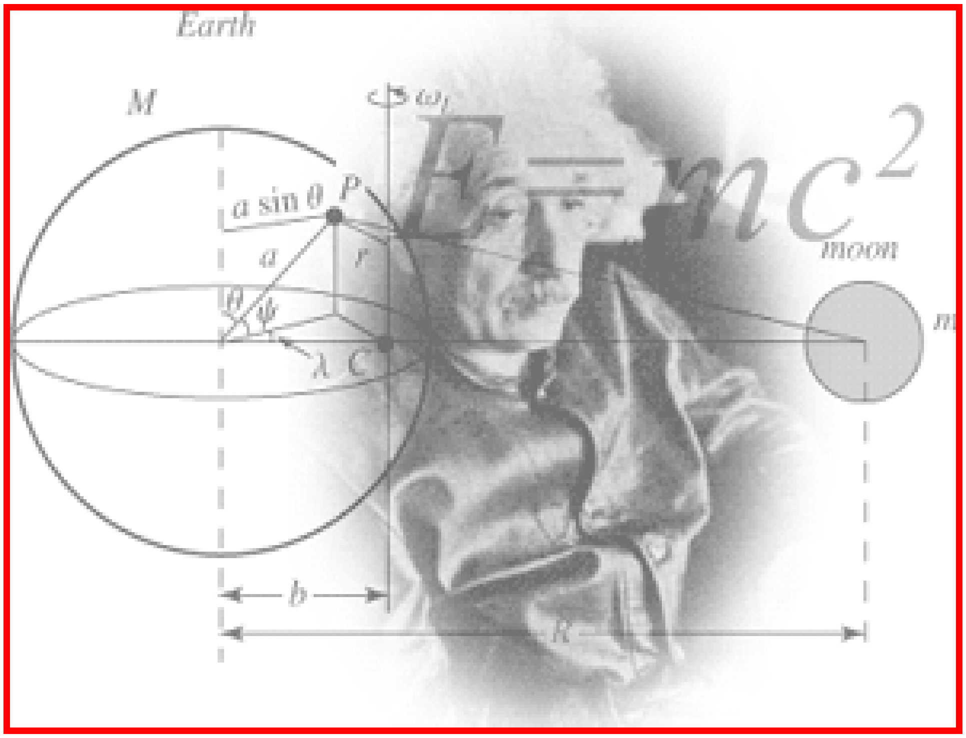
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH
KHOA VẬT LÝ

GIÁO TRÌNH



THUYẾT TƯƠNG ĐỐI RỘNG

LÊ NAM

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ - 2002.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Ngày nay các nhà khoa học mô tả vũ trụ dựa trên hai lý thuyết cơ sở có tính riêng phần, đó là thuyết tương đối rộng và cơ học lượng tử. Hai lý thuyết đó là những thành tựu trí tuệ vĩ đại của nửa đầu thế kỷ này. Lý thuyết tương đối rộng mô tả lực hấp dẫn và cấu trúc cực vĩ của vũ trụ. Trái lại cơ học lượng tử lại mô tả những hiện tượng ở phạm vi cực kỳ nhỏ, cỡ một phần triệu của một centimét.

Cơ lượng tử nói riêng và vật lý lượng tử nói chung đã được giảng dạy thường xuyên cho sinh viên khoa toán và khoa lý ở cấp đại học. Trái lại thuyết tương đối rộng lại chưa được quan tâm thích đáng như vậy.

Tuy nhiên cùng với thời gian, thuyết tương đối rộng sẽ được dạy thường xuyên cho sinh viên chưa tốt nghiệp đại học và điều này là không thể tránh khỏi. Đây là lý thuyết khó – nhưng giống như những kỷ lục điền kinh năm mươi năm về trước những người bình thường hầu như không thể đạt được thì ngày nay các sinh viên đại học được luyện tập tốt có thể đạt được. Hoàn toàn giống như vậy đối với lý thuyết của Einstein được xác lập cách đây tám mươi lăm năm. Sau một thời gian dài thai nghén nó đã tìm con đường của mình vào thế giới vật lý của các trường đại học và dù ít dù nhiều nó cũng chiếm được vị trí thường xuyên trong thời khóa biểu dành cho sinh viên khoa vật lý và toán ứng dụng chưa tốt nghiệp đại học.

Ngày nay lý thuyết này được đánh giá là rất có giá trị và có thể tiếp thu được. Nó là đối tượng nghiên cứu nghiêm túc của sinh viên khoa vật lý và toán cũng như ai có sự quan tâm trên trung bình đối với lý thuyết này, kể cả những người sau này không có dự định trở thành nhà nghiên cứu.

Việc nhiều người học thuyết tương đối rộng có thể được xem như một thành công khác trong sự thành công toàn diện của lý thuyết này.

Tuy vậy việc dạy thuyết tương đối rộng cho sinh viên chưa tốt nghiệp đặt ra một số vấn đề đặc biệt như sau.

1. Nội dung của lý thuyết phải được hạn chế một cách rất hợp lý. Có nghĩa nêu đủ những nét cơ bản nhất, kể cả một số tiến bộ gần đây nhất nhưng lại không quá khó đối với sinh viên.

2. Giáo trình dành cho sinh viên đại học phải có tính kiểm tra được. Ngoài những bài tập thiên về kỹ thuật tính toán phải có thêm những bài tập đòi hỏi phải suy nghĩ để tìm ra lời giải mặc dù bài tập loại này là rất khó.

3. Có sự liên hệ chặt chẽ với những kiến thức của bộ môn vật lý khác để giúp cho sinh viên hiểu sâu hơn những điều đã học, giúp sinh viên vận dụng tốt những kiến thức đã học khi ra dạy tại các trường phổ thông

4. Cung cấp một nền tảng nhất định để giúp sinh viên nghiên cứu sâu hơn khi có nguyện vọng

Dựa trên tinh thần như vậy tác giả xây dựng giáo trình thuyết tương đối rộng dành cho sinh viên khoa Vật Lý Đại học Sư phạm. Trong quá trình biên soạn tác giả đã tham khảo các giáo trình của các trường đại học sau:

1. Trường đại học Princeton
Misner – Thorne – Wheeler: Gravitation.
Freeman and company – Repinted 1999.

2.Trường đại học Cradiff.
Schutz: First course in general relativity

Cambridge University Press – Reprinted 1999.

3.Trường đại học Southompton.
D'inverno: Introducing Einstein's relativity
Oxford University Press – Reprinted 1996.

4.Trường tổng hợp Oxford
Hughston – Tod: Introduction to general relativity
Cambridge University Press – Reprinted 2000.

5.Trường công nghệ Massachusetts.
Weinberg : Gravitation and Cosmology
Wiley & Sons Inc – Reprinted 2000.

Trong quá trình biên soạn tác giả được sự giúp đỡ rất nhiệt tình của các đồng nghiệp. Cho phép tác giả được cảm ơn thầy Phạm Văn Đổng, thầy Lý Vĩnh Bê, thầy Thái Khắc Định, cô Trần Quốc Hà đã giúp đỡ rất nhiều từ lúc thai nghén cho tới lúc giáo trình được in. Tác giả xin cảm ơn giáo sư Nguyễn Ngọc Giao – người thầy kính mến của tác giả - đã có nhiều góp ý rất bổ ích về nội dung của giáo trình.

Tác giả cám ơn sự nhiệt tình của sinh viên Nguyễn Thị Nhị Hà và Nguyễn Thị Hằng trong việc đánh máy bản thảo đồng thời gửi lời cám ơn tới anh Tom Nguyễn – việt kiều Mỹ – đã giúp đỡ rất nhiều trong việc tìm tài liệu tham khảo.

Do lần đầu biên soạn nên sai sót là điều khó tránh khỏi. Tác giả biết ơn các bạn đọc góp ý để giáo trình ngày một tốt hơn

Cuối cùng cho phép tác giả viết lại lời của Stephan Hawking – nhà vật lý lý thuyết xuất sắc nhất hiện nay:

Tám mươi năm về trước nếu tin lời Eddington thì chỉ có hai người hiểu được thuyết tương đối rộng. Ngày nay hàng vạn sinh viên đại học hiểu được lý thuyết đó và hàng triệu người ít nhất đã làm quen với thuyết tương đối rộng.

Khi một lý thuyết được phát minh thì chỉ còn là vấn đề thời gian để cho lý thuyết đó được thấu triệt rồi đơn giản hóa và giảng dạy trong nhà trường ít nhất là những nét cơ bản. Và mọi người chúng ta sẽ đủ khả năng có được một kiến thức nhất định về những định luật trị vì vũ trụ và điều hành cuộc sống của chúng ta.

Lê Nam

NỘI DUNG CỦA GIÁO TRÌNH BAO GỒM

Chương I : Phép tính tenxơ trong không gian Riemann.

Mục đích của chương này là cung cấp cho sinh viên những kiến thức cần thiết về công cụ toán học chính của thuyết tương đối rộng. Sinh viên được trang bị về các phép tính như : Đạo hàm hiệp biến, đạo hàm lie, đạo hàm tuyệt đối một tenxơ… trong không gian cong, 4 – chiều

Chương II : Phương trình Einstein

Trong chương này sinh viên sẽ được học theo đúng cách mà Einstein đã làm cách đây tám mươi lăm năm là xây dựng phương trình từ nguyên lý tác dụng tối thiểu. Ta sẽ nhận được phương trình vi phân bậc hai phi tuyến mang tên Einstein.

Chương III : Nghiệm Schwarzchild.

Sinh viên sẽ được học cách giải phương trình Einstein để tìm ra nghiệm Schwarzchild. Trong quá trình giải mọi tính toán quá phức tạp sẽ được bỏ bớt nhằm giúp cho sinh viên tiếp thu dễ dàng hơn. Sau đó sinh viên sẽ được làm quen với ba hệ quả quan trọng:

- Giải thích tận tốc quỹ đạo kỳ lạ của sao thuỷ mà cơ học Newton không giải quyết được.
- Sự truyền của tia sáng trong không – thời gian cong quanh mặt trời.
- Thời gian dường như trôi chậm tại nơi có trường hấp dẫn lớn hơn.

Chương IV : Lỗ đen

Một trong những vật thể kỳ lạ nhất trong tự nhiên chính là lỗ đen. Chương này sẽ giới thiệu cho sinh viên về vùng không - thời gian quanh lỗ đen không quay và lỗ đen quay. Đó là lỗ đen Schwarzchild và lỗ đen Kerr.

Chương V : Sóng hấp dẫn.

Khi ta giải gần đúng phương trình Einstein cho chân không ta sẽ được nghiệm mô tả quá trình sóng. Đó là sóng hấp dẫn. Tuy nhiên cho đến ngày hôm nay các nhà vật lý thực nghiệm vẫn chưa đo được sóng hấp dẫn.

Chương VI : Vũ trụ học tương đối tính.

Chương này giới thiệu phương trình Friedman và từ đây ta tính được ba mô hình vũ trụ hiện nay. Đó là mô hình vũ trụ Mở, vũ trụ Phẳng, và vũ trụ Đóng.

Chương trình trên tương ứng với 45 tiết lên lớp dành cho sinh viên khoa vật lý năm thứ tư.

Chương VII : Phụ lục và bài tập

CHƯƠNG I

PHÉP TÍNH TENXƠ

§1. QUY TẮC CHỈ SỐ

Người ta hay dùng các chữ sau để ký hiệu chỉ số:

$i, j, k, l, n, m, ...$

$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, ...$

$a, b, c, d, e, ...$

Trong biểu thức nếu chỉ số chỉ lặp lại có 1 lần thì chỉ số gọi là chỉ số tự do. - free index

$Y_b^a . X^{ca}$

Ta thấy b và c là chỉ số tự do vì nó chỉ lặp lại một lần chỉ sốĠ được lặp lại hai lần. Điều này có nghĩa ta phải lấy tổng theo chỉ số đó.

Ví dụ:

$$Y_b{}^a . X^{ca} = Y_b{}^0 . X^{c0} + Y_b{}^1 . X^{c1} + Y_b{}^2 . X^{c2} + Y_b{}^3 . X^{c3}$$

với Ġ

(chỉ số lấy tổng gọi là chỉ số câm - dummy index.)

§2. MA TRẬN CHUYỂN TỌA ĐỘ

Xét không gian n chiều. Ta có hai hệ tọa độ cũ và mới được ký hiệu như sau:

Hệ tọa độ cũ : Ġ

Hệ tọa độ mới : Ġ

Ta có phương trình liên hệ giữa tọa độ mới và cũ:

$$x^a \to \bar{x}^a \quad : \quad \bar{x}^a = f^a\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \equiv \bar{x}^a(x) \qquad (1)$$

Như đã biết trong phần giải tích định thức Jacobi sẽ bằng không nếu các tọa độ mới phụ thuộc tuyến tính với nhau.

Nếu cácĠ độc lập tuyến tính với nhau thì Jacobi sẽ khác zero.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^b}\right) \qquad (2)$$

Định thức của ma trận chuyển tọa độ gọi là Jacobi và ký hiệu là:

$$\bar{J} = \left|\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^b}\right| \neq \mathbf{0} \quad \text{a vaø } b = 1, 2, ..., n \qquad (3)$$

Hoàn toàn tương tự ta có phép biến đổi ngược từ mới về cũ:

$$\bar{x}^a \to x^a : \quad x^a = x^a(\bar{x}) \qquad J = \left|\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b}\right| \neq \mathbf{0} \tag{4}$$

Ta nhận thấy khi nhân hai ma trận trên với nhau sẽ cho ma trận đơn vị

$$\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^b} \cdot \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^c} = (phaàntöû)^a_c = \delta^a{}_c$$

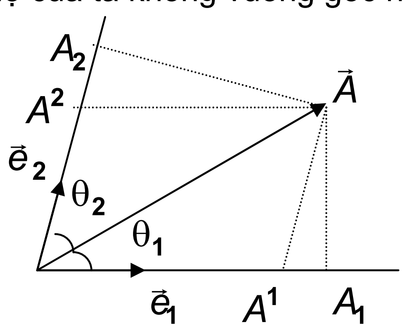
Trong đó $\delta^a_c = \delta_{ac} = \delta^{ac} = \begin{cases} 1 & a = c \\ 0 & a \neq c \end{cases}$ (6)

Ký hiệu Kronecker

§3. TENXƠ PHẢN BIẾN VÀ TENXƠ HIỆP BIẾN

1. Để đơn giản ta xét không gian hai chiều phẳng với tọa độĠ và hai **véctơ cơ sởĠ như hình vẽ.**

Nếu hai trục tọa độ của ta không vuông góc nhau ta có hai cách mô tả



vectơĠ

1. Chiếu vuông góc véctơ Ġ lên hai trục ta được

$$A_1 = A cos\theta_1 = \vec{A}.\vec{e}_1$$

$$A_2 = A cos\theta_2 = \vec{A}.\vec{e}_2$$

Chiếu véctơĠsong song theo từng trục ta được Ġkhi đó:

$$\vec{A} = A^1.\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2$$

Như vậy nếu biếtĠ và Ġ ta đều xác định được véctơĠ

A_1, A_2 goïi laø thaønh phaàn hieäp bieán cuûa veùctô $\vec{A}$

A^1, A^2 goïi laø thaønh phaàn phaûn bieán cuûa veùctô $\vec{A}$

Ta viếtĠ hoặc Ġ

Về thuật ngữ khi ta nói véctơ hiệp biếnĠ nào đó có nghĩa ta chỉ chú ý tới thành phần hiệp biến của nó. Tương tự cho véctơ phản biến.

Nói chungĠ. Tuy nhiên trong không gian phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc nhau thì thành phần hiệp biến và phản biến bằng nhau. Không gian Euclide với hệ tọa độ Descartes.

2.Xét không gian n chiều.

Điểm P có các tọa độ làĠ

Còn Q có tọa độ làĠ

$\xrightarrow{d\bar{x}^a}$ Vectơ Ġ

$P \qquad Q$

Trong hệ tọa độ cũĠ vectơ trên sẽ có thành phần làĠ.

Trong hệ tọa dộ mớiĠ các thành phần tương ứng của véctơ trên sẽ là $d\bar{x}^a$

DoĠ nên Ġ (1)

Bây giờ ta định nghĩa:

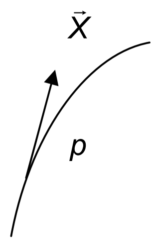
Véctơ phản biến hay tenxơ phản biến hạng 1 là tập hợp những đại lượngĠ trong hệ tọa độĠ tại điểm P mà tuân theo quy luật.

$$\bar{X}^a = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^b}.X^b \tag{2}$$

Ví dụ

Cho đường congĠ trong không thời - gian bốn chiều.

$a = \mathbf{0,1,2,3}$



Vectơ: Ġ là véctơ tiếp tuyến với đường cong tại điểm P.

VéctơĠ có bốn thành phầnĠ tạo nên tenxơ phản biến hạng 1

Ta viết lại :

$$\vec{X} = \left(\frac{dx^{\mathbf{0}}}{du}, \frac{dx^{\mathbf{1}}}{du}, \frac{dx^{\mathbf{2}}}{du}, \frac{dx^{\mathbf{3}}}{du}\right) = \left(X^{\mathbf{0}}, X^{\mathbf{1}}, X^{\mathbf{2}}, X^{\mathbf{3}}\right) \equiv X^a$$

Chú ý: khi ta nói véctơ phản biến hạng 1 ta thường ký hiệuĠ mà không cần dấu *vectơ ở trên.*

Từ đây ta tổng quát hóa:

Tenxơ phản biến hạng 2 là tập hợp các đại lượngĠtrong hệ tọa độ -Ġ

Mà tuân theo quy luật biến đổi sau khi chuyển hệ tọa độ từĠ:

$$\bar{X}^{ab} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^d}.X^{cd} \tag{3}$$

Các đại lượngĠ là thành phần của tenxơ hạng 2 trên nhưng tính trong hệ tọa độ -Ġ

Hoàn toàn tương tự ta có định nghĩa tenxơ hiệp biến hạng 1 (véctơ hiệp biến)

$$\bar{X}_a = \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a}.X_b \tag{4}$$

Tương tự ta có định nghĩa tenxơ hiệp biến hạng hai:

$$\bar{X}_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^a}.\frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^b}.X_{cd} \tag{5}$$

Ta cũng có định nghĩa tenxơ hỗn hợp hạng 3

$$\bar{X}^a{}_{bc} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^d}\frac{\partial x^e}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^f}{\partial \bar{x}^c}.X^d{}_{ef} \tag{6}$$

Ta thường ký hiệu tenxơ hạngĠ phản biến, hạngĠ hiệp biếnĠ
Tenxơ hạng không là vô hướng và ta thường ký hiệu bằng chữĠ

3. Tại sao tenxơ lại được các nhà vật lý chú ý?

Xét hai tenxơĠ vàĠtrong hệ tọa độ nào đó (với các nhà vật lý thì đó là hệ quy chiếu) thỏa mãn tính chất:

$$X^{ab} = Y^{ab} \tag{7}$$

Nhân cả hai vế của (7) với:

$$\frac{\partial \overline{x}^c}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial \overline{x}^d}{\partial x^b} . X^{ab} = \frac{\partial \overline{x}^c}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial \overline{x}^d}{\partial x^b} Y^{ab}$$

Theo định nghĩa (3) ta có

$$\overline{X}^{cd} = \overline{Y}^{cd} \tag{8}$$

Biểu thức (8) chính là phương trình (7) được xét trong hệ tọa độ mới (hệ quy chiếu mới)

Từ đây ta phát biểu: Nếu phương trình tenxơ hay đẳng thức tenxơ đúng trong hệ tọa độ nào thì cũng đúng trong hệ tọa độ bất kỳ khác.

Nói cách khác phương trình tenxơ không phụ thuộc vào hệ quy chiếu quán tính hay không quán tính. Như vậy tenxơ là công cụ toán học rất phù hợp để xây dựng thuyết tương đối rộng (thuyết tương đối tổng quát).

§4 . ĐẠI SỐ TENXƠ

1. Phép cộng được thực hiện với các tenxơ cùng loại với các chỉ số giống nhau:

$$Y^a_{bc} + Z^a_{bc} = X^a_{bc}$$

2. Phép nhân tenxơ - phép nhân ngoài - outer product

Tenxơ loạiĠ nhân với tenxơ loạũ sẽ cho ta tenxơ loạiĠ

$$Y^a_b . Z_{cd} = X^a_{bcd}$$

Tenxơ hạng hai nhân với tenxơ hạng 2 cho ta tenxơ hạng 4 . Nếu ta có véctơĠ và véctơĠ thì nhân tenxơ giữa hai vectơ trên được ký hiệu như sau:
ĉ Nếu cả hai đều là vectơ phản biến

3. Phép nhân trong - inner product.

ĉ cho ta tenxơ hạng 2
Hoặc ta có: ĉ cho ta tenxơ hạng 1

Nhận xét: Hai tenxơ nhân với nhau, nếu tất cả các chỉ số khác nhau thì ta có phép nhân ngoài còn nếu ta có các cặp chỉ số giống nhau thì ta có phép nhân trong.

4. Phép rút gọn tenxơ - contraction.

Cho tenxơĠ khi ta cho chỉ số a=c thìĠ thì là tenxơ hiệp biến hạng 2. Vì vậy ta ký hiệu: Ġ
Hoặc ta có: Ġ

5. Tenxơ là đối xứng với hai chỉ số trên hoặc dưới nếu ta hoán vị các chỉ số đó cho nhau mà tenxơ không đổi:

$$X_{ab} = X_{ba}$$

Nếu không gian của ta là n chiều thì ta có thể biểu diễn tenxơ trên dưới dạng ma trận n hàng n cột. Do các phần tử của ma trận là tenxơ đối xứng nên ta có $\frac{n(n+1)}{2}$ thaønh phaàn ñoäc laäp.

Tenxơ là phản đối xứng nếu Ġ

Từ đây ta suy ra ĉ

Ġ Nghĩa là các thành phần nằm trên đường chéo chính bằng zero. Như vậy tenxơ phản đối xứng cóĠ thành phần độc lập.

* Trong không gian bốn chiều :

Tenxơ Ġ có Ġ thành phần

Tenxơ Ġ có Ġ thành phần

Tenxơ Ġ có Ġ thành phần

§5. TENXƠ METRIC

1. Xét không gian n chiều. Ta chọn hệ tọa độ chuẩnĠ sao cho độ dài vô cùng bé nối hai điểm lận cận nhau có dạng:

$$ds^2 = d\bar{x}^a . d\bar{x}^a \tag{1}$$

Ví dụ: Ta có biểu thức quen thuộcĠ trong tọa độ Descartes trong không gian 3 chiều.

Bây giờ ta chuyển (1) sang hệ tọa độ mớiĠ

$$ds^2 = d\bar{x}^a d\bar{x}^a = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^b}.dx^b \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^d}.dx^d = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^b}.\frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^d}.dx^b.dx^d$$

Nếu ta đặt Ġ (2) thì Ġ (3)

Ġ gọi là tenxơ metric hiệp biến.

Ġ tenxơ metric phản biến được xác định từ biểu thức

$$g_{ab} g^{ac} = \delta^c{}_b \tag{4}$$

Ġ Ta lập ma trận gồm cácĠ. Tìm ma trận nghịch đảo của Ĩ). Ma trận nghịch đảo chính là ma trận Ĩ).

2. Ta có cách định nghĩa thứ hai:

Ġ; Ġ: vectơ cơ sở

$$ds^2 = d\vec{x}.d\vec{x} = dx^a \vec{e}_a.dx^b \vec{e}_b = \vec{e}_a \vec{e}_b.dx^a dx^b = g_{ab}.dx^a dx^b$$

Với ĉ (5)

Ta viết tích vô hướng của hai vectơ nhờ tenxơ metric:

$$\vec{A}.\vec{B} = g_{ab} A^a B^b = g^{ab} A_a B_b = A^a B_a = A_a B^a \tag{6}$$

3. Ta định nghĩa không gian Riemann :

Không gian với hệ tọa độĠ có Ġ với Ġcó một phần tử khác 1 gọi là tenxơ Riemann.

Ví dụ: bề mặt của quả đất là không gian Riemann 2 chiều nằm trong không gian ba chiều thông thườngĠ. Ta có khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trên mặt cầu ds và được tính theo công thức:

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\phi^2$$

$$g_{\theta\theta} = g_{22} = r^2; \qquad g_{23} = g_{32} = 0; \qquad g_{\phi\phi} = g_{33} = r^2 \sin^2\theta$$

§6. ĐẠO HÀM LIE

1. Cho đại lượng vô hướngĠ. Rõ ràng vô hướngĠ không thay đổi khi chuyển hệ tọa độ

Nếu tại mỗi điểm của không gian Riemann ứng với một giá trị củš thì ta được một trường vô hướng hay trường tenxơ hạng không.

Tương tự tenxơĠ... được xác định tại mỗi điểm trong vùng nào đó thuộc không gian Riemann thì kết quả ta có trường tenxơ hạng tương ứng.

2. Cho hai trường vectơ bất kỳĠ vàĠ, giao hoán tử Lie của hai vectơ trên tác dụng lên hàmĠ được định nghĩa:

$$[X,Y]f = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{1}$$

$$[X,Y](\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha[X,Y]f_1 + \beta[X,Y]f_2 \tag{2}$$

VớiĠ hai hàm bất kỳ ;Ġ thực, và Lie giao hoán tử thỏa mãn:

$$[X,Y](f.g) = f[X,Y]g + g[X,Y]f \tag{3}$$

Từ ba biểu thức trên, ta thấy giao hoán tử Lie là toán tử tuyến tính vàø toán tử này giống phép vi phân.

Trong hệ tọa độĠ ta định nghĩa vectơ X :

$$X = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} = X^a \partial_a$$

$$\Rightarrow Xf = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} f = X^a \frac{\partial f}{\partial x^a} = X^a \partial_a f \tag{4}$$

Bây giờ ta xét thành phần thứ a của giao hoán tử Lie

$$[X,Y]^a f = (XY - YX)^a f = \left(X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a\right) f$$

$$Z^a f = \left(X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a\right) f$$

$$\Rightarrow [X,Y]^a = Z^a = \left(X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a\right)$$

Từ đây ta định nghĩa đạo hàm Lie của vectơĠ theo hướng vectơĠ được viết như sau:

$$L_X Y = [X,Y] = -[Y,X] = -L_Y X$$

Ta chấp nhận một số tính chất sau:

1. Ġ Ġ là đại lượng vô hướng
2. $L_X\left(Y^a Z_{bc}\right) = Y^a L_X Z_{bc} + \left(L_X Y^a\right) Z_{bc}$

3. $\delta^a{}_b L_X T^a{}_b = L_X T^a{}_a$

4. $L_X Y^a = [X,Y]^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a$

5. $L_X Y_a = [X,Y]_a = X^b \partial_b Y_a + Y_b \partial_a X^b$

6. $L_X T^{ab} = X^c \partial_c T^{ab} - T^{ac} \partial_c X^b - T^{cb} \partial_c X^a$

7. $L_X T_{ab} = X^c \partial_c T_{ab} + T_{ad} \partial_b X^d + T_{bd} \partial_a X^d$

Đạo hàm Lie một tenxơ theo hướng X là đạo hàm riêng mà không cần sử dụng tenxơ mêtric (không cần sử dụng hệ số liên thông)

§7.ĐẠO HÀM HIỆP BIẾN

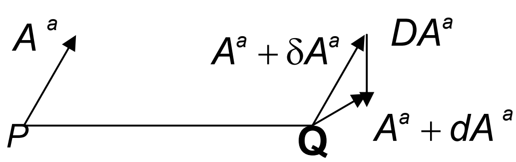
1.Khái niệm dịch chuyển song song

Trong không gian phẳng dịch chuyển song song một vectơ có nghĩa là di chuyển nó sao cho lúc nào vectơ cũng song với chính nó. Nói cách khác, ta dịch chuyển sao cho độ lớn và hướng của nó không thay đổi.

Trong không gian cong Remann dịch chuyển song một vectơ dọc theo C nghĩa là dịch chuyển nó sao cho góc tạo giữa nó và đường cong C luôn không đổi. Lúc này các thành phần của vectơ sẽ thay đổi cho dù độ lớn của nó không thay đổi.

2. Đạo hàm hiệp biến

Xét một trường vectơ phản biến bất kỳĠ. Tại điểm P tương ứng với tọa độĠ vectơ có giá trị l□



Tại điểm Q ứng với tọa độĠ vectơ có giá trị làĠ

Bây giờ ta dịch chuyển song song vectơĠ đến điểm Q. Vectơ sẽ thay đổi một lượng được ký hiệuĠ

Ta lập hiệu:Ġ (1)

Đại lượngĠ hoàn toàn có thể đặt bằng: ĭ (2)

Trong đó :Ġ là một hàm nào đó phụ thuộc vào hệ tọa độ ta chọn. Có thể bằng không hoặc khác không.Ġ có tên là hệ số liên thông hay ký hiệu Christoffel loại hai.

Còn dấu (-) hoàn toàn là do quy ước của ta.

Thay (2) vào (1) :Ġ

Mặt khác ta có Ġ Thay vào (3)

$$DA^a = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} dx^b + \Gamma^a_{cb} A^c dx^b = \left(\frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma^a{}_{cb} A^c \right) dx^b \qquad (4)$$

Phần trong ngoặcĠ gọi là đạo hàm hiệp biến của vectơ phản biếnĠ

Và ký hiệu : ĉ (5)

(dấu chấm phẩy (;) có nghĩa là đạo hàm hiệp biến)

Ta có thể xây dựng phép đạo hàm phản biến (xem Landau trang 310)

3. Đạo hàm hiệp biến vectơ hiệp biến

Như đã biết nếu ta dịch chuyển song song một vô hướng thì đại lượng này không thay đổi. Nói cách khác tích vô hướng của hai vectơ sẽ không thay đổi khi dịch chuyển song song.

Xét tích vô hướng của hai vectơĠ. Do không thay đổi khi dịch chuyển song song nên:

$$\delta\left(A_a B^a\right) = \mathbf{0} \Rightarrow B^a \delta A_a + A_a \delta B^a = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow B^a \delta A_a = -A_a \delta B^a = -A_a\left(-\Gamma^a{}_{cb} B^c dx^b\right) = +\Gamma^a{}_{cb} A_a B^c dx^b$$

(7)

về mặt cấu trúc:

$$\Gamma^a{}_{cb} A_a B^c dx^b = \Gamma^c{}_{ab} A_c B^a dx^b$$

nên ta viết lại (7):

$$B^a \delta A_a = \Gamma^c{}_{ab} A_c B^a dx^b$$

Sau khi giản ướcĠở hai vế :Ġ (8)

Tương tự như (1): Ġ (9)

Thay (8) vào (9) Ġ (10)

Phần trong ngoặc gọi là đạo hàm hiệp biến vectơ hiệp biến

$$\nabla_b A_a = \frac{\partial A_a}{\partial x^b} - \Gamma^c{}_{ab} A_c \equiv A_{a;b}$$

Tương tự ta chứng được đạo hàm hiệp biến các tenxơ hạng cao hơn:

$$\nabla_c A^{ab} = \frac{\partial A^{ab}}{\partial x^c} + \Gamma^a{}_{cd} A^{db} + \Gamma^b{}_{cd} A^{ad}$$

(11)

$$\nabla_c A_{ab} = \frac{\partial A_{ab}}{\partial x^c} - \Gamma^d{}_{ac} A_{db} - \Gamma^d{}_{bc} A_{ad}$$

(12)

$$\nabla_c A^a{}_b = \frac{\partial A^a{}_b}{\partial x^c} - \Gamma^d{}_{bc} A^a{}_d + \Gamma^a{}_{dc} A^d{}_b$$

(13)

4. Ta tìm sự liên hệ giữa đạo hàm Lie và đạo hàm hiệp biến:

$$L_X Y^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a \overset{?}{=} X^b \nabla_b Y^a - Y^b \nabla_b X^a$$

để trả lời câu hỏi trên ta xét:

$$\nabla_b Y^a = \partial_b Y^a + \Gamma^a{}_{bc} Y^c$$

(14)

$$\nabla_b X^a = \partial_b X^a + \Gamma^a{}_{bc} X^c$$

(15)

nhân từ trái (14) vớiĠ và (15) vớiĠ rồi trừ cho nhau:

$$X^b \nabla_b Y^a - Y^b \nabla_b X^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a + \Gamma^a{}_{bc}\left(X^b Y^c - X^c Y^b\right)$$

Ta chỉ xét cho hệ số liên thông Í nên hai số hạng cuối cùng có cùng cấu trúc.

Do vậy chúng triệt tiêu nhau. Cuối cùng ta được:

$$X^b \nabla_b Y^a - Y^b \nabla_b X^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a$$

(16)

Trong biểu thức của đạo hàm Lie ta có thể thay đạo hàm thường bằng đạo hàm hiệp biến. Với điều kiện làĠ đối xứng với hai chỉ số dưới.

$$\partial_b \to \nabla_b$$

§8. ĐẠO HÀM TUYỆT ĐỐI

1. Ở §7 ta đã có

$$DA^a = dA^a - \delta A^a = \left(\frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma^a_{cb} A^c\right) dx^b$$

(1)

Chia hai vế cho du với u: thông số của họ đường congĠ

$$\frac{DA^a}{du} = \left(\frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma^a_{cb} A^c\right)\frac{dx^b}{du} = \frac{dx^b}{du}\left(\frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma^a_{cb} A^c\right) \qquad (2)$$

Biểu thức (2) gọi là đạo hàm tuyệt đối củaĠ và kí hiệu

$$\frac{DA^a}{Du} = \frac{dx^b}{du}\left(\frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma^a{}_{cb} A^c\right) = \frac{dx^b}{du}.\nabla_b A^a = X^b \nabla_b A^a$$

$$\frac{DA^a}{Du} = X^b \nabla_b A^a \equiv \nabla_X A^a \qquad ; X^b = \frac{dx^b}{du} \qquad (3)$$

Do ĉ nên ta có cách viết thứ hai:

$$\frac{DA^a}{DU} = \frac{dA^a}{du} + \Gamma^a_{cb} A^c \frac{dx^b}{du} \qquad (5)$$

Tương tự đạo hàm tuyệt đối tenxơ hiệp biến hạng một

$$\frac{DA_a}{Du} = \frac{dx^b}{du} \nabla_b A_a = \nabla_X A_a = \frac{dA_a}{du} - \Gamma^a_{bc} A_c \frac{dx^b}{du} \qquad (6)$$

Ta có thể xây dựng đạo hàm tuyệt đối các tenxơ hạng cao hơn

$$\frac{DA^a_b}{Du} = \frac{dx^c}{du} \nabla_c A^a{}_b = X^c \nabla_c A^a{}_b = \nabla_X A^a{}_b \qquad (7)$$

2. Ý nghĩa hình học

Trong trường hợp đặc biệt khiĠ ta nói vectơĠ được dịch chuyển song song sao cho nó trùng với vectơĠ tại điểm mới. Trường hợp này chỉ xảy ra khi đường congĠ là đường rất đặc biệt gọi là đường trắc địa còn vectơĠ lúc này sẽ là vectơ tiếp tuyến với đường trắc địa.

$$\frac{DA^a}{DU} = \nabla_X A^a = \frac{dA^a}{du} + \Gamma^a_{cb} A^b \frac{dx^c}{du} = 0$$

DoĠ lúc này bằngĠ (tangent vector)

$$\frac{DA^a}{DU} = \frac{d}{du}\frac{dx^a}{du} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{du}\frac{dx^c}{du} = 0$$

$$\frac{d^2x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{du}\frac{dx^c}{du} = 0 \qquad (8)$$

(8) phương trình cho đường trắc địaĠ. Thông số u gọi là thông số Affine ta kí hiệu bằng chữ s hoặc (

$$\frac{d^2x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^c}{ds} = 0$$

Ở phần sau bằng nguyên lý tác dụng tối thiểu ta chứng minh được rằng đường ngắn nhất giữa hai điểm trong không gian Riemann là đường trắc địa và phương trình của nó trùng với (9)

§9. KÝ HIỆU CHRISTOFFEL VÀ TENXƠ MÊTRIC

1. Xoắn - Torsion

Xét trường vô hướngĠ

Mặc dù :Ġ nhưng trong trường hợp tổng quát chưa chắc

Ġ . Khi đó :Ġ = ? (1)

Nếu ta đặt Ί.

$$\nabla_a V_b = \partial_a V_b - \Gamma^c_{ba} V_c = \partial_a \partial_b \Phi - \Gamma^c_{ba} \partial_c \Phi$$

(2)

$$\nabla_b V_a = \partial_b V_a - \Gamma^c_{ab} V_c = \partial_b \partial_a \Phi - \Gamma^c_{ab} \partial_c \Phi$$

(3)

Lấy (3) - (2):

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\Phi = (\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a)\Phi + (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba})\nabla_c \Phi$$

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\Phi = (\Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ba})\nabla_c \Phi$$

Ġ = tenxơ xoắnĠ (4)

Nếu không gian cong của ta không xoắn thìĠ=0

$\Rightarrow \Gamma^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ba}$ kyù hieäu Christoffel ñoái xöùng vôùi hai chæ soá döôùi.

2.Ta có định lý sau:

Ġ là tenxơ mêtric đối xứng . Nếu không gian của ta là không gian xoắn thì

$$\nabla_a g_{bc} = 0.$$

Chứng minh: Ġ (5)

$$\nabla_b g_{ca} = 0 \Rightarrow \partial_b g_{ca} - \Gamma^d_{bc} g_{da} - \Gamma^d_{ba} g_{dc} = 0$$

(6)

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \Rightarrow \partial_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca} g_{db} - \Gamma^d_{cb} g_{da} = 0$$

(7)

Ta lấy (5)-(6)-(7) và chú ý tới tính đối xứng củaĠ

$$2\Gamma^d_{bc} g_{da} + \partial_a g_{bc} - \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} = 0$$

$$\Gamma^d{}_{bc} g_{da} = \frac{1}{2}\left(\partial_b g_{ca} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc}\right)$$

Nhân cả hai vế vớiĠ

$$\Gamma^d_{bc} = \frac{1}{2} g^{da}\left(\partial_b g_{ca} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc}\right)$$

(8)

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}\right)$$

(9)

Vậy nếuĠ thìĠ có dạng như (9). Ta có thể nói ngược lại : Nếu như $\Gamma^a{}_{bc}$ coù dạng như (9) thì sau khi tính toán trực tiếp ta thấyĠ

3. Nếu ta đặt .Ġ

$$\Rightarrow [bc,d] = \frac{1}{2}\left(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}\right)$$

(10)

thì (10) gọi là ký hiệu Christoffel loại 1

Ta dễ dàng chứng minh tiếp:

$$\nabla_c \delta^a{}_b = 0 \quad ; \quad \nabla_c g^{ab} = 0$$

$$[ab,c] + [cb,a] = \partial_b g_{ac}$$

§10 . ĐƯỜNG TRẮC ĐỊA

1. Trong mục này ta tìm phương trình cho đường trắc địa xuất phát từ nguyên lý tác dụng tối thiểu. Trong cơ học, cơ hệ sẽ chuyển động từ P đến Q sao cho biến phân của hàm tác dụng bằng 0.

Còn trong hình học: đường cong nối hai điểm P và Q sẽ ngắn nhất khi biến phân của hàm tác dụng bằng 0.

Ta chọn hàm L có đặc trưng độ dài. Như đã biết:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \qquad (1)$$

$$L = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{ab} \frac{dx^a}{du}\frac{dx^b}{du} = g_{ab}\dot{x}^a \dot{x}^b \qquad (2)$$

Hàm tác dụng: Ġ (3)

Bằng phương pháp biến phân ta nhận được phương trình Lagrange_Euler:

$$\frac{\partial L}{\partial x^c}-\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c}\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^c}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^c}=\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}\dot{x}^a\dot{x}^b$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}^c}\left(g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b\right)=2g_{a\o c}\dot{x}^a$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c}\right)=2g_{ac}\frac{d\dot{x}^a}{du}+2\frac{dg_{ac}}{dx^b}\frac{dx^a}{du}\frac{dx^b}{du}$$

Thay kết quả vừa tìm được vào (4) và sau một vài biến đổi ta nhận được

$$\frac{d^2x^d}{du^2}+\Gamma^d_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b=0 \qquad \text{hay} \qquad \frac{d^2x^a}{du^2}+\Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c=0 \qquad (5)$$

Phương trình (5) trùng với phương trình (8) - §8.

Thông số u trong trường hợp này gọi là thông số Affine, thường ký hiệu bằng chữ s hoặc (

Nếu ta đặt

ĉ với Ġ: gọi là hàm Lagrange

Thì phương trình Lagrange- Euler vẫn có dạng:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^c}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^c}=0$$

2. Vectô X^a vaø Y^b tröïc giao nhau khi

$$\vec{X}.\vec{Y}=g_{ab}X^aY^b=0 \qquad (6)$$

Nếu:Ġ thì vectơĠ gọi là vectơ null

Vectơ null có độ dài bằng không nhưng các thành phần của nó khác không, trong khi vectơ zero có độ dài bằng không với tất cả các thành phần bằng không.

$$2\mathscr{L}=g_{ab}\frac{dx^a}{du}\frac{dx^b}{du}=0 \text{ khi vectô } \frac{dx^a}{du} \text{ laø vectô null.}$$

(7)

Do vectơ null nằm dọc theo nón ánh sáng nên hàmĠ = 0 dành cho tia sáng (hạt photon)

KhiĠ có độ dài bằng đơn vị

Đối với vật m chuyển động với vận tốc < c ta cũng áp dụng phương trình Lagrange-Euler (phương trình đường trắc địa) nhưng:

$$2\mathscr{L}=g_{ab}\frac{dx^a}{du}\frac{dx^b}{du}=1 \qquad (8)$$

Chú ý: Nếu ta chọn dấu của mêtricĠ

Thì (8) lấy dấu +

Nếu ta dấu của mêtric Ġ

Thì (8) lấy dấu -

§ 11. TENXƠ RIEMANN

Ta chú ý rằng nói chung đạo hàm hiệp biến không giao hoán. Ta có :
Đạo hàm riêng: Ġ
Đạo hàm hiệp biến:Ġ. Xét đạo hàm hiệp biến vectơ phản biến X^a

$$\nabla_c X^a = \partial_c X^a + \Gamma^a_{bc} X^b$$

Đây là tenxơĠ
(1)
Tác dụng tiếpĠ lên (1) và chú ý (1) là tenxơĠ

$$\nabla_d \nabla_c X^a = \partial_d\left(\partial_c X^a + \Gamma^a_{bc} X^c\right) + \Gamma^a_{ed}\left(\partial_c X^e + \Gamma^e_{bc} X^b\right) - \Gamma^e_{cd}\left(\partial_e X^a + \Gamma^a_{be} X^b\right) \quad (2)$$

Tương tự ta tính:

$$\nabla_c \nabla_d X^a = \partial_c\left(\partial_d X^a + \Gamma^a_{bd} X^b\right) + \Gamma^a_{ec}\left(\partial_d X^e + \Gamma^e_{bd} X^b\right) - \Gamma^e_{dc}\left(\partial_e X^a + \Gamma^a_{be} X^b\right) \quad (3)$$

Lấy (3) -(2) và chú ýĠ

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = R^a_{bcd} X^b + \left(\Gamma^e_{cd} - \Gamma^e_{dc}\right)\nabla_e X^a$$

Trong đó:Ġ (4)
Nếu không gian của ta không xoắn, nghĩa là :Ġ thìĠ gọi là tenxơ Riemann - Christoffel. Gọi tắt là tenxơ Riemann.

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = R^a_{bcd} X^b$$

(5)
Nếu sử dụng ký hiệu Í

Thì: $$\nabla_{[c}\nabla_{d]} X^a = \frac{1}{2} R^a_{bcd} X^b$$

(6)

§ 12. HỆ TỌA ĐỘ TRẮC ĐỊA

Tại điểm P bất kỳ ta luôn chọn được hệ tọa độ mà trong đó

$$\Gamma^a_{bc}(P) = 0$$

Hệ tọa độ này có tên hệ tọa độ trắc. Đối với các nhà vật lý thì đó là hệ quy chiếu quán tính.
NếuĠ tại mọi điểm trong toàn không gian thì không gian gọi là phẳng
Ta có định lý : điều kiện cần và đủ để không gian là phẳng là tenxơ Riemann=0

§ 13 . TENXƠ RICCI

Ta viết lại định nghĩa tenxơ Riemann

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} \quad (1)$$

Với Ġ (2)
Nhìn vào định nghĩa ta nhận ra ngay tenxơ dộ cong Riemann phản đối xứng với hai chỉ số cuối:

$$R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}$$

(3)

$$\Rightarrow g_{ea}R^e_{bcd} = -g_{ea}R^e_{bdc} \qquad \Rightarrow R_{abcd} = -R_{abdc}$$

(4)

Trong phần bài tập ta chứng minh được :

$$R_{abcd} = -R_{bacd}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

Ta cũng chứng minh được:

$$R^a_{bcd} + R^a_{dbc} + R^a_{cdb} = 0$$

Hạ chỉ số ta có đồng nhất thức Ricci:

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = \mathbf{0} \qquad (8)$$

Bằng cách chọn hệ tọa độ trắc địa cho biểu thức (1) sau đó đạo hàm hiệp biến rồi hoán vị vòng quanh các chỉ số ta nhận được đồng nhất thức Bianchi:

$$\nabla_a R_{debc} + \nabla_b R_{deca} + \nabla_c R_{deab} = \mathbf{0}$$

Ta có:

$$R^a_{bcd} \Rightarrow \text{cho } a = c$$

$$R^a_{bad} = R_{bd} = g^{ac}R_{abcd}$$

$$R_{bd} = \partial_a \Gamma^a_{bd} + \partial_d \Gamma^a_{ba} + \Gamma^a_{ea}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{ba} \text{ goïi laø tenxô Ricci} \quad (9)$$

Từ Ġ suy ra tenxơ Ricci đối xứng

Ġ : độ cong vô hướng, hay vô hướng Ricci

Tenxơ Einstein được định nghĩa như sau:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} g_{ab} R$$

(10)

<u>§ 14. PHƯƠNG TRÌNH ĐỘ LỆCH TRẮC ĐỊA</u>

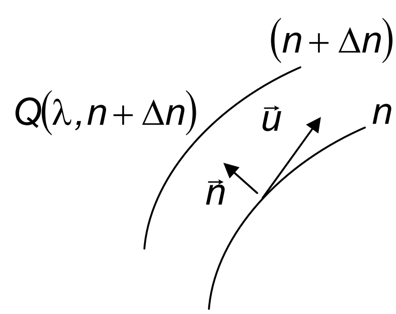
Xét họ đường trắc địa theo thông số (và được đánh số n

$$x^a = x^a(\lambda, n)$$

Vectơ tiếp tuyếnĠ

Vectơ nối hai đường trắc địa ngay cạnh nhau

$$\frac{\partial x^a}{\partial n} = n^a$$



DoĠ là đường trắc địa vàĠ là vectơ tiếp tuyến của nó nên đạo hàm tuyệt đối của u^a seõ baèng khoâng: $\nabla_U u^a = \mathbf{0}$

Tác dụng tiếpĠ lên (1)

$$\nabla_N \nabla_U u^a = \mathbf{0}$$

Công trừ hai vế vớiĠ

$$\nabla_N \nabla_U u^a + \nabla_U \nabla_N u^a - \nabla_U \nabla_N u^a = \mathbf{0}$$

Nhờ đạo hàm Lie ta chứng minh được trong trường hợp đặc biệt của ta (hai vectơ u^a vaø n^a) ñaïo haøm tuyeät ñoái seõ baèng ñaïo haøm rieâng (xem phaàn baøi taäp) neân ta có:

$$\nabla_N u^a = \nabla_N \frac{\partial x^a}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial x^a}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 x^a}{\partial n \partial \lambda} \tag{4}$$

$$\nabla_U n^a = \nabla_U \frac{\partial x^a}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial x^a}{\partial n} = \frac{\partial^2 x^a}{\partial \lambda \partial n} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \nabla_N u^a = \nabla_U n^a \tag{6}$$

Thay (3) vào :

$$\nabla_U \nabla_U n^a + (\nabla_N \nabla_U - \nabla_U \nabla_N) u^a = \mathbf{0}$$

$$\frac{D^2 n^a}{D\lambda^2} + R^a_{bcd} u^b n^c u^d = \mathbf{0} \tag{7}$$

(7) phương trình độ lệch trắc địa.

Nếu ta xét hai hạt, chuyển động dọc theo hai đường trắc địa ngay cạnh nhau thì số hạng:Ġ mô tả gia tốc tương đối giữa hai hạt.

ĉ mô tả lực thủy triều do hấp dẫn

Chú ý: phần chứng minh:

$$(\nabla_N \nabla_U - \nabla_U \nabla_N) u^a = R^a_{bcd} u^b n^c u^d$$

Bạn đọc có thể tham khảo trong Hughton và Tod - trang 79

§15. TENXƠ MẬT ĐỘ

Tenxơ tuyệt đối hay tenxơ thường	Tenxơ tương đối
$\overline{X}^a = \dfrac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^b} X^b$ $\overline{X}_a = \dfrac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^a} X_b$	$\overline{\mathcal{T}}^a = J^w \dfrac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^b} \mathcal{T}^a$ vớiĠ : Jacobi $\overline{\mathcal{T}}_a = J^w \dfrac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^a} \mathcal{T}_b$

Tương tự cho tenxơ hạng cao hơn. Với tenxơ tương đối trong công thức biến đổi luôn có thêm thức sốĠ. Ta nóiĠ - tenxơ mật độ với trọng lượng w (Tensor density of weight w).

Ta chấp nhận mà không chứng ninh quy tắc đạo hàm hiệp biến tenxơ mật độ:

$\nabla \mathcal{T}_b^a$ = caùc soá haïng gioáng nhö $\mathcal{T}_b^a$ laø tenxô thöôøng - $w\Gamma^d_{dc}\mathcal{T}_b^a$

Ví dụ :Ġ

Nếu ϕ là vô hướng mật độ :

$$\nabla_c\phi = \partial_c\phi - w\Gamma^b_{bc}\phi$$

Xét trường hợp đặc biệt khi w=1 ; c=a

$$\nabla_a \mathcal{T}^a = \partial_a \mathcal{T}^a + \Gamma^a_{ba}\mathcal{T}^b - \Gamma^b_{ba}\mathcal{T}^a = \partial_a \mathcal{T}^a$$

DoĠ có cùng cấu trúc

$$\nabla_a \mathcal{T}^a = \partial_a \mathcal{T}^a$$

§16. ĐỊNH THỨC MÊTRIC

Trong không Riemann với mêtric Ġta có phép biến đổi:

$$\bar{g}_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^b} g_{cd} \tag{4}$$

$$\bar{g}^{ab} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^d} g^{cd}$$

(5)

Lấy định thức (4) ta được :Ġ

Định thức mêtric g theo định nghĩa là mật độ vô hướng với trọng lượng +2, do giáo trình của ta các mêtric có negative signature nên định thức g sẽ âm vậy ta viết:

$$(-\bar{g}) = J^2(-g) \Rightarrow (-\bar{g})^{1/2} = J(-g)^{1/2} \tag{6}$$

$(-g)^{-1/2}$: maät ñoä voâ höôùng vôùi troïng löôïng +1

(7)

Với tenxơ bất kỳĠ khi nó nhân vớiĠ sẽ tạo nên tenxơ mật độ với trọng lượng +1

DoĠ nênĠ (8)

Ta xét công thức sau: Cho ma trậnĠ thì ma trận nghịch đảo

$$b^{ij} = \frac{A^{ij\sim}}{det|a_{ij}|}$$

$$a = det|a_{ij}|$$

A^{ij} phaàn phuï ñaïi soá cuûa a_{ij}

Nghĩa làĠ (khai triển theo hàng i) (9)

Đạo hàm (9)

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum a_{ij} A^{ij} = A^{ij}$$ vieát theo kieåu môùi khoâng coù

$\sum$

NếuĠ thì

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = A_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = ab^{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}$$

(10)

Áp dụng công thức (10) choĠ ta được

$$\frac{\partial g}{\partial x^c} = gg^{ba} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} = gg^{ab} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}$$

(11)

Hay ta có thể viết:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ab}} = gg^{ab}$$

DoĠ cũng là hàm củaĠ ta đạo hàm và áp dụng (12)

$$\frac{\partial (-g)^{1/2}}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2-1} \frac{\partial (-g)}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{2}(-g)^{-1/2}(-g)g^{ab}$$

Hay $$\frac{\partial (-g)^{1/2}}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2} g^{ab}$$

(13)

CHƯƠNG II

PHƯƠNG TRÌNH EINSTEIN

§1.CÁC NGUYÊN LÝ TRONG THUYẾT TƯƠNG ĐỐI RỘNG

1.Nguyên lý Mach.

Sự phân bố vật chất xác định tính chất hình học của không gian quanh nó. Nói cách khác, vật chất sẽ nói cho không gian biết phải cong như thế nào còn không gian sẽ nói cho vật chất biết phải chuyển động ra sao- John Wheeler .

2. Nguyên lý tương đương –The principle of Equivalence.

Thí nghiệm trong máy Einstein:

Thang máy đứng yên tại mặt đất, phi hành gia thả quả táo, quả táo sẽ rơi tự do xuống với gia tốcĠ.

Thang máy chạy thật êm tại khoảng không vũ trụ với gia tốcĠ.Phi hành gia thả quả táo, quả táo vẫn rơi xuống sàn giống như trường hợp đứng yên tại mặt đất. Nếu động cơ thang máy chạy thật êm thì sẽ có lúc phi hành gia không phân biệt được lúc nào thang máy đứng yên tại mặt đất, lúc nào thang máy chuyển động với gia tốc Ġtrong khoảng không vũ trụ.

Chuyển động tự do trong hệ qui chiếu không quán tính giống như chuyển động của vật trong hệ qui chiếu quán tính có trường ngoài làø trường hấp dẫn.

Nếu thang máy quay ,ta luôn có thể thay thế bằng trường hấp dẫn tương đương có bản chất đã tính đến lực ly tâm và lực Coriolis.

Chú ý :

Không thể áp dụng nguyên lý này cho toàn không gian vì tại vô cùng trường hấp dẫn thật sẽĠ trong khi trường hấp dẫn tương đương có thể tiến tới vô cùng lớn (chuyển động quay chẳng hạn)

Nguyên lý này áp dụng cho vùng không gian hẹp.

3. Nguyên lý hiệp biến tổng quát.

Mọi phương trình vật lý đều được diễn tả bởi phương trình hiệp biến (dưới dạng Tenxơ). Nghĩa là nó có dạng như nhau trong mọi hệ quy chiếu. Điều này không có nghĩa mọi hệ quy chiếu là tương đương nhau trong toàn không gian. Kết quả đo được sẽ khác nhau nhưng dạng của phương trình thì không đổi.

Einstein lý luận rằng mọi người quan sát – quán tính hay không quán tính – đều có khả năng tìm ra các định luật vật lý. Nếu điều đó không đúng thì rõ ràng chúng ta đã không thể tìm ra định luật vật lý nào hết vì quả đất của ta là hệ qui chiếu không quán tính.

Hệ toạ độ trong phép tenxơ = Hệ qui chiếu bất kỳ trong vật lý

4. Nguyên lý tương ứng-The correspondence principle.

General relativity → Newton theory of gravitation

↓ ↓

Special relativity → Newton mechanics in the absence of gravitation

5. Hệ quả từ nguyên lý tương đương.

$$F = ma \qquad\qquad m\text{: khoái löôïng quaùn tính}$$

$$F = G\frac{Mm_g}{r^2} = m_g.g \qquad\qquad m_g\text{ : khoái löôïng haáp daãn}$$

Do ta có thể thay thế lực gây gia tốcĠ bằng lực hấp dẫn gây raĠ nên khối lượng quán tính tự nó phải bằng khối lượng hấp dẫn .

$$m_{\text{Quaùn tính}} = m_{\text{Haáp daãn}}$$

Dike tại Princeton và Braginski tại Moscow đã đo và kết quả của sự sai khác giữa hai loại khối lượng trên gần bằng 10-12.

§2. PHƯƠNG TRÌNH PALATINI

Theo định nghĩa tenxơ Rienann có dạng :

$$R^a_{bcd} = \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} \qquad (1)$$

Tại điểm P bất kỳ ta chọn hệ tọa độ trắc địa. Khi đó :

$$\Gamma^a_{bc}(P) = 0 \qquad (2)$$

Lúc này tenxơ Riemann sẽ có dạng:

$$R^a_{bcd} = \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc}$$

(3)

Chú ý: trong hệ toạ độ trắc địa đạo hàm của hệ số liên thông sẽ khác không mặc dù bản thân hệ số liên thông bằng không.

Bây giờ ta thực hiện phép thay đổi sau:

$$\Gamma^a_{bc} \to \overline{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + \delta\Gamma^a_{bc} \qquad (4)$$

$\delta\Gamma^a_{bc}$: bieán phaân cuûa heä soá lieân thoâng. Ta cuõng chöùng minh ñöôïc baûn thaân heä soá liên thông không phải là tenxơ nhưng biến phân của nó là tenxơ

Töø söï thay ñoåi naøy daãn ñeán söï thay ñoåi cuûa tenxô Riemann:

$$R^a_{bcd} \to \overline{R}^a_{bcd} = R^a_{bcd} + \delta R^a_{bcd} \qquad (5)$$

$$\delta R^a_{bcd}(P) = \delta(\partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc}) = \partial_c(\delta\Gamma^a_{bd}) - \partial_d(\delta\Gamma^a_{bc})$$

(6)

Mặt khát

Nên thay vào(6):

$$\delta R^a_{bcd}(P) = \nabla_c(\delta\Gamma^a_{bd}) - \nabla_d(\delta\Gamma^a_{bc}) \qquad (7)$$

DoĠ la øtenxơ nênĠ cũng là tenxơ

$\Rightarrow$phöông trình (7) laø phöông trình tenxô. Phöông trình tenxô naøy ñuùng trong heä toïa độ trắc địa nhưng cũng đúng trong hệ tọa độ bất kỳ. Ta có thể tổng quát hóa:

$$\delta R^a_{bcd} = \nabla_c(\delta\Gamma^a_{bd}) - \nabla_d(\delta\Gamma^a_{bc})$$

(8)

Nhân 2 vế của (8) vớiĠ hay nói cách khác choĠ

$$R^a_{bcd} = R_{bd}$$

$$\delta R_{bd} = \nabla_a(\delta\Gamma^a_{bd}) - \nabla_d\left(\delta\Gamma^a_{ba}\right)$$

(9)

(8) và (9) có tên là phương trình Palatini.

§3. HÀM TÁC DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH HẤP DẪN

Ta nhớ lại thuyết tương đối hẹp:

Ġ Ġ vô hướnŧ

Còn hàm tác dụng của hạt điện tích q xác định trong điện – từ trường

$$I = \int_a^b \left(-mcds - \frac{q}{c} A_i dx^i \right)$$ (xem Landau- 68)

Sau một vài biến đổi ta xác định hàm Lagrange

$$\mathscr{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v} - q\phi = \text{voâ höôùng}$$

Từ ý tưởng trên ta sẽ xây dựng hàm tác dụng cho trường hấp dẫn .

1. Do phân bố vật chất quyết định tính chất hình học của không – thời gian mà tính chất hình học của không - thời gian lại được đặc trưng bởi các tenxơ metric g_{ab} neân ta phaûi tính ñeán söï coù maët cuûa caùc g_{ab}.

2. Tenxơ Riemann của ta có chứa đạo hàm riêng 2 lần của metric nên ta hy vọng phương trình trường hấp dẫn sẽ có mặt tenxơĠ (phương trình 2 Newton có đạo hàm hai lần quĩ đạo theo t)

3. Hàm Lagrange của ta sẽ phải là vô hướng giống như trong thuyết tương đối hẹp và trong điện – từ trường.

Ta chọn : Ġvô hướng (1)

Ta chọnĠvì không – thời gian của ta cóĠ âm.

Hàm tác dụng của trườngĠ (2)

Hàm Ġ gọi là hàm Einstein Lagrange.

(đây không phải là cách chọn duy nhất. Eddington chọn kiểu khác nhưng cách của Einstein là đơn giản nhất) į

Chú ý: Ġ

Tích phân lấy trong vùngĠ không – thời gian 4 chiều. Ta phải thêm điều kiện của phương pháp biến phân làĠ sẽ bằng zero tại biên Ť của vùngĠ (giống như cơ lý thuyết)

Nếu ta ký hiệu : Ġ Ġ Ġ (3)

$$I = \int_{\Omega} g^{ab} R_{ab} d\Omega = \int_{\Omega} \mathscr{L}_G d\Omega$$

(4)

Bây giờ ta xét biểu thức sau:

$g_{ab} \to g_{ab} + \delta g_{ab}$ hay $g^{ab} \to g^{ab} + \delta g^{ab}$

DoĠnên :

$$\left(g^{ab} + \delta g^{ab}\right)\left(g_{bc} + \delta g_{bc}\right) = \delta_c^a + \delta g^{ab} g_{bc} + g^{ab} \delta g_{bc} + 0\left(\delta^2\right)$$

(5)

$$\delta \delta g_c^a = 0 = \delta(g^{ab} g_{bc}) = \delta g^{ab} g_{bc} + g^{ab} \delta g_{bc}$$

$$\Rightarrow g_{bc} \delta g^{ab} = -g^{ab} \delta g_{bc}$$

$$\Rightarrow g^{cd} g_{bc} \delta g^{ab} = -g^{cd} g^{ab} \delta g_{bc}$$

$$\delta_b^d \delta g^{ab} = -g^{ab} g^{cd} \delta g_{bc}$$

$$\delta g^{ad} = -g^{ab} g^{cd} \delta g_{bc}$$

(6)

Ta lấy biến phân (4):

$$\delta I = \int_{\Omega} (\delta g^{ab} R_{ab} + \underbrace{g^{ab} \delta R_{ab}}) d\Omega$$

(7)

ta xét riêng số hạng này

$$\int_{\Omega} g^{ab} \delta R_{ab} d\Omega = \int_{\Omega} g^{ab} \left(\nabla_c \delta\Gamma_{ab}^c - \nabla_b \Gamma_{ac}^c\right) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \left[\nabla_c \left(g^{ab} \delta\Gamma_{ab}^c\right) - \nabla_b \underbrace{\left(g^{ab} \delta\Gamma_{ac}^c\right)} \right] d\Omega$$

với số hạng này ta cho b, c đổi chỗ cho nhau

$$= \int_{\Omega} \left[\nabla_c \left(g^{ab} \delta\Gamma_{ab}^c\right) - \nabla_c \left(g^{ac} \delta\Gamma_{ab}^b\right)\right] d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \partial_c (g^{ab} \delta\Gamma_{ab}^c - g^{ac} \delta\Gamma_{ab}^b) d\Omega$$

$$= \int_{d\Omega} (g^{ab} \delta\Gamma_{ab}^c - g^{ac} \delta\Gamma_{ab}^b) ds_c = 0$$

Vì theo điều kiện phương pháp biến phân tại thì biến phân tại bề mặt của vùngĠ sẽ phải bằng 0.

Chú ý: Ta đã sử dụng các công thức đã chứng minh ở chương 1- §16:

$$\nabla_c g^{ab} = 0 \quad ; \quad \nabla_c \left[(-g)^{1/2} T^a \right] = \partial_c \left[(-g)^{1/2} T^a \right]$$

$\int\limits_{\Omega} \partial_a T^a d\Omega = \int\limits_{d\Omega} T^a ds_a$ ñònh lyù Gauss cho khoâng – thôøi gian 4 chieàu.

Ta viết lại (7): Ġ

$$= 0$$

$$= \int\limits_{\Omega} R_{ab}\delta[(-g)^{1/2} g^{ab}]d\Omega$$

$$= \int\limits_{\Omega}[R_{ab}g^{ab}\delta(-g)^{1/2} + R_{ab}(-g)^{1/2}\delta g^{ab}]d\Omega$$

chú ý (6) vàĠ

$$= \int\limits_{\Omega}[R_{ab}g^{ab}\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g^{cd}\delta g_{cd} + R_{ab}(-g)^{1/2} \ (-g^{ac}g^{bd})\delta g_{cd} \ ]d\Omega$$

$$= \int\limits_{\Omega} (-g)^{1/2}(\frac{1}{2}Rg^{cd} - R_{ab} \ g^{ac}g^{bd})\delta g_{cd} \ d\Omega$$

$$= -\int\limits_{\Omega}(-g)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}Rg^{cd} + R^{cd}\right)d\Omega$$

$$= -\int\limits_{\Omega} (-g)^{1/2} \ G^{cd} \ \delta g_{cd} \ d\Omega = \int\limits_{\Omega}\frac{\delta\mathscr{L}_G}{\delta g_{cd}}\delta g_{cd}d\Omega$$

$\delta I = 0$ khi vaø chæ khi $-(-g)^{1/2} \ G^{cd} \ = 0$ vì δg_{cd} baát kyø

$$\frac{\delta\mathscr{L}_G}{\delta g_{ab}} = -(-g)^{1/2}G^{ab} = 0$$

(8)

Với cách chọn hàm Lagrange tương ứng với trường hấp dẫn và nhờ nguyên lý tác dụng tối thiểu ta tìm được phương trình Einstein – Lagrange:

$$\frac{\partial\mathscr{L}_G}{\partial g_{ab}} - \frac{\partial}{\partial x^c}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_G}{\partial \dot{g}_{ab}}\right) = \frac{\delta\mathscr{L}_G}{\delta g_{ab}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(-g)^{1/2} \ G^{ab} = 0 \Leftrightarrow G^{ab} = 0$$

(9)

Phương trình này có tên phương trình Einstein dành cho chân không, (Vacuum) cho không - thời gian nằm ngoài vật chất tạo ra trường.

§4. PHƯƠNG TRÌNH EINSTEIN TỔNG QUÁT

Ở phần trước ta tìm được phương trình Einstein cho chân không. Muốn tìm phương trình tổng quát ta phải cộng thêm hàm Lagrange tương ứng với sự có mặt của vật chất. Ta gọi matter Lagrangť

Bây giờ hàm tác dụng có dạngĠ

VớiĠ: hệ số kết nối.

Bằng nguyên lý tác dụng tối thiểu ta tính được:

$$\frac{\delta \mathscr{L}_G}{\delta g_{ab}} = -(-g)^{1/2} G^{ab}$$

Hoàn toàn tương tự ta tính được :

$$\frac{\delta \mathscr{L}_M}{\delta g_{ab}} = (-g)^{1/2} T^{ab}$$

(10)

T^{ab}: tenxô haïng hai naøo ñoù noùi leân aûnh höôûng cuûa vaät chaát trong vuøngΩ ñang xeùt. Nói một cách khác tenxơ trên là đại lượng đặc trưng cho khối lượng và năng lượng. Sau này sẽ chứng minh được làĠtenxơ năng-động lượng (The energy – momentum tensor).

Tương tự như ở phần trước :

$$\frac{\delta \mathscr{L}_G}{\delta g_{ab}} + k\frac{\delta \mathscr{L}_M}{\delta g_{ab}} = -(-g)^{1/2} G^{ab} + k(-g)^{1/2} T^{ab} = 0$$

(11)

$$\Rightarrow G^{ab} = kT^{ab} \qquad \Leftrightarrow \qquad G_{ab} = kT_{ab}$$

(12)

Phương trình (11) có nghĩa :

- Độ cong của không gian = Hệ số tỉ lệĠ đại lượng đặc trưng cho khối – năng lượng

1. Đây là phương trình vi phân xác định các tenxơ metricĠ từ tenxơ năng-động lượngĠ. Điều này phù hợp với nguyên lý Mach: Sự phân bố vật chất xác định tính chất hình học của không gian. KhiĠ ta có phương trình cho vùng không gian nằm ngoài vật chất sinh ra trường (chân không) .

2. Các phương trình Einstein rất khó giải vì nó là phương trình không tuyến tínhĠ ta không thể áp dụng nguyên lý chồng chất. Về mặt vật lý có nghĩa là từ một vấn đề vật lý phức tạp ta không thể phân tích thành các thành phần đơn giản hơn để nghiên cứu.

3. Phương trình vi phân không tuyến tính sẽ cho ta rất nhiều nghiệm trong đó có nhiều nghiệm không có ý nghĩa vật lý vì vậy các nghiệm cần phải được thực nghiệm kiểm chứng .

Sau một vài biến đổi đơn giản ta đưa (11) về dạng sau:

$$R_{ab} = k\left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T\right)$$

(13)

Dạng thứ 2 của phương trình Einstein.

Sau này Einstein có đưa thêm số hạnŧ: nên phương trình (11) có dạng:

$$G_{ab} - \lambda g_{ab} = kT_{ab}$$

Ġ: hằng số vũ trụ do Einstein đưa vào để phù hợp với mô hình vũ trụ khi đó là tĩnh. Sau này các quan sát của Hubble chứng minh rằng vũ trụ đang nở ra.

Chứng minh trên đã dẫn đến việc Einstein từ chối hằng số vũ trụ. Ông nói: đó là sai lầm lớn nhất trong đời mà tôi mắc phải.

Ngày nay khi nghiên cứu vũ trụ người ta chia ra 3 trường hợp:

$\lambda\langle 0$; $\lambda = 0$; $\lambda\rangle 0$

- Hệ số kết nối (hệ số tỉ lệ)Ġ nếu xét trong hệ tương đối tính
- Hệ số kết nối (hệ số tỉ lệ)Ġ nếu xét trong hệ SI

Ġ: hằng số hấp dẫn;Ġ: vận tốc ánh sáng trong chân không.

CHƯƠNG III

NGHIỆM SCHWAZSCHILD

Sau khi công bố thuyết tương đối rộng Einstein nghĩ rằng chắc phải khá lâu mới có người tìm ra nghiệm bởi phương trình Einstein là phương trình phi tuyến. Tuy nhiên sau đó hai tháng Einstein nhận được công trình của Schwarzschild và ông thốt lên: Tôi không ngờ rằng bạn đã giải quyết vấn đề một cách đơn giản đến như vậy. Việc tìm ra nghiệm của bạn thật tuyệt vời.

Thật không may vào ngày 11-5-1916 Schwarzschild mất vì bệnh, hưởng dương 43 tuổi.

§1. NGHIỆM SCHWARZSCCHILD (13.1.1916)

Xét không gian nằm ngoài vật thể cô lập, tĩnh và có tính đối xứng cầu, khi đó ta có thể coi nhưĠkhông phụ thuộc vaů.

Ta lập luận như sauĺ

Do không –thời gian 4 chiều nên ta có tổng cộng 16.Ġ nhưngĠ=Ġ nên số phần tử độc lập làĠ

Ta hoàn toàn có thể biến đổ từĠTa có thể lựa chọnĠ trong sốĠ g_{ab} ñoäc laäp (cònĠ phần tử độc lập.

Do cácĠ luôn đưa được về dạng chéo nên cuối cùng ta chỉ cần xác định 4 phần tử Ġ,ĠĠĠ. Bắt đầu từ toạ độ cầu trong không gian 3 chiều:

ChoĠconst, ta dịch chuyển P từĠ

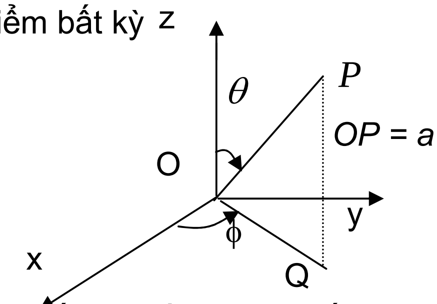
ĠkhoảngĠcung chắn gócĠ=Ġ

ChoĠconst, ta dịch chuyểnĠ từĠ

ĠĠcung chắn gócĠsiŮ□

Vậy khoảng cách vô cùng nhỏ giữa hai điểm bất kỳ trên mặt cầu:

$$ds^2 = ds_\theta^2 + ds_\phi^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2\right)$$



Hoàn toàn tương tự ta có dạng đơn giản nhất của Ġ có tính đối xứng cầu trong không_thời gian bốn chiều:

$$ds^2 = Adt^2 - Bdr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2\right)$$

(1)

Do hàm mũ luôn dương nên ta chọn:

Ġ Ġ, trong trường hợp tổng quát ta cóĠ

Ġ□ Ġ, trong trường hợp tổng quát ta cóĠ

$$ds^2 = e^{v} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad \right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow g_{ab} = \mathrm{diag}\left(e^{v}, -e^{\lambda}, -r^2, -r^2 \sin^2\theta\right)$$

(3)

$$g^{ab} = diag\left(e^{-v}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2}\theta\right)$$

(4)

Nếu ta coi như cácĠ nàylà nghiệm của phương trình Einstein dành cho chân không thì thay cácĠ này vào, phương trình sẽ nghiệm đúng. Từ đây ta tính được cácĠ vàĠ.

$$G_b^a = R_b^a - \frac{1}{2}\delta_b^a R = 0$$

(5)

$$R_b^a = g^{ac} R_{cb}$$

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{cd}^c \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{db}^c \Gamma_{ac}^d$$

(6)

với Ġ (7)

Sau khi thay (3),(4) vào (7) ta tính được cácĠ sau đó lại thay tiếp vào (6) ta tính được tenxơ Ricci(tính được tenxơ Einstein.

$$G_0^0 = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad ; \quad G_0^1 = \frac{-e^{-\lambda}\dot{\lambda}}{r} = 0 \quad (8)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad ; \quad G_2^2 = G_3^3$$

(9)

dấu Ġ còn dấuĠ

(10)

Lấy (8)-(9): Ġ Ġ

$$\Rightarrow \quad \lambda' + v' = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(\lambda + v) = 0$$

(Ġ const nếu ta chọn constĠ

$$\Rightarrow \quad \lambda + v = 0 \Rightarrow \quad v = -\lambda$$

(11)

Ta viết lại (8):Ġ

DoĠ nên:

Ġ chuyển từĠsangĠ v

$$d(re^{-\lambda}) = dr \quad \Rightarrow re^{-\lambda} = r + \text{const}$$

ta chọn consŴ (ĠĽ

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$$

$$\Rightarrow \qquad e^{\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

(12)

Do $$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$$

(13)

Thay vào kết quả tìm được vào (2):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dt^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2\right)$$

(14)

Nghiệm đối xứng cầu của phương trình Einstein cho chân không (14) có tên yếu tố độ dài Schwarzschild nổi tiếng hay nghiệm Schwarzschild nổi tiếng.

Ở đây ta coi nhưĠ vàĠ

Nhận xét:

Khi $r \to \infty$ (14) $\Rightarrow ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\right)$

Đây là dạng của metric trong thuyết tương đối hẹp. Ta nói nghiệm (14) có tiệm cận phẳng.

Khi trường hấp dẫn rất yếu (trường hấp dẫn Newton từ đây ta tính được:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \qquad \text{Do } \Phi = -\frac{GM}{r}$$

Mặt khác:Ġ

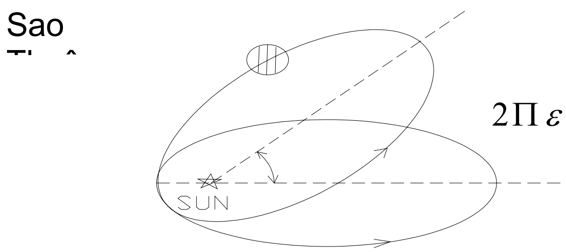
So sánh rút ra:Ġ m : geometric mass (15)

Trong hệ SI ta có:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\right)$$

§2. QUỸ ĐẠO KỲ LẠ CỦA SAO THỦY- MECURY

- Cơ học Newton giải thích được tại sao khi quay quanh mặt trời trục chính của quỹ đạo Sao Thủy lại tiến động như hình dưới đây:



Ta có thể xem mặt trời là khối cầu. Do khối lượng rất lớn nên mặt trời tạo ra quanh mình trường hấp dẫn mạnh có tính đối xứng cầu. Lúc này nghiệm thích hợp nhất cho vùng không –thời gian quanh mặt trời là nghiệm Schwarzschild.

Ta xét hạt khối lượng đơn vị chuyển động trên đường trắc địa giống-thời gian (time-like) dựa trên nghiệm Schwarzschild.

Ta có:Ġ; chia hai vế cho thời gian riênŧ

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b$$

(1)

Ta phải dùng thời gian riêng (proper time) vì thời gian riêngĠlà thông số Affine.

Nếu ta coõ ĨĽ□ (2)

Như đã biết:

$$2\mathscr{L} = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b$$

Nên ta có:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = 1 = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 2\mathscr{L}$$

Thay cácĠ của Schwarschild vào (3):

$$2\mathscr{L} = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 1 \qquad (4)$$

(4) là hàm Lagrange cho hạt chuyển động trong không –thời gian được mô tả bởi nghiệm Schwarzschild. Từ nguyên lý tác dụng tối thiểu ta có phương trình Lagrange:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^a} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^a}\right) = 0 \qquad a = 0,1,2,3$$

Ta chỉ cần tìm 3 phương trình là đủ:

a=0 $\quad \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{t}} = \left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{t}$

$$0 - \frac{d}{d\tau}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$

(5)

$a = 2$ $$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = -r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 \quad ; \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = -r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 = 0$$

(6)

$a = 3$ $$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0; \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} = -r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}$$

$$0 + \frac{d}{d\tau}\left[r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}\right] = 0 \tag{7}$$

Trong cơ học Newton ta thường xét chuyển động của các hành tinh trong mặt phẳng nên bây giờ trong thuyết tương đối rộng ta cũng xét chuyển động của các hành tinh trong mặt phẳng xích đạo.

Xét trường hợp :Ġ Ġ Ġ

Thay vào (7):

$$\frac{d}{d\tau}\left[r^2 \sin^2\frac{\Pi}{2}\dot{\phi}\right] = \frac{d}{d\tau}\left[r^2 \ \dot{\phi}\right] = 0$$

$$r^2\dot{\phi} = const \equiv h$$

(8)

Xét (5):

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\ \dot{t}\right] = 0 \qquad \Rightarrow \left(1-\frac{2m}{r}\right)\ \dot{t} = const \equiv k \tag{9}$$

Thay (9) vào (4):

$$k^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} r^2 - 0 - \ r^2\dot{\phi}^2 = 1 \tag{10}$$

ĐặtĠ Ġ

Thay vào (10) và sau một vài biến đổi đơn giản ta được:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{k^2-1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} + 2mu^3 \tag{11}$$

Có thể giải (11) bằng tích phân ellispe, tuy nhiên ta có cách giải gần đúng sau:

Đạo hàm (11) theoĠ:

$$2\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u\frac{du}{d\phi} = \frac{2m}{h^2}\frac{du}{d\phi} + 6mu^2\frac{du}{d\phi}$$

Từ đây ta được phương trình Binet tương đối tính.

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \qquad (12)$$

-Nhớ lại trong cơ học Newton ta có phương trình Binet:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \qquad \mu = G(M_1 + M_2)$$

So sánh ta thấy phương trình (12) sai khác ở số hạngĠ. Đối với sao Thủy số hạng nàyĠnên ta có thể áp dụng phương pháp gần đúng để tính .

Ta đưa vào thông số: Ġ

Thay vào (12): Ġ (13)

Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \qquad (14)$$

Thay (14) vào (13):

$$u_0'' + u_0 - \frac{m}{h^2} + \varepsilon\left(u_1'' + u_1 - \frac{h^2 u_0{}^2}{m}\right) + O(\varepsilon^2) = 0 \qquad (15)$$

Áp dụng phương pháp nhiễu loạn ta có:

1. Gần đúng bậc không :Ġ phương trình Binet. Nghiệm có dạng: $u_0 = \frac{m}{h^2}(1 + e\cos\phi)$. Ta choïn $\phi_0 = 0$

Thực chất đây là bài toán Kepler mà ta đã giải trong cơ lý thuyết:

$$r = \frac{\lambda}{1 + e\cos\phi} \qquad \Rightarrow \frac{1}{r} = \lambda^{-1}(1 + e\cos\phi)$$

vớiĠ

2. Gần đúng bậc một: Ġ (16)

ThayĠvào (16):

$$u_1'' + u_1 = \frac{m}{h^2}(1 + e\cos\phi)^2 = \frac{m}{h^2}(1 + 2e\cos\phi + e^2\cos^2\phi)$$

Do $\cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$

$$u_1'' + u_1 = \frac{m}{h^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \frac{2me}{h^2}\cos\phi + \frac{me^2}{2h^2}\cos 2\phi$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng: Ġ

Sau khi tìm nghiệm ta được:

$$A = \frac{m}{h^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \quad ; \quad B = \frac{me}{h^2} \quad ; \quad C = -\frac{me^2}{6h^2}$$

Tóm lại nghiệm tổng quát (14) với độ chính xác bậc một có dạng:

$$u = u_0 + \varepsilon \frac{m}{h_2}\left[1 + e\phi \sin\phi + e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2\phi\right)\right] \qquad (17)$$

Hay:

$$u \approx \frac{m}{h^2}(1 + e\cos\phi + \varepsilon e\phi \sin\phi) \approx \frac{m}{h^2}\{1 + e\cos[\phi(1-\varepsilon)]\}$$

Ta đã áp dụng:

$$\cos(\phi - \phi\varepsilon) = \cos\phi \cos\varepsilon\phi + \sin\phi \sin\varepsilon\phi$$

3. Cuối cùng ta đã giải quyết xong bài toán Kepler trong thuyết tương đối rộng và kết quả:

$$u = \frac{m}{h^2}\{1 + e\cos[\phi(1-\varepsilon)]\} \qquad (18)$$

(18) mô tả quỹ đạo hành tinh là elipse nhưng do cosnx có chu kỳ làĠ nêŮ sẽ có chu kỳ l□.

$$\frac{2\Pi}{(1-\varepsilon)} = 2\Pi(1 + \varepsilon + ...) \approx 2\Pi(1+\varepsilon) = 2\Pi + 2\Pi\varepsilon \qquad (19)$$

Biểu thức này có nghĩa là sao Thủy sau khi quay một vòng quanh mặt trời thì trục chính của elipse sẽ quay được một góc bằngĠ

Sau khi chuyển sang hệ SI ta được:

$$2\Pi\varepsilon \approx \frac{24\Pi^3 a^3}{c^2 T^2 (1-e^2)} \qquad (20)$$

Công thức này do Einstein tìm ra đầu tiên.

Ġ trục chính của elipse; Ġ vận tốc ánh sáng

Ġ chu kỳ-Thời gian hành tinh quay hết một vòng.

Ġ eccentricity của quỹ đạo

Kết quả quan sát năm 1971		**Tính toán lý thuyết**
Sao Thuỷ	43.1”± 0.5”	43”
Sao Kim	8.4” ± 4.8”	8.6”
Quả đất	5” ±1.2”	3.8”
(Trong 100 năm)		

§3. SỰ UỐN CONG CỦA TIA SÁNG.

Theo thuyết tương đối hẹp, ánh sáng trong chân không sẽ truyền theo đường thẳng. Theo thuyết tương đối rộng ánh sáng sẽ truyền theo đường trắc địa null(null-geodesic) . Ta sẽ xét tia sáng đi trong trường hấp dẫn gây bởi mặt trời.

Ta xây dựng hàm Lagrange cho ánh sáng vớiĠ -Schwarschild

$$2\mathscr{L} = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0 \tag{1}$$

$$2\mathscr{L} = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{2}$$

Hoàn toàn tương tự như §2 ta được phương trình cho tia sáng ứng với

$$\theta = \frac{\Pi}{2}; \qquad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \quad ; \qquad \sin\theta = 1$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 \tag{3}$$

Với trường hợp giới hạn khiĠ ta trở về thuyết tương đối hẹp

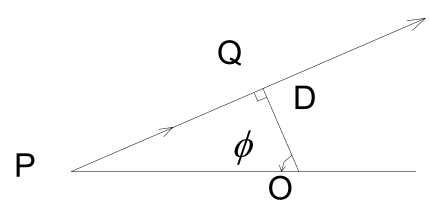
$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0$$

(4)

Nghiệm (4)có dạng:

$$u_0 = \frac{1}{D}\cos(\phi - \phi_0) \quad ; \quad D = const$$

Đây là phương trình đường thẳng. Kết quả phù hợp với thuyết của Newton.



$$OP = r \quad ; \quad OQ = D$$

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{r} = u \qquad \text{choïn } \phi_0 = 0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{D}\cos\phi \Leftrightarrow D = r.\cos\phi$$

Tuỳ theo giá trịĠmà tam giác có thể thay đổi nhưng lúc nàoĠ lúc nào cũng vẫn là đường thẳng. Bây giờ quay lại phương trình (3) của thuyết tương đối rộng.

$$u''+u=3mu^2$$

(6)

Tìm nghiệm dưới dạng:Ġ (7)

Sau khi thay (7) vào (6) ta được:

$$u_0''+u_0+3m\left(u_1''+u_1\right)=3mu_0^2+18m^2u_0u_1+27m^2u_1^2$$

1. Gần đúng bậc không :

Ġ ta chọnĠ

2. Gần đúng bậc một:

$$u_1''+u_1=u_0^2 \Rightarrow u_1''+u_1=\frac{1}{D^2}\cos^2\phi \quad (8)$$

(8) là phương trình vi phân bậc hai có vế phải . Ta cần chọn 1 nghiệm riêng của (8) và nghiệm đó có dạng:

$$u_1=\frac{1}{3D^2}(2-\cos^2\phi)$$

Vậy nghiệm tổng quát gần đúng bậc 1 sẽ là :

$$u=u_0+3mu_1=\frac{\cos\phi}{D}+\frac{m}{D^2}\left(2-\cos^2\phi\right)$$

(9)

Xét giá trị tiệm cận của (9):

DoĠnên khi Ġ thì Ġ vậy ta có :

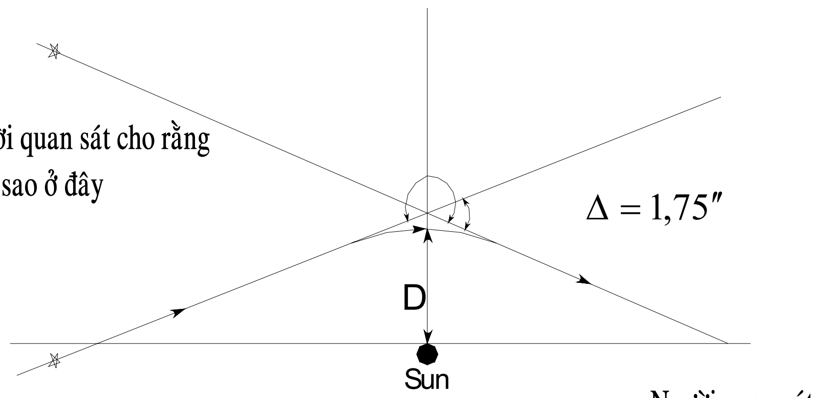
$$0=\frac{\cos\phi}{D}+\frac{m}{D^2}(2-\cos^2\phi)\approx\frac{\cos\phi}{D}+\frac{2m}{D^2}$$

$$\Rightarrow \cos\phi=-\frac{2m}{D} \text{ suy ra ngay } \phi=\pm(\frac{\pi}{2}+\frac{2m}{D})$$

Từ hình vẽ ta tính được góc lệch của 2 đường tiệm cận khiĠ

Ġ DoĠ nênĠ

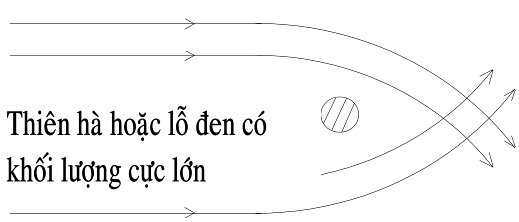
$$+(\frac{\Pi}{2}+\frac{2m}{D}) \qquad -(\frac{\Pi}{2}+\frac{2m}{D})$$



Vậy tia sáng khi đi ngang qua mặt trời sẽ bị bẻ cong dưới một góc bằng 1,75". Điều này có thể hiểu do trường hấp dẫn của mặt trời nên không – thời gian bao quanh nó đã bị uốn cong và việc tia sáng bị uốn cong là hệ quả. (Tia sáng truyền theo đường trắc địa null trong không – thời gian quanh mặt trời).

Để kiểm tra người ta chụp các sao khi không có mặt trời. Sau đó khi có nhật thực toàn phần người ta lại chụp lại các sao đó. So sánh hai bức ảnh người ta nhận thấy các sao trong ảnh khi nhật thực sẽ rời xa nhau hơn do tia sáng bị bẻ cong khi đi ngang qua mặt trời. Lúc này ta chọn D = bán kính mặt trời, có nghĩa coi như tia sáng đi sát mép mặt trời.

Ngày nay khi đo các tín hiệu từ các Quasars , người ta nhận thấy khi đi ngang qua mặt trời các tín hiệu vô tuyến đã bị lệch từĠ

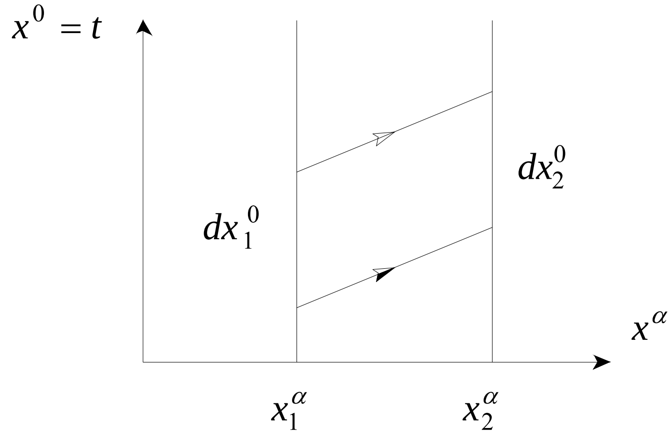


Hiệu ứng thấu kính hấp dẫn khi xét trong
không_thời gian Schwarzschild

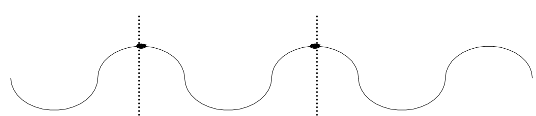
Hiệu ứng này được phát hiện năm 1980 khi quan sát quasar 0957+561A,łDo hiệu ứng trên mà chụp được 2 quasars. Thực tế có một quasar mà thôi.

§4. DỊCH CHUYỂN ĐỎ HẤP DẪN –GRAVITATIONAL RED SHIFT

Đây cũng là một trong những hiệu ứng kinh điển chứng minh sự đúng đắn của thuyết tương đối rộng. Từ nguyên lý tương đương ta có thể suy ra hiệu ứng này.



Để tiện ta ký hiệu như sau:Ġ; Ġ xét hai vị trícách xa nhau với hai đồng hồ nguyên tử chạy đồng bộ với nhau. Từ vị trí 1 ta gửi tín hiệu vô tuyến đến vị trí 2.



Tại 1: Thời gian giữa hai đỉnh sóng liên tiếp nhauĠlà thời gian riêng vì máy phát đứng yên tạiĠ. Tọa độĠsẽ được xác định từ định nghĩa thời gian riêng.

$$d\tau^2 = ds^2 = g_{ab} dx_1^a dx_1^b = g_{00} dx_1^0 dx_1^0 + 0 + 0 + 0$$
$$= g_{00}(x_1^\alpha)(dx_1^0)^2$$

(1)

Do máy phát đứng yên tại ı chỉ phụ thuộc vào tọa độ mà không phụ thuộc vào thời gian vì ta xét quá trình này trong không –thời gian tĩnh (Static Space-time :không –thời gian không giãn nở, co lại theo t).

Tại 2: Khi tín hiệu đến vị trí thứ 2 thì người quan sát tại đó sẽ nhận thấy khoảng thời gian giữa hai đỉng sóng liên tiêp sẽ làĠứng với tọa độ thời gian dx_2^0.

Tương tự như (1) ĺ (2)

Do không –thời gian tĩnh nênĠĽ

Lấy (2) chia (1)

$$\frac{(\alpha.d\tau)^2}{d\tau^2} = \alpha^2 = \frac{g_{00}(x_2^\alpha)}{g_{00}(x_1^\alpha)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{g_{00}(x_2^\alpha)}{g_{00}(x_1^\alpha)}\right)^{1/2}$$

(3)

Từ đây ta thấy hệ sốĠ chỉ cho ta biết đồng hồ chuẩn bị tại 2 gõ nhịp bao nhiêu lần trong khoảng thời gian tiếp nhận giữa hai đỉnh sóng. Điều này có nghĩa thiết bị nguyên tử tại 1 có tần số đặc trưngĠ thì người tiếp nhận tại 2 sẽ đo được tần sốĠ.

Nếu ta coi thời gian giữa hai đỉnh sóng tại 1 làĠ thì tại 2 sẽ làĠ

Do: $T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow T_0' = \alpha T_0 = \frac{\alpha}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_0'}$

$$\Rightarrow \nu_0' = \frac{\nu_0}{\alpha} = \nu_0\left(\frac{g_{00}(x_1^\alpha)}{g_{00}(x_2^\alpha)}\right)^{1/2}$$

(4)

Từ (4) ta nhận thấy nếu:Ġ

Tần số càng nhỏ thì bước sóng càng lớnĠlệch về phía đỏ (bước sóng dài).

*Độ lệch tần số được định nghĩa:

Ġ Nếu như trường hấp dẫn yếu thì ta có:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad ; \quad \Phi = -G\frac{M}{r}$$

(5)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu_0'}{\nu_0} - 1 = \left[\frac{1+\frac{2\Phi_1}{c^2}}{1+\frac{2\Phi_2}{c^2}}\right]^{1/2} - 1 \approx \frac{1+\frac{\Phi_1}{c^2}}{1+\frac{\Phi_2}{c^2}} - 1$$

$$= \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2 + \Phi_2} \approx \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}$$

(6)

Chú ý: Ġ

Thay (5) vào (6)ĺ

$$\frac{\Delta v}{v_0} = -\frac{GM}{c^2}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right)$$

(7)

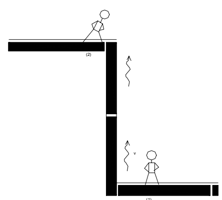
Dủ (ta xếp đặt thí nghiệm như vậy) nênĠ lệch về phía đỏ.

** Xét thí nghiệm được đặt tại đỉnh và chân núi:

(2) $v^{'}$

v

(1)



$$r_1 = R \;\; ; \;\; r_2 = R + H$$

Viết lại (7) :

$$\Rightarrow \;\; \frac{\Delta v}{v} = -G\frac{M}{c^2}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right) = -G\frac{M}{c^2}.\frac{H}{R(R+H)} \approx -\frac{GMH}{R^2.c^2}$$

$$\Delta v = v^{'} - v = -v\underbrace{\frac{GM}{R^2}}_{g}.\frac{H}{c^2} = -vg.\frac{H}{c^2}$$

$$v^{'} = v\left(1 - \frac{gH}{c^2}\right) \qquad (8)$$

Nếu đồng hồ nguyên tử tại 1 gõ nhịp vớiĠ thì người trên đỉnh núi sẽ nhận được $v^{'} < v$. Anh ta seõ suy luaän: moïi söï vieäc dieãn ra taïi chaân nuùi coù veû chaäm laïi. Thời gian trôi tại chân núi sẽ chậm hơn thời gian trôi tại đỉnh núi. Nói cách khác nếu hai đồng hồ nguyên tử giống hệt nhau được đặt tại đỉnh và chân núi thì cái đặt tại đỉnh núi sẽ chạy nhanh hơn ở đỉnh núi. Thời gian dường như chạy chậm hơn khi ở gần những vật có khối lượng lớn cỡ trái đất.

$$T=\frac{1}{\nu} < T' = \frac{1}{\nu'} \qquad \text{vì } \nu' < \nu$$

Nói cách khác ánh sáng sẽ mất năng lượng khi thoát từ vùng có trường hấp dẫn mạnh tới vùng có trường hấp dẫn yếu hơn và vì mất năng lượng nên bước sóng của nó phải dài ra.

** Từ công thức (4): Ġ

Nếu Ġ tần số bằng zero có nghĩaĠ. Ta có dịch chuyển đỏ hấp dẫn vô hạn. Điều này có nghĩa ta không nhận được tín hiệu gì hết vìĠ.

Năm 1960 Pound và Rebka cho đặt tại đỉnh và chân tháp nước tại trường đại học Harvard hai đồng hồ Hydrogen maser clock giống hệt nhau. Kết quả đo đạc cho thấy đồng hồ đặt tại chân tháp chạy chậm hơn đồng hồ tại đỉnh tháp.

Tính toán lý thuyết từ công thức (8) :Ġ

Kết quả đo đạc từ thực nghiệm :Ġ

CHƯƠNG IV

SÓNG HẤP DẪN

Sự nghiên cứu về sóng hấp dẫn của ta sẽ xuất phát từ những công trình của Einstein dựa trên dạng tuyến tính của phương trình hấp dẫn. Trong phép gần đúng trên ta sẽ thấy sóng hấp dẫn là sóng ngang và có hai trạng thái phân cực.

§1. PHƯƠNG TRÌNH EINSTEIN TUYẾN TÍNH HÓA

1. Ta xét không thời gian cong gần phẳng. Điều này có nghĩa metric của ta sẽ chỉ sai khác chút ít so với metric Minkowski.

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

Với :Ġ hayĠ (2)

Ta có: hab = (ac (bd hcd. Từ đây ta tính được:

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} \tag{3}$$

Do $$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{dc,b} + g_{db,c} - g_{bc,d})$$

Nên khi thay (1) và (3) vào ta nhận được biểu thức của ký hiệu Christoffel loại hai gần đúng bậc một theo hab

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} \eta^{ad} (h_{dc,b} + h_{db,c} - h_{bc,d}) = \frac{1}{2} (h^a_{c,b} + h^a_{b,c} - h^{;a}_{bc}) \tag{4}$$

Chú ý: ta đã sử dụng các ký hiệu:

$$\eta^{ad} \frac{\partial}{\partial x^d} h_{bc} \equiv h^{;a}_{bc}$$

Nếu chỉ xét tới bé bậc một thì tenxơ Riemann sẽ chỉ còn lại hai số hạng đầu:

ĉ+ bé bậc hai – bé bậc hai

Ta thay (1) và (4) vào biểu thức sau:

$$R_{abcd} = g_{ae} R^e_{bcd} = \frac{1}{2} (h_{ad,bc} + h_{bc,ad} - h_{ac,bd} - h_{bd,ac}) \tag{5}$$

Từ đây ta tính được tenxơ Ricci:

$$R_{ab} = g^{cd}R_{cadb} = \frac{1}{2}(h^c_{b,ac} + h^c_{a,bc} - h_{,ab} - \Box h_{ab}) \quad (6)$$

Ở đây ta đã sử dụng ký hiệu:

$$\eta^{cd}\frac{\partial}{\partial x^c}.\frac{\partial}{\partial x^d} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \Box$$

$h^a_a = h$; η^{cd}=diagonal (1, -1, -1, -1)

Biểu thức (6) gây cho ta một cảm giác khó chịu vì sự phức tạp của nó. Ta có thể làm mất sự khó chịu trên bằng phương pháp sau:

2. Bây giờ ta xét phép biến đổi Loreutz Gauge như sau:

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h \Rightarrow \bar{h}^c_a = h^c_a - \frac{1}{2}\delta^c_a h \quad (7)$$

Đạo hàm (7) theo chỉ số c ta được:

$$\bar{h}^c_{a,c} = h^c_{a,c} - \frac{1}{2}\delta^c_a h_{,c} = h^c_{a,c} - \frac{1}{2}h_{,a} \quad (8)$$

Nếu ta đặtĠ thì bắt buộcĠ (9)

Thay (9) vào (6) ta được:

$$R_{ab} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h_{,ba} + \frac{1}{2}h_{,ab} - h_{,ab} - \Box h_{ab}) = -\frac{1}{2}\Box h_{ab}$$

Do : $R = \eta^{ab}R_{ab} = \eta^{ab}(-\frac{1}{2})\Box h_{ab} = -\frac{1}{2}\Box h$

Từ đây ta tính được Tenxơ Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R = -\frac{1}{2}\Box h_{ab} + \frac{1}{4}\eta_{ab}\Box h = -\frac{1}{2}\Box(h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h)$$

$$G_{ab} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{ab}$$

Với phương trình Einstein tuyến tính hóa trong phép biến đổi Lorentz Gauge có dạng:

$$G_{ab} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{ab} = 8\pi T_{ab} \Rightarrow \Box\bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab} \quad (10)$$

Tương ứng với (9) và (10) ta có biểu thức cho metric đã tuyến tính hóa:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} = \eta_{ab} + \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\bar{h} \quad (11)$$

Với : ĉ

3. Ta còn một việc nữa là phải kiểm tra lại xem việc ta đặt $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$ seõ thay ñoåi ra sao khi ta aùp duïng pheùp bieán ñoåi voâ cuøng beù ñoái với toạ độ mà cụ thể là:

$$x^a_{old} \to x^a_{New} = x^a_{old} + \xi^a \quad (12)$$

Trong phần bài tập ta chứng minh được các biểu thức sau:

$$\bar{h}^{New}_{ab} = \bar{h}^{old}_{ab} - \xi_{a,b} - \xi_{b,a} + \eta_{ab}\xi^c_{,c} \quad (13)$$

$$\bar{h}^{a\,New}_{b,a} = \bar{h}^{a\,old}_{b,a} - \Box\xi_b \quad (14)$$

Từ (14) ta thấy ngayĠ khiĠ Ĩ

Do ta đã chọn Ġnên Ĩ (15)

Ta có thể lập luận ngược lại như sau : Nếu ta chọn (a sao cho :

Ĩ thì với việc chọn Ġ(Ġ

(phương trình Einstein tuyến tính hóa Ĩ (16)

Tóm lại ta có (16) trở về đúng dạng của (10) nghĩa là phép biến đổi vô cùng bé đối với tọa độ không làm thay đổi dạng phương trình (10). Khi không có vật chất sinh ra trường (10) sẽ có dạng

$$\Box\bar{h}_{ab} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{h}_{ab} = 0 \quad (17)$$

Đây chính là phương trình sóng quen thuộc mà ta đã gặp trong điện động lực học và phương trình vật lý toán. Nó mô tả quá trình sóng lan truyền trong không gian với vận tốc c = 1 và hoàn toàn tương tự như trong điện động lực nghiệm đơn giản nhất của (16) là sóng phẳng đơn sắc :

$$\bar{h}_{ab} = Real\ Part\ of\left(A_{ab}e^{ik_a x^a}\right) \quad (18)$$

Hoặïc với dạng phản biến :

$$\bar{h}^{ab} = Real\ Part\ of\left(A^{ab}e^{ik_a x^a}\right)$$

Vectơ sóngĠ

Giả sử sóng truyền theo trục x ta có :

$$k_a x^a = k_0 x^0 + k_1 x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3$$

$$= \omega t - k_x X$$

$$\bar{h}_{ab} = Real\ Part\ of\left(A_{ab} e^{i(\omega t - k_x X)}\right) \quad (19)$$

Kết luận : Khi xét trường hấp dẫn yếu trong chân không ta đã giả định không thời gian lúc này gần như không thời gian phẳng Minkowski

gab = (ab + hab với (hab(<< 1

Sau đó tương tự như trong điện động lực ta áp dụng phép biến đổi Lorents Gauge

$$\bar{h}^c_{a,c} = \mathbf{0} \Rightarrow h^c_{a,c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} h_{,a}$$

Và từ đây ta được :

$$G_{ab} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Box \bar{h}_{ab} = \mathbf{8}\pi T_{ab} \Rightarrow \Box \bar{h}_{ab} = -\mathbf{16}\pi T_{ab}$$

Với chân không ta có Ĩ (20)

Sau khi nhân (20) với (ab ta được Ĩ (21)

Và đây là phương trình mô tả sóng hấp dẫn lan truyền trong chân không với vận tốc ánh sáng c = 1

§2. SỰ PHÂN CỰC CỦA SÓNG HẤP DẪN

1. Xét phương trình Einstein cho chân không đã tuyến tính hóa

$$\Box h_{ab} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Để đơn giản ta xét sóng hấp dẫn lan truyền theo trục x. Khi đó nghiệm (1) có dạng

ĉ ta coi như c = 1 (2)

Ta viết lại điều kiện Lorents Gauge

$$h^a_{b,a} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} h_{,b} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&h_{00,0} - h_{01,1} - \frac{1}{2}h_{,0} = 0\\
&h_{01,0} - h_{11,1} - \frac{1}{2}h_{,0} = 0\\
&h_{02,0} - h_{12,1} \qquad\quad = 0\\
&h_{03,0} - h_{13,1} \qquad\quad = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Nếu ta ký hiệu dấu phết là đạo hàm theo biến mới u thì (4) sẽ có dạng :

$$\left.\begin{aligned}
&h'_{00}+h'_{01}-\frac{1}{2}h' = 0\\
&h'_{01}+h'_{11}+\frac{1}{2}h' = 0\\
&h'_{02}+h'_{12} \qquad\quad = 0\\
&h'_{03}+h'_{13} \qquad\quad = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Sau khi phân tích (5) ta được :

$$\left.\begin{aligned}
&h_{00} + h_{01} - \frac{1}{2}h = C_1\\
&h_{01} + h_{11} + \frac{1}{2}h = C_2\\
&h_{02} + h_{12} \qquad\quad = C_3\\
&h_{03} + h_{13} \qquad\quad = C_4
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Từ điều kiệnĠ ta có quyền chọn các const = 0 khi đó ta có bốn biểu thức sau :

$$h_{12} = -h_{02} \qquad h_{13} = -h_{03}$$

$$h_{01} = -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) \qquad h_{33} = -h_{22}$$

Ta viết lại hab dưới dạng ma trận và chú ý tính đối xứng của hab :

$$h = \begin{pmatrix} h_{00} - \frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) & h_{02} & h_{03} \\ -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) h_{11} - h_{02} - h_{03} \\ h_{02} & -h_{02} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & -h_{03} & h_{23} & -h_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Do việc chọn hab không phải là duy nhất nên ta có quyền chọn hệ tọa độ mới sao cho ma trận (7) có dạng đơn giản nhất mà vẫn giữ nguyên các số hạng độc lập, có ý nghĩa vật lý quan trọng nhất. Cụ thể là

$$\begin{array}{ccc} x^a & \rightarrow & x^a{}_{New} = x^a + \xi^a \\ \swarrow & & \swarrow \\ h_{ab} & \rightarrow & h_{ab}^{New} = h_{ab} - \xi_{a,b} - \xi_{b,a} \end{array}$$

Trong đó (a thỏa mãn điều kiện Lorentz Gauge :

$$h^a_{b,a} = \mathbf{0} \Rightarrow \Box\, \xi_a = 0$$

Ta sẽ cố gắng chọn (a sao cho :

$$\begin{aligned} h_{00}^{New} &= h_{00} - \xi_{0,0} - \xi_{0,0} = \mathbf{0} \\ h_{02}^{New} &= h_{02} - \xi_{0,2} - \xi_{2,0} = \mathbf{0} \\ h_{03}^{New} &= h_{03} - \xi_{0,3} - \xi_{3,0} = \mathbf{0} \\ h_{11}^{New} &= h_{11} - \xi_{1,1} - \xi_{1,1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

Viết lại (8) :

$$\begin{aligned} \xi_{0,0} &= \frac{1}{2} h_{00} \quad ; \xi_{1,1} = \frac{1}{2} h_{11} \\ \xi_{2,0} &= h_{02} \quad ; \xi_{3,0} = h_{03} \end{aligned} \quad (9)$$

Chú ý : DoĠ nên đạo hàm theo y và z bằng zero vậy khi ta chọn các ξ_a thoûa maõn (9) thì roõ raøng ma traän cuûa caùc h_{ab}^{New} chæ coøn laïi caùc phaàn töû sau khaùc zero.

$$h_{ab}^{New} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_{\mathbf{22}}^{New} & h_{\mathbf{23}}^{New} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & h_{\mathbf{23}}^{New} & -h_{\mathbf{22}}^{New} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Nhờ phép biến đổi độc đáo trên màĠchỉ còn phụ thuộc vào hai hàm số độc lập là :

ĉ vàĠ

2. Sự phân cực của sóng hấp dẫn :

Ta xét hai trường hợp riêng sau và để tiện việc in ấn ta bỏ ký hiệu New trên các hab

a. Xét h23 = 0 còn h22 (0

Từ biểu thức gab = (ab + hab ta tính được

$$g_{22} = \eta_{22} + h_{22} = -1 + h_{22} \qquad (12)$$

$$g_{33} = \eta_{33} + h_{33} = -1 - h_{22}$$

Ta viết yếu tố độ dài của vùng không thời gian có sự hiện diện của sóng hấp dẫn

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - (1 - h_{22})\, dy^2 - (1 + h_{22})\, dz^2 \qquad (13)$$

h22 là hàm của u và ta cho rằng giá trị của nó biến thiên từ 0 (h22 > 0 và từ $0 \rightarrow h_{22} < 0$.

Ta nghiên cứu xem điều gì sẽ xảy ra khi sóng hấp dẫn “– h22” đập vào tập hợp các hạt nằm trong mặt phẳng yz. Do sóng truyền theo phương x nên mặt yz vuông góc với sóng tới.

Đầu tiên ta xét hai hạt trong mặt phẳng yz có tọa độ ban đầu tại (y0, z0) và *(y_0 + d y, z_0)*

Từ (13) ta thấy khoảng cách riêng giữa chúng sẽ là :

$$ds^2 = -\,(1 - h_{22})\, dy^2 \qquad (14)$$

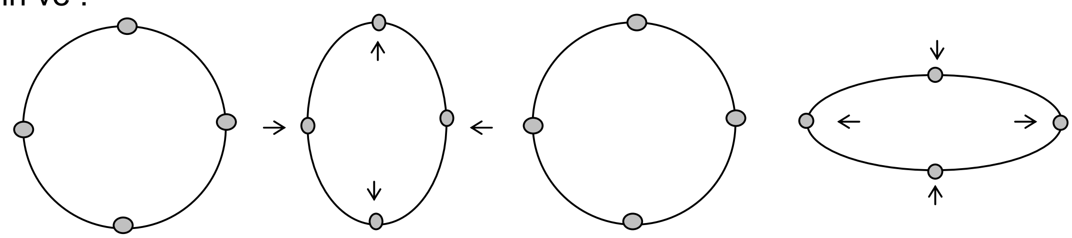
Nếu h22 biến thiên từ 0 (h22 > 0 ta nhận thấy dS2 sẽ giảm dần. Có nghĩa, hai hạt dịch chuyển gần nhau hơn.

Nếu h22 biến thiên từ 0 (h22 < 0 thì dS2 sẽ tăng lên. Có nghĩa, hai hạt dịch chuyển xa nhau hơn.

Với hai hạt có tọa độ (y0, z0) và (y0 ,z0 + dz) trên mặt phẳng yz thì điều ngược lại sẽ xảy ra vì khoảng cách riêng giữa chúng :

$$ds^2 = -\,(1 + h_{22})\, dZ^2 \qquad (15)$$

Vậy nếu sóng hấp dẫn biến thiên tuần hoàn lan truyền theo phương x và đập vào các hạt xếp theo vòng tròn trong mặt phẳng yz thì vòng các hạt sẽ biến dạng như hình vẽ :



Từ bức tranh này ta thấy rõ tính chất sóng ngang của sóng hấp dẫn. Ta gọi trạng thái này là phân cực +.

2. Xét trường hợp : h22 = 0 còn h23 (0

Ta có:

$$dS^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 + 2h_{23}dydz - dz^2 \qquad (16)$$

Có hệ số 2, vì ta có: h23dydz + h32dydz

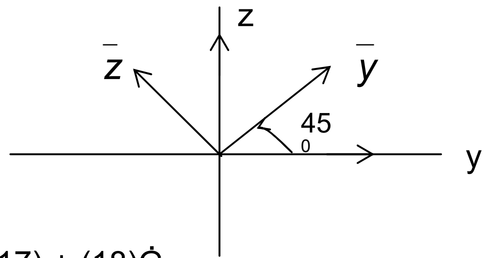
Ta thực hiện phép quay 450 trong mặt phẳng yz bằng cách đưa vào tọa độ mới:

$$y \to \bar{y} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(y+z) \qquad (17)$$

$$z \to \bar{z} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(-y+z)$$

(18)

Toạ độ mớiĠ sẽ tạo một gócĠso với y, z.



Lấy (17) + (18)Ġ

$$\Rightarrow dy = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(d\bar{y} - d\bar{z})$$

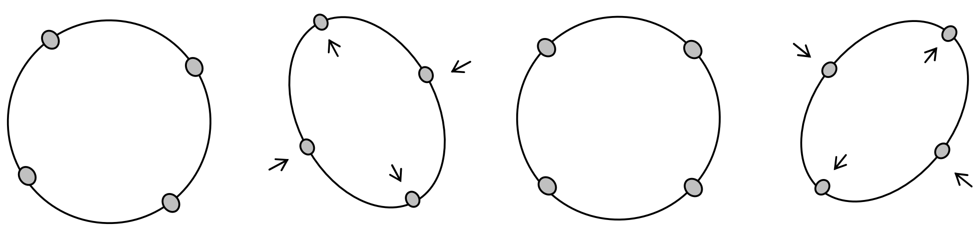
Tương tự 17) - (18)Ġ

$$\Rightarrow dz = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(d\bar{y} + d\bar{z})$$

Từ đây ta tính được : dy2; dz2 và dydz sau đó thay kết quả vào (16)

$$dS^2 = dt^2 - dx^2 - (1 - h_{23})d\,\bar{y}^{\mathbf{2}} - (1+h_{23})\, d\,\bar{z}^{\,2} \qquad (19)$$

So sánh (19) với (13) ta thấy sóng “-h23” sẽ tạo nên hiệu ứng giống y như sóng “-h22”, nếu như quay các trục y và z một góc 450



Bức tranh này cho ta thấy sóng hấp dẫn “-h23” là sóng ngang. Trạng thái này gọi là Phân cực X. Sóng hấp dẫn có hai trạng thái phân cực và hai trạng thái này tạo với nhau một góc 450.

Năm 1960, J.Weber là người đầu tiên nghĩ ra thiết bị dò tìm sóng hấp dẫn. Do sự tác dụng của sóng hấp dẫn lên vật chất quá nhỏ bé nên cho tới tận ngày hôm nay (năm 2002) các nhà vật lý thực nghiệm vẫn chưa dò tìm được sóng hấp dẫn một cách trực tiếp.

Tuy nhiên khi nghiên cứu binary pulsar PSR 1913 +16 các nhà vật lý thiên văn nhận thấy có bằng chứng gián tiếp cho sự tồn tại của bức xạ sóng hấp dẫn (có thể xem thêm Schutz –241)

§3. GẦN ĐÚNG CHUYỂN ĐỘNG CHẬM:

Ta xây dựng thuyết tương đối rộng dựa trên sự giúp đỡ của thuyết tương đối hẹp và thuyết hấp dẫn Newton. Vì vậy trong trường hợp giới hạn riêng thuyết tương đối rộng sẽ trở về thuyết hấp dẫn Newton.

Khi trường hấp dẫn yếu không thời gian Einstein sẽ trở nên rất gần với không thời gian Minkowski và mọi vận tốc v đều nhỏ hơn rất nhiều so với vận tốc ánh sáng (v/c <<1). Lúc này các gab sẽ chỉ khác một ít so với Mêtric Minkowsi η_{ab}.

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \qquad ; |h_{ab}| << 1 \tag{1}$$

với hab = (ac(bdhcd ; (ab(bc Ľ

Ta cũng tính được : gab = (ab – hab (2)

Để tiện tính toán ta chuyển sang hệ đơn vị SI :

$$x^a = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^\alpha) = (ct, x, y, z)$$

Xét chuyển động của hạt tự do với vận tốc v dọc theo đường xa = *xa ((); thông số (là thời gian riêng. Như đã biết hạt sẽ chuyển động theo* đường trắc địa timelike thỏa mãn phương trình :

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0 \tag{3}$$

đầu tiên ta nhắc lại :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2\left(c^2 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}\right)$$

$$= dt^2(c^2 - v^2)$$

$$= c^2 dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 dt^2 (1 - \varepsilon^2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = 1 + O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

Từ (4) suy ra ta có thể thay (bằng t nếu lấy gần đúng bậc một theoĠ

Do quãng đường = v.dt nên dx(~ v.dŴ = (cdt. Do đó :

$$\frac{dX^{\alpha}}{cdt} \sim \varepsilon \tag{5}$$

Sau khi thay d(bằng dt bào (3) và chia 2 vế cho c2 :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^a}{dt^2} + \frac{1}{c^2}\Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{dt}\frac{dx^c}{dt} = 0 \tag{6}$$

Ta chỉ chú ý tới phần tọa độ không gian nên (6) :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} + \Gamma^{\alpha}_{00}\frac{d(ct)}{cdt}\frac{d(ct)}{cdt} + 2\Gamma^{\alpha}_{0\beta}\frac{dx^{\beta}d(ct)}{cdt.cdt} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{cdt}\frac{dx^{\gamma}}{cdt} = 0 \tag{7}$$

↓ ↓ ↓

bé bậc một bé bậc hai bé bậc ba

ở đây ta sử dụng ký hiệu a =0,1,2,3 = 0,(

α, β, γ =1,2,3

Do ta chỉ giữ lại số hạng bé bậc một nên (7) có dạng :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^{\alpha}}{cdt^2} + \Gamma^{\alpha}_{00} = 0 \tag{8}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha d}(\partial_0 g_{0d} + \partial_0 g_{0d} - \partial_d g_{00}) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha d}\left(\frac{\partial h_{0d}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{0d}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^d}\right) +$$

bé bậc haiĠ

Thay vào (8) :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^2}{dt^2} - \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial h_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\alpha}}\right) = 0$$

Do không _thời gian ta xét là tĩnh nên hab không phụ thuộc t :

suy ra (0h0(= 0 nên ta còn :

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\alpha}} \tag{9}$$

Vậy với trường hợp gần đúng chuyển động chậm, từ phương trình đường trắc địa Einstein đã dẫn tới phương trình (9). Và phương trình này sẽ trùng với phương trình tương ứng của Newton phương trình 2 dành cho lực hấp dẫn.

Với hạt có khối lượng một đơn vị ta có :

$$1.\ddot{x} = F = -grad\Phi \Rightarrow \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} \qquad (10)$$

so sánh (9) và (10) ta rút ra :

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}h_{00} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{c^2}{2}h_{00} = \Phi$$

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}$$

TừĠ (11)

Với (: thế hấp dẫn Newton. Newton gravitational potential.

Khi khối lượng của hạt thử (test particle) bằng 1 đơn vị thì :

grad U = $grad\Phi = -F$

§4. HỆ SỐ TỈ LỆ HỆ SỐ GHÉP NỐI

Xét trường hấp dẫn yếu. Phương trình Einstein dành cho trường hấp dẫn yếu sẽ có dạng :

$$\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{ab} = -kT_{ab} \qquad (1)$$

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\eta^{cd}h_{cd} \qquad (2)$$

Thay lại vào (1) :

$$\frac{1}{2}\Box(h_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\eta^{cd}h_{cd})=-kT_{ab}$$

Sau khi tính toán ta được :

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{ab}=k(T_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\eta^{cd}T_{cd}) \qquad (3)$$

Giả thuyết rằng không có trường điện từ, vật chất sinh ra trường gồm các hạt với mật độ nhỏ (0, chuyển động với vận tốc nhỏ cùng bậc với v. Khi đó tenxơ năng – động lượng sẽ có dạng (trong đơn vị SI)

$$T^{ab}=c^2\rho_0\delta_0^a\delta_0^b \Rightarrow T_{ab}=c^2\rho_0\delta_a^0\delta_b^0$$

$$\eta^{cd}T_{cd}=c^2\rho_0$$

(chú ý Í xem phần phụ lục)

Từ (3) cho a = b = 0 :

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}=k(T_{00}-\frac{1}{2}\eta_{00}T_{00})=\frac{1}{2}kT_{00}=\frac{1}{2}kc^2\rho_0 \qquad (4)$$

Do $$g_{00}=1+h_{00}\Rightarrow\nabla^2 g_{00}=\nabla^2 h_{00} \qquad (5)$$

Mặt khácĠ nênĠ (6)

Từ (5) và (6) và (4) :

$$\nabla^2 h_{00}=\nabla^2\left(\frac{2\Phi}{c^2}\right)=kc^2\rho_0\Rightarrow\nabla^2\Phi=k\frac{c^4}{2}\rho_0 \qquad (7)$$

(: thế hấp dẫn Newton (khác với thế năng hấp dẫn)

Phương trình (7) sẽ trùng với phương trình tương ứng của thuyết hấp dẫn Newton là phườơng trình Poisson :

Ta so sánh (7) với phương trình Poisson (2(= 4(G(0

Ta rút ra (Ġ (8)

Nhắc lại : thế năng hấp dẫn được định nghĩa như sau :

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} = m\Phi$$

Suy raĠ gọi là thế hấp dẫn của vật M.

Khi m = 1 ta có ngayĠ

CHƯƠNG V

LỖ ĐEN

Ngay từ năm 1795, dựa trên lý thuyết hấp dẫn và ánh sáng của Newton, Laplace đã chỉ ra rằng ánh sáng không thể thoát khỏi những vật thể có khối lượng cực lớn nhưng bán kính cực nhỏ.

Năm 1916 Karl Schwarzschild tìm ra nghiệm của phương trình của Einstein nhưng cả Karl Schwarzschild lẫn Einstein đều không biết rằng nghiệm trên chứa đựng sự mô tả toàn diện vùng không –thời gian bên ngoài lỗ đen không quay.

Năm 1930 Chandrasekhar tìm ra giới hạn khối lượng cho các cấu hình suy biến hoàn toàn – completely degenerate .

Sau đó ông nhận xét : một ngôi sao có khả năng co lại tới bán kính cỡ vài kilomet khi khối lượng của nó lớn hơn nhiều lần khối lượng tới hạn. Khi đó trường hấp dẫn của ngôi sao mạnh tới mức không một bức xạ nào của sao thoát ra được. Rất tiếc cho người thầy của ông, huân tước Eddington đã nghi ngờ ý kiến trên và cùng chia sẻ sự nghi ngờ đó có nhà vật lý người Nga

Lev Landau (1932).

Năm 1939 Oppenheimervaf và Snyder đã tính toán quá trình co lại do hấp dẫn của ngôi sao và nhận thấy nó hoàn toàn có khả năng cắt đứt mọi sự liên lạc với bên ngoài. Đây là sự tính toán chi tiết đầu tiên về sự hình thành lỗ đen.

Lỗ đen và vấn đề co lại do hấp dẫn bị bỏ quên cho tới năm1960 mới được J.Wheeler và các cộng sự của ông nghiên cứu. Năm1968 ông nghĩ ra từ lỗ **đen.**

Năm 1963 Roy.Kerr tìm ra họ các nghiệm của phương trình Einstein và kết quả trên đã được sử dụng để nghiên cứu lỗ đen quay và tích điện.

Hệ thống sao đôi Cygnus X-1 phát ra tia X rất mạnh. Mọi tính toán cho thấy hệ thống này là bằng chứng gián tiếp cho sự tồn tại lỗ đen trong vũ trụ.

Năm 1994 từ những số liệu do kính Hubble cung cấp cho thấy tâm thiên hà M87- cách chúng ta 50 triệu năm ánh sáng- là lỗ đen với khối lượng gần bằng 109 khối lượng Mặt Trời. Sau đó số liệu đo đạc cũng cho thấy tâm của dải Ngân Hà là lỗ đen có khối lượng gần bằng106 khối lượng Mặt Trời. Mặc dù tất cả các bằng chứng trên là gián tiếp nhưng sự tồn tại của lỗ đen được các nhà vật lý coi là hiển nhiên.

§1. ĐIỂM KỲ DỊ CỦA NGHIỆM SCHWARZSCHILD

Ta viết nghiệm Sch:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \quad (1)$$

KhiĠ ta thấy: Ġ

Khi $r = 2m$ $\quad g_{11} = -\left(1 - \frac{2m}{2m}\right)^{-1} = \frac{-1}{0} = -\infty$

Hai điểm trên gọi là điểm kỳ dị, giá trịĠ gọi là bán kính Schwarzschild-r_s

Ġ: xét trong hệ tương đối tính

Ġ: xét trong hệ SI

Ta chia ra làm hai vùng: 1 : $2m \langle r \langle \infty$
2 : $0 \langle r \langle 2m$

Tại vùng 2 ta thấyĠ cònĠ nghĩa là từĠ : t và r thay đổi tính chất. t trở thành Spacelike còn r trở thành timelike.

§2. BIỂU ĐỒ KHÔNG –THỜI GIAN

Ta vẽ đường trắc địa cho tia sáng và để đơn giản ta xét tia sáng truyền theo toạ độ r còn phần gócĠconst

Do $\theta = \phi =$ **const** $\Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$

(1)

Đối với tia sáng (photon) thì

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = 0$$

(2)

$$\Rightarrow 2\mathscr{L} = g_{00}\dot{t}^2 + g_{11}\dot{r}^2 + g_{22}\dot{\theta}^2 + g_{33}\dot{\phi}^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\mathscr{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0 \quad (3)$$

dấu chấm ở đây là đạo hàm theo thông số Affine dọc theo đường trắc địa null- ta ký hiệu là u.

Viết phương trình Euler-Lagrange cho trắc địa-null:

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\mathscr{L} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^a}\mathscr{L}\right) = 0$$

Ta tính từng số hạng một:ĠĽ

$$\Rightarrow\left(1-\frac{2m}{r}\right)\dot{t}=k=\textbf{const}$$

(4)

Thay (4) vào (3):

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}k^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2=0\Rightarrow=\dot{r}^2=k^2 \qquad (5)$$

$$\dot{r}=\pm k$$

(6)

Xét Ġ (7)

Thay (4) và (6) vào (7):

$$\frac{dt}{dr}=\frac{\dot{t}}{\dot{r}}=\pm\frac{r}{r-2m}=\pm\left(1+\frac{2m}{r-2m}\right)$$

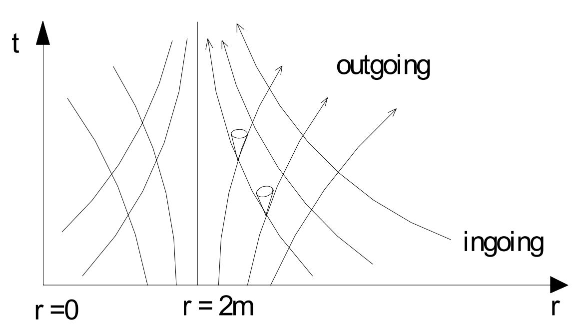
Tich phân ta được:

$$t=\pm\int\left(1+\frac{2m}{r-2m}\right)dr=\pm\left(r+2m\ln\left|r-2m\right|\right)+const \qquad (8)$$

Ta có nghiệm:

$t=r+2m\ln|r-2m|+const$**:** outgoing radial null geodesics (9)

$t=-r-2m\ln|r-2m|+const$**:** ingoing radial null geodesics (10)



Nhìn vào biểu đồ ta thấy tia sáng từ xa tiến tớiĠ sẽ phải cần thời gianĠ. Điều này không đúng với thực tế nên ta cần chọn hệ tọa độ mới sao cho bức tranh của ta phù hợp với thực tế.

Ta chọn hệ toạ độ mớiĠ với :

$$\bar{t} = t + 2m\ln|r - 2m|$$

(11)

hay: Ġ thay vào (10) và (9):

(a) $$t = \bar{t} - 2m\ln|r-2m| = r + 2m\ln|r-2m| + const$$

$$\bar{t} = r + 4m\ln|r-2m| + const$$

(12)

(b) $$t = \bar{t} - 2m\ln|r-2m| = -r - 2m\ln|r-2m| + const$$

$$\bar{t} = -r + const$$

(13)

(12) mô tả đường outgoing radial null geodesics .

(13) mô tả đường ingoing radial null geodesics .

Từ Ġ ta lấy vi phân biểu thức này:

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r-2m}dr \Rightarrow dt = d\bar{t} - \frac{2m}{r-2m}dr$$

(14)

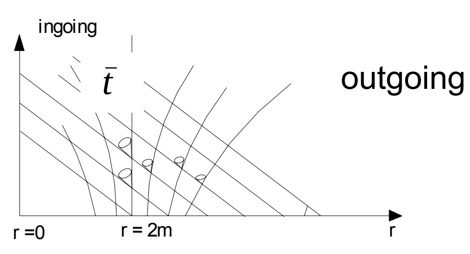
Thay (14) vào nghiệm Schwarzschild ta được:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r}d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

(15) (15) gọi là nghiệm Schwarzschild trong tọa độ Eddington-Finkelstein (1958) .

Nghiệm này không có điểm kỳ dị tạiĠ. Nó liên tục trong khoảng 0<rļ và chỉ tồn tại duy nhất một kỳ dị tạiĠ.

Bây giờ ta tiến hành vẽ đồ thị cho họ đường ingoing và outgoing của nghiệm Schwarzschild trong tọa độ Eddington-Finkelstein:



45^0 Ta nhận thấy (13) mô tả đường thẳng tạo bởi một góc-450 với trụcĠ. Còn (12) mô tả đường thẳng + đường logarit = đường cong có dạng giống logarit.

Khi vẽ các nón ánh sáng ta thấy càng gần vị tríĠ các nón càng nghiêng vào trong và tại vị tríĠthì mặt phải của nón ánh sáng (ứng với đường outgoing

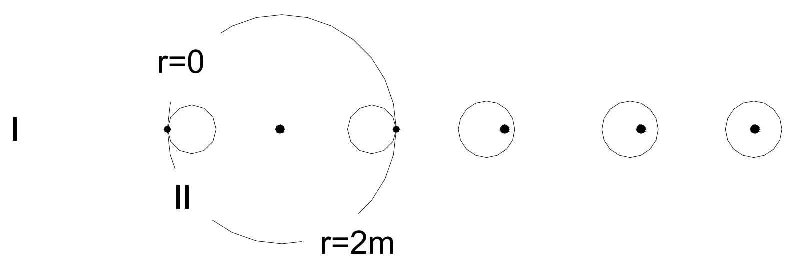
) sẽ song song với trụcĠ. Điều này có nghĩa nếu tạiĠ phát ra tia sáng hướng ra ngoài thì tia sáng này đứng yên tại chỗ. Nói chính xác hơn là nó không thoát ra ngoài được mà chạy lòng vòng quanh mặt cầu bán kínhĠ . Người tại xa vô cực sẽ không thấy bất kỳ một tia sáng nào phát ra được từ vùng trên. Ánh sáng đã không thoát ra được thì không có vật gì có thể thoát ra được vì vận tốc ánh sáng là cao nhất.

Vùng trên được nhà vật lý Mỹ John Wheeler gọi là “lỗ đen “-Black hole- và từ này được giới khoa học chấp nhận (1968).

§3 . CHÂN TRỜI SỰ KIỆN- EVENT HORIZONS.

Ta xét biểu đồ – thời gian của lỗ đen theo cách sau:

Quay bức tranh ở §.2 một vòng quanh trụcĠ, sau đó lấy mặt cắt vuông góc ta được biểu đồ theo mặt xích đạoĠ0.



Tại xa vô cùng nón ánh sáng bình thường -tâm ở giữa. Càng gần mặŴ nón ánh sáng càng nghiêng về phía lỗ đen (về phía điểm kỳ dị).

Tại mặtĠ các outgoing photon sẽ nằm ngay trên mặt cầu còn các photon khác bị hướng vào trong hết. Bề mặtĠ giống như màng thẩm thấu một chiều chỉ cho đi từ ngoài (vùng1) vào trong (vùng2) mà thôi.

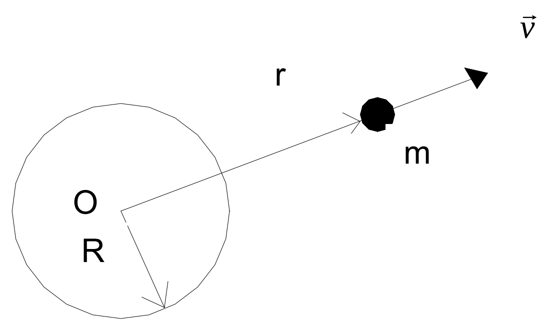
MặtĠ gọi là chân trời sự kiện. Nó đóng vai trò biên của tất cả các sự kiện mà về nguyên tắc người ở ngoài (vùng1) không thể quan sát được.

Gọi là chân trời sự kiện bởi vì khi ra bờ biển ngắm nhìn đường chân trời ta chỉ thấy những gì nằm trước đường chân trời, còn các vật nằm tại đường chân trời và ở sau nó thì ta không có cách gì thấy được.

**Ý tưởng về lỗ đen, xuất phát từ hệ quả của cơ học Newton. Ta xét vật khối lượngĠchuyển động ra xa vật hình cầu bán kính R, khối lượng M, vận tốcĠ. Khi đó năng lượng toàn phần của vật m:

Ġđộng năng+ thế năng.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$



Ta định nghĩa vận tốc thoát (the escape velocity) vES là vận tốc của vật tại bề mặt thiên thể M có khả năng đưa vật ra xa vô cực mà tại đó vận tốc bằng 0.

ĠEtại mặt thiên thể (định luật bảo toàn cơ năng)

$$0 = \frac{1}{2}mv_{EC}{}^2 - G\frac{Mm}{R}$$

$$v_{EC}{}^2 = 2G\frac{M}{R}$$

Giả sử vật có vận tốc thoáŴ:

Ġ hệ SI

ĠĠ hệ tương đối tính

Điều này được Laplace nhận ra từ năm 1798.

§4. LỖ ĐEN QUAY

Như đã biết nghiệm Schwarzschild môtả lỗ đen không quay –một trường hợp riêng trong tự nhiên. Năm 1963 Roy Kerr đã tìm được nghiệm tổng quát từ phương trình Einstein cho chân không. Nghiệm Kerr có nhiều dạng nhưng người ta hay dùng dạng Boyer-Lindquist (1967) để nghiên cứu.

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\phi\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2 + a^2\right)d\phi - adt\right]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2$$

(1)

(1) còn có tên Kerr metric trong toạ độ Boyer-Lindquist, trong đó:

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

(2)

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2$$ (3)

Ta có một số nhận xét sau:

1. Nghiệm phụ thuộc vàoĠ vàĠ. Khi ta choĠ ta được nghiệm Schwarzschild Ị, cònĠ: khối lượng của vật sinh ra trường trong đơn vị tương đối tính.

2. Các metric không phụ thuộc vàoĠ vàĠ nên nghiệm có tính đối xứng trục và dừng.

3. Nếu ta đổi dấu cùng một lúcĠ vàĠ Ĩ,ĠĨ) thì nghiệm vẫn không thay đổi. Điều này dẫn đến việc a tương ứng theo sự quay theo gót.

4. Do co số hạngĠ nên ta có thể suy raĠ liên quan đến vận tốc góc của vật thể sinh ra trường vàĠ liên quan đến mômen động lượng (có thể xem thêm Dinverno-253).

- Việc tìm ra nghiệm Kerr rất phức tạp. Nó nằm ngoài khuôn khổ của giáo trình này. Bạn đọc có thể tham khảo trong Chadrasekhar-306.

§5. ĐIỂM KỲ DỊ VÀ MẶT CHÂN TRỜI CỦA NGHIỆM KERR

*** Nhìn vào nghiệm ta thấy Kerr metric có điểm kỳ dị khiĠ (xem thêm** Chandrasekhar-289).

Từ (2): Ġ (1)

DoĠnên suy rš khiĠ và Ġ (2)

Ta có sự liên hệ giữaĠv:

$$x = r\sin\theta\cos\phi + a\cos\theta\sin\phi$$

$$y = r\cos\theta\sin\phi - a\sin\theta\cos\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

thay vàoĠ ta được : Ġ Ġ

Ta viết lại:Ġ (3)

Do Ġ nênĠ còn Ġ

Ġ nên vế phải (3) cònĠ .

Tóm lại (3)Í ; Ġ (4)

Từ (4) ta nhận thấy điểm kỳ dị là đường tròn bán kínhĠ nằm tại mặt phẳng xích đạoĠ

- Như đã biết khiĠ ta có dịch chuyển đỏ hấp dẫn vô hạn.

Từ (1) (4 ta có hệ số của dt2:

$$\left(\frac{\Delta}{\rho^2} - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) = g_{00}$$

(5)

$$g_{00} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} = \frac{r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2}$$

$g_{00} = 0$ khi töû soá $r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0$. Giaûi phöông trình baäc hai naøy ta được hai nghiệm khiĠĠ có giá trị cố định.

$$r_{S\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos\theta}$$

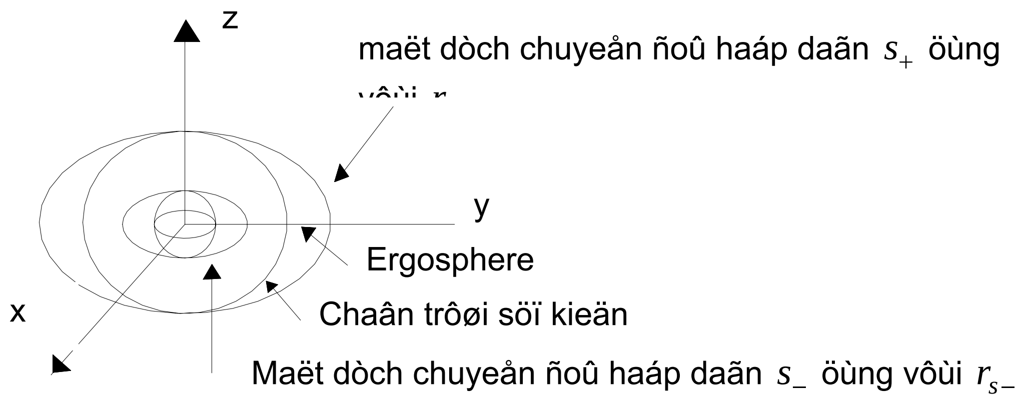
(6)

với giả thuyếtĠ ta nhận thấy Ġ(mặt congĠ sẽ bao mặt congĠ.

KhiĠ :bán kính cực đại tại xích đạo

Ġ : bán kính nhỏ nhất tại hai cực

Nếu nhìn cắt ngang thì mặt vớiĠcó hình trái bóng bầu dục phình ra ở xích đạo. Còn nếu nhìn từ trên cực xuống thì là hình tròn. Tóm lại mặtĠtạo nên hình Ellipsoid.



Ta tìm chân trời sự kiện với giả thiếtĠ(sự quay của vật nhỏ hơn nếu so sánh với khối lượng) giống như với nghiệm Schwarschild ta tìm mặt vớiĠ ứng vớiĠ

Từ (1) (4 ta có Ġ $g^{11} = \dfrac{r^2 - 2mr + a^2}{\rho^2} = 0$ khi

$r^2 - 2mr + a^2 = 0$ (7)

Giải (7) ta có hai nghiệm

$$r = r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$$

(8)

Tổng hợp lại ta có ba vùng:

Vùng Ġ

Với nghiệm Schwarschild ta có chân trời sự kiện mặt dịch chuyển đỏ vô hạn trùng khớp nhau. Còn bây giờ chân trời sự kiệnĠnằm toàn bộ trong mặt dịch chuyển đỏ hấp dẫn vô hạnĠ. Vùng không gian nằm giữa hai mặt bên gọi là Ergosphere.

§6. ĐƯỜNG TRẮC ĐỊA NULL CHÍNH

Khi ta xét một vật quay quanh trục z, theo cơ học Newton ta có thể xem xét trong hệ quy chiếu quay cùng với vật . Khi đó vật sẽ đứng yên trong hệ quy chiếu này. Đối với thuyết tương đối rộng ta không thể làm như vậy được vì không thể tìm được hệ quy chiếu để đưa nghiệm Kerr trở về nghiệm Schwarzschild. Nói cách khác phương trình phi tuyến tính đã gắn nguồn với trường ngoài. Điều này tạo cho ta cảm giác rằng các vật thể quay sẽ “kéo” vùng không gian quanh nó theo và như vậy có nghĩa là kéo các đường trắc địa theo luôn.

Do metric có tính đối xứng trục nên ta thể nhận được các đường trắc địa null nằm trên siêu mặtĠconst. Ta tìm các trắc địa null thoa ûmãn điều kiện:

ĠconsŴvàĠ (1)

(dấu chấm biểu thị đạo hàm theo thông số Affine u.).

Ta có hàm Lagrange:

$$2\mathscr{L} = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\dot{t} - a\sin^2\theta\dot{\phi}\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2 + a^2\right)\dot{\phi} - a\dot{t}\right]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}\dot{r}^2 \quad (2)$$

Và các phương trình Lagrance theo t,Ġ cho photon:

$$\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\dot{t} - a\sin^2\theta\dot{\phi}\right) + a\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2 + a^2\right)\dot{\phi} - a\dot{t}\right] = const = l \quad (3)$$

$$\frac{a\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\dot{t} - a\sin^2\theta\dot{\phi}\right)^2 + \frac{\left(r^2 + a^2\right)\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2 + a^2\right)\dot{\phi} - a\dot{t}\right] = const = n \quad (4)$$

$$\frac{a^2\Delta}{\rho^4}\left(\dot{t} - a\sin^2\theta\dot{\phi}\right)^2 - \frac{2a\Delta\dot{\phi}}{\rho^2}\left(\dot{t} - a\sin^2\theta\dot{\phi}\right) -$$
$$-\frac{\left(r^2 + a^2\right)}{\rho^4}\left[\left(r^2 + a^2\right)\dot{\phi} - a\dot{t}\right]^2 + \frac{a^2\dot{r}^2}{\Delta} = 0 \quad (5)$$

Ta thêm một phương trình nữa từ điều kiệnĠ

$$\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\dot{t}-a\sin^2\theta\dot{\phi}\right)^2-\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2+a^2\right)\dot{\phi}-a\dot{t}\right]^2-\frac{\rho^2\dot{r}^2}{\Delta}=0$$

(6)

Ta có 4 phương trình đối với 3 ẩn số ĠĨĬ nên giữaĠ vàĠ cần phải có sự ràng buộc. Sau khi tính toán trực tiếp ta được:

$$\left(n+al\sin^2\theta\right)\left(n-al\sin^2\theta\right)=0$$

(7)

Ta giới hạn sự chú ý tới :Ġ=İ vớiĠ=const (8)

Sau khi giải trực tiếp (3),(4),(5),(6) và (8) ta được:

$$\dot{t}=\frac{l}{\Delta}\left(r^2+a^2\right)$$

(9)

$$\dot{r}=\pm l$$

(10)

$$\dot{\phi}=\frac{l}{\Delta}a$$

(11)

chọnĠĠ (12)

$$\Rightarrow\frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}=\frac{d\phi}{dr}=\frac{a}{\Delta}$$

(13)

Sau khi tích phân (12) và (13) ta được:

$$t=r+\left(m+\frac{m^2}{\left(m^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\ln\left|r-r_+\right|+\left(m-\frac{m^2}{\left(m^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\ln\left|r-r_-\right|+C \quad (14)$$

$$\phi=\frac{a}{2\left(m^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right|+C$$

(15)

vớiĠ và điều kiện a2 < m2

Khảo sát dấu của Ġ ta nhận thấŻ>0 tại vùng 1 và vùng 3 (Ġ ;Ġ)vàĠ<0 tại vùng 2 Ĩ) nên ta suy ra

$$\frac{dt}{dr}=\frac{r^2+a^2}{\Delta}>0$$ taïi vuøng 1.

Vì vậy (14) và (15) mô tả các họ đường trắc địa null chính đi ra- principle outing null geodesics.

* Hoàn toàn tương tự khi ta chọnĠta sẽ nhận được (14) và (15) bằng cách thay t bằng –t vàĠ bằngĠ các đường này gọi là các đường trắc địa null chính đi vào- principle ingoing null geodesics.

* Hoàn toàn tương tự như trường hợp nghiệm Schwarzschild ta chuyển sang tọa độ mớiĠ để đường đi vào ingoing có dạng đường thẳng.

Ġ vớiĠ

Ġ vớiĠ

Ġ Ġ đường thẳng

Ġ Ġconst không phụ thuộc vàoĠ

Đồ thị có dạng giống như nghiệm Schwarzschild các nón ánh sáng bị bẻ cong về phía r=r+ và tại r=r+ các photon ứng với outgoing sẽ đứng yên tại chỗ. Nói đúng hơn là chạy vòng quanh mặt cầu bán kính r+ mà không thể thoát ra ngoài được.

§ 7. HIỆU ỨNG PENROSE (1969)

Khi nghiên cứu năng lượng của các hạt rơi vào lỗ đen Penrose nhận thấy khi lọt vào bên trong vùng ergosphere năng lượng hay có khả năng nhận giá trị âm và sau đó chìm sâu vào trong lỗ đen. Từ kết quả này ông đã nghĩ ra thí nghiệm lí thú sau:

Từ xa vô cực gởi một hạt với năng lượng Ein vào lỗ đen quay. Quỹ đạo hạt được chọn sao cho nó lọt qua mặt cầu s+ vào vùng ergosphere.

Trong vùng này hạt bị tách làm hai do lực thuỷ triều. Một mẩu lọt vào quỹ đạo với năng lượng âm Edown và chui vào lỗ đen . Phần còn lại với năng lượng dướng Eout bắn ra ngoài vùng ergosphere và ra xa vô cùng.

Từ định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$E_{in} = E_{out} + E_{down}$$

Do Edown <0 (Eout> Ein. Điều này có nghĩa hạt bắn ra đã lấy đi một phần năng lượng quay của lỗ đen làm cho nó quay chậm lại. Hiện tượng trên gọi là hiệu ứng Penrose.

Năm 1972-Bardeen, Press và Tenkolsky đã chỉ ra rằng các hạt bị tách ra làm đôi trong vùng ergosphere khi tốc đôï của chúng phải đạt tới 0,5c. Như vậy hiện tượng trên chỉ xảy ra khi tốc độ hạt rơi vào lỗ đen (0,5c.

Năm 1975 Hawking áp dụng lý thuyết trường lượng từ và vùng không – thời gian quanh lỗ đen và ông đã chứng minh được sự phát xạ lỗ đen. Đây là một phát kiến rất quan trọng cả hai lĩnh vực vốn bị tách riêng ra là vật lý lượng tử lý thuyết tương đối rộng. Từ đây hình thành nên bài toán hóc búa nhất hiện nay: Hấp dẫn lượng tử-quantum gravity.

CHƯƠNG 6

VŨ TRỤ HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

§1. CÁC NGUYÊN LÝ VŨ TRỤ CƠ BẢN

Năm 1922, một năm trước khi mất vì bệnh thương hàn, Alexander Friedmann tại trường tổng hợp St.Petersburg đưa ra nhận định như sau: Tại mỗi kỷ nguyên ta đều thấy vũ trụ là đồng nhất và đẳng hướng.

Ví dụ:

Tại kỷ nguyên t1 ta quan sát vũ trụ và thấy vũ trụ có diện mạo như thế nào đó thì tại kỷ nguyên t2 vũ trụ có thể khác đi nhưng diện mạo của nó vẫn như xưa, giống như bức tranh trên bong bóng sẽ nở đều khi ta thổi to lên.

Vũ trụ đẳng hướng có nghĩa không có vị trí ưu tiên, bức tranh vũ trụ là như nhau khi nhìn từ mọi phía (tất nhiên trừ một số điểm kỳ dị).

G.Gamow – học trò xuất sắc của Friedmann – đầu tiên đề xuất đo bức xạ nền của vũ trụ để kiểm tra ý tưởng của Friedmann. Sau đó hai nhà vật lý của trường đại học Princeton là Bob Dicke và Jim Peebles tiên đoán bức xạ nền nằm ở dải sóng cực ngắn và hai ông bắt tay vào dò tìm nhưng người tìm thấy lại là Penzias và Wilson làm việc tại phòng thí nghiệm Bell Telephone vào năm 1965. Lý do tìm thấy là nhờ thiết bị của Bell Telephone khi đó hiện đại nhất thế giới. Năm 1978 Penzias và Wilson nhận giải Nobel, một bất công lớn cho Gamow, Dicke và Peebles.

Năm 1923, H.Weyl tìm cách đưa thuyết tương đối rộng vào nghiên cứu vũ trụ như một thể thống nhất và ông đề nghị có thể xem mỗi thiên hà như là một hạt và các hạt này chuyển động trong vũ trụ theo đường trắc địa thời gian giống như các phần tử nước trong chất lỏng lý tưởng.

Vũ trụ học tương đối tính được xây dựa trên ba nguyên lý cơ bản sau:

1. Tiên đề Friedmann.

2. Tiên đề Weyl.

3. Thuyết tương đối rộng Einstein.

§2. KHÔNG GIAN CÓ ĐỘ CONG KHÔNG ĐỔI

Trong toán học người ta chứng minh được độ cong của không gian được đặc trưng bởi phương trình sau:

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (1)$$

Với K là hằng số và gọi là độ cong – the curvature. Không gian trên gọi là không gian có độ cong không đổi.

Xét không gian 3 chiều : với i,j,k=1,2,3.

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} – g_{il}g_{jk})$$

Nhân hai vế với gik:

$$g^{ik} R_{ijkl} = R_{jl} = K\, g^{ik}\, (g_{ik}g_{jl} – g_{il}g_{jk})$$

$$= K(\delta_i^i\, g_{jl} - g^{ik}\, g_{il}g_{jk}) = K(3.g_{jl} - \delta_l^k\, g_{jk})$$

$$= K(3.g_{jl} - g_{jl}) = 2K\, g_{jl} \quad (2)$$

Do không gian 3 chiều đẳng hướng nên nó phải có tính đối xứng cầu. Từ đây ta có yếu tố độ dài – line element:

$$d\sigma^2 = g_{ij}dx^i\, dx^j = e^{\lambda}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3)$$

với (= ((r). Từ (3) ta tính được Tenxơ Ricci:

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r}$$

$$R_{22} = \frac{1}{\sin^2\theta} R_{33} = cosec^2\theta.R_{33}$$

$$R_{22} = 1 + \frac{r}{2} e^{-\lambda}.\lambda' - e^{-\lambda} \quad (4)$$

Từ điều kiện không gian có độ cong không đổi (2) ta được hai phương trình sau:

$$R_{11} = 2Kg_{11} \Rightarrow \frac{\lambda'}{r} = 2Ke^{\lambda} \quad (5)$$

$$R_{22} = 2Kg_{22} \Rightarrow 1 + \frac{r}{2} e^{-\lambda}.\lambda' - e^{-\lambda} = 2Kr^2 \quad (6)$$

Từ (5) ta tính (’ rồi thay vào (6)

e-(= 1 –Kr2 thay kết quả này vào (3)

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \qquad (7)$$

(7) mô tả metric của mặt cầu 3 chiều trong không gian 4 chiều có độ cong không đổi.

Độ cong K có thể: $\begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$

Ta đưa vào biến số mới:

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4} K\bar{r}^2} \qquad (8)$$

Sau khi lấy vi phân (8) rồi biến đổi (7) theo biến số mỗiĠta được :

$$d\sigma^2 = \frac{1}{(1 + \frac{1}{4} K\bar{r}^2)^2} [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \qquad (9)$$

Theo các tiên đề của vũ trụ học ta thấy tại thời điểm t nhất định nào đó, các điểm trong vũ trụ đều có chung một giá trị mật độ, áp suất và độ cong. Điều này có nghĩa "chất lỏng vũ trụ" sẽ nằm trên các mặt r, (, (với t = *const.* ***Như đã biết các siêu mặt này vuông góc với trục t nên ta có*** *g_{oi} = 0; i= 1, 2, 3.*

Do ta quan sát bức tranh vũ trụ nhưng ta cùng chuyển động với vũ trụ nên ta chọn thời gian vũ trụ là thời gian riêng, có nghĩa goo = 1. Từ suy luận trên ta có thể viết yếu tố độ dài của vũ trụ dưới dạng:

ds2 = dt2 – hệ số tỷ lệ. d(2 (10)

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)\left[\frac{d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{(1 + \frac{1}{4} K\bar{r}^2)^2}\right] \qquad (11)$$

Với S2(t): Hệ số tỷ lệ. Hệ số này xuất hiện vì theo tiên đề Friedmann tại mỗi kỷ nguyên vũ trụ có diện mạo như nhau nhìn từ vị trí bất kỳ. Vậy với kỷ nguyên tiếp theo mặt cầu của ta vẫn như vậy nhưng chỉ sai khác một hệ số tỷ lệ. Ta sẽ chú ý tới tọa độ r và hệ số tỷ lệ. Ta đặt:

$$k = \frac{K}{|K|} = \pm 1 \Rightarrow K = k|K|$$

Dấu của k phụ thuộc vào dấu của K.

Ta đặt tiếp:

ĉ lấy vi phân rồi bình phương

$$\Rightarrow d\bar{r}^2 = \frac{dr^{*2}}{|K|}$$

Thay vào (11):

$$ds^2 = dt^2 - \frac{S^2(t)}{|K|}\left[\frac{dr^{*2} + r^{*2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^{*2})^2}\right] \tag{12}$$

Ta đặt tiếp:Ġ khi K (0

$$R(t) = S(t) \quad \text{khi } K = 0 \tag{13}$$

$$(12) \Rightarrow ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^{*2} + r^{*2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^{*2})^2}\right] \tag{14}$$

Hoặc ta kết hợp (7) và (11) ta cũng có dạng:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^{*2}}{1 - kr^2} + r^{*2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{15}$$

(14) và (15) đều là yếu tố độ dài của vũ trụ tương đối tính. Riêng (14) có yếu tố độ dài Robertson – Walker (1936) với k=-1; 0; +1 (Robertson – Walker line element for relativistic cosmology.

§3. PHƯƠNG TRÌNH FRIEDMANN

1. Từ nguyên lý vũ trụ đồng nhất, đẳng hướng ta có yếu tố độ dài Robertson – Walker.

$$ds^2 = dt^2 - R^2\left[\frac{dr^{*2} + r^{*2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^{*2})^2}\right] \tag{1}$$

2. Từ tiên đề Weyl ta có tenxơ năng – động lượng của dòng chảy lý tưởng (Xem phụ lục)

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b - pg_{ab} \quad (2)$$

(: mật độ, p : áùp suất

Do đồng nhất và đẳng hướng nên (, p chỉ là hàm của t, còn ua vận tốc 4 chiều của dòng chất lỏng.

3. Phương trình Einstein: Gab - (gab = 8(Tab (3)

(: Hằng số vũ trụ do Einstein đưa vào. Ta chỉ xét trường hợp khi (=0

Từ (1) ta rút ra ngay các gab, sau đó ta tínhĠvà nhận được 13 ký hiệu Chirstoffel loại 2 khác zero và dựa vào công thức:

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma^c_{ab} - \partial_b \Gamma^c_{ac} + \Gamma^c_{cd}\Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{db}\Gamma^d_{ca}$$

Ta tính được tenxơ Ricci:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R} \qquad R_{11} = Q(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)$$

Với dấu chấm là đạo hàm theo t ; Ġ

Từ (2) ta có : T00 = (g00 (T00 = (

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p \quad (4)$$

Sau khi thay tất cả các kết quả trên vào phương trình Einstein với (=0 ta được:

$$\frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k}{R^2} = -8\pi p \quad (5)$$

$$3.\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = 8\pi p \quad (6)$$

Áp suất ở đây bao gồm: áp suất gây ra do sự chuyển động hỗn loạn của các ngôi sao và các thiên hà, áp suất do chuyển động nhiệt của các phân khí trong vũ trụ, áp suất do bức xạ.... v..v.. Tuy nhiên kết quả đo đạc cho thấy p nhỏ hơn (cỡ một triệu lần, do đó có thể co như p = 0 . Viết lại (5):

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k - \Lambda R^2 = 0$$

Sau khi biến đổi rồi tính tích phân ta được:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} - k \tag{7}$$

Phương trình (7) gọi là phương trình Friedmann – Robertson – Walker.

- C là hằng số khi tích phân.

- R(t) là kích thước hoặc hệ số tỷ lệ khoảng cách của vũ trụ tại thời điểm t – Distance scale factor of the universe at time t -

Sau khi so sánh (7) với phương trình (6) ta tính được:

$$C = \frac{8}{3}\pi\rho R^3 \tag{8}$$

Ta viết lại phương trình Friedmann – Robertson – Walker trong hệ SI với hằng số vũ trụ (= 0

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi\rho G R^2 - kc^2 \tag{9}$$

Để ngắn gọn phương trình (9) gọi là phương trình Friedmann

<u>§4. CÁC MÔ HÌNH VŨ TRỤ KHI (= 0</u>

Viết lại 7 § 3 với (= 0

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} - k \tag{1}$$

a. Khi $k = +1$

$$R\dot{R}^2 = C - R \tag{2}$$

Đặt biết số mới u Ĩ (3)

ĉ Thay lại vào (2) :

$$\frac{1}{2}C(1 - cosu)\frac{1}{4}C^2\dot{u}^2\sin^2 u = C - \frac{1}{2}C(1 - cosu)$$

$$\frac{1}{8}C^3(1 - cosu)\dot{u}^2(1 - cos^2 u) = C(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cosu)$$

$$\frac{C^2}{4}\dot{u}^2(1 - cosu)(1 - cosu)(1 + cosu) = (1 + cosu)$$

$$\frac{C^2}{4}\dot{u}^2(1-cosu)^2 = 1$$

Hay $\frac{C}{2}\dot{u}(1-cosu) = 1$

Tích phân 2 vế theo dt :

$$\int \frac{C}{2}(1-cosu)\frac{du}{dt}dt = \int dt = t$$

$$\frac{C}{2}\int_0^u du - \frac{C}{2}\int_0^u cosudu = t$$

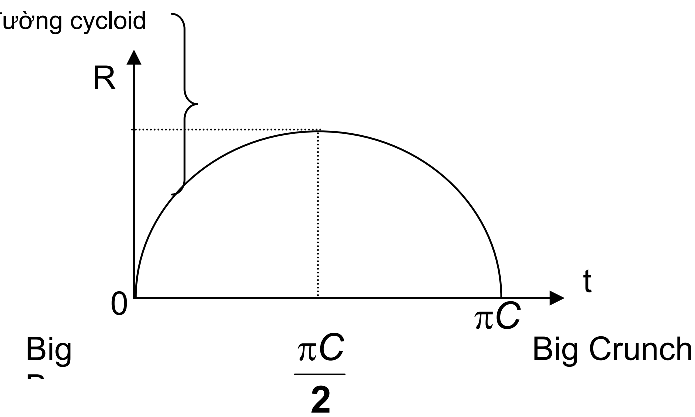
(Chú ý ở đây ta chọn khi u = 0 (t = 0

và u = 0 (R = 0 theo (3)

Kết quả ta được :Ġ (4)

Ta viết lại (3) và (4) :

ĉ (5) mô tả đường cycloid



Mô hình này gọi là mô hình vũ trụ đóng Closed Universe – Vũ trụ là hữu hạn.

Vũ trụ nở dần ra từ điểm kỳ dị t = 0 đoạt tới bán kính cực đại Rmax = C

Khi u =(haŹ rồi sau đó sẽ co dần lại tới điểm kỳ dị tại u =2(hay $t = \pi C$. Điểm này gọi là Big Crunch. vụ co lớn.

Tại điểm kỳ dị t = 0 ta có R = 0 (mật độ chất lớn vô hạn. Vũ trụ tuân theo mô hình Big Bang : Khởi đầu từ một điểm sau đó bùng nổ, lớn dần lên và tới hôm nay vẫn đang nở ra. Vũ trụ có điểm khởi đầu và điểm kết thúc và sau đó một chu kỳ mới được lặp lại.

b. *Khi k = 0*

$$R\dot{R}^2 = C$$

$$\dot{R} = \frac{\sqrt{C}}{R^{1/2}}$$

$$R^{1/2}\dot{R} = \sqrt{C} \Rightarrow \int R^{1/2}\frac{dR}{dt}\int \sqrt{C}.dt$$

$$\frac{R^{3/2}}{3/2} = \sqrt{C}t \Rightarrow R^3 = \frac{9}{4}Ct^2$$

(R = hằng số .t2/3

Đồ thị là đường cong nằm giữa đường thẳng và đường parabol. Có điểm kỳ dị tại t = 0. Vũ trụ nở ra từ điểm kỳ dị và tiếp tục như vậy cho tới vô hạn. Do k = 0 nên không gian phẳng. Ta có mô hình vũ trụ phẳng Flat Universe

c. Khi *k = - 1* :

$$R\dot{R}^2 = C + R$$

ĐặŴ

Đạo hàm theo t :Ġ

Thay (9) vào (7) :

$$\frac{1}{2}C(coshu - 1)\frac{1}{4}C^2\dot{u}^2 \sinh^2 u = C + \frac{1}{2}C\,coshu - \frac{1}{2}C$$

$$\dot{u}^2(cosh - 1)\frac{C^2}{4}(coshu - 1)(coshu + 1) = (1 + coshu)$$

$$\frac{1}{4}C^2(coshu - 1)^2\dot{u}^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}C(coshu - 1)\dot{u} = 1$$

$$\int_0^u \frac{1}{2}C\,coshu\frac{du}{dt}.dt - \frac{1}{2}C\int_0^u \frac{du}{dt}dt = \int_0^t dt$$

(ta chọn u = 0 (R = 0

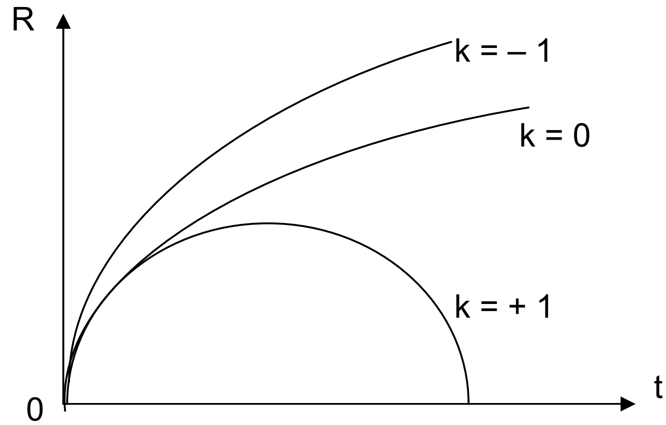
và R = 0 ứng với t = 0)

$$\frac{1}{2}C(sinhu - u) = t \qquad (10)$$

Viết lại (8) và (10) :

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}C(coshu - 1) \\ t &= \frac{1}{2}C(sinhu - u) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

(11) mô tả đường cong có dạng hàm emũ. Vũ trụ có điểm kỳ dị tại t = 0 và sau đó nở mãi. Ta có mô hình vũ trụ mở Open Universe



Kết luận : Ta có 3 mô hình vũ trụ : Mở – Phẳng – Đóng.

Cả 3 mô hình đều có điểm kỳ dị tại t = 0 (vũ trụ có điểm khởi đầu (Big Bang). Các số liệu đo được hiện nay cho thấy tuổi của vũ trụ 12 – 18 tỷ năm. Để biết vũ trụ tuân theo mô hình nào ta cần giải quyết vấn đề vật chất tối (dark matter or missing mass). Khi đó ta biết chính xác được giá trị (của vũ trụ. Nếu mật độ vật chất của vũ trụ bằng một giá trị tới hạn nào đó gọi là (cr ((cr = critical density) thì vũ trụ sẽ tuân theo mô hình phẳng. Các số liệu ngày nay cho thấy (~ (cr còn vũ trụ tuân theo mô hình nào vẫn là câu hỏi chưa có lời giải đáp.

Phụ lục 1: THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP

§1. KHÔNG THỜI GIAN MINKOWSKI

Không thời gian Minkowski là không gian phẳng 4 chiều t, x, y, z với các metric phẳng. Có hai cách chọn dấu metric.

a) (+ - - -) , b) (- + + +)

Với trường hợp a ta nói Signature –2
Còn trường hợp b sẽ là Signature +2
Ta thường ký hiệu :

$$\left(x^a\right)=\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)=(t, x, y, z)$$

Yếu tố độ dài

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = \eta_{ab}dx^a dx^b$$

trong đó:

$$\eta_{00} = +1 \quad ; \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$$

Ġ nếu Ġ

$$ds^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2$$
$$= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ở đây ta chọn Signature –2

§2. NÓN ÁNH SÁNG - THE NULL CONE

Ta có hệ quy chiếu O . Ta xây dựng các vectơ cơ sở :

$$\vec{e}_0 = (1,0,0,0) \qquad \vec{e}_1 = (0,1,0,0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,0,1,0) \qquad \vec{e}_3 = (0,0,0,1)$$

Các vectơ cơ sở trên thỏa mãn biểu thức sau:

$$\vec{e}_0\vec{e}_0 = 1 \quad ; \quad \vec{e}_{11} = \vec{e}_{22} = \vec{e}_{33} = -1$$
$$\vec{e}_a\vec{e}_b = 0 \quad \text{khi } a \neq b$$

Từ đây ta rút ra Ġ
Một vectơ bất kỳ đều biểu diễn thông qua các vectơ cơ sở :

$$\vec{A} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3$$

Ta có tích vô hướng của 2 vectơ :

$$\vec{A}\vec{B} = A^a\vec{e}_a B^b\vec{e}_b = A^a B^b\vec{e}_a\vec{e}_b = A^a B^b\eta_{ab} = A^a B^b g_{ab}$$
$$\vec{A}\vec{B} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$$

Từ đây ta có bình phương độ dài của một vectơ.

$$\vec{X}\vec{X} = \vec{X}^2 = g_{ab}X^a X^b = \eta_{ab}X^a X^b = X_a X^a$$

VectơĠ được gọi là :

Timelike _ giống thời gian nếu Ġ
Spacelike_ giống không gian nếu Ġ

Null vector_ vectơ null nếu Ġ

Vectơ null có bình phương độ dài bằng zero nhưng có các thành phần khác zero

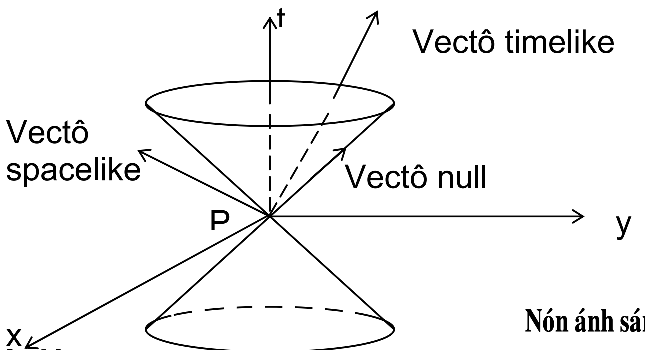
Nếu ta chọn Signature(- + + +) thì dấu sẽ ngược lại

Từ định nghĩa vectơ null ta có :

$$\vec{X}^2 = \eta_{ab} X^a X^b = \eta_{00} X^0 X^0 + \eta_{11} X^1 X^1 + \eta_{22} X^2 X^2 + \eta_{33} X^3 X^3 = 0$$

$$\left(X^0\right)^2 - \left(X^1\right)^2 - \left(X^2\right)^2 - \left(X^3\right)^2 = 0$$

Tập hợp tất cả các vectơ null tại điểm P cho trước trong không thời gian Minkowski tạo nên nón ánh sáng



Nón ánh sáng với trục z ẩn (được dấu kín)

Ý nghĩa vật lý:

-Vectơ timelike nối các sự kiện có quan hệ nhân quả với nhau. Ví dụ hạt chuyển động với vận tốcĠ thì khoảng cách giữa 2 điểm trên quỹ đạo bao giờ cũng thỏa mãn:

$$ds^2 = (cdt)^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \rangle 0$$

vì tốc độ ánh sáng nhân với thời gian bao giờ cũng lớn hơn quãng đường mà hạt đi được trong thời gian đó

-Vectơ Spacelike nối các sự kiện độc lập nhau, không có tính nhân quả với nhau.

- Khi hai sự kiện được liên hệ với nhau bởi tín hiệu ánh sáng thì :

$$ds^2 = (cdt)^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = 0$$

Các sự kiện này nằm trên nón ánh sáng. Ví dụ sự kiện một là trên mặt trời xuất hiện vết đen lớn thì tám phút sau người quan sát tại quả đất sẽ chụp được ảnh vết đen (sự kiện hai). Hai sự kiện này nằm trên nón ánh sáng và chúng được nối với nhau bằng vectơ null.

§3. THỜI GIAN RIÊNG

Ta có vật chuyển động.Thời gian được tính theo đồng hồ gắn chặt với vật (cùng chuyển động với vật) gọi là thời gian riêng.

Từ hiệu ứng dãn nở thời gian ta có :

Ġ với Ġ

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt$$

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 = dt^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{c^2} \left\{ (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \right\} = \frac{1}{c^2} ds^2$$

$$c^2 d\tau^2 = ds^2$$

Nếu chọn hệ đơn vị trong đóĠ thì

$$d\tau^2 = ds^2$$

- DoĠ là thông số Affine nên thời gian riêng cũng là thông số Affine.
- Nếu người quan sát chuyển động cùng với vật thì khi đó vận tốc của vật so với anh ta sẽ bằng zero.Khi đó

$$ds^2 = (cdt)^2 - 0 = c^2 dt^2 = dt^2 \quad \text{choïn } c = 1$$

thời gian tính theo đồng hồ của anh ta bây giờ là thời gian riêng.

Do: Ġ nên Ġ

Suy ra $g_{00} = 1$

§4. TIÊN ĐỀ CỦA THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP

Ta phát biểu hai tiên đề cơ bản của Einstein theo ngôn ngữ tenxơ như sau:

1. Không gian và thời gian được biểu diễn bởi không thời gian 4 chiều với:
   - $\Gamma^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{cb}$
   - CácĠ không có điểm kỳ dị
   - Đạo hàm hiệp biến tenxơ metric bằng zeroĠ
   - $R^a{}_{bcd} = 0$
2. - Thời gian riêng được xác định từ Ġ
   - Hạt tự do chuyển động dọc theo đường trắc địa timelike.
   - Hạt photon (ánh sáng) chuyển động dọc theo đường trắc địa null.

§5. VECTƠ VẬN TỐC BỐN CHIỀU

$$u^0 = \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \; ; u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{v^i}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma v^i$$

$$\vec{u} = \left(u^0, u^1, u^2, u^3\right) = \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) \equiv \frac{dx^a}{d\tau}$$

$$\vec{u}\vec{u} = \eta_{ab}u^a u^b = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2$$
$$= \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \left(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2\right) = \gamma^2 \left(c^2 - v^2\right)$$
$$= \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2 / c^2} = c^2$$

$\vec{u}\vec{u} = c^2$ Neáu choïn $c = 1$ thì ta coù

$\vec{u}\vec{u} = 1$ ñoái vôùi Signature (+ - - -)

Nếu ta chọn Signature (- + + +) thìĠ

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - v^2 / c^2\right)^{1/2}} = \frac{dt}{d\tau}$$

$\vec{u}$: vectô vận tốc 4 chiều

$\vec{v}$: vectơ vận tốc 3 chiều mà ta thường sử dụng trong cơ học_vận tốc bình thường_ordinary velocity

Vectơ động lượng bình thường 3 chiều:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Ta định nghĩa vectơ động lượng 4 chiều:

$$\vec{\mathrm{P}} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\mathrm{P}^0, \mathrm{P}^1, \mathrm{P}^2, \mathrm{P}^3\right)$$

Xét tích vô hướng sau:

$$\vec{\mathrm{P}}\vec{\mathrm{P}} = \eta_{ab}\mathrm{P}^a\mathrm{P}^b = (\mathrm{P}^0)^2 - (\mathrm{P}^1)^2 - (\mathrm{P}^2)^2 - (\mathrm{P}^3)^2$$
$$= \frac{E^2}{c^2} - p_x{}^2 - p_y{}^2 - p_z{}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

Từ công thứcĠ ta có:

$$\vec{\mathrm{P}}\vec{\mathrm{P}} = p^2 + m^2c^2 - p^2 = m^2c^2$$

Nếu chọnĠ thì Ġ

Nếu ta chọn Signature (- + + +) thì Ġ

Ta còn cách chứng minh thứ hai dựa vào định nghĩa vectơ động lượng 4 chiều:

$\vec{\mathrm{P}} = m\vec{u}$; vôùi $\vec{u}$ laø vectô vaän toác 4 chieàu

$\vec{\mathrm{P}}\vec{\mathrm{P}} = m^2\vec{u}\vec{u} = m^2$ do $\vec{u}\vec{u} = 1$

-Xét vật có động lượng 4 chiềuĠ so với hệ quy chiếu đứng yên. Người quan sát chuyển động với vận tốc 4 chiềuĠ khác so với vận tốc 4 chiều của vật. Xét tích vô hướng sau:

$$\vec{\mathrm{P}}\vec{u} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)\left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

$$= \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \left(c\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z \right)$$

$$= \gamma E - \gamma \left(p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z \right)$$

$$\vec{\mathrm{P}}\vec{u} = \gamma \left(E - \vec{p}\vec{v} \right) \qquad \text{(a)}$$

Vẫn bài toán trên nhưng ta áp dụng phép biến đổi Lorentz cho năng_động lượng từ hệ quy chiếu đứng yên sang hệ quy chiếu của người quan sát có vận tốc 4 chiềuĠ với Ġ là vận tốc 3 chiều bình thường.

$$E' = \gamma \left(E - v p_x \right) = \gamma \left(E - \vec{v}\vec{p} \right) \qquad \text{(b)}$$

Do vật chuyển động dọc theo trục Ox nênĠ

So sánh (a) và (b) ta rút ra:

$\vec{\mathrm{P}}\vec{u} = E'$ laø naêng löôïng cuûa vaät do ngöôøi quan saùt chuyeån ñoäng vôùi vaän toác $\vec{u}$ ño được.

-Ta có cách chứng minh thứ hai:

Xét vật trong hệ quy chiếu của người quan sát. Như vậy người quan sát và hệ quy chiếu đứng yên so với nhau.Vì vậy vận tốc 4 chiều của người quan sát lúc này là:

$$\vec{u}_{0b} = \left(c, 0, 0, 0 \right) \qquad \text{vì } \gamma = 1$$

Còn động lượng 4 chiều của hạt so với người quan sát sẽ là:

$$\vec{\mathrm{P}}_{0b} = \left(\frac{E'}{c}, p'_x, p'_y, p'_z \right)$$

$$\vec{\mathrm{P}}_{0b}\vec{u}_{0b} = \left(\frac{E'}{c}, p'_x, p'_y, p'_z \right) \left(c, 0, 0, 0 \right) = E'$$

$$\vec{\mathrm{P}}\vec{u} = \vec{\mathrm{P}}_{0b}\vec{u}_{0b} = E'$$

Ta hoàn toàn có thể áp dụng công thức trên cho hệ trong tọa độ bất kỳ vì nó thực chất là phương trình tenxơ bậc không.

Nếu ta chọn Signature (-+ + +) thì:

$$\vec{\mathrm{P}}\vec{u} = \vec{\mathrm{P}}_{0b}\vec{u}_{0b} = -E' \equiv -E_{observer}$$

E_{0b}: Naêng löôïng cuûa haït do ngöôøi quan saùt chuyeån ñoäng ño.

Khi ta chọn Ġ thì công thức không đổi.

§6.TENXƠ NĂNG ĐỘNG LƯỢNG CHO CHẤT LỎNG LÝ TƯỞNG

Xét trường gồm các hạt bụi rời rạc không tương tác nhau.

Với trường như trên sẽ được xác định bởi hai đại lượng

-Vận tốc 4 chiều của dòng các hạt:

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$$

Ġ : thời gian riêng dọc theo đường thế giới (quỹ đạo) của hạt bụi.

-Mật độ riêng được đo bởi người quan sát cùng chuyển động với dòng hạt bụi:

$$\rho_0 = \rho_0(x)$$

Từ đây ta xây dựng tenxơ hạng hai đơn giản nhất như sau:

$$T^{ab} = \rho_0 u^a u^b$$

Bây giờ ta xét chất lỏng lý tưởng được mô tả bởi ba đại lượng sau:
-Vận tốc 4 chiều: Ġ
-Trường mật độ riêng: Ġ
-Trường áp suất vô hướng: Ġ
Trong trường hợp giới hạn khiĠ thì chất lỏng lý tưởng sẽ trở thành trường của các hạt bụi rời rạc.
Xét chất lỏng trong hệ quy chiếu chuyển động cùng với chất lỏng. Do tính đẳng hướng của chất lỏng tĩnh (chất lỏng đứng yên trong hệ quy chiếu chuyển động cùng với mình) nên áp suất theo ba phương là như nhau.Khi đó ta xây dựng tenxơ năng_sức căng cho dòng chất lỏng lý tưởng:

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Do chất lỏng đứng yên nên vận tốc 4 chiều Ġ
Từ đây ta tổng quát hóa:

$$T^{ab} = (\rho_0 + p)u^a u^b - pg^{ab}$$

Ta kiểm tra lại:

$$T^{00} = (\rho_0 + p)u^0 u^0 - pg^{00} = \rho_0 + p - p = \rho_0$$

do $u^0 u^0 = 1 \quad ; g^{00} = \eta^{00} = 1$

$$T^{11} = (\rho_0 + p)u^1 u^1 - pg^{11} = -p(-1) = p$$

do $u^1 u^1 = 0 \quad ; g^{11} = \eta^{11} = -1$

Tương tự: Ġ
Nếu ta chọn Signature (- + + +) thì tenxơĠ có dạng:

$$T^{ab} = (\rho_0 + p)u^a u^b + pg^{ab}$$

$$T^{00} = (\rho_0 + p)u^0 u^0 + pg^{00}$$

$$= \rho_0 + p - p = \rho_0$$

do lúc nàyĠ

Chú ý thuật ngữ: Tenxơ năng_ động lượng = Tenxơ năng_sức căng
The stress_ energy tensor

BÀI TẬP

1/ Hãy chứng tỏ rằng đạo hàm hiệp biến tenxơ metric hiệp biến bằng zero. Cho biết ký hiệu Chris toffel loại 2 có dạng như công thức 9 – chương 1.

2/ Giống như bài 1 nhưng lần này là tenxơ metric phân biến

3/ Chứng minh đồng nhất thức Ricci.

4/ Chứng minh tenxơ Riemann phản đối xứng với hai cặp chỉ số .

5/ Chứng minh tenxơ Riemann phản đối xứng với hai chỉ số cuối.

6/ Chứng minh tenxơ Riemann phản đối xứng với hai chỉ số đầu.

7/ Chứng minh đẳng thức Bianchi

8/ Hãy chứng minh: Nếu ta chọn hàm Lagrange có dạng
ĉ thì phương trình đường trắc địa có dạng:

$$\frac{d^2x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{du}.\frac{dx^c}{du} = 0$$

9 Hãy chứng minh nếu ta chọn L =Ġthì dạng phương trình trắc địa không thay đổi.

10. Xét họ đường trắc địa theo thông số Affine (và được đánh số là n

$$x^a = x^a(\lambda, n)$$

Hãy chứng minh với hai véctơ đơn vịĠ và Ġta

$$\nabla_U \vec{n} = \nabla_N \vec{u}$$

11. Hãy chứng minh rằngĠ

12. Từ định nghĩaĠ

Hãy chứng minh :Ġ

13. Cho tọa độ mới ĉ

Hãy chứng minh Ġ

14. Từ kết qủa của bài 13 hãy chứng minh tiếp

$$\overline{h}^{New}_{ab} = \overline{h_{ab}} - \xi_{a,b} - \xi_{b,a} + \eta_{ab}\xi^c,c$$

15. Cho biếtĠ

vàĠ

Hãy chứng minh: Ġ

16. Hãy chứng minh rằng trong hệ SI sự tiến động của trục chính của qũy đạo sao Thủy có dạng:

$$2\pi\varepsilon = \frac{24\pi^3 a^2}{\left(1-e^2\right)c^2 T^2}$$

17. Cho $x^a = x^a(\tau)$; $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$

Hãy chỉ ra rằngĠ

18. Một hạt khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng và chịu tác động của trường xuyên tâm với :

$$U = -m\frac{\mu}{r}$$

Hãy chứng minh:

- Mômen động lượng hạt là hằng số
- Phương trình Binet được suy ra từ phương trình 2 Newton trong tọa độ cực.

19. Hàm Lagrange của hạt tự do có dạng Ġ
- Hãy viết hàm trên dưới dạng tenxơ
- Hãy chứng minh rằng phương trình chuyển động của hạt trùng với phương trình đường trắc địa.

20. Hãy chứng minh rằng hàm Lagrange của hạt m trong cơ học tương đối tính có dạng

$$L = -mc^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

21. Xét không gian 3 chiều với
- Tọa độ cũ x1 = x; x2 = y; x3 = z
- Tọa độ mới ĉ; Ġ;ĉ
a. Tìm phương trình liên hệĠ
b. Tìm tenxơ metric hiệp biến và phản biến
c. Viết hàm Lagrange của hạt tự do trong hệ tọa độ mới.
d. Viết phương trình đường trắc địa r, (, (.

22. Nếu hai sự kiện được nối với nhau bởi véctơ Spacelike thì:

a. Tồn tại hệ quy chiếu quán tính, trong đó hai sự kiện trên sẽ đồng thời xảy ra.
b. Không tồn tại hệ quy chiếu quán tính, trong đó hai sự kiện trên xảy ra tại cùng một điểm.

23. Nếu hai sự kiện được nối với nhau bởi véctơ timelike thì:

a. Tồn tại hệ quy chiếu quán tính, trong đó hai sự kiện trên sẽ xảy ra tại cùng một điểm.

b. Không tồn tại hệ quy chiếu quán tính, trong đó chúng xảy ra đồng thời (giải trên giản đồ không thời gian t, x)

24. Neáu ta ñaët: $H = \frac{\dot{R}}{R}$; $H_0=H(t_0)$; $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi}$

thì ta chứng minh được:

$\rho_0 > \rho_c \Rightarrow k = +1$

khi : $\rho_0 = \rho_c \Rightarrow k = o$

$\rho_0 < \rho_c \Rightarrow k = -1$

25. Nếu cho rằng vũ trụ như một bong bóng hình cầu đang nở đều thì công thức tính vận tốc thoát của cơ học Newton ta tìm đượcĠ(gợi ý: ta có định luật Hubble V=HR)

26. Từ phương trình IJ
hãy dẫn về phương trình sau:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} - k \quad ; \quad C = \frac{8\pi}{3}\rho R^3$$

27. Hãy tính Rab cho:

a. Metric Schwarzchild

b. Metric Robertson - Walker

Tài liệu tham khảo

1. Chandrasekhar. S (1998), *The Mathematical Theory of Black* holes, Oxford University press – reprinted.
2. D'inverno (1998), *Introducting Einstein's Relativity*, Oxford University press – reprinted.
3. Hugshton LP and Tod . K (1999), *Introduction to General Relativity*, Cambridge University press – reprinted.
4. Lawden D.P (1982), *Introduction to Tensor Caculus, Relativity and Cosmology,* Wiley – New York – reprinted.
5. Landau and Lifshits (1967), *The Classical Theory of Fields*, Scientific Press – Moscow.
6. Lim Yung Kuo (edi) (1995), *Problems and Solutions on Solid State Physics and Relativity,* World Scientific – reprinted.
7. Misner C – Thorne K Wheeler J (1999), *Gravitation*, Freeman – San Francisco- reprinted.
8. Schutz B.F (1999), *First Course in General Relativity*, Cambridge University press – reprinted.
9. Stephani (2001), *General Relativity*, Cambridge University Press – reprinted.
10. Wasserman .R.H (1992), *Tensors and Manifolds with Applications to Mechanics and Relativity*, Oxford University press – reprinted.
11. Weinberg (1975), *Gravitation and Cosmology*, Wiley & Sons Inc.

Giáo trình THUYẾT TƯƠNG ĐỐI RỘNG của Khoa Vật lý trường Đại học Sư phạm TP.HCM đăng ký trong kế hoạch năm 2002. Ban Ấn Bản Phát hành Nội bộ ĐHSP sao chụp 300 cuốn, khổ 20 x 30, xong ngày 29 tháng 11 năm 2002.