = \left(E_0 + \frac{K}{r^2}\right)\cos\theta\,\vec{e}_r + \left(-E_0 + \frac{K}{r^2}\right)\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

Với K > 0, các điểm trường bằng không là :

$$A\left(r = \sqrt{\frac{K}{E_0}}, \theta = \frac{\pi}{2}\right) \text{ và } B\left(r = \sqrt{\frac{K}{E_0}}, \theta = -\frac{\pi}{2}\right)$$

Với K < 0, đó là :

$$A\left(r = \sqrt{-\frac{K}{E_0}}, \theta = 0\right) \text{ và } B\left(r = \sqrt{-\frac{K}{E_0}}, \theta = \pi\right)$$

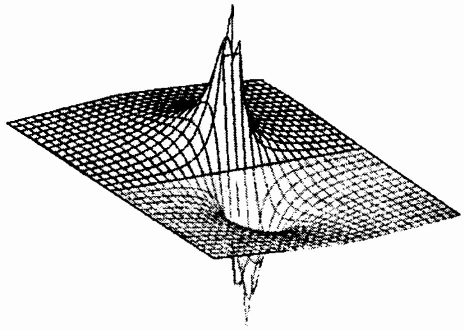
3) $$\vec{E}.d\vec{r} = \left(E_0 + \frac{K}{r^2}\right)\cos\theta\,dr + \left(-E_0 + \frac{K}{r^2}\right)\sin\theta\, r d\theta + 0.dz$$

$$= d\left[\left(-E_0 r + \frac{K}{r}\right)\cos\theta\right]$$

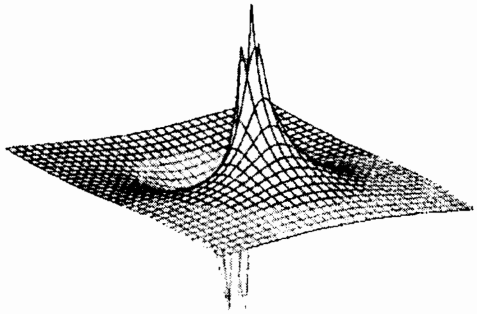
là lưu số nguyên tố của trường. Thế bằng không trên mặt phẳng x = 0, là :

$$V = \left(-E_0 r + \frac{K}{r}\right)\cos\theta$$

Mặt phẳng (yOz) là ở thế không. Khi K dương, hình trụ tròn có phương trình $r = \sqrt{\frac{K}{E_0}}$ cũng tham gia vào đẳng thế V = 0.



Với K < 0, sự mô phỏng này được tô đậm nhạt (V > 0 đậm, V < 0 nhạt) cho phép nhìn thấy vết của mặt phẳng đẳng thế V = 0.



Với K > 0, mô phỏng đậm nhạt này cho phép làm thấy rõ đẳng thế V = 0 cấu tạo bởi một mặt phẳng và một hình trụ.

4) Các đường sức trường nằm trong các mặt phẳng z = cte. Với một dịch chuyển nguyên tố $d\vec{r}$ trong mặt phẳng này :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \left[E_0(\cos\theta.rd\theta - \sin\theta dr) + K\left(\frac{\sin\theta dr - r\cos\theta d\theta}{r^2}\right)\right]\vec{e}_z$$

$$= -d\left(E_0 r\sin\theta + K\frac{\sin\theta}{r}\right)\vec{e}_z$$

bằng không. Phương trình của đường sức trường là

$$\left(E_0 r + \frac{K}{r}\right)\sin\theta = cte \text{ (ở } z = cte).$$

Phương trình của mặt đẳng thế là $\left(E_0 r - \frac{K}{r}\right)\cos\theta = cte$

5) Nếu ta thực hiện các phép biến đổi

$$K \to -K \text{ và } \theta \to \theta - \frac{\pi}{2} \text{ (vậy } \cos\theta \to \sin\theta)$$

các phương trình của một đường sức trường và của một mặt đẳng thế đảo thứ tự cho nhau.

Nói một cách khác, ta chuyển từ trường hợp K < 0 sang trường hợp K > 0 bằng một phép quay hình vẽ 90^o xung quanh (Oz), đồng thời tráo đổi các vết của các đẳng thế và đường sức trường. Nhớ rằng phép biến đổi này cũng tráo đổi các cặp điểm trường bằng không A và B.

6) Ta có thể nhận ra rằng, tại điểm A và B của hình vẽ với K > 0, các đường sức trường không vuông góc với các mặt đẳng thế

(nhưng trường thì vẫn đúng vì nó bằng không). Ví dụ, ta hãy khảo sát một đường sức trường lân cận điểm A trong trường hợp $K > 0$ mà phương trình trong mặt phẳng (xOy) là :

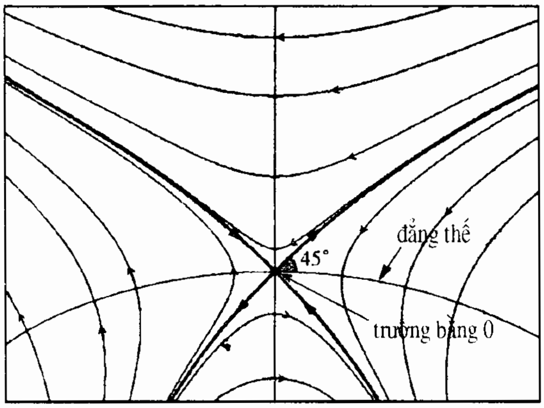
$$\left(E_0 r + \frac{K}{r}\right)\sin\theta = 2\sqrt{\frac{K}{E_0}} \text{ trong tọa độ cực}$$

và $E_0 y + \dfrac{Ky}{x^2+y^2} = 2\sqrt{\dfrac{K}{E_0}}$ trong tọa độ Descartes. Ở lân cận điểm A, ta đặt $y = \sqrt{\dfrac{K}{E_0}} + \varepsilon_y$ và $x = 0 + \varepsilon_x$. Bằng cách khai triển phương trình của đường sức trường với ε_x và ε_y là nhỏ trước $\sqrt{\dfrac{K}{E_0}}$, ta có : $\sqrt{KE_0} + E_0\varepsilon_y + \sqrt{KE_0}\left(1+\sqrt{\dfrac{E_0}{K}}\varepsilon_y\right)$

$$\left(1 - 2\varepsilon_y\sqrt{\frac{E_0}{K}} - (\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2)\frac{E_0}{K} + 4\varepsilon_y^2\frac{E_0}{K} + \cdots\right) = 2\sqrt{KE_0}\,.$$

phương trình này cho : $\varepsilon_x = \pm\varepsilon_y$. Như vậy các đường sức trường cắt đẳng thế $V = 0$ (mặt phẳng (xOy) và trụ $r = \sqrt{\dfrac{K}{E_0}}$) tại điểm A dưới góc 45°. Hình vẽ dưới đây cho phép thấy rõ góc này.

Hình dưới đây cho sự mô tả của thế trong không gian :



11 1) Để giảm nhẹ các chữ viết, ta đặt e^{*2} là hằng số tương tác tĩnh điện $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Lực do hạt nhân tác dụng lên êlectrôn là : $\vec{f} = -Z\dfrac{e^{*2}}{r^2}\vec{e}_r$.

Bằng cách chiếu lên vectơ xuyên tâm hệ thức cơ bản của cơ học, áp dụng cho êlectrôn trên quỹ đạo tròn (đều, theo định luật về diện tích vì lực tĩnh điện do prôtôn tác dụng lên êlectrôn là một lực xuyên tâm), ta có $\dfrac{mv^2}{R} = \dfrac{Ze^{*2}}{2R}$. Vậy động năng của electron bằng :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Ze^{*2}}{2R}.$$

Thế năng tương tác là $-\dfrac{Ze^{*2}}{R^2}$. Cơ năng bằng :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = -\frac{Ze^{*2}}{2R} = -\mathscr{E}_K$$

2) $L = mRv = (mRZe^{*2})^{\frac{1}{2}}$.

3) Sự lượng tử hóa đại lượng này buộc phải có sự lượng tử hóa bán kính quỹ đạo $R_n = \dfrac{n^2 R_{1(H)}}{Z}$, với $R_{1(H)} = \dfrac{\hbar^2}{m^2 e^{*2}}$ là bán kính nhỏ nhất của quỹ đạo tròn, và có sự lượng tử hóa năng lượng $\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_{1(H)}\dfrac{Z^2}{n^2}$, trong đó $\mathscr{E}_{1(H)} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{me^{*2}}{\hbar^2}$ là năng lượng của nguyên tử hyđrô ở trạng thái cơ bản.

4) Năng lượng iôn hóa của nguyên tử hyđrô là năng lượng tối thiểu cần cung cho hệ prôtôn - êlectrôn để đưa chúng ra xa nhau vô cùng và như vậy bằng $\mathscr{E}_i = -\mathscr{E}_{1(H)}$. Áp dụng bằng số cho 13,6 eV như thực nghiệm (nếu ta chỉ kể đến thế năng tương tác, và quên mất động năng, thì ta chỉ mắc một sai số một hệ số 2).

Vậy bán kính của quỹ đạo tròn có năng lượng thấp nhất là : $R_{1(H)} = \dfrac{\hbar^2}{m^2 e^{*2}}$, bằng $0{,}53.10^{-10}$ m, giá trị thỏa mãn.

5) Vận tốc của êlectrôn là :

$$v_n = \left[\frac{Z^2}{n}\right]v_{1(H)}, \text{ trong đó } v_{1(H)} = \left[\frac{e^{*2}}{\hbar}\right]^{\frac{1}{2}},$$

bằng $2{,}2.10^6$ m.s^{-1} vào cỡ $\dfrac{c}{137}$. Như vậy, các phép hiệu chỉnh tương đối tính sẽ khá nhỏ. Về giá trị tương đối, chúng sẽ vào khoảng $\dfrac{v^2}{c^2}$, nghĩa là 0,005%. Chỉ còn phải thực hiện sự hiệu chỉnh về khối lượng rút gọn bằng cách thay khối lượng của êlectrôn m bằng khối lượng rút gọn $\dfrac{mM}{(m+M)}$ là quan trọng nhất, vào cỡ 0,05% (khối lượng của prôtôn bằng khoảng 2000 lần khối lượng của êlectrôn).

6) $Rp = mRv = L$ là vào cỡ $\hbar$. Vậy, cần thiết tới một sự xử lí lượng tử trước khi thực hiện một sự xử lí lượng tử tương đối tính.

Thế nhưng mẫu BOHR đã cho những giá trị bằng số thích hợp. Tuy nhiên, hãy lưu ý rằng không thể làm khác thế bởi lý do tính đồng nhất: vậy ta hãy thử thành lập các đại lượng đồng nhất với một khoảng cách hay với một năng lượng từ các hằng số cơ bản e^{*2}, m và $\hbar$!

Mẫu cũng đã cho phép giải thích sự tồn tại các quang phổ vạch của nguyên tử, năng lượng của phôtôn phát xạ, do đó bước sóng quan sát được, tương ứng với hiệu của hai mức năng lượng của nguyên tử.

Thế nhưng, nó còn có những hạn chế đáng kể. Êlectron có gia tốc trên quỹ đạo tròn của mình phải bức xạ năng lượng điện từ, vậy thường xuyên mất năng lượng, điều này mâu thuẫn với tính bền vững của trạng thái cơ bản của chính nguyên tử và tính bền vững của nguyên tử không còn nữa !

Trên thực tế, chỉ có cách xử lí lượng tử mới cho ta một sự nghiên cứu vừa ý về cấu trúc nguyên tử.

12 *Ví dụ ta xét hai con đường C_1 và C_2 đi từ đỉnh A (x, y, z) tới đỉnh A' (x + dx, y + dy, z) theo hai cạnh của hình hộp, lần lượt qua hai điểm A_1 (x + dx, y, z) và A_2 (x, y + dy, z).*

Trường tĩnh điện là một trường có gradien, lưu số của nó không phụ thuộc vào con đường phải theo để đi từ A tới A', vậy : $\int_{A,C_1}^{A'} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l} = \int_{AC_2}^{A'} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l}$ *, từ đó :*

$$E_x(x,y,z)dx + E_y(x+dx,y,z)dy = E_y(x,y,z)dy + E_x(x,y+dy,z)dx.$$

Từ đó, ta suy ra : $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$*. Tương tự, ta thu được hai hệ thức khác bằng cách thay A' bằng A" (x, y + dy, z + dz) hay A"' (x + dx, y, z + dz).*

13 1) $\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$

$$= -\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(k\theta) = -\frac{k}{r}\vec{e}_\theta .$$

2) *Chú ý rằng thế đã chọn không có cùng một giá trị tại $\theta = \theta_0$ và $\theta = \theta_0 + 2n\pi$ (n nguyên), thế nhưng nó tương ứng với cùng một điểm trong không gian vật lí, sau n phép quay một vòng quanh trục (Oz).*

Tuy nhiên sự lưu ý này không áp dụng được cho trường cần tính. Trái lại, trường này có một tính kì dị : nó không xác định trên trục (Oz).

3) *Lưu số của trường trên đường cong kín C là :*

$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} \frac{k}{r} r\mathrm{d}\theta = kN_{(\Gamma)} ,$$

trong đó $N_{(\Gamma)}$ là số vòng (đại số) đã được thực hiện bởi đường cong Γ xung quanh trục (Oz). Ta nhận thấy trường có gradien kì dị này không có một lưu số bằng không trên tất cả các vòng kín. Điều này chỉ đúng đối với các đường cong kín không quấn lấy trục (Oz), chúng được gọi là "thu nhỏ được" (nếu ta tưởng tượng có sự biến dạng liên tục của một đường cong kín như thế, giống như một chiếc roi da xiết dần lại, thì ta có thể làm cho chu vi của nó tiến về không mà không "tóm được" trục (Oz)).

Ta sẽ không gặp một trường nào như thế trong tĩnh điện. Có thể dùng đến để mô tả trường vận tốc của một chất lỏng chảy xung quanh một trục (Oz).

ĐỊNH LÍ GAUSS

4

Mở đầu

Trường tĩnh điện (hoặc hấp dẫn) được liên kết tuyến tính với nguồn của chúng bằng một định luật theo $\frac{\vec{u}_r}{r^2}$

Khi đó, thông lượng của trường qua một mặt kín được biểu thị một cách rất đơn giản theo điện tích (hay khối lượng) chứa ở bên trong mặt kín đó.

Kết quả này, mà ta sẽ thiết lập và khai thác, mang tên định lí GAUSS, nhà thiên văn học, nhà vật lí và nhà toán học Đức (1777 – 1855)

Các công trình của ông, thật đồ sộ, chỉ riêng đối với Vật lí, đã đi từ cơ học (thiên thể) đến điện từ học, sang quang hình học

ĐỐI TƯỢNG

- Định lí GAUSS.
- Sử dụng.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Trường tĩnh điện.
- Thế tĩnh điện.

1 Thông lượng của trường của một điện tích

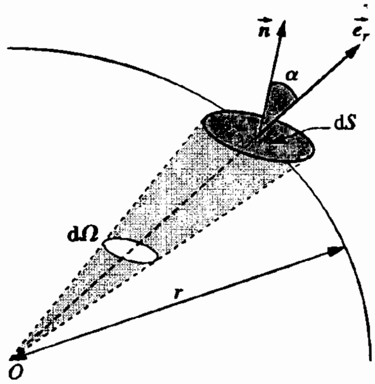
1.1. Qua một diện tích nguyên tố

1.1.1. Diện tích và góc đặc nguyên tố

Khái niệm góc đặc được phát triển trong *phụ lục* 1.

Góc đặc đại số dưới đó từ O nhìn diện tích nguyên tố dS (*hình* 1) bằng :

$$d\Omega = dS\frac{\cos\alpha}{r^2} = dS\frac{\vec{n}.\vec{e}_r}{r^2}$$



Hình 1. $d\Omega = ds\frac{\vec{n}.\vec{e}_r}{r^2}$.

trong đó r là khoảng cách từ diện tích nguyên tố dS định hướng bởi vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ hợp với vectơ xuyên tâm $\vec{e}_r$ một góc α, tới điểm O.

Sau này, mỗi khi nói tới vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ với một diện tích, ta sẽ ngầm hiểu đó là vectơ đơn vị.

1.1.2. Thông lượng nguyên tố

Trường tĩnh điện tạo ra bởi một điện tích điểm q (đứng yên ở O) tại M bằng :

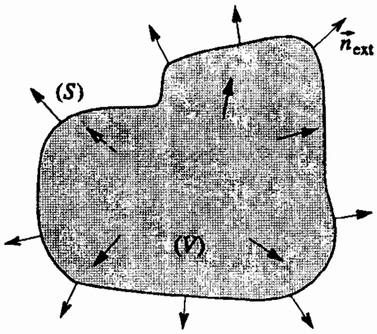
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r \text{, với } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r .$$

Thông lượng của nó qua phần tử diện tích dS bằng :

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = \vec{E}.\vec{n}\,dS = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\right]\cos\alpha\, dS$$

Thông lượng của trường tĩnh điện của một điện tích q nằm tại O, qua một diện tích nguyên tố, liên kết với góc đặc đại số dưới đó từ O, nhìn diện tích dS định hướng, bởi hệ thức :

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}d\Omega$$



Hình 2. *Mặt kín S.*

1.2. Quy ước về định hướng một mặt kín

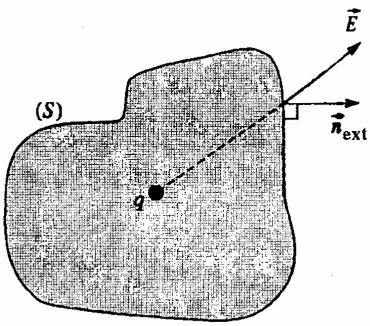
Khi gặp một trường hợp tính toán thông lượng của một trường vectơ qua một mặt kín S, giới hạn một thể tích V, ta thỏa thuận, tại mỗi điểm, định hướng pháp tuyến $\vec{n}$ với mặt ra phía ngoài, kí hiệu là $\vec{n}_{ext}$ (pháp tuyến "đi ra"), như trên *hình vẽ* 2.

1.3. Thông lượng của trường qua một mặt kín chứa điện tích

Với quy ước định hướng ở trên, mặt kín được nhìn từ một điểm bất kì bên trong mặt (H.3) dưới một góc đặc đại số bằng $+4\pi sr$.

Thông lượng ra của trường tạo bởi một điện tích q, qua một mặt kín S chứa điện tích này, bằng :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{n}_{ext}dS = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad (q \text{ nằm trong } S)$$



Hình 3. *Mặt kín S chứa điện tích q.*

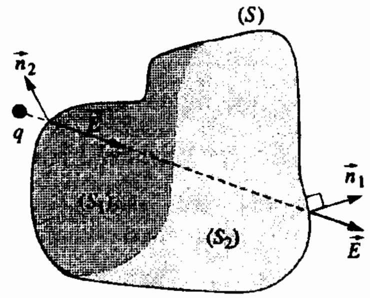
1.4. Thông lượng của trường qua một mặt kín không chứa điện tích

Trường hợp này được minh họa bởi *hình* 4 trong đó mặt kín S có một dạng đơn giản (một dạng phức tạp hơn sẽ làm cho sơ đồ kém rõ mà không làm thay đổi kết quả)

Trên hình vẽ này, mặt S có thể được phân tích thành hai vỏ S_1 và S_2 được nhìn dưới cùng một góc đặc đại số, khác dấu nhau : $\Omega_1 = -\Omega_2$ (một nguồn sáng tại điểm đặt điện tích q, sẽ chiếu sáng phần S_1, trong khi S_2 vẫn nằm trong bóng tối)

Thông lượng ra của trường của điện tích q qua S, khi đó bằng $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, nghĩa là :

$$\Phi = \frac{q\Omega_1}{4\pi\varepsilon_o} + \frac{q\Omega_2}{4\pi\varepsilon_o} = 0$$



Hình 4. *Mặt kín không chứa điện tích q.*

Thông lượng ra của trường tạo ra bởi một điện tích qua một mặt kín S không chứa điện tích này bằng :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{n}_{ext} dS = 0 \quad (q \text{ ở ngoài } S)$$

Chú thích:

Ta sẽ để lại trường hợp một điện tích q đặt trên mặt S ; với trường hợp này, hình dạng chính xác của mặt ở ngang mức với điện tích có thể ảnh hưởng tới kết quả.

▶ **Để luyện tập : BT3 và 4**

2 Định lí GAUSS

Đối với một phân bố điện tích $\mathcal{D}$, dùng nguyên lí chồng chất, các kết quả trên đây cho phép tính toán thông lượng của trường qua một mặt kín S. Với một điện tích nguyên tố dq của $\mathcal{D}$, phần đóng góp vào thông lượng toàn phần bằng $\frac{dq}{\varepsilon_o}$ nếu dq ở bên trong S, và bằng không nếu dq ở ngoài S (*hình* 5).

Thông lượng của trường của một phân bố $\mathcal{D}$ gửi qua một mặt kín S bằng điện tích của $\mathcal{D}$ nằm ở bên trong S chia cho ε_0 :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}, \text{ với } d\vec{S} = \vec{n}_{ext}.dS\,.$$

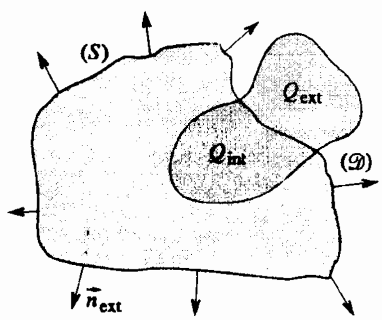
Chú ý :

Hãy ghi nhận đặc tính đáng chú ý của kết quả này, đương nhiên nó sinh ra từ biểu thức:

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} d\Omega$$

của thông lượng của trường của một điện tích gửi qua một diện tích nguyên tố. Kết quả có giá trị chỉ là do sự phụ thuộc của trường đối với khoảng cách quan sát theo quy luật $\frac{1}{r^2}$ như định luật của COULOMB đã biểu thị

▶ **Để luyện tập : BT5**



Hình 5. *Thông lượng đi ra từ $\vec{E}$ (tạo ra bởi $Q_{int} + Q_{ext}$) gửi qua S chỉ phụ thuộc vào Q_{int}.*

3 Các hệ quả của định lí GAUSS

3.1. Các tính chất tổng quát của trường tĩnh điện

Sau khi coi định luật COULOMB và tính tuyến tính như một tiên đề, ta đã chứng tỏ rằng trường tĩnh điện :

- là một trường có lưu số bằng không trên một đường cong kín, trường có građien;
- là một trường liên kết với nguồn của nó (các điện tích) qua định lí GAUSS.

Các tính chất này có thể được thu tóm lại bởi các phương trình vi phân chi phối sự tiến hóa cục bộ của trường tĩnh điện. Sự nghiên cứu các định luật cục bộ này (các phương trình MAXWELL) sẽ được đề cập tới ở năm thứ hai. Thế nhưng ta không nên đánh giá thấp các công cụ đã có, vì chúng tương đương với các định luật cục bộ và cho phép ta nghiên cứu đầy đủ về trường : sự tiến hóa cục bộ, tính gián đoạn của trường, tính toán về trường ...

Định lí GAUSS và đặc tính bảo toàn của lưu số cho phép một nghiên cứu toàn bộ hoặc cục bộ về trường tĩnh điện.

Áp dụng sau đây minh họa cho sự nghiên cứu đặc tính cục bộ của trường nhờ các công cụ này.

Áp dụng 1

Trường ở lân cận trục tròn xoay của một phân bố

Ta đã tính trường tạo ra bởi một đĩa bán kính R mang mật độ điện mặt đều σ, trên trục của đĩa:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right)\vec{e}_z$$

Ta sẽ tìm cách xác định biểu thức của trường ở khoảng cách nhỏ tới trục của đĩa, kí hiệu r. Ta chỉ cần thiết lập sự chênh lệch giữa trường này và giá trị của trường ở trên trục ở cấp 1 của r là đủ.

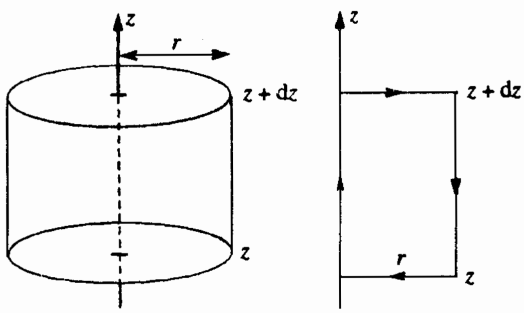
1) *Dùng các tính đối xứng của bài toán, trước tiên, hãy đơn giản hóa các thành phần, theo các tọa độ trụ trục (z'z), của trường tĩnh điện tạo ra bởi đĩa tại một điểm bất kì.*

2) *Bằng cách sử dụng một mặt GAUSS có dạng một mặt trụ nhỏ trục (z'z), có bán kính r và có chiều cao dz (hình 6), hãy chứng minh rằng thành phần xuyên tâm của trường được liên kết với giá trị của trường ở trên trục bởi hệ thức :*

$$E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dE_{z(trục)}}{dz}$$

3) *Bằng cách xét vòng nhỏ chữ nhật C biểu diễn trên hình 6, hãy ước lượng giá trị của:*

$$E_z(r,z) - E_{z(trục)}.$$



Hình 6.

1) Kí hiệu M là điểm có tọa độ trụ (r,θ,z). Mặt phẳng chứa điểm M và trục $(z'z)$ là một mặt phẳng đối xứng của phân bố điện tích, do vậy $E_\theta = O$. Hơn nữa, phân bố lại có tính đối xứng tròn xoay xung quanh trục $(z'z)$, vậy :

$$\vec{E} = E_r(r,z)\vec{e}_r + E_z(r,z)\vec{e}_z$$

2) Áp dụng định lí GAUSS cho mặt kín đã đưa ra. Mặt không chứa một điện tích nào tạo ra trường nghiên cứu. Bằng cách chỉ xét các số hạng bậc gần đúng đơn giản nhất, ta có :

$$\pi r^2(E_{z(\text{trục})}(z+dz)+\ldots)-\pi r^2(E_{z(\text{trục})}(z)+\ldots)$$
$$+2\pi r(dz.E_r(r,z)+\ldots)=0,$$

phương trình này cho ta :

$$E_r(r,z)=-\frac{r}{2}\left(\frac{dE_{z(trục)}(z)}{dz}\right)+\ldots$$

3) Lưu số của trường tĩnh điện trên vòng kín C bằng không. Hơn nữa, dựa vào kết quả trên, ta nhận thấy các đóng góp cho lưu số này của các phần AB và CD của vòng kín C là vào bậc 2 của r. Từ đó, ta suy ra :

$$-E_z(r,z)dz+E_{z(trục)}(z)dz=0$$

với các số hạng bậc sai kém lớn hơn hoặc bằng 2 theo r.

Kết quả này có thể cũng thu được bằng các nhận xét về tính đối xứng : mọi mặt phẳng chứa trục $(z'z)$ là một mặt phẳng - gương của phân bố, vậy E_z là một hàm chẵn của r và sự khai triển có giới hạn của nó không thể chứa các số hạng có lũy thừa lẻ của r.

Tập hợp lại các kết quả của **2)** và **3)**, ở lân cận của trục, ta có :

$$\vec{E}=E_{z(trục)}(z)\vec{e}_z$$
$$+r\left[-\left(\frac{1}{2}\frac{dE_{z(\text{trục})}(z)}{dz}\right)\vec{e}_r+0\vec{e}_z\right]+\ldots$$

3.2. Sự bảo toàn thông lượng của trường

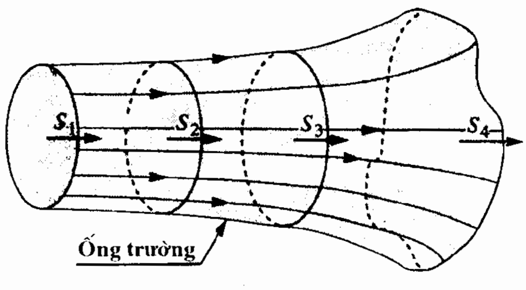
Khi không có điện tích thì thông lượng của trường tĩnh điện được bảo toàn: thông lượng đều bằng nhau qua mọi tiết diện của cùng một ống trường.

Áp dụng 2

Khi không có điện tích thì trường tĩnh điện được bảo toàn

1) *Chứng tỏ rằng khi không có điện tích thì thông lượng của trường tĩnh điện gửi qua mọi tiết diện S_1, S_2... (hình 7) của cùng một ống trường đều bằng nhau. Tất cả các diện tích đều được định hướng theo cùng một chiều.*

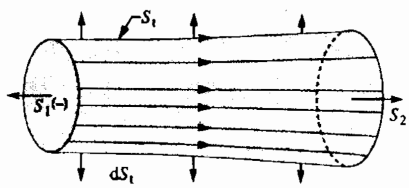
2) *Trên hình vẽ 7, ống trường có chiều hướng loe ra khi ta dịch chuyển theo các đường sức trường, hỏi ta trông đợi gì về đặc tính định tính đối với chuẩn của trường tĩnh điện ở bên trong ống.*



Hình 7.

1) Ta hãy xét hai tiết diện S_1 và S_2 của ống (*hình* 8) và kí hiệu Φ_1 và Φ_2 là các thông lượng của trường gửi qua hai tiết diện trên. Gọi S là mặt kín (với các pháp tuyến hướng ra phía ngoài) được tạo nên từ các diện tích $S_1^{(-)}$ (kí hiệu như vậy là do sự đổi hướng), S_2 và S_t, diện tích của đoạn ống cho phép khép kín lại toàn bộ. Do trường tiếp tuyến với thành ống, nên thông lượng qua S_t bằng không, vậy $\Phi_{(s)}=\Phi_1^{(-)}+\Phi_2=-\Phi_1+\Phi_2$. Theo giả thiết mặt kín S không chứa một điện tích nào, vậy $\Phi_{(s)}=0$ và $\Phi_1=\Phi_2$. Như vậy, sự bảo toàn thông lượng của trường dọc theo ống không có điện tích đã được xác nhận.

2) Thông lượng là bảo toàn và nếu tiết diện của ống tăng thì chuẩn của trường phải giảm.



Hình 8

3.3 Cực trị của thế tĩnh điện

Thế tĩnh điện không có cực trị ở bên ngoài các điện tích.

Áp dụng 3

Hãy chứng tỏ một cách định tính rằng thế tĩnh điện không có cực trị ở bên ngoài các điện tích.

Hãy tưởng tượng một miền không có điện tích, trong đó thế tĩnh điện lại có một cực trị tại một điểm M. Giả sử, đó là một cực đại chẳng hạn, (ít ra cũng là cục bộ). Các đường sức trường đi qua điểm M, tất cả đều phải phân kì từ điểm này vì chúng được định hướng theo chiều điện thế giảm. Thông lượng của trường qua một mặt kín nhỏ chứa điểm, như vậy, là dương, điều này trái với giả thiết là trong miền chứa điểm M không có điện tích. Cách lập luận bằng phản chứng này cũng được áp dụng cho một trường hợp có thế cực tiểu tại M và xác nhận rằng thế tĩnh điện không có cực trị ở bên ngoài các điện tích.

▶ **Để luyện tập : BT.8**

3.4. Điều kiện ở các giới hạn đối với trường tĩnh điện

3.4.1. Thành phần pháp tuyến của trường

Ở *chương* 3, ta đã thấy thành phần tiếp tuyến của trường tĩnh điện, trường có građien, là liên tục khi đi qua một mặt tích điện. Nhờ định lí GAUSS, ta hãy xác định đặc tính tương ứng của thành phần pháp tuyến của trường ở mặt đi qua.

Cho một mặt (đều đặn), có thể có mang điện, ngăn cách hai môi trường ① và ②. Kí hiệu dS là một phần tử của lớp này, có kích thước đủ nhỏ để có thể coi là một mặt nhỏ phẳng mang một mật độ điện mặt cục bộ đều σ.

Xét mặt kín S được mô tả trên *hình* 9. Hình dạng của nó là một cái hộp "pho mát", mà nắp dS_1 và đáy dS_2 thu được bằng một phép tịnh tiến nhỏ độ cao h từ mặt dS về hai phía của mặt ngăn cách hai môi trường

Áp dụng định lí GAUSS cho mặt này :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \vec{E_2}.d\vec{S_2} + \vec{E_1}.d\vec{S_1} + \text{ thông lượng qua mặt bên}$$

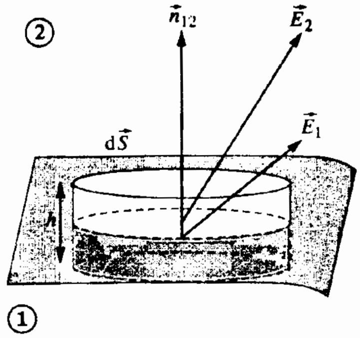
$$= \frac{Q_S}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dS + \text{ các điện tích khác ở trong hộp.}$$

Để có được hệ thức liên kết các thành phần của trường ở hai phía của lớp, ta hãy xét giới hạn khi h tiến tới không : $\vec{E_1}$ và $\vec{E_2}$ hữu hạn, thông lượng qua mặt bên khi đó bằng không. Trong các điều kiện trên, điện tích ở bên trong S bằng σdS và thông lượng của trường gửi qua S được giới hạn ở các thông lượng gửi qua S_1 và S_2, nghĩa là :

$$\vec{E}_2.(\vec{n}_{12}dS) + \vec{E}_1.(-\vec{n}_{12}dS) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dS$$

Từ đó, bằng cách chiếu xuống pháp tuyến $\vec{n}_{12}$, ta suy ra hệ thức giữa các thành phần pháp tuyến của trường ở hai phía của lớp :

$$\vec{E}_{2\perp} - \vec{E}_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$$



Hình 9.

3.4.2. Tính gián đoạn của trường

Tính chất liên tục của các thành phần tiếp tuyến của trường và giá trị của sự gián đoạn của thành phần pháp tuyến có thể thâu tóm lại như sau :

Khi đi qua một mặt tích điện, trường tĩnh điện chịu một sự gián đoạn ở thành phần pháp tuyến tại mặt đi qua :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$$

Trong trường hợp một phân bố khối, trường vẫn liên tục. Trong cả hai trường hợp, thế (nguyên hàm của trường) là liên tục.

4 Tính một trường tĩnh điện nhờ định lí GAUSS

4.1. Nguyên tắc tính toán

Trong sự thiết lập công thức, kết quả của định lí GAUSS là đặc biệt đơn giản. Đối với một phân bố điện tích đã biết, ta có thể nghĩ ngay đến tính thông lượng của trường gửi qua một mặt kín, rồi từ đó suy ra biểu thức của trường. Phương pháp này rất hấp dẫn vì nó cho phép thoát khỏi cách tính trường nhờ vào các biểu thức tích phân, nói chung khá gò bó. Tuy nhiên, chỉ nên nghĩ tới phương pháp này khi mối liên hệ giữa phép tính thông lượng và trường vẫn ở dạng sơ cấp : trường tĩnh điện có biểu thức ít nhất đã được đơn giản hóa, mặt có dạng hình học đơn giản..., nghĩa là khi phân bố điện tích có nhiều tính đối xứng.

Phép tính một trường tĩnh điện bằng định lí GAUSS, nói chung chỉ nên dùng trong trường hợp các phân bố điện tích có tính đối xứng cao như các trường hợp được khai triển dưới đây.

Trong những điều kiện trên, nguyên tắc tính toán tương ứng với tiến trình sau:

Định lí GAUSS tạo ra một công cụ tính toán nhanh trường tĩnh điện, tạo bởi một phân bố điện tích có tính đối xứng cao : sau khi xác định hình dạng của trường, nhờ vào những nhận xét về tính đối xứng, sự áp dụng định lí GAUSS cho một mặt kín có dạng hình học thích hợp với các tính đối xứng của bài toán, cho phép xác định biên độ của trường.

4.1.1. Giai đoạn thứ nhất : nhận xét về tính đối xứng

Nhờ vào các tính đối xứng của phân bố, ta phải có được hình dạng của trường.

• Sử dụng các mặt phẳng đối xứng hoặc phản đối xứng để xác định hướng của trường

• Sử dụng tính bất biến với phép quay hoặc phép tịnh tiến để giảm bớt sự phụ thuộc của các thành phần của trường đối với các tọa độ (đương nhiên, một sự lựa chọn các tọa độ thích hợp với tính đối xứng của bài toán là cần thiết).

4.1.2. Giai đoạn thứ hai : chọn mặt GAUSS

Hình dạng thu được cho trường quyết định việc lựa chọn một mặt GAUSS làm cho phép tính thông lượng trở thành sơ cấp.

4.1.3 Giai đoạn thứ ba : áp dụng định lí GAUSS

Việc áp dụng định lí GAUSS sẽ hoàn thành sự xác định trường tĩnh điện.

4.2. Phân bố có tính đối xứng phẳng

Để làm ví dụ, ta hãy xác định trường tạo ra bởi một lớp phẳng vô hạn, dày e và có mật độ điện khối đều ρ (hình 10)

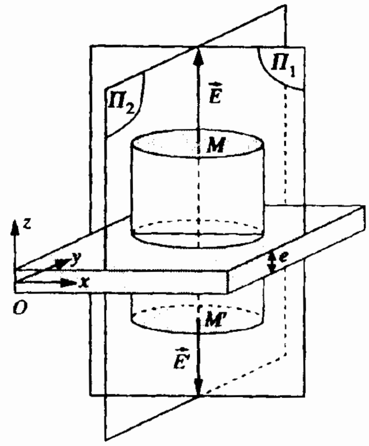
4.2.1. Giai đoạn thứ nhất : sử dụng các tính đối xứng của phân bố

Phân bố này là bất biến với phép đối xứng đối với các mặt phẳng Π_1 và Π_2 chứa điểm M, tại đó ta muốn xác định trường, vậy (*hình* 10):

$$\vec{E}(x, y, z) = E(x, y, z)\vec{e}_z .$$

Sự bất biến của bài toán đối với phép tịnh tiến song song với trục (Ox), hoặc trục (Oy), cho phép ta thực hiện sự đơn giản hóa phụ $\vec{E}(x, y, z) = E(z)\vec{e}_z$.

Chú ý rằng mặt phẳng (xOy) cũng là một mặt phẳng đối xứng của phân bố. Tại điểm M', đối xứng của M qua mặt phẳng này, trường $\vec{E}'$ cũng đối xứng với trường $\vec{E}$ tại M : hàm $E(z)$ là một hàm lẻ



Hình 10. *Sử dụng các tính đối xứng và sự lựa chọn "mặt Gauss".*

4.2.2. Giai đoạn thứ hai : lựa chọn "mặt GAUSS"

Một mặt kín S cho phép tính toán dễ dàng thông lượng phải có các phần phẳng z = cte, tính chất lẻ của $E(z)$ tất nhiên dẫn ta tới sự lựa chọn *hình* 10. Thông lượng của trường gửi qua mặt kín này bằng :

$$\Phi = SE(z) - SE(-z) = 2SE(z).$$

4.2.3. Giai đoạn thứ ba : áp dụng định lí GAUSS

Ta hãy áp dụng định lí GAUSS cho mặt này :

- *trường hợp 1* : $0 < z < \dfrac{e}{2}$: $2SE(z) = \dfrac{2\rho Sz}{\varepsilon_0}$;
- *trường hợp 2* : $z > \dfrac{e}{2}$: $2SE(z) = \dfrac{\rho Se}{\varepsilon_0}$.

Từ đó suy ra :

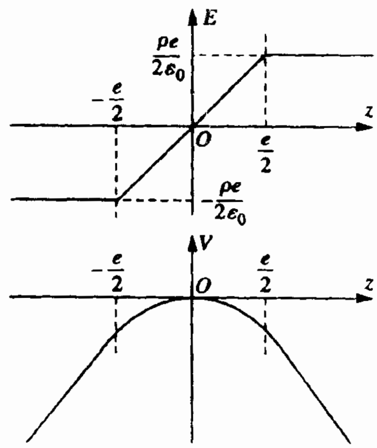
- nếu $0 \le |z| \le \dfrac{e}{2}$: $\vec{E} = \left(\dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}\right)\vec{e}_z$;
- nếu $\dfrac{e}{2} \le |z|$: $\vec{E} = \left(\dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}\right)$ dấu $(z)\,\vec{e}_z$,

nghĩa là $\vec{E}(z > 0) = \dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}$ và $\vec{E}(z < 0) = -\dfrac{\rho e}{2\varepsilon_0}$.

Từ trên ta có thể suy ra thế tạo ra, chẳng hạn chọn $V = 0$ trên mặt phẳng $z = 0$. E_x và E_y đã bằng không, nên thế chỉ phụ thuộc biến số z, với $\dfrac{dV}{dz} = -E_z$. Do tính liên tục, bằng cách nối thế ở hai đầu của khoảng đặc trưng, ta có :

- nếu $0 \le |z| \le \dfrac{e}{2}$: $V = -\dfrac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$
- nếu $\dfrac{e}{2} \le |z|$: $V = -\dfrac{\rho(4|z| - e)e}{8\varepsilon_0}$

Và hàm thế $V(z)$ là hàm chẵn (*hình* 11).



Hình 11. *Trường E và thế V tạo ra bởi lớp phẳng vô hạn dày e và có mật độ điện khối đều ρ.*

Áp dụng 4

1) Hãy xác định trường tạo ra bởi một lớp phẳng vô hạn có mật độ điện mặt đều σ.
2) Lấy lại biểu thức của trường tĩnh điện tạo ra bởi một đĩa bán kính R, mang mật độ điện mặt đều σ, ở trên trục của nó, hãy ước lượng chiều cao cực đại h để có thể coi đĩa như một mặt phẳng vô hạn mà không mắc một sai số tương đối lớn hơn 1% trong phép tính trường.

1) Các tính chất đối xứng đã dùng cho trường hợp của lớp vẫn còn có giá trị, vậy :

$$\vec{E}(x, y, z) = E(z)\vec{e}_z, \text{ với } E(-z) = -E(z)$$

Áp dụng định lí GAUSS cho cùng một loại mặt kín cho ta $E(z > 0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Cuối cùng. $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ dấu $(z)\vec{e}_z$.

2) Tại một điểm trên trục của đĩa, có hoành độ z, ta đã tính được :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \text{ dấu } (z)\vec{e}_z.$$

Ta có thể lấy giá trị trên bằng $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ dấu (z) với một độ chính xác tương đối nhỏ hơn 1% nếu $|z| < h$, với $\dfrac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} = 0{,}01$, nghĩa là :

$$h \approx \frac{R}{100}.$$

▶ **Để luyện tập : BT.6**

4.3. Phân bố có tính đối xứng trụ

Ví dụ về phân bố có tính đối xứng trụ mà ta sắp giải là một khối trụ có trục (Oz) và có bán kính R, bên trong có một điện tích được phân bố đều theo thể tích, mật độ ρ.

4.3.1. Giai đoạn thứ nhất : sử dụng các tính đối xứng của phân bố

Tại một điểm M trong không gian, có hai mặt phẳng đối xứng của phân bố đi qua : Π_1 chứa điểm M và trục (Oz) và Π_2 vuông góc với (Oz) và chứa điểm M (*hình* 12). Từ đó, trong tọa độ trụ trục (Oz), ta suy ra :

$$\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{e}_r$$

Các bất biến của bài toán với phép tịnh tiến song song với trục (Oz) và với phép quay xung quanh trục này đưa tới các giản ước phụ $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

4.3.2. Giai đoạn thứ hai : lựa chọn mặt GAUSS

Một mặt S, là một hộp hình trụ, trục (Oz), bán kính r, được đóng kín bởi hai đĩa, cách nhau bởi một chiều cao tùy ý h (*h*.12), tạo ra một mặt GAUSS phù hợp về mặt hình học của bài toán : thông lượng của trường gửi qua mặt kín này có biểu thức đơn giản : $\Phi = 2\pi r h E(r)$.

4.3.3. Giai đoạn thứ ba : áp dụng định lí GAUSS

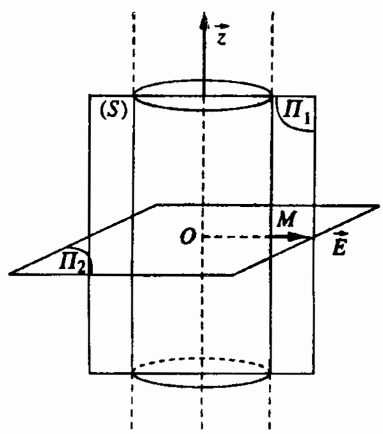
Điện tích ở bên trong mặt trụ bằng :

$$Q_{\text{int}} = \rho\pi r^2 h, \text{ nếu } r < R \text{ và } Q_{\text{int}} = \rho\pi R^2 h, \text{ nếu } r > R.$$

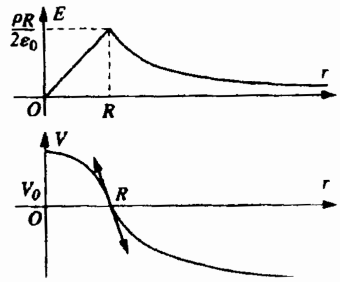
Suy ra :

- $r < R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r$;
- $r > R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$.

Các bất đẳng thức có thể được mở rộng ra theo chiều rộng vì trường tạo ra bởi phân bố thể tích này là liên tục.



Hình 12.



Hình 13. *Trường và thế của một trụ vô hạn.*

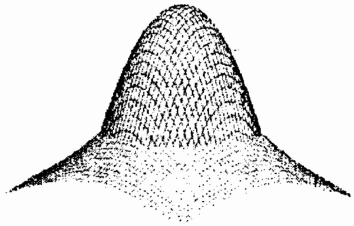
Chú ý :
Phép tính trường bằng định lí Gauss là rất đơn giản. Đối với một hình trụ tích điện có chiều cao xác định, dĩ nhiên định lí Gauss sẽ vẫn áp dụng được, nhưng đáng tiếc lại không dùng được (các mặt phẳng song song với (xOy) không còn là các mặt phẳng đối xứng của phân bố điện tích nữa).

Sử dụng $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta - \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)\vec{e}_z$, ta thu được :

$V(r, \theta, z) = V(r)$ và do tính liên tục, bằng cách nối nghiệm tại $r = R$ ta có:

- $r < R$: $V = \dfrac{\rho(R^2 - r^2)}{2\varepsilon_0} + V_0$;
- $r > R$: $V = -\left(\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\right)\ln\left(\dfrac{R}{r}\right) + V_0$.

V_0 là một hằng số tùy ý (tính không xác định của thế) ; cần lưu ý rằng ta không thể cho $V = 0$ ở vô cùng vì ở đó có các điện tích.



Hình 14. ▶
Thế tạo ra bởi một trụ tích điện đều theo thể tích. Đẳng thế $V = 0$ được chọn trên bề mặt của trụ.

Áp dụng 5

Trụ vô hạn tích điện đều trên bề mặt

Dùng lại nghiên cứu ở trên cho một hình trụ vô hạn mang mật độ điện mặt đều σ.

Các nhận xét về tính đối xứng vẫn dẫn tới $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ và $V = V(r)$. Áp dụng định lí GAUSS cho cùng một mặt kín, ta có :

$Q_{\text{int}} = 0$, nếu $r < R$ và $Q_{\text{int}} = 2\pi Rh\sigma$, nếu $r > R$.

Khi đó :

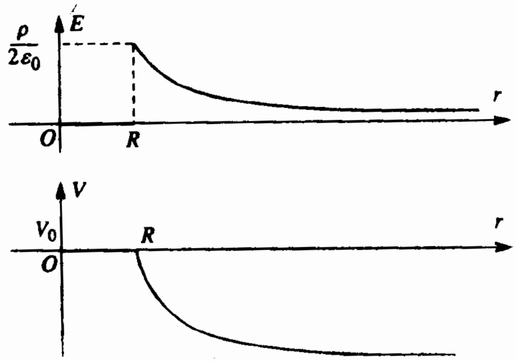
- $r < R$: $\vec{E} = \vec{0}$. Điều đáng chú ý tìm thấy là trường bằng không tại mọi điểm ở trong phần rỗng của vật tích điện trên bề mặt
- $r > R$: $\vec{E} = \left(\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\right)\vec{e}_r$.

Các bất đẳng thức vẫn còn chặt chẽ, trường tĩnh điện chịu sự bất liên tục pháp tuyến (mong đợi !) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ khi đi qua mặt tích điện

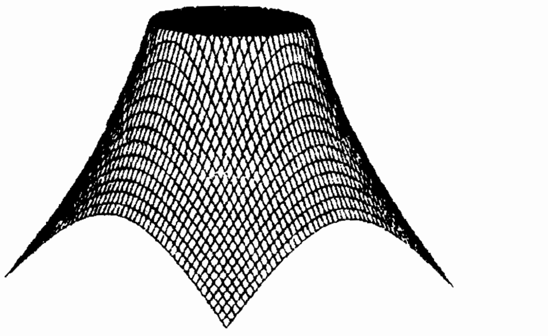
Từ trên suy ra thế :

$r < R$: $V(r) = V_0$

$r > R$: $V(r) = V_0 + \left(\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)\ln\dfrac{R}{r}$.



Hình 15.



Hình 16. ▶
Thế tạo ra bởi một trụ tích điện đều trên bề mặt. Người ta cho thấy rõ đẳng thế có thế $V = 0$ với $r \neq R$
(V_0 và $\sigma > 0$).

▶ **Để luyện tập : BT. 1 và 7**

4.4. Phân bố có tính đối xứng cầu

Ví dụ mẫu được trình bày là một điện tích được phân bố đều theo đơn vị thể tích ρ ở bên trong một khối cầu tâm O, bán kính R. Kí hiệu $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ là điện tích toàn phần của khối cầu (hình 17)

4.4.1. Giai đoạn thứ nhất : sử dụng các tính đối xứng của phân bố

Xét hai mặt phẳng vuông góc Π_1 và Π_2 chứa tâm đối xứng O và điểm M, tại đó ta muốn xác định trường, trong tọa độ cầu, ta thu được $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$ (*hình* 17).

Sự bất biến của phân bố đối với phép quay xung quanh mọi trục chứa tâm O đem tới sự đơn giản hóa sau : $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r)\vec{e}_r$.

4.4.2. Giai đoạn thứ hai : lựa chọn mặt GAUSS

Mặt kín thích hợp về hình học ở đây đương nhiên là một quả cầu tâm O, bán kính r. Thông lượng của trường gửi qua mặt này bằng $\phi = 4\pi r^2 E(r)$

4.4.3. Giai đoạn thứ ba : áp dụng định lí GAUSS

Điện tích ở bên trong mặt này bằng :

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \text{ , nếu } r < R \text{ và } Q_{\text{ext}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \text{ , nếu } r > R$$

Như vậy, ta thu được trường liên tục của phân bố theo thể tích này :

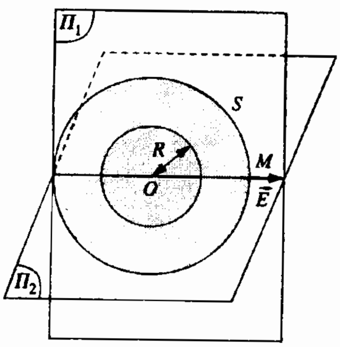
- $r \le R : \vec{E} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\vec{e}_r$
- $r \ge R : \vec{E} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\vec{e}_r$

Lưu ý rằng ở bên ngoài khối cầu tích điện, trường tạo ra giống như trường của một điện tích điểm q đặt cố định ở tâm quả cầu.
Từ đó, suy ra thế liên tục ở $r = R$, là :

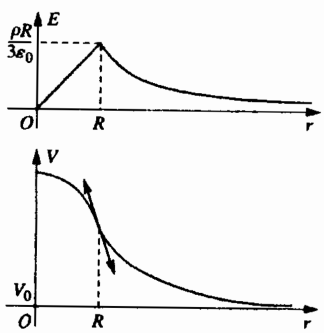
$$r \le R : V(r) = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} + V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3R^2 - r^2}{2R^3} + V_0$$

$$r \ge R : V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + V_0 .$$

$E(r)$ và $V(r)$ được biểu diễn trên *hình* 18



Hình 17.



Hình 18. *Trường và thế của một khối cầu tích điện.*

Áp dụng 6

Quả cầu có điện tích bề mặt đều

Lặp lại nghiên cứu này đối với một quả cầu tâm O, bán kính R, mang mật độ điện mặt đều σ. Kí hiệu điện tích của nó là $q = 4\pi R^2\sigma$

Tính đối xứng cầu của bài toán cho :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r \text{ và } V = V(r)$$

Áp dụng định lí GAUSS cho quả cầu bán kính r, với $Q_{\text{int}}=0$, nếu $r < R$ và $Q_{\text{int}} = 4\pi R^2\sigma = q$, cho:

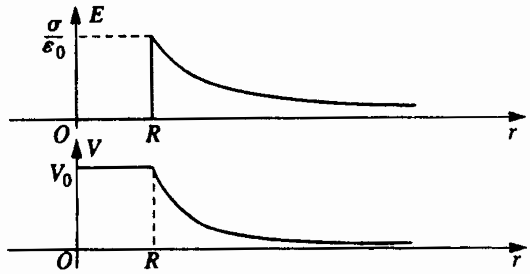
$r \le R : \vec{E} = \vec{0}$

$$r \ge R : \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

Sự gián đoạn theo pháp tuyến của trường $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ thu được tại $r = R$.

Thế liên tục tại $r = R$, suy ra từ trên :

- $r \le R : V(r) = V_0 + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$;
- $r \ge R : V(r) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + V_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\dfrac{1}{r} + V_0$



Hình 19.

▶ **Để luyện tập : BT. 2.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỊNH LÍ GAUSS

- **Thông lượng của trường của một phân bố $\mathscr{D}$ gửi qua mặt kín S bằng điện tích của $\mathscr{D}$ nằm ở bên trong S chia cho ε_0 :**

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \text{ với } \mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}_{ext}.\mathrm{d}S$$

- **Định lí GAUSS và tính chất bảo toàn của lưu số cho phép nghiên cứu toàn bộ và cục bộ trường tĩnh điện.**
- **Khi không có điện tích, thông lượng của trường được bảo toàn : thông lượng là như nhau qua mọi tiết diện của cùng một ống trường.**
- **Thế tĩnh điện không có cực trị ở ngoài các điện tích.**

■ SỰ GIÁN ĐOẠN CỦA TRƯỜNG

Khi đi qua một mặt mang điện, trường tĩnh điện chịu một sự gián đoán theo pháp tuyến ở mặt đi qua $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$.

■ XÁC ĐỊNH MỘT TRƯỜNG NHỜ ĐỊNH LÍ GAUSS

Định lí GAUSS tạo nên một công cụ tính toán nhanh trường tĩnh điện tạo ra bởi một phân bố điện tích có tính đối xứng cao : sau khi xác định hình dạng của trường, nhờ các nhận xét về tính đối xứng, sự áp dụng định lí GAUSS cho một mặt kín, có dạng hình học phù hợp với các tính đối xứng của bài toán, cho phép xác định biên độ của trường.

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Dây thẳng vô hạn

Hãy khảo sát trường hợp một dây thẳng vô hạn như một giới hạn cần xác định của trường hợp hình trụ vô hạn.

2 Trường hấp dẫn của một ngôi sao

Một ngôi sao hình cầu bán kính R có phân bố khối lượng mang tính đối xứng cầu.

Tìm trường hấp dẫn tạo ra ở khoảng cách, cách tâm quả cầu r lớn hơn R ?

3 Thông lượng : sự tương tự với một túi lưới bắt bướm

Cho một "túi lưới bắt bướm" có cửa tròn, bán kính R (tức có tiết diện $\Sigma = \pi R^2$) và túi lưới có một diện tích toàn phần S ; túi được đặt trong một trường tĩnh điện $\vec{E}$.

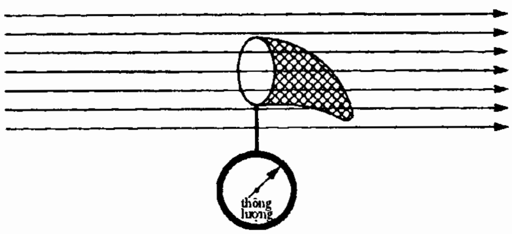
Trong miền không gian đang xét, không có một điện tích nào. Túi lưới trên cho phép nhận giá trị trung bình của trường bằng cách đọc thông lượng vào (giá trị cho bởi túi lưới) của trường này gửi qua "túi lưới bắt trường" này.

1) Trường $\vec{E}$ là đều.

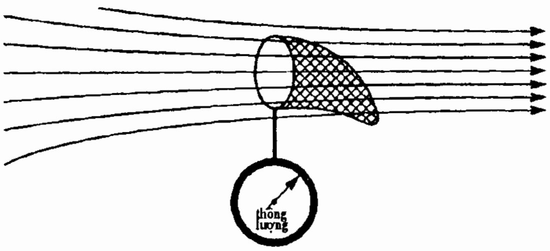
Hỏi phải đặt túi lưới thế nào để đo $\vec{E}$?

Diện tích của túi có làm vướng víu gì không ?

Có thể biết được phương của trường $\vec{E}$ không ?



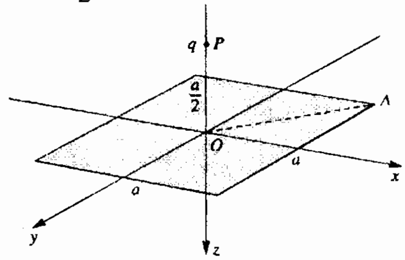
2) Trường $\vec{E}$ là không đều trong một miền không có điện tích. Hỏi phải đặt túi lưới ở đâu để "bắt được" thông lượng lớn nhất ? Trường là cực đại ở chỗ nào ?



SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

4 Tính thông lượng của $\vec{E}$ tạo ra bởi một điện tích gửi qua một hình vuông

Cho một điện tích q nằm cách một hình vuông cạnh a, một khoảng $\frac{a}{2}$:



1) Tính $\vec{E}(0)$ và $\vec{E}(A)$

2) Tính thông lượng của $\vec{E}$ qua diện tích hình vuông

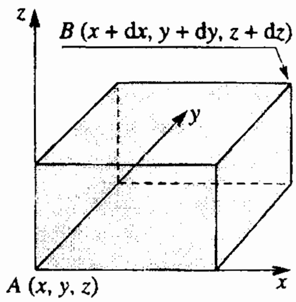
3) Từ đó suy ra giá trị trung bình của trường $\vec{E}$ trên diện tích hình vuông.

5 Định luật MAXWELL - GAUSS cục bộ, phương trình POISSON

Ta sẽ thiết lập biểu thức của các định luật này theo các tọa độ Descartes.

Xét một hình hộp chữ nhật nguyên tố mô tả trên hình vẽ. Các điểm A và B có tọa độ Descartes lần lượt là (x, y, z) và $(x + dx, y + dy, z + dz)$.

Mật độ điện khối của môi trường là ρ.



Bằng cách áp dụng định lí GAUSS cho hình hộp, hãy thiết lập

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Từ đó suy ra phương trình vi phân liên kết thế với mật độ điện khối, gọi là phương trình POISSON.

6 Lớp kép tích điện và lớp lưỡng cực

Lấy lại phép tính trường và thế của một lớp kép tích điện $\rho = \rho_0$ với $0 < z < e$ và $\rho = \rho'_0$ với $-e' < z < 0$, toàn bộ trung hòa $\rho_0 e = -\rho'_0 e'$.

Ta sẽ lấy $V = 0$ trên mặt phẳng (x, y) $(z = 0)$

Hãy biện luận trường hợp một lớp "lưỡng cực" phẳng, nghĩa là giới hạn $e = e'$ tiến tới 0, với $(\rho_0 e)e = (\rho'_0 e')e' = cte$ kí hiệu là ρ.

Có lưu ý gì về đặc tính của thế ở lân cận mặt phẳng (x, y) $(z = 0)$?

7 Phân bố trụ tương ứng với một trường đã cho

Một trường có tính đối xứng trụ $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ có biểu thức $\vec{E} = (Ar)\vec{e}_r$, nếu $r < a$ và $\vec{E} = \left(\frac{B}{r}\right)\vec{e}_r$, nếu $r > a$.

Hãy xác định phân bố điện tích đã tạo ra trường này, sau đó, thế tĩnh điện liên kết với nó.

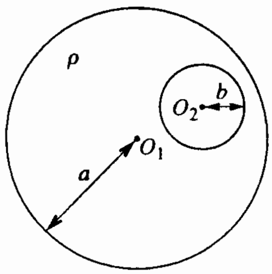
8 Tính bền của một điện tích trong một trường tĩnh điện

Cho một miền của không gian, không có điện tích, trong đó có một trường tĩnh điện $\vec{E}$.

Cho một điểm O của miền này tại đó điện tích Q nằm cân bằng. Hỏi cân bằng này có thể là cân bằng bền được không ?

9 Lỗ hổng trong một khối cầu tích điện đều

Một khối cầu bán kính a mang mật độ điện tích khối đều ρ, có một lỗ hổng hình cầu có bán kính b không chứa điện tích nào. Hãy xác định trường ở trong lỗ hổng.



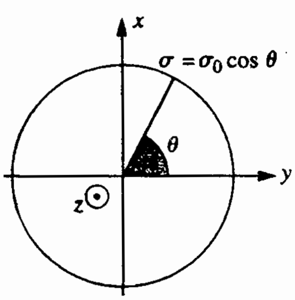
10 Trường tạo ra bởi một quả cầu

Một quả cầu bán kính a mang mật độ điện mặt :

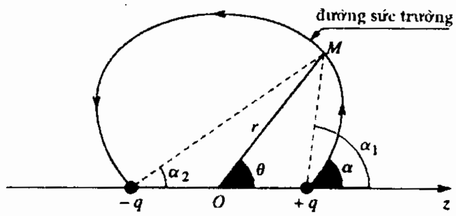
$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$

trên mặt của nó, với $\sigma_0 > 0$. Phân bố điện tích này có tính đối xứng tròn xoay xung quanh trục (Oz).

Hãy xác định trường ở bên trong quả cầu.



11 Đường sức trường của một lưỡng cực điện trong phép gần đúng lưỡng cực



Hai điện tích trái dấu $-q$ và $+q$ được đặt trên trục (Oz) tại các điểm có tọa độ lần lượt bằng $-\frac{a}{2}$ và $+\frac{a}{2}$.

Dùng định lí GAUSS, hãy chứng tỏ rằng phương trình của một đường sức trường như đã mô tả trên hình vẽ là $\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 = cte$.

Hãy thiết lập phương trình của một đường sức trường trong phép gần đúng lưỡng cực, nghĩa là cho một khoảng cách quan sát r rất lớn so với khoảng cách a ngăn cách hai điện tích.

12 Đám mây êlectrôn và năng lượng iôn hóa

Một hệ điện tích tạo ra thế có tính đối xứng cầu :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \quad (q > 0)$$

Hãy tính $Q(r)$, điện tích nằm trong quả cầu bán kính r.

Nêu tính chất của phân bố điện tích tương ứng với thế trên.

Hãy định nghĩa, sau đó tìm biểu thức của năng lượng liên kết của hệ này.

13 Hiệu ứng màn chắn trong một Plasma

Xét một môi trường về toàn bộ trung hòa điện, ở trong trạng thái iôn hóa, được cấu tạo từ các điện tích $+q$ và $-q$, có mật độ trung bình đồng nhất bằng n_0. Tính trung hòa điện chỉ được đảm bảo ở thang đo lớn, bởi vì ở lân cận một điện tích q đặt tại O thì các điện tích trái dấu được ưu tiên tiến lại gần. Bài tập này nêu ra một sự tiếp cận đã được đơn giản hóa về hiệu ứng cục bộ này.

Ta tự cho một điện tích q tại điểm O, điện tích này làm thay đổi sự phân bố cục bộ của các điện tích + và −, khi đó, mật độ của các điện tích này bằng lần lượt $n_+(r)$ và $n_-(r)$, với :

$$n_+(r) = n_0 \exp\left(-\frac{qV}{kT}\right) \text{ và } n_-(r) = n_0 \exp\left(+\frac{qV}{kT}\right)$$

(định luật BOLTZMANN về cân bằng nhiệt động của hệ ở nhiệt độ T).

Bằng cách áp dụng định lí Gauss giữa hai quả cầu đồng tâm gần nhau bán kính r và $r + dr$, hãy thiết lập phương trình vi phân cho thế $V(r)$

Hãy tuyến tính hóa phương trình này với $qV << kT$, và giải nó (Ta có thể xác định, trước tiên, nghiệm $F(r) = rV(r)$).

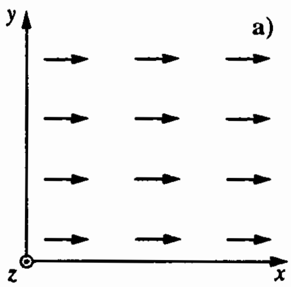
Hãy so sánh nghiệm $V(r)$ tìm được với thế mà điện tích q tạo ra khi chỉ có một mình nó trong không gian. Hãy biểu thị chiều dài DEBYE của Platma, kí hiệu L_D, đặc trưng cho hiệu ứng màn chắn của thế COULOMB của điện tích+ q bởi các thực thể mang điện khác của môi trường iôn hóa. Hãy thực hiện sự áp dụng bằng số đối với một platma mà $n_0 = 10^6$ hạt trong một centimét khối, có nhiệt độ $T = 10^5 K$ và bình luận.

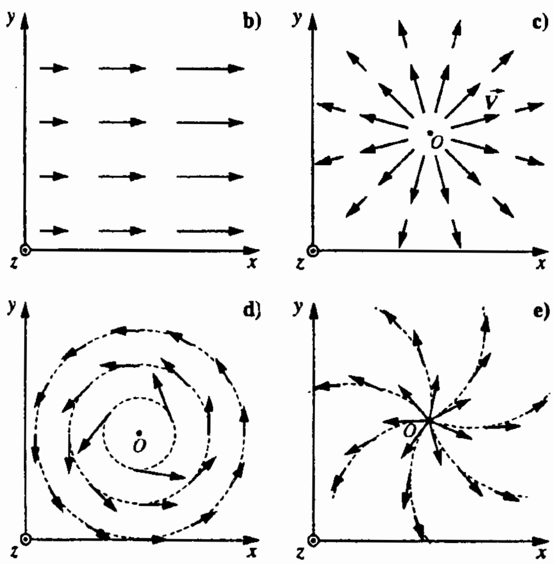
14 Hình dáng của các đường sức trường tĩnh điện $\vec{E}$

Các sơ đồ sau đây mô tả, trong mặt phẳng (x, y) $(z = cte)$, một vài bản đồ về trường hai chiều, dạng :

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y)\vec{e}_x + E_y(x,y)\vec{e}_y$$

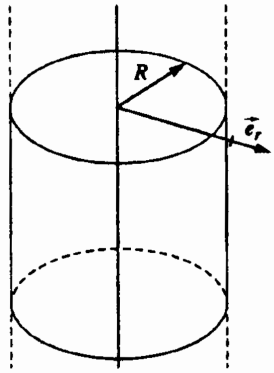
Trong mỗi trường hợp, hãy xác định xem nó có thể là một trường tĩnh điện không ? và nếu có, thì trong miền đã mô tả có mặt các điện tích không.





LỜI GIẢI

1 *Hình trụ vô hạn mang một điện tích $\lambda = \pi R^2 \rho$ trên một đơn vị dài. Bằng cách giữ số hạng này không đổi và cho R tiến về O, ta thu được một phân bố giới hạn tương ứng với một sợi dây thẳng vô hạn mang mật độ điện dài λ. Khi đó, chỉ có trường hợp r > R là dùng được, ta nhận thấy $\vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$ cũng có thể được viết là : $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$.*



Ta tìm lại được kết quả đã thiết lập được ở chương 3.

2 *Ta đã nhận thấy sự tương tự về mặt hình thức giữa định luật COULOMB và định luật hấp dẫn vũ trụ của NEWTON : chỉ cần thay thế trong biểu thức thứ nhất thừa số $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ tương tác giữa hai điện tích q_1 và q_2 bằng $-Gm_1m_2$.*

Vậy định lí Gauss áp dụng cho trường hấp dẫn $\vec{\mathscr{G}}$ có dạng :

$$\phi = \oiint_S \vec{\mathscr{G}}.d\vec{S} = -4\pi GM_{int}.$$

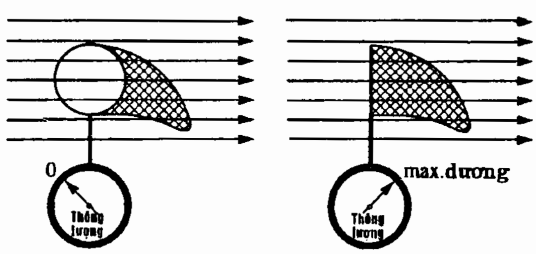
Vì phân bố có tính đối xứng cầu, nên trường hấp dẫn là trường xuyên tâm và chuẩn của nó chỉ phụ thuộc khoảng cách r tới tâm đối xứng $\vec{\mathscr{G}}(r) = \mathscr{G}(r)\vec{e}_r$
Thông lượng của trường hấp dẫn gửi qua một quả cầu tâm O, bán kính r, bằng :

$$\Phi = 4\pi r^2 \mathscr{G}(r)$$

Với r > R, khối lượng chứa ở bên trong mặt kín này trùng với khối lượng toàn phần của ngôi sao, vậy $\vec{\mathscr{G}} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{e}_r$.

Nhớ rằng sự phân bố chính xác của khối lượng bên trong ngôi sao không quan trọng đối với phép tính trường ở bên ngoài ngôi sao.

3 *Chú ý :*
Trong một miền không có điện tích, cũng tức là trong một miền ở đó thông lượng của trường E được bảo toàn, diện tích S của lưới của cái "lưới bắt bướm" này không hề tác động vào số bướm bắt được, cũng có nghĩa vào giá trị của thông lượng thu được. Thông lượng này chỉ phụ thuộc vào vòng kín mà diện tích này tựa vào, tức là vào tiết diện tròn của cửa lưới.



1) *Để thu được một thông lượng cực trị, thì pháp tuyến với cửa tròn của lưới phải song song với trường. Nếu dấu của thông lượng vào là dương và cực đại (giá trị đọc được) thì $\vec{E}$ vuông góc với cửa lưới và đi vào.*

2) *Ta đang ở trong một miền không gian không có điện tích. Vậy thông lượng của trường là bảo toàn, nghĩa là thông lượng của $\vec{E}$ gửi qua một ống trường là bất biến.*

Vậy, trường ngày càng mạnh thì các đường sức trường càng xít lại. Để có một thông lượng cực đại, ta phải dịch chuyển cửa lưới về phía phải; ở đó các đường sức trường mau hơn.

4 1) $\vec{E}(0)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{a^2}\vec{e}_z$ và $\vec{E}(A)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3a^2}\vec{e}_{PA}$.

Chú ý rằng $\vec{E}(0).\vec{e}_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{a^2}$ và $\vec{E}(A).\vec{e}_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3\sqrt{3}a^2}$

2) *Thông lượng của trường tĩnh điện $\vec{E}$, tạo ra bởi điện tích q, qua diện tích của hình vuông bằng* $\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$, *với Ω biểu thị góc đặc dưới đó từ P, ta nhìn diện tích của hình vuông. Đó là góc đặc dưới đó, từ tâm của lập phương, ta nhìn một mặt của lập phương đó. Vì sáu mặt là giống nhau, và góc đặc của toàn không gian bằng 4π, nên ta thu được :* $\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{6}=\frac{q}{6\varepsilon_0}$

3) *Giá trị trung bình của trường có thể được xác định bởi :*

$$\bar{E}=\frac{\Phi}{a^2}=\frac{q}{6\varepsilon_0 a^2}=\frac{\pi}{6}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\frac{q}{3\sqrt{3}\,4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

hay : $<E_z>=0{,}524$ và $E_z(O)=2{,}721\ E_z(A)$.

5 *Xét một mặt kín bao bọc lấy hình hộp và áp dụng định lí GAUSS. Thông lượng ra của trường gửi qua mặt kín nguyên tố này cho bởi (bằng cách chỉ đưa ra các số hạng "có ích", nghĩa là giới hạn ở các số hạng cùng bậc khác không):*

$$+dxdy.\,E_x(x,y,z+dz)+dydz.\,E_x(x+dx,y,z)+dxdz\,E_y(x,y+dy,z)$$
$$-dxdy.\,E_z(x,y,z)-dydz.\,E_x(x,y,z)-dxdz\,E_y(x,y,z)$$

Đại lượng trên bằng điện tích nguyên tố nằm ở bên trong thể tích này

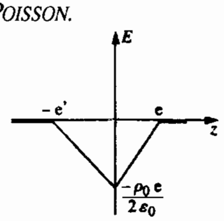
$dxdydz\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$ *hay :* $dxdydz\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)dxdydz$

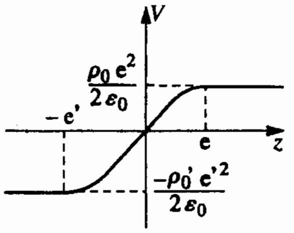
Bằng cách sử dụng hệ thức

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\vec{e}_x-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\vec{e}_y-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\vec{e}_z,$$

từ trên, ta suy ra : $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ *gọi là phương trình POISSON.*

6





Các kết quả liên quan đến lớp tích điện được áp dụng cho tập hợp hai lớp bằng sự chồng chất và khi đó, ta thu được $\vec{E}=E(z)\vec{e}_z$, *với:*

- $z>e: E(z)=0$ • $z<-e': E(z)=0$
- $0<z<e: E(z)=\frac{\rho_0(z-e)}{\varepsilon_0}$ • $-e'<z<0: E(z)=\frac{\rho'_0(z+e')}{\varepsilon_0}$.

Từ đây, ta suy ra biểu thức của thế (nhờ tính liên tục, nối các sự thay đổi của miền) :

- $z>e: V(z)=\frac{\rho_0 e^2}{2\varepsilon_0}$; • $0<z<e: V(z)=-\frac{\rho_0(2ez-z^2)}{2\varepsilon_0}$;
- $-e'<z<0: V(z)=-\frac{\rho'_0(2e'z+z^2)}{2\varepsilon_0}$
- $z<-e': V(z)=\frac{\rho'_0 e'^2}{2\varepsilon_0}$

Trường bằng không ở hầu khắp mọi nơi, lấy một giá trị tiến tới vô cùng trên một bề dày tiến tới không. Khi đó thế có dạng :

$$V(z)=-\left(\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\right)\ \text{dấu}\ (z)$$

Với mẫu điện tích này, thì thế chịu một sự gián đoạn xác định khi đi qua lớp lưỡng cực, tương đương với hai phân bố điện tích theo bề mặt vô hạn σ và -σ và rất gần nhau. Đó cũng là mô hình của một tụ điện phẳng nhìn "từ xa" : một hiệu điện thế tồn tại giữa hai bản tụ nhìn "từ xa".

7 *Hệ có tính đối xứng trụ tròn xoay. Vậy ta có thể tìm một phân bố điện tích có tính đối xứng này. Kí hiệu Q (r, h) là điện tích chứa trong một hình trụ trục (Oz), bán kính r và chiều cao h. Áp dụng định lí GAUSS cho mặt kín hình trụ bao lấy điện tích này, ta có :*

$$\frac{Q(r,h)}{\varepsilon_0}=2\pi rhE(r)$$

(thông lượng ra của $\vec{E}$ gửi qua các đáy của hình trụ này bằng không), hay :

- *nếu* $r<a: Q(r,h)=2\pi\varepsilon_0 Ar^2h$;
- *nếu* $r>a: Q(r,h)=2\pi\varepsilon_0 Bh$

Ta hãy xác định mật độ điện khối bằng cách xét điện tích :

$$Q(r+dr,h)-Q(r,h)$$

chứa ở giữa hai hình trụ bán kính r và r + dr, và chiều cao h :

$$2\pi r dr.h\rho(r)=Q(r+dr,h)-Q(r,h)=\frac{dQ(r,h)}{dr}.dr$$

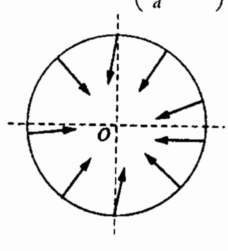
Như vậy ta thu được

- *nếu* $r<a: \rho(r)=2\varepsilon_0 A$;
- *nếu* $r>a: \rho(r)=0$

Điện lượng Q(r, h) chịu một sự gián đoạn có thể xảy ra tại r = a. Điều đó tương ứng với một điện tích bề mặt σ, phân bố trên hình trụ bán kính a :

$$2\pi a\sigma=Q(r=a^+)-Q(r=a^-),\ \text{hay :}\ \sigma=\varepsilon_0\left(\frac{B}{a}-Aa\right)$$

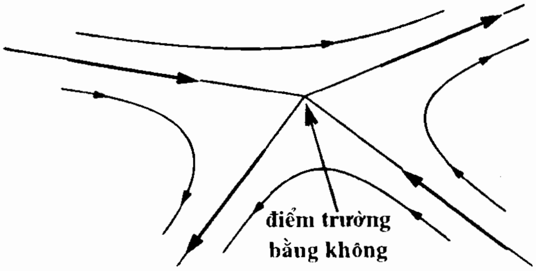
8 *Giả sử Q là điện tích dương. Trường $\vec{E}$ phải có hình dáng sau đây ở lân cận điểm O: các trường phải được định hướng vào phía trong của một mặt kín bao lấy điểm O.*



Điều đó có nghĩa là thông lượng ra của trường $\vec{E}$ gửi qua mặt kín này là âm. Vậy tồn tại một điện tích âm ở bên trong mặt đó, điều này là không thể có vì ta đang ở trong một miền không có điện tích.

Vậy trong một hình dáng như thế, sự bền vững của điện tích Q là không thể có được.

Một cách tổng quát, xung quanh một điểm trường bằng không, hình dáng của các đường sức trường như sau :

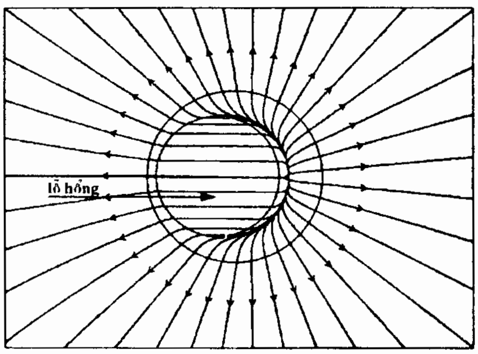


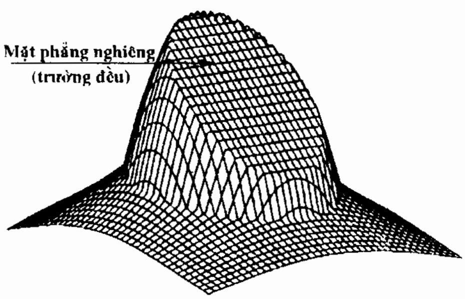
Các mô phỏng khác nhau được mô tả trong giáo trình này cho phép xác minh điều khẳng định này.

9 Phân bố này tương ứng với sự chồng chất của hai phân bố $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$.$\mathcal{D}_1$ tương ứng với mật độ điện khối ρ được phân phối đều trong quả cầu tâm O_1, bán kính a, và $\mathcal{D}_2$ tương ứng với mật độ điện khối $-\rho$ trong quả cầu tâm O_2, có bán kính b. Trong lỗ hổng, tức bên trong của hai quả cầu này, $\mathcal{D}_1$ tạo ra trường $\vec{E}_1(M)=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}$ và $\mathcal{D}_2$ trường $\vec{E}(M)=-\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$.

Vậy trường toàn phần ở trong lỗ hổng bằng $\vec{E}(M)=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$.

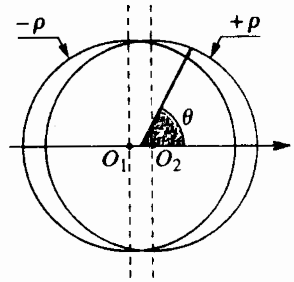
Trường là đều trong lỗ hổng.





Các mô phỏng trên đây cho thấy rõ vết của các đường sức trường và các đẳng thế của hệ điện tích, cũng như các biến thiên của thế : trường đúng là đều trong lỗ hổng.

10 Phân bố này tương ứng với sự chồng chất của hai phân bố $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$.$\mathcal{D}_1$ tương ứng với mật độ điện khối $-\rho(\rho>0)$ phân phối đều trong một quả cầu tâm O_1, bán kính a, và $\mathcal{D}_2$ với mật độ điện khối đều ρ, phân phối trong một quả cầu tâm O_2 và cùng bán kính a.

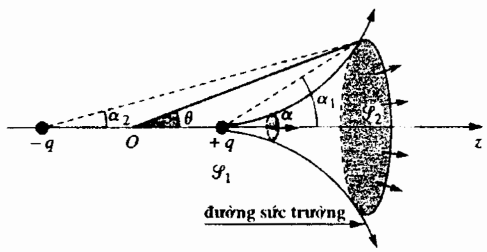


Phân bố tương đương có được khi $\sigma_0=\lim(\rho O_1O_2)$ khi O_1O_2 tiến tới không, và đồng thời ρ tiến tới vô cùng (X. bài tập 8 chương 1).

Các kết quả của bài tập chỉ rõ trường ở trong lỗ hổng bằng :

$$\vec{E}(M)=-\frac{\rho\overrightarrow{O_1O_2}}{3\varepsilon_0}=-\frac{\sigma_0\vec{e}_x}{3\varepsilon_0}$$

11



- Thông lượng của trường được bảo toàn khi không có điện tích.

Tập hợp các đường sức trường là tròn xoay xung quanh trục (Oz). Cho một ống trường sinh ra bằng sự quay của một đường sức trường xung quanh trục (Oz). Thông lượng của trường là giống nhau qua các tiết diện $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ của ống chừng nào trong đoạn ống trường giữa các tiết diện này không có điện tích.

- Ta hãy viết sự bảo toàn thông lượng của trường gửi qua ống trường này.

Thông lượng của trường tĩnh điện $\vec{E}$ tạo ra bởi một điện tích điểm q qua một diện tích $\mathcal{S}$ bất kỳ cho bởi $\Phi=\dfrac{q\Omega}{\varepsilon_0}$. Ω biểu thị góc đặc dưới đó ta nhìn diện tích S từ điện tích q.

Vậy thông lượng của $\vec{E}$ do hai điện tích -q và +q gửi qua diện tích $\mathcal{S}$ viết là:

$$\Phi=\frac{q[2\pi(1-\cos\alpha_1)-2\pi(1-\cos\alpha_2)]}{\varepsilon_0}\quad(\Omega=2\pi(1-\cos\alpha))$$

hay là : $\Phi=\dfrac{q2\pi(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)}{\varepsilon_0}$

từ đó có phương trình $\cos\alpha_2-\cos\alpha_1=cte$. (Chú ý rằng phương trình này gần như phương trình $\sum_{i=1}^{N}q_i\cos\theta_i=\text{cte}$ đã thu được trong bài tập 11 chương 2 mà không dùng định lí GAUSS.)

Với r >> a, α_1 và α_2 hầu như bằng nhau :

$\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)\sin\theta = \Delta\alpha\sin\theta$ và $r\Delta\alpha = a\sin\theta$,

dẫn tới $r^2\sin\theta = cte$.

• Phương pháp khác

Với r >> a, ta có :

$$\cos\alpha_1 = \frac{\left(z-\dfrac{a}{2}\right)}{\left[r^2 - ar\cos\theta + \dfrac{a^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}}} \approx \left(\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{a}{2z}+\frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

Và : $$\cos\alpha_2 = \frac{\left(z+\dfrac{a}{2}\right)}{\left[r^2 + ar\cos\theta + \dfrac{a^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}}} \approx \left(\frac{z}{r}\right)\left(1+\frac{a}{2z}-\frac{a\cos\theta}{2r}\right),$$

từ đó, phương trình gần đúng của đường sức trường là :

$\left(\frac{z}{r}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{\cos\theta}{r}\right) = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{r}\right) = \frac{\sin^2\theta}{r} = cte$ *hay là :* $r = r_0\sin^2\theta$

12 *Trường tĩnh điện tạo bởi phân bố điện tích này là :*

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2}{ar}+\frac{2}{a^2}\right)e^{\frac{-2r}{a}}\vec{e}_r.$$

Áp dụng định lí Gauss cho quả cầu bán kính r, tâm O :

$$Q(r) = \varepsilon_0\oiint_{\text{cầu}}\vec{E}.\vec{dS} = \varepsilon_0 4\pi r^2(\vec{E}.\vec{e}_r) = q\left(1+\frac{2r}{a}+\frac{2r^2}{a^2}\right)e^{-\frac{2r}{a}}$$

Sự phân bố điện tích có tính đối xứng cầu xung quanh điểm O. Điện tích nằm giữa hai quả cầu tâm O và có bán kính r và r + dr bằng $4\pi r^2\rho(r)dr$ *đồng nhất với* $Q(r+dr) - Q(r) = \left[\frac{dQ(r)}{dr}\right]dr$, *vậy :*

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ(r)}{dr} = -\frac{q}{a^3}e^{-\frac{2r}{a}}$$

Mật độ điện tích này luôn luôn âm, mặc dầu điện tích toàn phần của phân bố là $Q(r\to\infty) = 0$. *Tuy vậy, ta không được quên rằng điểm kì dị của thế tại gốc, ở đó nó xử sự gần như thế của một điện tích điểm q đặt tại O :* $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. *Ta có* $Q(r\to 0) = q$, *điều này chứng tỏ đúng là sự có mặt của điện tích dương q tại O được bao quanh bởi một quầng điện tích âm có mật độ khối* $\rho(r)$, *có điện tích toàn bộ* $-q$. *Năng lượng liên kết là năng lượng cần cung cấp để tách điện tích +q khỏi đám mây có điện tích âm* $-q$, *bằng cách đưa nó từ điểm O ra vô cùng. Năng lượng iôn hóa này bằng* $q(V_-(\infty) - V_-(0)) = -qV_-(0)$, *trong đó* V_- *là thế tạo ra bởi một mình đám mây âm tại O, bằng* $V_-(0) = \lim_{r\to 0}\left(V(r) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. *Do đó* $\mathscr{E}_{\text{liên kết}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

13 *Trường tĩnh điện suy ra từ thế V(r) là :*

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r = E(r)\vec{e}_r$$

Bằng cách áp dụng định lí GAUSS cho miền nằm giữa hai quả cầu gần nhau, chứa điện tích $dq = 4\pi r^2 dr.\rho(r) = 4\pi r^2 dr.q[n_+(r) - n_-(r)]$, *ta thu được :*

$$\frac{dq}{\varepsilon_0} = 4\pi(r+dr)^2E(r+dr) - 4\pi r^2E(r) = 4\pi\frac{d(r^2E(r))}{dr}.dr$$

$$= -4\pi\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right)dr$$

Vậy phương trình nghiệm bởi thế là :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \frac{q[n_+(r) - n_-(r)]}{\varepsilon_0}$$

hay là : $$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) = r^2\frac{2qn_0}{\varepsilon_0}sh\left(\frac{qV}{kT}\right)$$

Với qV << kT, phương trình tuyến tính hóa nghiệm bởi F(r) = rV(r) là

$F'' = \left(\frac{2n_0q^2}{\varepsilon_0 kT}\right)F$ *nghĩa là* $F(r) = cte\,e^{-\frac{r}{L_D}}$, *với* $L_D = \left[\frac{\varepsilon_0 kT}{2n_0q^2}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Ở lân cận điện tích q, khi r tiến tới không, thế phải tương đương với thế tạo ra bởi một điện tích điểm q tại O, điều này cố định giá trị của hằng số và cuối cùng ta thu được $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-\frac{r}{L_D}}$

Với r nhỏ hơn L_D, *thế khác ít với thế tạo ra bởi một mình điện tích q, nhưng nó giảm rất nhanh ở bên ngoài khoảng cách đặc trưng (như vậy, các điện tích khác có một hiệu ứng màn chắn). Bằng số thì chiều dài DEBYE bằng* $L_D = 1{,}4$ *cm. Ta nhận thấy nó rất lớn hơn khoảng cách vi mô trung bình ngăn cách hai hạt lân cận, vào cỡ* $n_0^{-\frac{1}{3}} = 0{,}01$ *cm. Hiệu ứng cục bộ nghiên cứu ở đây biểu hiện ra ở một thang đủ lớn trước thang đặc trưng vi mô để cho phép ta đưa một nghiên cứu được đơn giản hóa nhờ vào một mô hình môi trường liên tục (mô tả đặc tính của các điện tích bằng các mật độ hạt).*

14 • *Trường hợp a*

Lưu số của trường này là bảo toàn (bằng không trên mọi đường cong khép kín). Đó là một điện trường đều $\vec{E}_0 = E_0.\vec{e}_x$. *Thế mà nó dẫn xuất bằng* $-E_0x$.

Thông lượng của trường qua mọi mặt kín đều bằng không : không có các điện tích tạo ra trường này trong miền đã mô tả, và thông lượng của nó được bảo toàn.

• Trường hợp b

Lưu số của trường này là bảo toàn. Các đường sức trường lại thẳng nhưng tương ứng với một trường không đều. Thế mà nó dẫn xuất cho bởi :

$$V(x) = V(O) - \int_0^x E(x)dx$$

Thông lượng của trường gửi qua một hình hộp chữ nhật có thể tích $d\tau = dxdydz$ bằng $dydz[E(x+dx) - E(x)] = dxdydz\dfrac{dE(x)}{dx}$

Trong miền đã miêu tả, có các điện tích phân bố với mật độ :

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{dE(x)}{dx}$$

• Trường hợp c

Nếu hàm $E(r)$ không liên tục trên một mặt trụ, thì trên mặt gián đoạn này, có một phân bố điện tích có mật độ điện mặt σ sao cho:

$$\sigma_{(r)} = \varepsilon_0(E_{r+} - E_{r-})$$

• *Trường hợp d và e*

Trong cả hai trường hợp, lưu số của trường trên một vòng tròn tâm O sẽ khác không. Vậy lưu số không bảo toàn. Đây không phải là một trường có bản chất tĩnh điện. Ta sẽ thấy trong các chương tiếp theo rằng trường có bản chất từ tĩnh trong trường hợp d.

Trường hợp e mô tả sự chồng chất của hai trường : một có bản chất tĩnh điện, còn một có bản chất từ tĩnh.

5

LƯỠNG CỰC TĨNH ĐIỆN

Mở đầu

MỤC TIÊU

- Mô hình của lưỡng cực.
- Trường và thế lưỡng cực.
- Các tác dụng của trường lên một lưỡng cực.

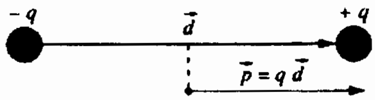
ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Trường tĩnh điện
- Thế tĩnh điện

Các nguyên tử, phân tử và các môi trường vật chất đều trung hòa điện.
Đôi khi, tâm tỉ cự của các điện tích dương và tâm tỉ cự của các điện tích âm xuất hiện lệch nhau.
Khi đó, ta nói thực thể đang quan sát, môi trường đang nghiên cứu đã bị phân cực.

Các tính chất điện của một thực thể phân cực có thể được mô tả ở phép gần đúng cấp một nhờ một mô hình sơ đẳng : nhóm đôi điện tích.
Còn các tính chất của môi trường phân cực sẽ được mô tả dựa vào sự phân bố của các nhóm đôi vi mô (trong năm thứ hai).

1 Mô hình của lưỡng cực



Hình 1. *Nhóm đôi điện tích.*

1.1. Mômen lưỡng cực

1.1.1. Mômen lưỡng cực của một phân bố điện tích về toàn bộ trung hòa

Ta hãy tách phân bố $\mathcal{D}$ thành các điện tích dương mà tổng điện tích là +q và các điện tích âm mà tổng điện tích là $-q$, q giả sử khác không

Ta có thể xác định A^+ là tâm tỉ cự của các điện tích dương của $\mathcal{D}$, và A^- là tâm tỉ cự của các điện tích âm của $\mathcal{D}$. Khi đó mômen lưỡng cực của phân bố được xác định bởi :

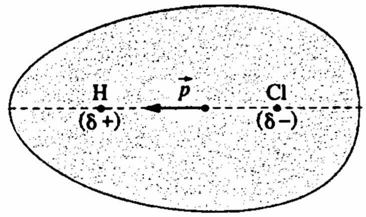
$$\vec{p} = q\overrightarrow{A^-A^+}$$

1.1.2. Nhóm đôi các điện tích

Mô hình biểu diễn một lưỡng cực đơn giản nhất là một nhóm đôi điện tích trái dấu và nằm cách nhau một khoảng, kí hiệu d (*hình* 1).

Một vật không mang điện nhưng bị phân cực tạo ra một thế và một trường (ở phép gần đúng cấp một) tương tự như thế và trường của một nhóm đôi điện tích có mômen lưỡng cực $\vec{p}$ khác không ($q > 0$) :

$$\vec{p} = q\vec{d}$$



Hình 2. *Phân tử lưỡng nguyên tử.*

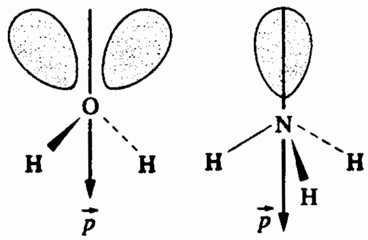
1.2. Các vật có cực

1.2.1. Các phân tử có cực

Các phân tử này lúc bình thường, các điện tích đã tách nhau.

Một phân tử lưỡng nguyên tử như hyđro clorua HCl có một *liên kết* có cực (*hình* 2). Đám mây êlectrôn của nó không đối xứng, các êlectrôn nằm gần nguyên tử clo nhiều hơn.

Tương tự, lại có những cấu trúc phân tử phức tạp hơn biểu thị một sự phân cực thường xuyên : phân tử nước H_2O có một mômen lưỡng cực do tính có cực của các liên kết OH và sự tồn tại hai nhóm đôi tự do trên nguyên tử ôxi sinh ra ; đối với phân tử amoniac NH_3 cũng vậy, phân tử này chỉ có một nhóm đôi tự do duy nhất trên nguyên tử nitơ (*hình* 3).



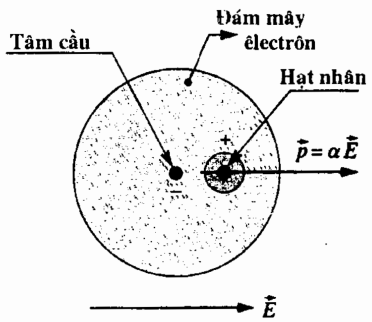
Hình 3. *Mômen lưỡng cực của các phân tử* H_2O *và* NH_3.

1.2.2. Phân cực do tác dụng của trường ngoài

Một nguyên tử hay một phân tử cũng có thể bị phân cực do tác dụng của trường đặt vào nó : thực vậy, trường này "kéo" các điện tích dương và âm ngược chiều nhau. Các đám mây êlectrôn bị biến dạng bởi trường, các chiều dài và các góc của các liên kết hóa học có thể bị thay đổi. Nói chung các thay đổi này thường yếu, làm xuất hiện hoặc thay đổi tính có cực (*hình* 4). Ta nói đó là các nguyên tử hay phân tử có thể phân cực.

<u>*Chú ý :*</u>

Các nguyên tử, các iôn, các phân tử (lúc bình thường có phân cực hay không) và tổng quát hơn, các môi trường vật chất đều có khả năng bị trường tác dụng làm phân cực. Vì vậy ta có thể quan sát thấy nhiều hiện tượng phân cực khác trong vật chất.



Hình 4. *Sự phân cực của một nguyên tử đặt trong trường* $\vec{E}$ *:* $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, *với* $\alpha > 0$.

• *Các iôn của một tinh thể iôn bị dịch chuyển so với vị trí lúc bình thường dưới tác dụng của trường (theo chiều ngược lại đối với các điện tích trái dấu), làm xuất hiện các mômen lưỡng cực mới. Hiện tượng này gọi là sự phân cực iôn.*

• *Ta cũng sẽ thấy rằng một lưỡng cực luôn có khuynh hướng định hướng song song với trường đặt vào nó. Vì vậy, một vật liệu có chứa các thực thể có cực, có khả năng định hướng, có thể bị phân cực khi có một trường đặt vào nó. (một sự dua tranh giữa tác dụng định hướng của trường ngoài và khuynh hướng làm hỗn độn của chuyển động nhiệt xảy ra). Khi đó, ta có sự phân cực định hướng.*

H_2O	NH_3	HCl
1,85 D	1,47 D	1,08 D

Hình 5. *Mô men của các phân tử có cực.*

▶ **Để luyện tập : BT. 2**

1.2.3. Đơn vị đo mômen lưỡng cực

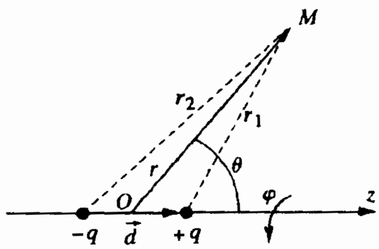
Mômen lưỡng cực sẽ có cỡ 1 trong một hệ đơn vị thích hợp, hệ này chắc chắn không phải là "culông mét". Cỡ lớn của điện tích dịch chuyển này là e, ở phạm vi nguyên tử, kích thước tự nhiên là 10^{-10} m = 0,1nm. Đơn vị được chọn để biểu thị mômen lưỡng cực là **đơbai** (*debye* – kí hiệu là *D*) :

$$1\text{D} = \frac{1}{3}.10^{-29}\ \text{C.m}$$

Trên *hình* 5 đã cho biết một vài mômen của các phân tử lưỡng cực.

2 Thế và trường tạo ra bởi một lưỡng cực

Ta sẽ giới hạn ở phép tính và sự biểu thị các đại lượng này đối với mô hình nhóm đôi. Ta sẽ thấy trong bài tập, các phép tính đơn giản này cũng có thể nằm trong một sự khai triển tổng quát hơn, đối với một số phân bố điện tích bằng không hay khác không.



Hình 6

2.1. Phép gần đúng lưỡng cực

Nếu ta quan tâm tới các hiệu ứng gây ra bởi lưỡng cực, thì phép gần đúng lưỡng cực là giả thiết khoảng cách tới điểm ta quan sát trường tạo ra bởi lưỡng cực là rất lớn trước kích thước của lưỡng cực : $r >> d$.

Trong các điều kiện đó, ta sẽ tiến hành các phép tính bằng cách chỉ xác định các số hạng không tầm thường có bậc thấp nhất theo $\left(\frac{d}{r}\right)$.

2.2. Thế của lưỡng cực

Phân bố đang xét (nhóm đôi) là hữu hạn, ta có thể chọn thế bằng không ở vô cùng và với các kí hiệu của hình 6, thế có biểu thức :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Sử dụng các tọa độ cầu trục (Oz) chỉ rõ trên *hình* 6, ta có :

$$r_1 = \left[r^2 - dr\cos\theta + \frac{d^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ và } r_2 = \left[r^2 + dr\cos\theta + \frac{d^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Trong phép gần đúng lưỡng cực, ta hãy viết thế ở bậc $\frac{d}{r}^{(*)}$:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left((1 + \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\theta + \dots) - (1 - \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\theta + \dots)\right)$$

Chú ý :

Lưu ý rằng đối với mô hình lưỡng cực này, số hạng thứ hai khác không tỉ lệ với $\frac{1}{r^4}^{(**)}$.

Khai triển có giới hạn của $(1+x)^\alpha$

Với $|x| << 1$, *ta có thể viết :*

$(*)\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ *ở bậc 1*

$(**)\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$

ở bậc 3.

Điện tích toàn phần của hệ này bằng không, số hạng theo $\frac{1}{r}$ của thế triệt tiêu ; số hạng khác không đầu tiên của khai triển có giới hạn tỉ lệ với $\frac{d}{r^2}$.

Nó giảm rất nhanh ở khoảng cách lớn so với thế của chỉ một điện tích :

$$V(M) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\overrightarrow{OM}}{OM^3}.$$

Bằng cách sử dụng biểu thức của mômen lưỡng cực, *thế tĩnh điện* tạo ra bởi một lưỡng cực đặt tại điểm *O*, theo bậc thấp nhất của lũy thừa của $\frac{d}{r}$, là : $V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\overrightarrow{OM}}{OM^3}$

Do tính đối xứng tròn xoay của phân bố xung quanh trục (Oz), nên thế không phụ thuộc góc φ.

Chú ý :

Đối với một phân bố điện tích bất kì tồn tại trong một miền nhỏ của không gian lân cận một điểm P, ta hãy khảo sát thế do phân bố này tạo ra tại M (PM là lớn hơn kích thước của miền có điện tích).

- *Nếu điện tích toàn phần q của phân bố này khác không, thì số hạng trội nhất của thế là* $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{PM}$. *Tức một thế theo* $\frac{1}{PM}$.
- *Nếu điện tích q bằng không, số hạng trên không tồn tại : ta cần quan tâm đến mômen lưỡng cực* $\vec{p}$ *của tập hợp các điện tích này. Nếu* $\vec{p}$ *khác không, số hạng trội nhất của thế là* $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\overrightarrow{PM}}{PM^3}$. *Tức một thế theo* $\frac{1}{PM^2}$.
- *Nếu điện tích q và mômen lưỡng cực* $\vec{p}$ *đều bằng không, các số hạng trên không tồn tại : khi đó, ta nên quan tâm tới một đặc tính khác của phân bố điện tích này, nó sẽ cho ta một thế theo* $\frac{1}{PM^3}$.

▶ **Để luyện tập : BT. 4.**

2.3. Trường của lưỡng cực

2.3.1. Biểu thức trong tọa độ cầu

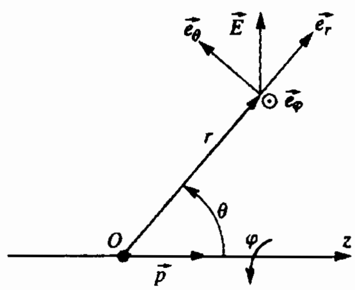
Sự khai triển biểu thức $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{e}_1}{r_1^2} - \frac{\vec{e}_2}{r_2^2}\right)$ là tinh tế và ta xác định trường bằng cách tính građien của thế vừa tìm được. Trong tọa độ cầu :

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\sin\theta}{r^3} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

Mặt phẳng chứa OM và trục (Oz) là một mặt phẳng đối xứng của phân bố, nên đương nhiên tìm được $\vec{E}.\vec{e}_\varphi = 0$ (*hình* 7).

Biểu thức của trường của lưỡng cực là :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta.\vec{e}_r + p\sin\theta.\vec{e}_\theta}{r^3}.$$



Hình 7

2.3.2. Biểu thức thuần (intrinsèque)

Mômen lưỡng cực $\vec{p}$ có thể viết là $\vec{p} = p(\cos\theta.\vec{e}_r - \sin\theta.\vec{e}_\theta)$

Ta còn có thể viết trường này dưới dạng thuần (đối với một lưỡng cực tại O, không dựa vào một sự chọn trục đặc biệt nào).

Dưới dạng thuần, trường của lưỡng cực là :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}\right)$$

hay là :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5}\right)$$

Chú ý :

- *Nếu lưỡng cực được đặt tại A, trường của lưỡng cực này tại M cho bởi :*

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}.\overrightarrow{AM})\overrightarrow{AM} - \vec{p}AM^2}{AM^5}\right)$$

- *Trường này rõ ràng giảm rất nhanh hơn với khoảng cách quan sát so với trường của chỉ một điện tích : $\frac{p}{r^3}$ lẽ ra là $\frac{q}{r^2}$.*

Áp dụng 1

Một phép tính trường khác

Hãy tìm lại biểu thức trên của trường bằng một phép tính trực tiếp nhờ sử dụng $\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r}) = \vec{p}$.

Ta viết : $\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\frac{\vec{r}}{r^5}$

sau đó : $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{r^2\vec{p} - 3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r}}{r^5}$

Từ đó rút ra biểu thức của trường của lưỡng cực :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V(\vec{r}),$$

do đó : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}\right)$

▶ **Để luyện tập : BT 5, 6 và 7.**

2.4. Tôpô của E và V

2.4.1. Các mặt đẳng thế

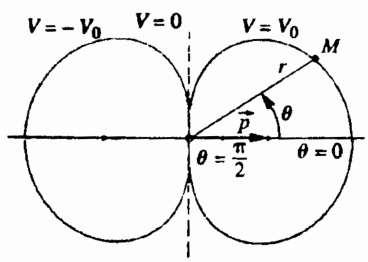
■ **Phương trình**

Thế không phụ thuộc biến số φ, nên các mặt đẳng thế là tròn xoay xung quanh trục (Oz). Như vậy, chỉ cần biểu diễn bằng đồ thị vết của chúng trong mặt phẳng chứa trục (Oz) là đủ

Đẳng thế $V = V_0$ tương ứng với $\frac{\cos\theta}{r^2} = 4\pi\varepsilon_0 V_0 = cte$.

■ **Mô tả định tính**

Dấu của $\cos\theta$ vẫn không đổi trên mặt đẳng thế. Từ bây giờ ta sẽ giả thiết thế V_0 dương, nghĩa là đẳng thế $V = V_0$ nằm trong nửa không gian $z > 0$. Đẳng thế $V = -V_0$ được suy ra từ đó bởi phép đối xứng qua mặt phẳng trung trực của lưỡng cực, mặt này tương ứng với đẳng thế V = 0 (*hình* 8).



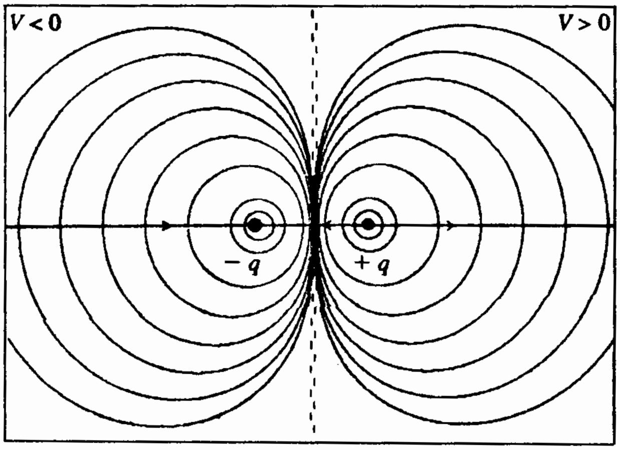
Hình 8. *Các đẳng thế $\pm V_0$ của lưỡng cực.*

Trên mặt này, khoảng cách tới điểm O là cực đại với $\theta = 0$, nghĩa là nằm trên trục (Oz). Ngược lại, khoảng cách này triệt tiêu khi θ tiến tới $\frac{\pi}{2}$. Vậy đẳng thế $V = V_0$ tiếp xúc với mặt phẳng (xOy) tại O.

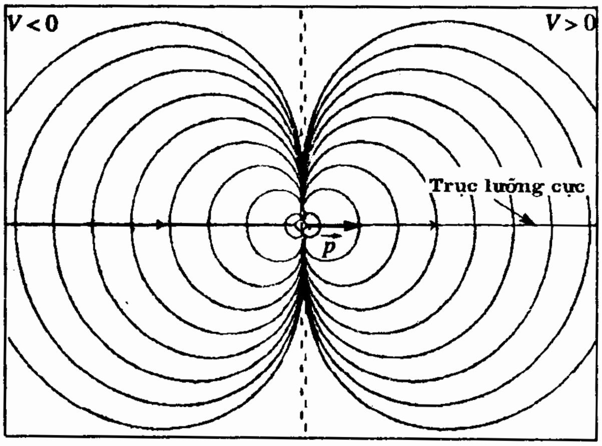
Tuy nhiên, điều ghi nhận cuối cùng này không có thực tế vật lí : ở lân cận điểm gốc, phép gần đúng lưỡng cực không áp dụng được nữa, và đẳng thế $V = V_0$ đi qua điểm "ở đâu đó" giữa điểm O và điện tích $+q$ (*hình* 9).

■ **Biểu diễn**

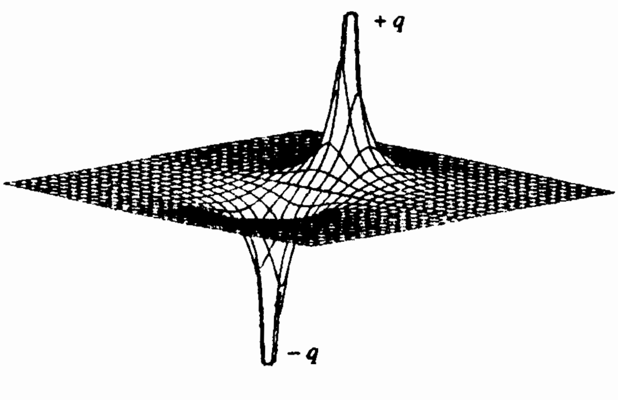
Vết của một vài đẳng thế của hệ hai điện tích trong một mặt phẳng chứa trục (Oz) được biểu diễn trên *hình* 9. *Hình* 10 lấy lại vết này nhờ sử dụng công thức của thế lưỡng cực. Ta nhận thấy hai hình tương tự nhau, chỉ trừ ở lân cận lưỡng cực, phép gần đúng lưỡng cực không còn giá trị : sự khác nhau giữa nhóm đôi điện tích và thực thể lí tưởng xuất hiện rõ nét ở khoảng cách ngắn.



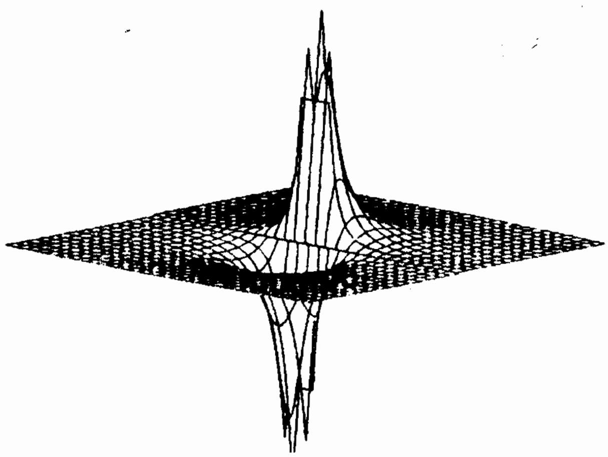
Hình 9. *Đẳng thế của một nhóm đôi* $(-q, +q)$.



Hình 10. *Đẳng thế của một lưỡng cực.*



Hình 11. *Sự thể hiện của thế tạo ra bởi hai điện tích* $-q$ *và* $+q$ *(nét đậm* $V > 0$*, nét nhạt* $V < 0$*).*



Hình 12. *Sự thể hiện của thế của lưỡng cực trong không gian (nét đậm* $V > 0$*, nét nhạt* $V < 0$*).*

2.4.2. Các đường sức trường

■ **Phương trình**

Theo định nghĩa, với một dịch chuyển nguyên tố $d\vec{r}$ dọc theo một đường sức trường, ta sẽ có $d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0}$. Sử dụng các tọa độ cầu của trường và biểu thức $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi$ của một dịch chuyển nguyên tố, ta thu được:

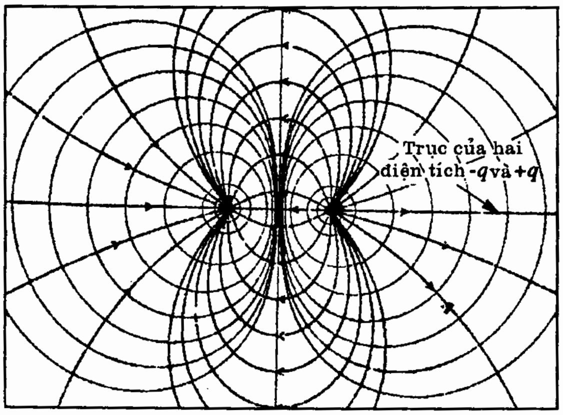
$$\begin{cases} rd\theta.E_\varphi - r\sin\theta\, d\varphi.E_\theta = 0 \\ dr.E_\varphi - r\sin\theta\, d\varphi.E_r = 0 \\ dr.E_\theta - rd\theta.E_r = 0 \end{cases}$$

Ngoài các đường sức trường nằm trên trục (Oz) ($\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$), hai phương trình đầu tiên buộc $\varphi = \text{cte}$: hệ là tròn xoay xung quanh trục, nên *các đường sức đều nằm trong các mặt phẳng đối xứng chứa trục (Oz).*
Phương trình cuối cùng khi đó cho $dr.\sin\theta = 2r\cos\theta d\theta$, sau khi tích phân cho :

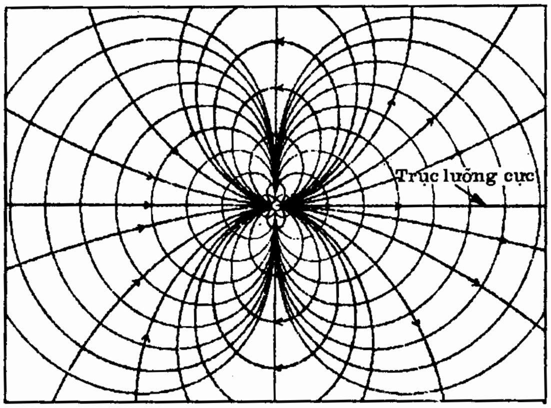
$$r = cte\sin^2\theta\ .$$

■ **Biểu diễn**

Một sự nghiên cứu định tính tương tự như đã đưa ra cho vết các đẳng thế cho phép dự đoán hình dáng của các đường sức trường.
Đối với một hệ hai điện tích $+q$ và $-q$, các đường sức này khi đó có thể được vẽ trong một mặt phẳng $\varphi = \text{cte}$. (*hình* 13), bằng cách chồng chất chúng lên các vết của các mặt đẳng thế vuông góc với chúng và bằng cách sử dụng các kết quả của phép gần đúng lưỡng cực *h*.14. Các sơ đồ vẫn còn tương đương với nhau khi khoảng cách quan sát là lớn trước kích thước của lưỡng cực.



Hình 13. *Các đẳng thế và các đường sức trường của một nhóm đôi.*



Hình 14. *Các đẳng thế và các đường sức trường của một lưỡng cực.*

▶ **Để luyện tập : BT.3.**

3 Tác dụng của trường tĩnh điện lên một lưỡng cực

Giả sử lúc khởi đầu lưỡng cực là cứng, nghĩa là khoảng cách AB cố định và các điện tích không đổi.

Các tác dụng cơ học đặt lên lưỡng cực sẽ được đặc trưng bởi hợp lực $\vec{F}$ của chúng và mômen $\vec{\Gamma}_0$ của chúng đối với một điểm O đã cho.

<u>*Chú ý :*</u>

Nhớ lại là biết mômen tại một điểm và biết hợp lực cho phép tính được mômen tại mọi điểm khác, vì $\vec{\Gamma}_{O'} = \vec{\Gamma}_O + \vec{F} \wedge \overrightarrow{OO'}$.

3.1. Trường đều

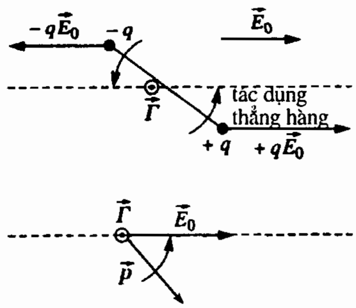
3.1.1. Lực

Các lực tác dụng bởi trường đều lên các điện tích $+q$ và $-q$ là giống nhau, sai kém về dấu. Vì vậy :

Hợp lực tác dụng lên một lưỡng cực đặt trong một trường đều bằng không :

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Vậy lưỡng cực chịu tác dụng của một *ngẫu lực.*



Hình 15.

3.1.2. Mômen

Ví dụ, ta hãy tính mômen này đối với điểm O, điểm giữa của hai điện tích:

$$\vec{\Gamma}_0 = \left(\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge (q\vec{E}_0) + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \wedge (-q\vec{E}_0) = q\vec{d} \wedge \vec{E}_0$$

Đối với một ngẫu lực (hợp lực bằng không), mômen là độc lập đối phép tính. Vậy, tại mọi điểm, nó đều bằng : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$

Quan sát *hình* 15, ta có thể tóm tắt ảnh hưởng của trường tác dụng như sau :

Trong một trường đều, lưỡng cực chịu một ngẫu lực có khuynh hướng làm nó xếp thẳng hàng song song với trường tác dụng, và cùng chiều với trường này.

3.2. Trường hợp trường không đều

3.2.1. Phép tính gần đúng

Trong trường hợp lưỡng cực chịu các tác dụng, thì phép gần đúng lưỡng cực bao gồm giả thiết kích thước d của lưỡng cực là nhỏ hơn các kích thước đặc trưng của các biến thiên của trường tác dụng. Vậy ta sẽ tìm cách xác định các tác dụng của một trường hơi không đồng nhất ở phạm vi lưỡng cực.

3.2.2. Lực

Kí hiệu $\vec{r}$ là vị trí tâm của lưỡng cực. Tổng hợp của các lực tác dụng là :

$$\vec{F} = q\vec{E}\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right) - q\vec{E}\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right).$$

Trong phép gần đúng lưỡng cực, trường biến thiên ít ở phạm vi của lưỡng cực, ta viết :

$$E_x\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right) = E_x(\vec{r}) + \frac{d_x}{2}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{d_y}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{d_z}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= E_x(\vec{r}) + \frac{\vec{d}}{2}.\overrightarrow{grad}\, E_x$$

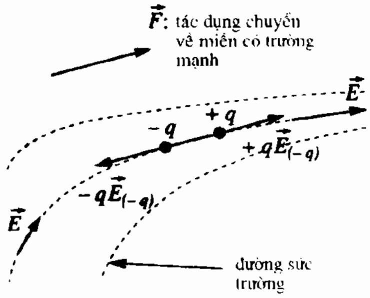
Tương tự, ta sẽ có : $E_x\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right) = E_x(\vec{r}) - \frac{\vec{d}}{2}.\overrightarrow{grad} E_x$

Từ đó suy ra ngay lực : $F_x = q\vec{d}.\overrightarrow{grad}\, E_x = \vec{p}.\overrightarrow{grad}\, E_x$ nghĩa là :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Lực này còn có thể viết một cách tổng quát hơn :

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}\right) E_x \\ \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}\right) E_y \\ \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}\right) E_z \end{bmatrix} = (\vec{p}.\overrightarrow{grad})\vec{E}$$



Hình 16.

Lực mà lưỡng cực chịu, bằng không ở phép gần đúng cấp một, nhưng hoàn toàn không phải vậy nữa nếu ta tính đến sự không đồng nhất của trường ở phạm vi lưỡng cực :

$$\vec{F} = \vec{0} + (\vec{p}.\overrightarrow{grad})\vec{E}(\vec{r}) + ...$$

Một lưỡng cực chịu tác dụng của một trường ngoài hơi không đồng nhất một lực $\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{grad})\vec{E}$.

Ví dụ ta hãy xét một tình huống trong đó lưỡng cực là thẳng hàng, song song và cùng chiều với trường tác dụng, vậy tiếp tuyến với một đường sức trường (*hình* 16). Lực tác dụng là $\vec{F} = q(\vec{E}_{(+q)} - \vec{E}_{(-q)})$, lực này có khuynh hướng kéo lưỡng cực dọc theo đường sức trường theo chiều biên độ của trường tăng. Lưỡng cực tĩnh điện bị hút về phía điện trường mạnh

Chú ý :

Trên hình 16, ở bên ngoài các miền có các điện tích tạo ra trường tác dụng, các đường sức trường xít lại (ống trường "thắt lại") khi biên độ của trường tăng.

Áp dụng 2

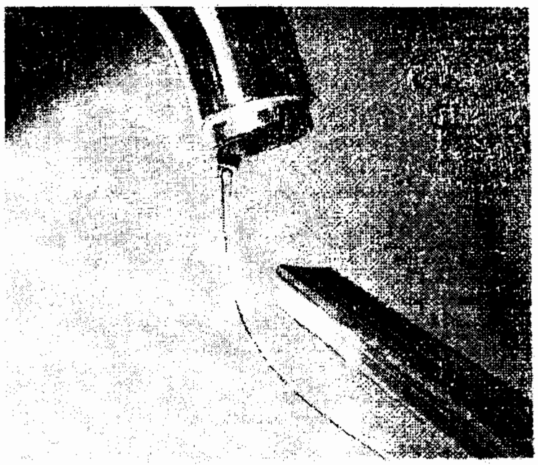
Một thí nghiệm phải giải thích

Một miếng chất dẻo, sau khi cọ xát vào một chiếc khăn khô được đưa lại gần một tia nước chảy từ vòi ra. Kết quả khá li kì được mô tả trên hình 17. Giải thích hiện tượng này như thế nào ?

Miếng chất dẻo đã nhiễm điện, và các điện tích của nó tạo ra một trường tĩnh điện mà cường độ tăng lên khi lại gần vật liệu mang điện

Nước được cấu tạo bởi các phân tử H_2O có cực.

Dưới tác dụng của trường của miếng chất dẻo tích điện, các lưỡng cực này định hướng theo chiều của trường và bị hút về phía miền có điện trường mạnh hơn. Tia nước lệch rõ rệt khỏi đường thẳng đứng để tiến gần lại miếng chất dẻo tích điện.



Hình 17.

▶ **Để luyện tập : BT. 1.**

3.2.3. Mômen

Mômen (nói chung) đã khác không trong phép gần đúng của một điện trường đều ở phạm vi của lưỡng cực. Vì lực thu được ở đây là một số hạng hiệu chính nên biểu thức của mômen đã thu được sẽ ít bị nhiễu loạn bởi phần không đồng nhất của trường. Vậy ta có thể viết $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 + ...$

Mômen của một lưỡng cực, chịu tác dụng của một trường ngoài $\vec{E}$ coi là đều, bằng $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

Chú ý :

Tại điểm O, mômen có thể được khai triển theo các lũy thừa của d. Số hạng trên đây là ở cấp 1. Tại O, số hạng cấp 2 vẫn bằng không khi trường không đều.

Dựa vào các kết quả trên, ta có thể khẳng định :

Trong một trường không đều, lưỡng cực chủ yếu chịu một mômen làm cho lưỡng cực sắp xếp thẳng hàng song song và cùng chiều với trường tác dụng. Một khi đã thẳng hàng, lưỡng cực còn chịu một lực làm cho nó dịch chuyển về phía miền có điện trường mạnh.

3.3. Trường hợp lưỡng cực không cứng

Nếu lưỡng cực không cứng, thì các đặc trưng của chúng phụ thuộc vào trường đặt lên lưỡng cực. Dưới tác dụng của trường, các phân bố điện tích (ví dụ của nguyên tử hoặc phân tử) bị biến đổi. Mômen lưỡng cực phụ thuộc vào trường tĩnh điện.

Một khi trường đã thiết lập thì các đặc trưng của nó cũng được xác định ngay ; và vì vậy mômen lưỡng cực cũng được biết. Các tính toán ở trên vẫn được áp dụng, chỉ cần coi $\vec{p}$ là giá trị của mômen lưỡng cực đối với sự có mặt của trường $\vec{p}(\vec{E})$. Để tính lực, ta có thể lập luận với mômen lưỡng cực này như lưỡng cực là cứng.

Các công thức ở trên vẫn áp dụng được, và như thế ta sẽ có thể viết biểu thức của lực tác dụng lên lưỡng cực này là :

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z ,$$

với $F_x = \vec{p}(\vec{E}).\overrightarrow{\text{grad}}(E_x)$, $F_y = \vec{p}(\vec{E}).\overrightarrow{\text{grad}}(E_y)$, và $F_z = \vec{p}(\vec{E}).\overrightarrow{\text{grad}}(E_z)$

Chú ý :

Vật chất, dưới tác dụng của điện trường ngoài, nói chung sẽ bị phân cực (mật độ khối các lưỡng cực) cùng chiều với trường tác dụng, sao cho nó chuyển về phía miền có trường mạnh.

4 Thế năng tương tác

4.1. Thao tác viên dịch chuyển một lưỡng cực trong một trường

Ta tưởng tượng một thao tác viên từ từ đưa một lưỡng cực từ vô cùng, ở đó trường tác dụng bằng không, về một vị trí cuối cùng ở đó có một điện trường $\vec{E}$ đã biết, có thế V liên kết với nó (lấy thế bằng không ở vô cùng).

Một thao tác tương tự như thế đã được xét ở chương 3, trong đó, thao tác viên đưa một điện tích q về thế V và đã cung cấp một công $W_{\text{op}} = qV$.

Như vậy công cung cấp trong thao tác xem xét ở đây, mà hai điện tích $+q$ và $-q$ được đưa từ vô cùng về, phải bằng :

$$W_{op} = qV\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right) - qV\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right)$$

Tuy vậy, ta đã quên một điểm quan trọng : chính hai điện tích cũng tương tác với nhau, đến mức năng lượng tương tác, nghĩa là chính năng lượng riêng của lưỡng cực cũng có khả năng thay đổi. Như vậy kết quả trên chỉ đúng cho một lưỡng cực "cứng" : khoảng cách d giữa hai điện tích của nhóm đôi giữ không đổi, nghĩa là $\|\vec{p}\| = cte$.

Công trên đây, có giá trị cho sự dịch chuyển một lưỡng cực mà năng lượng "riêng" giữ không đổi, có thể được đơn giản hóa nếu sử dụng phép gần đúng lưỡng cực $W_{\text{op}} = q\vec{d}.\overrightarrow{\text{grad}}\, V(r)$ và bằng $W_{\text{op}} = -\vec{p}.\vec{E}$.

4.2. Thế năng tương tác giữa một lưỡng cực cứng và một trường tác dụng

Ta nhận thấy kết quả trên phụ thuộc vào vị trí cuối cùng của lưỡng cực, mà không phụ thuộc vào con đường đã theo để đưa lưỡng cực từ vô cùng về, và cho phép ta định nghĩa.

Thế năng tương tác giữa lưỡng cực cứng và trường tác dụng là :

$$\mathscr{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}.$$

Công tương ứng với một dịch chuyển nguyên tố của lưỡng cực cứng là :

$$dW_{op} = d\mathscr{E}_p = d(-\vec{p}.\vec{E}) = -\vec{p}.\text{d}\vec{E} - \text{d}\,\vec{p}.\vec{E}.$$

Chú ý :

Lưỡng cực cứng có nghĩa $\|\vec{p}\| = cte$. *Ta sẽ chỉ có* $\vec{p} = \overrightarrow{\text{cte}}$ *nếu lưỡng cực chịu một phép tịnh tiến.*

4.3. Lực và mômen suy ra từ thế năng tương tác đối với một lưỡng cực cứng

Phép tịnh tiến nguyên tố và lực tác dụng lên một lưỡng cực cứng.

Cho lưỡng cực chịu một phép tịnh tiến $\overrightarrow{dr}$ bằng cách bù trừ ở mọi lúc lực do trường tác dụng lên lưỡng cực, thao tác viên cung công :

$\delta W_{\text{op}} = -\vec{F}.d\vec{r}$, bằng với $d\mathscr{E}_p = -\vec{p}.\text{d}\vec{E}$, vì $\vec{p} = \overrightarrow{\text{cte}}$ trong khi dịch chuyển.

Xét một dịch chuyển nguyên tố $\text{d}\vec{r} = -\text{d}x_{x_i}.\vec{e}_{x_i}$ (với $x_i = x, y$ hay z), trong tọa độ Descartes, ta thu được :

$$F_{x_i} = \vec{p}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_i}$$

Chú ý :

Trong trường hợp lưỡng cực $\vec{p}$ *song song với trường ngoài* $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$, *nhờ biểu thức trên, ta tìm lại được ngay :*

$$F_x = qd\frac{\partial E(x)}{\partial x} \text{ và } F_y = F_z = 0$$

Một thao tác tương tự như thế đã được xét ở chương 3, trong đó, thao tác viên đưa một điện tích q về thế V và đã cung cấp một công $W_{op} = qV$.

Như vậy công cung cấp trong thao tác xem xét ở đây, mà hai điện tích $+q$ và $-q$ được đưa từ vô cùng về, phải bằng :

$$W_{op} = qV\left(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right)-qV\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)$$

Tuy vậy, ta đã quên một điểm quan trọng : chính hai điện tích cũng tương tác với nhau, đến mức năng lượng tương tác, nghĩa là chính năng lượng riêng của lưỡng cực cũng có khả năng thay đổi. Như vậy kết quả trên chỉ đúng cho một lưỡng cực "cứng" : khoảng cách d giữa hai điện tích của nhóm đôi giữ không đổi, nghĩa là $\|\vec{p}\| = cte$.

Công trên đây, có giá trị cho sự dịch chuyển một lưỡng cực mà năng lượng "riêng" giữ không đổi, có thể được đơn giản hóa nếu sử dụng phép gần đúng lưỡng cực $W_{op} = q\vec{d}.\overrightarrow{\text{grad}}\,V(r)$ và bằng $W_{op} = -\vec{p}.\vec{E}$.

4.2. Thế năng tương tác giữa một lưỡng cực cứng và một trường tác dụng

Ta nhận thấy kết quả trên phụ thuộc vào vị trí cuối cùng của lưỡng cực, mà không phụ thuộc vào con đường đã theo để đưa lưỡng cực từ vô cùng về, và cho phép ta định nghĩa.

Thế năng tương tác giữa lưỡng cực cứng và trường tác dụng là :

$$\mathscr{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}.$$

Công tương ứng với một dịch chuyển nguyên tố của lưỡng cực cứng là :

$$dW_{op} = d\mathscr{E}_p = d(-\vec{p}.\vec{E}) = -\vec{p}.d\vec{E} - d\,\vec{p}.\vec{E}.$$

Chú ý :

Lưỡng cực cứng có nghĩa $\|\vec{p}\| = cte$. *Ta sẽ chỉ có* $\vec{p} = \overrightarrow{cte}$ *nếu lưỡng cực chịu một phép tịnh tiến.*

4.3. Lực và mômen suy ra từ thế năng tương tác đối với một lưỡng cực cứng

Phép tịnh tiến nguyên tố và lực tác dụng lên một lưỡng cực cứng.

Cho lưỡng cực chịu một phép tịnh tiến $\overrightarrow{dr}$ bằng cách bù trừ ở mọi lúc lực do trường tác dụng lên lưỡng cực, thao tác viên cung công :

$\delta W_{op} = -\vec{F}.d\vec{r}$, bằng với $d\mathscr{E}_p = -\vec{p}.d\vec{E}$, vì $\vec{p} = \overrightarrow{cte}$ trong khi dịch chuyển.

Xét một dịch chuyển nguyên tố $d\vec{r} = -dx_{x_i}.\vec{e}_{x_i}$ (với $x_i = x$, y hay z), trong tọa độ Descartes, ta thu được :

$$F_{x_i} = \vec{p}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i}$$

Chú ý :

Trong trường hợp lưỡng cực $\vec{p}$ *song song với trường ngoài* $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$, *nhờ biểu thức trên, ta tìm lại được ngay :*

$$F_x = qd\frac{\partial E(x)}{\partial x} \text{ và } F_y = F_z = 0$$

3.2.3. Mômen

Mômen (nói chung) đã khác không trong phép gần đúng của một điện trường đều ở phạm vi của lưỡng cực. Vì lực thu được ở đây là một số hạng hiệu chính nên biểu thức của mômen đã thu được sẽ ít bị nhiễu loạn bởi phần không đồng nhất của trường. Vậy ta có thể viết $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 + \ldots$

Mômen của một lưỡng cực, chịu tác dụng của một trường ngoài $\vec{E}$ coi là đều, bằng $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

<u>*Chú ý :*</u>

Tại điểm O, mômen có thể được khai triển theo các lũy thừa của d. Số hạng trên đây là ở cấp 1. Tại O, số hạng cấp 2 vẫn bằng không khi trường không đều.

Dựa vào các kết quả trên, ta có thể khẳng định :

Trong một trường không đều, lưỡng cực chủ yếu chịu một mômen làm cho lưỡng cực sắp xếp thẳng hàng song song và cùng chiều với trường tác dụng. Một khi đã thẳng hàng, lưỡng cực còn chịu một lực làm cho nó dịch chuyển về phía miền có điện trường mạnh.

3.3. Trường hợp lưỡng cực không cứng

Nếu lưỡng cực không cứng, thì các đặc trưng của chúng phụ thuộc vào trường đặt lên lưỡng cực. Dưới tác dụng của trường, các phân bố điện tích (ví dụ của nguyên tử hoặc phân tử) bị biến đổi. Mômen lưỡng cực phụ thuộc vào trường tĩnh điện.

Một khi trường đã thiết lập thì các đặc trưng của nó cũng được xác định ngay ; và vì vậy mômen lưỡng cực cũng được biết. Các tính toán ở trên vẫn được áp dụng, chỉ cần coi $\vec{p}$ là giá trị của mômen lưỡng cực đối với sự có mặt của trường $\vec{p}(\vec{E})$. Để tính lực, ta có thể lập luận với mômen lưỡng cực này như lưỡng cực là cứng.

Các công thức ở trên vẫn áp dụng được, và như thế ta sẽ có thể viết biểu thức của lực tác dụng lên lưỡng cực này là :

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z ,$$

với $F_x = \vec{p}(\vec{E}).\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_x)$, $F_y = \vec{p}(\vec{E}).\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_y)$, và $F_z = \vec{p}(\vec{E}).\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_z)$

<u>*Chú ý :*</u>

Vật chất, dưới tác dụng của điện trường ngoài, nói chung sẽ bị phân cực (mật độ khối các lưỡng cực) cùng chiều với trường tác dụng, sao cho nó chuyển về phía miền có trường mạnh.

4 Thế năng tương tác

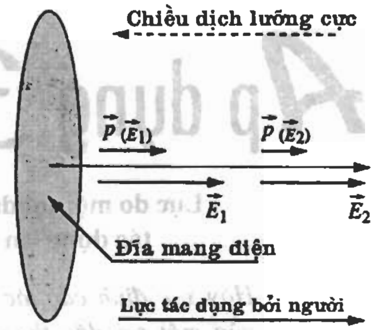
4.1. Thao tác viên dịch chuyển một lưỡng cực trong một trường

Ta tưởng tượng một thao tác viên từ từ đưa một lưỡng cực từ vô cùng, ở đó trường tác dụng bằng không, về một vị trí cuối cùng ở đó có một điện trường $\vec{E}$ đã biết, có thế V liên kết với nó (lấy thế bằng không ở vô cùng).

Sự tương đương của các biểu thức khác nhau của lực đã thiết lập sẽ được nghiên cứu trong bài tập 10.

Chú ý rằng đối với lưỡng cực cứng, ta có thể viết trực tiếp biểu thức của lực từ thế năng tương tác dưới dạng :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \mathscr{E}_p \Big|_{\vec{p}=\overrightarrow{\text{cte}}} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p}.\vec{E})_{\vec{p}=\overrightarrow{\text{cte}}}$$



Hình 18

4.4. Trường hợp lưỡng cực không cứng

Nếu lưỡng cực không cứng thì các đặc trưng của nó phụ thuộc vào trường tác dụng $\vec{E}$ lên lưỡng cực, nhưng mômen lưỡng cực đã biết (*x*.§3.3). Đối với phép tính lực, ta có thể lập luận với một lưỡng cực cứng có mômen $\vec{p}_o = \vec{p}(\vec{E})$:

$$F_x = \vec{p}_0.\overrightarrow{\text{grad}}\,E_x = \vec{p}(\vec{E}).\overrightarrow{\text{grad}}\,E_x$$

và cho các công thức tương tự đối với F_y và F_z.

Ta hãy xét trường $\vec{E}$ tạo ra bởi một đĩa mang điện tại một điểm trên trục của đĩa (Oz) (*hình* 18). Một thao tác viên dịch chuyển một lưỡng cực trên trục này. Ta hãy khảo sát công của thao tác viên này khi dịch chuyển lưỡng cực từ vô cùng (ở đó trường bằng không) về một điểm M ở đó trường bằng $\vec{E}$, với giả thiết mômen lưỡng cực có dạng $\vec{p}(\vec{E}) = \alpha\vec{E}$ (hệ thức tuyến tính giữa $\vec{p}$ và $\vec{E}$).

Lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác dụng lên lưỡng cực khi đó viết là :

$$\vec{F} = F_z\vec{e}_z = \alpha E_z\frac{dEz}{dz}\vec{e}_z = \frac{\alpha}{2}\frac{dE_z^{\,2}}{dz}\vec{e}_z .$$

Vì thao tác viên tác dụng một lực đối lại, nên công của nó cho bởi :

$$W_{0p} = \int_{\infty}^{z} -\frac{\alpha}{2}\frac{dE_z^{\,2}}{dz}dz = -\frac{\alpha}{2}\Big[E_z^{\,2}\Big]_0^E = -\frac{\alpha}{2}\vec{E}^2 = -\frac{\vec{p}.\vec{E}}{2}$$

Như vậy thế năng tương tác của lưỡng cực *không cứng* này không bằng $-\vec{p}.\vec{E}$.

Chỉ duy nhất đối với phép tính lực ta mới có thể lập luận với một lưỡng cực cứng có mômen $\vec{p}_0 = \vec{p}(\vec{E})$.

■ Phép quay nguyên tố và mômen

Xét một phép quay nguyên tố của lưỡng cực một góc $d\alpha$ xung quanh trục đi qua tâm của nó và định hướng bởi vectơ đơn vị $\vec{e}$, tương ứng với vectơ quay nguyên tố $d\vec{\alpha} = d\alpha.\vec{e}$. Trường nhìn bởi lưỡng cực không bị thay đổi bởi phép dịch chuyển này và mômen lưỡng cực biến thiên một lượng $d\vec{p} = d\vec{\alpha} \wedge \vec{p}$ (*hình* 19).

Mômen do thao tác viên tác dụng trực đối với mômen do trường tác dụng lên lưỡng cực, vậy :

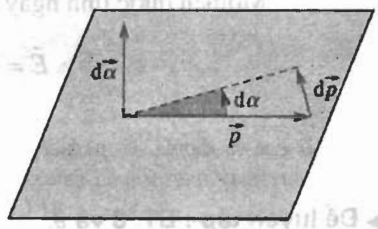
$$\delta W_{op} = -\vec{\Gamma}.d\vec{\alpha}$$

Mặt khác, $d\mathscr{E}_p = -(d\vec{p})\vec{E} = -(d\vec{\alpha} \wedge \vec{p})\vec{E}$, tích hỗn hợp cũng có thể viết là:

$$d\mathscr{E}_p = (\vec{p} \wedge \vec{E})d\vec{\alpha}$$

So sánh hai biểu thức, ta thu được kết quả đã được thiết lập :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$



Hình 19

Áp dụng 3

Lực do một sợi dây vô hạn tích điện tác dụng lên một lưỡng cực

Hãy xác định các tác dụng cơ học do trường của một sợi dây thẳng vô hạn mang mật độ điện dài đều λ, lên một lưỡng cực đặt tại M trong một mặt phẳng vuông góc với dây như đã chỉ rõ trên hình vẽ 20.

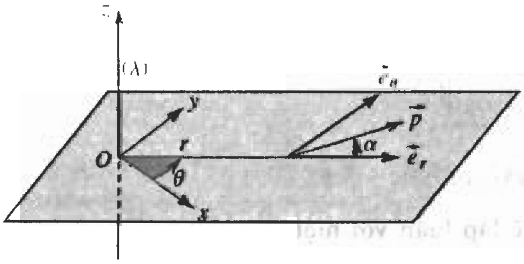
Để xác định lực, ta sẽ sử dụng lần lượt hai phương pháp sau :

a) *sử dụng biểu thức :*

$$\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}\ ;$$

b) *sử dụng biểu thức :*

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p}.\vec{E})\Big|_{\vec{p}=\overrightarrow{\text{cte}}}$$



Hình 20.

Nhớ lại rằng trường của sợi dây bằng :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r = E(r)\vec{e}_r$$

(x. các chương 2 và 4)

Mômen được tính ngay bằng :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = -\frac{p\lambda\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_z$$

a) $\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}$

$$= \left(p_r\frac{\partial}{\partial r} + p_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(E_r(r)\vec{e}_r)$$

$$= p_r\frac{\partial E_r(r)}{\partial r}\vec{e}_r + p_\theta\frac{E_r(r)}{r}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}.$$

$$= \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\cos\alpha}{r^2}\vec{e}_r + \frac{\sin\alpha}{r^2}\vec{e}_\theta\right).$$

b) Chú ý rằng $\vec{p} = \overrightarrow{cte}$ có nghĩa là các tọa độ Descartes của mômen lưỡng cực giữ không đổi trong một phép tịnh tiến nguyên tố, mặc dầu *các tọa độ trụ* của nó thay đổi. Khi lưỡng cực bị tịnh tiến, thì chuẩn $\|\vec{p}\|$ và góc $\beta = \theta + \alpha$ (*hình* 21) giữ không đổi.

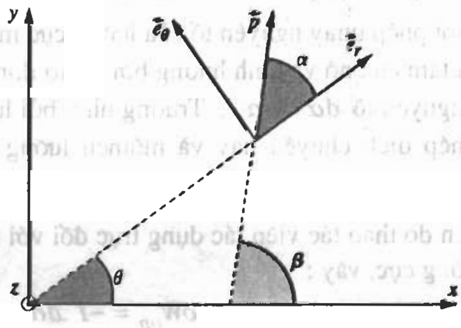
$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p}.\vec{E})\Big|_{\vec{p}=\overrightarrow{\text{cte}}}$$

$$= \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(p_r E_r(r))\Big|_{\vec{p}=\overrightarrow{\text{cte}}}$$

$$= \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{p\lambda\cos(\beta-\theta)}{2\pi\varepsilon_o r}\right)_{p,\beta=\text{cte}}$$

$$= \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{\cos\alpha}{r^2}\vec{e}_r + \frac{\sin\alpha}{r^2}\vec{e}_\theta\right)$$

kết quả tương tự như ở trên.



Hình 21

▶ **Để luyện tập : BT. 8 và 9.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ MÔMEN LƯỠNG CỰC

Một vật không tích điện, nhưng bị phân cực, tạo ra một thế và một trường tương tự như (ở phép gần đúng cấp 1) thế và trường của một nhóm đôi điện tích có mômen lưỡng cực $\vec{p}$ khác không ($q > 0$) :

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

■ THẾ VÀ TRƯỜNG CỦA LƯỠNG CỰC

• Sử dụng biểu thức của mômen lưỡng cực, thế tĩnh điện tạo ra bởi một lưỡng cực đặt tại điểm O, ở bậc thấp nhất theo lũy thừa của $\frac{d}{r}$, là :

$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\overrightarrow{OM}}{OM^3}.$$

• Biểu thức trường của lưỡng cực là :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta\vec{e}_r + p\sin\theta\vec{e}_\theta}{r^3}$$

• Dưới dạng thuần, trường của lưỡng cực là :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}\right),$$

hay còn là : $\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3(\vec{p}.\overrightarrow{OM}).\overrightarrow{OM} - \vec{p}OM^2}{OM^5}$

■ TƯƠNG TÁC CỦA MỘT LƯỠNG CỰC VỚI MỘT TRƯỜNG NGOÀI

• Hợp lực tác dụng lên một lưỡng cực đặt trong một trường đều là bằng không :

$$\vec{F} = \vec{0}.$$

• Một lưỡng cực đặt trong một trường ngoài $\vec{E}$ hơi không đồng nhất chịu một lực :

$$\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}$$

• Mômen của một lưỡng cực đặt trong một trường ngoài $\vec{E}$ coi là đều, bằng :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

• Trong một trường không đều, lưỡng cực chủ yếu chịu một mômen có khuynh hướng làm lưỡng cực thẳng hàng, song song và cùng chiều với trường ngoài. Một khi đã thẳng hàng rồi, lưỡng cực còn chịu một lực có khuynh hướng dịch chuyển lưỡng cực về miền có trường mạnh hơn.

• Thế năng tương tác giữa lưỡng cực cứng và trường tác dụng là :

$$\mathscr{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}.$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Lực tác dụng lên lưỡng cực trong trường hợp một chiều

Một lưỡng cực được đặt tại một điểm có tọa độ Descartes (x, y, z) trong trường $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$. Nhờ mô hình nhóm đôi và biểu thức của nó, hãy tính lực tác dụng lên lưỡng cực khi :

1) $\vec{p}$ song song với $\vec{e}_x$.

2) $\vec{p}$ vuông góc với $\vec{e}_x$.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

2 Nguyên tử của THOMSON, mô hình phân cực thẳng

Trong mẫu này, một nguyên tử hiđrô được biểu diễn bằng một hạt nhân có điện tích e chiếm một khối cầu bán kính R, ở bên trong khối cầu có điện tích e được phân bố đều. Êlectrôn có điện tích $-e$, có khả năng vận động ở bên trong khối cầu tích điện dương.

1) Êlectrôn vận động trong quả cầu có bán kính R chịu lực nào ? Vị trí cân bằng của nó ở đâu ?

2) bản chất quỹ đạo của êlectrôn, giả thiết nằm trong khối cầu là gì ? Tìm giá trị trung bình của mômen lưỡng cực của nguyên tử này ?

3) Đặt một trường $\vec{E}_0$ lên nguyên tử này, hạt nhân được giả thiết đứng yên. Nếu êlectrôn vẫn còn ở bên trong quả cầu bán kính R, thì có những thay đổi gì đối với các kết quả trên do có trường đặt vào ? Đặc biệt chứng tỏ rằng mômen lưỡng cực trung bình có dạng $<\vec{p}> = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_0$, trong đó α gọi là hệ số phân cực của nguyên tử. Hỏi thứ nguyên của α ? Cỡ lớn của nó ?

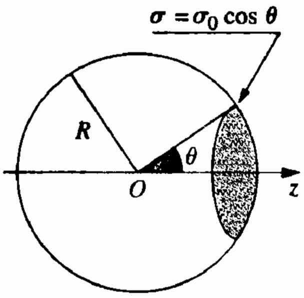
4) Với giá trị nào của trường ngoài thì nguyên tử này sẽ bị iôn hóa ?

3 Trường và thế tạo ra bởi một quả cầu

Một quả cầu tâm O bán kính R mang mật độ điện mặt $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$.

Hãy xác định trường và thế tạo ra bởi phân bố này ở bên trong và bên ngoài của quả cầu (chọn $V = 0$ ở O).

Bình luận đặc tính của trường tại $r = R$.



Chỉ dẫn : Ta sẽ sử dụng sự tương đương giữa phân bố này và sự chồng chất của hai phân bố điện tích tương ứng với hai khối cầu tích điện đều $-\rho$ và $+\rho$, có bán kính R, có các tâm O_1 và O_2 trên trục (Oz) và lần lượt có hoành độ là $-a$ và $+a$, ở giới hạn a tiến tới O với ρa = cte = σ_0. Sự tương đương này đã được xét ở bài tập 8, chương 1.

4 Nguyên tắc của sự khai triển đa cực

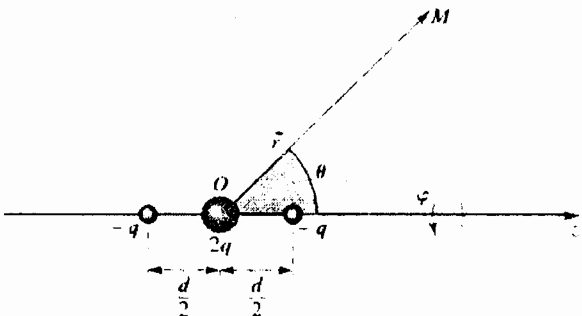
Cho một phân bố điện tích định xứ trong không gian. Phân bố này có mật độ điện khối $\rho(P)$ tạo ra một thế tại M :

$$V(M) = \iiint_{\substack{\text{tập hợp}\\ \text{điện tích}}} \frac{\rho(P)\mathrm{d}\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

Khoảng cách quan sát là lớn so với các kích thước đặc trưng của phân bố. Chọn gốc O ở lân cận của phân bố, hãy tìm cách khai triển biểu thức này khi $OM >> OP$.

5 Trường và thế của một tứ cực

Tính số hạng đầu tiên khác không của thế tạo ra ở khoảng cách lớn bởi phân bố mô tả trên sơ đồ dưới đây.



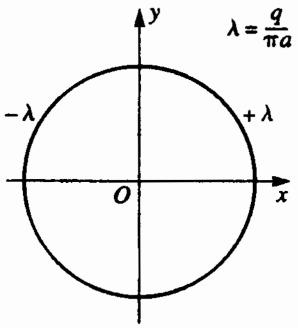
6 Trường của bốn điện tích

Bốn điện tích được bố trí trong mặt phẳng (xOy) : q tại $(a, 0)$ và tại $(-a, 0)$; $-q$ tại $(0, a)$ và tại $(0, -a)$.

Hãy tính trường tạo ra bởi phân bố điện tích với $r >> a$, rồi với $r << a$, trong mặt phẳng (xOy). (Ta sẽ giới hạn ở các số hạng đầu tiên khác không của sự khai triển).

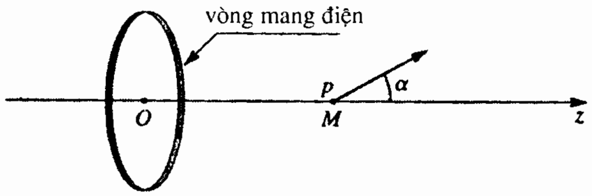
7 Trường của một vòng xoắn ở khoảng cách lớn

Cho một vòng tròn trục (Oz), mang mật độ điện dài $\lambda = \dfrac{q}{\pi a}$ nếu $x > 0$ và $\lambda = -\dfrac{q}{\pi a}$ nếu $x < 0$.



Hãy tính trường tạo ra bởi phân bố điện tích trên tại một điểm M, nằm trong mặt phẳng của vòng tròn, nhưng ở rất xa vòng tròn này ($r >> a$).

8 Tương tác của một vòng xoắn và một lưỡng cực



Vòng có bán kính R, mang mật độ điện dài đều λ.

1) Hãy tính trường tĩnh điện tạo ra bởi vòng ở trên trục của nó, cũng như ở lân cận trục này.

2) Những tác dụng cơ học nào do vòng đặt vào lưỡng cực ? Hãy đưa ra ba phương pháp để thực hiện phép tính này.

3) Từ đây về sau, ta lấy $\alpha = 0$. Lưỡng cực có thể trượt không ma sát trên trục nằm ngang. Hãy xác định vị trí cân bằng hay các vị trí cân bằng. Biện luận tính bền của chúng và tính chu kì của các dao động nhỏ của lưỡng cực, khối lượng m, nếu có dọc theo trục.

9 Tính lực tác dụng tức thời giữa hai lưỡng cực

Cho một lưỡng cực $\overrightarrow{p_1}$ ở điểm O và một lưỡng cực $\overrightarrow{p_2}$ ở điểm M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$). Lưỡng cực $\overrightarrow{p_1}$ tạo ra trường tĩnh điện $\overrightarrow{E_1}$, và lưỡng cực $\overrightarrow{p_2}$ trường tĩnh điện $\overrightarrow{E_2}$.

1) Hỏi giữa hai lưỡng cực có thế năng tương tác nào ?

2) $\overrightarrow{p_1}$ tác dụng lên $\overrightarrow{p_2}$ lực nào ?

LỜI GIẢI

1 1) *Sử dụng mô hình nhóm đôi, ta có :*

$$\vec{F} = -qE_{\left(x-\frac{d}{2}\right)}\vec{e}_x + qE_{\left(x+\frac{d}{2}\right)}\vec{e}_x = qd\frac{dE(x)}{dx}\vec{e}_x$$

Nhờ biểu thức của lực, ta thu được :

$$\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{grad})(E_{(x)}\overrightarrow{e_x}) = qd\frac{\partial}{\partial x}(E_{(x)}\overrightarrow{e_x}) = qd\frac{dE(x)}{dx}\overrightarrow{e_x}$$

Hai biểu thức này hoàn toàn giống nhau. Khi d có dấu của E(x), tức là khi lưỡng cực cùng chiều với trường, thì ta có thể nhận thấy lưỡng cực bị hút theo chiều mà chuẩn của trường tăng, vậy nó bị hút bởi các trường mạnh.

2) *Khi lưỡng cực vuông góc với trường, ví dụ $\vec{p} = p.\,\vec{e}_y$, thì hai phép tính ở trên cho ngay $\vec{F} = 0$.*

2 1) *Điện tích e được phân bố đều ở bên trong quả cầu, tương ứng với mật độ điện khối $\rho = \dfrac{3e}{4\pi R^3}$. Trường tại một điểm M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) ở bên trong quả cầu bằng $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}$.*

Vậy êlectrôn chịu tác dụng của lực kéo về hướng tâm tuyến tính $\vec{f} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}$ hướng về điểm O. Lực này bằng không ở O, O là vị trí cân bằng của êlectrôn.

2) *Phương trình chuyển động của êlectrôn ở bên trong quả cầu là :*

$$m\ddot{\vec{r}} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = \vec{0}$$

Với các điều kiện ban đầu $\vec{r}_0$ và $\vec{v}_0$ đã cho, phương trình chuyển động là : $\vec{r}(t) = \vec{r}_0\cos\omega t + \dfrac{\vec{v}_0}{\omega}\sin\omega t$, trong đó $\omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$.

Quỹ đạo là một elip tâm O.
Mômen lưỡng cực tức thời của nguyên tử $\vec{p} = -e\vec{r}$. Giá trị trung bình của nó bằng không.

3) *Trường $\overrightarrow{E_0}$ tác dụng một lực phụ $-e\overrightarrow{E_0}$ lên êlectrôn. Nếu êlectrôn vẫn ở trong quả cầu, nó sẽ có cùng quỹ đạo, lệch đi một vectơ không đổi : elip sẽ có tâm tại $<\vec{r}> = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{e}\vec{E}_0$. Từ đó suy ra hệ số phân cực của nguyên tử $\alpha = 4\pi R^3$, đồng nhất với một thể tích, và có cỡ lớn của R^3 với $R = 0,1nm$.*

4) *Lực kéo về là cực đại với r = R. có chuẩn $f_{max} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (Ở bên ngoài quả cầu, lực này giảm theo $\dfrac{1}{r^2}$ từ giá trị này). Nó không còn có thể bù được lực do trường $\vec{E}_0$ tác dụng khi chuẩn của trường này vượt quá $E_{0\max} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Khi đó có sự ion hóa nguyên tử. Với $R = 0,1nm$, trường này vào cỡ $10^{11}\,V.m^{-1}$ (rất lớn, trường phá hủy không khí khô vào khoảng $3.10^6\,V.m^{-1}$). Các trường mà ta đặt vào nguyên tử nói chung nhỏ hơn rất nhiều, và khi đó chỉ có tác dụng gây ra nhiễu loạn nhỏ trên nguyên tử, nghĩa là tuyến tính ở phép gần đúng cấp một. Mẫu nguyên tử này, mặc dầu khá lạ, có tính chất lí thú là giải thích được sự phân cực tuyến tính, và cho được một cỡ lớn của hệ số phân cực rất phù hợp với các giá trị thường dùng đối với sự phân cực điện tử.*

3 Ở bên trong quả cầu, hai phân bố điện tích tạo ra các trường

$$\vec{E}_1(M) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M} \text{ và } \vec{E}_2(M) = +\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M},$$

nghĩa là trường toàn phần $\vec{E}(M) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2} = -\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\vec{e}_z$

Ở giới hạn a tiến tới không, ta thu được :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\vec{e}_z \text{ đều ở bên trong quả cầu.}$$

Từ đó, suy ra thế $V(M) = \left(\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\right)z = \left(\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\right)r\cos\theta$.

Ở bên ngoài quả cầu, ta biết rằng hai khối cầu tích điện tạo ra cùng một trường nếu tất cả điện tích của chúng $\pm q = \pm\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ đều tập trung tại O_1 và O_2. Ở giới hạn a tiến tới không, trường nhìn thấy ở khoảng cách lớn hơn R kể từ điểm O, tương ứng với trường của một lưỡng cực đặt ở O và có mômen lưỡng cực :

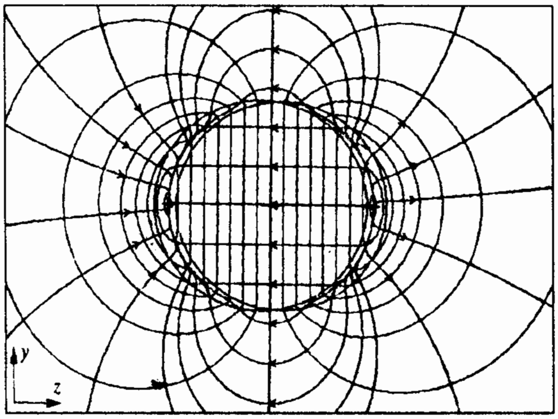
$$\vec{p} = q\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho a\vec{e}_z = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0\vec{e}_z$$

Phép tính thế, rồi phép tính trường đã được thực hiện trong bài giảng và đã cho :

$$V = \frac{R^3\sigma_0}{3\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \text{ và } \vec{E} = \begin{vmatrix} E_r = \dfrac{2R^3\sigma_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \dfrac{R^3\sigma_0}{3\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\sin\theta}{r^3}\end{vmatrix}$$

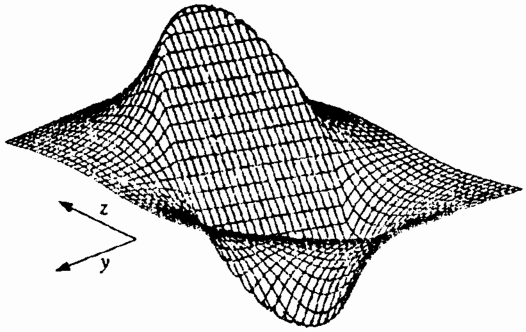
Ta xác nhận rằng thế là liên tục trên quả cầu, rằng thành phần tiếp tuyến của trường (E_θ) là liên tục, và rằng sự gián đoạn của thành phần pháp tuyến (E_r) cũng bằng $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{\text{int}\to ext}$ ($\vec{n}$ hướng từ trong ra ngoài).

Trên các mô phỏng dưới đây, ta thể hiện rõ các đẳng thế và các đường sức trường cũng như sự biến đổi của thế trong mặt phẳng chứa trục (Oz).



Các đường sức trường và các đẳng thế của một quả cầu tích điện :

$\sigma = \sigma_0\cos\theta$ với $\sigma_0 > 0$



Sự biến đổi của điện thế tạo ra bởi một quả cầu tích điện $\sigma = \sigma_0\cos\theta$ ($\sigma_0 > 0$). Ta thể hiện rõ mặt phẳng nghiêng tương ứng với miền có trường đều.

4 Bằng cách giới hạn phép khai triển ở các số hạng $\frac{1}{OM^3}$, ta có thể viết : $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$, hay : $PM^2 = OM^2 + OP^2 - 2\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}$, từ đó:

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{OM}\left[1 - 2\frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}}{OM^2} + \frac{OP^2}{OM^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{OM}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-2\frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}}{OM^2} + \frac{OP^2}{OM^2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}4\left(\frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}}{OM^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{OM}\left[1 + \frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}}{OM^2} + \frac{1}{2}\frac{3(\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM})^2 - OP^2.OM^2}{OM^4}\right]$$

Như vậy ta thu được ba số hạng đầu tiên của phép khai triển có giới hạn của thế tạo ra ở khoảng cách lớn của phân bố.

$V(M) = V_1(M) + V_2(M) + V_3(M)$, với :

- $V_1(M) = \dfrac{\left[\iiint_{\substack{\text{tập hợp}\\\text{điện tích}}}\varphi(P)\mathrm{d}\tau\right]}{4\pi\varepsilon_0 OM}$;
- $V_2(M) = \dfrac{\left[\iiint_{\substack{\text{tập hợp}\\\text{điện tích}}}\varphi(P)\overrightarrow{OP}\mathrm{d}\tau\right]\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 OM^2}$
- $V_3(M) = \dfrac{\left[\iiint_{\substack{\text{tập hợp}\\\text{điện tích}}}\varphi(P)\dfrac{3(\overrightarrow{OP}.\vec{e}_r)^2 - OP^2}{2}\mathrm{d}\tau\right]}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$

Tích phân đầu tiên của biểu thức trên tương ứng với điện tích toàn phần của phân bố.

Vậy ta dễ dàng thấy rằng số hạng thứ nhất quan sát được ở khoảng cách lớn tương ứng với $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, là thế tạo ra bởi điện tích Q ở khoảng cách r. Nếu số hạng thứ nhất bằng không, phân bố tương đương với sự chồng chất của các điện tích dương có điện tích toàn phần $+q$, tâm tỉ cự A^+ và của các điện tích âm có điện tích toàn phần $-q$, tâm tỉ cự A^-, tích phân thứ hai viết là :

$$\frac{\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 OM^2}\iiint_{\substack{\text{tập hợp}\\ \text{điện tích}}} \overrightarrow{OP}\ \rho(P)\ d\tau = \frac{\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} q\ \overrightarrow{A^-A^+} = \frac{\vec{p}.\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{(số hạng lưỡng cực)}$$

Dĩ nhiên, nếu mômen lưỡng cực cũng lại bằng không thì phải quan tâm đến các số hạng $\frac{1}{r^3}$, gọi là số hạng tứ cực. Tổng quát hơn, các số hạng mang tên số hạng $2^n -$ cực. ($n = 0$: đơn cực, $n = 1$: lưỡng cực, $n = 2$: tứ cực, $n = 3$: bát cực...)

5 Điện tích toàn phần bằng không và mômen lưỡng cực $\vec{p}$ cũng bằng không. Vậy ta phải tính toán khai triển có giới hạn của thế tới bậc 3 của $\frac{1}{r}$ (ít nhất !).

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(2 - \left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

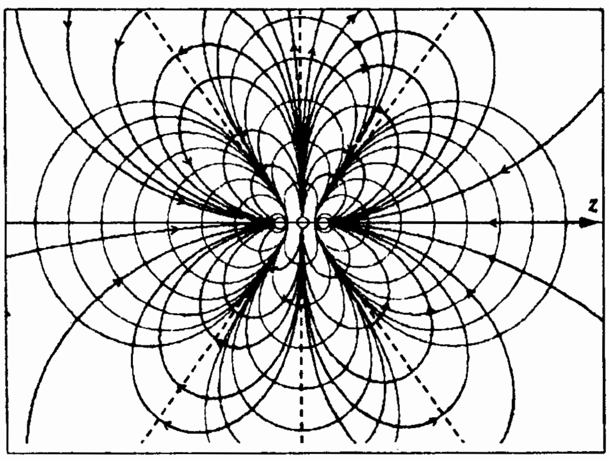
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(2 - \left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{3d^2}{8r^2}\cos^2\theta + \ldots\right)\right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{3d^2}{8r^2}\cos^2\theta + \ldots\right)\right)$$

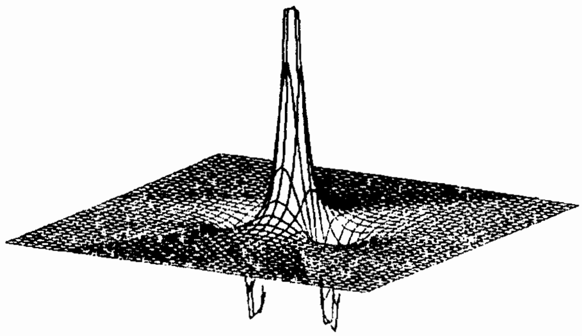
$$\approx \frac{qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\ \frac{1 - 3\cos^2\theta}{8}$$

Số hạng đầu tiên khác không là thuộc loại tứ cực. Các mô phỏng sau đây mô tả hình dáng của các đường sức trường và các đẳng thế cũng như hình dáng của thế. Ta thể hiện khá rõ các đẳng thế :

$$V = 0, \text{ với } \theta = \pm\frac{\pi}{3} \text{ và } \theta = \pm\frac{2\pi}{3}.$$



Các đường sức trường và các đẳng thế thuộc hệ các điện tích $(-q, 2q, -q)$.



Sự biến đổi của thế tạo ra bởi hệ điện tích $(-q, 2q, -q)$. Thế này tiến rất nhanh về không (số hạng $\frac{1}{r^3}$).

6 Thế tạo ra tại điểm M có tọa độ cực (r, θ) trong mặt phẳng (xOy), sai kém một hằng số, là :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2)^{-\frac{1}{2}} + (r^2 + 2ar\cos\theta + a^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -(r^2 - 2ar\sin\theta + a^2)^{-\frac{1}{2}} - (r^2 + 2ar\sin\theta + a^2)^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right]$$

Ở một khoảng cách tới gốc lớn trước a, ta phải tiến hành phép khai triển ít nhất tới cấp 3, vì điện tích và mômen lưỡng cực của phân bố bằng không.

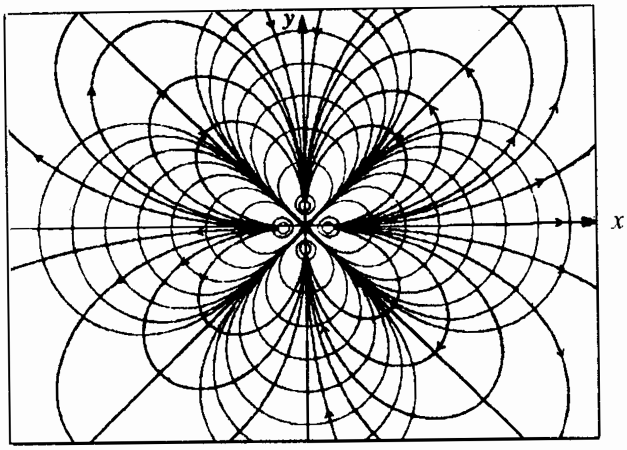
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\begin{array}{l}+\left(1 + \frac{a\cos\theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2\cos^2\theta}{2r^2} + \ldots\right) \\ +\left(1 - \frac{a\cos\theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2\cos^2\theta}{2r^2} + \ldots\right) \\ -\left(1 + \frac{a\sin\theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2\sin^2\theta}{2r^2} + \ldots\right) \\ -\left(1 - \frac{a\sin\theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2\sin^2\theta}{2r^2} + \ldots\right)\end{array}\right] = \frac{3qa^2(2\cos^2\theta - 1)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

và trường tĩnh điện bằng :

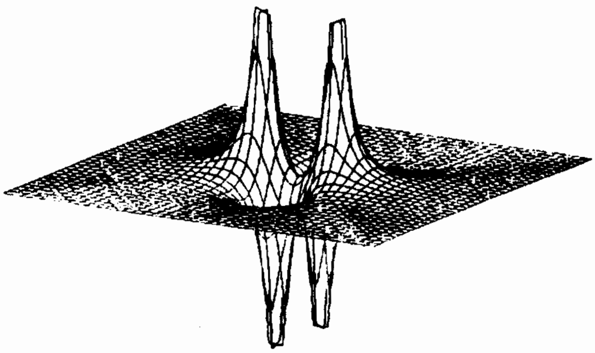
$$\vec{E} = \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left[3(2\cos^2\theta - 1)\vec{e}_r + 2\sin 2\theta.\vec{e}_\theta\right]$$

Ở khoảng cách r nhỏ hơn a, phép khai triển của thế tương tự như trên bằng cách đảo thứ tự a và r, $V = \frac{3qr^2(2\cos^2\theta - 1)}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ và trường là :

$$\vec{E} = \frac{3qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[-2(2\cos^2\theta - 1)\vec{e}_r + 2\sin 2\theta.\vec{e}_\theta\right]$$



Các đường sức trường và đẳng thế tạo ra bởi bốn điện tích.



Sự biến đổi của thế tạo ra bởi bốn điện tích. Thế tiến rất nhanh về không (số hạng $\frac{1}{r^3}$).

Các mô phỏng trên đây mô tả hình dáng của các đường sức trường và các đẳng thế, cũng như hình dáng của thế. Ta thể hiện khá rõ các đẳng thế V = 0 với $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ và $\theta = \pm\frac{3\pi}{4}$.

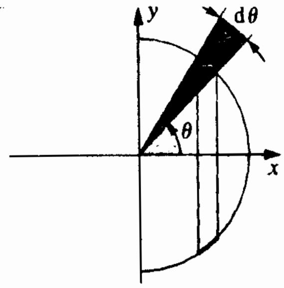
7 *Phân bố này có một điện tích toàn bộ bằng không và một mômen lưỡng cực $\vec{p} = p\vec{e}_x$ với $p = \left[q2\frac{2a}{\pi}\right]$ (tâm tỷ cự của một nửa vòng tròn cách tâm vòng tròn $\frac{2a}{\pi}$).*

Nguyên tắc khai triển thế ở khoảng cách lớn của vòng đã thấy trong bài tập 4.

Số hạng thứ nhất khác không của khai triển là $\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (trong tọa độ cực trong mặt phẳng (xOy)). Trường yêu cầu là trường của lưỡng cực mà ta vừa xác định.

Chú ý : ***vị trí tâm quán tính của nửa vòng tròn***

• Phương pháp thứ nhất, tính trực t



Tâm quán tính, hay ở đây là tâm tỷ cự của các điện tích G có thể được tính như :

$$OG\pi a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta . 2a\,d\theta$$

$$= 2a^2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2$$

hay $OG = \frac{2a}{\pi}$

• Phương pháp thứ hai, định lí GULDIN

Quay nửa vòng tròn này (có chiều dài L) xung quanh trục (Oy), ta được một quả cầu có diện tích S. Ta có :

$$2\pi . OG\,L = S, \text{ từ đó } OG = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2a}{\pi}$$

8 1) *Trên trục, trường của vòng bằng*

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left[z^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z .$$

ở lân cận của trục, theo cấp 1 của r, ta sẽ có :

$$\vec{E}(r,z) = E_{truc}(z)\vec{e}_z - \frac{r}{2}\left(\frac{dE_{truc}}{dz}\right)_z \vec{e}_r + ...$$

$$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\left[z^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z + r\frac{R^2-2z^2}{\left[z^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z + ...\right)$$

(x. áp dụng 1 chương 4).

2) *Ở phép gần đúng thứ nhất, lưỡng cực chịu một ngẫu lực có mômen:*

$$\vec{\Gamma} = \vec{p}\wedge\vec{E} = -pE_{truc}(z)\sin\alpha\,\vec{e}_\alpha .$$

Ngoài ra, lưỡng cực còn chịu một lực, có thể tính bằng nhiều phương pháp.

• Phương pháp thứ nhất

$$\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{grad})\vec{E} = \left(p\sin\alpha\frac{\partial}{\partial r} + p\cos\alpha\frac{\partial}{\partial z}\right)(E_r\vec{e}_r + E_z\vec{e}_z)_{truc\ (r\ =\ 0,\ z)}$$

$$= p\left(-\frac{\sin\alpha}{2}\vec{e}_r + \cos\alpha\,\vec{e}_z\right)\left(\frac{dE_{truc}}{dz}\right)_z$$

• Phương pháp thứ hai.

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{E})_{\vec{p}\ =\ \vec{cte}}$$

$$= \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(p\sin\alpha E_r + p\cos\alpha E_z)_{\alpha\ =\ cte}$$

$$= p\left(-\frac{\sin\alpha}{2}\vec{e}_r + \cos\alpha\vec{e}_z\right)\left(\frac{dE_{truc}}{dz}\right)_z$$

• Phương pháp thứ ba

Ta luôn luôn có thể trở lại với mô hình nhóm đôi ($\vec{p} = q.\vec{d}$) để tính lực tác dụng lên lưỡng cực.

$$\vec{F} = q\left(E_{truc}\left(z+\frac{d\cos\alpha}{2}\right)\vec{e}_z - \frac{d\sin\alpha}{4}\left(\frac{dE_{truc}}{dz}\right)_z \vec{e}_r \right)_r$$

$$-q\left(E_{truc}\left(z-\frac{d\cos\alpha}{2}\right)\vec{e}_z - \frac{d\sin\alpha}{4}\left(\frac{dE_{truc}}{dz}\right)_z \vec{e}_r \right).$$

cách này dẫn tới cùng một kết quả.

3) *Đối với một lưỡng cực $\vec{p} = p\,.\,\vec{e}_z$, lực phải chịu là :*

$$\vec{F} = \frac{p\lambda R}{2\varepsilon_0}\,\frac{R^2-2z^2}{\left[z^2+R^2\right]^{5/2}}\,\vec{e}_z$$

Vậy có hai vị trí cân bằng : $z = \frac{\pm R}{\sqrt{2}}$.

Ta hãy khảo sát chuyển động của lưỡng cực ở lân cận $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$ và đặt $z = \frac{R}{\sqrt{2}} + \varepsilon_z$

Đối với một lưỡng cực có khối lượng m, trượt dọc trên trục (Oz) chỉ chịu duy nhất lực tác dụng trên dọc theo (Oz), thì phương trình chuyển động lân cận vị trí cân bằng đã tuyến tính hóa là :

$$m\left(\frac{d^2\varepsilon_z}{dt^2}\right) = -\frac{8p\lambda}{9\sqrt{3}\varepsilon_0 R^3}\varepsilon_z$$

Đó là một phương trình của dao động tử điều hòa, vị trí cân bằng này là bền. Ngược lại vị trí cân bằng kia $\left(z = -\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ là không bền.

9

1) *Thế năng tương tác giữa hai lưỡng cực cho bởi công thức :*

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p}_1\,.\,\vec{E}_2 = -\vec{p}_2\,.\,\vec{E}_1$$

Trường tạo ra bởi lưỡng cực $\vec{p}_1$ tại $\vec{r}$ là :

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}_1.\vec{r}\,)\vec{r} - r^2\vec{p}_1}{r^5}\right)$$

Vậy thế năng tương tác bằng :

$$-\vec{p}_2.\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3(\vec{p}_1.\vec{r})(\vec{p}_2.\vec{r}) + r^2(\vec{p}_1.\vec{p}_2)}{r^5}\right)$$

Chú ý rằng hệ thức này rõ ràng là đối xứng với $\vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_2$.

2) *Ta hãy tính lực do lưỡng cực $\vec{p}_1$ tác dụng lên lưỡng cực $\vec{p}_2$. Biết rằng :*

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} \text{ và } \overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r}) = \vec{p}\ .$$

Từ trên, suy ra lực tác dụng của lưỡng cực thứ nhất lên lưỡng cực thứ hai :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}_{\vec{r}}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3(\vec{p}_1.\vec{r})\,(\vec{p}_2.\vec{r}\,) + r^2(\vec{p}_1\,.\,\vec{p}_2)}{r^5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}_1)\,(\vec{p}_2.\vec{r}\,) + 3(\vec{p}_2)(\vec{p}_1.\vec{r}) - 2\vec{r}(\vec{p}_1\,.\,\vec{p}_2)}{r^5}\right.$$

$$\left. + \frac{5\vec{r}}{r^7}\left(-3(\vec{p}_1.\vec{r})\,(\vec{p}_2.\vec{r}\,) + r^2(\vec{p}_1\,.\,\vec{p}_2)\right)\right)$$

$$= \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\left(\frac{\vec{p}_1(\vec{p}_2\,\vec{e}_r) + \vec{p}_2(\vec{p}_1\,.\,\vec{e}_r) + \vec{e}_r\left[\vec{p}_1\,.\,\vec{p}_2 - 5(\vec{p}_1\,.\,\vec{e}_r)(\vec{p}_2\,.\,\vec{e}_r)\right]}{r^4}\right)$$

Vậy lực tức thời là hàm theo $\frac{1}{r^4}$.

6 CÁC PHÂN BỐ DÒNG

MỤC TIÊU

■ Mô tả các phân bố dòng.

■ Nhận biết các tính chất đối xứng của chúng.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Các phân bố điện tích.

■ Các tính đối xứng đáng chú ý của một trường vectơ (trường tĩnh điện).

Mở đầu

Trong tĩnh điện, các điện tích đều đứng yên. Các điện tích chuyển động tạo ra dòng điện, tạo ra nguồn gốc xuất hiện từ trường.

Trong chương này chúng ta sẽ mô tả các phân bố dòng, sự mô hình hóa dòng và các tính đối xứng đáng chú ý của chúng như chúng ta đã làm ở chương 1 đối với các phân bố điện tích.

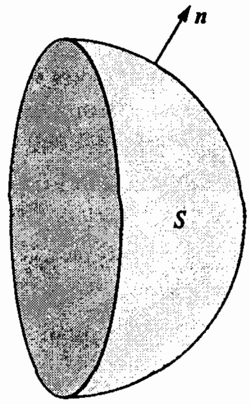
1 Các điện tích chuyển động

1.1. Dòng điện

Cho một hệ quy chiếu $\mathscr{R}$, ta gọi *dòng điện* là mọi chuyển động toàn bộ (chuyển động có thứ tự) các hạt mang điện trong hệ quy chiếu đó.

1.2. Cường độ dòng điện

Xét một diện tích S gắn vào hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ và tại mọi điểm M được gán cho một pháp tuyến định hướng bởi vectơ đơn vị $\vec{n}$ (*hình* 1). Kí hiệu δQ_m là điện lượng chuyển động qua diện tích trên trong khoảng thời gian giữa t và $t + \delta t$ và được tính là dương theo chiều đã chọn cho sự định hướng của S.



Hình 1. *Diện tích S được định hướng bởi một vectơ đơn vị* $\vec{n}$.

<u>*Chú ý :*</u>

Khoảng thời gian nguyên tố δt là vô cùng nhỏ nếu $\frac{\delta t}{T} << 1$, trong đó T là một thời gian đặc trưng của hiện tượng đang nghiên cứu (ví dụ là chu kì đối với một dòng xoay chiều hình sin)

Cường độ $I(S, t)$ của dòng điện qua một diện tích S được liên kết với điện lượng δQ_m qua S trong thời gian δt bởi hệ thức $\delta Q_m = I(S, t)\delta t$. Cường độ, đại lượng điện, phụ thuộc vào sự định hướng của S.

Cường độ được tính bằng ampe (kí hiệu : A), là đơn vị cơ bản của Hệ đơn vị đo Quốc tế (S.I).

1.3. Sự bảo toàn điện tích

1.3.1. Trường hợp một hệ kín

Một hệ kín là một hệ không trao đổi vật chất với môi trường bao quanh nó.

Đối với một hệ như thế, thực nghiệm chứng tỏ điện tích giữ không đổi (bảo toàn)

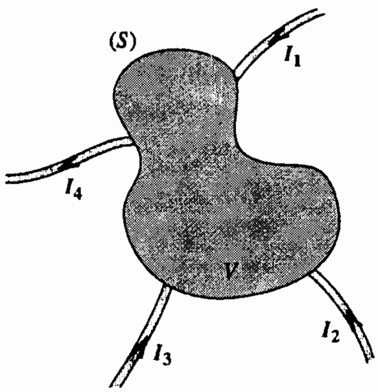
1.3.2. Trường hợp một hệ mở

Một hệ mở có thể trao đổi vật chất với môi trường bao quanh nó. Như vậy, hệ có thể nhận hoặc nhường các điện tích.

Ta hãy xét một hệ mở chiếm thể tích V. Sự bảo toàn điện tích buộc sự biến đổi của điện tích chứa trong V chỉ là do sự vận chuyển các điện tích giữa hệ và bên ngoài, nghĩa là liên quan với các dòng điện đi vào hoặc đi ra qua mặt kín S giới hạn thể tích V của hệ.

Đối với trường hợp biểu diễn trên hình 2, gọi Q_v là điện tích chứa trong thể tích V, định luật bảo toàn điện tích được thể hiện bởi :

$$\delta Q_v = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4).\delta t$$



Hình 2. *Sự biến đổi δQ_v của điện tích chứa trong thể tích bằng* $\delta Q_v = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)\,\delta t$.

1.4. Các dòng điện khác nhau

Sự sắp xếp sau đây là do truyền thống.

1.4.1. Dòng điện dẫn

Dòng điện dẫn liên kết với sự chuyển dời toàn bộ các êlectrôn tự do trong kim loại, các iôn trong dung dịch điện phân, các êlectrôn hay các lỗ trống ("các lỗ") trong chất bán dẫn.

Đối với một vật dẫn kim loại cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathscr{R}$, đó là các êlectrôn dẫn ; chúng tạo cớ cho sự tồn tại một dòng điện.

Mật độ hạt n_e của chúng (số hạt trong một đơn vị thể tích) rất lớn, vào cỡ 10^{28} m^{-3}. Một thể tích trung mô $d\tau$, mặc dầu rất nhỏ về mặt vĩ mô, cũng chứa một số $n_e d\tau$ quan trọng các êlectrôn dẫn.

Các êlectrôn dẫn, có chỉ số k, chuyển động với vận tốc $\vec{V}_k$. Đối với thể tích $d\tau$, ta sẽ định nghĩa *vận tốc toàn bộ* của các hạt mang dòng bằng hệ thức $\vec{v} = \dfrac{1}{n_e d\tau}\sum_k \vec{V}_k$. Vận tốc này là một *đại lượng san bằng*, hay giá trị trung bình không gian.

Các vận tốc $\overrightarrow{V_k}$, có độ lớn vào cỡ 10^6 ms^{-1}, do một chuyển động hỗn độn và một chuyển động toàn bộ có vận tốc $\vec{v}$ (ví dụ do tác dụng của một điện trường vào vật dẫn) chồng chất lên nhau. Giá trị của chúng không giống nhau, có cỡ lớn bằng vận tốc toàn bộ của các êlectrôn dẫn (x. áp dụng 1). Phần chênh lệch $\vec{V}_k - \vec{v}$ của chúng biến đổi rất nhanh trong khoảng thời gian T, thời gian đặc trưng cho các thí nghiệm thông thường :

Có dòng điện là do một chuyển động toàn bộ (hay chuyển động giạt) của các hạt mang điện tích.

Áp dụng 1

Vận tốc toàn bộ của các hạt mang điện tích trong một vật dẫn.

Một sợi dây đồng hình trụ đặc, có bán kính r = 1 mm, có dòng điện ổn định cường độ I = 5A chạy qua.

Trung bình, mỗi nguyên tử đồng có một êlectrôn dẫn.

Hãy ước lượng vận tốc toàn bộ, giả sử là đều, của các điện tích chuyển động trong kim loại này.

Cho :

Khối lượng riêng $\mu = 8{,}9.10^3$ kg.m^{-3}.

Khối lượng mol M = 63,6g.

Mật độ hạt của các êlectrôn dẫn bằng $n_e = N_A \dfrac{\mu}{M}$ ($N_A = 6{,}02.10^{23}$mol^{-1} - số Avôgađrô).

Áp dụng bằng số : $n_e = 8{,}4.10^{28}$ m^{-3}.

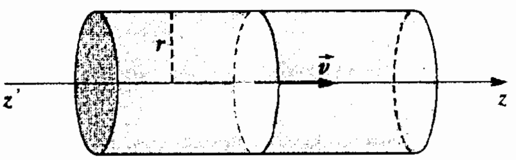
Điện lượng δQ_m đi qua một tiết diện $\vec{S} = S\vec{e}_z$ của dây trong khoảng thời gian δt (hình 3) được chứa trong một đoạn ống có tiết diện S và chiều dài $v\delta t$, có thể tích $d\tau = Sv\delta t = \pi r^2 v\delta t$. Từ đó, ta suy ra $\delta Q_m = -n_e e\pi r^2 v\delta t$.

Vậy cường độ dòng điện bằng $I = -n_e e\pi r^2 v$.

Vận tốc toàn bộ của các hạt mang điện tích chuyển động ngược với chiều dòng điện và có chuẩn :

$$|v| = \frac{I}{n_e e\pi r^2} = 1{,}2.10^{-4}\ \text{m.s}^{-1}.$$

Vận tốc toàn bộ này vào cỡ 0,1 mm.s^{-1} là rất rất nhỏ so với vận tốc của mỗi êlectrôn chuyển động.



Hình 3.

1.4.2. Các dòng điện đối lưu

Dòng điện đối lưu là dòng thu được bởi sự dịch chuyển trong $\mathscr{R}$ của một cái giá vật chất mang điện tích. Đó là trường hợp một chiếc đĩa mang điện quay xung quanh trục của nó, chuyển động tạo ra các dòng điện hình vành (hay trực giao xuyên tâm).

1.4.3. Các dòng điện hạt

Một chùm hạt mang điện (êlectrôn hay iôn trong ống chân không) tương đương với một dòng điện gọi là dòng điện hạt.

2 Các phân bố dòng điện

2.1. Các dòng điện khối

2.1.1. Vectơ mật độ khối của dòng

Xét một tập hợp các hạt có điện tích q, có mật độ hạt n và có một chuyển động toàn bộ với vận tốc $\vec{v}$.

Ta sẽ gọi mật độ khối các điện tích chuyển động là đại lượng :

$$\rho_m = n.q$$

Chú ý :

$\rho_m = n.q$ chỉ là mật độ khối các điện tích chuyển động (đo bằng $C.m^{-3}$), không được lẫn với ρ là mật độ điện tích toàn phần ; mật độ này bao gồm cả các điện tích coi là cố định (ví dụ các iôn tạo thành mạng tinh thể trong một vật dẫn kim loại).

Vectơ mật độ khối liên kết với một chuyển động toàn bộ vận tốc $\vec{v}$, là:

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m\vec{v}$$

Vectơ này, mà giá trị được đo bằng đơn vị $A.m^{-2}$, về kết cấu là một đại lượng san bằng.

Đối với một chuyển động như thế, điện lượng chuyển động δQ_m đi qua diện tích nguyên tố dS giữa các thời điểm t và $t + \delta t$, biểu diễn trên hình 4, được chứa ở thời điểm t trong một hình trụ xiên có chiều cao $v\delta t$ và có thể tích $d\tau = \vec{v}\,\delta t.\vec{n}\,dS$.

Do đó :

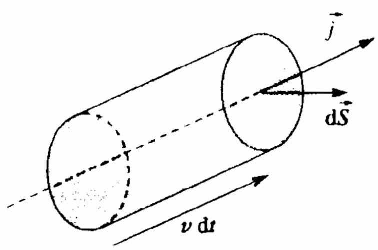
$$\delta Q_m = nq d\tau = nq\vec{v}\,\delta t.d\vec{S}$$

Cường độ dI qua phần tử diện tích dS bằng :

$$dI = nq\vec{v}.d\vec{S} = \vec{j}.d\vec{S}$$

Cường độ dòng điện đi qua một diện tích S bằng thông lượng của vectơ mật độ khối của dòng qua diện tích đó :

$$I(S,t) = \iint_S \vec{j}(r,t).\overrightarrow{dS}$$



Hình 4.

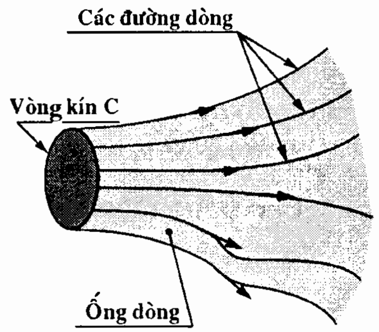
Khi có các loại hạt mang điện khác nhau (chất điện phân chẳng hạn) thì các đóng góp vào dòng điện của mỗi loại, kí hiệu α, được cộng lại với nhau. Khi đó vectơ mật độ tổng hợp là :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \rho_{m_{\alpha}} \vec{v}_{\alpha}$$

2.1.2. Các đường dòng và ống dòng

Một đường dòng là một đường mà tại mọi điểm của nó tiếp tuyến với vectơ mật độ dòng.

Một ống dòng là tập hợp các đường dòng tựa trên một đường cong kín C (*hình* 5).



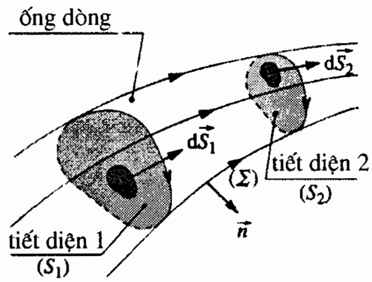
Hình 5. *Các đường dòng và ống dòng tựa trên một đường cong kín C.*

2.1.3. Thông lượng bảo toàn của $\vec{j}$ ở chế độ không đổi

Ở chế độ không đổi, điện tích chứa ở bên trong một mặt kín S (cố định) không biến đổi. Cường độ qua mặt đó bằng không, nghĩa là thông lượng ra của $\vec{j}$ qua S bằng không.

Ta hãy áp dụng kết quả này cho một mặt kín thu được bằng cách hợp hai tiết diện S_1 và S_2 của cùng một ống dòng với mặt Σ của ống nối hai tiết diện đó (hình 6).

Vì không có một chuyển động nào của điện tích qua mặt Σ ($\vec{j}.\vec{n} = 0$) nên cường độ qua mặt S_1 ($I_1 = \iint \vec{j}\,.\mathrm{d}\vec{S_1}$) phải bằng cường độ qua mặt S_2 ($I_2 = \iint \vec{j}\,.\,\mathrm{d}\vec{S_2}$).



Hình 6. *Ống dòng.*

Ở chế độ không đổi, vectơ $\vec{j}$ có một thông lượng bảo toàn. Dòng điện là như nhau qua mọi tiết diện của cùng một ống dòng.

Áp dụng 2

Thông lượng của $\vec{j}$ và sự bảo toàn điện tích

Xét một thể tích V, giới hạn bởi một mặt S, cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu và chứa một điện tích $Q(V, t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t)\mathrm{d}\tau$ *ở thời điểm t,*

ρ là mật độ khối điện tích của môi trường.

Tìm hệ thức tích phân, diễn tả sự bảo toàn điện tích đối với thể tích V, nối sự biến đổi tức thời của ρ và thông lượng của vectơ mật độ khối của dòng qua S ?

Ở đây sự bảo toàn điện tích viết là :

$$\frac{\delta Q_V(t)}{\delta t} = \oiint_S -\vec{j}(\vec{r}, t)\,.\mathrm{d}\vec{S}.$$

Lưu ý rằng có dấu trừ là do sự định hướng theo quy ước của mặt kín S ra phía ngoài. Nếu Q_V giảm, khi đó thông lượng ra của $\vec{j}$ là dương.

Hơn nữa, thể tích V là cố định, ta có :

$$\frac{\delta Q_V(t)}{\delta t} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t)\mathrm{d}\tau$$

Vậy phương trình tích phân diễn tả sự bảo toàn điện tích là :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t)\mathrm{d}\tau = \oiint_S -\vec{j}(\vec{r}, t)\,.\mathrm{d}\vec{S}$$

▶ **Để luyện tập : BT.1.**

2.2. Các dòng trên bề mặt

2.2.1. Vectơ mật độ dòng trên bề mặt

Khi phân bố dòng gần như nằm trong một cái vỏ có bề dày h nhỏ ở thang vĩ mô thì ta có thể coi phân bố này như một phân bố dòng theo bề mặt.

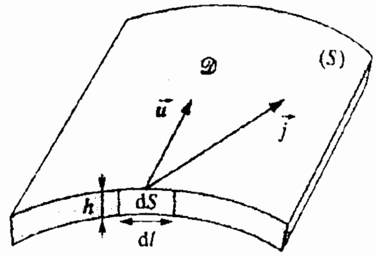
Ta hãy xét một tiết diện nguyên tố $dS = h dl$ (*hình* 7) của vỏ, được định hướng theo vectơ đơn vị $\vec{u}$, $d\vec{S} = dS.\vec{u}$. Với h nhỏ, vectơ $\vec{j}$ sẽ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với lớp vỏ và dòng qua dS là $dI = \vec{j}.\vec{dS} = \vec{j}\,h\,\vec{u}\,dl$.

Đối với một bề dày h rất nhỏ, ta sẽ xem xét sự biểu diễn giới hạn "h tiến tới không" có dòng dI không đổi với một phần tử chiều dài dl đã cho. Tích $\vec{j}.h$, được giữ không đổi trong thuật toán trên, sẽ được kí hiệu là $\vec{j_S}$, vectơ mật độ dòng theo bề mặt. Chuẩn của nó đo bằng $A.m^{-1}$.

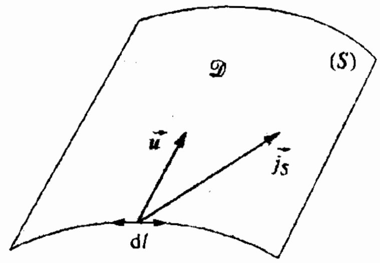
Khi các dòng chạy trên các lớp bề mặt, vectơ mật độ dòng trên bề mặt $\vec{j_S}$ liên kết được xác định bởi :

$$dI = \vec{j_S}\,\vec{u}\,dl\ ,$$

dI là cường độ chạy qua phần tử chiều dài dl vẽ trên bề mặt.



Hình 7a. *Vỏ được định hướng với h nhỏ.*



Hình 7b. *h rất nhỏ.*

Áp dụng 3

Lớp bề mặt có phân bố theo hàm mũ

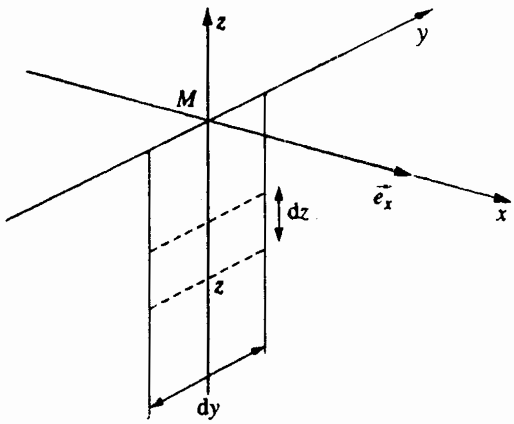
Một môi trường dẫn chiếm nửa – không gian $z < 0$; trong môi trường mật độ khối của dòng là $\vec{j} = j\vec{e}_x = j_0\exp\left(\dfrac{z}{\delta}\right)\vec{e}_x$, trong đó δ là một chiều dài.

Hãy xác định mật độ dòng trên bề mặt j_S tương đương với phân bố dòng theo thể tích trên khi δ tiến về không ; với $j_0\delta = cte$.

Mật độ khối của dòng giảm nhanh với chiều sâu $-z$, δ là chiều dài đặc trưng của sự giảm bớt. Cường độ qua (theo $\vec{e_x}$) một dải kim loại có bề rộng dy và chiều sâu vô hạn, theo định nghĩa, là thông lượng của vectơ $\vec{j}$ gửi qua dải trên, bằng :

$$dI = dy\int_{-\infty}^{0}\vec{j}(z).\vec{e}_x dz = dy.\,j_0\delta$$

Mật độ dòng trên bề mặt tương đương với giới hạn khi δ *tiến về* 0, là $\vec{j_S} = j_S\vec{e}_x = j_0\delta\vec{e}_x$.

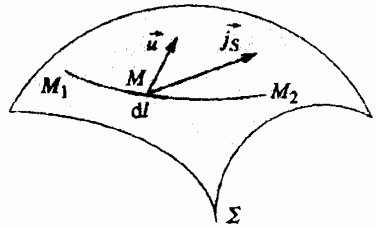


Hình 8.

2.2.2. Mật độ dòng trên bề mặt liên kết với sự dịch chuyển điện tích bề mặt

Cũng như trong trường hợp một phân bố khối của dòng, ở đây ta có thể sử dụng khái niệm mật độ điện tích chuyển động dịch chuyển trên bề mặt của một lớp dòng. Kí hiệu σ_m là mật độ điện tích dịch chuyển trên bề mặt và v là vận tốc toàn bộ liên kết. Cường độ dI qua phần tử dl cắt trên bề mặt, khi đó bằng (*hình* 9) $dI = (\sigma_m\vec{v})\vec{u}\,dl$. Khi đó mật độ dòng theo bề mặt là :

$$\vec{j_S} = \sigma_m\vec{v}\ \text{(biểu thức làm nhớ tới } \vec{j} = \rho_m\vec{v}\text{)}$$



Hình 9.

Cường độ toàn phần qua một đường cong M_1M_2 vẽ trên mặt Σ, định hướng bởi vectơ pháp tuyến $\vec{u}$ tiếp tuyến với mặt Σ, bằng :

$$I(M_1M_2) = \int_{M_1M_2} \overrightarrow{j_S}.\vec{u}\,dl.$$

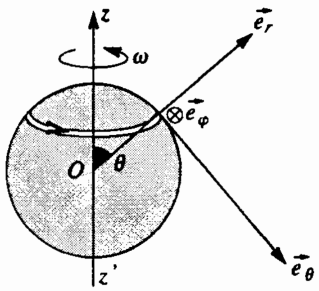
Áp dụng 4

Vectơ dòng trên bề mặt liên kết với các dòng đối lưu.

Một quả cầu bán kính a mang một điện tích q được phân phối đều trên mặt cầu với mật độ σ.

Quả cầu quay xung quanh một trong các đường kính của nó với vận tốc góc không đổi ω trong hệ quy chiếu ℛ.

Hãy xác định vectơ mật độ dòng trên bề mặt tại mọi điểm cũng như cường độ qua nửa vòng tròn kinh tuyến nối hai điểm cố định của quả cầu đang quay.



Hình 10.

Sử dụng các tọa độ cầu trục (Oz), cũng là trục quay của quả cầu. Vận tốc của một điểm trên quả cầu là $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = R\omega \sin\theta.\overrightarrow{e_\varphi}$. Vectơ mật độ dòng trên bề mặt là :

$$\overrightarrow{j_S} = \sigma\vec{v} = \sigma R\omega\sin\theta.\overrightarrow{e_\varphi}$$

Các đường dòng là những vòng tròn.

Dòng cần tìm là thông lượng của $\overrightarrow{j_S}$ qua một nửa vòng tròn kinh tuyến, là :

$$I = \int_0^\pi \sigma R\omega\sin\theta \;.\; Rd\theta = 2\sigma R^2\omega.$$

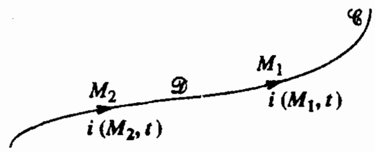
Vì $\sigma = \dfrac{q}{(4\pi R^2)}$, nên cường độ cũng được viết là :

$$I = q.\frac{\omega}{2\pi} = \frac{q}{T}$$

T là chu kì quay của quả cầu. Đây là kết quả mong đợi, vì q là điện tích chuyển động đi qua một nửa vòng kinh tuyến trong thời gian một chu kì.

2.3. Dòng điện hình sợi chỉ

Các vật dẫn có tiết diện nhỏ ở thang vĩ mô có thể được coi như các đường cong 𝒞 hay các sợi dây (*hình* 11). Khi đó "dòng theo chiều dài" rất đơn giản là dòng chạy qua một dây dẫn (nói chung nó phụ thuộc đồng thời vào điểm M và vào thời gian).



Hình 11.

Áp dụng 5

Các dòng điện khối, bề mặt và hình chỉ với "thông lượng bảo toàn"

Ta hãy xét vật dẫn mô tả trên hình 12.

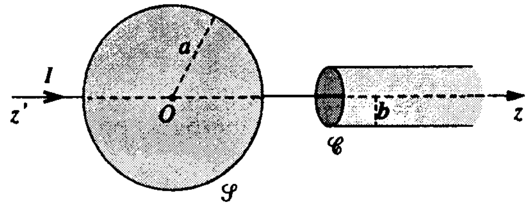
Một dòng điện cường độ I không phụ thuộc thời gian chạy trong sợi dây thẳng trục (Oz), có tiết diện không đáng kể (dòng hình chỉ), rồi chạy trên bề mặt của một quả cầu 𝒮, bán kính a, và cuối cùng chạy ở bên trong của hình trụ 𝒞 bán kính b. Quả cầu và hình trụ nhận trục (Oz) làm trục tròn xoay. Hãy xác định vectơ mật độ dòng trên bề mặt $\overrightarrow{j_S}$ *trên 𝒮 theo θ, và dòng điện khối* $\vec{j}$*, giả thiết là đều ở ngoài miền nối, trong 𝒞.*

Vì dòng là dừng nên cường độ phải bằng nhau ở mọi tiết diện của vật dẫn.

Trên quả cầu, các đường dòng là những nửa vòng tròn kinh tuyến và j_S chỉ phụ thuộc θ(bất biến với phép quay xung quanh trục (Oz)). I là cường độ đi qua một vòng tròn trục (Oz) vẽ trên quả cầu và có chu vi $2\pi a\sin\theta$, vậy

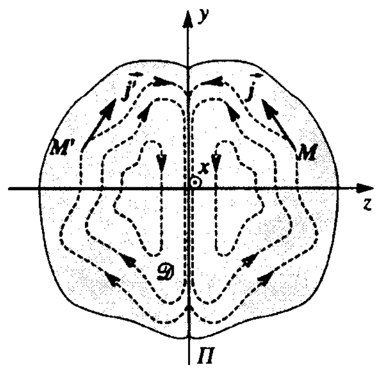
$$j_S(\theta) = \frac{I}{2\pi a\sin\theta}.$$

Trong hình trụ, j là đều $j = \dfrac{I}{(\pi b^2)}$.



Hình 12. Vật dẫn.

3 Sự đối xứng của các phân bố dòng



Hình 13. Đối xứng phẳng.

3.1. Các đối xứng thông thường

Ta sẽ nghiên cứu ảnh hưởng của các thao tác đơn giản (các dịch chuyển) lên một phân bố dòng $\mathcal{D}_j$, như đối với các phân bố điện tích đã thấy trong tĩnh điện.

Các phân bố dòng có thể có nhiều tính đối xứng đáng chú ý. Các tính đối xứng cơ bản là tính đối xứng và phản đối xứng phẳng, sự bất biến bởi phép tịnh tiến dọc theo một trục và sự bất biến với phép quay xung quanh một trục.

3.1.1. Tính đối xứng phẳng

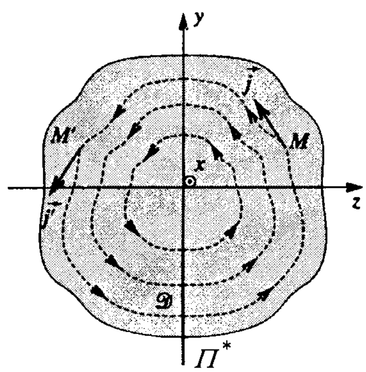
Kí hiệu x, y, z là các tọa độ Descartes sao cho (xOy) là một mặt phẳng đối xứng (hay mặt phẳng - gương), kí hiệu Π, của phân bố (*hình* 13).

Gọi M có tọa độ Descartes (x, y, z) là một điểm của phân bố $\mathcal{D}$. Ảnh của nó qua phép đối xứng $\mathcal{S}$ đối với mặt phẳng Π là điểm M' = $\mathcal{S}(M)$ có tọa độ $(x, y, -z)$.

Phân bố là bất biến với phép đối xứng qua mặt phẳng (xOy) nếu các mật độ dòng $\vec{j}$ và $\vec{j'}$, tại M và M' là đối xứng với nhau qua mặt phẳng Π, ở đây là :

$$j'_x = j_x \ ; \ j'_y = j_y \ ; \ j'_z = -j_z$$

Bằng cách ký hiệu S là phép đối xứng vectơ liên kết với phép đối xứng afin $\mathcal{S}$, ta có $\vec{j'} = S(\vec{j})$ (*hình* 13).



Hình 14. *Phản đối xứng phẳng : $\vec{j'}$ là vectơ đối của vectơ đối xứng của $\vec{j}$. Π* là một mặt phẳng phản đối xứng.*

3.1.2. Phản đối xứng phẳng

Ta sẽ nói tới mặt phẳng phản đối xứng (hay mặt phẳng - phản gương), kí hiệu Π*, nếu phân bố thỏa mãn (*hình* 14) :

$$\vec{j'} = -S(\vec{j})$$

Áp dụng 6

Dòng điện trên các mặt phẳng - gương và phản gương

Ta có thể nói gì về dòng tại các điểm M nằm trong một mặt phẳng – gương hay phản gương của một phân bố dòng ?

Tại một điểm M thuộc một mặt phẳng - gương Π, vectơ $\vec{j}$ phải trùng với đối xứng $\vec{j}'$ của nó vì $M' = M$. Vì vậy, trên một mặt phẳng - gương, vectơ $\vec{j}$ nằm trong mặt phẳng đó. Các đường dòng của phân bố do vậy sẽ tiếp tuyến với mặt phẳng - gương, như hình 13 đối với mặt phẳng gương (xOy).

Ngược lại, nếu điểm M nằm trên một mặt phẳng phản gương, vectơ $\vec{j}$ sẽ vuông góc với mặt phẳng này. Trên *hình* 14, các đường dòng cắt vuông góc với mặt phẳng (xOy).

► **Để luyện tập : BT.2.**

3.1.3. Sự bất biến đối với phép tịnh tiến

Phân bố là bất biến đối với phép tịnh tiến song song với một trục khi mật độ là như nhau tại một điểm M của phân bố và tại mọi điểm M' có được bằng phép tịnh tiến M song song với trục đó.

Với một phân bố bất biến với phép tịnh tiến dọc theo trục (Oz)

$$\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y)$$

Với các dòng phẳng, hình 15 minh họa cho trường hợp này :

$$\vec{j}(x, y) = j_x(x, y)\,\vec{e_x} + j_y(x, y)\,\vec{e_y}\,.$$

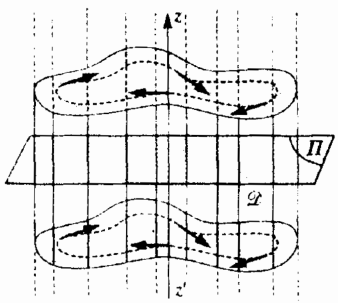
Lưu ý rằng, ở đây mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz) đều là mặt phẳng - gương của phân bố. *Hình* 16 minh họa cho trường hợp này với các dòng có phương đã cho (mọi vectơ $\vec{j}$ đều có cùng phương) : $\vec{j}(x, y) = j_z(x, y)\vec{e}_z$. Trong trường hợp này mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz) đều là một mặt phẳng - phản gương của phân bố.

<u>*Chú ý*</u> :

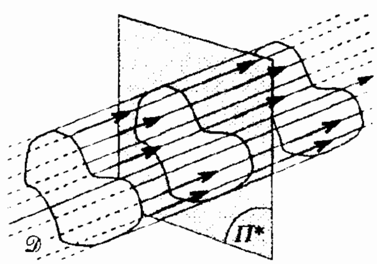
Ta cũng có thể sẽ gặp các trường hợp phân bố bất biến gián đoạn dọc theo một trục, các phân bố này sẽ có tính tuần hoàn dọc theo trục đó.

3.1.4. Sự bất biến đối với phép quay

Một phân bố là bất biến đối với phép quay xung quanh một trục (Oz) nếu phân bố được nhìn thấy theo cùng một cách bởi một người quan sát A và bởi một người quan sát A' là ảnh của A bằng một phép quay trục (Oz).



Hình 15. *Sự bất biến bởi phép tịnh tiến đối với các dòng phẳng*



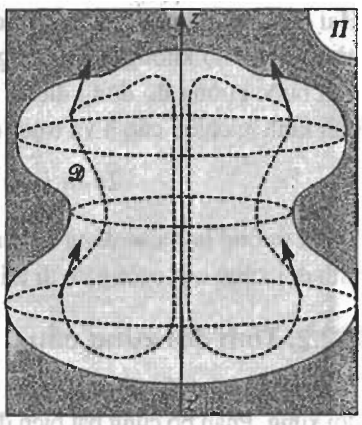
Hình 16. *Sự bất biến bởi phép tịnh tiến đối với các dòng có phương đã cho*

Như vậy, đối với một phân bố dòng bất biến với phép quay xung quanh trục (Oz), các tọa độ của $\vec{j}$, trong cơ sở địa phương $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ của các tọa độ trụ trục (Oz) là độc lập với góc θ.

$$\vec{j}(r, \theta, z) = j_r(r, z)\vec{e}_r + j_\theta(r, z)\vec{e}_\theta + j_z(r, z)\vec{e}_z$$

Lưu ý rằng đối với một phân bố dòng bất biến với phép quay, thì tại điểm ảnh M' của M, ta có được sự chuyển từ $\vec{j}(M)$ qua $\vec{j}'(M')$ bằng một phép quay vectơ.

Vậy nên *hình* 17 biểu diễn một phân bố bất biến với phép quay xung quanh (Oz), *có tính đối xứng trục :* $\vec{j}(r,\theta,z) = j_r(r,z)\vec{e}_r + j_z(r,z)\vec{e}_z$. Chú ý rằng mọi mặt phẳng chứa trục tròn xoay (Oz) đều là một mặt phẳng - gương của phân bố này, các đường dòng đều nằm trong các nửa - mặt phẳng kinh tuyến.

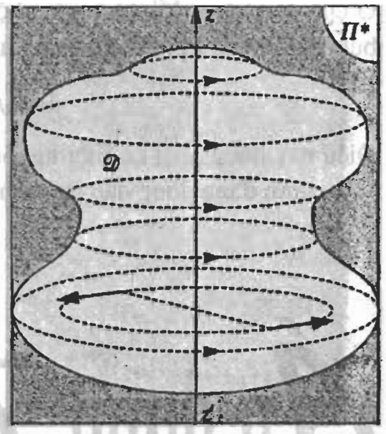


Hình 17. *Bất biến với phép quay xung quanh trục (Oz).*

Hình 18 biểu diễn trường hợp bổ sung của một phân bố *dòng hình vành :* $\vec{j}(r, \theta, z) = j_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$. Khi đó mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) đều là mặt phẳng - phản gương của phân bố dòng.

<u>*Chú ý :*</u>

Dĩ nhiên, ta cũng có thể sẽ gặp các trường hợp phân bố bất biến đối với phép quay gián đoạn xung quanh một trục.



Hình 18. *Phân bố dòng hình vành.*

3.2. Các phân bố có tính đối xứng bội

Các phân bố mà chúng ta sẽ gặp thường sẽ là bất biến đối với nhiều phép đối xứng cơ bản. Những trường hợp đặc biệt về phân bố bất biến với phép tịnh tiến hoặc phép quay đã trình bày đều đã có các mặt phẳng - gương hoặc phản gương.

3.2.1. Tính đối xứng trụ

Một phân bố có tính đối xứng trụ sẽ bất biến đối với phép tịnh tiến song song với trục (Oz) và bất biến với phép quay xung quanh trục đó.

Vì vậy mật độ dòng phải có dạng

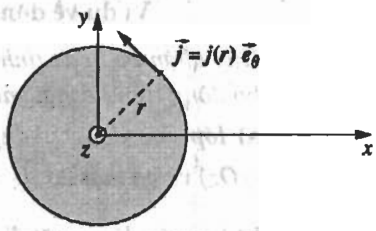
$$\vec{j}(r, \theta, z) = j_r(r)\vec{e}_r + j_\theta(r)\vec{e}_\theta + j_z(r)\vec{e}_z .$$

Ta có thể sẽ gặp các trường hợp sau :

- *Các dòng phẳng và có dạng vành trục (Oz) :*

$$\vec{j} = j_\theta(r)\vec{e}_\theta .$$

Đối với các dòng này, mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng của dòng và mọi mặt phẳng chứa (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng (*hình* 19). Đó là trường hợp các dòng trong ống dây hoặc trên các vòng xoắn.

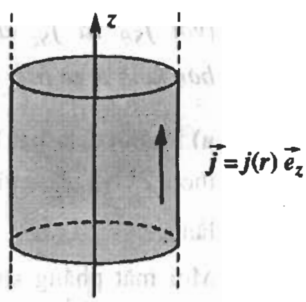


Hình 19. *Các dòng trong ống dây hoặc trên các vòng xoắn.*

- *Các dòng có phương (Oz) :*

$$\vec{j} = j_z(r)\vec{e}_z .$$

Đối với các dòng này, mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) đều là một mặt phẳng phản đối xứng của các dòng, và mọi mặt phẳng chứa (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng (*hình* 20). Đó là trường hợp các dòng hình chỉ trên một sợi dây vô hạn.



Hình 20. *Dòng hình sợi chỉ trên một dây vô hạn.*

- *Các dòng xuyên tâm :*

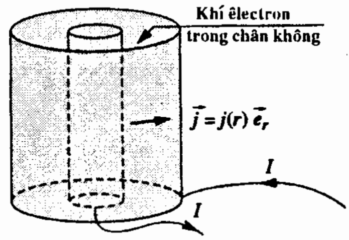
$$\vec{j} = j_r(r)\vec{e}_r$$

Đối với các dòng này, mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) và mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) đều là các mặt phẳng đối xứng của dòng.

Hai phân bố dòng trên đây đều có thông lượng bảo toàn, dù hàm của r thế nào. Ở chế độ không đổi, không có bộ tích lũy điện tích, sự bảo toàn điện tích buộc cường độ dòng điện I phải có cùng một giá trị qua mọi hình trụ bán kính r, chiều cao h và trục (Oz), nghĩa là :

$$2\pi\, rh\, j_r(r) = I \text{, hay là } \vec{j} = \frac{k}{r}\vec{e}_r .$$

Đó là trường hợp các dòng xuyên tâm tồn tại trong một điốt chân không có tính đối xứng trụ, cường độ đi tới một catốt trùng với trục (Oz) (*hình* 21)



Hình 21. *Các dòng có tính đối xứng trụ.*

3.2.2. Tính đối xứng cầu

Phân bố là bất biến đối với phép quay xung quanh tất cả các trục đi qua tâm đối xứng. Phân bố cũng bất biến đối với mọi mặt phẳng chứa tâm đối xứng.

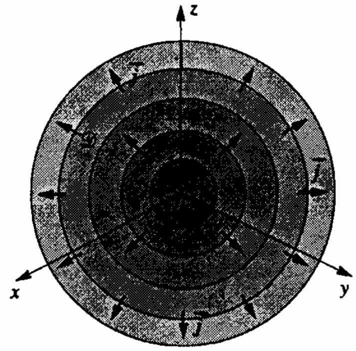
Dùng các tọa độ cầu r, θ và ϕ với gốc là tâm đối xứng, ta có (*hình* 22) :

$$\vec{j}(r,\theta,\phi) = j(r)\vec{e}_r$$

Ở chế độ không đổi, không có bộ tích lũy điện tích, sự bảo toàn điện tích buộc cường độ I phải như nhau qua mọi quả cầu tâm O, nghĩa là :

$$4\pi r^2 j(r) = \text{cte} = I$$

Điều này buộc phải có một nguồn điện tích tại điểm O và có cường độ I, ví dụ dưới dạng dòng dẫn tới có hình sợi chỉ.



Hình 22. *Các dòng có tính đối xứng cầu.*

Áp dụng 7

Ví dụ về dòng trên bề mặt

Hãy nhận biết các tính đối xứng của các phân bố dòng trên bề mặt sau đây :

a) *lớp các dòng phẳng trùng với mặt phẳng (yOz) và có mật độ* $\vec{j_S} = j_S\vec{e}_y$ *đều ;*

b) *lớp các dòng mặt đinh ốc, có mật độ*

$$\vec{j_S} = j_{S\theta}\vec{e}_\theta + j_{Sz}\vec{e}_z$$

(với $j_{S\theta}$ *và* j_{S_z} *không đổi) trên một hình trụ bán kính R và trục (Oz).*

a) Phân bố là bất biến với phép tịnh tiến dọc theo $\vec{e}_y$ và $\vec{e}_z$, vì $\vec{j_S}$ không phụ thuộc cả y lẫn z.

Mọi mặt phẳng song song với (xOy) đều là một mặt phẳng - gương, trong khi mọi mặt phẳng song song với (xOz) lại là một mặt phẳng - phản gương. Không có một phép đối xứng quay nào (hay sự bất biến đối với phép quay nào).

b) Phân bố là bất biến với phép tịnh tiến dọc theo $\vec{e}_z$, và $\vec{j_S}$ không phụ thuộc biến số z.

Hơn nữa, phân bố là bất biến với phép quay xung quanh (Oz), vì j_{Sz} và $j_{S\theta}$ là các hằng số.

Không có một mặt phẳng đối xứng hoặc phản đối xứng nào cả.

Sẽ là sáng suốt nếu xử lí một phân bố như thế như kết quả của sự chồng chất của một dòng có mật độ bề mặt $\vec{j_{S_1}} = j_{Sz}\vec{e}_z$ và một dòng có mật độ bề mặt $\vec{j_{S_2}} = j_{S\theta}\vec{e}_\theta$; những dòng này, khi xử lí riêng rẽ có các tính chất đối xứng phẳng đáng chú ý.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ DÒNG ĐIỆN

• Một dòng điện là một chuyển động toàn bộ (hay chuyển động giạt) của các hạt mang điện tích.

• Cường độ I (S, t) của dòng điện đi qua một diện tích S được liên hệ với điện lượng δQ_m qua S trong thời gian δt bởi hệ thức :

$$\delta Q_m = I\,(S,\,t)\delta t.$$

Cường độ là đại lượng điện phụ thuộc vào sự định hướng của S.

■ CÁC PHÂN BỐ DÒNG

• Vectơ mật độ khối liên kết với vận tốc $\vec{v}$ của chuyển động toàn bộ bởi :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m\vec{v}\,.$$

• Cường độ dòng điện đi qua một diện tích S bằng thông lượng của vectơ mật độ khối của dòng gửi qua diện tích đó :

$$I\,(S,t) = \iint_S \vec{j}(\vec{r},\,t).\mathrm{d}\vec{S}\,.$$

• Ở chế độ không đổi, vectơ $\vec{j}$ có thông lượng bảo toàn. Dòng điện là như nhau qua mọi tiết diện của cùng một ống dòng.

Khi dòng chạy trên các lớp bề mặt, thì vectơ mật độ dòng trên bề mặt $\overrightarrow{j_S}$, liên kết được xác định bởi dI = $\overrightarrow{j_S}.\vec{u}\,\mathrm{d}l$, dI là cường độ đi qua một phần tử chiều dài dl vạch ra trên mặt.

■ TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA CÁC PHÂN BỐ

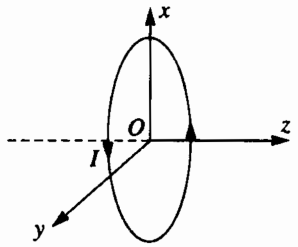
Các phân bố dòng có thể có các tính đối xứng đáng chú ý. Các tính đối xứng cơ bản là tính đối xứng và phản đối xứng phẳng, sự bất biến với phép tịnh tiến dọc theo một trục và sự bất biến với phép quay xung quanh một trục.

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Vòng mang dòng điện hình sợi chỉ cường độ I

Cho một vòng bán kính a và có trục (Oz), có một dòng điện cường độ I chạy qua. Hỏi phân bố này có những tính đối xứng và bất biến nào ?



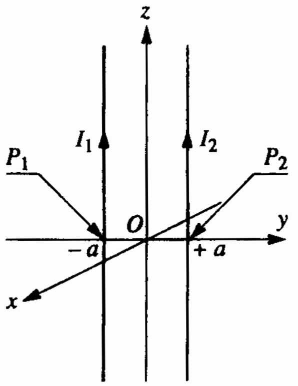
2 Hệ hai dây song song vô hạn

Cho hai sợi dây song song vô hạn, có trục (Oz) đi qua các điểm $P_1(0;-a;0)$ và $P_2(0;+a;0)$ mang các dòng điện hình chỉ I_1 và I_2. Hãy xác định các tính đối xứng và các bất biến của phân bố này trong ba trường hợp sau :

1) I_1 và I_2 bất kì ;

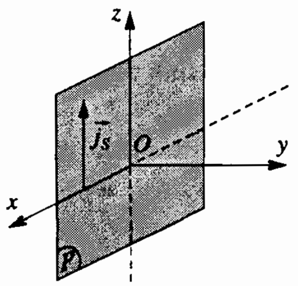
2) $I_1 = I_2 = I$;

3) $I_1 = I$ và $I_2 = -I$



3 Mặt phẳng mang một mật độ dòng đều trên bề mặt

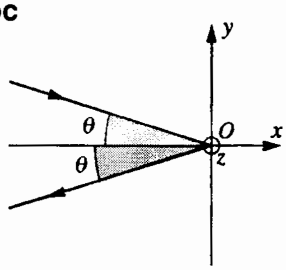
Một mặt phẳng vô hạn P mang một mật độ dòng đều trên bề mặt $\vec{j_S} = j_0\vec{e_z}$ song song với trục (Oz). Hỏi phân bố này có những tính chất đối xứng và những bất biến nào ?



4 Dòng điện có góc

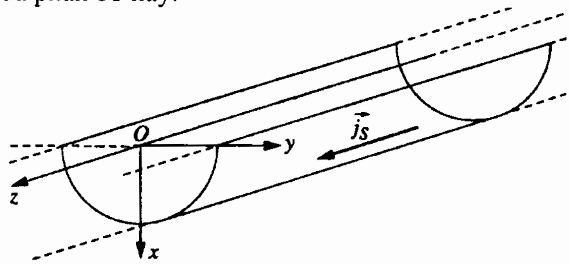
Cho một dòng điện có góc tạo bởi hai dòng điện thẳng bán - vô hạn hợp với nhau một góc 2θ.

Hỏi hệ dòng điện này có những tính đối xứng và bất biến nào ?



5 Phân bố dòng trên một nửa hình trụ vô hạn

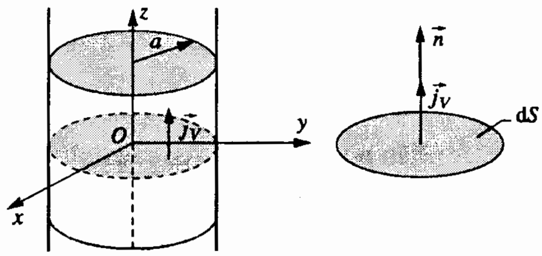
Cho một mật độ dòng đều trên bề mặt $\vec{j_S}$ chạy trên một nửa - trụ trục (Oz), được định hướng theo trục (Oz). Hãy khảo sát các tính đối xứng và các bất biến của phân bố này.



6 Hình trụ mang một mật độ dòng khối đều

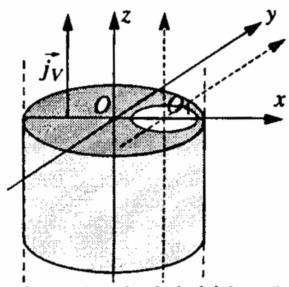
1) Một trụ vô hạn bán kính a, song song với (Oz), mang một mật độ dòng khối đều $\vec{j_V} = j_0\vec{e_z}$ song song với các đường sinh của trụ. Hỏi phân bố dòng này có những tính đối xứng và bất biến nào ?

2) Nhìn từ xa, hình trụ này có thể được xem như vật mang một dòng điện hình chỉ. Hãy xác định cường độ I của dòng điện này.



7 Trụ có lỗ hổng mang một mật độ dòng khối

Một hình trụ vô hạn có đáy tròn, có một dòng khối đều chạy qua, song song với các đường sinh. Trong trụ này có một lỗ hổng đáy tròn và có đường sinh song song với trụ trên.

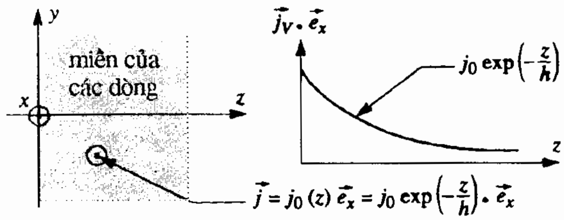


Hãy khảo sát các tính đối xứng và các bất biến của phân bố này.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

8 Mô hình hóa một phân bố dòng trên bề mặt

Khi nghiên cứu một phân bố dòng trên bề mặt, thường chúng ta xét một phân bố dòng đều theo thể tích trên một bề dày nhỏ h. Giả thiết về tính đồng đều này là không cần thiết. Giả sử trong một nửa - không gian $z > 0$, mật độ khối của dòng cho bởi $\vec{j_v} = j_0 e^{-\frac{z}{h}} \vec{e}_x$, trong đó h là một khoảng cách nhỏ ở thang vĩ mô.



1) Hỏi cường độ nguyên tố $dI(z_1, z_2)$ đi qua diện tích giới hạn bởi hai mặt phẳng có độ cao y và $y + dy$ và hai mặt phẳng có độ cao z_1 và z_2 ?

Tính $dI\ (0, z)$ và $dI\ (0, \infty)$. Với giá trị z_0 nào của z ta có $dI\ (0, z_0) = 0{,}90\ dI\ (0\ , \infty)$? Hãy bình luận kết quả này.

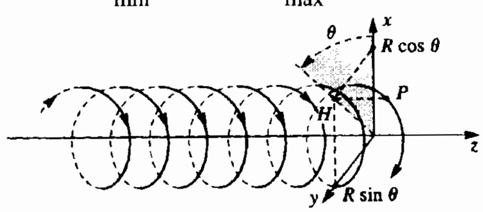
2) Xác định mật độ dòng trên bề mặt tương đương. Bình luận tình huống j_0 tiến tới ∞ và h tiến tới 0, với $j_0 h = j_S = cte$.

9 Dòng hình sợi chỉ trên một đường đinh ốc

Hình vẽ dưới đây biểu diễn một đường đinh ốc trục (Oz), tương ứng với tập hợp những điểm có tọa độ Descartes ($x = R\cos\theta$; $y = R\sin\theta$; $z = \dfrac{p\theta}{2\pi}$, θ biến thiên từ $\theta_{\min}$ đến $\theta_{\max}$).

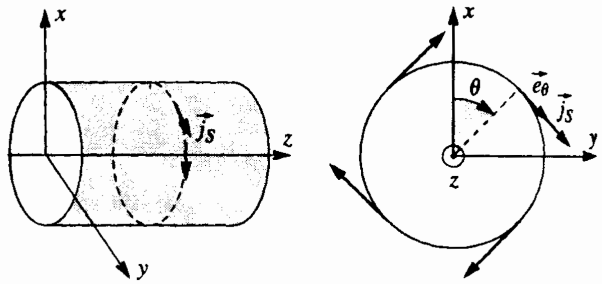
Trên đường đinh ốc này có dòng hình chỉ I chạy qua. Hỏi phân bố dòng này có những tính đối xứng hay những bất biến nào ? Xét trường hợp đinh ốc vô hạn với:

$$\theta_{\min} = -\infty \text{ và } \theta_{\max} = +\infty$$



10 Dòng thuộc loại xôlênoit

Giữa hai mặt phẳng có độ cao z_1 và z_2 có một hệ các dòng điện trên bề mặt loại xôlênoit : trong các tọa độ trụ, dòng j_S viết là $\vec{j_S} = j_0 \vec{e}_\theta$.

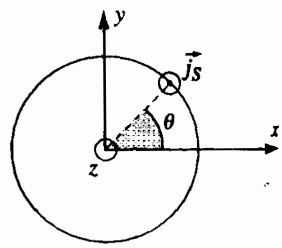


1) z_1 và z_2 là hữu hạn, hỏi hệ dòng này có những tính đối xứng và bất biến nào ?

2) Xét trường hợp trong đó z_1 và z_2 là vô hạn.

11 Trụ mang mật độ dòng trên bề mặt $j_S = j_0 \cos\theta$

Cho một hình trụ tiết diện tròn, có trục đối xứng (Oz), mang một mật độ dòng trên bề mặt $\vec{j_S}$ có dạng



$$\vec{j_S} = j_0 \cos\theta \vec{e}_z ,$$

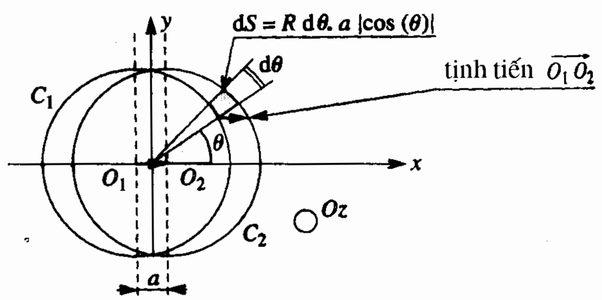
được định hướng song song với các đường sinh. Hỏi phân bố dòng này có những tính đối xứng và bất biến nào ?

12 Lớp trượt

Ta hãy xét hai hình trụ C_1 và C_2 có đáy tròn, bán kính R và có các trục đối xứng $(O_1 z)$ và $(O_2 z)$:

$$O_1 : \left(-\frac{a}{2}\ ;0\ ;0\right) \text{ và } O_2 : \left(+\frac{a}{2}\ ;0;0\right),$$

có các dòng chạy qua. Đối với C_1, $\vec{j_{V_1}} = -j_0 \vec{e}_z$, đối với C_2, $\vec{j_{V_2}} = +j_0 \vec{e}_z$



1) Hãy nghiên cứu các tính đối xứng và các bất biến của phân bố này.

2) Hãy nghiên cứu phân bố dòng tương đương khi $j_0 \to \infty$ và $a \to 0$, với $j_0 a = j_{S_0} = cte$.

LỜI GIẢI

1 Mặt phẳng (xOy) là một mặt phẳng đối xứng của các dòng (Π). Các mặt phẳng (xOz) và (yOz) là các mặt phẳng phản đối xứng của các dòng (Π*). Ngoài ra với mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) cũng như vậy.
Hệ các dòng là bất biến với mọi phép quay xung quanh (Oz).

2 Trong cả ba trường hợp :
- Mặt phẳng (yOz) là một mặt phẳng đối xứng của các dòng (Π);
- Mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz) (đặc biệt là (xOz)) đều là một mặt phẳng phản đối xứng của các dòng (Π*) ;
- Phân bố là bất biến với mọi phép tịnh tiến theo trục (Oz).

1) Không có một tính đối xứng nào hay bất biến nào khác.
2) Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng của dòng (Π).
3) Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng phản đối xứng của dòng Π*.

3 • Các mặt phẳng đối xứng của dòng (Π)
- Mặt phẳng (xOz) ;
- Mọi mặt phẳng vuông góc với (Ox) (đặc biệt là (yOz))
• Mặt phẳng phản đối xứng của dòng (Π*)
- Mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz).

4 Mặt phẳng (xOy) là một mặt phẳng đối xứng (Π) của dòng. Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng phản đối xứng (Π*) của dòng. Không có một bất biến nào .

5 Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng (Π) của dòng. Mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz) đều là một mặt phẳng phản đối xứng (Π*) của dòng, đặc biệt là mặt phẳng (xOy).

6 1) Mọi mặt phẳng qua (Oz) là một mặt phẳng đối xứng của dòng (Π), đặc biệt là (xOz) và (yOz). Mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) là mặt phẳng phản đối xứng của dòng (Π*)
Hệ là bất biến với mọi phép tịnh tiến theo (Oz) và với mọi phép quay xung quanh trục (Oz).
2) Cường độ đi qua một diện tích bằng thông lượng của vectơ mật độ khối của dòng qua diện tích đó, ta có : $I = j_0 \pi a^2$.

7 Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng (Π) của dòng. Mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz) là một mặt phẳng phản đối xứng (Π*) của dòng. Hệ dòng điện là bất biến với mọi phép tịnh tiến theo (Oz).

Nếu O trùng với O_1 thì mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng (Π) của dòng và hệ dòng điện là bất biến với mọi phép quay xung quanh trục (Oz).

8 1) Dòng nguyên tố đi qua một diện tích dS bằng thông lượng của vectơ mật độ khối của dòng qua diện tích đó, ta có :

$$dI(z_1, z_2) = \left(\int_{z_1}^{z_2} j_V(z)dz\right)dy = \left(\int_{z_1}^{z_2} j_0 e^{-\frac{z}{h}} dz\right)dy$$

$$= -j_0 h\left[e^{-\frac{z}{h}}\right]_{z_1}^{z_2}.dy = j_0 h\left(e^{-\frac{z_1}{h}} - e^{-\frac{z_2}{h}}\right) dy$$

$$dI(0,z) = j_0 h\left(1 - e^{-\frac{z}{h}}\right)dy \quad \text{và} \quad dI(0,\infty) = j_0 h dy.$$

Nếu $dI(0, z_0) = 0{,}90 dI(0,\infty)$, thì $e^{-\frac{z_0}{h}} = \frac{1}{10}$ hay là $z_0 = h\ln(10) = 2.3h$.

Dòng điện toàn phần tải đi giữa hai mặt phẳng có độ cao y và y + dy là trên một bề dày gần bằng h.
2) Nếu h khá nhỏ trước khoảng cách quan sát, thì phân bố dòng có thể được coi như trên bề mặt và $j_S = j_0 h$.
Mô hình này tương đương với mô hình thu được bằng cách coi j_0 là đều trên một bề dày h.

9 • Đường đinh ốc có kích thước hữu hạn.
Khi đường đinh ốc có kích thước hữu hạn thì không có một tính đối xứng và bất biến nào.
• Đinh ốc có kích thước vô hạn.
Khi đinh ốc có kích thước vô hạn thì chỉ có một tính đối xứng đáng chú ý : tính bất biến với phép tịnh tiến một chiều dài bằng bội số nguyên của bước p của đinh ốc.

10 1) Lớp xôlênoit hữu hạn
Mọi mặt phẳng đi qua trục (Oz) là một mặt phẳng phản đối xứng (Π*) của dòng.
Hệ dòng điện là bất biến với mọi phép quay xung quanh trục (Oz).
Mặt phẳng có độ cao $\frac{(z_1 \text{ và } z_2)}{2}$ là một mặt phẳng đối xứng (Π) của các dòng.
2) Lớp xôlênoit vô hạn
Mọi mặt phẳng đi qua trục (Oz) đều là một mặt phẳng phản đối xứng (Π*) của dòng.
Hệ các dòng điện là bất biến với mọi phép quay xung quanh trục (Oz).
Mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) là một mặt phẳng đối xứng (Π) của dòng. Hệ các dòng điện là bất biến với mọi phép tịnh tiến theo (Oz).

11 Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng (Π) của dòng. Mặt phẳng (yOz) và mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) đều là các mặt phẳng phản đối xứng (Π*) của các dòng.
Hệ các dòng điện là bất biến với mọi phép tịnh tiến song song với trục ((Oz).

12 1) Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng (Π) của các dòng. Mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) đều là các mặt phẳng phản đối xứng (Π*) của các dòng. Hệ các dòng điện là bất biến với mọi phép tịnh tiến song song với trục (Oz).
2) Cường độ đi qua phần tử diện tích dS của hình vẽ bằng :
- $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$: $dI = j_0 dS = j_0 R d\theta . a\cos\theta$
- $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$: $dI = -j_0 dS = -j_0 R d\theta . a(-\cos\theta) = j_0 R d\theta . a\cos\theta$

Nghĩa là $dI = j_0 R d\theta . a\cos\theta$, với mọi θ. Đại lượng này có thể viết là :

$$dI = j_0 aR\cos\theta\, d\theta = j_0 a\cos\theta dl = j_S dl \text{ với } j_S = j_0 a\cos\theta .$$

Ta lại có phân bố dòng trên bề mặt của bài tập 11.

TỪ TRƯỜNG

7

Lịch sử

Dòng điện tạo ra từ trường và một sợi dây có dòng điện qua đặt trong từ trường bị từ trường tác dụng lực – lực LAPLACE.

Về mặt lịch sử, các khái niệm trên dần dần được thấy là cần thiết, tài liệu đưa ra về vật từ hóa làm phức tạp thêm sự giải thích các hiện tượng. Hầu như mọi thứ bắt đầu vào năm 1819 với Hans – Christian OERSTED, nhà vật lí người Đan Mạch, ông quan sát thấy sự dịch chuyển của một kim nam châm đặt gần một sợi dây dẫn có dòng điện chạy qua.

Vào năm 1820, Jean–Baptiste BIOT và Félix SAVART nghiên cứu các tính chất của lực "tác dụng lên một trong các cực từ" của kim nam châm. Pierre–Simon de LAPLACE đã diễn tả lực này bằng một công thức mang tên BIOT và SAVART

André–Marie AMPÈRE (1775 – 1836), được coi là người sáng lập ra điện từ học, đã từ nghiên cứu này rút ra khái niệm và các tính chất của trường từ tĩnh tạo ra bởi các dòng điện ;

Việc chọn tên của nhà vật lí người Pháp này cho đơn vị cường độ dòng điện trong Hệ đơn vị Quốc tế là một sự thừa nhận các công trình về điện của ông.

MỤC TIÊU

- Nắm được từ trường qua định luật BIOT và SAVART.
- Các tính chất đối xứng.
- Thông lượng của trường.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các phân bố dòng.
- Nghiên cứu từ trường ở cấp trung học.

1 Lực LORENTZ và từ trường

1.1. Lực LORENTZ

Ta đã biết rằng một nam châm hay một cuộn dây dẫn có dòng điện chạy qua là các nguồn của một từ trường $\vec{B}$. Các trường này được biểu hiện ở chỗ một hạt chuyển động có điện tích q và có vận tốc $\vec{v}$, khi đi qua gần các nguồn này sẽ bị lực LORENTZ tác dụng : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, hay một phần tử $\mathrm{d}\vec{l}$ của mạch có dòng điện cường độ I chạy qua sẽ bị lực LAPLACE tác dụng :

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Trong bài giảng này, ta sẽ chỉ nghiên cứu từ trường (còn gọi là cảm ứng từ) tạo ra bởi các dòng điện.

Chú ý :

Nhớ rằng Trái đất có một từ trường (x. chương 9) mà thành phần nằm ngang ở Pháp là vào cỡ 2.10^{-5} T.

1.2. Phạm vi nghiên cứu

Các định luật sắp tới là tuyệt đối đúng trong trường hợp từ tĩnh, nghĩa là đối với các trạng thái không phụ thuộc thời gian (dòng điện không đổi, không có sự tích tụ điện tích). Sau đây ta sẽ thường dùng từ ngữ "từ trường" với nghĩa "trường từ tĩnh".

Các định luật này cũng mở rộng đối với các bài toán mà kích thước đặc trưng đang nghiên cứu là L, cho trường hợp các trạng thái thay đổi đặc trưng bởi thời gian T sao cho $L << cT$, trong đó c là vận tốc của ánh sáng trong chân không. Ta sẽ thấy sự chứng minh tính đúng đắn của phép gần đúng chuẩn không đổi (hay "biến thiên chậm") này ở năm thứ hai.

Áp dụng 1

Phạm vi của phép gần đúng của các trạng thái biến đổi chậm

Ta muốn nghiên cứu trường tạo ra bởi một cuộn dây (kích thước cỡ 10cm), có dòng điện I hình sin tần số f = 10 kHz chạy qua. Định luật BIOT và SAVART mà ta sắp phát biểu cho từ trường trong trường hợp của một trạng thái không đổi, theo anh có thể dùng để tìm giá trị của trường tạo ra ở cách cuộn dây vài mét được không ?

Thời gian đặc trưng của bài toán là :

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}1 \text{ ms}$$

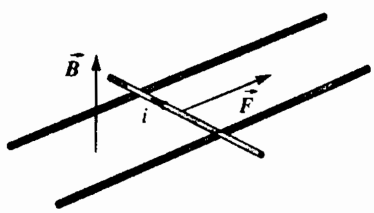
Trong các điều kiện này, cT = 30km (cT là bước sóng trong chân không của sóng điện từ tần số f). Từ trường phải tính nhờ định luật BIOT và SAVART, sẽ mô tả trường thực với một sự gần đúng tuyệt vời ở những khoảng cách nhỏ hơn cT.

■ **Phép đo trường**

Lực LAPLACE (x. Cơ II, chương 3) tác dụng lên một phần tử $\mathrm{d}\vec{l}$ của mạch có dòng điện cường độ I chạy qua : $\mathrm{d}\vec{F} = i\,\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}$, là một đại lượng đo được. Ở các lớp dưới, ta đã quan sát thấy ảnh hưởng của lực tác dụng lên cuộn dây của một chiếc loa.

Từ trường $\vec{B}$ tác dụng lên một mạch điện có dòng điện i chạy qua có thể được tính toán từ phép đo lực tác dụng $\vec{F}$ lên mạch (*hình* 1).

Trong thực tế, một máy dò dùng hiệu ứng HALL, ít cồng kềnh, chính xác hơn, thường được dùng để đo từ trường.

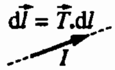


Hình 1. *Lực LAPLACE.*

2 Định luật BIOT và SAVART

2.1. Vectơ phần tử dòng điện

Đối với một dòng điện hình sợi chỉ, phần tử dòng $\mathrm{d}\vec{C}$ liên kết với một phần tử chiều dài $\mathrm{d}\vec{l}$ của mạch có dòng I chạy qua, được xác định bởi $\mathrm{d}\vec{C} = I\,\mathrm{d}\vec{l}$.
Tùy theo sự mô hình hóa, theo thể tích hay theo bề mặt của một phân bố dòng, ta sẽ định nghĩa vectơ phần tử dòng, kí hiệu $\mathrm{d}\vec{C}$, theo bảng dưới đây :

Phân bố $\mathcal{D}_j$	Phân bố dòng	Phần cắt nguyên tố	Phần tử dòng liên kết
hình sợi	dòng $I(A)$	chiều dài $\mathrm{d}\vec{l}$ (m) 	$\mathrm{d}\vec{C} = I\,\mathrm{d}\vec{l}$
khối	mật độ khối $\vec{j}_V.(A.m^{-2})$	thể tích $\mathrm{d}\tau\,(\mathrm{m}^3)$ 	$\mathrm{d}\vec{C} = \vec{j}.\mathrm{d}\tau$
bề mặt	mật độ mặt $\vec{j}_s(\mathrm{A.m}^{-1})$	diện tích $\mathrm{d}S\,(\mathrm{m}^2)$ 	$\mathrm{d}\vec{C} = \vec{j}_s\,\mathrm{d}S$

Hình 2. *Định nghĩa các phần tử dòng.*

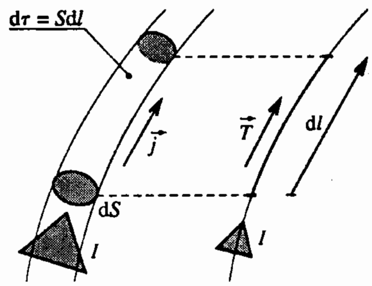
Chuẩn của một phần tử dòng được biểu thị bằng A.m, bất kể loại phân bố nào.

Một phần tử dòng được liên kết với vectơ vận tốc toàn bộ của các hạt mang điện chuyển động, nên chú ý rằng $\mathrm{d}\vec{C}$ là *một vectơ cực.*

Ví dụ, đối với một mạch hình sợi có dòng điện mật độ khối $\vec{j}$ giả sử đều chạy qua trong một tiết diện thẳng (nhỏ) của dây có diện tích dS (hình 3) :

$$\vec{j}\mathrm{d}\tau = \vec{j}\mathrm{d}S.\mathrm{d}l = I\mathrm{d}l\vec{T} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \quad (\text{vì } \vec{j} = j\vec{T} \text{ và } \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l.\vec{T})$$

Trong trường hợp này, có sự đồng nhất giữa hai cách thiết lập công thức.



Hình 3. *Mạch hình sợi chỉ.*

2.2. Trường gán cho một phần tử dòng

Nếu các điện tích là nguồn của trường tĩnh điện, thì các phần tử dòng là nguồn của từ trường.

Biểu thức, được coi như một *tiên đề*, của phần đóng góp với trường từ tĩnh của một phần tử dòng, nằm ở điểm P, vào trường toàn phần $\vec{B}(M)$ được cho bởi định luật BIOT và SAVART :

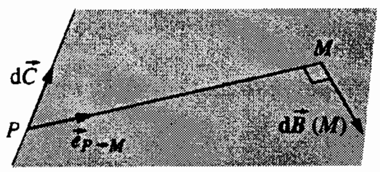
$$\mathrm{d}\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{d}\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{\|PM\|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{d}\vec{C} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{\|PM\|^3}$$

Trường tổng hợp là tổng của các phần đóng góp nguyên tố, với $\mathrm{d}\vec{C} = \vec{j}_v\mathrm{d}\tau$ hay $\mathrm{d}\vec{C} = \vec{j}_S\mathrm{d}S$ hay $\mathrm{d}\vec{C} = I\mathrm{d}\vec{l}$ tùy theo từng trường hợp.

Vì ta không thể cô lập một phần tử dòng với phần còn lại của mạch nên ta không thể kiểm nghiệm trực tiếp tiên đề này : đại lượng duy nhất có một ý nghĩa vật lí (với tư cách là đại lượng đo được) là trường tổng hợp $\vec{B}$ tạo ra bởi toàn mạch.

Hệ số μ_0, có thứ nguyên, đúng bằng $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,Hm^{-1}$ (H gọi là henri, đơn vị của độ tự cảm)

Đơn vị của từ trường là tesla (kí hiệu : T).



Hình 4. $\mathrm{d}\vec{B}$ *vuông góc với mặt phẳng xác định bởi điểm P và các vectơ* $\mathrm{d}\vec{C}$ *và* $\overrightarrow{PM}$.

Áp dụng 2

Đơn vị của $\vec{B}$ và μ_o

Hãy biểu thị các thứ nguyên của $\vec{B}$ và μ_o nhờ các đơn vị : kg, m, s *và* A *của Hệ đơn vị Quốc tế.*

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ là một lực, đo bằng kg.m.s^{-2}. Vậy thứ nguyên của trường là :

$$[B] = \frac{[lực]}{[diện tích.vận tốc]} = \frac{[lực]}{[dòng.thời gian.vận tốc]}$$

$$= \text{kg.A}^{-1}.\text{s}^{-2} = \text{T}$$

Sử dụng biểu thức được tiên đề hóa ở trên, ta có :

$$[\mu_o] = [B]\frac{[chiều\ dài^2]}{[\text{d}C]}$$

$$= \text{T.m}^2.\text{A}^{-1}.\text{m}^{-1}$$

$$= \text{kg.m.A}^{-2}.\text{s}^{-2}$$

2.3. Biểu thức của từ trường theo định luật BIOT và SAVART

Định luật BIOT và SAVART được phát biểu như một tiên đề rằng trường tạo ra tại M bởi một phân bố $\mathcal{D}_j$ (*hình* 5) là sự chồng chất của các phần đóng góp nguyên tố $\text{d}\vec{B}$ của các phần tử dòng của phân bố :

$$\vec{B}(M) = \sum_{\text{d}\vec{C} \in \mathcal{D}_j} \frac{\mu_o}{4\pi} \text{d}\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{\| PM \|^2}$$

Tùy theo từng loại phân bố, ta sẽ viết trường này dưới một trong các dạng sau :

■ **Phân bố theo thể tích**

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}_j} \vec{j}_v \text{d}\tau \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2}$$

■ **Phân bố theo bề mặt**

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{\mathcal{D}_j} \vec{j}_S \text{d}S \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2}$$

■ **Phân bố hình sợi chỉ**

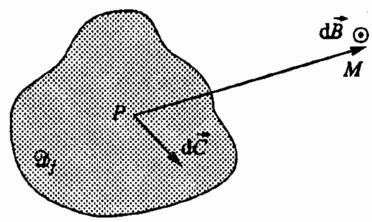
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\mathcal{D}_j} I\text{d}\vec{P} \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2}$$

Chế độ không đổi buộc dòng phải được "khép kín trên chính nó", nên phân bố này có dạng một đường cong kín C và ta sẽ có thể viết :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_C I\text{d}\vec{P} \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2}$$

<u>*Chú ý :*</u>

• *Sự tương tự của các biểu thức trên đây với các biểu thức của trường tĩnh điện của một phân bố là đáng chú ý : chỉ cần chuyển* $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ *thành* $\frac{\mu_o}{4\pi}$ *và* $[\text{d}q_P]$ *thành* $[\text{d}\vec{C}\wedge]$ *trong các biểu thức của trường. Ta sẽ thấy ở năm thứ hai là sự tương tự này có một ý nghĩa sâu xa. Các trường tĩnh điện và từ trường là hai mặt của cùng một đối tượng là trường điện từ.*



Hình 5. *Từ trường của một phân bố dòng.*

• *Đối với một phân bố dòng theo thể tích, tích phân BIOT và SAVART cho phép tính toán từ trường tại mọi điểm trong không gian.*

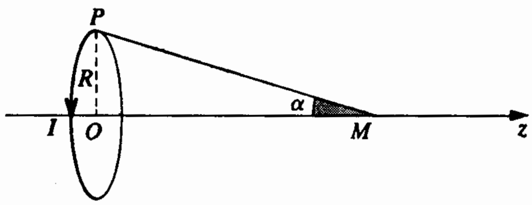
• *Trong trường hợp một phân bố theo bề mặt, tích phân này không cho phép tính trường trên một lớp dòng (Ta sẽ thấy có một sự gián đoạn hữu hạn của thành phần tiếp tuyến của $\vec{B}$ khi đi qua mặt này).*

• *Đối với một sơ đồ hóa hình sợi chỉ, phải loại trừ phép tính từ trường tại một điểm của mạch : khi đó tích phân ở đây là phân kì (Xem kết quả của phép tính trường của một dây thẳng vô hạn khi r tiến tới O, trong bài tập 1.).*

Áp dụng 3

Trường tạo ra bởi một vòng dây tròn ở trên trục của vòng

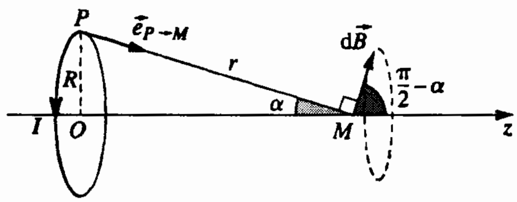
Tính trường từ tĩnh tạo ra bởi một vòng dây bán kính R tại một điểm M trên trục của vòng, vòng được nhìn dưới góc α từ điểm M (hình 6).



Hình 6. *Vòng dây tròn.*

Gán vào điểm P của vòng, vị trí xác định bởi các tọa độ trụ R, θ và $Z_P = 0$, một phần tử của dòng $d\vec{C} = Rd\theta.\vec{e}_\theta$. Trường nguyên tố $\overrightarrow{dB}$ của phần tử dòng này được biểu diễn trên hình 7.

Khi điểm P chạy trên vòng, θ biến thiên từ 0 đến 2π và $\overrightarrow{dB}$ vạch ra hình nón đỉnh M, có nửa góc ở đỉnh $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Vì vậy trường toàn phần $\vec{B}(M)$ sẽ hướng theo (Oz) :



Hình 7. *Phần tử từ trường.*

$$\vec{B}(M) = (\vec{B}(M).\vec{e}_z)\vec{e}_z = \left(\int_{\theta=0}^{\pi} d\vec{B}.\vec{e}_z\right).\vec{e}_z\,.$$

Mà ta có :

$$d\vec{B}.\vec{e}_z = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} Rd\theta, \vec{e}_\theta \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)\vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} Rd\theta \frac{\overrightarrow{\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_{P\to M}}\,\overrightarrow{e_z}}{\left(\frac{R}{\sin\alpha}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\theta.\frac{\sin^3\alpha}{R}$$

Từ trường của một vòng dây tròn trên trục bằng :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha.\vec{e}_z$$

Đặc biệt, trường từ tĩnh tạo ra tại tâm của vòng bằng :

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_z$$

Hai kết quả này cần được ghi nhớ (và phải có thể tìm lại được nhanh chóng)

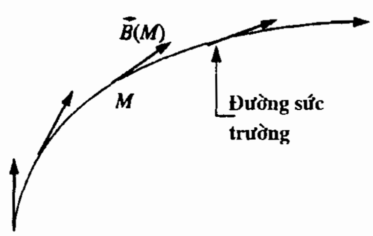
▶ **Để luyện tập : BT1**

3 Tôpô của trường

3.1. Đường sức trường

3.1.1. Định nghĩa

Trường liên tục tiếp tuyến với các đường cong gọi là các đường sức trường (*hình* 8). Các đường này được định hướng bởi chiều của trường.



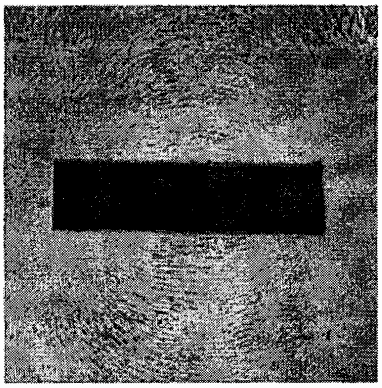
Hình 8. *Ví dụ về đường sức trường.*

3.1.2. Phương trình của một đường sức trường

Một dịch chuyển nguyên tố $d\overrightarrow{M}$ dọc theo một đường sức trường luôn song song với trường $\vec{B}$. Phương trình vi phân (vectơ) của một đường sức trường là :

$$d\overrightarrow{M} \wedge \vec{B} = \vec{O}$$

Bằng cách tích phân phương trình vi phân này, ta sẽ thu được đường sức trường xuất phát từ một điểm ban đầu đã cho.



Hình 11. *Ví dụ : từ phổ của một nam châm.*

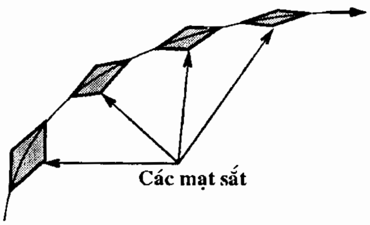
3.2. Sự thể hiện rõ một đường sức trường

3.2.1. Bằng thực nghiệm

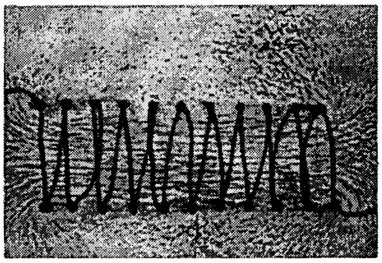
Ta có thể làm hiện rõ các đường sức trường của một hệ dòng điện (hoặc nam châm) bằng cách tiến hành như sau :

Trên một tấm thủy tinh (hoặc nhựa plêxiglat) đặt trong miền có từ trường, ta rắc mạt sắt. Dưới tác dụng của từ trường, các mạt sắt (có dạng dài dài) biến thành các nam châm con (hay những chiếc la bàn nhỏ) và định hướng song song với từ trường này.

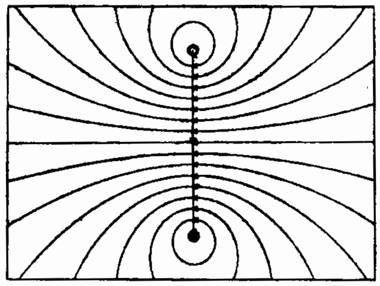
Các nam châm nhỏ này xếp thẳng hàng nối đuôi nhau sẽ cụ thể hóa một cách gần đúng một đường sức trường (*hình* 9). Làm như vậy, ta thu được các từ phổ trên các *hình* 10 và 11.



Hình 9. *Các phần tử mạt sắt giống như các nam châm con định hướng song song với từ trường*



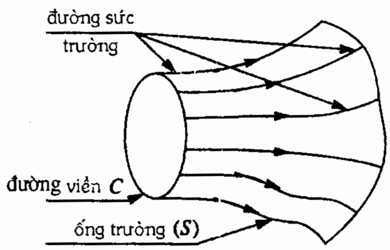
Hình 10. *Ví dụ : Từ phổ của một ống dây (xôlênôit – tập hợp các vòng dây)*



Hình 12. *Các đường sức trường của vectơ cảm ứng từ tạo ra bởi một vòng dây.*

3.2.2. Bằng sự mô phỏng

Khi vẽ một đường sức trường bằng sự mô phỏng (*hình* 12), phương trình vi phân $d\overrightarrow{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ được giải bắt đầu từ một điểm đã cho của không gian.



Hình 13. *Ống trường.*

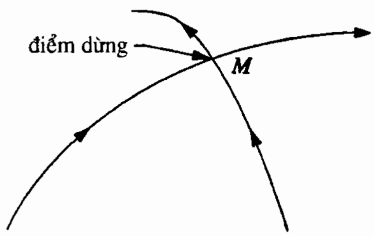
3.3. Ống trường

Tập hợp các đường sức trường tựa trên một đường cong kín (hay đường viền) *C*, sinh ra một mặt *S* được gọi là ống trường, biểu diễn trên hình 13.

3.4. Điểm trường bằng không, điểm kì dị

Hai đường sức trường không thể cắt nhau, như được đưa ra trên hình vẽ 14, tại một điểm M ở đó từ trường là xác định và khác không. Như vậy, phương của trường và chính trường này sẽ không xác định tại điểm đó.

Nếu trường bằng không tại điểm *M*, thì *M* được gọi là *điểm trường bằng không* (hay điểm dừng).



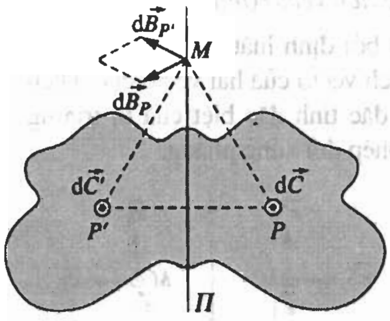
Hình 14. *Điểm trường bằng không.*

4 Các tính chất đối xứng của từ trường

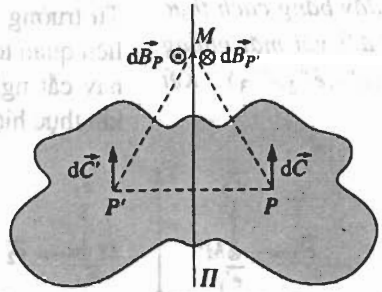
Cũng như trong tĩnh điện, phép tính giá trị của trường từ các tích phân thường là vất vả ; ta sẽ gặp các tình huống trong đó phân bố điện tích có các tính chất đối xứng đáng chú ý, có thể đơn giản đáng kể sự xác định trường.

4.1. Đối xứng phẳng

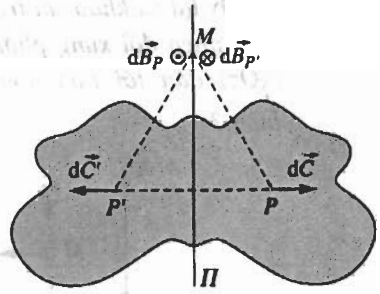
Giả sử phân bố $\mathscr{D}_j$ bất biến với một phép đối xứng phẳng $\mathscr{S}$ đối với mặt phẳng Π.



Hình 15a



Hình 15b

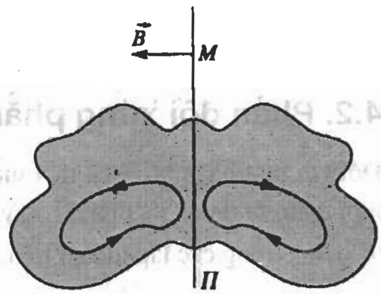


Hình 15c

Ta hãy đứng tại một điểm M của mặt phẳng đối xứng. Xét các phần đóng góp nguyên tố $d\vec{B}_P(M)$ và $d\vec{B}_{P'}(M)$ vào trường toàn phần của hai phần tử dòng $\overrightarrow{dC}$ và $\overrightarrow{dC}'$ liên kết với các điểm P và P' đối xứng với nhau qua Π. Hình 15 đưa ra các định hướng khác nhau có thể xem xét được và chứng tỏ $d\vec{B} + d\vec{B}'$ là vuông góc với mặt phẳng Π.

Như vậy, ta có thể kết luận (*hình* 16a) :

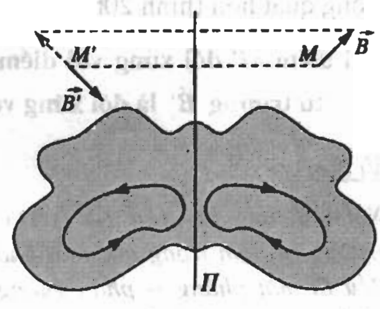
Từ trường $\vec{B}$ vuông góc với một mặt phẳng - gương tại mỗi điểm của mặt phẳng này.



Hình 16a. *Từ trường trên một mặt phẳng đối xứng.*

Tổng quát hơn, ta sẽ có (*hình* 16b) :

Tại điểm M' đối xứng với M đối với mặt phẳng - gương Π, từ trường $\vec{B}'$ là *vectơ đối của đối xứng vectơ* của trường $\vec{B}$ tại M đối với mặt phẳng này.



Hình 16b. *Các trường của hai điểm đối xứng.*

<u>*Chú ý :*</u>

Chúng tôi để lại cho độc giả phần công việc để tự nghiệm lại về kết quả trên bằng cách sử dụng một phương pháp tương tự như đã sử dụng đối với trường tĩnh điện ở chương 2, điều kể ra cũng hơi nhàm chán, và đề nghị độc giả áp dụng vào phần tiếp theo để tự nghiệm lại về các tính chất đặc biệt của tính đối xứng của tích vectơ của hai vectơ.

Áp dụng 4

Sự biến đổi của tích vectơ của hai vectơ

Xét một tam diện ba góc vuông thuận của ba vectơ đơn vị $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *với* $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ *(h.17)*

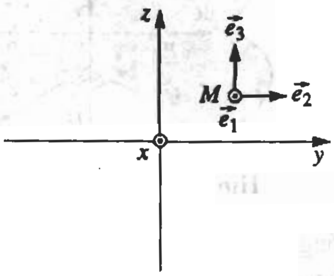
1) *Hãy dựng tam diện có các vectơ* $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$ *thu được bằng phép quay tam diện trên một góc bằng* π *xung quanh trục (Oz). Hỏi phép quay này còn giữ được các tính chất của tam diện ban đầu không ?*

2) *Lấy lại sự khảo sát trên đây bằng cách thực hiện phép đối xứng phẳng đối với mặt phẳng (xOz) dẫn tới tam diện* $(\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3)$. *Kết luận ?*

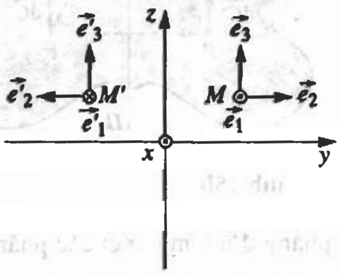
1) Phép dựng được biểu diễn trên hình 18. Ta có thể thấy rằng tam diện $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$ **là một tam diện trực giao thuận :** *các phép quay bảo toàn tích vô hướng và tích vectơ.*

2) Đối với sự thực hiện phép đối xứng phẳng, phép này còn biến đổi M thành M', ta nhận thấy tam diện $(\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3)$ là trực giao, nhưng nghịch. *Thực hiện phép đối xứng phẳng làm đảo ngược tích vectơ* (*hình* 19)

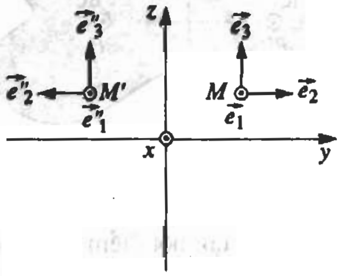
Từ trường cho bởi định luật BIOT và SAVART liên quan tới tích vectơ của hai vectơ cực. Điều này cắt nghĩa đặc tính đặc biệt của từ trường khi thực hiện phép đối xứng phẳng.



Hình 17



Hình 18

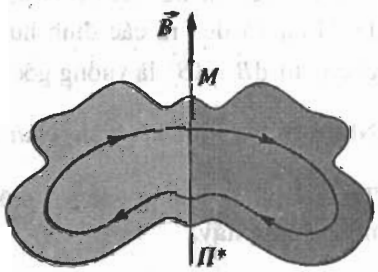


Hình 19

4.2. Phản đối xứng phẳng

Đối với một phân bố $\mathcal{D}$ có một mặt phẳng phản đối xứng Π^*, và đối với một điểm M thuộc mặt phẳng này, ta chỉ cần đổi chiều của trường nguyên tố $d\vec{B}_P$, trong các lập luận ở trên. Vì vậy (*hình* 20a) :

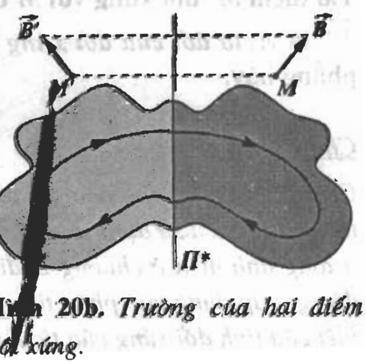
Từ trường $\vec{B}$ nằm trong một mặt phẳng - phản gương Π^* tại mỗi điểm của mặt phẳng này.



Hình 20a. *Trường trên một mặt phẳng phản đối xứng.*

Tổng quát hơn (hình 20b) :

Tại điểm M' đối xứng với điểm M đối với mặt phẳng - phản gương Π^* từ trường $\vec{B}'$ là đối xứng vectơ của trường $\vec{B}$ tại M.



Hình 20b. *Trường của hai điểm đối xứng.*

Ví dụ :

Xét một vòng dây tròn trục (Oz) có dòng điện I chạy qua. Các đường sức trường sẽ nằm trong các mặt phẳng chứa trục (Oz), các mặt phẳng này đều là mặt phẳng – phản gương của phân bố. Vì vậy, ta sẽ chọn mặt phẳng (xOz) để biểu diễn một vài đường sức từ trường của vòng dây (h.12) mà ta có thể minh họa đặc tính khi thực hiện phép đối xứng phẳng.

• Các mặt phẳng chứa trục (Oz) của vòng dây đều là các mặt phẳng - phản gương.

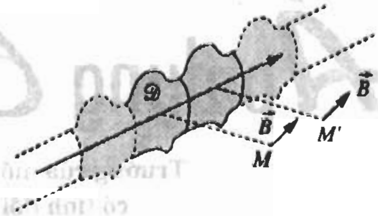
Trên trục (Oz), từ trường song song với $\vec{e}_z$. Nhận xét này phù hợp với giá trị $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha.\vec{e}_z$ (*) mà ta đã tính được (x. áp dụng 3).

Tại điểm $M'(x, O, -z)$ đối xứng của điểm $M(x, y, z)$ qua mặt phẳng – phản gương (yOz), từ trường $\vec{B}'$ là đối xứng của trường $\vec{B}$ qua mặt phẳng này.

• Mặt phẳng (xOz) của vòng dây là một mặt phẳng - gương

Trên hình 12, các đường sức trường cắt vuông góc với trục (Ox). Trường là giống nhau tại các điểm $A(0, 0, z_o)$ và $A'(0, 0, -z_o)$ (điều này có nghĩa phải đổi α thành $\pi - \alpha$ trong biểu thức (*)).

Tại điểm $M''(x, O, -z)$ đối xứng của điểm $M(x, O, z)$, trường $\overrightarrow{B''}$ là vectơ đối của đối xứng của $\vec{B}$ đối với (xOy).



Hình 21. *Bất biến với phép tịnh tiến.*

4.3. Bất biến với phép tịnh tiến

Khi một phân bố $\mathcal{D}_j$ là bất biến với phép tịnh tiến Δz song song với trục (Oz), thì người quan sát sẽ nhận thấy cùng một phân bố nếu người này ở điểm có tọa độ Descartes (x, y, z) hay tại điểm do tịnh tiến điểm trên có tọa độ $(x, y, z + n\Delta z)$, trong đó n là một số nguyên. Vậy trường là giống nhau tại các điểm này (*hình* 21) : $\vec{B}(x, y, z + n\Delta z) = \vec{B}(x, y, z)$

Đối với một phân bố bất biến với (mọi) phép tịnh tiến theo phương của trục (Oz), từ trường sẽ có dạng $\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y)$.

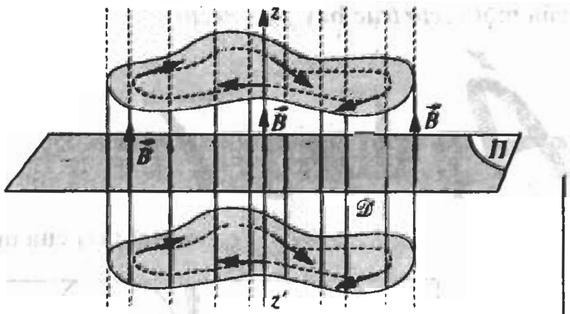
Áp dụng 5

Từ trường của một phân bố dòng phẳng

Hãy xác định hình dạng của từ trường tạo ra bởi các dòng phẳng :

$$\vec{j}(x,y,z) = j_x(x,y)\vec{e}_x + j_y(x,y)\vec{e}_y$$

Mọi mặt phẳng vuông góc với trục (Oz) đều là một mặt phẳng - gương của phân bố (hình 22), từ trường là song song với $\vec{e}_z$. Phân bố đã bất biến với phép tịnh tiến song song với vectơ này, nên ta sẽ có $\vec{B}(x, y, z) = B(x, y)\vec{e}_z$.



Hình 22.

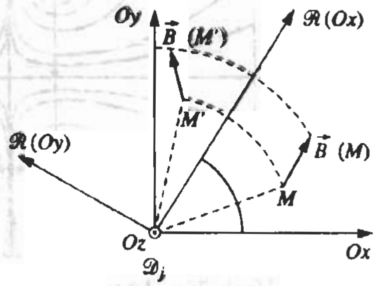
4.4. Bất biến với phép quay

Đối với một phân bố $\mathcal{D}_j$ bất biến với phép quay $\mathcal{R}$ một góc $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (n nguyên) xung quanh trục (Oz), hai người quan sát đứng ở M và $M' = \mathcal{R}(M)$ sẽ nhận thấy cùng một phân bố (*hình* 23).

Trường tại điểm M' giống như trường tại M, sai kém một phép quay xung quanh $\vec{e}_z$ một góc α.

Chú ý :

Kết quả này gần đúng với nghiên cứu đã thực hiện ở áp dụng 4, là một phép quay bảo toàn tích vectơ.



Hình 23. *Bất biến bởi phép quay với $n = 6$.*

Áp dụng 6

Trường của một phân bố dòng có tính đối xứng trục

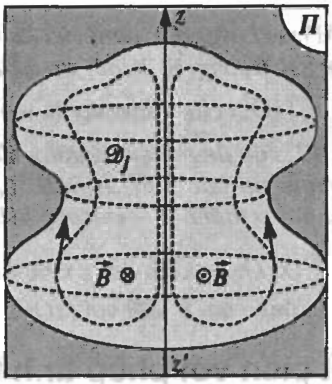
Hãy xác định hình dạng của từ trường sinh ra bởi một phân bố :

$$\vec{j} = j_r(r,z)\vec{e}_r + j_z(r,z)\vec{e}_z$$

Mọi mặt phẳng kinh tuyến đều là một mặt phẳng - gương Π : vậy từ trường tại M là trực giao xuyên tâm :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta$$

Ngoài ra phân bố đã là bất biến với mọi phép quay trục (Oz), nên ta còn có thể đơn giản dạng của trường $\vec{B}(M) = B_\theta(r,z)\vec{e}_\theta$.



Hình 24.

▶ **Để luyện tập : BT2**

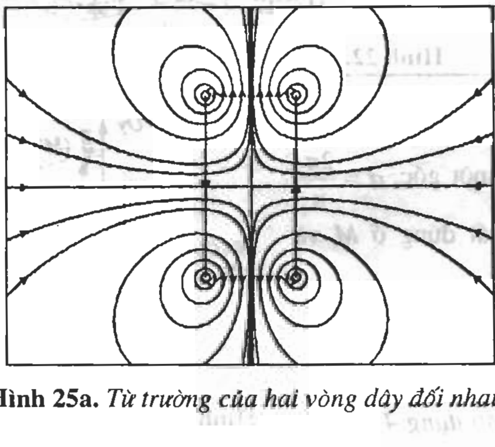
4.5. Từ trường là một vectơ trục

Khi thực hiện phép đối xứng (đối xứng phẳng, tịnh tiến, quay xung quanh một trục) cho phân bố dòng $\mathcal{D}_j$, thì trường từ tĩnh không biến đổi như một vectơ cực, mà như tích vectơ của hai vectơ cực. Khi đó, ta sẽ nói rằng :

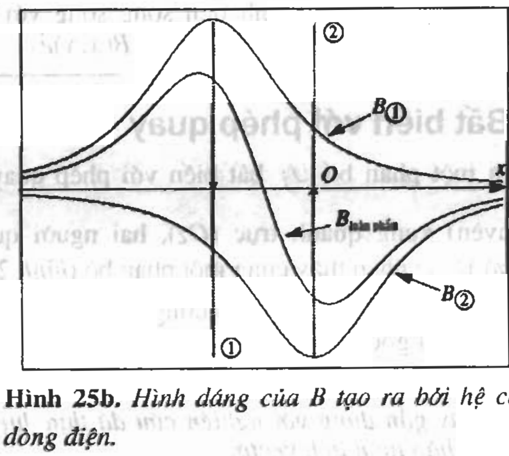
Trường từ tĩnh là một đối tượng ba chiều có các tính chất đối xứng của một *vectơ trục* hay *giả - vectơ*

Áp dụng 7

Trường tại tâm của một hệ hai cuộn dây "đối nhau"



Hình 25a. *Từ trường của hai vòng dây đối nhau.*



Hình 25b. *Hình dáng của B tạo ra bởi hệ các dòng điện.*

Tính từ trường tạo ra tại điểm O bởi hai vòng dây tròn trục (Oz), bán kính R, trên có hai dòng điện ngược dấu +I và −I chạy qua và có tâm tại các điểm có hoành độ z_O và $-z_O$ ở hai phía của điểm O. Hình 25 biểu diễn các đường sức trường của cấu hình này trong một mặt phẳng chứa trục (Oz).

Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) đều là mặt phẳng - phản gương Π^* của phân bố dòng. Tại điểm O, từ trường hướng theo $\vec{e}_z$.

Mặt phẳng (xOz) cũng là một mặt phẳng - phản gương vì các dòng chạy trong các vòng dây ngược chiều nhau.

Từ trường tại điểm O ắt phải bằng không.

▶ **Để luyện tập : BT3 và 4.**

5 Thông lượng của từ trường

5.1. Thông lượng từ được bảo toàn

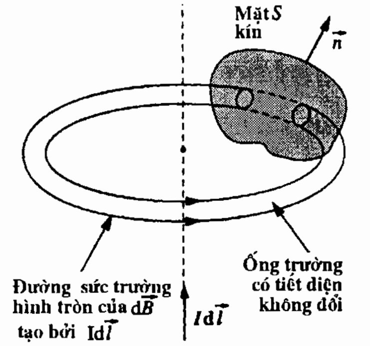
5.1.1. Thông lượng của trường gán cho một phần tử dòng

Ta hãy xét một phần tử dòng $d\vec{C} = dC.\vec{e}_z$. Tại điểm M có tọa độ (r, θ, z), trường gán cho phần tử này bằng :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 dC}{4\pi}\vec{e}_z \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{\|OM\|^3} = \frac{\mu_0 dC}{4\pi}\frac{\sin\alpha}{[r^2+z^2]}\vec{e}_\theta$$

Các đường sức của trường nguyên tố này là các vòng tròn có các tâm ở trên trục (Oz). Sự bất biến bởi phép quay xung quanh trục này đảm bảo rằng $d\vec{B}.\vec{e}_\theta$ giữ không đổi trên vòng tròn như thế.

Ống trường tương ứng với các đường sức tựa trên một tiết diện thẳng, diện tích dS_θ là một hình xuyến. Thông lượng của trường nguyên tố $d\vec{B}$ là như nhau qua mọi tiết diện của hình xuyến này và bằng $(d\vec{B}.\vec{e}_\theta)dS_\theta$.



Hình 26. *Các đường sức trường đi qua một mặt kín.*

Trên hình 26, ta hãy quan sát các đường sức trường $\overrightarrow{dB}$ đi qua một mặt kín S. Một ống trường hình xuyến cắt trên S một số chẵn các tiến diện (trong trường hợp đơn giản đã biểu diễn, số này bằng hai). Các phần đóng góp của các thông lượng "vào trong S" và "đi ra ngoài S" là như nhau, sai kém về dấu.

Thông lượng của trường từ tĩnh $d\vec{B}$ gửi qua một mặt kín S bằng không.

5.1.2. Tổng quát hóa

Đối với một phân bố dòng $\mathcal{D}_j$, từ trường $\vec{B}$ tại M là do sự chồng chất của các trường nguyên tố $d\vec{B}$, theo định luật BIOT và SAVART.

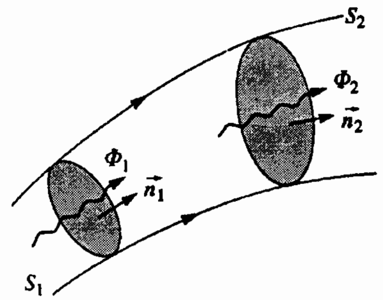
Tính chất trên đây cũng sẽ có giá trị đối với trường toàn phần tạo ra bởi phân bố. Vậy, ta có thể khẳng định :

Thông lượng của từ trường đi ra từ một mặt kín bằng không.

Hãy nhớ rằng điều đó cũng bao hàm thông lượng của từ trường là như nhau qua mọi tiết diện của cùng một ống trường (hình 27).

Từ trường có thông lượng bảo toàn.

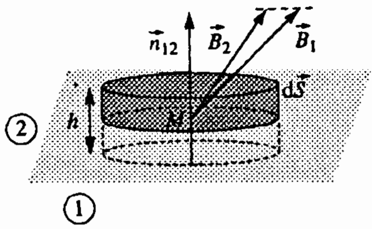
Lưu ý rằng tính chất này vẫn có giá trị dù chế độ đang nghiên cứu là độc lập với thời gian hay ngược lại là biến thiên.



Hình 27. *Thông lượng của $\vec{B}$ gửi qua hai diện tích S_1 và S_2 tựa trên cùng một ống trường không phụ thuộc sự lựa chọn của các diện tích đó $\Phi_1 = \Phi_2$.*

<u>*Chú ý :*</u>

Ta đã thấy rằng các đường sức từ trường gán cho một phần tử dòng là những vòng tròn, nghĩa là chúng khép kín. Cũng như vậy đối với một dây thẳng vô hạn (bài tập 1), hay đối với một vòng dây tròn (x. áp dụng 3). Ta sẽ có thể thừa nhận sự tổng quát hóa tính chất này cho các từ trường tạo ra bởi các phân bố bất kì. Đặc tính này còn làm cho một từ trường tĩnh và một điện trường tĩnh khác nhau về cơ bản. Tính chất đó được liên kết với điều là $\vec{B}$ có thông lượng bảo toàn.



Hình 28

5.2. Sự liên tục của thành phần pháp tuyến của từ trường

Ta hãy xét một phần tử dS của một lớp dòng ngăn cách hai môi trường kí hiệu là ① và ②. Trên *hình* 28 có biểu diễn một mặt kín S, có kiểu "hộp phomát nhỏ", mà nắp dS_1 và đáy dS_2 thu được bằng một phép tịnh tiến nhỏ có chiều cao h của diện tích dS về hai phía của mặt phân cách hai môi trường.

Thông lượng của từ trường gửi qua mặt kín S bằng không.

Ở giới hạn khi h tiến tới O (mặc dầu $\vec{B}_1$ và $\vec{B}_2$ vẫn bị chặn), điều này được diễn tả bởi :

$$0 = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = \vec{B}_2.d\vec{S}_2 + \vec{B}_1.d\vec{S}_1$$

Từ đó, ta suy ra sự liên tục của thành phần pháp tuyến của từ trường khi đi qua một mặt $\vec{B}_{2\perp} - \vec{B}_{1\perp} = \vec{0}$.

Áp dụng 8

Trường ở lân cận trục tròn xoay của một phân bố dòng có hình vành

Hỏi, ở cấp 1 theo "r" (khoảng cách tới trục (Oz)), giá trị của thành phần xuyên tâm của từ trường có phân bố như trên, ở lân cận trục tròn xoay (Oz) ?

Ta đã thấy rằng trên trục tròn xoay, từ trường của một phân bố như trên ắt phải có dạng $\vec{B}_{trục} = B_{trục}(z)\vec{e}_z$.

Kí hiệu M là điểm có tọa độ trụ (r, θ, z). Mặt phẳng chứa điểm M và trục (Oz) là một mặt phẳng phản đối xứng của phân bố dòng, vì vậy $B_\theta = 0$. Hơn nữa phân bố lại có tính đối xứng tròn xoay xung quanh trục (Oz) nên $\vec{B} = B_r(r,z).\vec{e}_r + B_z(r,z).\vec{e}_z$

Bắt đầu từ đây, ta phải tham khảo áp dụng 1 của chương 4. Sự bằng không của thông lượng của $\vec{B}$ gửi qua một mặt kín và sự sử dụng tính phản đối xứng của phân bố dòng đối với mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) cũng đưa ta tới từ trường ở lân cận trục tròn xoay :

$$\vec{B} = B_{z(trục)}(z)\vec{e}_z + r\left[-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{dB_{z(trục)}(z)}{dz}\right)\vec{e}_r + 0\vec{e}_z\right] + \ldots$$

Các trường tĩnh điện và từ trường có những tính chất khá khác nhau, nhưng kĩ thuật nghiên cứu hai trường này lại có những tương tự hiển nhiên.

5.3. Một ví dụ về sự rạch kênh của thông lượng từ: ống dây (xôlênôit)

5.3.1. Trường của một vài vòng dây

■ Trường của một vòng

Ta hãy nhớ lại các kết quả thu được trong áp dụng 3.

Từ trường của một vòng dây tròn trên trục của nó bằng :

$$\vec{B}(M) = \mu_o \frac{I}{2R} \sin^3 \alpha . \vec{e}_z .$$

Tại tâm của vòng dây, trường này bằng :

$$\vec{B}(0) = \mu_o \frac{I}{2R} \vec{e}_z$$

Hình 29 biểu diễn các đường sức trường của một vòng dây tròn trục (Oz) trong một mặt phẳng chứa trục này.

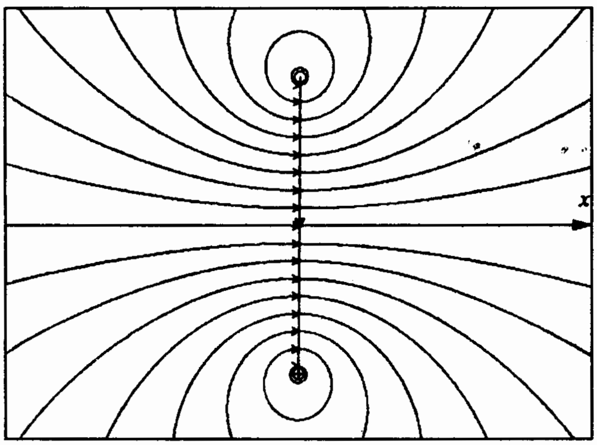
Bằng phép quay một trong các đường sức này xung quanh trục của vòng dây, ta có thể thu được một ống từ mà các tiết diện vuông góc với trục (Oz) là các vòng tròn.

Ta hãy xét ống này và nghĩ tới sự bảo toàn thông lượng từ dọc theo ống:

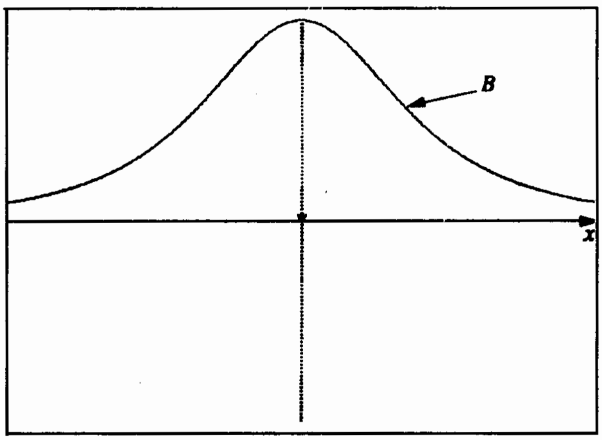
• Ống bị thu hẹp khi đi qua vòng dây, vòng dùng làm chỗ thắt lại dồn thông lượng từ về một hướng làm nó dày đặc trong miền này.

• Càng đi xa vòng dây, ống càng loe ra nhanh chóng, điều này khiến ta dự đoán có sự giảm nhanh cường độ của trường ;

• Đường biểu diễn $B_{z(trục)} = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_o I R^2}{2[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$ theo z trên *hình* 30 xác nhận các nhận xét định tính ở trên.



Hình 29. *Các đường sức từ trường của một vòng dây.*



Hình 30. *Trường ở trên trục của một vòng dây.*

■ Tăng cường sự rạch kênh của thông lượng

Để tăng trường và mở rộng miền tập trung thông lượng, ta có thể nghĩ tới sự kết hợp nhiều vòng dây có cùng trục có các dòng điện cùng chiều chạy qua (ta đã thấy ở trên (h.25) là hai vòng dây đối diện nhau có dòng điện ngược chiều chạy qua gây ra các *trường tương phản*).

Các hình vẽ từ 31 đến 33 tương ứng với một tình huống như thế, có được bằng cách kết hợp 2, 5 rồi 10 vòng dây giống nhau và cách đều nhau.

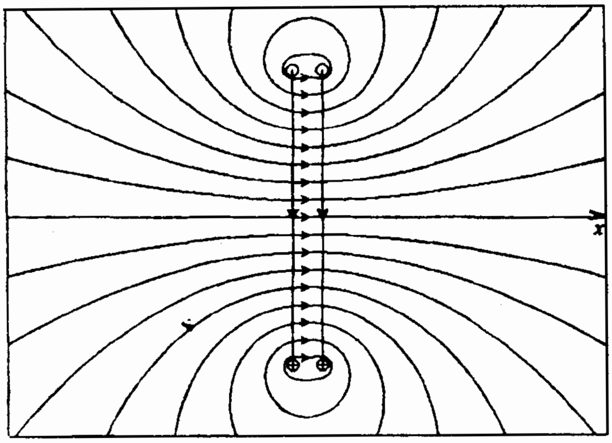
5.3.2. Đường sức trường của một ống dây

Tiếp tục nghiên cứu trên đây, ta có thể xem xét một mạch có được bằng cách quấn đều đặn một dây dẫn trên một hình trụ trục (Oz), số N vòng dây có cùng bán kính có một chiều dài tổng cộng l. Trong thực tế, số $n = \frac{N}{l}$ vòng dây trên một đơn vị chiều dài là rất lớn và ta có thể coi nó như một tập hợp các vòng dây trục (Oz), bán kính R chuẩn ghép với nhau.

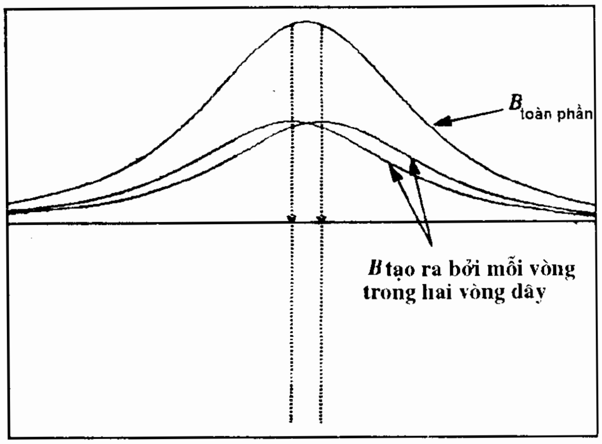
Mạch thu được là một ống dây (hay xôlênôit, tiếng Hy Lạp solên là ống), có tiết diện tròn và có một lớp (ta sẽ có thể xem xét cuộn dây nhiều lớp).

Ta hãy quan sát hình 34, biểu diễn một số đường sức trường của một ống dây (với $N = 21$ vòng dây rất gần nhau) trong một mặt phẳng chứa (Oz) :

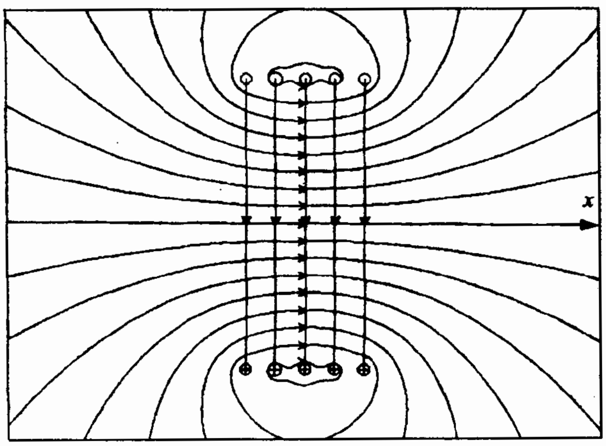
- ống dây rạch kênh cho các đường sức từ trường
- các đường sức trường tách ra nhanh ngay khi ra khỏi ống dây đến mức ta có thể dự đoán một sự giảm rất nhanh của trường ở bên ngoài ống dây và phải bỏ qua trước trường ở bên trong ống dây.



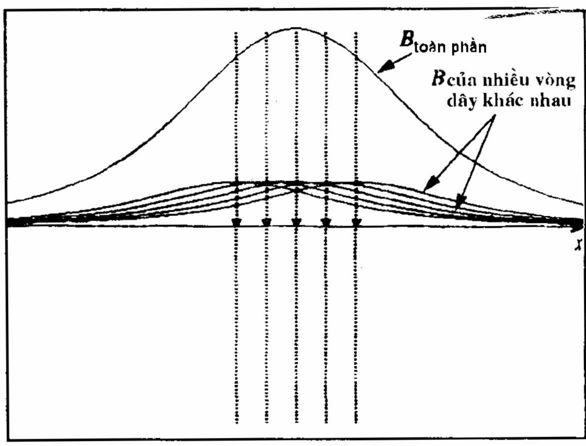
Hình 31a. *Các đường sức từ trường của một tập hợp hai vòng dây có dòng điện giống nhau chạy qua.*



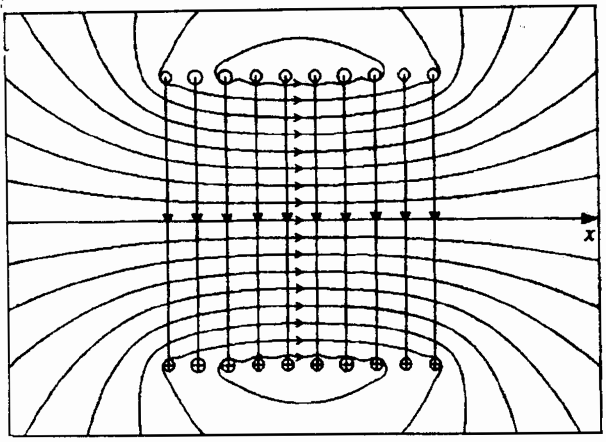
Hình 31b. *Hình dáng của B(x) trong trường hợp của hai vòng dây có dòng giống nhau chạy qua.*



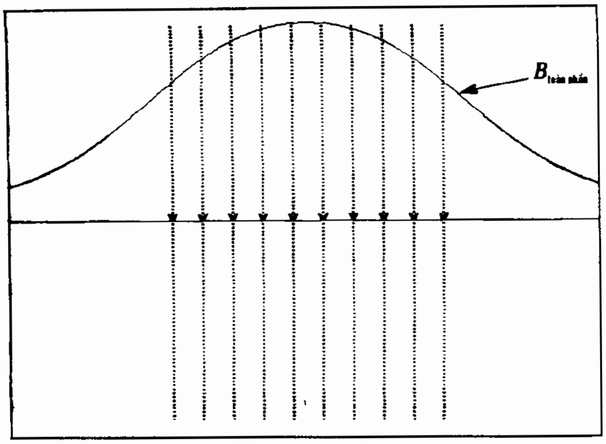
Hình 32a. *Các đường sức từ trường của một tập hợp năm vòng dây có dòng giống nhau chạy qua.*



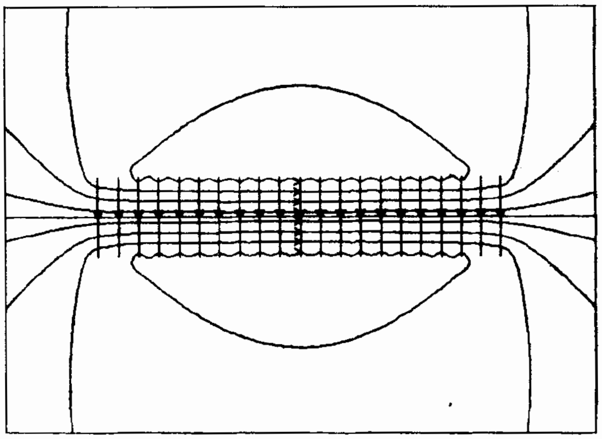
Hình 32b. *Hình dáng của B(x) trong trường hợp của năm vòng dây có dòng giống nhau chạy qua.*



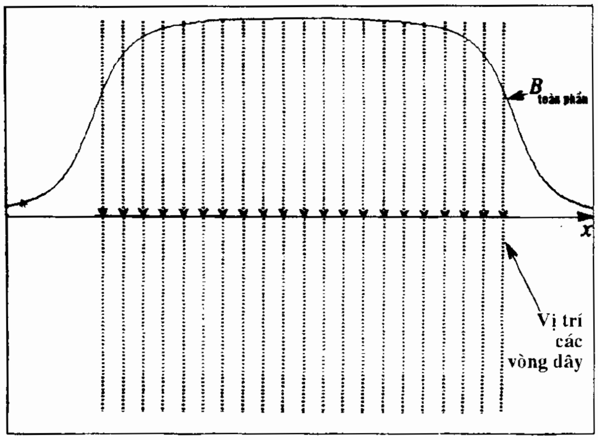
Hình 33a. *Đường sức từ trường của một tập hợp mười vòng dây có dòng giống nhau chạy qua.*



Hình 33b. *Hình dáng của B(x) trong trường hợp mười vòng dây có dòng điện giống nhau chạy qua.*



Hình 34a. *Đường sức từ trường của một tập hợp hai mươi mốt vòng dây phân bố đều đặn và có các dòng giống nhau chạy qua.*



Hình 34b. *Hình dáng của B(x) đối với một ống dây gồm hai mươi mốt vòng dây phân bố đều đặn và có các dòng giống nhau chạy qua.*

Áp dụng 9

Phép gần đúng của một lớp dòng xôlênôit

Các vòng là chuẩn ghép và có số lượng lớn trên một đơn vị dài, hãy chứng tỏ rằng xôlênôit có thể coi như một lớp hình trụ của dòng có dạng vành và có mật độ dòng trên bề mặt $\vec{j}_s$ cần xác định.

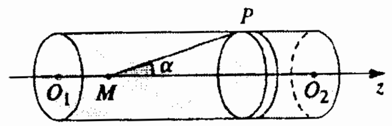
Ta coi như bỏ qua sai số mắc phải nếu thay phân bố hình sợi chỉ của dòng bằng một phân bố trên bề mặt tương đương có dạng $\vec{j}_s = j_s\vec{e}_\theta$ (trong tọa độ trụ trục (Oz)).

Ta hãy xét một phần tử dz cắt vuông góc với các vòng dây. Cường độ qua nó là $dI = ndz.I$ với sự đơn giản hóa gián đoạn, và $dI = j_s dz$ với sự đơn giản hóa theo bề mặt tương đương.

Vậy phép toán san bằng được đưa ra là thay thế xôlênôit bằng lớp có mật độ trên bề mặt $\vec{j}_s = nI\vec{e}_\theta$.

5.3.3. Trường trên trục của một ống dây

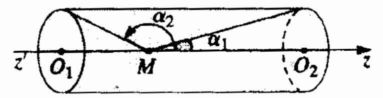
Mọi mặt phẳng chứa trục của ống dây đều là một mặt phẳng phản đối xứng, vậy trên trục, trường có dạng $\vec{B}_{trục} = B_{trục(z)}\vec{e}_z$. Trường tạo ra tại một điểm M, có độ cao z_M của trục, bởi một vòng dây có độ cao $z_P = z_M + R\,\text{cotan}\,\alpha$ có dòng I chạy qua bằng $\frac{\mu_o I}{2R}\sin^3\alpha$ (hình 35a).



Hình 35a.

Trường tạo ra bởi các vòng có độ cao giữa z_P và $z_P + dz_P\left(dz_P = -\frac{R d\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$, với số lượng $n\,dz_P$, bằng $\frac{\mu_o nI dz_P}{2R}\sin^3\alpha = -\frac{\mu_o nI}{2}\sin\alpha\,d\alpha$

Gọi α_1 và α_2 là các góc ở đầu mút (nằm giữa O và π) dưới đó các đầu của ống dây được nhìn từ điểm M (hình 35b), ta thu được từ trường toàn phần trên trục của ống dây :



Hình 35b.

$$\vec{B}_{trục} = \mu_o nI\left(\frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{2}\right)\vec{e}_z$$

Đường biểu diễn giá trị của trường ở trên trục ($z'z$) theo z (hình 36) chứng tỏ rằng từ trường thực tế là đều ở bên trong của ống và rất nhanh trở thành không đáng kể ở bên ngoài.

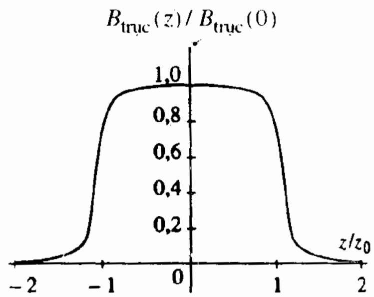
5.3.4. Giới hạn của ống dây vô hạn

Đối với một ống dây rất dài, nghĩa là khi tỉ số $\frac{l}{R}$ rất lớn (lí tưởng là vô hạn), α_1 tiến tới π và α_2 tiến tới O

Từ trường trên trục của một ống dây dài vô hạn đều và mang *n* vòng dây trên một đơn vị dài bằng :

$$\vec{B}_\infty = \mu_o nI\,\vec{e}_z$$

Ta sẽ thấy ở chương 8 là khi giới hạn $\frac{l}{R}$ tiến tới ∞ thì trường là đều và bằng $\mu_o nI\,\vec{e}_z$ tại mọi điểm ở bên trong ống dây, và bằng không ở bên ngoài.

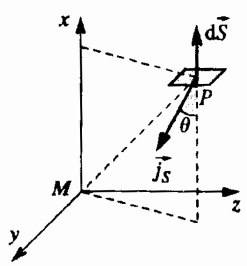


Hình 36. *Ống dây với các đầu có hoành độ $-z_o$ và z_o.*

Áp dụng 10

Từ trường và góc đặc

Một phần tử diện tích nhỏ dS = dx . dz định hướng được biểu diễn trên hình 37.



Hình 37.

1) *Tìm góc đặc $d\Omega$ dưới đó phần tử này được nhìn từ điểm M.*

2) *Phần tử này có một dòng trên bề mặt chạy qua $\vec{j}_S = j_S.\vec{e}_y$. Tìm trường nguyên tố $d\vec{B}(M)$ liên kết với phần tử này tại điểm M ? Hỏi hệ thức giữa $dB_z(M)$ và góc đặc $d\Omega$?*

3) *Áp dụng các kết trên cho phép tính từ trường tạo ra bởi một lớp bề mặt phẳng có kích thước vô hạn và có mật độ dòng đều $\vec{j}_S = j_S\vec{e}_y$.*

4) *Lấy lại nghiên cứu này để tính từ trường ở trên trục của ống dây.*

1) Kí hiệu (x, y, z) là các tọa độ Descartes của vectơ $\overrightarrow{MP}$. Góc đặc nguyên tố là :

$$d\Omega = dS\frac{\cos\theta}{r^2} = dzdy\frac{x}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

2) Từ trường nguyên tố là :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi}d\vec{C} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{\| PM \|^3}$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}j_S dydz\frac{x\vec{e}_z - z\vec{e}_x}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Vậy :

$$dB_z(M) = \frac{\mu_o}{4\pi}j_S dydz\frac{x}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}j_S dS\frac{\cos\theta}{r^2}$$

hay : $dB_z(M) = \frac{\mu_o}{4\pi}j_S d\Omega$

3) Lớp được nhìn dưới góc đặc bằng 2π (nó chiếm nửa không gian nhìn thấy được từ M). Vậy trường tại M bằng :

$$\vec{B}(M) = B_z(M)\vec{e}_z = \frac{\mu_o}{2}j_S\vec{e}_z$$

4) Một chiều dài dz của lớp xôlênôit có được bằng phép quay phần tử dòng tại P đủ một vòng xung quanh (Mz). Trường tương ứng hướng theo $\vec{e}_z$.

Khi đó trường của ống dây tại M bằng :

$$\vec{B}(M) = B_z(M)\vec{e}_z = \frac{\mu_o}{4\pi}j_S\Omega\,\vec{e}_z$$

Ω là góc đặc dưới đó ống dây được nhìn từ M. Giá trị của nó là :

$$2\pi(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

Sử dụng sự tương tự giữa ống dây và lớp xôlênôit $ni = j_S$, ta tìm lại được trường ở trên trục của ống dây đã được tính toán trước đây.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỊNH LUẬT BIOT và SAVART

Ta coi là tiên đề biểu thức của phần đóng góp vào từ trường của một phần tử dòng $d\vec{C}$, nằm tại điểm P, vào trường toàn phần $\vec{B}(M)$ được cho bởi định luật BIOT và SAVART :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{\| PM \|^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{\| PM \|^3}$$

Trường tổng hợp là tổng của các phần đóng góp nguyên tố, với $\overrightarrow{dC} = \vec{j}_v d\tau$ hay $\overrightarrow{dC} = \vec{j}_S dS$ hay $\overrightarrow{dC} = I\,\overrightarrow{dl}$ tùy theo các trường hợp.

■ ĐỐI XỨNG PHẲNG

- Từ trường $\vec{B}$ là vuông góc với mặt phẳng - gương Π tại mỗi điểm của nó.
- Tại điểm M' đối xứng của điểm M đối với một mặt phẳng - gương Π, từ trường $\vec{B}'$ là vectơ đối của đối xứng vectơ của trường $\vec{B}$ tại M đối với mặt phẳng này.

■ PHẢN ĐỐI XỨNG PHẲNG

- Từ trường $\vec{B}$ nằm trong một mặt phẳng - phản gương Π^* tại mỗi điểm của nó
- Tại điểm M' đối xứng của điểm M qua mặt phẳng - phản gương Π^*, từ trường $\vec{B}'$ là đối xứng vectơ của trường $\vec{B}$ tại M.

■ Trường từ tĩnh là một đối tượng ba chiều có các tính chất đối xứng của một vectơ trục hay giả - vectơ.

■ THÔNG LƯỢNG TỪ (TỪ THÔNG)

- Thông lượng của từ trường đi ra từ một mặt kín bằng không
- Từ trường có thông lượng bảo toàn

■ ỐNG DÂY (XÔLÊNÔIT)

- Từ trường của một vòng dây tròn trên trục của nó bằng :

$$\vec{B}(M) = \mu_o \frac{I}{2R} \sin^3 \alpha . \vec{e}_z$$

Tại tâm của vòng dây, trường này bằng :

$$\vec{B}(O) = \mu_o \frac{I}{2R} \vec{e}_z$$

- Từ trường trên trục của một ống dây dài vô hạn đều và mang n vòng dây trên một đơn vị dài bằng :

$$\vec{B}_\infty = \mu_o n I \vec{e}_z$$

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

1 Tích vectơ và đối xứng phẳng

Ta tưởng tượng một định luật vật lí áp dụng được cho một hệ Σ được diễn tả bởi $\vec{c}(M) = \vec{a}(M) \wedge \vec{b}(M)$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai trường vectơ thường dùng (vectơ thực hay vectơ cực). Tích vectơ nhắc đến khái niệm giả sử đã biết về tam diện thuận : ngón cái, ngón trỏ và ngón giữa của *bàn tay phải* lấy theo thứ tự đó tạo thành một tam diện thuận ; tương tự như vậy đối với tam diện liên kết với các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ trong thứ tự đó.

Giả sử Σ có một mặt phẳng đối xứng (Π) sao cho nếu M' là đối xứng của M qua (Π) $(M' = \mathscr{S}(M))$, khi đó :

$$\vec{a}(M') = \vec{a}(\mathscr{S}(M)) = \mathscr{S}(\vec{a}(M))$$

và cũng như vậy $\vec{b}(M') = \vec{b}(\mathscr{S}(M)) = \mathscr{S}(\vec{b}(M))$

1) Khi đó hãy so sánh $\vec{c}(\mathscr{S}(M))$ và $\mathscr{S}(\vec{c}(M))$ nhờ vào một sự nghiên cứu hình học sử dụng cho các trường hợp khác nhau có thể có đối với $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Hãy đối chiếu với đặc tính của từ trường qua phép đối xứng phẳng

2) Câu hỏi trên đây cho thấy rõ $\vec{c}$ là một vectơ trục nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ cực. Hỏi bản chất của $\vec{c}$ là gì nếu một trong các vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ trục, vectơ còn lại là vectơ cực ? Cũng câu hỏi trên nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ trục.

2 Các tính chất đối xứng của trường từ tĩnh

Cho một phân bố dòng theo thể tích có một mặt phẳng đối xứng (Π). Trường từ tĩnh tại một điểm M bất kì trong không gian thu được từ định luật BIOT và SAVART, bởi tích phân :

$$\vec{B}(M) = \iiint \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{\|PM\|^2} d\tau_P$$

miền tích phân là miền của dòng.

Cho $M' = \mathscr{S}(M)$ là điểm đối xứng của M qua (Π). Chứng tỏ rằng $\vec{B}(\mathscr{S}(M)) = \vec{B}(M') = -\mathscr{S}(\vec{B}(M))$.

3 Từ trường và từ lực

Cho một phân bố dừng của dòng có một mặt phẳng đối xứng (Π). Phân bố này tạo ra một trường $\vec{B}$. Một hạt mang điện vạch ra một quỹ đạo L khi hạt chịu tác dụng của lực LORENTZ do từ trường $\vec{B}$ gây ra.

Một nhà vật lí khẳng định rằng, các định luật tương tác điện từ là bảo toàn đối với phép đối xứng phẳng, nên ta có thể quan sát thấy một hạt có cùng điện tích vạch ra quỹ đạo đối xứng của L đối với (Π) với một vận tốc có cùng chuẩn tại những điểm đối ứng.

Hãy chứng minh rằng một đặc tính như thế là phù hợp với đặc tính trục của vectơ $\vec{B}$.

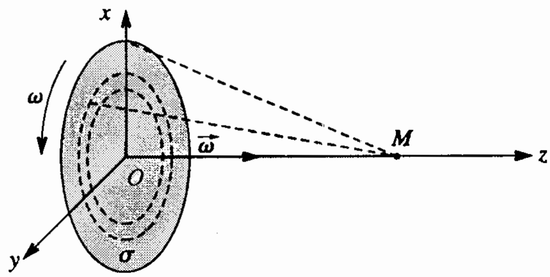
4 Đĩa ROWLAND

Nhà vật lí người Mỹ này có một bàn tay thực nghiệm khéo léo khác thường, đã là người đầu tiên chứng minh rằng một dòng điện, dù thế nào, cũng tạo ra một từ trường. Nguyên lí rất đơn giản của thí nghiệm như sau.

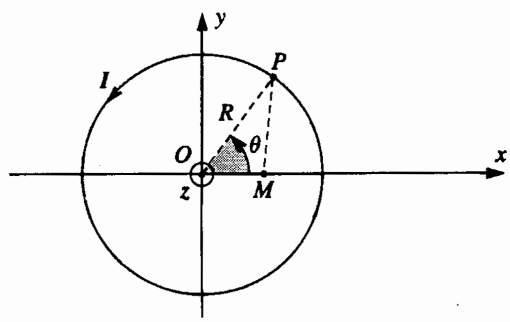
Một đĩa kim loại bán kính R, mang một điện tích được phân bố đều với mật độ điện mặt σ (trên tập hợp cả hai mặt), quay với vận tốc không đổi ω xung quanh trục (Oz) của nó.

Hãy tính trường từ tĩnh tạo ra bởi các dòng điện đối lưu này tại một điểm M của trục (Oz).

Cho : $\sigma = 5.10^{-6}\,\text{Cm}^{-2}$; $R = 10{,}5$ cm ;
$\omega = 61\,\text{vòng}.s^{-1}$; z = 2cm.



5 Trường từ tĩnh trong mặt phẳng của một vòng dây



Một vòng dây tròn tâm O, bán kính R, có dòng điện hình sợi chỉ cường độ I chạy qua. Người ta muốn tính chuẩn của từ trường tại một điểm M nằm trong mặt phẳng và gần tâm của vòng : $OM = r << R$

1) Chứng tỏ rằng từ trường này vuông góc với mặt phẳng của vòng dây.

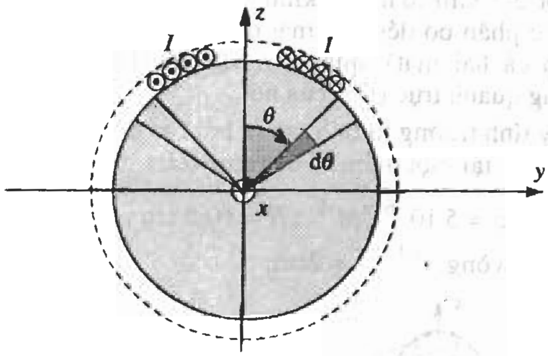
2) Sau khi đã thiết lập được công thức tính chuẩn B này dưới dạng một tích phân có dùng góc θ, hãy chứng tỏ rằng với $\frac{r}{R} << 1$ trường này cho một cách gần đúng bởi :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}\left[1 + \frac{3r^2}{4R^2}\right]$$

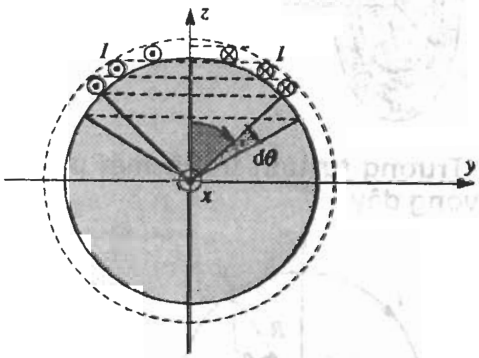
6 Quả cầu phủ các vòng dây

Một quả cầu bán kính R được phủ bởi một số lớn các vòng dây N, có một dòng điện cường độ I cùng chiều chạy qua. Hãy tính từ trường tạo ra bởi phân bố dòng này tại tâm O của quả cầu trong hai trường hợp sau :

1) Các vòng dây được ghép với nhau ;



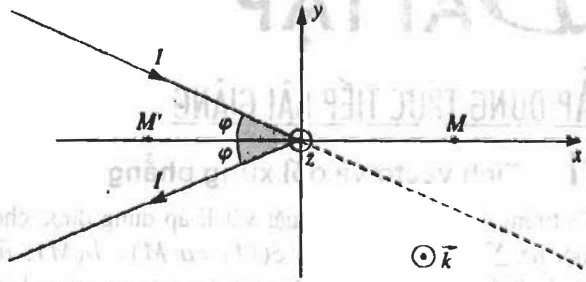
2) Các mặt phẳng của N vòng dây cách đều nhau theo (Oz) (các vòng dây không nối với nhau).



7 Sự ước tính

Chứng tỏ rằng tại một điểm M, nằm gần điểm giữa của một phần thẳng của dòng hình sợi chỉ cường độ I, từ trường về chuẩn bằng $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ sai kém ít nhất là 1% nếu khoảng cách a từ điểm M tới dây nhỏ hơn 7% chiều dài của đoạn dây thẳng, và nếu bỏ qua phần đóng góp còn lại của mạch vào từ trường tạo ra tại M.

8 Dòng điện có góc

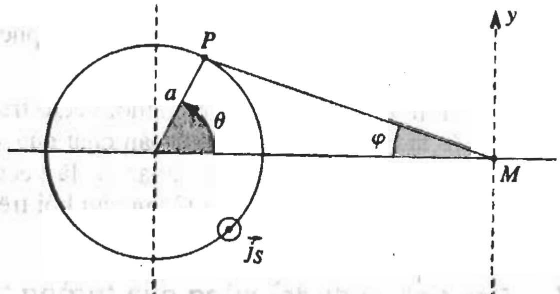


Chứng tỏ rằng từ trường tạo ra bởi một mạch hình sợi "có góc", có dòng điện cường độ I chạy qua, tại điểm M của trục phân giác (Ox) cho bởi :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_z$$

trong trường hợp $x > 0$ (điểm M). Ta thu được gì trong trường hợp $x < 0$ (điểm M') ?

9 Từ trường của một phân bố dòng trên bề mặt



Một hình trụ dẫn rỗng, vô hạn, có tiết diện tròn bán kính a, có dòng điện mật độ đều trên bề mặt, song song với các đường sinh của trụ chạy qua và cường độ tổng hợp bằng I.

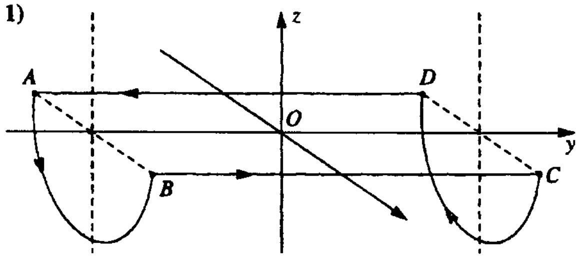
1) Từ định luật BIOT và SAVART (sẽ không dùng định lí AMPÈRE), hãy xác định từ trường tạo ra bởi phân bố trên tại một điểm M cách trục của hình trụ một khoảng r ($r \neq a$)

2) Hãy tìm lại kết quả bằng cách dùng đến trường tĩnh điện sẽ tạo ra bởi mặt hình trụ ảo mang một điện tích có mật độ đều trên bề mặt mà ta sẽ xác định.

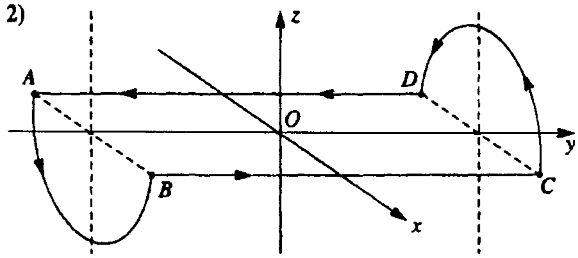
10 Từ trường tạo ra bởi một dòng điện hình sợi chỉ

Hãy tính từ trường tạo ra tại điểm O, là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, trong mỗi một của hai trường hợp sau đây. Mỗi nửa vòng tròn có bán kính a. Ta sẽ đặt $DA = BC = 2l$. Cường độ dòng bằng I

1)



2)



11 Thành phần theo trục của từ trường tạo ra bởi một đường đinh ốc

Cho một đường đinh ốc bán kính R và có bước a, có một dòng cường độ I chạy qua. Người ta bỏ qua các phần đóng góp của những dây nối dòng vào từ trường tại điểm M. Tính thành phần B_z của từ trường tại một điểm của trục (Oz) của đường đinh ốc. Gọi α_1 và α_2 là các góc hợp bởi các vectơ $\overrightarrow{MP_1}$ và $\overrightarrow{MP_2}$ với trục (Oz), P_1 và P_2 là hai điểm đầu mút của đường đinh ốc. Hãy bình luận kết quả.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

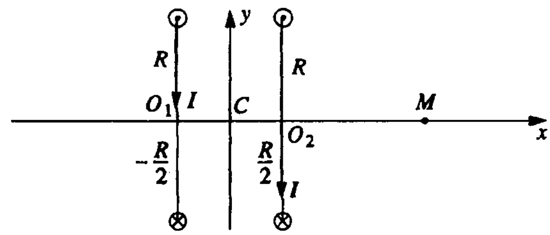
12 Cuộn dây HELMHOLTZ

1) Một cuộn dây tròn có tâm O, có trục (Ox) và có bán kính R, mang N vòng dây, có dòng điện cường độ I chạy qua. Bỏ qua bề dày của các vòng dây. Cho $\vec{B} = B.\vec{e}_x$ là từ trường (về cường độ) tại một điểm M có hoành độ x của trục của vòng dây.

Hãy biểu thị $y = \dfrac{B}{B_o}$ theo $u = \dfrac{x}{R}$.

Hãy vẽ đường cong $y(u)$ và đặt vào đó các điểm uốn.

2) Hai cuộn dây giống như ở trên, có các tâm O_1 và O_2, và có một dòng điện cùng chiều, cường độ I chạy qua, được bố trí trên cùng một trục (Cx), C là điểm giữa của O_1O_2.



O_1O_2 có giá trị bằng R. Hãy tính B_C

Biểu thị $Y = \dfrac{B}{B_C}$ theo :

$$\xi = \frac{CM}{R} = \frac{z}{R}$$

Vẽ $Y(\xi)$.

3) Hãy thực hiện một phép khai triển có giới hạn theo ξ của Y ở lân cận của $\xi = 0$. Hỏi trong miền nào trường là không đổi sai kém một phần nghìn dọc theo trục ? Kết luận.

13 Phần đóng góp của một lớp phẳng

Một dòng trên bề mặt đều, có mật độ $\vec{j}_S$ chạy trên một lớp phẳng. Người ta dự định tính phần đóng góp của một lớp như thế (theo tinh thần của định luật BIOT và SAVART) vào từ trường tại một điểm M từ đó ta nhìn phần phẳng nêu ra dưới góc đặc Ω.

1) Bằng cách sử dụng định luật BIOT và SAVART và định nghĩa của góc đặc, hãy chứng tỏ rằng thành phần song song với lớp, tại một điểm M của từ trường tạo ra bởi dòng trên bề mặt này, được cho bởi :

$$\vec{B}_{//}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi}\Omega(\vec{j}_S \wedge \vec{n})$$

$\vec{n}$ là một vectơ đơn vị vuông góc với mặt phẳng của lớp và ló ra trong nửa - không gian chứa điểm M.

2) Hãy áp dụng kết quả này để xác định từ trường tạo ra tại M bởi một mặt phẳng có dòng điện trên bề mặt mật độ đều chạy qua.

14 Ống dây

1) Trước hết ta xét trường hợp một ống dây có tiết diện tròn bán kính R và có chiều dài l, tạo bởi N vòng dây có dòng điện cường độ I chạy qua. Phép gần đúng cho phép là thay phân bố hình sợi chỉ này bằng một dòng trên bề mặt "tương đương". Hãy

tính từ trường tại một điểm M của trục của ống dây bằng cách sử dụng tích phân (mặt) của BIOT và SAVART. Ta sẽ thu được

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{4\pi}\Omega_{\text{int}}\vec{e}_z$$

với $n = \frac{N}{l}$ và Ω_{int} là góc đặc (dương) dưới đó, từ điểm M đang xét, ta nhìn mặt trong của lớp dòng xôlênôit.

Hỏi ta thu được kết quả nào cho trường của một ống dây dài vô hạn ?

2) Bây giờ, ta xét một ống dây giả sử dài vô hạn dọc theo một trục (Oz), có tiết diện bất kì, nhưng có một dòng mật độ trên bề mặt j_S, có chuẩn đều vuông góc với (Oz), chạy qua. Bằng cách lấy lại phương pháp của **1**), hãy thiết lập biểu thức của từ trường tạo ra bởi phân bố này tại mọi điểm ở bên trong cũng như ở bên ngoài của ống dây.

LỜI GIẢI

1 *1) Gọi $\vec{a}_{//}$ và $\vec{a}_{\perp}$ là các thành phần của $\vec{a}$ song song và vuông góc với mặt phẳng đối xứng (Π). Ta có :*

$$\vec{a} = \vec{a}_{//} + \vec{a}_{\perp} \text{ và tương tự: } \vec{b} = \vec{b}_{//} + \vec{b}_{\perp}$$

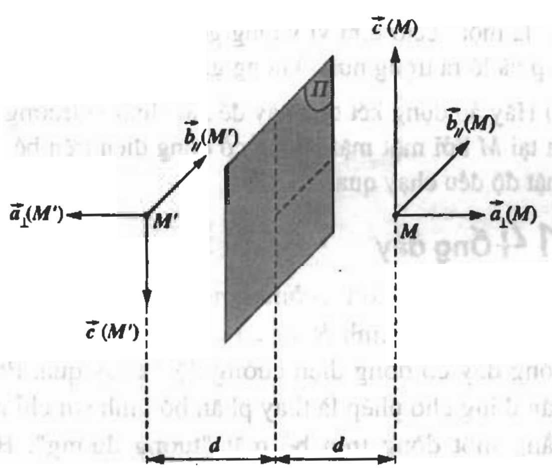
và chú ý rằng $\vec{a}_{//}$ và $\vec{b}_{//}$ không nhất thiết phải cộng tuyến.

($\vec{a}_{//}(M') = \vec{a}_{//}(M)$ và $\vec{a}_{\perp}(M') = -\vec{a}_{\perp}(M)$ và tương tự cho $\vec{b}$.)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a}_{//} \wedge \vec{b}_{//} + \vec{a}_{//} \wedge \vec{b}_{\perp} + \vec{a}_{\perp} \wedge \vec{b}_{//}$$

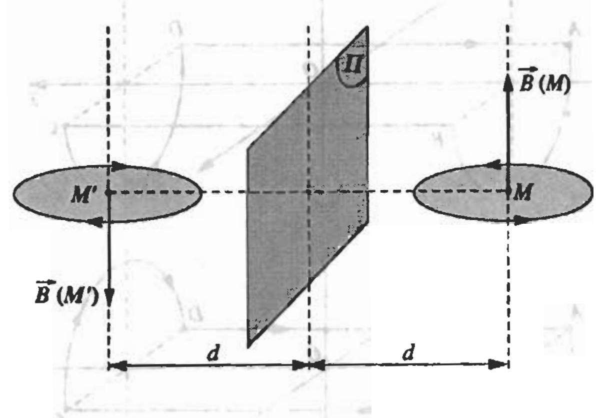
Ta hãy xét hai trường hợp sau đây :

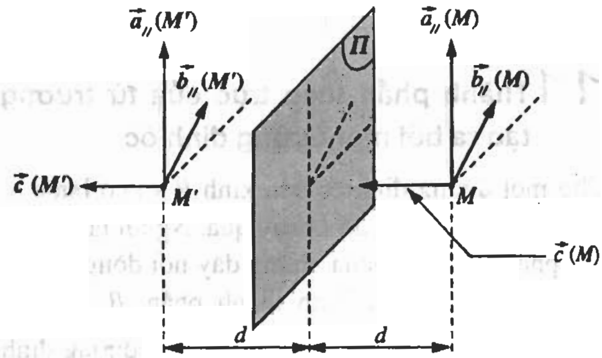
- *$\vec{a}_{//} \wedge \vec{b}_{\perp}$ (hay $\vec{a}_{\perp} \wedge \vec{b}_{//}$) : sơ đồ dưới đây chứng tỏ $\vec{c}(M') = -\vec{c}(M)$ khi $\vec{c}$ song song với mặt phẳng (Π).*



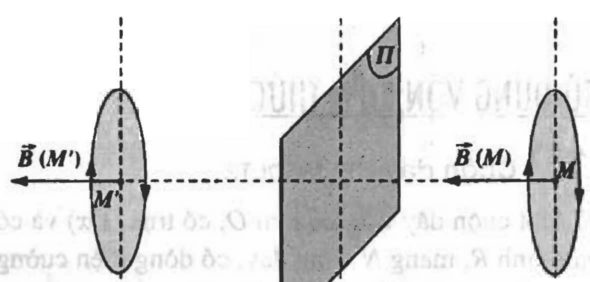
Trên sơ đồ dưới đây, ta thể hiện rõ hai ống dây có dòng qua nhận (Π) là mặt phẳng đối xứng, khi đó ta có :

$$\vec{B}(M') = -\vec{B}(M), \text{ với } \vec{B} \text{ song song với } (\Pi)$$





- *$\vec{a}_{//} \wedge \vec{b}_{\perp}$: sơ đồ trên đây chứng tỏ $\vec{c}(M') = \vec{c}(M)$ khi $\vec{c}$ vuông góc với mặt phẳng (Π). Các từ trường tạo ra bởi hai vòng dây của hình vẽ dưới đây cũng thỏa mãn $\vec{B}(M') = \vec{B}(M)$.*



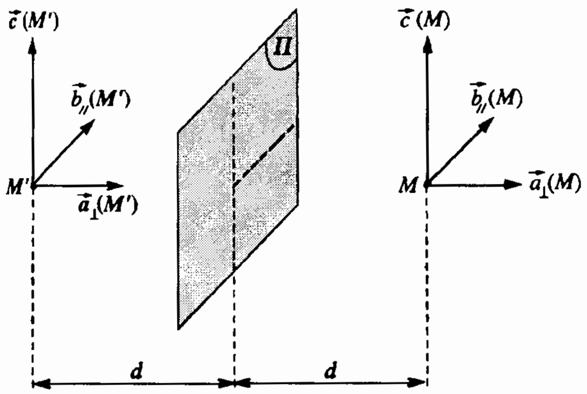
2) Ta hãy xét $\vec{a}$ là vectơ trục và $\vec{b}$ vectơ cực. Với M' là điểm đối xứng của M, ta có :

$$\vec{a}_{//}(M) = -\vec{a}_{//}(M), \quad \vec{a}_{\perp}(M) = \vec{a}_{\perp}(M)$$

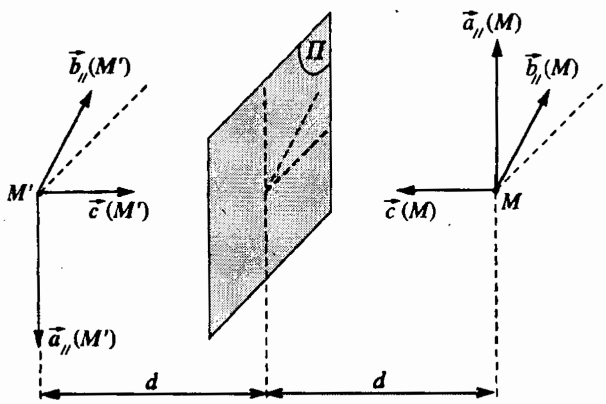
$$\vec{b}_{//}(M) = \vec{b}_{//}(M), \quad \vec{b}_{\perp}(M) = -\vec{b}_{\perp}(M)$$

Ta hãy xét hai trường hợp sau đây :

- $\vec{a}_{//} \wedge \vec{b}_{\perp}$ *(hay $\vec{a}_{\perp} \wedge \vec{b}_{//}$) : hình vẽ dưới đây chứng tỏ $\vec{c}(M) = \vec{c}(M')$ khi $\vec{c}$ song song với (Π).*



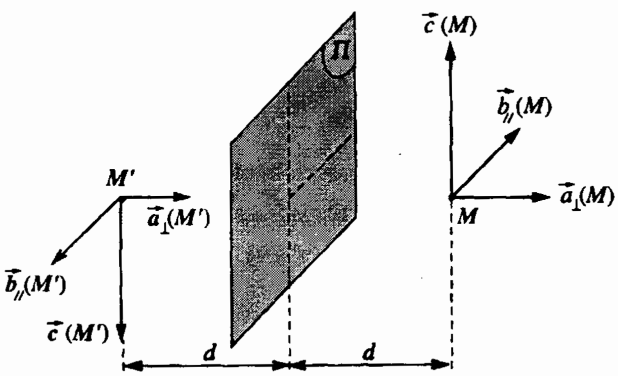
- $\vec{a}_{//} \wedge \vec{b}_{//}$ *: hình vẽ dưới đây chứng tỏ $\vec{c}(M) = -\vec{c}(M')$ khi $\vec{c}$ vuông góc với (Π).*

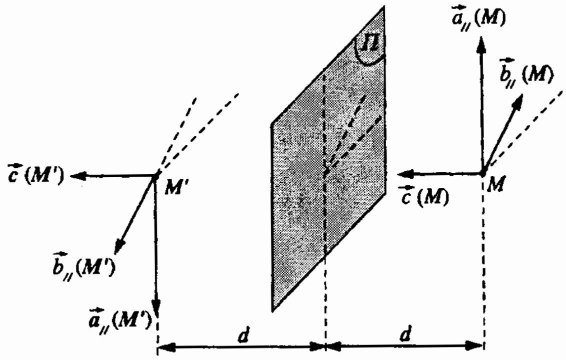


$\vec{c}$ có các tính chất của một vectơ cực.

Hai sơ đồ dưới đây chứng tỏ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ trục, thì :

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ cũng là một vectơ trục .

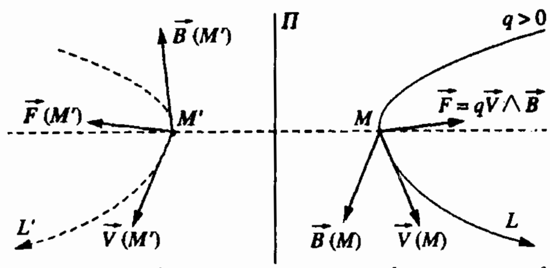




2 *Đối với một phần tử thể tích $\mathrm{d}\tau_P$, $\mathrm{d}\vec{B}$ tạo ra bởi phần tử dòng $\vec{j}(P)\mathrm{d}\tau$ là kết quả của một tích vectơ của hai vectơ cực.*
Các kết quả tìm thấy ở bài tập 1 chỉ cho ta thấy rằng $\mathrm{d}\vec{B}$ (tức $\vec{B}$) là một vectơ trục.
Cho $\vec{B} = \vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp}$, khi đó ta có $\vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M)$ và $\vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M)$.
Biết rằng đối xứng của $\vec{B}(M)$ sẽ phải có các thành phần :

$\vec{B}_{//}(M) - \vec{B}_{\perp}(M)$, quả là từ đó ta suy ra $\vec{B}(M') = -\mathscr{S}(\vec{B}(M))$.

3



Cho L' là quỹ đạo đối xứng của L qua mặt phẳng (Π), mặt phẳng đối xứng của các dòng tạo ra $\vec{B}$. Để quỹ đạo L' được vạch ra, phải có $\vec{F}(M') = \mathscr{S}(\vec{F}(M))$, nghĩa là $\vec{F}$ phải là một vectơ cực. Mà vectơ vận tốc là một vectơ cực và $\vec{B}$ là một vectơ trục. Sự tham dự của tích vectơ (x. bài tập) kéo theo $\vec{F}$ đúng là một vectơ cực.

Vật quỹ đạo L' có thể được vạch ra bởi một hạt có cùng điện tích.

4 *Một chiếc đĩa quay là sự chồng chất liên tục của nhiều vòng dây. Một vòng có bán kính r và có bề rộng dr, do sự quay, là nơi khu trú của một dòng điện cường độ $\mathrm{d}I = j_S \mathrm{d}r = \sigma(r\omega)\mathrm{d}r$. Nó tạo ra tại M trường từ tĩnh :*

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0(\sigma\omega r \mathrm{d}r)}{2r}\sin^3\theta.\vec{e}_z$$

Biết rằng $r = z\tan\theta$, nghĩa là $\mathrm{d}r = \frac{z}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$, ta thu được trường $\vec{B}(M)$ bằng phép tích phân của θ giữa 0 và $\theta_{\max}$ $\left(\cos\theta_{\max} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$;

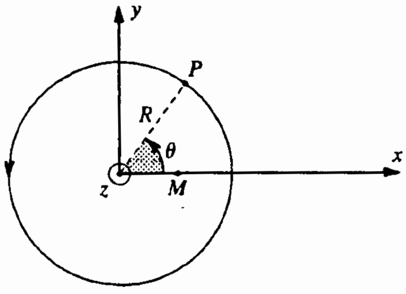
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega z\int_0^{\theta_{\max}}\frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\sigma\omega z\left[\frac{1}{\cos\theta_{\max}} + \cos\theta_{\max} - 2\right]\vec{e}_z$$

Hay $\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0}{2}\sigma\omega\dfrac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)^2\vec{e}_z$

Giá trị bằng số của chuẩn của trường này là $B=8{,}5.10^{-11}\,T$. *Giá trị này rất nhỏ và trường này bị chìm trong thành phần theo trục (Oz) của từ trường trái đất (vào cỡ vài* 10^{-5} *T). Ngoài ra, ROWLAND đã cho biết, nhờ một bộ kim nam châm (lắp phiếm định), đã chứng tỏ được sự tồn tại của trường này.*

5



1) *Mặt phẳng của vòng dây (đi qua M) là một mặt phẳng đối xứng.* $\vec{B}(M)$ *vuông góc với mặt phẳng này.*

2) $\vec{B}(M)=\oint\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{\overrightarrow{dP}\wedge\overrightarrow{PM}}{MP^3}$ *với, trong tọa độ Descartes :*

$$\overrightarrow{OP}=\begin{vmatrix}R\cos\theta\\R\sin\theta\end{vmatrix}\ ;\ d\vec{P}=\begin{vmatrix}-R\sin\theta\,d\theta\\R\cos\theta\,d\theta\end{vmatrix}\ \text{và}\ \overrightarrow{OM}=\begin{vmatrix}r\\0\end{vmatrix}$$

Ta thu được :

$$\vec{B}(M)=\vec{e}_z\int_0^{2\pi}\frac{1-u\cos\theta}{(1-2u\cos\theta+u^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta,\ \text{với}\ u=\frac{r}{R}<1.$$

$$\frac{1-u\cos\theta}{(1-2u\cos\theta+u^2)^{\frac{3}{2}}}=1+2u\cos\theta+\frac{3u^2}{2}(3\cos^2\theta-1)$$ *giới hạn ở các số hạng bậc 2 của u.*

Biết rằng $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0$ *và* $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\pi$ *ta có :*

$$\vec{B}(M)=\frac{\mu_0 I}{R}\left(1+\frac{3}{4}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

giới hạn ở các số hạng bậc 2 của $\dfrac{r}{R}$. *Trong mặt phẳng của vòng dây, từ trường tăng khi dịch ra xa tâm.*

6

1) *Các vòng dây ghép nối với nhau*

Số vòng dây trên một đơn vị dài cho bởi $n=\dfrac{N}{\pi R}$. *Số vòng dây là lớn, nên ta có một phân bố dòng đều trên bề mặt* $\vec{j}_S=nI\vec{e}_z$.

Tập hợp các mặt phẳng chứa (Oz) là các mặt phẳng phản đối xứng của dòng, vậy $\vec{B}(0)$ *được mang bởi (Oz).*

$$\vec{B}(0)=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 InR}{2R\sin\theta}\sin^3\theta\,d\theta.\vec{e}_z$$

vì mỗi "vòng dây" được nhìn dưới một góc dθ có dòng $j_S R d\theta$ *chạy qua*

$$\vec{B}(0)=\frac{\mu_0 NI}{4R}\vec{e}_z$$

2) Các vòng dây cách đều nhau (không nối với nhau)

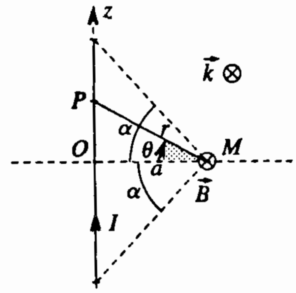
Số vòng dây nằm giữa hai mặt phẳng có độ cao z và z + dz cho bởi $n'dz=\dfrac{N}{2R}dz$. *Vậy mật độ dòng trên bề mặt tương đương bằng* $\vec{j}_S=n'I\sin\theta\,\vec{e}_z$, *vì* $j_S R d\theta=n'I|dz|$ *với* $z=R\cos\theta$, *nghĩa là* $|dz|=R\sin\theta\,d\theta$

Một phép tính giống như trên cho ta :

$$\vec{B}'(0)=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 n'I\sin\theta R}{2R\sin\theta}\sin^3\theta\,d\theta.\vec{e}_z\ \ \textit{hay}:\ \vec{B}(0)=\frac{\mu_0 NI}{3R}\vec{e}_z$$

7

Mặt phẳng chứa đoạn dây và điểm M là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy $\vec{B}(M)$ *vuông góc với mặt phẳng này :* $\vec{B}(M)=B\vec{k}$.



Sử dụng định luật BIOT và SAVART:

$$\vec{B}(M)=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dP}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

với $\overrightarrow{OP}=a\tan\theta\,\vec{e}_z$ *(hay* $\overrightarrow{dP}=\dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta.\vec{e}_z$*),*

$PM=\dfrac{a}{\cos\theta}$ *và* $\vec{e}_z\wedge\vec{e}_{PM}=\cos\theta.\vec{k}$. *Ta thu được :*

$$\vec{B}(M)=\vec{k}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{a}\cos\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\sin\alpha.\vec{k}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\frac{\frac{l}{2}}{\left[a^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right)\vec{k}$$

mà số hạng đầu tiên khác không của phép khai triển có giới hạn theo $\dfrac{a}{l}$ *ở lân cận 0 cho bởi :*

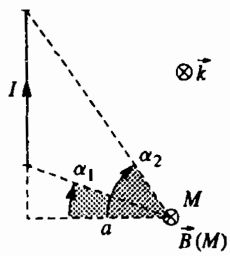
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(1-2\frac{a^2}{l^2}\right)$$

Ta muốn $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$ *sai kém 1%, nghĩa là* $\dfrac{2a^2}{l^2}=10^{-2}$, *điều này cho ta :*

$$\frac{a}{l}\approx\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\approx 7.10^{-2}$$

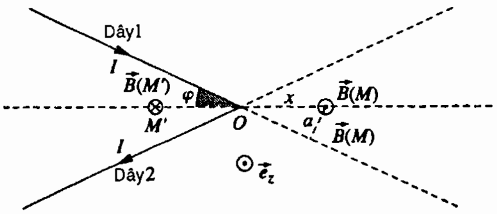
8

Mặt phẳng chứa hai dây và điểm M là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy $\vec{B}(M)$ *vuông góc với mặt phẳng này :* $\vec{B}(M)=B\vec{e}_z$. *Trường* $\vec{B}(M)$ *tạo ra bởi một đoạn mang dòng cường độ I cho bởi :*



$$\vec{B}(M)=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{k}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Nghĩa là $\vec{B}(M)=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{k}(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$.



Các từ trường tạo ra bởi dây 1 và dây 2 là giống nhau. Biết rằng $a = x\sin\varphi$, $\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\varphi$ và $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$, *ta thu được :*

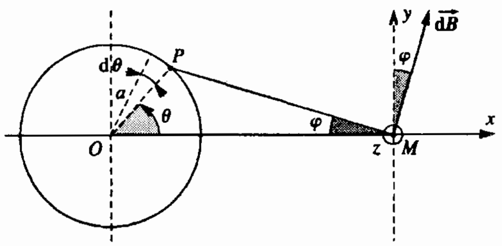
$$\vec{B}(M)=-2\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}(-\vec{e}_z)\ =\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\frac{\mathrm{tg}\varphi}{2}.\vec{e}_z$$

Để tính $\vec{B}(M')$, *ta dùng* $\alpha_1=-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ và $a = -x\sin\varphi$, *nghĩa là :*

$$\vec{B}(M')=-2\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\vec{e}_z\ (x<0)$$

$$=-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}\vec{e}_z\ (x<0)$$

9



1) *Mặt phẳng song song với các đường sinh của hình trụ đi qua M và O là một mặt phẳng đối xứng của các dòng, vậy* $\vec{B}(M)$ *vuông góc với mặt phẳng này :* $\vec{B}(M)=B\,\vec{e}_y$. *Vì hệ là bất biến với phép tịnh tiến theo z và với phép quay xung quanh (Oz), nên ta có* $\vec{B}(M)=B(r)\vec{e}_y$, *với* OM = r.

Chú ý rằng ta đang có các dây song song có bề rộng $a\mathrm{d}\theta$, *mang các cường độ nguyên tố* $aj_S\mathrm{d}\theta$, *ta thu được :*

$$\mathrm{d}B_y=\frac{\mu_0 a j_S\mathrm{d}\theta}{2\pi PM}\cos\varphi \ \text{ và }\ j_S 2\pi a=I\,.$$

Từ đó : $\vec{B}(M)=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 j_S a}{2\pi PM}\cos\varphi d\theta.\vec{e}_y$

Chú ý rằng :

- $PM\cos\varphi = r - a\cos\theta$
- $PM^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$

Từ đó : $\vec{B}(M)=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 j_S a}{2\pi}\frac{r-a\cos\theta}{r^2+a^2-2ar\cos\theta}\mathrm{d}\theta.\vec{e}_y$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_y\times F(u)$$

với $F(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-u\cos\theta}{1-2u\cos\theta+u^2}\mathrm{d}\theta$ và $u=\frac{a}{r}$

Đặt $v=\tan\frac{\theta}{2}$ *(từ đó* $\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$ *) ta có :*

$$F(u)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}+\int_0^{\infty}\frac{(1-u)^2\mathrm{d}v}{(1-u^2)+(1+u)^2v^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\text{ dấu }(1-u)\right\}$$

Như vậy với $u>1$, *tức* $r<a$: $\vec{B}=\vec{0}$;

và với $u<1$, *tức* $r>a$: $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_y$.

2) *Phép tính trực tiếp* $\vec{B}$ *đã cho ta :*

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{trụ}\vec{j}_S\mathrm{d}S\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_S\wedge\iint_{trụ}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\mathrm{d}S$$

Tích phân $\iint_{trụ}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\mathrm{d}S$ *có thể được hiểu là trường tĩnh điện tạo ra bởi một hình trụ đồng nhất mang một mật độ điện tích đều trên bề mặt* $\sigma=4\pi\varepsilon_0$. *Sự áp dụng định lí* GAUSS *trong trường hợp này cho ta :*

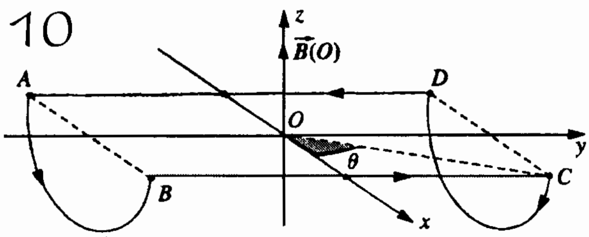
nếu $r>a$, $\vec{E}(M)=\frac{2\pi a\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_x$ *và nếu* $r<a$, $\vec{E}(M)=0$ *nghĩa là :*

- *nếu* $r>a$, $\iint_{trụ}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\mathrm{d}S=\frac{4\pi a}{r}\vec{e}_x$
- *nếu* $r<a$, $\iint_{trụ}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\mathrm{d}S=0$

Vậy ta thu được :

- *nếu* $r>a$, $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}j_S\vec{e}_z\wedge\frac{4\pi a}{r}\vec{e}_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_y$
- *nếu* $r<a$, $\vec{B}=0$.

10



1) *Các mặt phẳng (xOz) và (yOz) (chứa điểm O) là các mặt phẳng phản đối xứng của các dòng, vậy* $\vec{B}(0)$ *vuông góc với mặt phẳng này:* $\vec{B}(0)=B\vec{e}_z$

• $\vec{B}(BC)=\vec{B}(DA)=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}2\sin\theta\,\vec{e}_z$ với $\sin\theta=\frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}}$

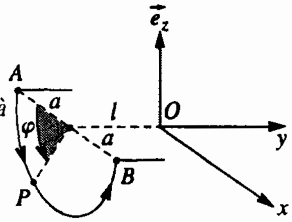
• $\vec{e}_z.\vec{B}(AB)=\vec{e}_z.\vec{B}(CD)$ và $\vec{B}(AB).\vec{e}_z=\left\{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{AB}\frac{\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{dP}}{OP^3}\right\}\vec{e}_z$.

Biết rằng :

$\overrightarrow{OP}=-a\cos\varphi\vec{e}_x-l\vec{e}_y-a\sin\varphi\vec{e}_z$

$\overrightarrow{dP}=(a\sin\varphi\vec{e}_x-a\cos\varphi\vec{e}_z)d\varphi$ và

$\overrightarrow{OP}'\wedge\overrightarrow{dP}=(al\cos\varphi\vec{e}_x+a^2\vec{e}_y+al\sin\varphi\vec{e}_z)d\varphi$

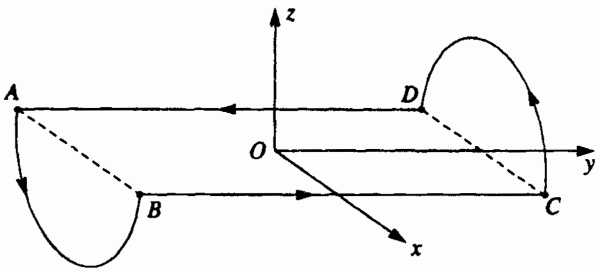


ta thu được :

$$\vec{B}(AB).\vec{e}_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\frac{al\sin\varphi d\varphi}{(l^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{al}{(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}2.$$

Hay là : $\vec{B}(O)=\frac{\mu_0 I}{\pi}\left\{\frac{l}{a\sqrt{l^2+a^2}}+\frac{al}{(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\vec{e}_z.$

2)



• *Ta luôn luôn có* $\vec{B}(BC)=\vec{B}(DA)=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{l}{a\sqrt{l^2+a^2}}\vec{e}_z$

. *Với mọi điểm P của AB, ta có thể liên kết một điểm P' của CD sao cho* $\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OP}$ *và* $\overrightarrow{dP}=-\overrightarrow{dP}$, *từ đó* $\vec{B}(AB)=\vec{B}(CD)$

Mặt phẳng (yOz) là một mặt phẳng phản đối xứng của các dòng này theo AB và CD, vậy $\vec{B}$ *nằm trong mặt phẳng này.*

$$\vec{B}(AB)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{al\sin\varphi d\varphi}{(l^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^2 d\varphi}{(l^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_y$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{al}{(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}2\vec{e}_z+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a^2}{(l^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\pi\vec{e}_y$$

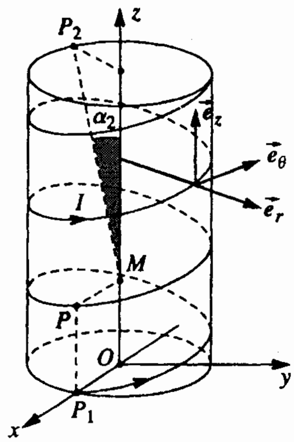
Vậy vectơ cảm ứng từ toàn phần bằng :

$$\vec{B}(O)=\frac{\mu_0 I}{\pi}\left\{\left[\frac{l}{a\sqrt{l^2+a^2}}+\frac{al}{(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\vec{e}_z+\frac{\pi}{2a}\frac{a^3}{(l^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_y\right\}$$

với l = 0, ta tìm lại được vectơ cảm ứng từ của một vòng dây tại tâm của nó.

11

Cho một đường đinh ốc hữu hạn có bước a trên một hình trụ bán kính R. Ta hãy xác định vị trí của một điểm P trên đường đinh ốc theo cách sau :



$z_P=z_M+\frac{a\theta}{2\pi}$ ($z_P=z_M$ nếu $\theta=0$)

Vectơ $\vec{B}(M)$ *cho bởi :*

$$\vec{B}(M)=\int_{P_1}^{P_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dP}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

với $\overrightarrow{MP}=R\vec{e}_r+(z_P-z_M)\vec{e}_z$

Cho $d\vec{P}=Rd\theta\,\vec{e}_\theta+\frac{a}{2\pi}d\theta\,\vec{e}_z$ *và*

$$d\vec{P}\wedge\overrightarrow{PM}=\left(-\frac{aR\theta}{2\pi}\vec{e}_r-\frac{Ra}{2\pi}\vec{e}_\theta+R^2\vec{e}_z\right)d\theta$$

Hình chiếu của $\vec{B}(M)$ *trên (Oz) cho bởi :*

$$\vec{B}(M).\vec{e}_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{P_1}^{P_2}\frac{R^2 d\theta}{[R^2+(z_P-z_M)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Gọi α là góc $(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{MP})$ *nằm trong miền [0 ; π]. Ta có :*

$$z_P-z_M=\frac{R}{\tan\alpha}\ \text{ và }\ \theta=\frac{2\pi}{a}(z_P-z_M)=\frac{2\pi R}{a}\frac{1}{\tan\alpha}$$

nghĩa là : $d\theta=-\frac{2\pi R}{a}\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$

Điều này cho ta :

$$\vec{B}(M).\vec{e}_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{2\pi}{a}d(\cos\alpha)=\frac{\mu_0 I}{2a}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)$$

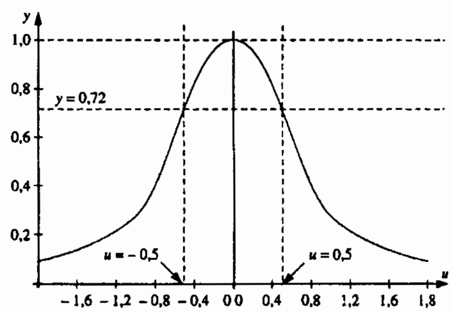
Biết rằng $\frac{1}{a}$ *có thể coi như số vòng dây trên một đơn vị dài dọc theo (Oz) , ta thu được* $B_z=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)$, *trường tạo ra bởi một lớp xôlênôit tại một điểm của trục. Nhưng đối với đường đinh ốc,* B_x *và* B_y *không bằng không.*

12

1) *Vectơ* $\vec{B}$ *tạo ra bởi một vòng dây tại một điểm trên trục của nó cho bởi :*

$\vec{B}=B(x)\vec{e}_x$, *với* $B(x)=B_0(1+u^2)^{-\frac{3}{2}}$, $u=\frac{x}{R}$ *và* $B_0=\frac{\mu_0 NI}{2R}$

Từ đó : $y=(1+u^2)^{-\frac{3}{2}}$



$$y'(u) = -3u(1+u^2)^{-\frac{5}{2}}\ ;$$

$$y''(u) = 3(4u^2-1)(1+u^2)^{-\frac{7}{2}}\ ;$$

$$y^{(3)}(u) = -15u(4u^2-3)(1+u^2)^{-\frac{9}{2}}\ ;$$

$$y^{(4)}(u) = 45(8u^4-12u^2+1)(1+u^2)^{-\frac{11}{2}}\ .$$

Bảng sau đây chỉ rõ các giá trị khác nhau của y(u), y'(u), y''(u), $y^{(3)}(u)$ và $y^{(4)}(u)$ tùy theo u.

Chú ý rằng y''(u) = 0 với u = ± 0,5 (điểm uốn)

u	y(u)	y'(u)	y''(u)	$y^{(3)}(u)$	$y^{(4)}(u)$
-2.50	0.05	0.05	0.07	0.11	0.20
-2.25	0.07	0.07	0.11	0.18	0.32
-2.00	0.09	0.11	0.16	0.28	0.52
-1.75	0.12	0.16	0.25	0.44	0.79
-1.50	0.17	0.24	0.39	0.67	1.00
-1.25	0.24	0.36	0.58	0.88	0.45
-1.00	0.35	0.53	0.80	0.66	-2.98
-0.75	0.51	0.74	0.79	-1.13	-12.44
-0.50	0.72	0.86	0.00	-5.50	-19.78
-0.25	0.91	0.64	-1.82	-7.85	9.07
0.00	1.00	-0.00	-3.00	0.00	45.00
0.25	0.91	-0.64	-1.82	7.85	9.07
0.50	0.72	-0.86	0.00	5.50	-19.78
0.75	0.51	-0.74	0.79	1.13	-12.44
1.00	0.35	-0.53	0.80	-0.66	-2.98
1.25	0.24	-0.36	0.58	-0.88	0.45
1.50	0.17	-0.24	0.39	-0.67	1.00
1.75	0.12	-0.16	0.25	-0.44	0.79
2.00	0.09	-0.11	0.16	-0.28	0.52
2.25	0.07	-0.07	0.11	-0.18	0.32
2.50	0.05	-0.05	0.07	-0.11	0.20

2) *Trường tổng hợp tại M là sự chồng chất của hai trường $\vec{B}_1(M)+\vec{B}_2(M)$*

Ta có : $B_C = 2B_0(1+u^2)^{-\frac{3}{2}}$, *với* u = 0,5, *từ đó :*

$$B_C = 2B_0 \times 0{,}72 = 1{,}44B_0 \approx \frac{16}{5\sqrt{5}}B_0$$

Ta hãy khảo sát $y = \dfrac{B}{B_C}$

$$y = \frac{16}{5\sqrt{5}}\left\{(1+u^2)^{-\frac{3}{2}} + (1+u'^2)^{-\frac{3}{2}}\right\} \quad \text{với } u = \frac{1}{2}+\xi \text{ et } u' = \frac{1}{2}-\xi\ .$$

hay :
$$y = \frac{16}{5\sqrt{5}}\left\{\left(1+\left(\frac{1}{2}+\xi\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{16}{5\sqrt{5}}\left\{y\left(\frac{1}{2}+\xi\right)+y\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right\}.$$

3) *Phép khai triển có giới hạn của y lân cận* $\xi = 0$ *cho ta :*

$$y\left(\frac{1}{2}+\xi\right) = y\left(\frac{1}{2}\right)+\xi y'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\xi^2}{2}y''\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\xi^3}{6}y^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\xi^4}{24}y^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$y\left(\frac{1}{2}-\xi\right) = y\left(\frac{1}{2}\right)-\xi y'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\xi^2}{2}y''\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\xi^3}{6}y^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\xi^4}{24}y^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Từ đó : $y(\xi) = 2\times\dfrac{16}{5\sqrt{5}}\left\{y\left(\frac{1}{2}\right)+\dfrac{\xi^2}{2}y''\left(\frac{1}{2}\right)+\dfrac{\xi^4}{24}y^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ *với* $y''\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

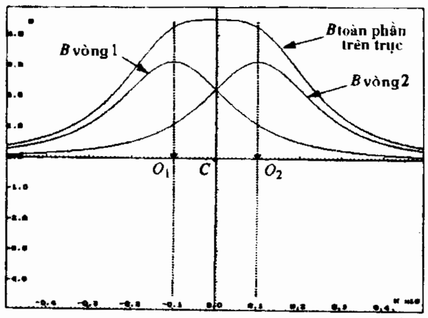
$$y(\xi) = \frac{32}{5\sqrt{5}}\left\{y\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\xi^4}{24}y^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

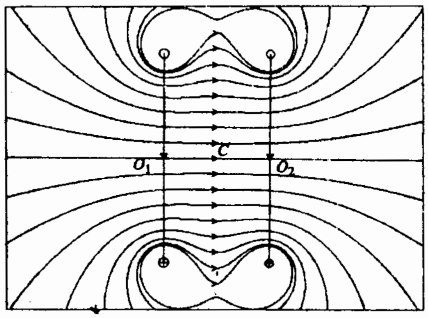
Ta muốn có một trường không đổi sai kém 10^{-3}, *từ đó :* $\dfrac{\varepsilon^4}{24}\dfrac{y^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)}{y\left(\frac{1}{2}\right)} = 10^{-3}$

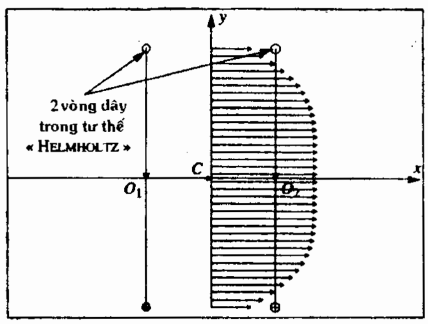
Biết rằng $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}72$ *và* $y^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = -19{,}78$, $\varepsilon^4 = 24.10^{-3}\times\dfrac{0{,}72}{19{,}78}$,

hay $\xi = 0{,}172$.

Với $-0{,}17R < z < 0{,}17R$, $B = B_C$ *sai kém* 10^{-3}. *Trên các sơ đồ dưới đây, ta thể hiện rõ sự biến đổi của* $\vec{B}$ *trên trục, đường nét của các đường sức trường, khi các cuộn dây ở trong tư thế* HELMHOLTZ, *cũng như* B(O, y). *Trường là đều trong một miền "quan trọng" lân cận C.*

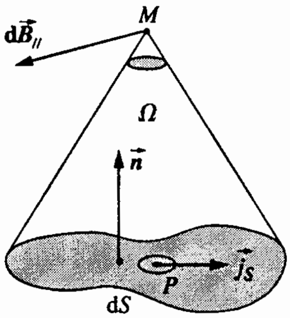






13 1) $d\vec{B}$ *của một phần tử diện tích dS cho bởi :*

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 \vec{j}_s}{4\pi} \frac{dS \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



$\overrightarrow{dB_{//}}$ *được hiểu như là hiệu giữa* $\overrightarrow{dB}$ *và* $\overrightarrow{dB_\perp}$ *thành phần vuông góc với mặt phẳng, của* $\overrightarrow{dB}$, *ta thu được* $\overrightarrow{dB_\perp} = (\overrightarrow{dB}.\vec{n})\vec{n}$ *hay là :*

$$\overrightarrow{dB_{//}} = \overrightarrow{dB}(\vec{n}.\vec{n}) - (\overrightarrow{dB}.\vec{n})\vec{n} = \vec{n} \wedge (\overrightarrow{dB} \wedge \vec{n})$$

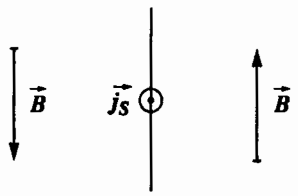
Mà $\overrightarrow{dB} \wedge \vec{n} = -\left[\vec{n} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_S dS \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)\right]$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_S \frac{\vec{n}.\overrightarrow{PM}}{PM^3} dS = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_S d\Omega$$

từ đó $\overrightarrow{dB_{//}} = \frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{j}_S \wedge \vec{n})d\Omega$ *và* $\vec{B}_{//} = \frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{j}_S \wedge \vec{n})\Omega$

2) *Nếu diện tích là một mặt phẳng vô hạn, thì :*

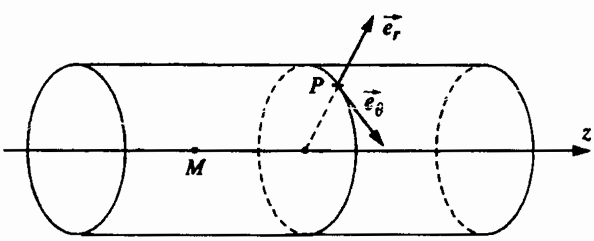
$\Omega = 2\pi$ *và* $\vec{B}_{//} = \frac{\mu_0}{2}\vec{j}_S \wedge \vec{n}$



14 1) *Ống dây có tiết diện tròn*

Vectơ nguyên tố $\overrightarrow{dB}$ *tạo ra tại một điểm M của trục, bởi một phần tử diện tích dS nằm tại P bằng :*

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} nI \frac{\vec{e}_\theta dS \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \text{ và } dB_z = \vec{e}_z.\overrightarrow{dB}$$



Biết rằng :

$$\vec{e}_z(\vec{e}_\theta \wedge \overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{PM}(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta) = -\overrightarrow{PM}.\vec{e}_r,$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} nI \left\{\frac{\overrightarrow{MP}.\vec{e}_r dS}{MP^3}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} nI d\Omega$$

$d\Omega$ *là góc đặc dưới đó, từ điểm M ta nhìn dS tại P. Từ đó :*

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} nI\Omega$$

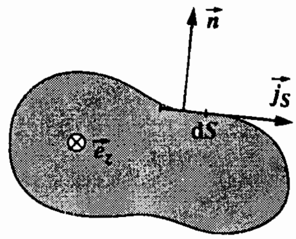
2) *Mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy* $\vec{B}$ *vuông góc với mặt phẳng này, từ đó song song với (Oz) :* $\vec{B} = B.\vec{e}_z$. *Ống dây bây giờ là vô cùng dài, nhưng có tiết diện bất kì với* $\vec{j}_S.\vec{e}_z = 0$. *Cho một điểm M bất kì trong không gian. Hãy khảo sát* dB_z *tạo ra bởi một phần tử dòng* $\vec{j}_S dS$ *ở P, tại M :*

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{e}_z\left(\frac{\vec{j}_S \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)dS$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{MP}}{PM^3}(\vec{j}_S \wedge \vec{e}_z)dS = \frac{\mu_0}{4\pi} j_S \frac{\overrightarrow{MP}.\vec{n}}{PM^3} dS$$

trong đó $\vec{n}$ *là pháp tuyến của ống dây* $\frac{\overrightarrow{MP}.\vec{n}}{PM^3}dS$ *biểu diễn góc đặc dΩ dưới đó từ M ta nhìn dS đặt tại P, tức là :*

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} j_S d\Omega$$

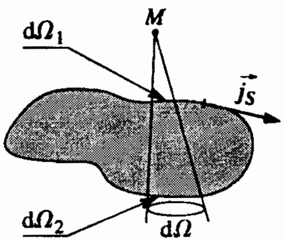


- $\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0}{4\pi} j_S \Omega \vec{e}_z = \mu_0 j_S \vec{e}_z$, *vì góc đặc dưới đó từ M ở trong ống dây, ta nhìn ống dây bằng 4π.*
- *Với một điểm M ở ngoài ống dây, ta hãy lấy một góc đặc dΩ chắn ống dây :*

$$d\vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} j_S \vec{e}_z (d\Omega_1 - d\Omega_2)$$

với $d\Omega_1 = d\Omega_2 = d\Omega$.

Từ đó $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$



ĐỊNH LÍ AMPÈRE

8

Lịch sử

André – Marie AMPÈRE (1775 – 1836), sinh tại Lyon, giáo sư Trường Bách khoa, nhà vật lí và nhà toán học, đã thiết lập được mối quan hệ giữa từ trường và dòng điện.

Ta hãy dẫn ra đây sự đánh giá (chín chắn !) của James Clerk MAXWELL về A.M. AMPÈRE :

"Được trang bị đầy đủ và đầy hiệu lực từ trí tuệ của NEWTON, lí thuyết và thực nghiệm của điện học, toàn bộ hình như đã nảy sinh. Hình thức hoàn hảo, tính chặt chẽ không thể phê phán, tất cả được tóm tắt trong một công thức mà từ đó có thể suy đoán mọi hiện tượng và công thức đó sẽ phải mãi còn là công thức cơ bản của điện động lực học".

MỤC TIÊU

- Định lí AMPÈRE.
- Sử dụng.

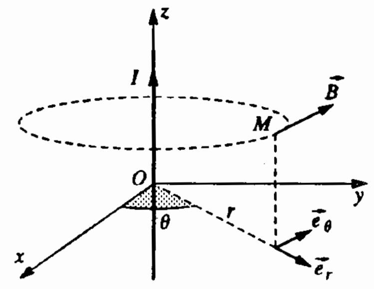
ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Từ trường.

1 Lưu số của trường của một sợi dây

Trên các bản đồ từ trường được vẽ ở *chương* 7, ta đã có thể nhận ra rằng, nói chung các đường sức trường là những đường cong kín. Điều này tạo nên một sự khác biệt cơ bản với trường tĩnh điện : lưu số của từ trường trên một đường cong kín không nhất thiết phải bằng không.

Ta sẽ sử dụng một trường hợp sơ đẳng để làm rõ tính chất này.



Hình 1. *Dây thẳng vô hạn.*

1.1.1. Lưu số nguyên tố của trường

Xét một sợi dây thẳng vô hạn có dòng không đổi cường độ I chạy qua (*hình* 1). Trường từ tĩnh của một phân bố như thế đã được tính toán ở *chương* 7, *bài tập* 1 và bằng cách sử dụng các tọa độ trụ r, θ, và z, trục (Oz) trùng với sợi dây, có biểu thức :

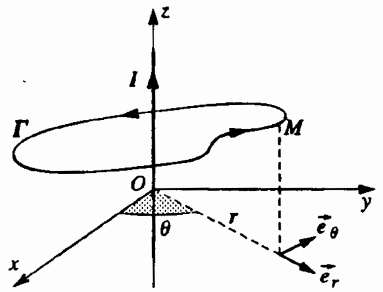
$$\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, \theta) = B(r)\vec{e}_\theta = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta .$$

Trong tọa độ trụ, dịch chuyển nguyên tố của một điểm M được viết là :

$$d\overrightarrow{M} = dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta + dz.\vec{e}_z$$

Lưu số nguyên tố của từ trường của dây bằng :

$$\mathrm{d}C = \vec{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} d\theta$$



Hình 2. *Đường cong kín Γ quấn lấy một sợi dây theo chiều thuận.*

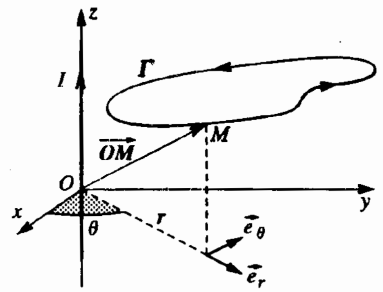
1.1.2. Lưu số của trường trên một đường cong kín quấn lấy dây

Hình 2 biểu diễn một đường cong kín Γ quấn lấy sợi dây theo chiều thuận. Khi điểm $M(r, \theta, z)$ vạch ra đường cong kín Γ, thì góc θ biến thiên từ O đến 2π với giá trị tăng dần.

Lưu số của trường trên đường cong kín này được suy ra trực tiếp từ kết quả trên :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dM} = \mu_0 Is$$

Nếu đường cong kín quấn lấy dây theo chiều nghịch, thì lưu số bằng $C_\Gamma = -\mu_0 I$.

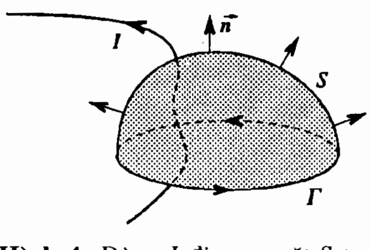


Hình 3. *Đường cong kín Γ không quấn lấy sợi dây.*

1.1.3. Lưu số của trường trên một đường cong kín không quấn lấy dây

Nếu đường cong kín không quấn lấy dây (*hình* 3) thì độ biến thiên của góc θ khi M vạch ra đường cong kín Γ tính gộp lại là bằng không, vậy :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}.\mathrm{d}\vec{M} = 0$$



Hình 4. *Dòng I đi qua mặt S tựa trên đường cong kín Γ theo chiều của $\vec{n}$.*

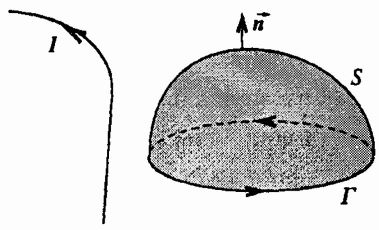
1.1.4. Quan hệ với dòng điện đi qua đường cong kín

Hình vẽ 4 biểu diễn một mặt tựa trên đường cong kín và được định hướng theo đường cong này : một cái vặn nút chai quay theo chiều đã chọn cho Γ sẽ đi qua mặt S theo chiều của vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ của nó.

Nếu đường cong kín quấn lấy dây một vòng theo chiều thuận (*hình* 4), thì dòng I đi qua mặt S theo chiều của $\vec{n}$. Trong trường hợp này, $C_\Gamma = \mu_0 I$.

Nếu đường cong kín quấn lấy dây một vòng theo chiều nghịch, thì dòng I đi qua mặt S theo chiều $-\vec{n}$. Trong trường hợp này, $C_\Gamma = -\mu_0 I$.

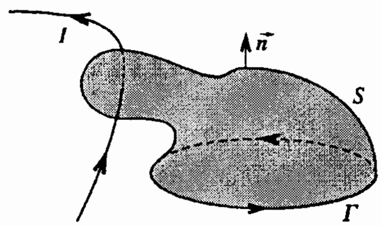
Nếu đường cong kín không quấn lấy dây thì dòng qua mặt S khi đó bằng không, dù mặt S có dạng đơn giản (*hình* 5) hoặc hơi phức tạp một chút (*hình* 6). Trong trường hợp sau này, dòng đi qua S hai lần nhưng theo chiều ngược nhau. Ta có thể tự đặt câu hỏi liệu các kết quả trên có đúng cho tất cả các sự lựa chọn mặt S tựa trên đường cong kín Γ. Vậy thì ta hãy xét hai mặt như S_1 và S_2 tựa trên Γ và được định hướng bởi Γ (*hình* 7).



Hình 5. *Dòng I không đi qua mặt S tựa trên đường cong kín Γ.*

Mặt $\Sigma == S_1 U S_2^{(-)}$ là một mặt kín có một pháp tuyến định hướng ra phía ngoài ($S_2^{(-)}$ chỉ S_2 với định hướng ngược lại). *Ở chế độ không phụ thuộc thời gian*, vectơ $\vec{j}$ có thông lượng bảo toàn. Thông lượng của nó gửi qua mặt kín Σ bằng không, thông lượng của $\vec{j}$ là như nhau qua S_1 và S_2.

2 Định lí AMPÈRE



Hình 6.

Ta thừa nhận sự tổng quát hóa các kết quả thu được đối với sợi dây thẳng vô hạn trong trường hợp của một phân bố dòng $\mathcal{D}_j$ mà vectơ $\vec{j}$ có thông lượng bảo toàn. Trong bối cảnh đó, *định lí AMPÈRE* (công nhận) được phát biểu như sau :

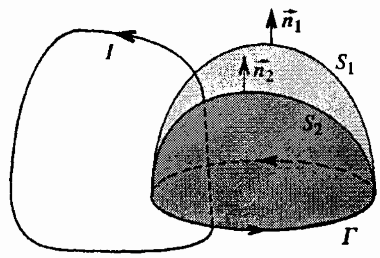
Lưu số của trường từ tĩnh $\vec{B}$ tạo ra bởi một tập hợp dòng trên một đường cong kín Γ bằng tổng các dòng bị quấn bởi Γ nhân với μ_0 :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\,\overrightarrow{dM} = \mu_0 \sum I_{\text{bị quấn}} .$$

Đây là *tổng đại số*, ta cần chú ý tới sự định hướng của đường cong kín và của dòng. Ví dụ trên hình 8, ta có :

$$C_\Gamma = \mu_0(I_1 - I_2 + 2I_3)$$

Lưu số không phụ thuộc gì vào I_4.

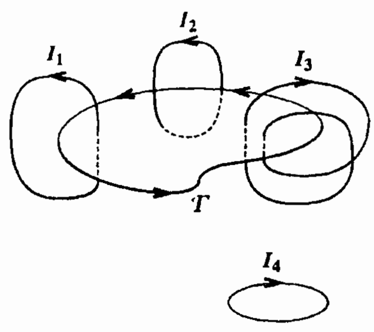


Hình 7. *Dòng qua hai mặt tựa trên Γ.*

Một cách tổng quát hơn, ta cũng có thể viết $C_\Gamma = \mu_0 \iint_S \vec{j}.\vec{n}dS$, kết quả không phụ thuộc vào sự chọn mặt S tựa trên đường cong luân chuyển Γ.

<u>*Chú ý :*</u>

- *Ta phải luôn nhớ rằng định lí AMPÈRE chỉ tuyệt đối có giá trị đối với các chế độ độc lập với thời gian, nghĩa là trong từ tĩnh. Đặc biệt, trong các trường hợp mà các đường dòng bị đứt đoạn, gây ra sự tích tụ điện tích, thì ta không thể áp dụng định lí trên. Đổi lại, ta có thể dùng định lí trong phép gần đúng của các trạng thái chuẩn không đổi khi vectơ $\vec{j}$ có thông lượng bảo toàn. Sự nghiên cứu đầy đủ hơn về khó khăn này sẽ được thực hiện ở năm thứ hai.*
- *Ta loại trừ các trường hợp ngoại lai như là đường cong kín Γ gặp một mạch hình sợi, hay là một đường cong kín mà ta không thể tìm thấy một cách đơn giản một mặt tựa trên nó.*



Hình 8. *Lưu số của $\vec{B}$ trên đường cong kín Γ chỉ phụ thuộc vào I_1, I_2 và I_3.*

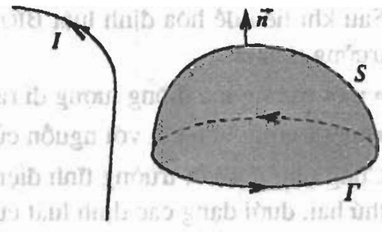
3 Hệ quả của định lí AMPÈRE

3.1. Từ tĩnh học

Từ tĩnh học, đó là định lí AMPÈRE cho một trường có thông lượng bảo toàn.

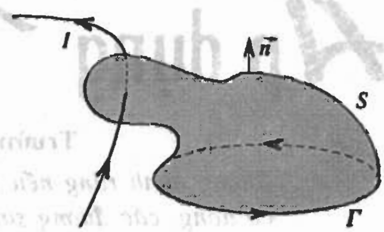
Nếu đường cong kín không quấn lấy dây thì dòng qua mặt S khi đó bằng không, dù mặt S có dạng đơn giản (*hình* 5) hoặc hơi phức tạp một chút (*hình* 6). Trong trường hợp sau này, dòng đi qua S hai lần nhưng theo chiều ngược nhau. Ta có thể tự đặt câu hỏi liệu các kết quả trên có đúng cho tất cả các sự lựa chọn mặt S tựa trên đường cong kín Γ. Vậy thì ta hãy xét hai mặt như S_1 và S_2 tựa trên Γ và được định hướng bởi Γ (*hình* 7).

Mặt $\Sigma == S_1 U S_2^{(-)}$ là một mặt kín có một pháp tuyến định hướng ra phía ngoài ($S_2^{(-)}$ chỉ S_2 với định hướng ngược lại). *Ở chế độ không phụ thuộc thời gian*, vectơ $\vec{j}$ có thông lượng bảo toàn. Thông lượng của nó gửi qua mặt kín Σ bằng không, thông lượng của $\vec{j}$ là như nhau qua S_1 và S_2.



Hình 5. ***Dòng I không đi qua mặt S tựa trên đường cong kín Γ.***

2 Định lí AMPÈRE



Hình 6.

Ta thừa nhận sự tổng quát hóa các kết quả thu được đối với sợi dây thẳng vô hạn trong trường hợp của một phân bố dòng $\mathcal{D}_j$ mà vectơ $\vec{j}$ có thông lượng bảo toàn. Trong bối cảnh đó, *định lí* AMPÈRE (công nhận) được phát biểu như sau :

Lưu số của trường từ tĩnh $\vec{B}$ tạo ra bởi một tập hợp dòng trên một đường cong kín Γ bằng tổng các dòng bị quấn bởi Γ nhân với μ_0 :

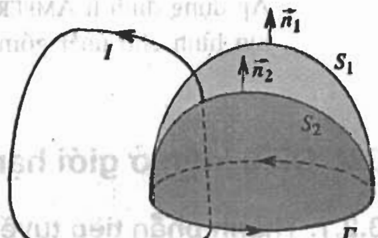
$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\,\overrightarrow{dM} = \mu_0 \sum I_{\text{bị quấn}}.$$

Đây là *tổng đại số*, ta cần chú ý tới sự định hướng của đường cong kín và của dòng. Ví dụ trên hình 8, ta có :

$$C_\Gamma = \mu_0(I_1 - I_2 + 2I_3)$$

Lưu số không phụ thuộc gì vào I_4.

Một cách tổng quát hơn, ta cũng có thể viết $C_\Gamma = \mu_0 \iint \vec{j}.\vec{n}dS$, kết quả không phụ thuộc vào sự chọn mặt S tựa trên đường cong luân chuyển Γ.

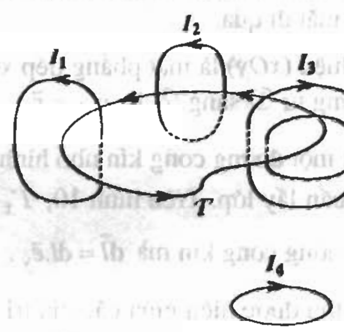


Hình 7. ***Dòng qua hai mặt tựa trên Γ.***

<u>*Chú ý :*</u>

• *Ta phải luôn nhớ rằng định lí* AMPÈRE *chỉ tuyệt đối có giá trị đối với các chế độ độc lập với thời gian, nghĩa là trong từ tĩnh. Đặc biệt, trong các trường hợp mà các đường dòng bị đứt đoạn, gây ra sự tích tụ điện tích, thì ta không thể áp dụng định lí trên. Đổi lại, ta có thể dùng định lí trong phép gần đúng của các trạng thái chuẩn không đổi khi vectơ $\vec{j}$ có thông lượng bảo toàn. Sự nghiên cứu đầy đủ hơn về khó khăn này sẽ được thực hiện ở năm thứ hai.*

• *Ta loại trừ các trường hợp ngoại lai như là đường cong kín Γ gặp một mạch hình sợi, hay là một đường cong kín mà ta không thể tìm thấy một cách đơn giản một mặt tựa trên nó.*



Hình 8. *Lưu số của $\vec{B}$ trên đường cong kín Γ chỉ phụ thuộc vào I_1, I_2 và I_3.*

3 Hệ quả của định lí AMPÈRE

3.1. Từ tĩnh học

Từ tĩnh học, đó là định lí AMPÈRE cho một trường có thông lượng bảo toàn.

Sau khi tiên đề hóa định luật BIOT và SAVART, ta đã chứng minh rằng từ trường tĩnh là :

- một trường mà thông lượng đi ra mọi mặt kín đều bằng không.
- một trường liên kết với nguồn của nó, các dòng, bởi định lí AMPÈRE.

Cũng như đối với trường tĩnh điện, ta sẽ thu tóm các tính chất này ở năm thứ hai, dưới dạng các định luật cục bộ.

Các công cụ mà ta đã có cho phép ta đi vào nghiên cứu đầy đủ về trường : sự biến đổi cục bộ và sự bất liên tục của trường, tính toán về trường...

Định lí AMPÈRE cho ta khả năng tiếp xúc với đặc tính cục bộ hay toàn bộ của trường từ tĩnh, một trường có thông lượng bảo toàn.

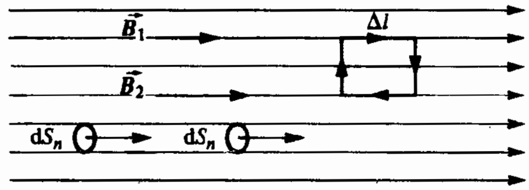
Áp dụng 1

Trường đều

Chứng minh rằng nếu trong một miền không có dòng, các đường sức trường là các đường thẳng song song, thì trường $\vec{B}$ là đều.

Các ống dòng nguyên tố là các hình trụ có tiết diện thẳng không đổi. $\vec{B}d\vec{S}_n = \text{cte}$ kéo theo $\vec{B} = \overrightarrow{\text{cte}}$ dọc theo một đường sức trường.

Áp dụng định lí AMPÈRE cho một đường cong kín hình chữ nhật gồm hai đường sức trường (*hình* 9), ta thấy ngay $B_1 \Delta l = B_2 \Delta l$. Do đó $\vec{B} = \overrightarrow{\text{cte}}$ trong miền này.



Hình 9.

3.2. Điều kiện ở giới hạn đối với từ trường

3.2.1. Thành phần tiếp tuyến của trường

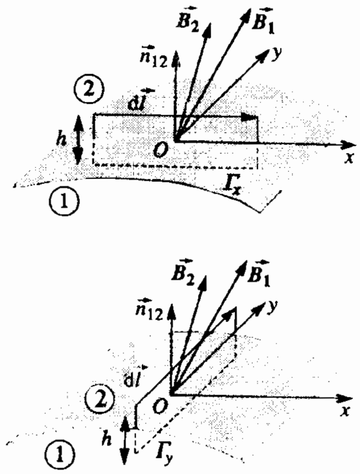
Ta hãy xét một lớp dòng mang bởi một mặt S, ngăn cách hai môi trường kí hiệu ① và ②. Ta đã thấy ở chương 7 rằng thành phần pháp tuyến của từ trường - trường có thông lượng bảo toàn, là liên tục khi đi qua mặt. Nhờ định lí AMPÈRE, ta sẽ xác định đặc tính của phần trường tiếp tuyến với mặt đi qua.

Kí hiệu (xOy) là mặt phẳng tiếp xúc với lớp tại điểm đang xét, pháp tuyến hướng từ ① sang ② là $\vec{n}_{12} = \vec{e}_z$.

Xét một đường cong kín nhỏ hình chữ nhật Γ, có chiều dài dl và chiều cao h quấn lấy lớp. Trên hình 10, Γ_x là đường cong kín mà $d\vec{l} = dl.\vec{e}_x$ và Γ_y là đường cong kín mà $d\vec{l} = dl.\vec{e}_y$.

Để thu được hiệu giữa các giá trị của trường ở hai bên của lớp, ta xét giới hạn h tiến tới O (mặc dầu $\vec{B_1}$ và $\vec{B_2}$ vẫn bị chặn).

Trong các điều kiện đó, dòng đi qua đường Γ_x là $dI = j_{S_y} dl$ và qua đường Γ_y là $dI = -j_{S_x} dl$.



Hình 10.

Áp dụng định lí AMPÈRE cho hai đường cong kín trên cho :

- đối với Γ_x : $(B_{2x} - B_{1x})dl = \mu_0 j_{S_y} dl$.
- đối với Γ_y : $(B_{2y} - B_{1y})dl = -\mu_0 j_{S_x} dl$.

Gộp các kết quả trên vào một công thức liên kết các thành phần tiếp tuyến của từ trường ở hai bên của lớp, ta có :

$$\vec{B}_{2//} - \vec{B}_{1//} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

3.2.2. Sự gián đoạn của trường

Ta đã biết rằng thành phần pháp tuyến của từ trường là liên tục khi đi qua lớp dòng.

Khi đi qua một lớp có một dòng trên bề mặt chạy qua, mật độ $\vec{j}_s$, thành phần tiếp tuyến của từ trường chịu một sự bất liên tục (gián đoạn) hữu hạn :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

Trong trường hợp của một phân bố khối hữu hạn, trường vẫn là liên tục.

Áp dụng 2

Biết $\vec{B}$, tìm phân bố dòng

Một phân bố dòng tạo ra một từ trường $\vec{B} = 0$ với $r < a$ và $\vec{B} = \frac{k}{r}\vec{e}_\theta$ với $r > a$ (trong tọa độ trụ r, θ và z, trục (Oz), k là một hằng số dương).

Hãy nêu đặc tính của phân bố dòng đã tạo ra một trường như trên.

Chú ý rằng các đường sức của trường trực giao xuyên tâm này là các vòng tròn trục (Oz), trên đó chuẩn của trường là không đổi. Trường nêu ra có thông lượng bảo toàn, rõ ràng đó là một trường có bản chất từ.

Ta hãy tìm một phân bố $\mathscr{D}_j$ có mật độ khối $\vec{j} = j_r\vec{e}_r + j_\theta\vec{e}_\theta + j_z\vec{e}_z$.

Vấn đề đang nghiên cứu hình như thích hợp với một phân bố bất biến với phép quay xung quanh trục (Oz) và với phép tịnh tiến song song với trục đó. Vậy ta hãy chứng tỏ rằng j_r và j_θ bằng không.

- $j_r = 0$

Áp dụng định lí AMPÈRE cho đường cong kín $\Gamma = ABCD$ (*hình* 11), gồm hai cung tròn AB và CD nhìn từ trục (Oz) dưới góc $rd\theta$ và hai cạnh BC và DA có chiều dài dz, song song với trục (Oz). Lưu số của trường trên đường cong kín này bằng không (các phần đóng góp của các cung tròn là ngược dấu nhau).

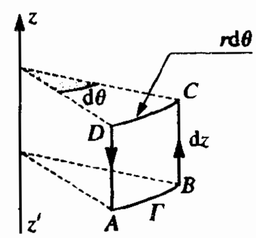
Theo định lí AMPÈRE, lưu số này $dC = 0$, còn bằng $\mu_0 j_r rd\theta dz$; vậy $j_r = 0$.

- $j_\theta = 0$

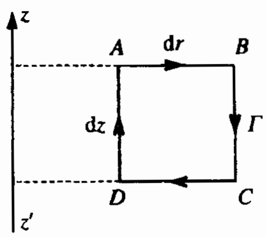
Tiến hành tương tự đối với đường hình chữ nhật $\Gamma = ABCD$, mà các cạnh AB và CD có chiều dài dr là xuyên tâm, và các cạnh BC và DA, có chiều dài dz song song với trục (Oz) (*hình* 12). Định lí AMPÈRE cho $C_\Gamma = 0 = \mu_0 j_\theta dr dz$, vậy $j_\theta = 0$

- Xác định j_z.

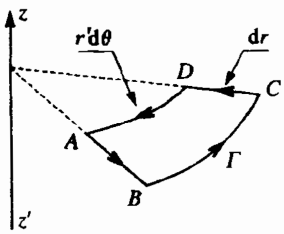
Đối với đường $\Gamma = ABCD$ (*hình* 13) nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục (Oz), AB và CD là xuyên tâm và có chiều dài dr.



Hình 11



Hình 12



Hình 13

DA là một cung tròn có chiều dài $rd\theta$ và BC là một cung tròn đồng tâm có chiều dài $(r + dr)d\theta$. Áp dụng định lí AMPÈRE :

$$B(r + dr)(r + dr)d\theta - B(r)rd\theta = \mu_0 j_z dr.rd\theta.$$

nghĩa là $\mu_0 j_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB(r)) = 0$. Với $B(r) = \frac{k}{r}$ đối với $r > a$ và $B(r) = 0$ đối với $r < a$, j_z bằng không ở khắp nơi. Không tồn tại dòng có mật độ khối !

• Kết luận.

Vậy các dòng nhất thiết phải được phân bố trên một mặt trụ có bán kính $r = a$.

Hệ thức đi qua :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

dẫn tới : $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_S$

hay : $$\vec{j}_S = \left[\frac{k}{a\mu_0}\right]\vec{e}_z.$$

4 Tính toán một từ trường nhờ định lí AMPÈRE

4.1. Nguyên tắc tính toán

Cũng như định lí GAUSS, định lí AMPÈRE được trình bày đặc biệt đơn giản. Đối với một phân bố dòng đã biết, ta có thể sẽ tính lưu số của trường trên các đường cong kín để từ đó suy ra biểu thức của trường. Tuy nhiên mối quan hệ giữa thông lượng và trường cần phải đơn giản : từ trường có biểu thức đã đơn giản hóa nhiều, đường cong kín có dạng hình học đơn giản.

Định lí AMPÈRE cho phép xác định nhanh từ trường đối với các phân bố dòng có tính đối xứng cao. Sau khi xác định được hình dạng của trường nhờ các nhận xét về tính đối xứng, sự áp dụng định lí cho một đường cong kín có dạng hình học phù hợp với các tính đối xứng của bài toán cho phép ta xác định biên độ của trường.

Nguyên tắc tính toán sẽ tương ứng với phương pháp tiến hành, trong trường hợp phân bố dòng có tính đối xứng cao được khai triển ở đây, như sau.

4.1.1. Giai đoạn thứ nhất : nhận xét về tính đối xứng

Nhờ vào các tính đối xứng của phân bố, ta phải có được hình dạng của từ trường :

• sử dụng các mặt phẳng đối xứng hoặc phản đối xứng để xác định hướng của nó.

• sử dụng tính bất biến với phép quay hoặc với phép tịnh tiến để giảm bớt sự phụ thuộc của các thành phần của trường đối với các tọa độ... (ta cần nghĩ tới sử dụng một hệ tọa độ thích hợp với tính đối xứng của bài toán).

4.1.2. Giai đoạn thứ hai : chọn "đường cong kín AMPÈRE"

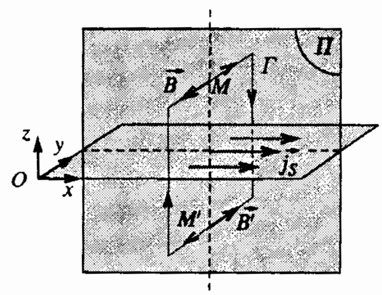
Hình dạng thu được cho trường quyết định việc lựa chọn đường cong luân chuyển Γ của "đường cong kín AMPÈRE" để có được dễ dàng lưu số của từ trường.

4.1.3. Giai đoạn thứ ba : áp dụng định lí AMPÈRE

Giai đoạn hoàn thành việc xác định từ trường.

4.2. Phân bố có hình dạng phẳng : lớp phẳng vô hạn

Ta hãy xác định trường tạo ra bởi một lớp dòng vô hạn trùng với mặt phẳng (xOy), với $\vec{j}_S = j_S\vec{e}_x$ (*hình* 14).



Hình 14. *Lớp phẳng vô hạn.*

■ **Nhận xét về tính đối xứng**

Phân bố là bất biến với phép đối xứng đối với mọi mặt phẳng song song với (xOz), vậy $\vec{B}(x, y, z) = B(x, y, z)\vec{e}_y$. Sự bất biến của bài toán với phép tịnh tiến song song với (Ox) hay (Oy) cho phép ta thực hiện sự đơn giản hóa phụ

$$\vec{B}(x, y, z) = B(z)\vec{e}_y$$

Hãy lưu ý rằng mặt phẳng (xOy) cũng là một mặt phẳng đối xứng của phân bố.

Tại điểm M' đối xứng của điểm M qua mặt phẳng này, trường $\vec{B}'$ là vectơ đối của đối xứng của trường $\vec{B}$ tại M : hàm số $B(z)$ là hàm lẻ.

■ **Chọn đường cong kín AMPÈRE**

Một đường cong kín cho phép tính toán dễ dàng thông lượng phải có các cạnh song song với trường, với z = cte, đặc tính lẻ của $B(z)$ đương nhiên dẫn ta tới sự chọn *hình* 14. Lưu số của trường trên đường cong kín này bằng :

$$C = LB(z) - LB(-z) = 2LB(z) \text{ (với } z > 0)$$

■ **Từ trường**

Áp dụng định lí AMPÈRE cho đường cong kín này, ta có :

$$2LB(z) = -\mu_0 j_S L.$$

Cuối cùng, trường của lớp bằng :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 j_S}{2}.\text{dấu }(z)\ \vec{e}_y.$$

<u>*Chú ý :*</u>

Từ trường có sự bất liên tục $\mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_z$ khi đi qua lớp phẳng. Biết điều đó và sử dụng các phép toán đối xứng, ta dễ dàng tìm lại được giá trị của trường từ tĩnh tạo ra bởi phân bố này.

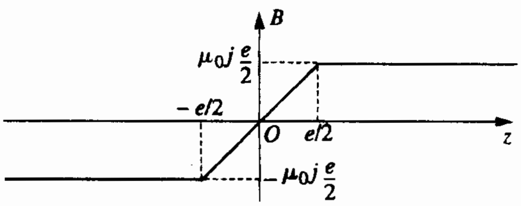
Áp dụng 3

1) *Hãy xác định trường tạo ra bởi một lớp phẳng vô hạn, nằm giữa các mặt phẳng :*

$$z = -\frac{e}{2} \text{ và } z = +\frac{e}{2}$$

có mật độ khối đều $\vec{j} = j\vec{e}_x$.

2) *Hãy tìm lại trường hợp trước đây coi là giới hạn của trường hợp này.*



Hình 15.

1) Các tính chất đối xứng đã dùng cho trường hợp của lớp vẫn còn có hiệu lực, vậy :

$$\vec{B}(x, y, z) = B(z)\vec{e}_y, \text{ với } B(-z) = -B(z).$$

Áp dụng định lí AMPÈRE cho cũng loại đường cong kín trên cho ta :

- trường hợp 1, $0 < z < \frac{e}{2}$: $2LB(z) = -2\mu_0 Ljz$
- trường hợp 2, $z > \frac{e}{2}$: $2LB(z) = -\mu_0 Lje$

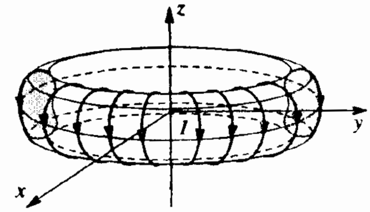
Từ trên ta suy ra :

- nếu $0 \le |z| \le \frac{e}{2}$: $\vec{B} = -\mu_0 jz\vec{e}_y$
- nếu $\frac{e}{2} \le |z|$: $\vec{B} = -\left(\mu_0 j\frac{e}{2}\right).\text{dấu }(z)\,\vec{e}_y$.

2) Ở giới hạn e tiến tới O, với $j_S = je$ giữ không đổi, ta tìm lại được trường hợp của lớp phẳng vô hạn.

4.3. Phân bố dòng đối xứng trục : hình xuyến

Một đường cong kín C được vẽ ra trong một mặt phẳng chứa trục (Oz). Sự quay đường cong này một vòng xung quanh trục (Oz) sinh ra một hình xuyến (*hình* 16). Nếu C là một vòng tròn, hình xuyến thu được có tiết diện tròn ; nếu C là một hình chữ nhật, thì hình xuyến thu được có tiết diện chữ nhật.



Hình 16. *Hình xuyến có tiết diện bất kỳ.*

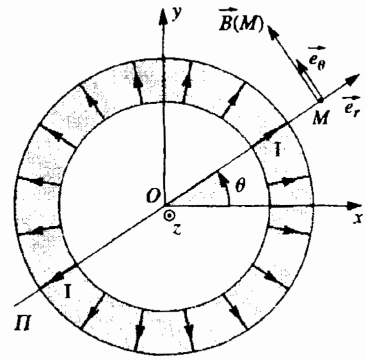
Ta nghiên cứu từ trường sinh ra bởi N vòng dây quấn trên một hình xuyến và có dòng cường độ I chạy qua (tình huống này tựa như các cuộn sơ cấp và thứ cấp trong một vài máy biến thế).

Với một sự quấn dây đủ khít (các vòng dây chuẩn ghép), thì phân bố hình sợi này có thể được coi như một phân bố dòng trên bề mặt : đó là một phép toán san bằng cho phép khi đó thừa nhận sự đối xứng quay xung quanh trục (Oz).

■ **Nhận xét về tính đối xứng**

Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) là một mặt phẳng đối xứng và biên độ của từ trường, trực giao xuyên tâm, trong tọa độ trụ r, θ, và z, chỉ phụ thuộc các biến số r và z :

$$\vec{B} = B(r, z)\vec{e}_\theta$$



Hình 17. *Thể hiện rõ một mặt phẳng đối xứng của dòng.*

■ **Chọn "đường cong kín AMPÈRE"**

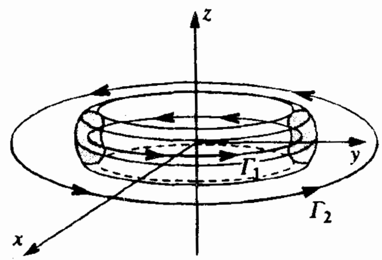
Trên các đường sức trường, là các vòng tròn trục (Oz), chuẩn của trường giữ không đổi. Trên một đường cong kín AMPÈRE Γ trùng với một đường sức trường, lưu số của trường bằng $2\pi rB\ (r, z)$.

■ **Từ trường**

Bây giờ ta hãy áp dụng định lí AMPÈRE.

Đối với một đường cong kín Γ_1 ở bên trong hình xuyến (*hình* 18), tổng các dòng quấn lấy Γ_1 bằng NI. Vậy trường tại một điểm ở bên trong hình xuyến bằng :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{e}_\theta .$$



Hình 18. *Chọn đường cong kín AMPÈRE.*

Đối với một đường cong kín Γ_2 ở bên ngoài hình xuyến, tổng các dòng điện quấn lấy Γ_2 bằng không (ta luôn luôn có thể tìm được một mặt phẳng tựa trên Γ_2 không có điểm chung với hình xuyến), và trường ở bên ngoài hình xuyến cũng bằng không :

$$\vec{B}_{ext} = \vec{0}.$$

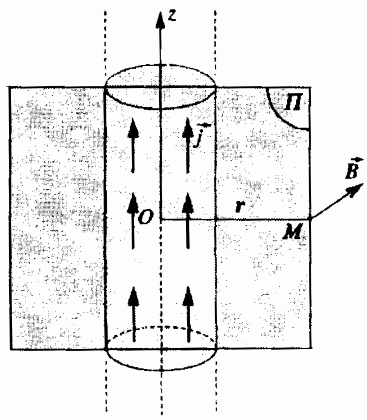
Các kết quả trên chứng tỏ hình xuyến rạch kênh cho các đường sức từ trường.

<u>Chú ý</u> :

Sự phụ thuộc của $\vec{B}$ vào z bị che khuất nhưng vẫn có hiệu lực : nếu z và r sao cho điểm M ở bên trong hình xuyến thì $\vec{B}$ khác không ; $\vec{B}$ bằng không nếu M nằm ở ngoài hình xuyến.

4.4. Phân bố dòng song song có hình dạng hình trụ : hình trụ vô hạn có mật độ dòng đều

Trong mô hình có kích thước vô hạn này, một dòng cường độ tổng hợp I chạy song song với (Oz) trong một hình trụ trục (Oz), có tiết diện tròn bán kính R, với một mật độ khối đều $\vec{j} = j\vec{e}_z$ (*hình* 19).

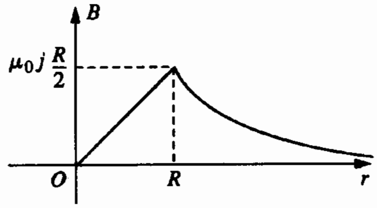


Hình 19. *Hình trụ vô hạn.*

■ **Nhận xét về tính đối xứng**

Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng, $\vec{B}$ là trực giao xuyên tâm : $\vec{B} = B(r, \theta, z)\,\vec{e}_\theta$ (trong tọa độ trụ trục (Oz)).

Phân bố dòng có tính đối xứng tịnh tiến theo (Oz) và quay xung quanh trục (Oz): vậy chuẩn của $\vec{B}$ chỉ phụ thuộc tọa độ r ; nghĩa là $\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_\theta$.



Hình 20. *Sự biến thiên của $B(r)$.*

■ **Chọn đường cong kín AMPÈRE**

Các đường sức trường là các vòng tròn có tâm ở trên (Oz) và chuẩn của $\vec{B}$ là như nhau tại mọi điểm trên một đường sức trường. Vậy ta sẽ chọn một đường cong kín AMPÈRE Γ trùng với một đường sức trường, là một vòng tròn trục (Oz) và có bán kính r.

■ **Từ trường**

Bằng cách phân biệt trường hợp vòng tròn nằm trong hình trụ và trường hợp vòng tròn bao quanh hình trụ, ta thu được :

• Trường hợp 1, $0 < r < R$: $\quad 2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi r^2 = \mu_0 I \dfrac{r^2}{R^2}$;

• Trường hợp 2, $r > R$: $\quad 2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi R^2 = \mu_0 I$.

Vậy, dẫn tới :

• $\vec{B}_{\text{int}} = \left(\mu_0 j \dfrac{r}{2}\right)\vec{e}_\theta$; $\qquad$ • $\vec{B}_{ext} = \left(\mu_0 j \dfrac{R^2}{2r}\right)\vec{e}_\theta$.

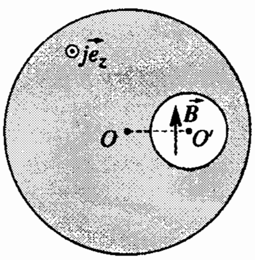
Trường của phân bố *khối* hữu hạn này là *liên tục* tại $r = R$ (*hình* 20).

Ở bên ngoài hình trụ, trường đồng nhất với trường tạo ra bởi một sợi dây thẳng vô hạn đặt theo trục (Oz) và có dòng điện I chạy qua.

Áp dụng 4

Hình trụ có lỗ hổng hình trụ

Một lỗ hổng hình trụ, trục $(O'z)$, có tiết diện tròn bán kính R, đã được khoét ra ở trong một hình trụ dẫn trục (Oz), bán kính R (hình 21). Ở bên ngoài lỗ hổng, trụ dẫn có một dòng điện không đổi mật độ dòng đều $\vec{j} = j\vec{e}_z$ chạy qua.



Hình 21

Hãy xác định từ trường tại mọi điểm của lỗ.

Ta hãy tiến hành bằng sự chồng chất. $\vec{B}$ là tổng hợp của trường $\vec{B}_1$ của một trụ đặc trục (Oz), bán kính R, có dòng điện mật độ đều $\vec{j}$ chạy qua, và trường $\vec{B}_2$ của một trụ đặc trục $(O'z)$, bán kính R', có dòng mật độ đều $-\vec{j}$ chạy qua.

Đối với hình trụ đặc :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0}{2} j r \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{2}(\vec{j} \wedge \overrightarrow{OM}).$$

Tương tự : $\vec{B}_2(M) = \dfrac{\mu_0}{2}(-\vec{j} \wedge \overrightarrow{O'M})$.

Khi đó, trường tổng hợp bằng :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2}(\vec{j} \wedge \overrightarrow{OO'}).$$

Trường này là đều tại mọi điểm của lỗ hổng. Nó vuông góc với OO'.

4.5. Phân bố dòng hình vành có dạng hình trụ : ống dây vô hạn

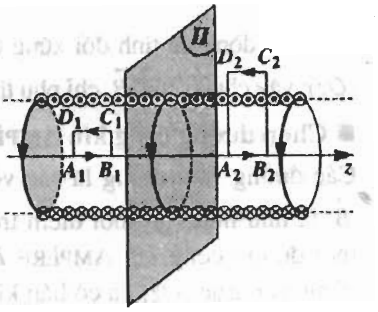
Ta xét một ống dây "vô hạn" có tiết diện tròn, có dòng I chạy qua và có n vòng dây trên một đơn vị dài.

Ở chương 7, ta đã chứng minh rằng trường có biểu thức :

$$\vec{B}_{trục} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

ở trên trục của ống dây. Một nghiên cứu định tính các đường sức trường đã cho phép ta nhận xét rằng trường giảm rất nhanh ở bên ngoài ống dây có chiều dài hữu hạn.

Bây giờ ta muốn xác định tổng quát hơn trường tại mọi điểm trong không gian nhờ định lí AMPÈRE.



Hình 22. *Ống dây vô hạn.*

■ **Nhận xét về tính đối xứng**

Ống dây được coi như một tập hợp các vòng dây ghép nối nhau, nằm trong các mặt phẳng vuông góc với (Oz) (*hình* 22).

Mọi mặt phẳng vuông góc với (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng của phân bố dòng, vậy :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_z .$$

Sự bất biến của phân bố với phép tịnh tiến song song với (Oz) và với phép quay xung quanh (Oz) cho phép đơn giản hóa biểu thức của trường $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$.

■ **Chọn đường cong kín AMPÈRE**

Với một dạng hình học như thế, buộc ta phải chọn một đường cong kín hình chữ nhật có hai cạnh song song với (Oz) (*hình* 22).

■ **Từ trường**

Đối với một đường cong kín kiểu $A_1B_1C_1D_1$ ở bên trong ống dây, không được các vòng dây của ống dây đi qua, thì định lí AMPÈRE cho :

$$(A_1B_1)B_{trục} - (A_1B_1)B(r) = 0 \text{ nếu như } r < R$$

Vì vậy, trường ở bên trong ống dây vô hạn là trường đều và bằng giá trị của trường ở trên trục :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}_{trục} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

Đối với một đường cong kín kiểu $A_2B_2C_2D_2$, đi qua bởi $n_1A_1B_1$ vòng của ống dây, định lí AMPÈRE cho $(A_1B_1)B_{trục} - (A_1B_1)B(r) = \mu_0(nA_1B_1)I$.

Như vậy, trường ở bên ngoài của ống dây vô hạn bằng không :

$$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

<u>*Chú ý :*</u>

Một ống dây vô hạn có thể coi như một hình xuyến có bán kính trung bình tiến tới vô cùng, bằng cách thay $\frac{N}{r}$ bằng n trong biểu thức của trường.

Bằng cách sử dụng mô hình hóa ống dây bằng một lớp xôlênôit dòng trên bề mặt $\vec{j}_S = nI\vec{e}_\theta$, ta có thể xác nhận rằng trường từ tĩnh chịu một sự bất liên tục mong đợi $\mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_r$ khi đi qua bề mặt của ống dây.

Áp dụng 5

Trường của một ống dây vô hạn có tiết diện bất kì

Hãy lấy lại sự nghiên cứu trên cho một ống dây vô hạn có n vòng dây trên một đơn vị dài ghép với nhau và có tiết diện bất kì (hình 22).

Trước tiên, trường có dạng $\vec{B} = B(r,\theta)\vec{e}_z$. Bằng cách sử dụng cũng những đường cong kín AMPÈRE như trước đây (các cạnh "có ích" thỏa mãn r và θ = cte), ta nhận thấy rằng trường là không thay đổi.

Đối với một ống dây vô hạn, hình dạng của tiết diện là không quan trọng và ta sẽ có :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{e}_z \text{ và } \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỊNH LÍ AMPÈRE

• Lưu số của từ trường tĩnh trên một đường cong kín Γ bằng tổng các dòng bị quấn bởi Γ nhân với μ_0 :

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 \sum I_{bị\ quấn}$$

• Định lí AMPÈRE cho khả năng tiếp cận với đặc tính cục bộ hoặc toàn bộ của trường từ tĩnh, là một trường có thông lượng bảo toàn.

■ SỰ BẤT LIÊN TỤC CỦA TRƯỜNG

Khi đi qua một lớp có dòng trên bề mặt mật độ $\vec{j}_S$ chạy qua, thành phần tiếp tuyến của từ trường chịu một sự bất liên tục hữu hạn :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

■ TÍNH TOÁN MỘT TỪ TRƯỜNG

Định lí AMPÈRE cho phép xác định nhanh chóng trường từ tĩnh đối với một phân bố dòng có tính đối xứng cao. Sau khi xác định hình dạng của trường nhờ các nhận xét về tính đối xứng, sự áp dụng định lí cho một đường cong kín có dạng hình học thích hợp với các tính đối xứng của bài toán cho phép xác định biên độ của trường.

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

LƯU SỐ CỦA TỪ TRƯỜNG (BT.1 VÀ 2)

1 Vòng dây và ống dây

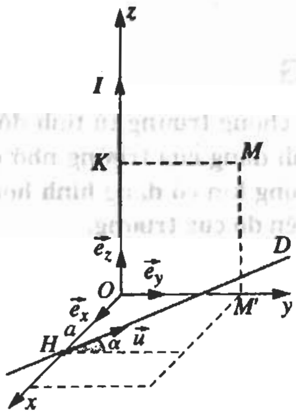
1) a) Hãy tính lưu số của từ trường dọc theo trục (Ox) (từ $-\infty$ đến $+\infty$) của một vòng dây tròn bán kính R, và có dòng cường độ I chạy qua.

b) Giải thích kết quả thu được.

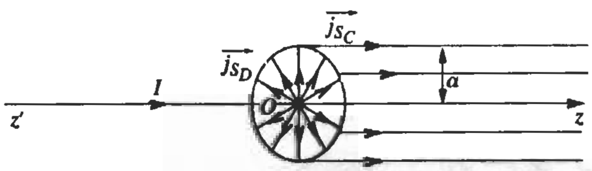
2) Tương tự, hãy tính lưu số của từ trường dọc theo trục (Ox) (từ $-\infty$đến $+\infty$) của một ống dây tròn bán kính R, dài l và mang N vòng dây ghép với nhau, mỗi vòng có một dòng cường độ I chạy qua.

2 Sợi dây

Một dòng hình sợi cường độ I chạy dọc theo trục (Oz) của tam diện ba góc vuông $(Oxyz)$. Hãy tính lưu số của từ trường tạo ra bởi dòng này dọc theo một đường thẳng D song song với mặt phẳng (yOz) và cắt trục (Ox) tại điểm H có hoành độ a $(a > 0)$, theo chiều của vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng D sao cho $\vec{u}.\vec{e}_y$ là dương. Hãy giải thích kết quả.



3 Dòng hình sợi trở thành dòng trên bề mặt



Một dòng điện cường độ I chạy trong một sợi dây thẳng, có tiết diện không đáng kể trùng với nửa trục (Oz) (z < 0). Tới O, dòng chạy trên bề mặt của một cái đĩa tâm O và có bán kính a, rồi chạy trên bề mặt của một hình trụ dẫn rỗng trục (Oz), có bán kính a và có bề dày không đáng kể.

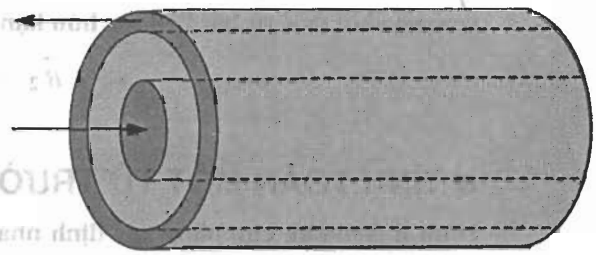
1) Hãy xác định biểu thức của từ trường tại mọi điểm trong không gian mà nó được xác định.

2) Hãy xác minh các hệ thức đi qua (tính liên tục hoặc bất liên tục) của từ trường.

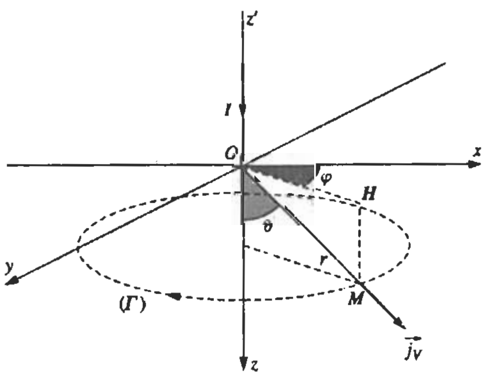
4 Cáp đồng trục đặc biệt

Một đường đồng trục (được mô hình hóa dạng hình trụ) được thực hiện với một vật liệu dẫn mà các tính chất từ tương đương với các tính chất từ của chân không. Một hình trụ dẫn đặc ở bên trong, có trục (Oz) và có bán kính a, được bao quanh bởi một hình trụ thứ hai đồng trục, có bán kính trong b_1 và bán kính ngoài b_2. Không gian giữa hai trụ dẫn này là chân không.

Vật dẫn trung tâm có dòng điện cường độ I chạy qua theo (Oz), và trở về nhờ vật dẫn ở bên ngoài. Các mật độ khối giả sử là đều. Hãy tính trường từ tĩnh tạo ra bởi một phân bố như thế tại mọi điểm trong không gian.



5 Từ trường trong một vật dẫn



Một dòng điện cường độ I chạy trong một sợi dây thẳng, dài, đi vào một vật dẫn mà các tính chất từ tương đương với các tính chất từ của chân không và trải đều đặn ra trên vật dẫn (giả sử các hướng khác nhau của vật dẫn là tương đương).

1) Trong các điều kiện trên, hãy chứng minh rằng trong tọa độ cầu r và θ, từ trường tại một điểm M bằng

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\varphi$$

2) Hãy giải thích tốt nhất có thể được kết quả này.

6 Hình trụ dài quay xung quanh trục của nó

Một hình trụ dài, giả sử vô hạn, có bán kính R và được tích điện đều theo thể tích với mật độ ρ, quay với vận tốc góc không đổi xung quanh trục (Oz) của nó tương đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$. Môi trường có cùng các tính chất từ của chân không và không có điện tích bề mặt. Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, hãy tính trường từ tĩnh tạo ra bởi một phân bố dòng như thế.

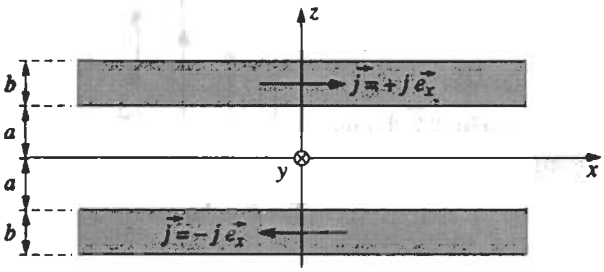
7 Phân bố dòng theo thể tích

Người ta xét phân bố dòng theo thể tích :

- với $x > 0$: $\vec{j} = j_0 \exp\left(-\dfrac{x}{a}\right)\vec{e}_y$;
- với $x < 0$: $\vec{j} = \vec{0}$.

Hãy xác định từ trường tạo ra bởi phân bố trên tại mọi điểm trong không gian.
Hãy bình luận tình huống tương ứng với j_0 tiến tới ∞ và a tiến tới 0, với $j_0 a = cte$.

8 Bộ hai bản



Hai lớp phẳng song song mỗi lớp có bề dày b và ngăn cách nhau bởi một kẽ hở dày $2a$, lần lượt có các dòng khối đều và ngược chiều nhau $+j\vec{e}_x$ và $-j\vec{e}_x$ chạy qua như được chỉ rõ trên sơ đồ.

Hãy tính từ trường tạo ra bởi phân bố dòng này tại mọi điểm trong không gian.

9 Phân bố dòng theo hình trụ

Đối với một phân bố dòng nào đó, trong tọa độ trụ (r, θ, z) trục (Oz), từ trường tạo ra tại một điểm M là $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$ với :

- $B(r) = B_1\left(\dfrac{r}{a}\right)^2$ nếu $r < a$.
- $B(r) = B_2\left(\dfrac{a}{r}\right)$ nếu $r > a$.

Các hằng số B_1 và B_2 trước tiên là bất kì.

Hãy xác định phân bố dòng tạo ra một từ trường như thế. Người ta sẽ lưu ý rằng phân bố này là bất biến với phép quay xung quanh (Oz), với phép tịnh tiến theo (Oz) và các đường dòng là song song với trục đó.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

10 Đường sức từ trường của một ống dây dài

Hình vẽ các đường sức từ trường của một ống dây dài bán kính R chứng tỏ rằng một đường sức ở bên trong ống dây nằm cách trục một khoảng r_1 (nhỏ trước R) ló ra khỏi ống dây cách trục một khoảng r_2 có giá trị gần bằng 1, 4 lần r_1. Hãy giải thích kết quả này.

11 Từ trường của một phân bố dòng

Một phân bố dòng, có tính đối xứng (trục) trục (Oz) có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ tạo ra tại mọi điểm M trong không gian, một từ trường $\vec{B}$ có dạng :

$$\vec{B} = \alpha(\vec{a}.\overrightarrow{OM})(\vec{a} \wedge \overrightarrow{OM})$$

α là một hằng số, $\vec{a}$ là một trường vectơ đều và $\overrightarrow{OM}$ là bán kính vectơ của điểm M.

1) Không cần một phép tính nào, hãy xác nhận rằng một trường như thế có thông lượng bảo toàn.

2) Hãy xác định phân bố dòng (theo thể tích) tạo ra trường này.

12 Phân bố dòng theo hình trụ

Hai hình trụ ① và ②, dài vô hạn, có cùng bán kính R, có các trục song song (có vectơ chỉ phương $\vec{e}_z$) và có các tâm O_1 và O_2 cách nhau $2d$ ($d < R$) lần lượt có các dòng khối đều chạy qua :

$$\vec{j}_1 = j\vec{e}_z \text{ và } \vec{j}_2 = -j\vec{e}_z$$

Hãy xác định từ trường trong miền chung của hai hình trụ (vậy là không có dòng).

13 Hình trụ mang một mật độ dòng trên bề mặt $j_S = j_0 \cos\theta$

Cho một hình trụ vô hạn bán kính R, có trục (Oz) mang duy nhất một mật độ dòng trên bề mặt $\vec{j}_S = j_0 \cos\theta\,\vec{e}_z$ ($j_0 > 0$).

1) Chứng tỏ rằng phân bố dòng này tương đương với phân bố dòng thu được bằng cách chồng chất hai hình trụ (1) và (2), có các trục song song với (Oz), lần lượt có các dòng khối đều $\vec{j}_1 = -j\vec{e}_z$ và $\vec{j}_2 = +j\vec{e}_z$ chạy qua, có cùng bán kính R và có các tâm $O_1\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$

và $O_2\left(+\frac{a}{2}, 0\right)$ cách nhau a, trong trường hợp giới hạn, ở đó a tiến tới 0 và j tiến tới ∞.

2) Từ đó (dùng kết quả của bài tập 11) suy ra từ trường $\vec{B}$ ở bên trong hình trụ.

3) Từ đó suy ra phân bố dòng theo bề mặt song song với $\vec{e}_z$ cho phép thu được một từ trường đều $\vec{B}_0$ đã cho, vuông góc với phương trên trong hình trụ bán kính R.

14 Ống dây có các vòng dây nghiêng

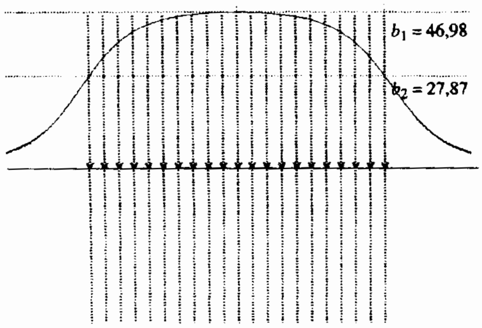
Xét các vòng dây được bố trí trên một hình trụ bán kính R, theo tỉ lệ là n vòng dây trên một đơn vị dài theo trục (Oz) của hình trụ. Mỗi vòng dây có một dòng cường độ I chạy qua và pháp tuyến với mặt phẳng của vòng dây hợp với trục (Oz) của hình trụ một góc α. Trong phép gần đúng thông thường của một phân bố dòng theo bề mặt, hãy tính từ trường tạo ra tại mọi điểm ở bên trong hình trụ.

15 Mô hình hóa một ống dây

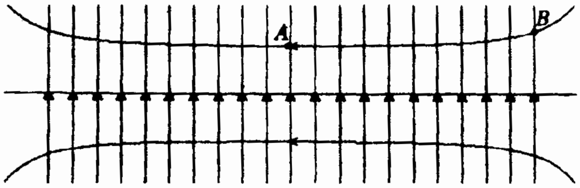
Cho một tập hợp hai mươi mốt vòng dây tròn bán kính R, làm bằng một sợi dây có tiết diện không đáng kể, được bố trí đều đặn, vòng nọ cách vòng kia một khoảng $\frac{R}{4}$ và có dòng cường độ I chạy qua. Các kết quả của một phần mềm cho phép nghiên cứu từ trường tạo ra bởi một tập hợp các vòng dây bất kì là như sau :

1) Với $R = 1$; $I = 1$; $\mu_0 = 4\pi$: từ trường ở trên trục, ở tâm bằng $b_1 = 46{,}98$, và trên mặt ra $b_2 = 27{,}87$.

Từ đó suy ra từ trường ở trên trục, B_1 (ở tâm) và B_2 (trên mặt ra). Các công thức cổ điển của ống dây liệu có áp dụng được không?



2) một đường sức trường xuất phát từ một điểm A của vòng dây trung tâm nằm ở $0{,}50R$ cách trục của ống dây, đi qua một điểm B của vòng dây ra nằm cách trục $0{,}64R$.

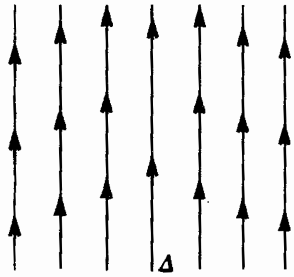


Hãy chứng thực kết quả này.

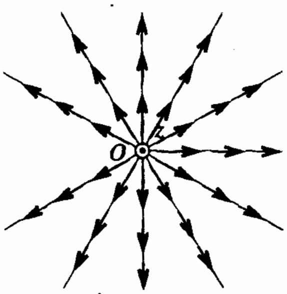
TOPO (sự đo vẽ địa hình) CỦA TỪ TRƯỜNG

16 Có phải bản chất từ tĩnh không?

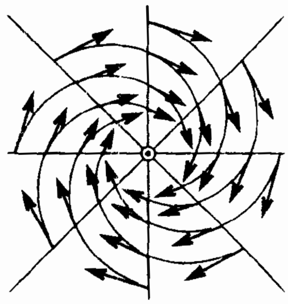
Cho năm hình thái của trường vectơ $\vec{V}$. Hãy nói rõ xem các hình thái nêu ra có thể là hình thái của trường có bản chất từ tĩnh hay không. Người ta cũng giả thiết rằng các đường sức trường là bất biến với phép tịnh tiến theo một trục (Oz) vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Các mũi tên biểu diễn trường $\vec{V}$ và chiều dài của chúng tỉ lệ với chuẩn $\|\vec{V}\|$ của trường.



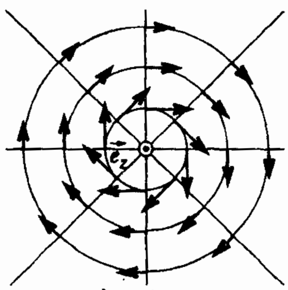
Trường hợp a



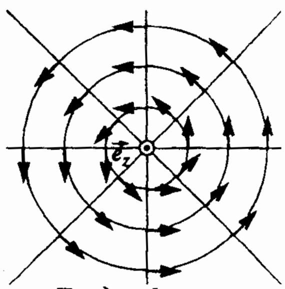
Trường hợp b



Trường hợp c



Trường hợp d



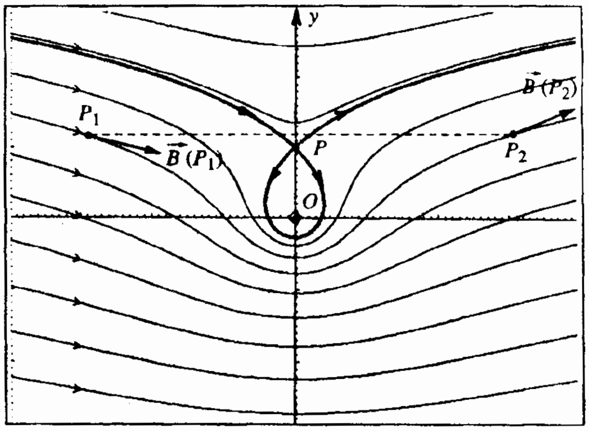
Trường hợp e

17 Các bản đồ từ trường

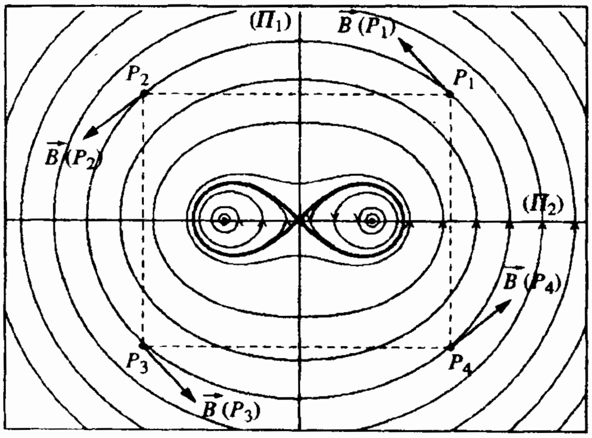
Nhờ một phần mềm mô phỏng, người ta đã vẽ được các bản đồ từ trường tạo ra bởi các dòng chạy trong các sợi dây thẳng vuông góc với mặt phẳng hình vẽ, với sự có mặt có thể có của một trường từ tĩnh đều nằm trong mặt phẳng hình vẽ. Các cường độ dòng điện chạy trong các dây giả sử đều bằng nhau, nhưng chiều thì cần phải xác định, trục (Oz) hướng ra phía trước hình vẽ.

Hãy mô tả mỗi hình thái nêu ra, bằng cách kiểm tra cho mỗi lần các tính chất tổng quát của một từ trường.

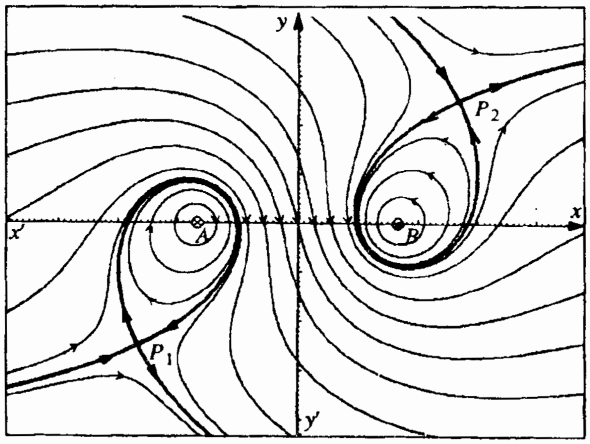
Hỏi có thể nói gì về các vectơ từ trường $\vec{B}$ tại P_1, P_2, P_3 và P_4 ?



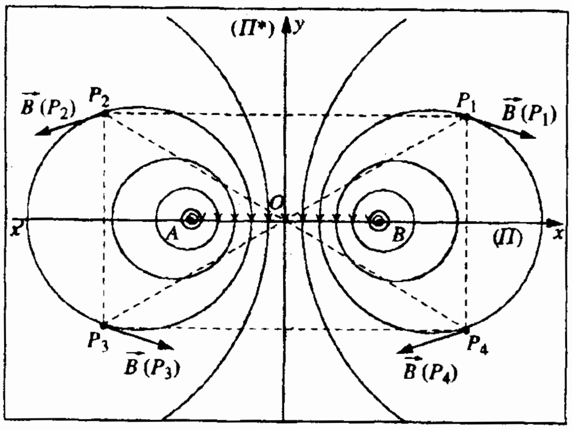
Trường hợp c



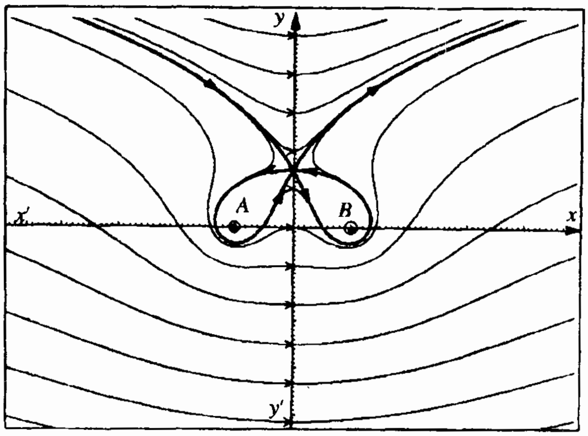
Trường hợp a



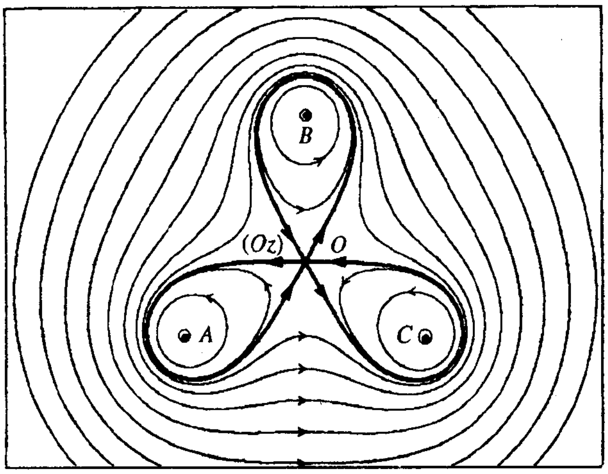
Trường hợp d



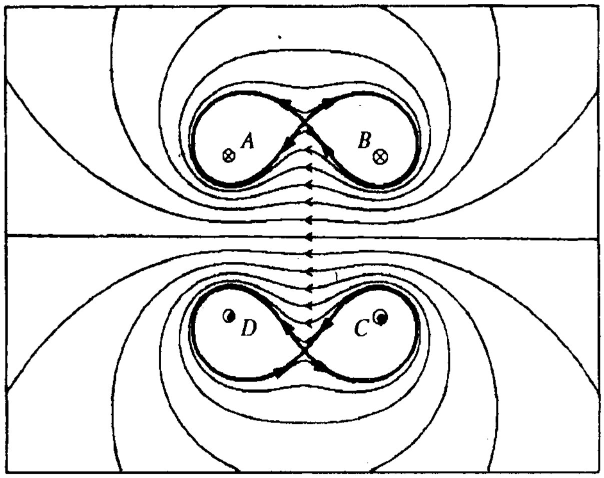
Trường hợp b



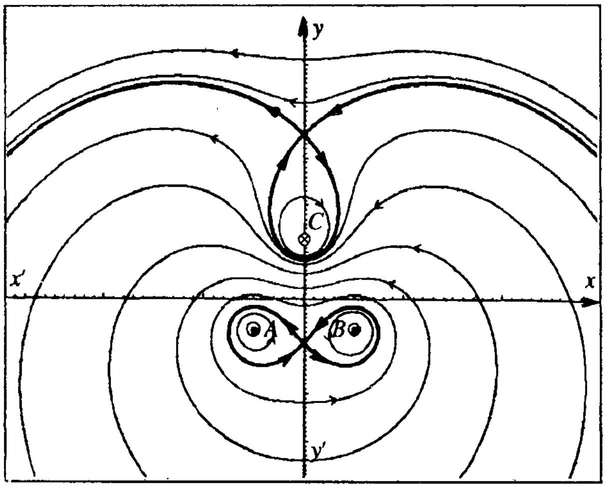
Trường hợp e



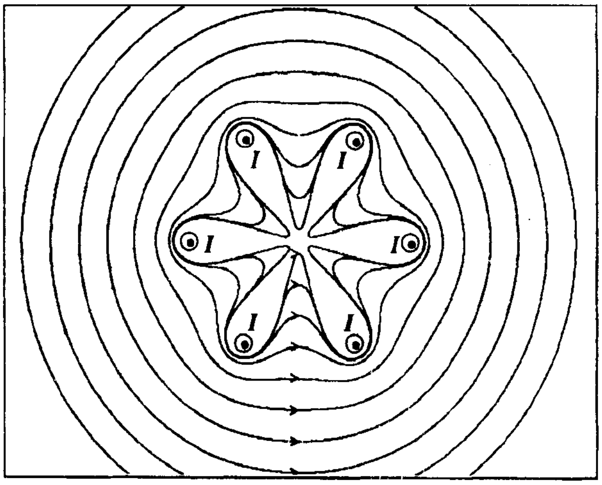
Trường hợp f.



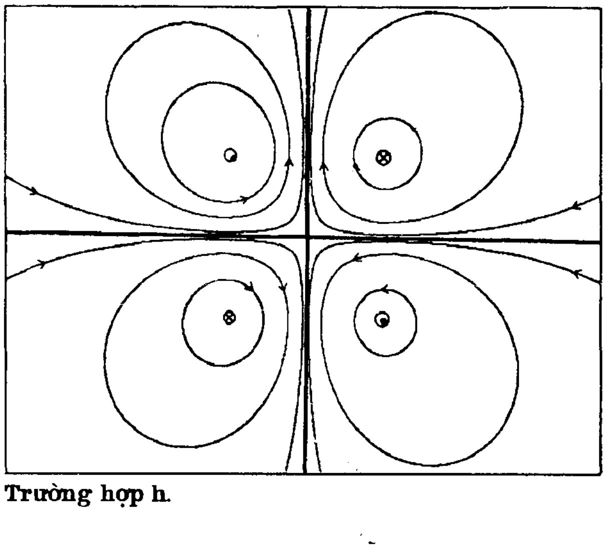
Trường hợp i.

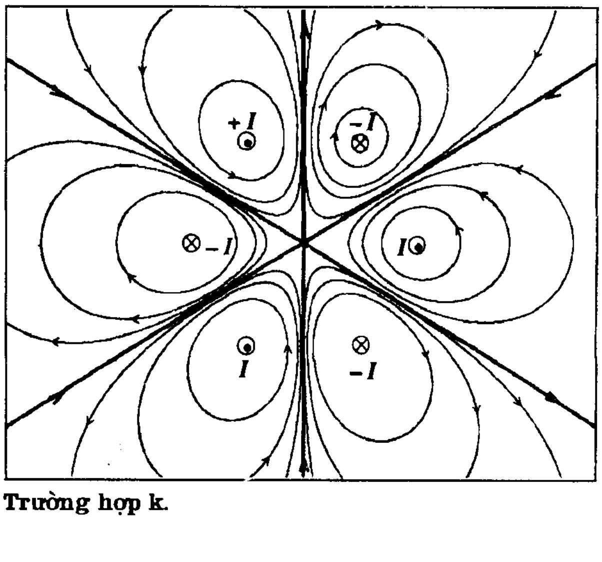


Trường hợp g.



Trường hợp j.


Trường hợp h.

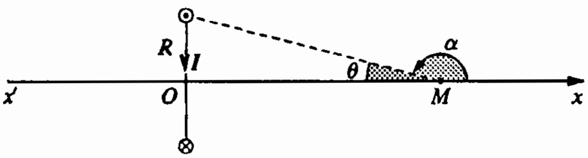


Trường hợp k.

LỜI GIẢI

1 1) *a) Vectơ cảm ứng từ tạo ra bởi một vòng dây (có bán kính R, có dòng cường độ I chạy qua) tại một điểm trên trục của nó cho bởi :*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\,\vec{e}_x\,.$$



Lưu số của $\vec{B}$ trên (x'Ox) bằng $C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\mathrm{d}x$, với :

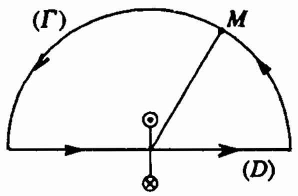
$$x = -\frac{R}{\tan\alpha}\ ;\ \mathrm{d}x = \frac{R}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha \ \text{ và } \sin\theta = \sin\alpha$$

Hay là : $C = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha}R\,\mathrm{d}\alpha = \mu_0 I$

b) Cho đường cong kín tạo bởi đường thẳng (D) và nửa vòng tròn (Γ) có bán kính r vô hạn

$$\int_{(D)}\vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I$$

$$\oint_{(D)+(\Gamma)}\vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I$$



Từ đó : $\int_{(\Gamma)}\vec{B}.\vec{\mathrm{d}l} = 0$, *điều này là bình thường, vì ta sẽ thấy trong một chương sau là, với r lớn, B biến thiên theo* $\frac{1}{r^3}$, *vậy rõ ràng tích phân tiến tới 0.*

2) *Ống dây được cấu tạo từ N vòng dây, sử dụng kết quả trên đây, ta có :* $\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\mathrm{d}x = \mu_0 NI.$

2 *Vectơ cảm ứng từ tạo ra bởi một sợi dây cho bởi :*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\vec{e}_\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{KM}}{KM^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{OM'}}{OM'^2},$$

vì $\vec{B}(M) = \vec{B}(M')$.

Đặt $\overrightarrow{HM} = \lambda\vec{u}$, ta thu được ($\overrightarrow{OM'} = a\vec{e}_x + \lambda\cos\alpha\vec{e}_y$) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}.\frac{\lambda\cos\alpha.\vec{e}_x + a.\vec{e}_y}{a^2+\lambda^2\cos^2\alpha}.$$

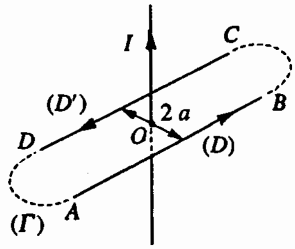
Biết rằng $\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mathrm{d}\lambda\vec{u} = (\cos\alpha.\vec{e}_y + \sin\alpha.\vec{e}_y)\mathrm{d}\lambda$:

$$\vec{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a\cos\alpha\mathrm{d}\lambda}{a^2+\lambda^2\cos^2\alpha}.$$

Từ đó : $\int_{(D)}\vec{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a\cos\alpha\mathrm{d}\lambda}{a^2+\lambda^2\cos^2\alpha} = \mu_0\frac{I}{2}.$

Giải thích

Để thu được một đường cong kín, ta phải liên kết một đường thẳng (D') song song với (D) : lưu số của $\vec{B}$ trên các phần BC và DA hữu hạn của trường tiến tới 0 theo $\frac{1}{OA}$ là bằng không. Từ đó :



$$\oint_{(\Gamma)}\vec{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mu_0 I$$

3 1) *Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy :*

$$\vec{B}(M) = B(r,\theta,z)\vec{e}_\theta\,,$$

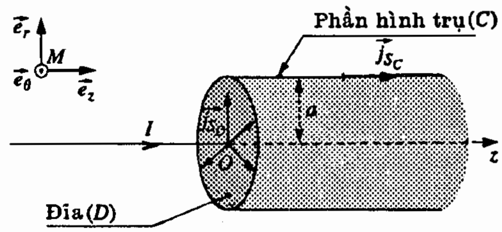
Hệ dòng là bất biến đối với phép quay xung quanh trục (Oz), từ đó:

$$\vec{B}(M) = B(r,z)\vec{e}_\theta$$

Coi các đường cong luân chuyển có bán kính r và có trục (Oz), áp dụng định lí AMPÈRE :

- $z<0$: $\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$;
- $z>0$: *nếu* $r>a$: $\overrightarrow{B_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$;

  nếu $r<a$: $\overrightarrow{B_3} = 0$



2) *Ta hãy nghiên cứu hệ thức liên tục của $\vec{B}$:*

- *Trên phần hình trụ (C)*

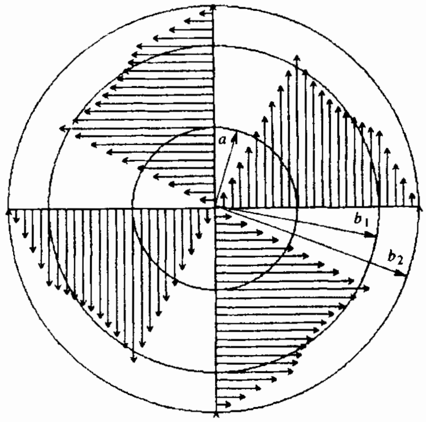
$\vec{j}_{S_C} = \frac{I}{2\pi a}\vec{e}_z$. *Ta thấy rõ là* $\begin{cases}\vec{e}_r\wedge(\overrightarrow{B_2}-\overrightarrow{B_3}) = \mu_0\vec{j}_{S_C}\\ \vec{e}_r.(\overrightarrow{B_2}-\overrightarrow{B_3}) = 0\end{cases}$

- *Trên đĩa (D)*

$\overrightarrow{j_{S_D}} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_r$. *Ta thấy rõ là* $\begin{cases}-\vec{e}_z\wedge(\overrightarrow{B_1}-\overrightarrow{B_3}) = \mu_0\overrightarrow{j_{S_D}}\\ \vec{e}_z.(\overrightarrow{B_1}-\overrightarrow{B_3}) = 0\end{cases}$

4 *Mọi mặt phẳng đi qua M và trục đối xứng (z'Oz) là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy $\vec{B}$ là trực giao xuyên tâm : $\vec{B} = B(r,\theta,z)\vec{e}_\theta$. Hệ dòng lại bất biến với phép quay xung quanh (z'z) và với phép tịnh tiến theo trục (z'z), ta có :*

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta\,.$$



Áp dụng định lí AMPÈRE *cho một đường cong kín tạo bởi một vòng tròn bán kính r và trục (Oz) cho ta :*

- $r < a$: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{r}{a^2}\vec{e}_\theta$;
- $a < r < b_1$: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$;
- $b_1 < r < b_2$: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \dfrac{r^2 - b_1^2}{b_2^2 - b_1^2}\right)\vec{e}_\theta$
- $r > b_2$: $\vec{B} = \vec{0}$.

Chú ý rằng các mật độ khối của dòng là sao cho :

- *hình trụ bán kính a :* $\overrightarrow{j_{V_a}} = \dfrac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z$.
- *hình trụ bán kính "b_1, b_2" :* $\overrightarrow{j_{V_b}} = -\dfrac{I}{\pi(b_2^2 - b_1^2)}\vec{e}_z$.

Mô phỏng kèm theo (trang trên) cho phép ta xác nhận các kết quả này.

5

1) *Vì các phương khác nhau là tương đương nên mật độ dòng khối trong vật dẫn có dạng :* $\overrightarrow{j_V} = j_V(r)\vec{e}_r$.

Thông lượng của vectơ này gửi qua một nửa quả cầu bán kính r phải bằng I (do sự tích tụ điện tích tại một điểm đặc biệt của vật dẫn), từ đó:

$$\overrightarrow{j_V} = \frac{I}{2\pi r^2}\vec{e}_r$$

Mọi mặt phẳng qua M và chứa trục (Oz) đều là một mặt phẳng đối xứng của dòng, từ đó $\vec{B} = B(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\varphi$.

Vì hệ là bất biến với phép quay xung quanh trục (Oz) nên ta có : $\vec{B} = B(r, \theta)\vec{e}_\varphi$.

Áp dụng định lí AMPÈRE *cho một đường cong kín (Γ) tạo bởi một vòng tròn đi qua M và có trục (Oz). Lưu số của* $\vec{B}$ *trên (Γ) :* $(B(r, \theta)2\pi r\sin\theta)$ *bằng* μ_0 *lần thông lượng của* $\overrightarrow{j_V}$ *gửi qua mọi mặt tựa trên (Γ), trong trường hợp đặc biệt là một chỏm cầu tâm O, nghĩa là:*

$$\mu_0 j_V(r)2\pi(1-\cos\theta)r^2$$

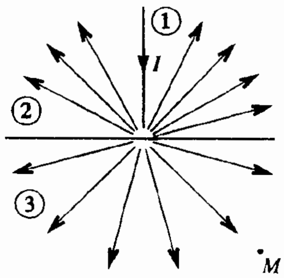
Từ đó : $\vec{B}(r, \theta) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi$.

2) *Ta hãy xét ba phân bố dòng :*

(1) *: dây nửa - vô hạn mang dòng I.*

(2) *: mật độ khối đẳng hướng trong chân không ở phía trên vật dẫn, mang cường độ toàn phần I;*

(3) *: mật độ khối đẳng hướng trong vật dẫn mang dòng I (phân bố đã nghiên cứu ở trên).*



Ta có các hệ thức sau :

$\overrightarrow{B_1}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi$ *(xem bài giảng) ;*

$\overrightarrow{B_1}(M) + \overrightarrow{B_2}(M) = 0$ *(áp dụng của tính đối xứng và định lí* AMPÈRE*);*

$\overrightarrow{B_2}(M) + \overrightarrow{B_3}(M) = 0$ *(vì mọi mặt phẳng qua OM đều là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy* $\vec{B} = \vec{0}$*).*

Từ đó ta suy ra :

$$\vec{B}(r, \theta) = \overrightarrow{B_3}(M) + \overrightarrow{B_1}(M) = 2\overrightarrow{B_1}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi$$

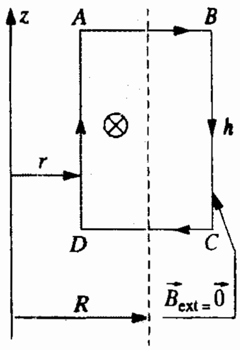
6

Mật độ khối của dòng bằng $\overrightarrow{j_V} = \rho\omega r\overrightarrow{e_\theta}$.

Ta hãy tính $\vec{B}$ *tại M : mặt phẳng qua M và vuông góc với (Oz) là một mặt phẳng đối xứng, vậy* $\vec{B} = B(r, \theta, z)\overrightarrow{e_z}$ *. Hệ dòng là bất biến với phép quay xung quanh (Oz) và với phép tịnh tiến theo (Oz), nên* $\vec{B} = B(r)\overrightarrow{e_z}$.

Phân bố này của dòng được coi như một chồng ống dây dài vô hạn, vậy $\vec{B}(r > R) = \vec{0}$.

Để tính $\vec{B}$ *ở bên trong của hệ dòng, ta áp dụng định lí* AMPÈRE *: lưu số trên các phần AB, BC và CD bằng không. Từ đó :*



$$B(r)\,h = \mu_0 h\int_r^R j_V(r)\mathrm{d}r \ .$$

Hệ thức này cho ta :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\rho\omega}{2}(R^2 - r^2)\overrightarrow{e_z} \ .$$

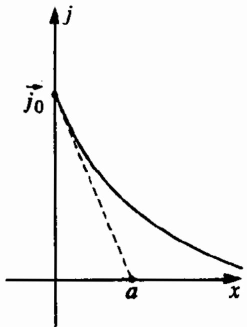
Chú ý :

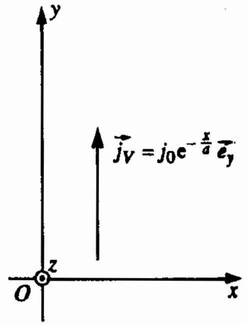
Trường $\vec{B}(r)$ *là từ trường tạo ra bởi chồng ống dây (có bề dày dr và mang cường độ trên bề mặt* $\mathrm{d}j_S = j_V\mathrm{d}r$ *) vô hạn, nằm giữa r và R. Từ trường của một ống dây mang* j_S *bằng* $\mu_0 j_S$ *về chuẩn, ta thu được :* $\vec{B} = \int_r^R \mu_0\,\mathrm{d}j_S\,\overrightarrow{e_z} = \int_r^R \mu_0 j_V\,\mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_z}$.

Ta thu được cùng một tích phân.

7

Ta hãy tính $\vec{B}$ *tại M(x, y, z) : mặt phẳng qua M và vuông góc với (Oz) là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy* $\vec{B} = B(x, y, z)\overrightarrow{e_z}$ *. Hệ dòng điện là bất biến với phép tịnh tiến theo (Oy) và (Oz), vậy* $\vec{B} = B(x)\overrightarrow{e_z}$.

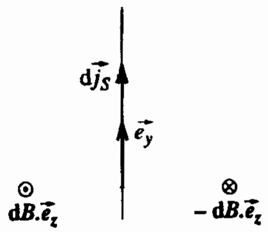




Phân bố dòng được coi như sự chồng chất các mặt phẳng vô hạn dày dx mang các phân bố dòng trên bề mặt :

$$\mathrm{d}\vec{j_S} = j_V \mathrm{d}x \vec{e}_y = \mathrm{d}j_S . \vec{e}_y$$

ở hai phía của các mặt phẳng này, trường là đều và có chuẩn $B = \mu_0 \dfrac{\mathrm{d}\, j_S}{2}$.



Từ đó, có phép tính của $\vec{B}$

- $x < 0$: $\vec{B} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mu_0}{2} j_0 e^{-\frac{x}{a}} \mathrm{d}x \vec{e}_z = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \vec{e}_z$.
- $x > 0$: $\vec{B} = \left[-\displaystyle\int_0^{x} \frac{\mu_0}{2} j_0 e^{-\frac{x'}{a}} \mathrm{d}x' + \int_0^{\infty} \frac{\mu_0}{2} j_0 e^{-\frac{x'}{a}} \mathrm{d}x' \right] \vec{e}_x$ *nghĩa là:*

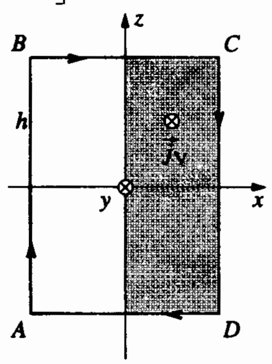
$$\vec{B} = \mu_0 j a \left[-\frac{1}{2} + e^{-\frac{x}{a}} \right] \vec{e_z} .$$

Ta hãy kiểm tra kết quả này nhờ định lí AMPÈRE. *Lưu số trên BC và DA bằng không. Từ đó :*

$$h\left[\mu_0 j_0 \frac{a}{2} - \mu_0 j a \left(-\frac{1}{2} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \right]$$

$$= \mu_0 h \int_0^x j_0 e^{-\frac{x'}{a}} \mathrm{d}x' ,$$

kết quả đã được xác nhận đúng.



Cho j_0 *tiến tới* ∞ *và a tiến tới 0, với* $j_0 a = j_S = cte$, *ta tìm lại được trường* $\vec{B}$ *tạo ra bởi một mặt phẳng vô hạn mang dòng trên bề mặt* $j_S = j_0 a$.

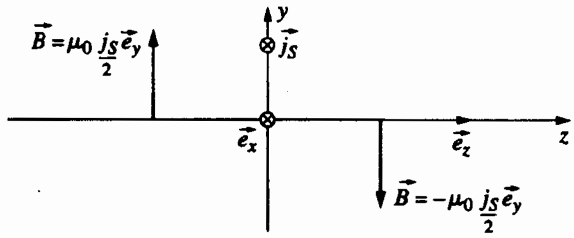
8 *Cho một điểm M trong không gian. Mặt phẳng qua M và vuông góc với (Oy) là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy* $\vec{B} = B(x, y, z)\vec{e}_y$. *Hệ dòng là bất biến với phép tịnh tiến theo (Ox) và (Oy), vậy* $\vec{B} = B(z)\vec{e_y}$.

Ta đã biết trường $\vec{B}$ *tạo ra bởi một lớp phẳng vô hạn mang dòng trên bề mặt* j_S. *Hệ dòng nêu ra là tương đương với một hệ các mặt phẳng có bề dày dz mang các dòng trên bề mặt* $\mathrm{d}\vec{j_S} = \pm j \mathrm{d}z \vec{e}_x$.

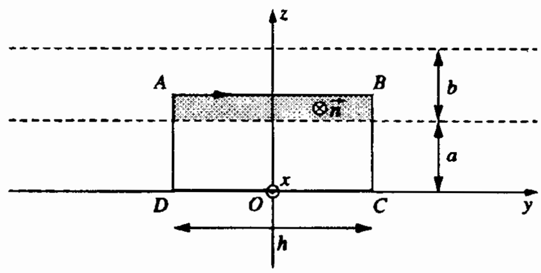
Từ đó có phép tính $\vec{B}$ *tại O :*

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{2} \int_{-a-b}^{-a} -j\vec{e_x} dz \wedge \vec{e}_z + \frac{\mu_0}{2} \int_a^{a+b} j\vec{e}_x dz \wedge (\vec{e}_z)$$

nghĩa là : $\vec{B}(0) = \mu_0 jb\vec{e}_y$..



Bằng cách sử dụng định lí AMPÈRE, *ta hãy tính* $B(z)\vec{e}_y$: *thông lượng trên các phần BC và DA bằng không. Ta hãy quan tâm đến miền* $z > 0$.



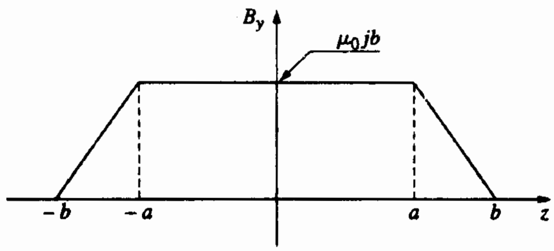
Ta thu được : $B(z)h - \mu_0 jb = \begin{cases} \to 0, \text{ nếu } z < a \\ \to \ominus\ \mu_0 hj(z-a), \text{ nếu } a < z < a+b \\ \to \ominus\ \mu_0 hjb, \text{ nếu } z > a+b \end{cases}$

Hay : $B(z) = \mu_0 jb$, *nếu* $z < a$;

$B(z) = \mu_0 j(a+b-z)$, *nếu* $a < z < a+b$;

$B(z) = 0$, *nếu* $z > a + b$.

Biết rằng do tính đối xứng $B(-z) = +B(z)$, *ta thu được :*



9 *Các tính đối xứng của từ trường và các biến số mà trường phụ thuộc buộc mật độ dòng khối phải có dạng* $\vec{j_V} = j_V(r)\vec{e}_z$.

Ta hãy áp dụng định lí AMPÈRE : *ta lấy một đường cong kín* (Γ) *tròn trục (Oz).*

Ta thu được, nếu $r < a$: $B(r)2\pi r = \mu_0 \displaystyle\int_0^r j_V(r')2\pi r' dr'$, *hay còn là:*

$$rB(r) = \int_0^r \mu_0 j_V(r').r' dr'$$

Đạo hàm biểu thức này theo r, ta có :

$$r j_V(r) = \frac{d}{dr}(rB(r)),\ hay\ \overrightarrow{j_V}(r) = \frac{3B_1}{\mu_0}\frac{r}{a^2}\vec{e}_z.$$

Tại r = a, $\vec{B}$ tiếp tuyến với hình trụ bán kính a chịu một sự bất liên tục : vậy thì có một dòng trên bề mặt trên hình trụ.

$$\mu_0 j_S = \vec{e}_r \wedge (\vec{B}_{(r=a_+)} - \vec{B}_{(r=a_-)}),\ hay\ \overrightarrow{j_S} = \frac{(B_2-B_1)}{\mu_0}\vec{e}_z.$$

Nếu r > a : B(r)2πr

$$= \mu_0\left[\int_0^a \frac{3B_1}{\mu_0}\frac{r}{a^2}2\pi r\,\mathrm{d}r + \frac{(B_2-B_1)}{\mu_0}2\pi a + \int_a^r \mu_0 j_V(r')2\pi r'\mathrm{d}r'\right].$$

Bằng cách đạo hàm theo r, hệ thức trên cho ta : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[rB(r)] = \mu_0 r j_V(r) = 0$.

Vậy ta thu được :

$$r < a:\ \overrightarrow{j_V}(r) = \frac{3B_1}{\mu_0}\frac{r}{a^2}\vec{e}_z\ ;$$

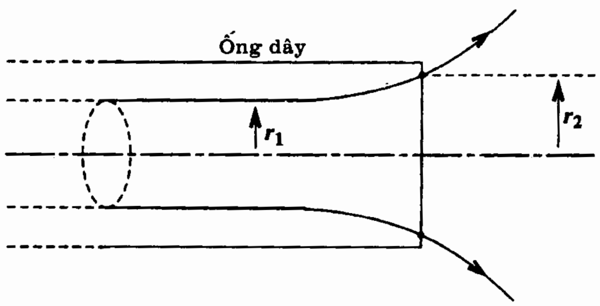
$$r = a:\ \overrightarrow{j_S}(r) = \frac{(B_2-B_1)}{\mu_0}\vec{e}_z\ ;$$

$$r > a:\ \overrightarrow{j_V}(r) = \vec{0}.$$

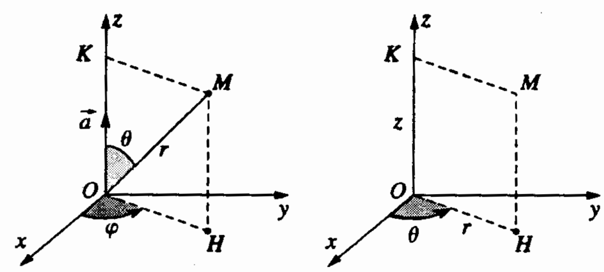
10 Cho ống trường được sơ đồ hóa như dưới đây. Thông lượng của $\vec{B}$ gửi qua một mặt S tựa trên ống trường này, không phụ thuộc vào sự lựa chọn mặt.

Từ trường ở bên trong của ống dây là $B = \mu_0 nI$. Tại tâm của mặt ra, $B = \frac{\mu_0 nI}{2}$. Trường này gần như là đều trong mặt ra.

Điều này cho ta $\mu_0 nI\pi r_1^2 \simeq \frac{\mu_0 nI}{2}\pi r_2^2$, nghĩa là $r_2 \simeq \sqrt{2}r_1 \simeq 1{,}4r_1$.



11



Ta hãy khai triển biểu thức của $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \alpha(ar\cos\theta)(ar\sin\theta)\vec{e}_\varphi = \alpha a^2\, OK.OH\,\vec{e}_\varphi.$$

Sử dụng tọa độ trụ $\vec{B} = \alpha a^2 r z \vec{e}_\theta$.

Mật độ dòng khối nhất thiết phải có dạng :

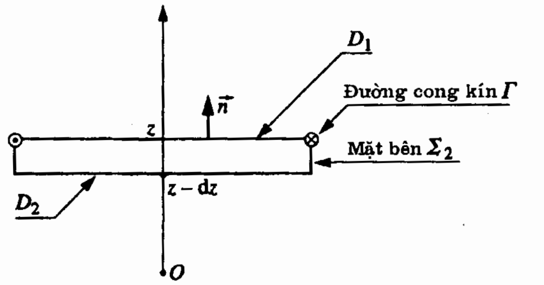
$$\overrightarrow{j_V} = j_r(r,z)\vec{e}_z + j_z(r,z)\vec{e}_z.$$

Áp dụng định lí AMPÈRE cho một đường cong kín Γ, hình tròn bán kính r và có trục (Oz), lấy làm mặt tựa trên đường cong kín này, là đĩa (D_1) bán kính r trong mặt phẳng (z = không đổi), để tính $\overrightarrow{j_z}$. Ta thu được :

$$B\,2\pi r = \mu_0\int_0^r j_z(r',z).2\pi r'\mathrm{d}r',$$

hay bằng cách đạo hàm theo r :

$$j_z(r,z) = \frac{1}{\mu_0}\times\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rB(r,z)],\ \text{từ đó}:\ \overrightarrow{j_z}(r,z) = \frac{1}{\mu_0}2\alpha a^2 z\vec{e}_z$$



Bây giờ ta hãy xét một mặt khác, tựa trên cùng một đường cong kín, cấu tạo bởi đĩa (D_2) ở độ cao z + dz và bởi mặt bên Σ_2.

Điều này cho ta :

$$B2\pi r = \mu_0\int_0^r j_z(r',z+\mathrm{d}z)2\pi r'\mathrm{d}r' + \mu_0 j_r(r,z)2\pi r\mathrm{d}z$$

$$= \mu_0\int_0^r j_z(r',z)2\pi r'\mathrm{d}r',$$

hay còn là : $r\, j_r(r,z) = -\int_0^r \frac{\partial}{\partial z}[j_z(r',z)r'\mathrm{d}r' = -\frac{1}{\mu_0}\int_0^r 2\alpha a^2 r'\mathrm{d}r'$

Hay $\vec{j}_r(r,z) = -\frac{1}{\mu_0}\alpha a^2 r\vec{e}_r$, từ đó : $\vec{j}_V = -\frac{1}{\mu_0}\alpha a^2 r\vec{e}_r + \frac{1}{\mu_0}2\alpha a^2 z\vec{e}_z$

hay còn viết là : $\mu_0\overrightarrow{j_V} = \alpha[3\vec{a}(\vec{a}.\vec{r}) - a^2\vec{r}]$.

12 Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng của dòng, vậy $\vec{B}$ vuông góc với mặt phẳng này và $\vec{B} = B(x, y, z)\vec{e}_y$.

Hệ dòng lại bất biến với phép tịnh tiến theo (Oz), $\vec{B} = B(x, y)\vec{e}_y$.

Nếu ta ở trong miền chung của hai hình trụ, thì ta cũng ở bên trong hai trụ.

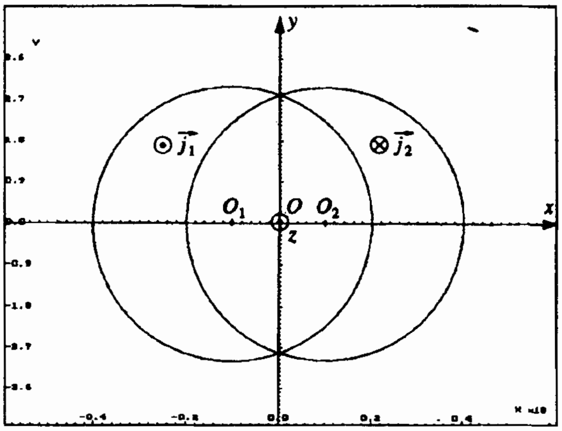
Ta hãy tìm $\overrightarrow{B_1}$ tạo ra bởi trụ ① tại một điểm ở bên trong trụ. Trường này là trực giao xuyên tâm $\overrightarrow{B_1}(M) = B(O_1M)\overrightarrow{e_\theta}$. Áp dụng định lí AMPÈRE cho một đường cong kín tròn tâm O_1 và có bán kính $r_1 = O_1M < R$, cho ta :

$B_1 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi r^2$, *hay* $\overrightarrow{B_1}(M) = \frac{\mu_0}{2}\overrightarrow{j_1}\wedge\overrightarrow{O_1M}$

Tương tự $\overrightarrow{B_2} = +\frac{\mu_0}{2}\overrightarrow{j_2}\wedge\overrightarrow{O_2M}$

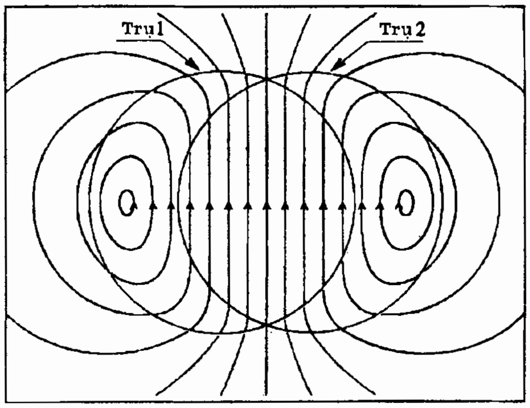
và $\overrightarrow{B_{\text{toàn phần}}}(M) = \frac{\mu_0}{2} j\overrightarrow{e_z}\wedge(\overrightarrow{O_1M}-\overrightarrow{O_2M}) = \frac{\mu_0}{2} j\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{O_1O_2}$

hay $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} j(O_1O_2)\overrightarrow{e_y}$.

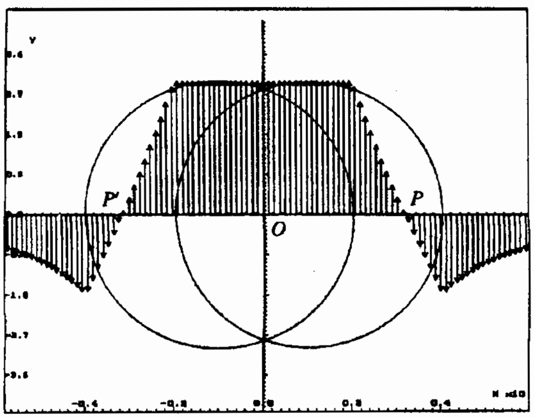


S. 1.

Trường là đều ở trong lỗ hổng như được chỉ rõ trên các mô phỏng S_2 và S_3.



S. 2.



S. 3.

Chú ý rằng ta có thể hiện rõ một điểm trường bằng không ; ta hãy xét một điểm P nằm ngoài hình trụ ① và nằm trong hình trụ ②.

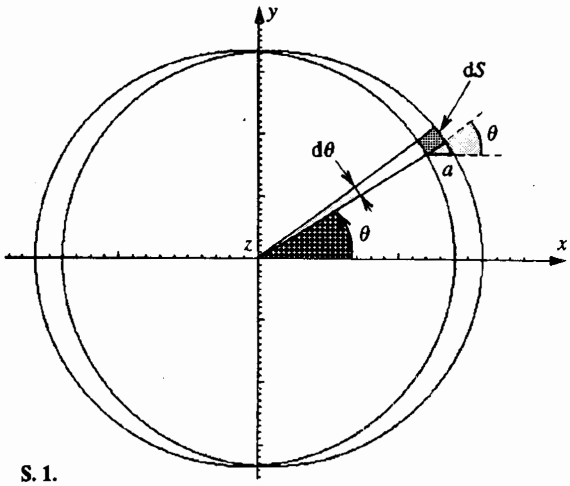
$$\overrightarrow{B_1}(P) = \frac{\mu_0}{2}\overrightarrow{j_1}\wedge\frac{R^2}{O_1P^2}\overrightarrow{O_1P} \text{ và } \overrightarrow{B_2}(P) = \frac{\mu_0}{2}\overrightarrow{j_2}\wedge\overrightarrow{O_2P}.$$

Từ đó $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2} j\overrightarrow{e_z}\wedge\left(\frac{R^2}{O_1P^2}\overrightarrow{O_1P}-\overrightarrow{O_2P}\right)$ *sẽ bằng không nếu*

$\frac{R^2}{O_1P} = O_2P$, *hay (bằng cách đặt* $O_1O_2 = 2d$*)* $R^2 = x_P^2 - d^2$.

Trên các mô phỏng S_2 *và* S_3 $R = 3$; $d = 1$ *từ đó* $x_P = \sqrt{10}$ = 3,16 *là kết quả mà phần mềm đã cho.*

13 1) *Ta biết rằng một dòng trên bề mặt chỉ có thể tồn tại nếu về cục bộ một dòng khối tiến tới vô cùng trên một bề dày bằng không. Ta hãy chứng tỏ sự tương đương đó trong trường hợp của bài tập này.*



S. 1.

Dòng dI *đi qua diện tích gạch* dS *(mô phỏng* S_1 *) bằng :*

$$dI = \overrightarrow{j_2}\, dS.\vec{e}_z = +j\,dS \quad \text{với } dS = a\cos\theta.R\,d\theta$$

Từ đó $dI = j\,a\cos\theta.Rd\theta = j\,a\,\vec{e}_z\cos\theta.dl.\vec{e}_z$, *với* $Rd\theta = dl$.

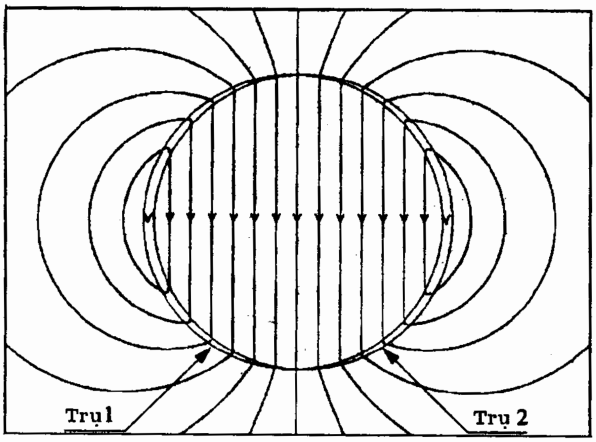
Từ đó $\overrightarrow{j_S} = j\,a\vec{e}_z\cos\theta = j_0\,\vec{e}_z\cos\theta$ *với* $j_0 = \lim\limits_{\substack{a\to 0\\ j\to\infty}} ja$.

Không có một dòng nào trong phần chung giữa hai hình trụ, vậy nên có sự tương đương giữa hai phân bố dòng.

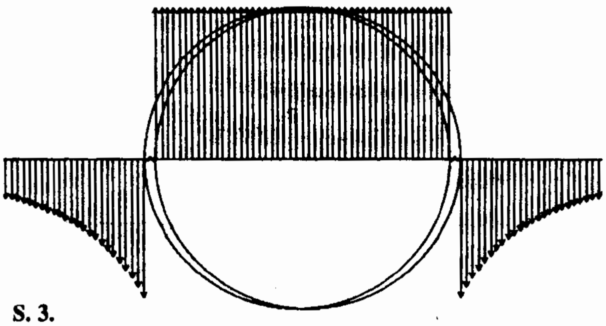
2) Vậy từ trường ở bên trong hình trụ bằng :

$$\vec{B} = \lim\limits_{\substack{a\to 0\\ j\to\infty}}\left(-\frac{\mu_0}{2} j\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{O_1O_2}\right) = -\frac{\mu_0}{2} j_0\vec{e}_z\wedge\vec{e}_x = -\frac{\mu_0}{2} j_0\vec{e}_y.$$

Ta thể hiện rõ trường đều trên các mô phỏng S2 và S3, cũng như sự bất liên tục của B tiếp tuyến do có tồn tại của j_S *trên bề mặt của hình trụ.*



S. 2.



S. 3.

3) Ta hãy giới hạn ở $\overrightarrow{B_0} = B_0\vec{e}_x$, khi đó ta có (phép quay $-\dfrac{\pi}{2}$) :

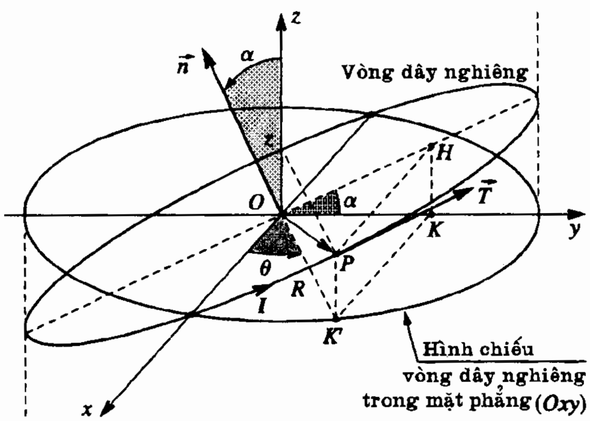
$$\overrightarrow{j_S} = j_0\,\overrightarrow{e_z}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = j_0\,\overrightarrow{e_z}\sin\theta .$$

14 *Cho một điểm P trên một vòng dây tâm O. Ta nghiên cứu trong hệ tọa độ trụ :*

$$\overrightarrow{OP} = R\vec{e}_r + R\sin\theta\tan\alpha\,\vec{e}_z$$

$$d(\overrightarrow{OP}) = Rd\theta[\overrightarrow{e_\theta} + \cos\theta\tan\alpha\,\overrightarrow{e_z}] = A\vec{T}d\theta,$$

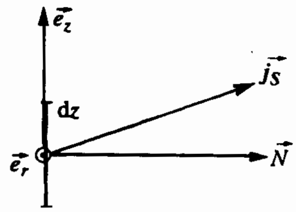
với $\vec{T}$ là vectơ tiếp tuyến với vòng dây. Chú ý rằng $A\vec{T}\wedge\vec{e}_z = R\vec{e}_r$.



Vậy nên vectơ mật độ dòng trên bề mặt của ống dây này có dạng :

$$\overrightarrow{j_S} = j_S\vec{T}$$

"Thông lượng" của $\overrightarrow{j_S}$ qua mọi đoạn có chiều dài dz song song với (Oz) trên bề mặt của hình trụ phải bằng cường độ đi qua đoạn đó, nghĩa là bằng nIdz.



Vậy $nIdz = \overrightarrow{j_S}(dz.\overrightarrow{e_\theta})$

$$= j_S\vec{T}.\overrightarrow{e_\theta}\,dz = j_S\frac{R}{A}dz$$

Từ đó $\overrightarrow{j_S} = j_S\vec{T} = A\vec{T}\dfrac{nI}{R} = \overrightarrow{j_{S_1}} + \overrightarrow{j_{S_2}}$, với :

$$\overrightarrow{j_{S_1}} = nI\,\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{j_{S_2}} = (nI\tan\alpha)\cos\theta.\vec{e}_z .$$

Ta hãy nghiên cứu $\vec{B}$ ở bên trong trụ :

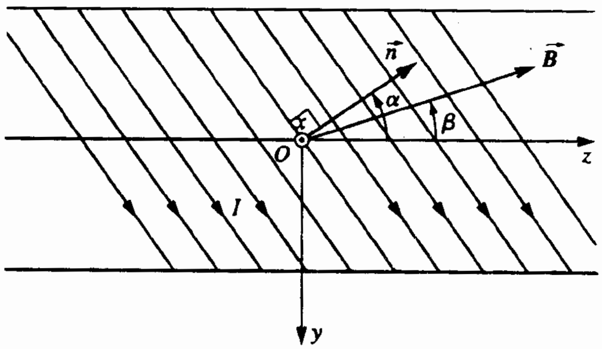
- $\overrightarrow{j_{S_1}}$ *(lớp dòng hình sin trong sách giáo khoa) tạo ra một trường đều:*

$$\overrightarrow{B_1} = \mu_0 nI\,\vec{e}_z$$

- $\overrightarrow{j_{S_2}}$ *(x. bài tập 12) tạo ra một trường đều :*

$$\overrightarrow{B_2} = -\frac{\mu_0 n\ I\tan\alpha}{2}\vec{e}_y \quad \text{và} \quad \frac{B_2}{B_1} = -\frac{\tan\alpha}{2} = -\tan\beta .$$

Từ đó suy ra phương của $\vec{B}$ trên sơ đồ.



15 1) *Từ trường là đồng nhất với $[B] = [\mu_0 I]L^{-1}$, nên ta suy ra : $B_1 = b_1\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$ và $B_2 = b_2\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$.*

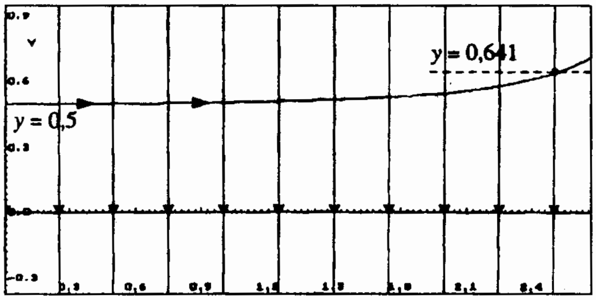
<u>Chú ý</u> :

Chiều dài của ống dây bằng $20\dfrac{R}{4} = 5R$, nên chỉ duy nhất có biến số R xuất hiện trong các công thức này. Các giá trị của b_1 và b_2 tính đến dạng hình học "rút gọn" của ống dây.

Công thức cổ điển cho giá trị của từ trường ở trên trục của một ống dây là $B = \dfrac{\mu_0 nI}{4\pi}\Omega$, trong đó n biểu thị số vòng dây trên đơn vị dài (ở đây $n = \dfrac{20}{5R}$) và Ω là góc đặc dưới đó ta nhìn ống dây từ điểm ở trên trục.

Điểm trung tâm : $\Omega_1 = 4\pi - 2\times 2\pi(1-\cos\theta_1) = 4\pi\cos\theta_1$,

với $\cos\theta_1 = \dfrac{10\dfrac{R}{4}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{10R}{4}\right)^2}} = 0{,}93$.



Điều này cho ta :

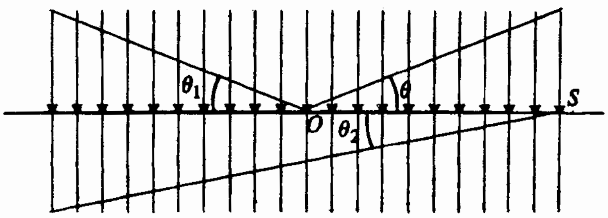
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\times\frac{4}{R}\times 4\pi\times 0{,}93 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\times 16\pi\times 0{,}93 = 46{,}67\frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Ta tìm thấy 46,67 lẽ ra là 46,98, nghĩa là một sai số tương đối 0,7%.

Điểm ở trên mặt ra :

$\Omega_2 = 2\pi - 2\pi(1-\cos\theta_2) = 2\pi\cos\theta_2$, với :

$$\cos\theta_2 = \frac{\dfrac{20R}{4}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{20R}{4}\right)^2}} = 0{,}98.$$



Điều này cho :

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\times\frac{4}{R}\times 2\pi\times 0{,}98 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\times 8\pi\times 0{,}98 = 24{,}64\frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Ta tìm thấy 24,64 lẽ ra là 27,87, nghĩa là một sai số tương đối 12%.

Kết luận :

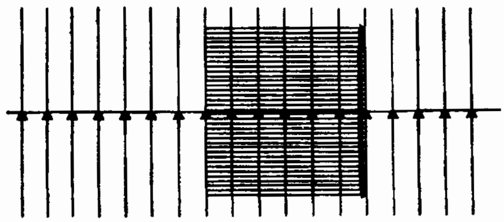
Từ trường ở bên trong một ống dây có thể tính được bằng công thức cổ điển, ngay cả khi các vòng dây không thực sự ghép nối nhau.

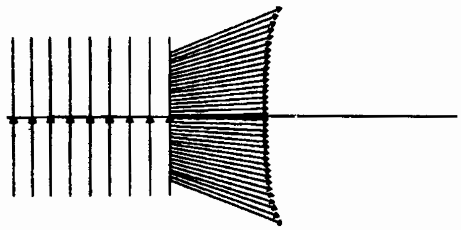
2) Từ trường là có thông lượng bảo toàn, ta phải có một cách gần đúng:

$$B_1\pi r_1^2 = B_2\pi r_2^2,\ \text{hay là}\ r_2 = r_1\sqrt{\frac{b_1}{b_2}} = 0{,}5R\sqrt{\frac{46{,}98}{27{,}87}} = 0{,}65\,R.$$

Ta tìm thấy 0,65 lẽ ra là 0,64.

Dẫn tới sự sai lệch này là do $\vec{B}$ không đều ở trên mặt ra, trong khi đó với một sự gần đúng tuyệt vời, từ trường là đều trong mặt phẳng của vòng trung tâm.





16 Ta hãy lưu ý tới bản đồ của một trường từ tĩnh ; hãy nhớ lại rằng :

a) Trường $\vec{B}$ có thông lượng bảo toàn :

- thông lượng gửi qua một ống trường là như nhau ở mọi tiết diện ; tiết diện càng nhỏ thì chuẩn của trường càng lớn.

- các đường sức của trường $\vec{B}$ nói chung là các đường cong khép kín. Đặc biệt, và trái ngược với trường tĩnh điện $\vec{E}$, các đường sức trường của $\vec{B}$ không thể xuất phát từ một điểm đã cho (hay tận cùng tại điểm đó);

b) Lưu số của từ trường trên một đường cong kín có thể khác không ; khi đó, theo định lí AMPÈRE, tồn tại một dòng điện bị đường cong kín này quấn lấy.

Nghiên cứu các ví dụ khác nhau :

Trường hợp a

Các đường sức trường song song với nhau và chuẩn của trường là không đổi dọc theo một đường sức : vậy thông lượng của vectơ này là bảo toàn. Trường này có bản chất từ tĩnh. Lưu số trên một đường cong kín hình chữ nhật là khác không, nên tồn tại một mật độ dòng khối, vuông góc với mặt phẳng hình vẽ, hướng ra phía trước ở bên trái của trục trung tâm Δ và hướng ra phía sau ở bên phải của trục này.

Trường này không thể có bản chất tĩnh điện (lưu số khác không trên một đường cong kín).

Trường hợp b

Thông lượng đi ra từ một mặt kín hình trụ có chiều cao h, bao quanh điểm O, hiển nhiên là dương, vậy khác không. Vậy trường đang xét không thể là một trường có bản chất từ tĩnh.

Lưu số của một vectơ có dạng $V(r)\vec{e_r}$ (tọa độ trụ) bằng không bất kể đường cong kín được chọn như thế nào. Trường này có lưu số bảo toàn có bản chất tĩnh điện. Khi đó tồn tại một mật độ điện khối dương trong không gian đó. Nếu trường theo $\dfrac{1}{r}$, thì chỉ một đường vuông góc với mặt phẳng hình vẽ tại O mang một mật độ điện dài dương.

Trường hợp c

Thông lượng vào qua mặt kín, xác định bởi một hình trụ trục (Oz), có bán kính r và có chiều cao h không bằng không. Vậy trường không có thông lượng bảo toàn ; đó không thể là một trường có bản chất từ tĩnh.

Lưu số của trường trên một đường cong kín, tạo bởi một vòng tròn tâm O và có bán kính r không bằng không. Vậy nó không phải là một trường có bản chất tĩnh điện.

Trường hợp d

Các đường sức trường là tròn, và chuẩn là như nhau tại mọi điểm của một đường sức trường. Vậy trường này có thông lượng bảo toàn ; nó có thể là một trường có bản chất từ tĩnh.

Lưu số của trường trên một đường cong kín tạo bởi một vòng tròn tâm O, bán kính r không bằng không. Định lí AMPÈRE áp dụng cho đường cong kín này trùng với một đường sức trường chứng tỏ có tồn tại các dòng (khối hoặc không) song song với (Oz). Có thể đây là một dây thẳng trùng với (Oz), nếu B(r) biến thiên theo $\frac{1}{r}$, r là khoảng cách tới trục (Oz), trong trường hợp này dòng sẽ đi vào, hướng theo (–Oz).

Lưu số của trường trên đường cong kín không bằng không, nên đây có thể không phải là một trường có bản chất tĩnh điện.

Trường hợp e

Hình thái tương tự như ở trên nhưng lần này chuẩn của trường là một hằng số.

Trường này luôn luôn có thông lượng bảo toàn ; vậy nó có thể là một trường có bản chất từ tĩnh.

Có tồn tại một phân bố dòng khối vuông góc với mặt phẳng hình vẽ, để thỏa mãn định lí AMPÈRE. Chứng tỏ rằng $\vec{j}(r) = \left(\frac{A}{r}\right)\vec{e}_z$.

Lưu số của B(r) = cte trên một vòng tròn bán kính r và có tâm O cho ta:

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \int_0^r \frac{A}{r'} 2\pi r' \mathrm{d}r'$$

điều này được xác nhận.

17 • **Trường hợp a**

Hai sợi dây có các dòng điện cùng chiều, cường độ I chạy qua. Tại tâm O, trường $\vec{B}$ bằng không và bốn đường sức trường gặp nhau tại đó.

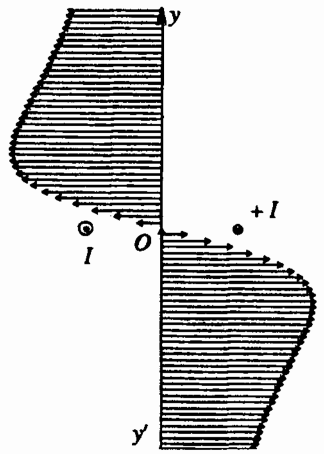
Khi khoảng cách giữa hai đường sức trường gần nhau tăng lên, thì trường giảm đi. Trường giữa hai sợi dây là yếu.

Tại những điểm cách xa (Oz), các đường sức trường là chuẩn tròn: tập hợp hai dây có tính chất gần như chỉ là một dây có dòng gấp đôi đặt trên (Oz).

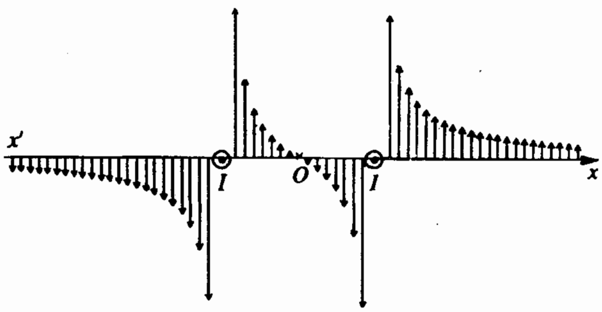
Mặt phẳng trung trực (yOz) và mặt phẳng của hai dây (xOz) là các mặt phẳng đối xứng Π_1 và Π_2 của dòng. Các đường sức trường đi qua vuông góc với các mặt phẳng đó (x. S1 và S2). Giao tuyến (Oz) của hai mặt phẳng đối xứng Π_1 và Π_2 của dòng, là một trục đối xứng của dòng, từ đó $\vec{B}(P_1) = -\vec{B}(P_3)$ và $\vec{B}(P_2) = -\vec{B}(P_4)$, điều này được xác nhận trên hình vẽ.

Tương tự, ta có :

nếu $\vec{B}(P_1) = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \end{vmatrix}$, *khi đó* $\vec{B}(P_2) = \begin{vmatrix} +B_x \\ -B_y \end{vmatrix}$, $\vec{B}(P_3) = \begin{vmatrix} -B_x \\ -B_y \end{vmatrix}$ *và* $\vec{B}(P_4) = \begin{vmatrix} -B_x \\ +B_y \end{vmatrix}$.



S. 1. *Sự phát triển theo đồ thị của từ trường trên đường thẳng (y'Oy) (mặt phẳng đối xứng Π_1 của dòng).*

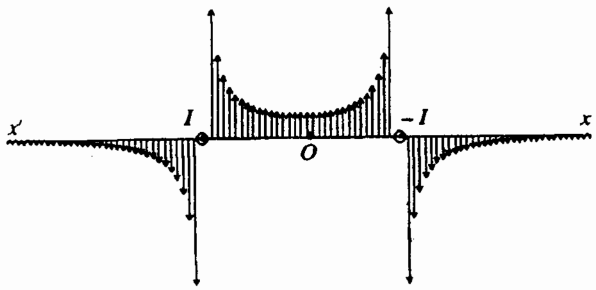


S. 2. *Sự phát triển theo đồ thị của từ trường trên đường thẳng (x'Ox) (mặt phẳng đối xứng Π_2 của dòng).*

• **Trường hợp b**

Hai sợi dây có các dòng điện ngược chiều, cường độ I chạy qua (dây A chiều ra phía trước, dây B về phía sau). Nếu ta di chuyển dọc theo một đường sức trường, thì trường mạnh hơn trong miền trung tâm, ở đó các đường sức trường xít lại. Mặt phẳng (yOz) là một mặt phẳng phản đối xứng Π^* của dòng ; $\vec{B}$ nằm trong mặt phẳng này (trùng với một đường sức trường). Cường độ của trường giảm nhanh khi điểm đi ra xa dây. Mặt phẳng (xOz) là một mặt phẳng đối xứng Π của dòng. $\vec{B}$ là vuông góc với mặt phẳng này (vuông góc với các đường sức trường) (mô phỏng 3). (Oz) là giao tuyến của hai mặt phẳng đối xứng Π và phản đối xứng Π^* của dòng, từ đó $\vec{B}(P_1) = \vec{B}(P_3)$ và $\vec{B}(P_2) = \vec{B}(P_4)$, điều này được xác nhận trên hình vẽ. Tương tự, ta có:

nếu $\vec{B}(P_1) = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \end{vmatrix}$ thì $\vec{B}(P_2) = \begin{vmatrix} -B_x \\ +B_y \end{vmatrix}$, $\vec{B}(P_3) = \begin{vmatrix} +B_x \\ +B_y \end{vmatrix}$ và $\vec{B}(P_4) = \begin{vmatrix} -B_x \\ +B_y \end{vmatrix}$.



S. 3. *Sự phát triển theo đồ thị của $\vec{B}$ trên trục (x'Ox).*

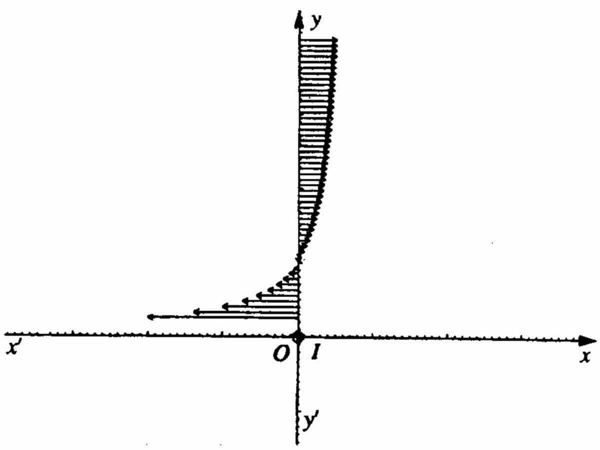
- **Trường hợp c**

Một sợi dây có dòng chạy theo (Oz) được đặt trong một trường đều $\vec{B_0}$ hướng về phía phải. Trường ngày càng mạnh lên khi các đường sức trường ngày càng xít lại. Trường toàn phần ở dưới dây mạnh hơn ở phía trên. Mặt phẳng (yOz) là một mặt phẳng đối xứng Π của dòng (ngay cả các dòng tạo ra $\vec{B_0}$, ví dụ một ống dây vô hạn trục nằm ngang), $\vec{B}$ vuông góc với mặt phẳng này tại mỗi điểm của nó (mô phỏng 4). Các đường sức trường tất cả đều trực giao với nó. Tổng quát hơn, ta có:

$$\text{nếu } \vec{B}(P_1) = \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \end{vmatrix}, \text{ thì } \vec{B}(P_2) = \begin{vmatrix} +B_x \\ -B_y \end{vmatrix}$$

Có tồn tại một điểm trường bằng không (điểm P), ở đó có nhiều đường sức trường cắt nhau, (ở đây là bốn : chú ý sự định hướng của chúng) trong mặt phẳng hình vẽ. Điểm P này phải sao cho :

$$B_o - \frac{\mu_o I}{2\pi r} = 0 \ (\text{với } r = OP)$$



S. 4. Sự phát triển theo đồ thị của $\vec{B}$ trên trục (y'Oy).

- **Trường hợp d**

Hai sợi dây có cùng một dòng điện chạy qua theo chiều ngược nhau (dây A về phía sau và dây B ra phía trước) trong một từ trường đều hướng về phía phải. Không có mặt phẳng đối xứng hay phản đối xứng của các dòng ; nhưng (Oz) là một trục phản đối xứng của dòng (trường đều có thể là trường của một ống dây trục nằm ngang). Các đường sức trường của $\vec{B}$ tuân theo phép đối xứng này ; chú ý rằng :

$$\vec{B}(x, y) = \vec{B}(-x, -y)$$

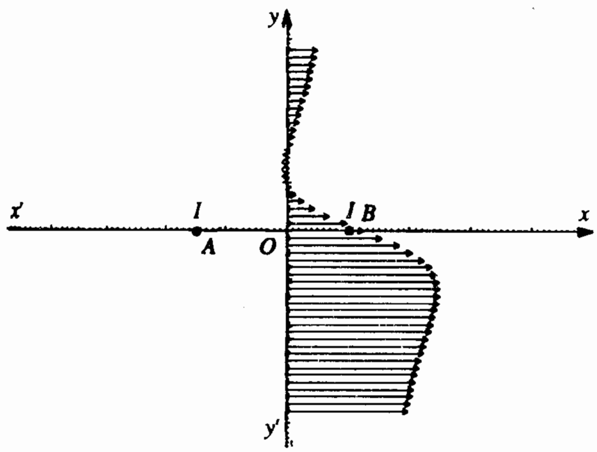
Giá trị của trường mạnh hơn ở giữa hai dây có tồn tại hai điểm trường bằng không (P_1 và P_2) trong mặt phẳng hình vẽ (ở đây bốn đường sức trường xuất phát từ các điểm đó : chú ý sự định hướng của chúng). Hai điểm này là đối xứng với nhau đối với (Oz).

- **Trường hợp e**

Hai sợi dây có các dòng điện cùng chiều chạy qua (ra phía trước đối với cả hai dây) trong một từ trường đều hướng về phía phải.

Mặt phẳng (yOz) là một mặt phẳng đối xứng của các dòng (trường đều có thể là trường của một ống dây trục nằm ngang). Các đường sức trường của $\vec{B}$ trực giao với mặt phẳng này (mô phỏng 5).

Có tồn tại một điểm trường bằng không trong mặt phẳng hình vẽ ; có sáu đường sức xuất phát từ điểm này (chú ý sự định hướng của chúng).



S. 5. *Sự phát triển theo đồ thị của $\vec{B}$ trên trục (y'Oy).*

- **Trường hợp f**

Ba sợi dây có cùng một dòng chạy qua theo cùng chiều và được đặt tại các đỉnh của một tam giác đều.

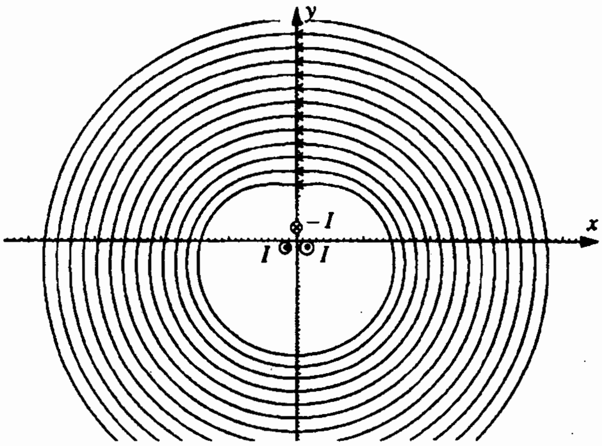
Trong mặt phẳng hình vẽ, chỉ có tâm O là điểm trường bằng không ; có sáu đường sức trường xuất phát từ điểm này (chú ý sự định hướng của chúng).

Các đường sức trường ở gần tâm cách xa nhau hơn là ở lân cận các dây, ở đó trường mạnh hơn.

Mặt phẳng (yOz) là một mặt phẳng đối xứng Π của các dòng. Các đường sức trường của $\vec{B}$ trực giao với mặt phẳng này, trừ tại điểm *trường bằng không O. Có hai mặt phẳng khác cũng thỏa mãn tính chất trên ; chúng được suy ra từ mặt phẳng trên bằng các phép quay $\frac{2\pi}{3}$ và $\frac{4\pi}{3}$ xung quanh (Oz).*

• Trường hợp g

Cũng một hình thái như trường hợp f, trừ dây B có dòng cường độ I chạy về phía sau. Lưu ý sự đối xứng đối với mặt phẳng trung trực của AC chứa dây B và sự tồn tại của hai điểm trường bằng không (trong mặt phẳng hình vẽ) nằm trong mặt phẳng đối xứng Π này. Lưu ý rằng, trong mặt phẳng đối xứng, trường là mạnh trong khoảng giữa ba dây và rằng ở khoảng cách lớn với các dây, tôpô của trường xấp xỉ là tôpô của trường của một dây duy nhất đặt ở miền trung tâm, về phía cạnh AC, trên mặt phẳng đối xứng, và có dòng cường độ I chạy qua (mô phỏng 6).



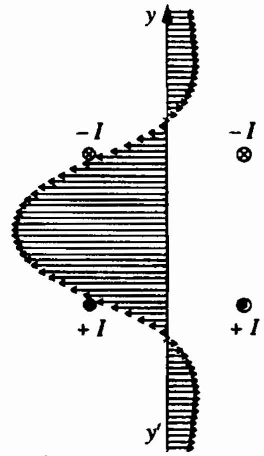
S. 6. *Các đường sức trường của $\vec{B}$ "ở xa" ba dây.*

• Trường hợp h

Bốn sợi dây có các cường độ giống nhau, và cùng chiều chạy qua, được bố trí tại các đỉnh của một hình vuông. Hãy chú ý các tính đối xứng.

• Trường hợp i

Bốn sợi dây có các dòng điện cường độ giống nhau chạy qua, được bố trí tại các đỉnh của một hình vuông A và B : –I, và C và D : +I. Hãy chú ý các tính đối xứng, cũng như $\vec{B}$ nằm trên mặt phẳng (yOy') (mô phỏng 7).



S. 7. *Sự phát triển của $\vec{B}$ trên trục (y'Oy).*

• Trường hợp j và k

Trong trường hợp j, sáu dây được bố trí tại các đỉnh của một lục giác đều có các cường độ giống nhau, cùng chiều chạy qua, trong khi trong trường hợp k, các cường độ dương và âm là xen kẽ nhau.

LƯỠNG CỰC TỪ 9

Mở đầu

Tổng quát hơn, chúng ta sẽ thấy các phân bố dòng có một mômen lưỡng cực từ, cho phép xác định từ trường tạo ra ở khoảng cách lớn.

Khi đó, chúng ta sẽ phát hiện thấy một sự tương tự đến bất ngờ (nhưng có lẽ dễ bị đánh lừa) với trường lưỡng cực tĩnh điện đã gặp ở chương 5.

Các tính chất từ của vật chất, chủ yếu, được giải thích bằng sự tồn tại của các lưỡng cực từ vi mô.

Ví dụ, từ trường tạo ra bởi một nam châm là do sự chồng chất trường của các lưỡng cực như thế.

MỤC TIÊU

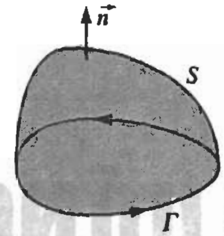
- Mô hình của lưỡng cực.
- Trường lưỡng cực.
- So sánh với lưỡng cực tĩnh điện.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Từ trường.
- Lưỡng cực tĩnh điện.

1 Mômen lưỡng cực

1.1 Mặt liên kết với một đường cong kín



Hình 1. *Mặt S tựa trên một đường cong kín Γ định hướng.*

Ta hãy xét một đường cong kín Γ định hướng (hình 1). Mặt S miêu tả tựa trên đường cong kín đó.

Ta sẽ định nghĩa vectơ diện tích của mặt bởi :

$$\vec{S} = \iint_S dS.\vec{n} = \iint_S \overrightarrow{dS}$$

không phụ thuộc vào sự lựa chọn mặt S tựa trên Γ và được định hướng bởi Γ.

Thực vậy, nếu tồn tại một mật độ dòng đều $\vec{j}$ trong miền có đường cong kín Γ, thì dòng qua nó viết là :

$$I = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \vec{j}\iint_S \overrightarrow{dS} = \vec{j}.\vec{S}$$

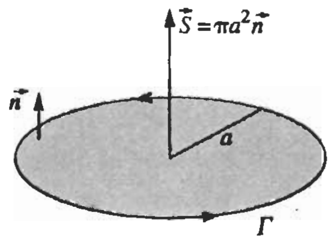
Dòng này không phụ thuộc vào mặt và sự lựa chọn vectơ hằng $\vec{j}$ là tùy ý.

Giá trị của vectơ diện tích $\vec{S}$ tính được không phụ thuộc vào sự lựa chọn của mặt S tựa trên Γ.

Vectơ diện tích là một đại lượng đặc trưng của đường cong kín Γ.

Ví dụ, mặt của đường cong kín tròn biểu diễn trên hình vẽ 2 có thể tính được nhờ vào diện tích của đĩa, lấy vòng tròn làm chỗ tựa :

$$\vec{S} = \pi a^2 \vec{n}\ .$$



Hình 2. *Mặt định hướng của một đường cong kín tròn.*

1.2. Mômen từ của một mạch hình sợi

Mômen từ của một vòng có dòng I chạy qua và được xác định bởi đường cong kín Γ của nó định hướng từ mặt $\vec{S}$, bằng :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$$

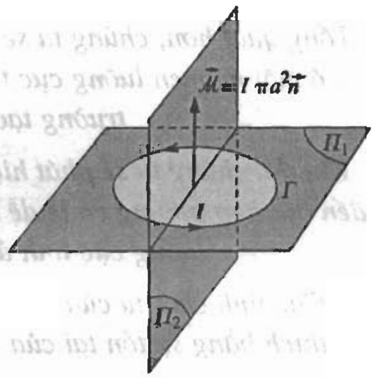
Chuẩn của nó được biểu thị ra $A.m^2$.

Trong trường hợp một vòng dây tròn :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\pi a^2 \vec{n}$$

Trên *hình vẽ* 3, mặt phẳng của vòng dây Π_1 là một mặt phẳng đối xứng của phân bố dòng vuông góc với mômen. Mọi mặt phẳng Π_2 chứa trục của vòng dây đều là một mặt phẳng phản đối xứng nên chứa mômen lưỡng cực từ. Vậy ta lưu ý rằng :

Mômen từ có đặc tính như một *vectơ trục*.



Hình 3. *Nghiên cứu các tính đối xứng.*

Áp dụng 1

Mômen từ nguyên tử

Một êlectrôn, có điện tích $q = -e$ và có khối lượng m_e, trong sự mô tả cổ điển, vạch ra một quỹ đạo tròn trục (Oz), bán kính r, xung quanh hạt nhân coi là chất điểm tại O. Người ta thừa nhận mômen động lượng của êlectrôn đối với trục (Oz) là :

$$L_z = \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

(h là hằng số PLANCK : $h = 6{,}63.10^{-34} J.s$). Hãy tính mômen từ liên kết với chuyển động trên quỹ đạo đó của êlectron.

Trên quỹ đạo tròn của mình, êlectron quay với vận tốc không đổi theo chiều dương đối với trục (Oz), mômen động lượng đối với trục (Oz) bằng :

$$L_z = m_e vr \text{ , với } L_z = \hbar \text{ theo giả thiết.}$$

Êlectrôn vạch ra $N = \frac{v}{2\pi r}$ vòng trong một đơn vị thời gian và cường độ liên kết với một chuyển động như thế bằng :

$$I = q.N = -\frac{ev}{2\pi r} = -\frac{e\hbar}{2\pi m_e r^2}$$

Mômen từ tương ứng, có giá trị đại số trên trục (Oz) là :

$$\mathcal{M} = \pi r^2 I = -\frac{e\hbar}{2m_e}$$

Phép tính sơ cấp này làm xuất hiện đại lượng manhêton BOHR :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}26.10^{-24} A.m^2$$

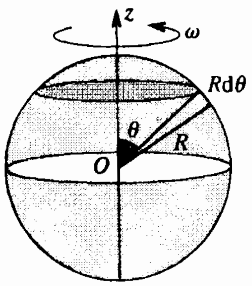
dùng làm đơn vị đo các mômen từ trong vật lí nguyên tử. Các êlectrôn của các nguyên tử có các mômen từ quỹ đạo (liên kết với chuyển động của chúng xung quanh hạt nhân) và có các mômen từ riêng liên kết với "spin" của chúng. Sự ghép các mômen từ này, theo các định luật lượng tử, cho một mômen từ nguyên tử có thể khác không. Khi đó, các nguyên tử có đặc tính như các lưỡng cực từ tương tác với một từ trường ngoài. Khái niệm lưỡng cực từ cần tới trong phạm vi nguyên tử giúp giải thích các tính chất từ của vật chất.

1.3. Mômen lưỡng cực của một phân bố dòng

Trong trường hợp của một phân bố dòng có giới hạn trong không gian, định nghĩa được khái quát hóa bằng cách xem đó là một sự chồng chất liên tục các vòng của dòng hình sợi (ống dòng nguyên tố) : $\vec{\mathcal{M}} = \int d\vec{\mathcal{M}}$

Áp dụng 2

Một quả cầu tích điện đều trên bề mặt, có điện tích toàn phần q và có bán kính R, quay với vận tốc góc không đổi ω xung quanh trục (Oz). Hãy xác định mômen từ của phân bố dòng liên kết.



Hình 4

Ta hãy sử dụng các tọa độ cầu trục (Oz) và cắt quả cầu ra thành các vòng dây có bề rộng $Rd\theta$ (hình 4). Cường độ của vòng dây này liên kết với chuyển động quay, tính bằng điện tích đi qua một tiết diện thẳng $Rd\theta$ trong một đơn vị thời gian :

$$dI = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\sigma(2\pi R^2 \sin\theta d\theta)$$

$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$ là mật độ điện mặt đều. Mômen nguyên tố $d\vec{\mathcal{M}}$ liên kết với vòng dây này là $d\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 \sin^2\theta \, dI \, \vec{e}_z$, nghĩa là :

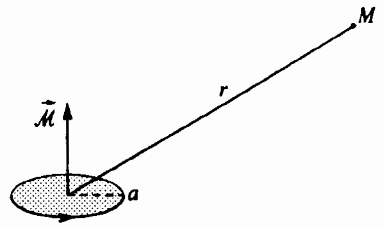
$$d\vec{M} = \frac{\omega q}{4} R^2 \sin^3\theta d\theta \, \vec{e}_z$$

vì $\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$, nên mômen tổng hợp bằng:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\omega q R^2}{3}\vec{e}_z$$

2 Trường từ tĩnh tạo ra bởi một lưỡng cực

2.1. Phép gần đúng lưỡng cực



Hình 5. *Vòng có dòng điện.*

Một vòng có dòng điện tạo ra, tại mọi điểm M trong không gian, một trường từ tĩnh cho bởi định luật BIOT và SAVART.

Ở cách vòng một khoảng lớn $\left(\frac{a}{r} << 1\right.$ đối với một vòng dây tròn bán kính a (hình 5)$\left.\right)$, chuẩn của trường giảm như $\frac{1}{r^3}$. Khi đó, vòng có đặc tính như một *lưỡng cực từ.*

Tại những điểm ở rất xa vòng có dòng điện, từ trường của vòng tiến tới từ trường của một lưỡng cực từ có mômen $\vec{\mathcal{M}}$.

Số hạng theo $\frac{1}{r^3}$ của từ trường tạo ra ở khoảng cách lớn chỉ phụ thuộc duy nhất vào $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ và vào mômen từ $\vec{\mathcal{M}}$. Vì vậy không cần can thiệp vào dạng hình học chính xác của vòng. Một vòng dây tròn bán kính a và có cùng một mômen từ sẽ tạo ra ở khoảng cách lớn cùng một trường, vào cỡ $\left(\frac{a}{r}\right)^3$.

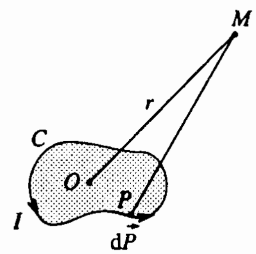
Sau đây ta sẽ dùng nó như sự biểu thị đơn giản hóa của một lưỡng cực từ.

Chú ý :
Sự phụ thuộc của trường đối với khoảng cách r làm ta nhớ lại là trường của một lưỡng cực tĩnh điện, có thể được mô hình hóa ở khoảng cách lớn bởi một nhóm đôi điện tích (−q, +q).

Áp dụng 3

Sự thiếu số hạng đơn cực trong từ trường

Tại một điểm M rất xa một vòng có dòng C, mạch hình sợi định xứ trong một miền D có kích thước đặc trưng d (r = OM >> d, O là một điểm của miền D), chuẩn của từ trường tạo ra bởi vòng này không chứa số hạng theo $\frac{1}{r^2}$. Tại sao ?



Hình 6.

Theo định luật BIOT và SAVART, từ trường tại điểm M là :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C Id\vec{P} \wedge \frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2}$$

Trong giả thiết $r >> d$, thì phép gần đúng tốt nhất là thay thế :

$$\frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2} \text{ bằng } \frac{\vec{e}_r}{r^2}, \text{ với } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Một phép gần đúng như thế sẽ cho một trường bằng :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I\left(\oint_C d\vec{P}\right) \wedge \frac{\vec{e}}{r^2}$$

Mà tích phân biểu thị tổng các vectơ nguyên tố tiếp tuyến với đường cong kín nên tích phân này bằng không. Như vậy $\vec{B}_0 = 0$ và số hạng thứ nhất khác không của $\vec{B}$ (số hạng lưỡng cực biến thiên theo $\frac{1}{r^3}$) có được bằng cách thực hiện một phép gần đúng kém hơn. Kết quả này thể hiện *sự vắng mặt của số hạng đơn cực.*

Chú ý : Một phép tính tương tự cung cấp một trường E_0 khác không đối với trường tĩnh điện tạo ra bởi một phân bố định xứ của điện tích nếu tổng các điện tích này khác không : có thể tồn tại một số hạng đơn cực điện.

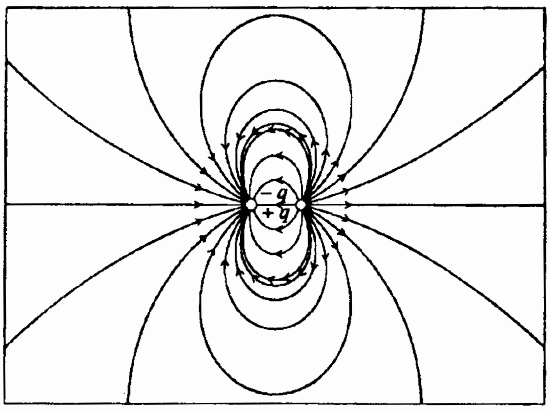
2.2. Sự tương tự với lưỡng cực tĩnh điện

Ta hãy xét một nhóm đôi điện tích $-q$ và $+q$ (cách nhau a) có tâm tại O và có mômen lưỡng cực $\vec{p} = qa\vec{e}_z = p\vec{e}_z$.

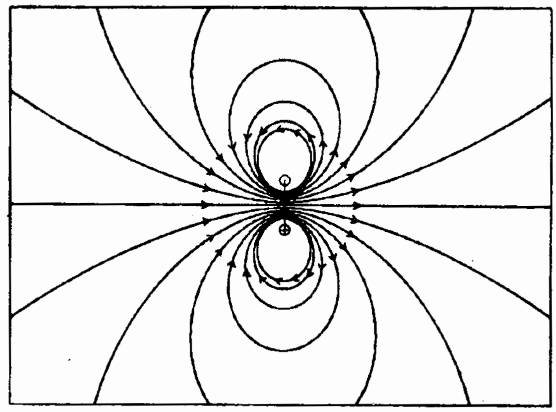
Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) là một mặt phẳng đối xứng. Các đường sức trường của vectơ $\vec{E}$, có tính tròn xoay xung quanh trục (Oz), đều nằm trong các mặt phẳng như thế.

Trên hình 7a, một số đường sức trường tĩnh điện được biểu diễn trong một mặt phẳng chứa (Oz).

Bây giờ ta hãy xét một vòng dây tròn bán kính a, trục (Oz) và có mômen lưỡng cực từ $\vec{\mathcal{M}} = I\pi a^2\vec{e}_z = \mathcal{M}\vec{e}_z$. Mọi mặt phẳng chứa trục (Oz) là một mặt phẳng phản đối xứng. Các đường sức trường của vectơ trục $\vec{B}$, có tính tròn xoay xung quanh trục (Oz), đều nằm trong các mặt phẳng như thế. Hình 7b biểu diễn một vài đường sức trường từ tĩnh trong một mặt phẳng chứa (Oz).



Hình 7a. *Các đường sức trường tĩnh điện của một nhóm đôi $-q$ và $+q$.*



Hình 7b. *Các đường sức trường từ tĩnh.*

Kích thước của các miền xuất hiện trên các hình vẽ là vào cỡ $(10a)^2$. Hai bản đồ trường thu được rõ ràng là khác hẳn nhau, bởi lẽ đặc tính của các trường ở lân cận các nguồn của chúng là rất khác nhau : trường tĩnh điện phân kì ra từ các nguồn của chúng - các điện tích, trong khi đó trường từ tĩnh xoáy xung quanh các nguồn của mình - các dòng điện.

Nếu ta quan sát các bản đồ trường này ở phạm vi rất lớn hơn (miền cỡ $(100a)^2$), thì trong hai trường hợp ta thu được cùng một hình thái các đường sức trường (h.8).

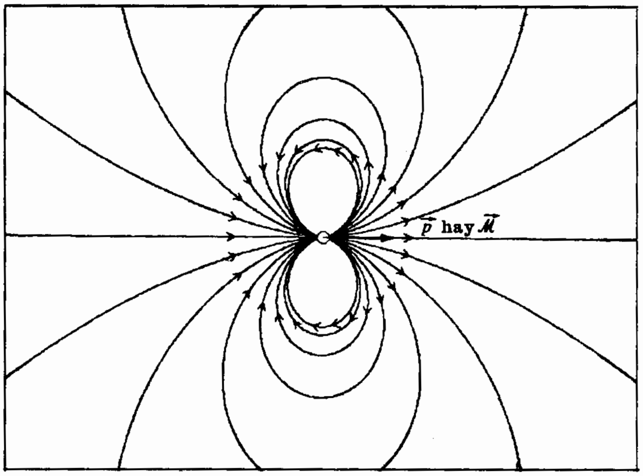
Trường tĩnh điện của một lưỡng cực $\vec{p} = p.\vec{e}_z$ và trường từ tĩnh của một lưỡng cực $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ đều có cùng một đặc tính ở khoảng cách lớn $r >> a$.

2.3. Áp dụng vào phép tính trường từ tĩnh

2.3.1. Trường lưỡng cực

Trường tĩnh điện của một nhóm đôi điện tích có các tọa độ cầu trục (Oz) (hình 9), trong phép gần đúng lưỡng cực :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}, \; E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \text{ và } E_\varphi = 0$$



◀ **Hình 8.** *Đường sức trường của một lưỡng cực dù là điện hay từ.*

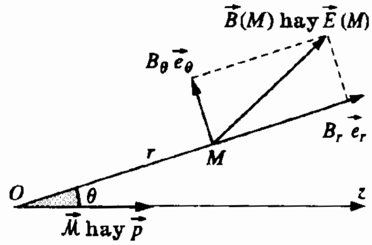
Do có sự tương tự quan sát được ở các khoảng cách lớn với nguồn, ta giả thiết trường $\vec{B}$ tạo ra tại điểm M có tọa độ cầu (r, θ, φ), bởi một lưỡng cực $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ đặt tại O, có dạng :

$$B_r = 2B_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^3}, \; B_\theta = B_0 a^3 \frac{\sin\theta}{r^3} \text{ và } B_\varphi = 0$$

Thừa số B_0 là một hằng số đồng nhất với một từ trường mà ta sắp xác định.

<u>*Chú ý :*</u>

- *Có thể thu được kết quả trên bằng phép khai triển của trường $\vec{B}$ tạo ra bởi một vòng dây tại một điểm ở xa. Một phép tính như thế là khá chán ngán.*
- *Cũng có thể xem xét khai thác sự giống nhau của các phương trình đường sức trường của các lưỡng cực điện và từ để đi đến các biểu thức nêu ra ở trên.*



Hình 9.

2.3.2. Xác định trường bằng phép đồng nhất hóa

Để tìm hằng số B_0, ta có thể so sánh trường lưỡng cực ở trên với trường tạo ra bởi một vòng dây tại một điểm rất xa trên trục của vòng dây (hình 10).

Trường của vòng dây ở trên trục (Oz) của nó bằng :

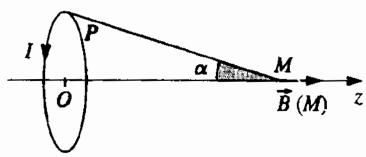
$$\vec{B} = B(z)\vec{e}_z, \text{ với } B(z) = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha = \frac{\mu_0 I}{2a}\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Với $\frac{a}{|z|} << 1$, $B(z) \approx \frac{\mu_0 I}{2}.\frac{a^2}{|z|^3} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi r^3}$.

Đồng nhất các giá trị này với $B_r = 2B_0\frac{a^3}{r^3}$, ta thu được $B_0 a^3 = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi}$

Các thành phần B_r, B_θ và B_φ, trong tọa độ cầu, của trường của một lưỡng cực từ đặt tại O và có mômen $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ do vậy là :

$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\dfrac{2\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\dfrac{\sin\theta}{r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$



Hình 10.

Biểu thức của từ trường của lưỡng cực $\vec{\mathcal{M}}$ trong tọa độ cầu, trục $(O, \vec{\mathcal{M}})$ là :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}\cos\theta\, \vec{e}_r + \mathcal{M}\sin\theta\, \vec{e}_\theta}{r^3}$$

Vậy biểu thức thuần của nó là :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[3(\vec{\mathcal{M}}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}}]}{r^3}$$

Áp dụng 4

Cho một lưỡng cực từ có mômen $\vec{\mathcal{M}}$ mang bởi trục (Oz). Hãy xác định, trong tọa độ cực (r, θ), các phương trình của đường sức từ trường của một lưỡng cực từ trong một mặt phẳng chứa trục (Oz).

Một đường sức trường là một đường cong (ở đây là phẳng) mà tại mọi điểm M của nó, trường $\vec{B}$ là tiếp tuyến, các vectơ $\overrightarrow{dM}$ và $\vec{B}$ là cộng tuyến :

$$\overrightarrow{dM} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Trong tọa độ cầu (cực trong một nửa mặt phẳng kinh tuyến), ta thu được :

$$\frac{dr}{B_r} = r\frac{d\theta}{B_\theta}, \text{ hay } \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} d\theta .$$

Bằng phép tích phân, ta có $r = A\sin^2\theta$, A là một hằng số phụ thuộc vào đường sức đang xét.

2.3.3. Sự khác nhau cơ bản giữa nhóm đôi và vòng dây

Sự tương tự giữa các đặc tính của các lưỡng cực điện và từ thật bất ngờ đến nỗi, về mặt lịch sử các nhà vật lí trước tiên đã tìm cách làm rõ các nguyên nhân tương tự để giải thích trường được tạo ra.

Một phân bố điện tích có đặc tính như một lưỡng cực điện có thể được mô tả bởi một nhóm đôi điện tích (-q, +q), cách nhau d sao cho mômen bằng $\vec{p} = q\vec{d}$.

Một phân bố dòng có đặc tính như một lưỡng cực từ, do tương tự, để tồn tại, phân bố có phải là một nhóm đôi "điện tích từ" không ?

Thí nghiệm đã giải quyết và câu trả lời cho câu hỏi trên là phủ định : đó là mô hình vòng có dòng điện mới thích hợp để tìm lại các tính chất của các phân bố dòng như thế.

Nếu các đường sức trường là giống nhau tại các điểm ở xa thì chúng lại khác nhau ở lân cận của nhóm đôi hay của vòng dây (hình 7) đại diện cho các lưỡng cực như thế.

Ở đó người ta tìm lại được sự khác nhau sâu sắc giữa một trường tĩnh điện mà các đường sức trường đi ra từ điện tích dương để đi tới điện tích âm và một trường từ tĩnh mà các đường sức trường được khép kín trên chính chúng.

Sự khác biệt về đặc tính này xuất hiện càng rõ nét khi nghiên cứu các tính chất điện và từ của môi trường. Sự phân cực của các môi trường vật chất thể hiện bởi sự tồn tại của mômen lưỡng cực điện theo thể tích ở thang vĩ mô. Nó được giải thích một cách đúng đắn bằng mô hình nhóm đôi điện tích ở thang vi mô.

Sự nam châm hóa (từ hóa) môi trường thể hiện bởi sự tồn tại của mômen lưỡng cực từ theo thể tích ở thang vĩ mô. Nó được giải thích một cách đúng đắn bằng mô hình các vòng có dòng điện ở thang vi mô.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ MÔMEN TỪ

• Mômen từ của một vòng có dòng điện I chạy qua và được xác định bởi đường cong kín Γ của nó, định hướng mặt $\vec{S}$, bằng :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\vec{S}$$

• Trong trường hợp một vòng dây tròn :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\pi a^2\vec{n}$$

• Mômen từ có đặc tính như một vectơ trục

■ TRƯỜNG LƯỠNG CỰC TỪ

• Ở những điểm rất xa vòng có dòng điện, từ trường của vòng tiến tới từ trường của một lưỡng cực từ có mômen $\overrightarrow{\mathcal{M}}$

• Trường tĩnh điện của một lưỡng cực $\vec{p} = p.\vec{e}_z$ và trường từ tĩnh của một lưỡng cực $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ có cùng một đặc tính ở khoảng cách lớn $r >> a$.

• Biểu thức của từ trường của lưỡng cực $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ trong tọa độ cầu trục $(O, \overrightarrow{\mathcal{M}})$ là :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2.\mathcal{M}\cos\theta\,\vec{e}_r + \mathcal{M}\sin\theta\,\vec{e}_\theta}{r^3}$$

Vậy biểu thức thuần của nó là :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \overrightarrow{\mathcal{M}}}{r^3}\right)$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP BÀI GIẢNG

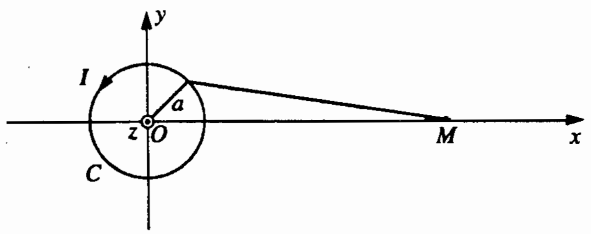
1 Mô hình êlectrôn cổ điển

Mômen từ nội tại của một êlectrôn, liên kết với "spin" của nó, về giá trị tuyệt đối bằng $\mathcal{M} = \mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$ (μ_B là manhêton BOHR). Giả sử (đó là một mô hình...) êlectrôn có thể biểu diễn bằng một viên bi có bán kính $r_0 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$ tích điện đều theo thể tích, và quay xung quanh một trong các đường kính của nó với vận tốc góc ω đối với hệ quy chiếu tâm tỉ cự của nó.

1) Hãy tính mômen từ $\vec{\mathcal{M}}$ của electrôn này theo e, r_0 và theo vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$.

2) Biết rằng $\alpha = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 hc} \approx \dfrac{1}{137}$ (hằng số cấu trúc tinh tế), từ đó hãy suy ra biểu thức của vận tốc góc ω theo m_e, c, α và h, sau đó biểu thức của vận tốc của một điểm thuộc xích đạo. Hỏi ta nên có kết luận gì về một kết quả như thế ?

2 Từ trường tại một điểm trên mặt phẳng của một vòng dây



Một vòng dây tròn tâm O, bán kính a và có trục (Oz), có dòng cường độ I chạy qua. Một điểm chạy P của vòng dây có vị trí xác định bởi góc φ do vectơ $\overrightarrow{OP}$ hợp với trục quy chiếu (Ox). Hãy biểu thị dưới dạng tích phân, từ trường tạo ra tại một điểm M của trục (Ox) rất xa vòng dây $\left(\dfrac{x}{a} >> 1\right)$.

Hãy thực hiện một phép khai triển có giới hạn theo $u = \dfrac{a}{x}$ của tích phân và thu được phần chính của trường $\vec{B}(M)$. Hãy kiểm tra xem trường này có đúng là trường tạo ra bởi lưỡng cực từ tại cũng điểm đó không ?

3 Từ trường trong mặt phẳng của một đĩa quay

Một đĩa dẫn có tâm O và có bán kính R quay với vận tốc góc không đổi xung quanh trục (Oz) của nó. Đĩa mang một điện tích toàn phần q được phân bố với mật độ điện mặt toàn phần (kể cả hai mặt) :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}}$$

trong đó $r = OP$ là khoảng cách từ tâm tới một điểm P của đĩa.

1) Hãy tìm giá trị của σ_0 theo q và R.

2) Tìm biểu thức của từ trường tạo ra bởi một phân bố như thế tại một điểm M nằm trong mặt phẳng của đĩa và giả sử rất xa đĩa $r = OM >> R$.

4 Đường sức trường của một vòng dây tròn

Cho một vòng dây tròn bán kính R và có trục (Ox), có dòng cường độ I chạy qua. Các đường sức trường nằm trong mặt phẳng (xOy) và đi qua mặt phẳng của vòng dây ở khoảng cách $r_1 = 0{,}4R$ tới trục (Ox), cắt lại trục (Oy) ở khoảng cách $r_2 = 5{,}9R$ tới trục (Ox). Hãy giải thích tốt nhất có thể được kết quả này.

Nhớ lại rằng trong mặt phẳng của vòng dây lân cận trục, từ trường có biểu thức gần đúng (khai triển có giới hạn của trường ở bậc 2) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\vec{e}_z$$

5 Dãy lưỡng cực từ theo đơn vị dài

Một dãy các lưỡng cực từ theo đơn vị dài được phân bố trên trục (Ox) của một hệ quy chiếu trực chuẩn $(O$: $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z)$ với một mật độ đều $\mathcal{M}$: một phần tử chiều dài dx của dãy có đặc tính như một lưỡng cực từ có mômen :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}dx\vec{e}_x$$

1) **a)** Trước tiên, từ trường tạo ra bởi phân bố trên tại một điểm bất kì trong không gian có phương nào ? Chứng tỏ rằng chỉ cần xác định trường này trên trục (Oy) (chẳng hạn).

b) Bằng một phép tính trực tiếp, hãy xác nhận rằng trường này bằng không

2) Có thể kết luận gì về kết quả này, liên quan đến từ trường tạo ra bởi một ống dây tròn, dài vô tận, tại một điểm ở bên ngoài, giả sử rất xa trục của ống dây ? Từ đó suy ra từ trường tạo ra bởi một ống dây dài vô tận tại mọi điểm ở trong ống dây.

6 Đo mômen lưỡng cực từ của một nam châm

Cho một nam châm con có mômen từ có chuẩn $\mathcal{M}$ chưa biết. Người ta có một kim nam châm chuyển động không ma sát xung quanh một trục thẳng đứng. Khi có cân bằng, kim này được định hướng theo chiều của thành phần nằm ngang của trường mà kim nam châm chịu tác dụng (x. BT9). Làm thế nào để có thể đo được mômen $\mathcal{M}$ của nam châm tại một nơi mà thành phần nằm ngang B_H của từ trường trái đất đã biết ? Hãy xác định báo cáo thực nghiệm cho trường hợp của một nam châm con có cùng mômen từ với một cuộn dây có bán kính trung bình R = 50cm, mang N = 10 vòng dây, mỗi vòng có một dòng điện cường độ I = 2A chạy qua, biết rằng $B_H = 2.10^{-5}T$.

ĐỂ TIẾN XA HƠN

7 Vĩ độ địa lí và độ từ khuynh của từ trường trái đất

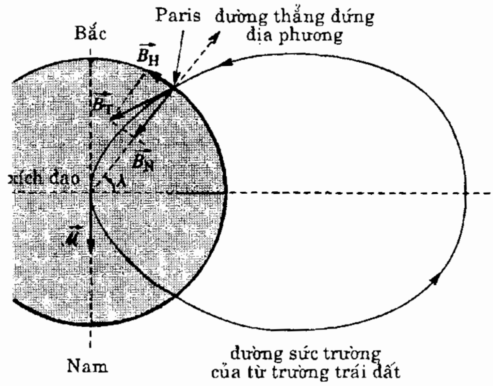
Trường địa từ $\vec{B}_T$ (trường mà nguồn là Quả đất) được đặc trưng tại mọi nơi bởi chuẩn của nó, độ từ thiên D của nó (góc hợp bởi thành phần nằm ngang của $\vec{B}_T$ với cực Bắc địa dư) và độ từ khuynh của nó (góc hợp bởi $\vec{B}_T$ với mặt phẳng nằm ngang). Bài tập này giới thiệu một sự tiếp cận đầu tiên rất đơn giản của địa từ học, đặc biệt trong đó người ta giả sử độ từ thiên bằng không tại mọi điểm.

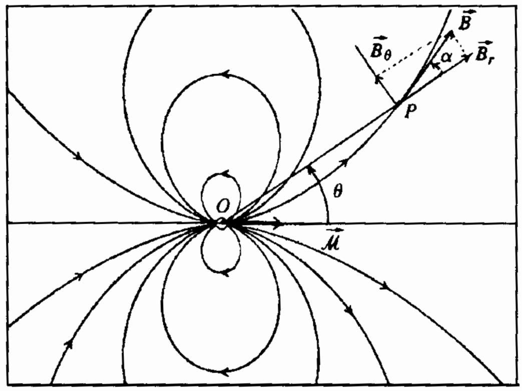
1) Một lưỡng cực từ có mômen $\vec{\mathcal{M}}$, đặt tại O, tạo ra tại mọi điểm P của không gian một từ trường $\vec{B}(P)$. Ta sử dụng các tọa độ cầu của điểm P : ||OP|| = r và $\theta = (\vec{\mathcal{M}}, \overrightarrow{OP})$

a) Hãy nhớ lại biểu thức của $\vec{B}(P)$. Vẽ một vài đường sức trường

b) Đặt $\alpha = (\overrightarrow{OP}, \vec{B}(P))$: hỏi hệ thức đơn giản nào liên kết α và θ ?

2) Giả sử từ trường trái đất là do một lưỡng cực từ trùng với trục quay của trái đất mà có, hỏi hệ thức nào sẽ liên kết vĩ độ λ của một nơi với độ từ khuynh của trường $\vec{B}_T$ tại nơi đó ?

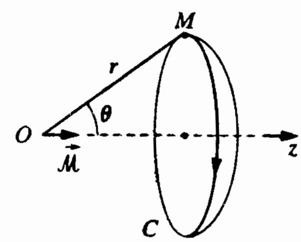




8 Đường sức trường và từ trường tạo ra bởi một lưỡng cực từ

Cho một lưỡng cực từ có mômen $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ đặt tại O. Ta xác định vị trí của một điểm M bất kì bằng các tọa độ cầu của nó, có tâm O và trục (Oz):

r, θ và φ.



Trong một nửa - mặt phẳng kinh tuyến (φ = cte), phương trình của một đường sức trường đã cho có dạng $r = A\sin^2\theta$.

1) Từ đó suy ra rằng thông lượng của từ trường tạo ra bởi lưỡng cực trên qua một mặt tựa trên một vòng tròn $\mathscr{C}$ trục (Oz), nhìn từ điểm O dưới góc θ, có dạng:

$$\Phi = f\left(\frac{\sin^2\theta}{r}\right)$$

Chứng tỏ rằng sự nghiên cứu thông lượng của trường $\vec{B}$ của một vòng dây tròn có tâm ở O và có trục (Oz), gửi qua một vòng tròn $\mathscr{C}$ có cùng trục (Oz) ở rất xa vòng dây, gợi ý rằng :

$$\Phi = cte\left(\frac{\sin^2\theta}{r}\right)$$

Ta sẽ thực hiện giả thiết này ở phần tiếp sau. Hãy xác định giá trị của hằng số nhân

2) Bằng cách lựa chọn một cách đúng đắn mặt tựa trên $\mathscr{C}$, hãy tính thông lượng Φ của từ trường của lưỡng cực gửi qua $\mathscr{C}$ dưới dạng một tích phân trong đó chỉ can thiệp duy nhất vào thành phần xuyên tâm của trường $\vec{B}$. Dựa vào kết quả trên đây hãy kết luận rằng thành phần xuyên tâm B_r này có dạng $B_r = 2B_0\dfrac{\cos\theta}{r^3}$, B_o là một hằng số phải nói rõ.

3) Bằng một lập luận tương đương, từ trên hãy suy ra biểu thức của thành phần trực giao xuyên tâm B_θ của trường tạo ra bởi lưỡng cực.

9 Đo thành phần nằm ngang của từ trường trái đất

Một nam châm con hay một kim nam châm được coi như một lưỡng cực từ có mômen $\vec{\mathscr{M}}$ (gắn chắc vào nam châm), khi đặt trong một từ trường đều $\vec{B}$, sẽ chịu một ngẫu lực có mômen $\vec{\Gamma} = \vec{\mathscr{M}} \wedge \vec{B}$

Biểu thức này có thể được tổng quát hóa cho mômen của các lực tại điểm ở đó đặt nam châm, khi từ trường là không đều.

Người ta muốn đo chuẩn của thành phần nằm ngang $\vec{B}_H$ của từ trường trái đất tại một nơi. Tại Paris B_H có giá trị vào cỡ $2.10^{-5}T$. Muốn thế, người ta bố trí một kim nam châm con đặt trên một trục đứng, do vậy kim chuyển động không ma sát xung quanh một trục thẳng đứng. Kim nam châm này được đặt tại tâm O của một cuộn dây phẳng gồm N vòng dây tròn mỗi vòng có bán kính R (người ta bỏ qua tiết diện của dây), nằm trong một mặt phẳng thẳng đứng, và được cung cấp bởi một dòng điện không đổi, có cường độ I điều chỉnh được.

Các chuyển động quay có thể có của kim được đo trên một vòng tròn chia độ, độ chia O tương ứng với vị trí : kim nằm trong mặt phẳng của cuộn dây.

1) Phương pháp la bàn tang

Biết rằng người ta có thể chọn mặt phẳng của cuộn dây, hãy nêu ra một bản báo cáo về phép đo thành phần $\vec{B}_H$ của từ trường trái đất.

Thí nghiệm đã được thực hiện với $\vec{B}_H$ nằm trong mặt phẳng của cuộn dây. Khi cường độ dòng điện đi từ giá trị không đến giá trị I thì kim nam châm quay một góc α. Từ đó hãy suy ra $\vec{B}_H$.

Dữ kiện : N = 5 ; R = 12cm ; I = 0,381A ; $\alpha = 20^o$

3) Phương pháp các dao động

Người ta dùng cũng những dụng cụ trên, nhưng lần này vị trí mốc của kim nam châm (hay vị trí cân bằng) là vị trí vuông góc với mặt phẳng của cuộn dây. Gọi B_C là chuẩn của từ trường tạo ra bởi mạch điện. Giả sử I sao cho $B_C < B_H$

Chứng tỏ rằng vị trí cân bằng của kim nam châm không bị thay đổi bởi sự có mặt của một dòng điện I như thế trong cuộn dây.

Chứng tỏ rằng chu kì của các dao động nhỏ của kim, trước đó đã bị kéo ra khỏi vị trí cân bằng, phụ thuộc vào chiều của dòng điện trong mạch. Gọi T và T' là các chu kì của các dao động chuẩn hình sin quan sát được đối với hai chiều (cần xác định), hãy chứng minh rằng $B_H = \dfrac{T^2 + T'^2}{T'^2 - T^2}B_C$

10 Các đường sức trường đi ra từ một ống dây rất dài

Các đường sức từ trường đi ra ở tiết diện có tâm O_2 của một ống dây tròn rất dài (chiều dài >> bán kính R), mang n vòng dây trên một đơn vị dài, có dòng cường độ I chạy qua, thực tế trùng với các nửa đường thẳng đi qua O_2. Người ta muốn từ đó tìm thấy một sự giải thích.

1) Cho một lưỡng cực từ $\vec{\mathscr{M}} = \mathscr{M}.\vec{e}_z$ đặt tại O. Bằng cách dùng các tọa độ cầu r, θ và φ trục (Oz), hãy xác nhận rằng từ trường tạo ra bởi một lưỡng cực như thế dẫn xuất từ thế vô hướng $V = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathscr{M}\cos\theta}{r^2}$

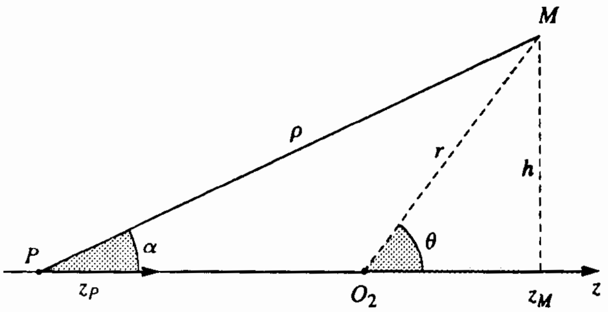
2) Trong mục đích tính từ trường tạo ra bởi ống dây lân cận điểm O_2, ta thừa nhận sẽ mắc một sai số không đáng kể nếu thực hiện các phép gần đúng sau đây :

- thay ống dây rất dài bằng một ống dây dài vô hạn theo các z âm.
- biểu thị ống dây vô hạn này bằng một phân bố đều các lưỡng cực từ dọc theo trục (Oz), tới điểm O_2, với

mật độ theo đơn vị dài m (sao cho $d\vec{\mathcal{M}} = mdz\vec{e}_z$ đối với một phần tử chiều dài dz).

a) Chứng tỏ rằng phải chọn $m = \pi R^2 nI$

b) Chứng tỏ rằng từ trường $\vec{B}(M)$ tại điểm M có tọa độ cực r và θ, trục (O_2z) và tâm O_2 dẫn xuất từ thế $V(M)$ thu được bởi $V(M) = \int dV$, dV là thế tạo ra tại M bởi lưỡng cực từ nguyên tố mdz_P đặt tại P có độ cao z_P của dây. Hãy thực hiện phép tính tường minh thế này bằng cách sử dụng góc α trên hình vẽ làm biến số tích phân.



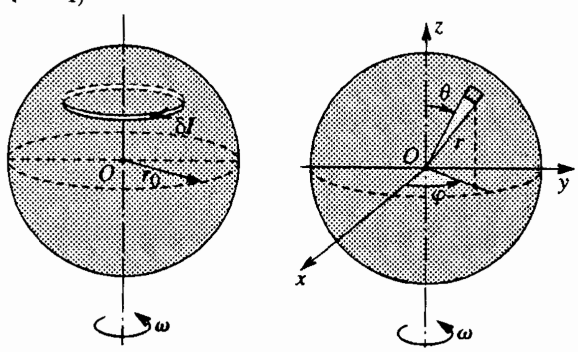
c) Hãy từ đó suy ra từ trường $\vec{B}(M)$ trong khuôn khổ của các phép gần đúng này. Khi đó các đường sức trường đi ra khỏi hệ như thế nào ?

3) Trường tìm thấy ở trên là xuyên tâm, và thông lượng của trường này gửi qua một quả cầu tâm O_2, bán kính r, không bằng không. Vậy ở đây hình như có điều nghịch lí.

Anh giải thích kết quả này thế nào ?

LỜI GIẢI

1 1)



Quả cầu tích điện trong thể tích (mật độ khối ρ) quay với vận tốc góc ω xung quanh (Oz) tương đương với một sự kết hợp các vòng dây có trục (Oz), có một dòng cường độ δI chạy qua. Vectơ mật độ dòng theo thể tích tại $M(r, \theta, \varphi)$ bằng $\vec{j}_v(M) = \rho\vec{V}(M) = \rho\omega r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$, từ đó đối với một ống dòng nguyên tố có tiết diện $dr.rd\theta.\delta I = \rho\omega r\sin\theta\, rdrd\theta$ và mômen lưỡng cực nguyên tố của "vòng dây" này là $\delta\vec{\mathcal{M}} = \rho\omega\pi r^4\sin^3\theta drd\theta\vec{e}_z$, nghĩa là :

$$\vec{\mathcal{M}} = \rho\omega\pi\vec{e}_z\int_{r=0}^{r=r_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^4\sin^3\theta drd\theta$$

$$= \frac{\rho\omega\pi r_0^5}{5}\frac{4}{3}\vec{e}_z = -\frac{e\omega r_0^2}{5}\vec{e}_z$$

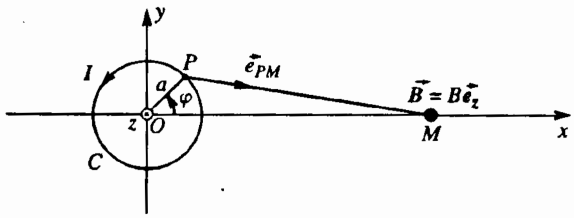
2) Biết rằng $|\vec{\mathcal{M}}| = \mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$, $r_0 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$

và $\alpha = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}$ *; từ đó ta suy ra*

$\omega = \dfrac{5\pi}{h\alpha^2}mc^2$ *và* $v_{max} = r_0\omega = \dfrac{5}{2\alpha}c$

$v_{max} >> c$ *: mô hình cổ điển này không thể tương ứng với điều xảy ra trong thực tế.*

2



$\vec{B}(M) = \oint_C \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}d\vec{P}\wedge\dfrac{\vec{PM}}{PM^3}$ *được mang bởi (Oz) (mặt phẳng (xOy) là một mặt phẳng đối xứng của dòng)*

$$\vec{OP} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} ;\ \vec{OM} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ;\ \vec{PM} = \begin{vmatrix} x - a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} ;\ d\vec{P} = \begin{vmatrix} -a\sin\varphi d\varphi \\ a\cos\varphi d\varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ta thu được :

$$d\vec{P}\wedge\frac{\vec{PM}}{PM^3} = \vec{e}_z\frac{a\cos\varphi(a\cos\varphi - x) + (a\sin\varphi)^2}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$$

rồi $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi x}\vec{e}_z F(u)$ *với* $F(u) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{u^2 - u\cos\varphi}{(1 - 2u\cos\varphi + u^2)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$

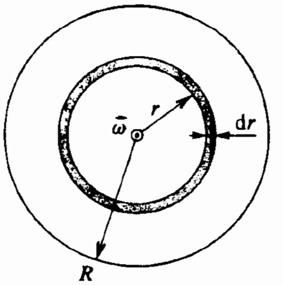
Bằng cách giới hạn ở các số hạng có u^2 *:*

$$F(u) = \int_0^{2\pi}[-u\cos\varphi + u^2(1 - 3\cos^2\varphi)]d\varphi = -\pi u^2$$

nghĩa là : $\vec{B}(M) = -\dfrac{\mu_0 I\pi a^2}{4\pi x^3}\vec{e}_z = -\dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi x^3}\vec{e}_z$

Điều này đáp ứng tốt với trường hợp của lưỡng cực $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$

3 1) Ta có $q = \iint \sigma \mathrm{d}S$



Điện tích mang bởi một vòng có bán kính r và bề dày dr bằng :

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

Hay là : $q = \int_0^R \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}} 2\pi r \mathrm{d}r$

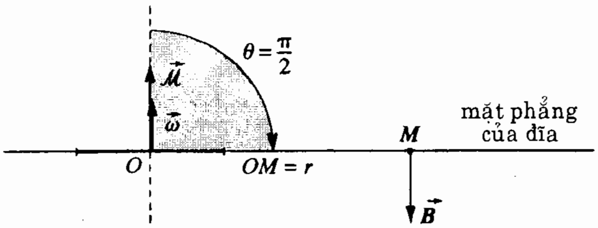
$$= 2\pi\sigma_0 R^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{1-u}} = 2\pi\sigma_0 R^2 \text{ và } \sigma_0 = \frac{q}{2\pi R^2}$$

2) *Cường độ* δI *chạy trong vòng trên bằng* $\dfrac{\delta q}{T}$ (T *là chu kì quay của đĩa)* : $\delta I = \dfrac{\delta q}{2\pi}\omega$. *Từ đó có mômen từ liên kết* $\delta\vec{M} = \dfrac{\delta q}{2\pi}\vec{\omega}\pi r^2$, *cũng như mômen từ của toàn bộ :*

$$\mathcal{M} = \int_0^R \frac{\pi\omega\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}} r^3 \mathrm{d}r \text{ hay : } \vec{\mathcal{M}} = \frac{q}{3}\vec{\omega}R^2$$

Chú ý :

$$\int_0^1 \frac{u\mathrm{d}u}{2\sqrt{1-u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3} \text{ nếu đặt } u = \sin^2\varphi$$



$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{4\pi r^3}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right).$$

4 $\vec{B}$ *là một vectơ có thông lượng bảo toàn : thông lượng của* $\vec{B}$ *gửi qua một mặt tựa trên một ống trường không phụ thuộc vào sự lựa chọn mặt này. Nó chỉ phụ thuộc vào ống trường đã chọn.*

Thông lượng Φ_1 *của* $\vec{B}$ *gửi qua vòng tròn đường kính AA' như vậy phải bằng thông lượng* Φ_2 *của* $\vec{B}$ *gửi qua diện tích của mặt phẳng của vòng dây trừ đi vòng tròn đường kính BB'*

- $\Phi_1 = \int_0^{r_1} B(r)2\pi r\mathrm{d}r = \int_0^{r_1} \dfrac{\mu_0 I}{2R}\left[1+\dfrac{3r^2}{4R^2}\right]2\pi r\mathrm{d}r$

$$= \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2R}\left\{\frac{r_1^2}{R^2}+\frac{3}{8}\frac{r_1^4}{R^4}\right\}, \text{ nếu đặt } \mathcal{M} = I\pi R^2$$

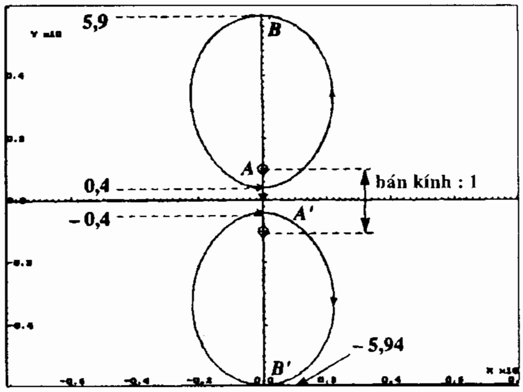
- $\Phi_2 = \int_{r_2}^{\infty} B(r)2\pi r\mathrm{d}r$. *Vì* $r > r_2 = 6R$, *nên ta hãy dùng biểu thức của* $\vec{B}$ *tạo ra bởi lưỡng cực* $\vec{\mathcal{M}} = I\pi R^2\vec{e}_z$

$$\Phi_2 = \int_{r_2}^{\infty} \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi r^3}2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2r_2}$$

Sự bảo toàn thông lượng $\Phi_1 = \Phi_2$ *cho :* $\dfrac{R}{r_2} = \dfrac{r_1^2}{R^2}+\dfrac{3}{8}\dfrac{r_1^4}{R^4}$

Nếu $r_1 = 0{,}4R$, *thì* $\dfrac{r_1^2}{R^2}+\dfrac{3}{8}\dfrac{r_1^4}{R^4} = 0{,}170$, *từ đó* $r_2 = 5{,}90R$

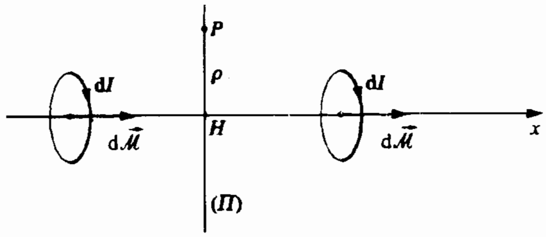
Thực tế, phần mềm cho 5,92 : sự sai lệch rất nhỏ hầu như do các biểu thức gần đúng của $\vec{B}$ *đã dùng trong tính toán và cũng do sự không chính xác về số liệu của bản vẽ đường sức trường.*



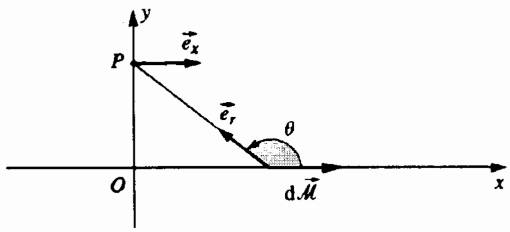
5 1) a) *Một lưỡng cực từ có thể được thay thế bằng một vòng dây có kích thước nhỏ. Mọi mặt phẳng* Π *vuông góc với trục (Ox) đi qua P là một mặt phẳng đối xứng của dòng. Hệ các dòng điện là bất biến đối với phép tịnh tiến hoặc quay theo trục (Ox), vậy :*

$$\vec{B}(P) = B(p)\vec{e}_x, \text{ với } p = HP.$$

Từ đó $\vec{B}(P)$ *chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới trục (Ox).*



b) *Ta hãy tính* $\mathrm{d}B_x$ *tại* P(OP = y), *do* $\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}}$ *nằm trên (Ox).*



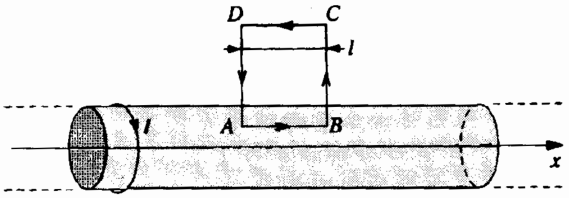
$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(3(\mathrm{d}\mathcal{M}\vec{e}_x.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \mathrm{d}\mathcal{M}\vec{e}_x}{r^3}\vec{e}_x = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi r^3}(3\cos^2\theta - 1)\mathrm{d}x.$$

Đặt $u=\cos\theta$ *; từ đó* $r=\frac{y}{\sin\theta}$ *;* $x=-\frac{y}{\tan\theta}$ *;* $dx=-\frac{y}{\sin^2\theta}d\theta$

và $\frac{(3\cos^2\theta-1)}{r^3}dx=(1-3u^2)du$

Khi đó : $B_x(P)=\frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\int_{-1}^{+1}(3u^2-1)du=\frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}[u^3-u]_{-1}^{+1}=0$

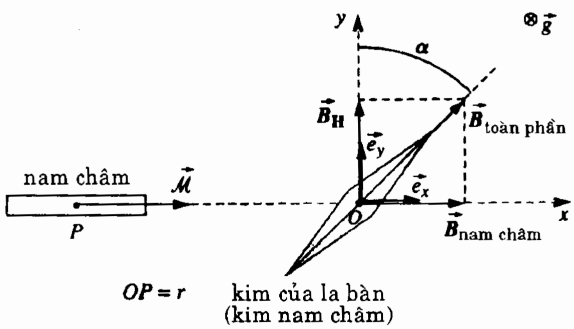
2) *Dây theo chiều dài ở trên có mômen từ có thể mô hình hóa thành một tập hợp các vòng dây có cùng bán kính R và có trục (Ox), được phân phối đều đặn, như vậy là một ống dây vô hạn. Tại một điểm ở xa trục của ống dây này, từ trường bằng không. Ta hãy nghiên cứu mối liên hệ giữa* $\mathcal{M}$ *và số vòng dây bán kính R, trên một đơn vị dài n, có dòng I chạy qua. Mômen từ của một vòng dây bằng* $I\pi R^2$, *ta có* $\mathcal{M}dx=ndxI\pi R^2$, *hay* $\mathcal{M}=nI\pi R^2$.



ống dây vô hạn

Ta hãy tìm lại $\vec{B}$ *ở bên trong ống dây, bằng sự áp dụng định lí AMPÈRE. Lưu số của* $\vec{B}$ *trên đường cong ABCD cho ta* $(\vec{B}//\vec{e}_x)$ $B_{int}l=\mu_0 nlI$, *hay* $B_{int}=\mu_0 nI$, *chính là kết quả mong đợi.*

6



Toàn bộ được bố trí như ở trên trong một mặt phẳng nằm ngang

$$\tan\alpha=\frac{B_{namchâm}}{B_H}=\frac{2\mu_0\mathcal{M}}{4\pi r^3 B_H}\text{, hay là : }\mathcal{M}=\frac{4\pi r^3 B_H}{2\mu_0}\tan\alpha$$

Sai số tương đối trên $\mathcal{M}$ *bằng :*

$$\frac{d\mathcal{M}}{\mathcal{M}}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}d\alpha=\frac{2d\alpha}{\sin 2\alpha}\text{ nhỏ nhất với }\alpha=\frac{\pi}{4}$$

Vậy ta phải chọn r để $\alpha=\frac{\pi}{4}$, *tức* $r=\left(\frac{2\mu_0\mathcal{M}}{4\pi B_H}\right)^{\frac{1}{3}}$

Áp dụng bằng số : $\mathcal{M}=N\pi R^2 I=15{,}7\,Am^2$ *từ đó cho r = 0,54m. điều này có thể thực hiện được dễ dàng.*

7

1) a) $\vec{B}(P)=B_r\vec{e}_r+B_\theta\vec{e}_\theta$, $B_r=\frac{2\mu_0\mathcal{M}}{4\pi r^3}\cos\theta$ và $B_\theta=\frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi r^3}\sin\theta$

b) $\tan\alpha=\frac{1}{2}\tan\theta$

2) *Dựa vào sự định hướng của* $\mathcal{M}(7{,}8.10^{22}\,Am^2)$, *ta thu được :*

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+I\text{ và }\theta=\frac{\pi}{2}+\lambda\text{, từ đó }\tan I=2\tan\lambda.$$

8

1) *Thông lượng của* $\vec{B}$ *gửi qua mọi mặt tựa trên một ống trường đã cho không phụ thuộc vào sự lựa chọn mặt này (*$\vec{B}$ *là một vectơ có thông lượng bảo toàn). Các ống trường có thể được xác định bởi một phương trình có dạng* Φ *= cte.*

Được sinh ra bởi các đường sức trường, phương trình của chúng do vậy cũng là $\frac{\sin^2\theta}{r}=cte$. *Từ đó ta suy ra* $\Phi=f\left(\frac{\sin^2\theta}{r}\right)$.

• *Xét một vòng dây tròn trục (Oz) có dòng cường độ I chạy qua. Thông lượng* Φ *của* $\vec{B}$ *gửi qua một vòng tròn* $\mathscr{C}$ *rất xa vòng dây, có bán kính a và có cùng trục (Oz) cho bởi*

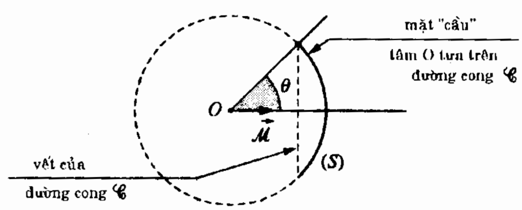
$$\Phi=\pi a^2\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\approx\frac{\mu_0 I}{2R}\pi a^2\frac{R^3}{z^3}=\frac{\mu_0}{2}(I\pi R^2)\frac{a^2}{z^3}$$

(từ trường ở trên trục của vòng dây $B=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$ *). Nghĩa là:*

$\Phi=\frac{\mu_0}{2}\mathcal{M}\frac{a^2}{z^3}$. *Biết rằng* $a=r\sin\theta$ *và* $z=r\cos\theta\approx r$, *ta thu được :*

$$\Phi=\frac{\mu_0}{2}\mathcal{M}\frac{\sin^2\theta}{r}$$

2) *Biết rằng* $\vec{B}=B_r\vec{e}_r+B_\theta\vec{e}_\theta$, *và ta muốn tính* B_r, *ta hãy lấy mặt tựa trên đường cong* $\mathscr{C}$ *là một chỏm cầu tâm O.*



Khi đó, ta thu được : $\Phi=\int_0^\theta 2\pi r\sin u B_r(r,u)rdu=\frac{\mu_0\mathcal{M}}{2}\frac{\sin^2\theta}{r}$

hay còn là :

$$\int_0^{\theta} \sin u B_r(r,u)\mathrm{d}u = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi}\frac{\sin^2\theta}{r^3}$$

Đạo hàm theo θ cho : $B_r(r,\theta)\sin\theta = \frac{2\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^3}$ *hay :*

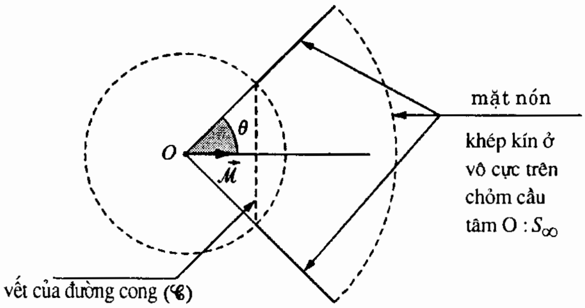
$$B_r(r,\theta) = \frac{2\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^3}$$

3) *Ta chỉ muốn can thiệp vào* B_θ .

Ta đã biết B_r *biến thiên theo* $\frac{1}{r^3}$, *vậy thông lượng của* $\vec{B}$ *gửi qua* S_∞ *bằng không. Thông lượng của* $\vec{B}$ *qua mặt nón cho bởi :*

$$\Phi = \int_r^{\infty} 2\pi u \sin\theta \mathrm{d}u B_\theta(u,\theta) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2}\frac{\sin^2\theta}{r}$$, *hay (θ là không đổi):*

$$\int_r^{\infty} uB_\theta(u,\theta)\mathrm{d}u = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$



Đạo hàm đối với r cho :

$$(rB_\theta(r,\theta))_{r=\infty} - rB_\theta(r,\theta) = -\frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}$$

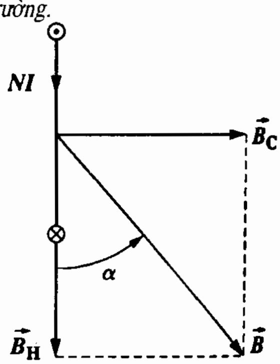
Từ trường biến thiên theo $\frac{1}{r^3}$, $(rB_\theta(r,\theta))_{r=\infty} = 0$ *nghĩa là :*

$$B_\theta(r,\theta) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^3}$$

9 $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$, *vậy kim nam châm được coi như một lưỡng cực, định hướng theo chiều của từ trường.*

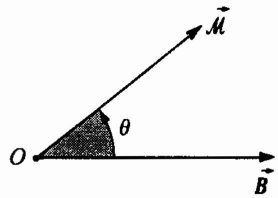
1) *Nếu không có một dòng điện nào chạy trong ống dây, thì kim nam châm định hướng theo chiều của* $\overrightarrow{B_H}$.

Nếu có dòng I qua, thì ống dây tạo ra một trường $\overrightarrow{B_C}$ *và kim định hướng theo phương của* $\vec{B} = \overrightarrow{B_H} + \overrightarrow{B_C}$.



Từ đó : $\tan\alpha = \frac{B_C}{B_H} = \frac{\mu_0 NI}{2RB_H}$, *hay :* $B_H = \frac{\mu_0 NI}{2R\tan\alpha}$.

Áp dụng bằng số : $B_H = 2{,}7.10^{-5}$ *T.*



2) *Áp dụng định lí về mômen động lượng cho kim nam châm và có mômen quán tính* J_0 *đối với một trục vuông góc với mặt phẳng hình vẽ đi qua O cho :*

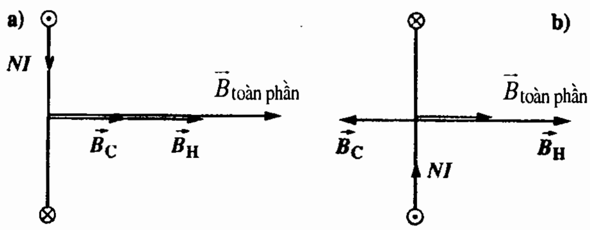
$$J_0\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\mathcal{M}B\sin\theta .$$

Đối với các góc nhỏ, dao động là điều hòa và có chu kì :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\mathcal{M}B}} .$$

Bằng cách xét hai sự định hướng của dòng điện trong ống dây, ta thu được (x. hình vẽ) :

- trường hợp a : $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}$, *với* $B = B_H + B_C$;
- trường hợp b : $T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B'}}$, *với* $B' = B_H - B_C$.



Từ đó $\frac{B_H + B_C}{B_H - B_C} = \frac{T'^2}{T^2}$, *tức là :* $B_H = B_C\frac{T'^2 + T^2}{T'^2 - T^2}$.

10 1) *Các thành phần của gradien trong tọa độ cầu là :*

$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$, *ta thu được :*

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \left| \begin{array}{l} +\dfrac{2\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\dfrac{\cos\theta}{r^3} \\ +\dfrac{\mu_0\mathcal{M}\sin\theta}{4\pi\ r^3} \\ 0 \end{array} \right. = \vec{B} .$$

Vậy $\vec{B}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{(M)} V(M)$, $V = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\cos\theta}{r^2}$.

2) a) *Mômen từ của một vòng dây bằng* $I\pi R^2$. *Trên một phần tử chiều dài dz, có ndz vòng dây, từ đó*

$$\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}} = nI\pi R^2 \mathrm{d}z\,\vec{e}_z = \mathrm{d}\mathcal{M}\vec{e}_z = \mathcal{M}\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_z .$$

b) $dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\mathcal{M}\cos\alpha}{\rho^2}$, từ đó $V(M) = \int_0^\theta \frac{\mu_0 d\mathcal{M}\cos\alpha}{4\pi\rho^2}$ vì :

$\vec{B}(M) = \int d\vec{B}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\int dV(M)$ *(toán tử građien là tuyến tính)*

$\rho = \frac{h}{\sin\theta}$; $z_p = z_M - \frac{h}{\tan\alpha}$; $dz_p = \frac{h}{\sin^2\alpha}d\alpha$, *từ đó :*

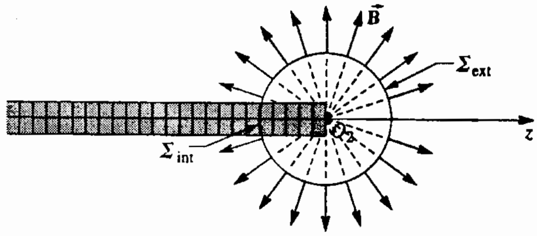
$$dV(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathcal{M}\frac{h}{\sin^2\alpha}d\alpha\frac{\sin^2\alpha}{h^2}\cos\alpha = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi\, h}d(\sin\alpha),$$

hay : $V(M) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi\, h}\sin\theta = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi\, r} = \frac{\mu_0 nI\pi\, R^2}{4\pi\, r}$.

c) *Từ đó* $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 nI\pi\, R^2}{4\pi\, r^2}\vec{e}_r$

Vậy các đường sức trường là các đường thẳng đi ra từ O_2.

3)



Cho một mặt kín tạo bởi một mặt cầu Σ_{ext} *(ở bên ngoài ống dây) có tâm* O_2*, có bán kính r, bổ sung bởi* Σ_{int} *(ở bên trong ống dây)* $(\Sigma_{\text{int}} << \Sigma_{ext})$.

Thông lượng ra của $\vec{B}$ *gửi qua mặt kín trên bằng* $\Phi = \Phi_{\Sigma_{ext}} + \Phi_{\Sigma_{\text{int}}}$, *với* $\Phi_{\Sigma_{ext}} = \mu_0 nI\pi R^2$ *và* $\Phi_{\Sigma_{\text{int}}} = -(\mu_0 nI)\pi R^2$, *vì* $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = +\mu_0 nI\vec{e}_z$ *và pháp tuyến với* Σ_{int} *ngược chiều với* $\vec{e}_z$.

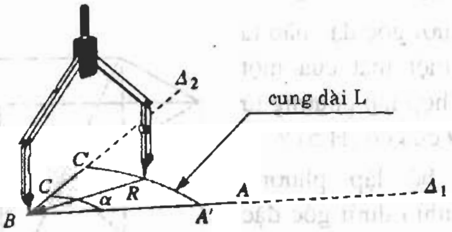
Từ đó $\Phi = 0$. *Thông lượng ra của* $\vec{B}$ *qua một mặt kín rõ ràng là bằng không.*

Phụ lục 1

Góc đặc

1 GÓC TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

1.1. Góc giữa hai đoạn thẳng



Hình 1. $\alpha = \dfrac{L}{R}$.

Cho hai đoạn thẳng [*BA*] và [*BC*]. Trong mặt phẳng chứa *A*, *B* và *C*, ta hãy vẽ một cung của vòng tròn tâm *B*, bán kính *R*, nối các phương đã cho bằng hai đoạn thẳng. Khi đó, ta kí hiệu *L* là chiều dài của cung tròn *A'C'* đã vẽ được (*hình* 1).

Góc α giữa *AB* và *BC* được xác định độc lập với giá trị *R* bởi :

$$\alpha = \frac{L}{R} \text{ (chú ý rằng } \alpha = L \text{ nếu } R = 1).$$

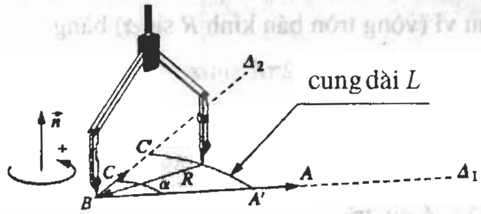
1.2. Đơn vị đo một góc

Một góc là một số không có thứ nguyên. Tuy nhiên, người ta thường dùng radian để đo góc (ký hiệu : rad). α là góc dưới đó, từ điểm *B*, ta nhìn một phần mặt phẳng có ranh giới xác định bởi các đường thẳng Δ_1 và Δ_2, kéo dài của các đoạn thẳng [*BA*] và [*BC*].

1.3. Góc vạch ra bởi một đường cong

Đó cũng là góc dưới đó ta nhìn một đường cong vẽ trong mặt phẳng (*ABC*) và nối các đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Cung tròn $\overset{\frown}{A'C'}$ là một ví dụ (*hình* 1).

1.4. Góc đại số



Hình 2.

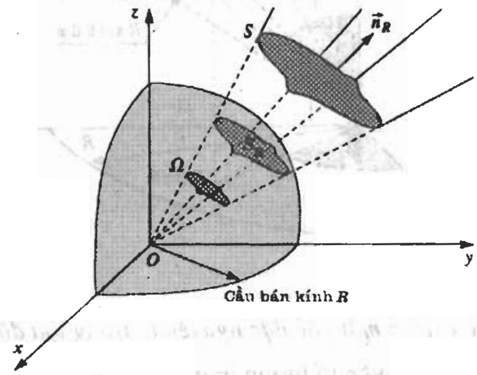
Cho hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Nếu ta quyết định một định hướng cho mặt phẳng bằng một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ (*hình* 2), thì góc $\alpha = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ trở thành một số đo đại số.

Đối với ví dụ đang xem xét, cung tròn $\overset{\frown}{A'C'}$ được vẽ theo chiều lượng giác xác định bởi vectơ $\vec{n}$: vậy góc α là dương.

2 GÓC ĐẶC TRONG HÌNH HỌC BA CHIỀU

2.1. Định nghĩa góc đặc

Bây giờ ta hãy xét một mặt *S* mà ta quan sát từ một điểm *O* và tìm cách định nghĩa một "góc không gian" dưới đó *S* được nhìn từ điểm *O*.



Hình 3. $\Omega = \dfrac{S_R}{R^2}$.

Để khái quát hóa tiếp cận ở trên cho ba chiều, ta hãy vẽ trên một mặt cầu bán kính *R*, phần S_R của mặt cầu này, nhìn trong cùng phần không gian với mặt *S* (*hình* 3).

Góc đặc Ω được xác định độc lập với giá trị của *R* bởi:

$$\Omega = \frac{S_R}{R^2}$$

Chú ý rằng $\Omega = S_R$ nếu $R = 1$.

Góc đặc Ω bằng diện tích chắn trên một mặt cầu bán kính *R* chia cho R^2.

2.2. Đơn vị đo góc đặc

Một góc đặc là một số không có thứ nguyên. Tuy nhiên, người ta thường dùng stêrađian (kí hiệu : *sr*) để đo góc đặc.

Ω là góc đặc dưới đó ta nhìn một phần không gian từ điểm O.

2.3. Góc đặc đại số

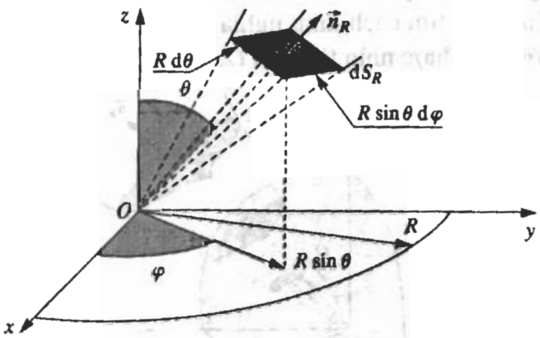
Ta nên định hướng mặt cầu bằng một pháp tuyến đi ra $\vec{n}_R$ như được chỉ rõ trên *hình* 3.

Khi đó, góc đặc dưới đó ta nhìn một mặt S đã được định hướng, có một ý nghĩa đại số. Như vậy, góc đặc Ω là dương, sự định hướng của S đã được chỉ rõ bởi sự lựa chọn của vectơ pháp tuyến $\vec{n}_R$ tại một trong các điểm của S.

2.4. Góc đặc nguyên tố

Khi dùng các tọa độ cầu trục (Oz), thì một phần tử diện tích nguyên tố cắt trên mặt cầu tâm O, bán kính R, bằng :

$$dS_R = R\,d\theta . R\sin\theta\, d\varphi$$



Hình 4. *Tính một góc đặc nguyên tố trong tọa độ cầu.*

Góc đặc nguyên tố tương ứng bằng :

$$d\Omega = \frac{dS_R}{R^2}$$

hay là : $\mathbf{d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$.

2.5. Góc đặc của toàn không gian

Dưới góc đặc nào ta nhìn một quả cầu từ tâm của nó ? từ một điểm bên trong quả cầu ?

Như thế có nghĩa phải tính góc đặc dưới đó ta nhìn toàn không gian từ một điểm bất kì nào ở bên trong quả cầu. Diện tích của một mặt cầu bán kính R bằng $4\pi R^2$, góc đặc yêu cầu bằng 4πsr.

Ta hãy tìm lại kết quả này bằng toán học. Để vạch ra toàn bộ mặt cầu, các góc θ và φ phải lần lượt vạch ra các khoảng $[0, \pi]$ và $[0 ; 2\pi]$.

Góc đặc dưới đó mặt cầu được nhìn từ tâm của nó do vậy bằng :

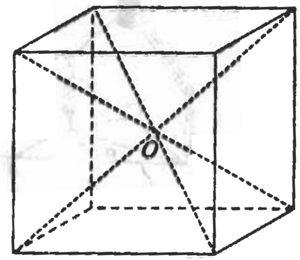
$$\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi .$$

Góc đặc dưới đó mặt cầu được nhìn từ một điểm bất kỳ bên trong quả cầu bằng 4πsr.

2.6. Góc đặc dưới đó ta nhìn một mặt của một lập phương

Hỏi dưới góc đặc nào ta nhìn một mặt của một chiếc hộp lập phương từ tâm O của nó (H.5) ?

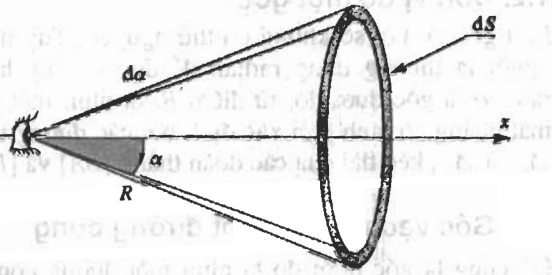
Toàn bộ lập phương được nhìn dưới góc đặc bằng 4πsr. Cả sáu mặt, từ tâm của lập phương, đều được nhìn dưới góc đặc như nhau. Vậy mỗi mặt đều được nhìn dưới góc đặc $\frac{2}{3}\pi$ *sr*.



Hình 5. *Sáu mặt của lập phương được nhìn từ điểm O dưới cùng một góc đặc.*

2.7. Góc đặc giới hạn bởi một mặt nón

Từ đỉnh chung của hai mặt nón, hỏi dưới góc đặc nào ta nhìn khoảng không gian nằm giữa hai mặt nón có nửa góc ở đỉnh bằng α và $\alpha + d\alpha$ (H.6) ?



Hình 6.

Ta hãy tính diện tích dS chắn trên một mặt cầu bán kính R bởi không gian giữa hai hình nón có góc ở đỉnh α và $\alpha + d\alpha$: đó là một vành có bề rộng $R\,d\alpha$, mà chu vi (vòng tròn bán kính $R\sin\alpha$) bằng :

$$2\pi R\sin\alpha$$

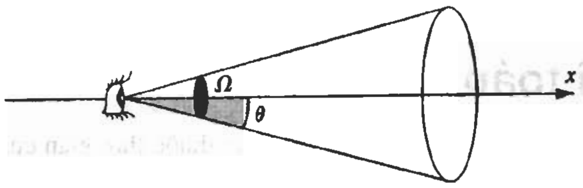
Diện tích bằng :

$$dS_R = 2\pi R\sin\alpha\, R d\alpha$$

Góc đặc có giá trị :

$$d\Omega = 2\pi\sin\alpha\, d\alpha$$

Dưới góc đặc nào ta nhìn bên trong một hình nón có nửa góc ở đỉnh bằng θ, từ đỉnh của nó (*h*.7).



Hình 7. *Góc đặc giới hạn bởi một hình nón có nửa góc ở đỉnh θ bằng $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$.*

Ta chỉ cần tích phân công thức ở trên đối với α :

$$\Omega = \int_0^{\theta} 2\pi \sin\alpha \, d\alpha = 2\pi(1 - \cos\theta)$$

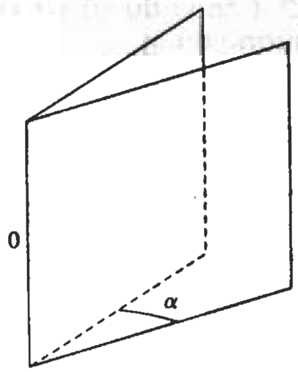
Chú ý rằng diện tích của một chỏm cầu giới hạn bởi một hình nón có nửa góc ở đỉnh θ trên một mặt cầu bán kính R do vậy bằng $2\pi R^2(1-\cos\theta)$. Đối với $\theta = \pi$, ta tìm lại được diện tích của mặt cầu và do vậy góc đặc của toàn không gian bằng 4π.

2.8. Góc đặc giới hạn bởi một nhị diện

Hỏi dưới góc đặc nào ta nhìn một nhị diện có góc α, từ một điểm trên đường cạnh của nó (*hình* 8).

Cho hai mặt phẳng hợp với nhau một góc α. Góc đặc của toàn không gian bằng 4π, tương ứng với giá trị của α bằng 2π. Góc đặc có giữa hai mặt phẳng hợp với nhau một góc α do vậy bằng :

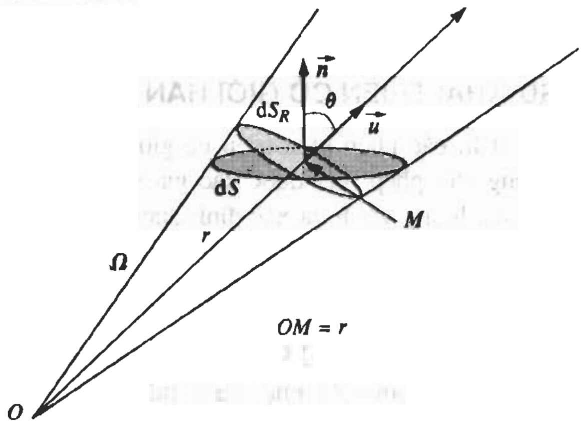
$$4\pi \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha .$$



Hình 8. *Góc đặc giới hạn bởi hai mặt phẳng này bằng 2α.*

2.9. Góc đặc nguyên tố đại số

Hỏi dưới góc đặc nào ta nhìn từ điểm O diện tích nguyên tố dS, nằm cách O một khoảng r, và định hướng bởi pháp tuyến $\vec{n}$ của nó, pháp tuyến này hợp với vectơ xuyên tâm $\vec{u}$ một góc θ (*hình* 9) ?



Hình 9.

Kí hiệu dS_R là diện tích nguyên tố thu được bởi phép chiếu vuông góc của dS trên mặt cầu tâm O, bán kính r.

Khi đó, góc đặc dưới đó ta nhìn dS bằng :

$$d\Omega = \frac{dS_R}{r^2}$$

Mà $dS_R = dS.\cos\theta$, nên $d\Omega = \dfrac{dS.\cos\theta}{r^2}$.

Góc đặc đại số $d\Omega$ dưới đó dS được nhìn từ điểm O được xác định bởi :

$$d\Omega = \frac{\vec{n}.\vec{u}dS}{r^2}$$

Phụ lục 2

Nhắc lại toán

1 SỰ KHAI TRIỂN CÓ GIỚI HẠN

Trong vật lí, các phép khai triển có giới hạn rất có lợi: chúng cho phép biết được các giá trị gần đúng của các đại lượng vật lí và xác định được sự sai lệch tương đối tồn tại giữa các giá trị này với giá trị thực của đại lượng ...

1.1. Sự sai lệch tương đối

Giả sử một đại lượng G, phụ thuộc biến số x, được viết dưới dạng sau :

$$G(x) = G_0(1 + \varepsilon(x)), \text{ với } |\varepsilon(x)| << 1.$$

G_0 biểu thị giá trị gần đúng của đại lượng, là giá trị thu được khi $\varepsilon = 0$.

Độ sai lệch tương đối tồn tại giữa $G(x)$ và G_0 được xác định bởi :

$$\frac{\Delta G}{G_0} = \frac{G(x) - G_0}{G_0} = \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x)$ biểu thị độ sai lệch tương đối giữa $G(x)$ và G_0.

1.2. Lợi ích của một phép khai triển có giới hạn, khái niệm về bậc

x là một biến số không thứ nguyên hay biến rút gọn ($x << 1$)	
G_0	Số hạng bậc 0
$G_0 + Ax$	Khai triển có giới hạn bậc 1
$G_0 + Ax + Bx^2$	Khai triển có giới hạn bậc 2
$G_0 + Ax + Bx^2 + Cx^3$	Khai triển có giới hạn bậc 3
$G_0 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$	Khai triển có giới hạn bậc 4

Hình 1.

Cho x là một biến số không có thứ nguyên : ví dụ x có thể biểu thị tỉ số $\frac{t}{\tau_c}$, trong đó t là một thời gian và τ_c là một đại lượng đặc trưng thuộc thời gian của bài toán (RC, $\frac{R}{L}, \frac{l}{l_c}$) trong đó l là một chiều dài và l_c, chiều dài đặc trưng của bài toán.

Một cách tổng quát, trong vật lí, ta thường gặp bài toán nghiên cứu đặc tính của một hệ khi $x << 1$ ($t << \tau_c$) hay $x \gg 1$ ($t >> \tau_c$) nghĩa là $\frac{1}{x} = y << 1$.

Như vậy, ta thường phải nghiên cứu sự biến đổi của một đại lượng lân cận $x = 0$ hoặc $y = 0$

Giả sử một đại lượng $G(x)$ được viết dưới dạng :

$$G(x) = G_0 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + ...$$

x là một đại lượng vật lí không có thứ nguyên .

Phép khai triển này là một phép khai triển có giới hạn của $G(x)$ lân cận $x = 0$.

1.3. Các ví dụ về sự khai triển có giới hạn thường dùng

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
- $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3}x^3 + ...$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$
- $\ln(1 + x) = x + ...$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + ...$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + ...$

2 TOÁN TỬ GRAĐIEN

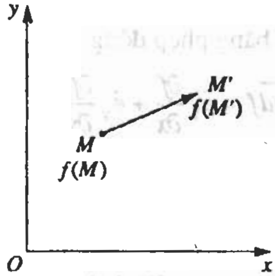
2.1. Định nghĩa

Cho một hàm số vô hướng f mà các giá trị phụ thuộc các tọa độ không gian $f(M)$ (trường vô hướng).

Ta lấy hai điểm gần nhau M và M' và đặt :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{M}$$

Ta hãy quan tâm tới đại lượng $df = f(M') - f(M)$ (*hình* 2).



Hình 2. $\overrightarrow{MN'} = d\vec{M}$.

Toán tử gradien (trường vectơ) được xác định bởi :

$df = f(M') - f(M) = \overrightarrow{\text{grad}f}.d\vec{M}$ với $d\vec{M} = \overrightarrow{MM'}$,

Gradien là một toán tử áp dụng cho một vô hướng và kết quả là một vectơ

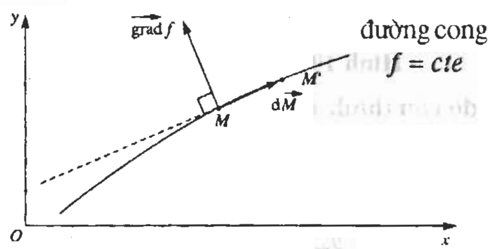
2.2. Các tính chất

■ Đối với hai điểm gần nhau M và M' ($d\vec{M} = \overrightarrow{MM'}$) nằm trên một mặt f = cte.

$$f(M') = f(M), \text{ từ đó } df = 0$$

Áp dụng định nghĩa của toán tử gradien vào đây, ta thu được $O = \overrightarrow{grad f}.\overrightarrow{dM}$ nghĩa là $\overrightarrow{\text{gradf}}$ vuông góc với $\overrightarrow{dM}$, vậy vuông góc với mặt f = cte. (hình 3)

$\overrightarrow{\text{gradf}}$ vuông góc với các mặt $f(M)$ = cte.



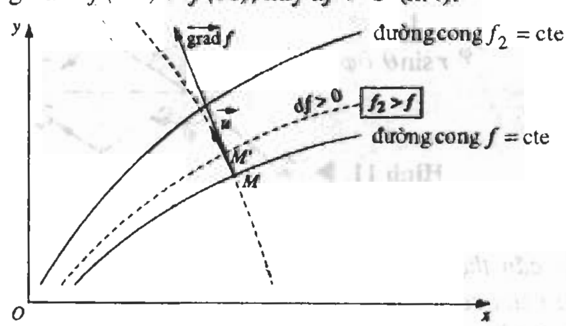
Hình 3. $\overrightarrow{\text{gradf}}$ *vuông góc với mặt f = cte.*

■ Cho một điểm M trên mặt f = *cte.*

Ta hãy định hướng pháp tuyến với mặt này tại M theo chiều của f tăng (vectơ đơn vị $\vec{u}$). Xét hai điểm M và M' gần nhau trên pháp tuyến này sao cho :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dM} = dM\vec{u}, \text{ với } dM > 0$$

nghĩa là $f(M') > f(M)$, hay $df > O$ (h.4).



Hình 4. $\overrightarrow{\text{grad}}f$ *được định hướng theo chiều của hàm f tăng.*

Ta biết rằng vectơ gradien là cộng tuyến với $\vec{u}$. Đặt $\overrightarrow{\text{grad}f} = A\vec{u}$.

Áp dụng định nghĩa của toán tử gradien ta thu được :

$$\overrightarrow{\text{grad}f}.\overrightarrow{dM} = A\vec{u}.(dM\vec{u}) = A.dM > 0$$

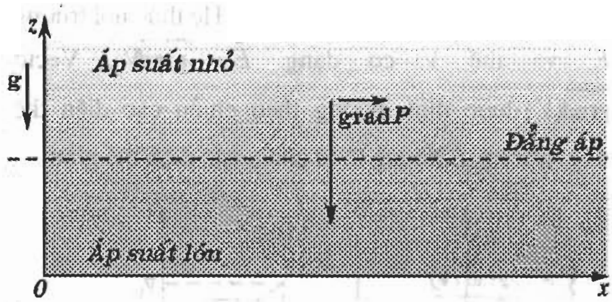
với $dM > 0$; vậy $A > 0$, từ đó $\overrightarrow{\text{grad}f}.\vec{u} > 0$

$\overrightarrow{\text{gradf}}$ được định hướng theo chiều của hàm số f tăng

2.3. Trong vật lí, ta gặp toán tử gradien ở đâu ?

■ **Gradien áp suất**

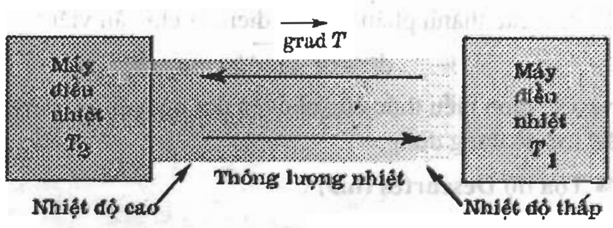
Ta hãy xét một chất lưu nằm cân bằng trong trọng trường. Với các độ cao nhỏ, thì áp suất lớn hơn. Gradien áp suất hướng xuống phía dưới (*hình* 5).



Hình 5.

■ **Gradien nhiệt độ**

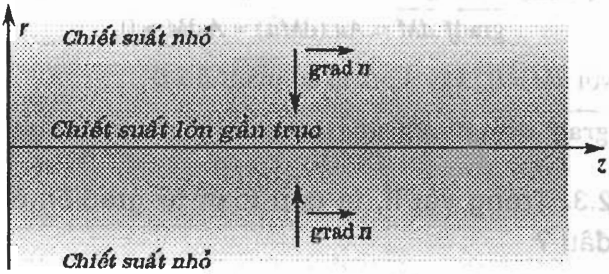
Ta hãy xét một môi trường đồng tính giữa hai máy điều nhiệt ở các nhiệt độ T_1 và T_2 với $T_2 > T_1$. Trong chế độ ổn định, các nhiệt độ sẽ càng cao nếu ta ở càng gần máy điều nhiệt có nhiệt độ T_2. Gradien nhiệt độ hướng từ T_1 sang T_2. Thông lượng nhiệt hướng theo chiều ngược lại (*hình* 6).



Hình 6 . $T_2 > T_1$

■ **Gradien chiết suất**

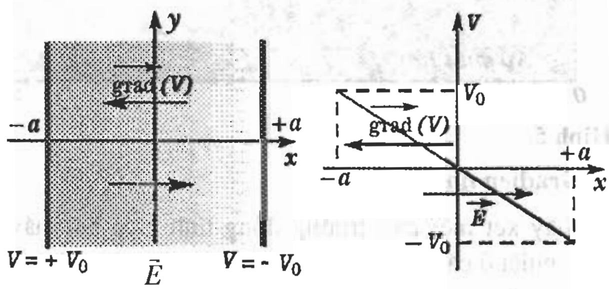
Ta hãy xét một sợi quang hình trụ mà chiết suất là hàm số của khoảng cách r từ điểm đang xét tới trục của sợi quang. Để một tia quang được bền vững (ổn định) trong hình thái này, thì chiết suất phải càng cao nếu càng ở gần trục của sợi quang. Như vậy gradien chiết suất phải hướng về phía trục (*hình* 7).



Hình 7.

■ Gradien thế

Xét một điện trường $\vec{E}$ dẫn xuất từ một thế V, vậy đó là trường có bản chất tĩnh điện. Hệ thức nối trường $\vec{E}$ và thế V có dạng $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$. Vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ được định hướng theo chiều các điện thế tăng, trường $\vec{E}$ hướng theo chiều các điện thế giảm.



Hình 8. Ví dụ về gradien điện thế ($V_0 > 0$)

3 BIỂU THỨC CỦA GRADIEN

Để tìm các thành phần của gradien, ta chỉ cần viết :

$$df = d\vec{r}.\overrightarrow{\text{grad}}f$$

và xác định biểu thức của chuyển dời nguyên tố trong hệ tọa độ đang dùng.

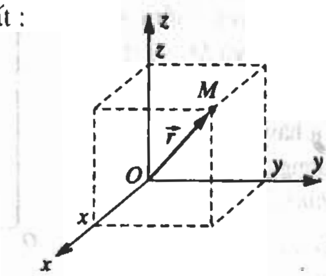
■ Tọa độ Descartes (h.9) :

Ta viết :

$$\begin{cases} df(x,y;z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz \\ d\vec{r} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z \\ df = d\vec{r}.\overrightarrow{\text{grad}f} = dx.(\overrightarrow{\text{grad}f})_x + dy.(\overrightarrow{\text{grad}f})_y \\ \qquad + dz.(\overrightarrow{\text{grad}f})_z \end{cases}$$

vậy bằng phép đồng nhất :

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$



Hình 9. ▶

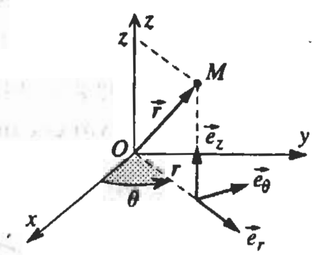
■ Tọa độ trụ (hình 10)

Ta viết :

$$\begin{cases} df(r,\theta,z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} dr + \left(\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} d\theta + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} dz \\ d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta + dz.\vec{e}_z \\ df = d\vec{r}.\overrightarrow{\text{grad}f} = dr.(\overrightarrow{\text{grad}f})_r + rd\theta.(\overrightarrow{\text{grad}f})_\theta \\ \qquad + dz.(\overrightarrow{\text{grad}f})_z. \end{cases}$$

hay :

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$



Hình 10. ▶

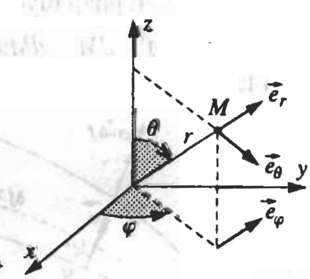
■ Tọa độ cầu (hình 11)

Ta viết :

$$\begin{cases} df(r,\theta,\varphi) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} dr + \left(\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} d\theta + \left(\dfrac{\partial f}{d\varphi}\right)_{r,\theta} d\varphi \\ d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi.\vec{e}_\varphi \\ df = d\vec{r}.\overrightarrow{\text{grad}f} = dr.(\overrightarrow{\text{grad}f})_r + rd\theta.(\overrightarrow{\text{grad}f})_\theta \\ \qquad + r\sin\theta d\varphi.(\overrightarrow{\text{grad}f})_\varphi \end{cases}$$

hay

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$



Hình 11. ▶

<u>*Chú ý :*</u>

*Hãy cẩn thận với các ý nghĩa của các góc và các vectơ của cơ sở vectơ, chúng khác nhau trong **tọa độ trụ và cầu**.*

4 CÁC BIỂU DIỄN KHÁC NHAU CỦA MỘT THẾ

Ta hãy lập luận trên một ví dụ.

Cho hai điệntích *-q* ở *A* ($x = -a, y = 0, z = 0$) và *+q* ở *B* ($x = +a, y = 0, z = 0$)

Trong không gian, thế được cho bởi :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM}\right),$$

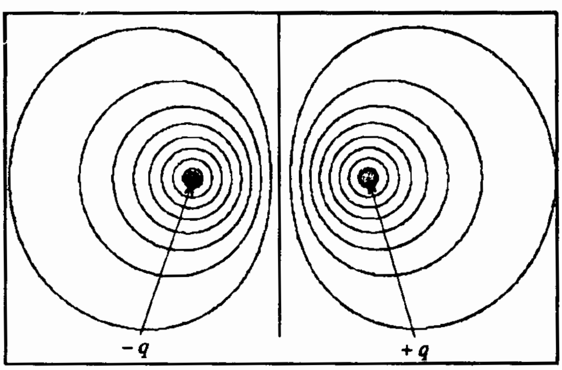
thế này (do vậy các mặt đẳng thế) là có tính đối xứng tròn xoay xung quanh trục ($x'x$). Ta hãy quan tâm tới điều xảy ra trong mặt phẳng $z = 0$

4.1. Các mặt đẳng thế

Khi đó thế được cho bởi :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}\right)$$

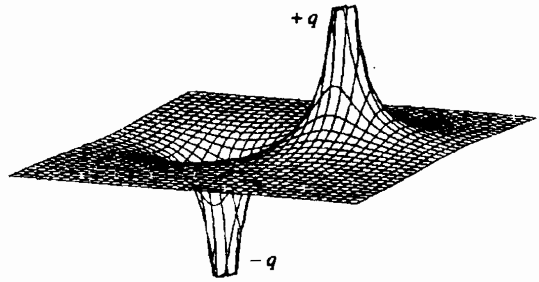
Hình 12 biểu diễn hình dáng của các mặt đẳng thế tương ứng.



Hình 12. *Các đường đẳng thế.*

4.2. Mặt đặc trưng

Ta có thể biểu diễn thế trong không gian. Tọa độ thẳng đứng (z) của không gian ba chiều được thay thế bằng thế, nghĩa là ta thể hiện rõ : $z = V(x,y)$.



Hình 13. *Sự thể hiện rõ của thế trong không gian.*

Hình 13 chỉ rõ hình dáng của thế trong không gian (tương ứng với cùng một hệ điện tích)

Chú ý rằng với

$$(y = 0, x = -a) \text{ và } (y = 0, x = +a)$$

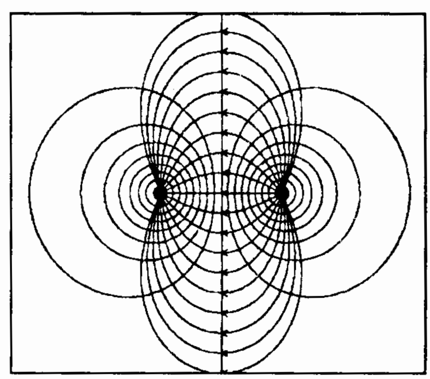
thì thường thường thế là vô cùng. Các thế được giới hạn bớt đi để làm cho hìnhvẽ dễ xem hơn.

Các độ dốc của mặt đặc trưng được liên kết trực tiếp với gradien : độ dốc của mặt $z = V(x, y)$, đo theo phương của x là :

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = [\overrightarrow{\text{grad}}V(x,y)]_x$$

Trường $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$ được định hướng theo phương độ dốc của mặt đặc trưng lớn nhất. Biên độ của trường tương ứng với độ dốc này. Trường vuông góc với các mặt đẳng thế.

Hình 14 biểu diễn hình dáng của các đường sức trường, luôn tương ứng với cùng một hệ điện tích.



Hình 14. *Vết của các mặt đẳng thế và các đường sức (trường) trục giao.*

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
TRẦN VĂN QUANG
Biên tập tái bản:
PHÙNG THANH HUYỀN
Biên tập kĩ thuật:
NGUYỄN PHƯƠNG YÊN
Trình bày bìa:
ĐOÀN HỒNG
Sửa bản in:
TRẦN VĂN QUANG
Sắp chữ:
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

ĐIỆN TỪ HỌC 1
Mã số: 7K484T6-DAI

In 1000 cuốn khổ 19cm x 27cm tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội
Số xuất bản: 194 – 2006/CXB/18 – 323 GD.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2006.

P.F.I.E.V

ĐIỆN TỬ HỌC
1

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

8 934980 640104

Giá: 24.500đ