ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

GIÁO TRÌNH CƠ HỌC LÝ THUYẾT

PHẦN TĨNH HỌC

KHOA SƯ PHẠM KỸ THUẬT
BỘ MÔN CƠ KỸ THUẬT

ĐÀ NẴNG 2005

CHƯƠNG I

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN - HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

Tĩnh học vật rắn là phần cơ học chuyên nghiên cứu sự cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của các lực. Trong phần tĩnh học sẽ giải quyết hai bài toán cơ bản :

1- Thu gọn hệ thực về dạng đơn giản.

2- Tìm điều kiện cân bằng của hệ lực.

Để giải quyết các bài toán trên, ta cần nắm vững các khái niệm sau đây :

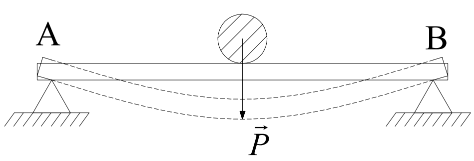
§1 . CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

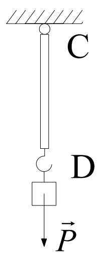
1.1 Vật rắn tuyệt đối :

Vật rắn tuyệt đối là vật mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của vật luôn luôn không đổi (hay nói cách khác dạng hình học của vật được giữ nguyên) dưới tác dụng của các vật khác.

Trong thực tế các vật rắn khi tương tác với các vật thể khác đều có biến dạng. Nhưng biến dạng đó rất bé, nên ta có thể bỏ qua được khi nghiên cứu điều kiện cân bằng của chúng.

Ví dụ : Khi dưới tác dụng của trọng lực P dầm AB phải võng xuống, thanh CD phải giãn ra. (hình 1)





Hình 1

Nhưng do độ võng của dầm và độ dãn của thanh rất bé, ta có thể bỏ qua. Khi giải bài toán tĩnh học ta coi như dầm không võng và thanh không dãn mà kết quả vẫn đảm bảo chính xác và bài toán đơn giản hơn.

Trong trường hợp ta coi vật rắn là vật rắn tuyệt đối mà bài toán không giải được, lúc đó ta cần phải kể đến biến dạng của vật. Bài toán này sẽ được nghiên cứu trong giáo trình sức bền vật liệu.

Để đơn giản, từ nay về sau trong giáo trình này chúng ta coi vật rắn là vật rắn tuyệt đối. Đó là đối tượng để chúng ta nghiên cứu trong giáo trình này.

1.2 Lực :

Trong đời sống hằng ngày, ta có khái niệm về lực như khi ta xách một vật nặng hay một đầu máy kéo các toa tàu. Từ đó ta đi đến định nghĩa lực như sau :

Lực là đại lượng đặc trưng cho tác dụng tương hỗ cơ học của vật này đối với vật khác mà kết quả làm thay đổi chuyển động hoặc biến dạng của các vật.

Qua thực nghiệm, tác dụng lực lên vật được xác định bởi ba yếu tố :

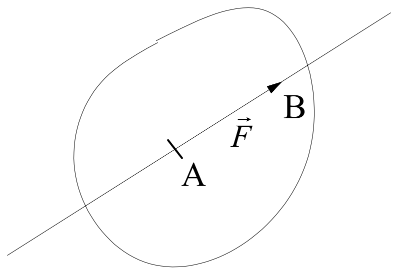
1. Điểm đặt lực
2. Phương, chiều của lực
3. Cường độ hay trị số của lực.

Đơn vị đo cường độ của lực trong hệ SI là Newton (kí hiệu N)

Vì vậy, người ta biểu diễn lực bằng véctơ.

Ví dụ: Lực $\vec{F}$ biểu diễn bằng véctơ $\overrightarrow{AB}$ (hình 2).

Phương chiều của véctơ $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn phương chiều của lực $\vec{F}$, độ dài của véctơ $\overrightarrow{AB}$ theo tỉ lệ đã chọn biểu diễn trị số của lực, gốc véctơ biểu diễn điểm đặt của lực, giá của véctơ biểu diễn phương tác dụng của lực.



Hình 2

1.3 Trạng thái cân bằng của vật :

Một vật rắn ở trạng thái cân bằng là vật đó nằm yên hay chuyển động đều đối với vật khác "làm mốc". Để thuận tiện cho việc nghiên cứu người ta gắn lên vật chuẩn "làm mốc" một hệ trục toạ độ nào đó mà cùng với nó tạo thành hệ quy chiếu. Ví dụ như hệ trục toạ độ Đề-cát Oxyz chẳng hạn. Trong tĩnh học, ta xem vật cân bằng là vật nằm yên so với trái đất.

1.4 Một số định nghĩa :

1. Hệ lực : Hệ lực là tập hợp nhiều lực cùng tác dụng lên vật rắn. Một hệ lực được kí hiệu ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$).

2. Hệ lực tương đương : Hai hệ lực tương đương nhau, nếu như từng hệ lực một lần lượt tác dụng lên cùng một vật rắn có cùng trạng thái cơ học như nhau.

Ta biểu diễn hai hệ lực tương đương như sau :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, ..., \vec{P}_m)$$

trong đó: dấu ~ là dấu tương đương.

Nếu hai hệ lực tương đương ta có thể hoàn toàn thay thế cho nhau được.

3. Hệ lực cân bằng : Hệ lực cân bằng là hệ lực mà dưới tác dụng của nó, vật rắn tự do có thể ở trạng thái cân bằng.

4. Hợp lực : Hợp lực là một lực tương đương với hệ lực.

Ví dụ : Lực $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n)$, ta kí hiệu

$$\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n)$$

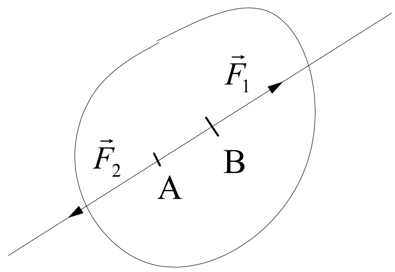
§2. HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

Trên cơ sở thực nghiệm và nhận xét thực tế, người ta đã đi đến phát biểu thành mệnh đề có tính chất hiển nhiên không cần chứng minh làm cơ sở cho môn học gọi là tiên đề này.

2.1 Tiên đề 1: (Hai lực cân bằng)

Điều kiện cần và đủ để hai lực tác dụng lên một vật rắn cân bằng là chúng có cùng phương tác dụng, ngược chiều nhau và cùng trị số.

Trên hình 3, vật rắn chịu tác dụng bởi hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cân bằng nhau.



Hình 3

Ta kí hiệu :

$$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2) \sim 0.$$

Đó là điều kiện cân bằng đơn giản cho một hệ lực có 2 lực.

2.2 Tiên đề 2 : (Thêm hoặc bớt một hệ lực cân bằng)

Tác dụng của một hệ lực lên một vật rắn không thay đổi nếu ta thêm vào hay bớt đi hai lực cân bằng nhau.

Theo tiên đề này, hai hệ lực chỉ khác nhau một hệ lực cân bằng thì chúng hoàn toàn tương đương nhau.

Từ hai tiên đề trên, ta có hệ quả :

Hệ quả trượt lực : Tác dụng của một hệ lực lên một vật rắn không thay đổi khi ta dời điểm đặt của lực trên phương tác dụng của nó.

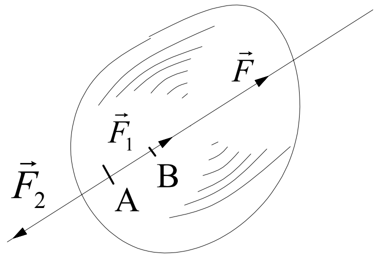
Chứng minh : Giả sử ta có lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn đặt tại điểm A (hình 4). Trên phương tác dụng của lực $\vec{F}$ ta lấy một điểm B và đặt vào đó hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cân bằng nhau, có véctơ như trên hình vẽ và trị số bằng F.

Theo tiên đề 2 thì : $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2)$

Nhưng theo tiên đề 1 thì : $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$, do đó ta có thể bỏ đi. Như vậy, ta có :

$$\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{F}_1$$

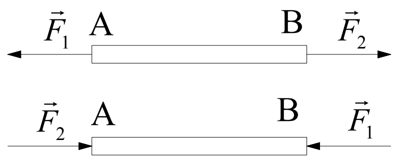
Điều đó chứng tỏ lực $\vec{F}$ đã trượt từ A đến B mà tác dụng của lực không đổi. Hệ quả đã được chứng minh



Hình 4

Chú ý : Hai tiên đề trên và hệ quả chỉ đúng cho vật rắn tuyệt đối. Còn đối với vật rắn biến dạng các tiên đề 1, 2 và hệ quả trượt lực không còn đúng nữa.

Ví dụ : Trên hình 5, thanh mềm AB chịu hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ tác dụng sẽ không cân bằng vì do thanh biến dạng, còn khi trượt lực thì thanh từ trạng thái bị kéo sang bị nén.



Hình 5

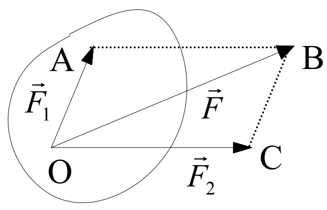
2.3 Tiên đề 3 : (Hợp hai lực)

Hai lực tác dụng lên vật rắn đặt tại cùng một điểm có hợp lực đặt tại điểm đó xác định bằng đường chéo của hình bình hành mà các cạnh chính là các lực đó (hình 6). Tiên đề 3 khẳng định hai lực có cùng điểm đặt thì có hợp lực $\vec{R}$.

Về phương diện véctơ ta có :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

nghĩa là véctơ $\vec{R}$ bằng tổng hình học của các véctơ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.



Hình 6

Tứ giác OACB gọi là hình bình hành lực.

Về trị số :

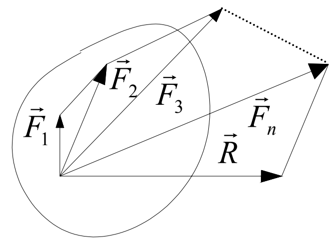
$$R = \sqrt{F^2{}_1 + F^2{}_2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

(trong đó α là góc hợp bởi hai véctơ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$)

Tiên đề trên, áp dụng cho hệ lực động quy tại O, ta có các định lý sau.

Định lý I : Một hệ lực đồng quy tác dụng lên vật rắn có hợp lực đặt tại điểm đồng quy và véctơ hợp lực bằng tổng hình học véctơ các lực thành phần.

Chứng minh : Giả sử ta có một hệ lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$) tác dụng lên vật rắn đặt tại cùng điểm O (hình 7).



Hình 7

Áp dụng tiên đề 3, ta hợp $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ được lực :

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

bằng cách vẽ véctơ $\overrightarrow{AB} = \vec{F}_2$ nối OB được lực $\vec{R}_1$. Bây giờ ta hợp $\vec{R}_1$ và $\vec{F}_3$ ta được

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

bằng cách vẽ véctơ $\overrightarrow{BC} = \vec{F}_3$, nối OC được $\vec{R}_2$. Tiến hành tương tự như vậy đến lực $\vec{F}_n$, ta được hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực :

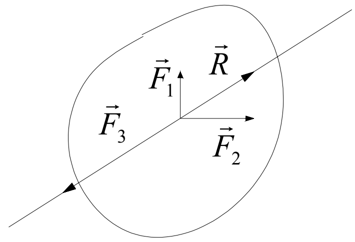
$$\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n$$

hay : $$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Định lý II : Nếu ba lực tác dụng lên một vật rắn cân bằng cùng nằm trong mặt phẳng và không song song nhau thì ba lực phải đồng qui.

Chứng minh :

Giả sử, một vật rắn chịu tác dụng của ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ cân bằng. Theo giả thuyết hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ cùng nằm trong mặt phẳng và không song song nên phương tác dụng của chúng giao nhau tại một điểm O chẳng hạn. Ta sẽ chứng minh $\vec{F}_3$ cũng qua O.



Hình 8

Thật vây, theo tiên đề 3 hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ có hợp lực $\vec{R}$ đặt tại O :

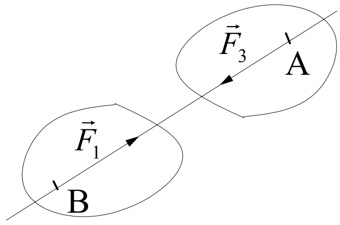
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

vì ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \vec{F}_3$) ~ 0 nên ($\vec{R}$, $\vec{F}_3$) ~ 0.

Theo tiên đề 1, hai lực cân bằng nhau thì chúng có cùng phương tác dụng. Vậy đường tác dụng của lực $\vec{F}_3$ phải qua O (hình 8).

<u>*2.4 Tiên đề 4 :*</u> (Tiên đề tác dụng và phản tác dụng)

Ứng với mỗi lực tác dụng của vật này lên vật khác, bao giờ cũng có phản lực tác dụng cùng trị số, cùng phương tác dụng, nhưng ngược chiều nhau.



Hình 9

Giả sử một vật B tác dụng lên vật A một lực $\vec{F}$ thì ngược lại vật A tác dụng lên vật B lực $\vec{F} = -\vec{F}$. Hai lực này có trị số bằng nhau, ngược chiều nhau, nhưng không cân bằng vì chúng đặt lên hai vật khác nhau (hình 9).

<u>*2.5 Tiên đề 5 :*</u> (Nguyên lý hoá rắn)

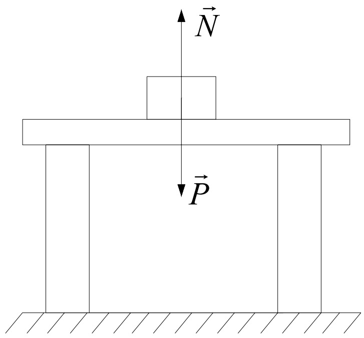
Nếu dưới tác dụng của hệ lực nào đó một vật biến dạng. Nhờ tiên đề này khi một vật biến dạng đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực đã cho, ta có thể xem vật đó như vật rắn để khảo sát điều kiện cân bằng.

<u>*2.6 Tiên đề 6 :*</u> (Tiên đề giải phóng liên kết)

Một vật rắn từ vị trí này đến vị trí đang xét có thể thực hiện di chuyển về mọi phía gọi là vật tự do. Ví dụ một quả bóng đang bay. Nhưng thực tế, phần lớn các vật khảo sát đều ở trạng thái không tự do nghĩa là một số di chuyển của vật bị vật khác cản lại. Những vật như vậy gọi là vật không tự do hay vật chịu liên kết. Tất cả những đối tượng ngăn cản di chuyển của vật khảo sát gọi là các liên kết.

Ví dụ : Hộp phấn để trên mặt bàn, mặt bàn ngăn cản hộp phấn di chuyển xuống phía dưới. (Hình 10)

Hộp phấn là vật chịu liên kết còn mặt bàn là vật gây liên kết.



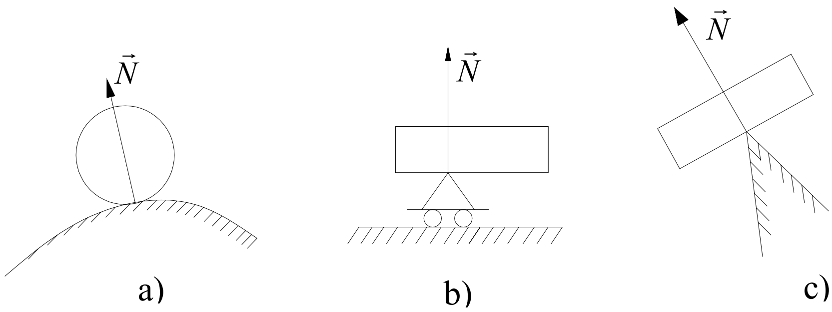
Hình 10

Theo tiên đề 4 thì vật chịu liên kết tác dụng lên vật gây liên kết một lực, ngược lại vật gây liên kết tác dụng lên vật chịu liên kết một lực. Chính lực này ngăn cản chuyển động của vật, ta gọi phản lực liên kết. Ví dụ trên hình 10, lực $\vec{N}$ là phản lực liên kết của mặt bàn tác dụng lên hộp phấn nhằm ngăn cản hộp phấn di chuyển xuống phía dưới.

Ta nhận thấy, phản lực liên kết là lực thụ động, sẽ có chiều ngược với chiều mà vật khảo sát muốn di chuyển bị liên kết ngăn cản lại. Theo một phương nào đó, không bị liên kết ngăn cản thì theo phương đó thành phần phản lực liên kết bằng không.

2. Một số liên kết thường gặp :

a) Liên kết tựa :

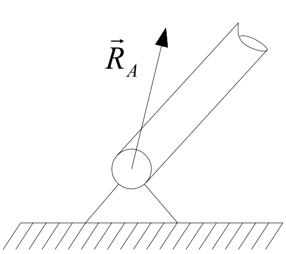


Hình 11

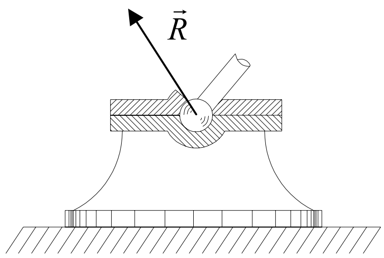
Vật tựa trên mặt nhẵn (hình 11a) hay giá tựa con lăn (hình 11b) theo phương pháp tuyến mặt trụ, vật khảo sát bị cản trở bởi phản lực $\vec{N}$ theo hướng đó. Còn thanh tựa lên điểm nhọn C (hình 11c) thì phản lực $\vec{N}$ sẽ vuông góc với thanh.

b) Liên kết bản lề :

- Bản lề trụ : (Hình 12)



Hình 12



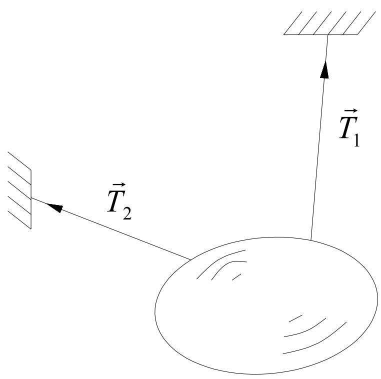
Hình 13

Vật di chuyển theo phương nào vuông góc với trục bản lề đều bị ngăn cản, nên phản lực $\vec{R}_A$ có phương vuông góc với trục bản lề.

*- Bản lề cầu : (Hình 13)*Phản lực $\vec{R}$ có phương bất kỳ và qua tâm O của bản lề vì chuyển động của vật theo hướng nào cũng bị ngăn cản.

c) Liên kết dây mềm :

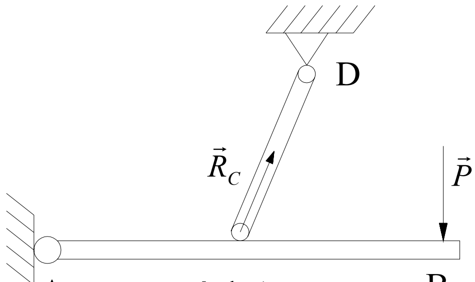
Theo hướng dây kéo căng thì vật bị cản trở, nên phản lực của dây là $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ hướng dọc dây ra phía ngoài vật. (Hình 14)



Hình 14

d) Liên kết thanh :

Dầm AB chịu liên kết thanh CD với bản lề C và D. Trên thanh CD không có lực tác dụng và bỏ qua trọng lượng thanh thì phản lực $\vec{R}$ của thanh hướng dọc thanh (hình 15).



Hình 15

Để chứng minh điều này, ta tách thanh CD ra khảo sát và áp dụng tiên đề một thì phản lực $\vec{R}_C$ phải qua bản lề D. Đối với thanh cong ta cũng chứng minh như vậy.

Trong tĩnh học, bài toán xác định phản lực là bài toán quan trọng. Phương chiều, trị số phản lực được xác định cụ thể tuỳ theo từng bài toán nhờ có tiên đề giải phóng liên kết sau.

3. Tiên đề 6 :

Một vật chịu liên kết cân bằng có thể xem như một vật tự do cân bằng, nếu tưởng tượng bỏ các liên kết và thay vào đó các phản lực liên kết tương ứng của chúng.

§3. LÝ THUYẾT VỀ MÔMEN LỰC

3.1 Mômen của lực đối với một điểm :

Thực tế cho ta thấy có một điểm cố định O, chịu tác dụng lực $\vec{F}$ thì vật sẽ quay quanh điểm đó . Tác dụng của lực $\vec{F}$ sẽlàm vật quay được xác định bởi ba yếu tố :

- Phương mặt phẳng chứa lực $\vec{F}$ và điểm O
- Chiều quay của vật quanh trục đi qua O và vuông góc với mặt phẳng này.
- Tích số, trị số lực $\vec{F}$ và chiều dài cánh tay đòn d của lực $\vec{F}$ đối với điểm O (d là đoạn thẳng vuông góc kẻ từ điểm O đến đường tác dụng của lực $\vec{F}$).

Từ đó ta suy ra định nghĩa sau :

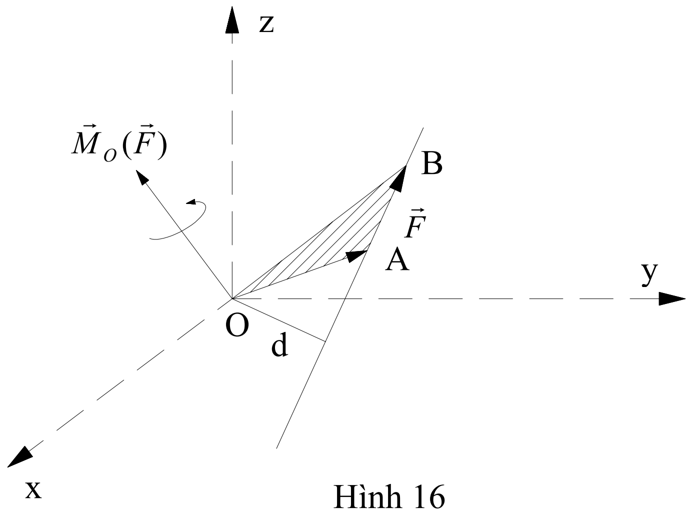
<u>1. Định nghĩa :</u> Mômen lực $\vec{F}$ đối với điểm O là một véctơ đặt tại điểm O có phương vuông góc với mặt phẳng chứa lực $\vec{F}$ và điểm O, có chiều sao ta nhìn từ mút đến thấy lực $\vec{F}$ hướng quanh O ngược chiều kim đồng hồ, có độ dài bằng tích trị số lực $\vec{F}$ với cánh tay đòn của lực $\vec{F}$ đối với điểm O (hình 16).

2. Biểu thức véctơ mômen của lực :

Từ định nghĩa trên, ta có trị số mômen của lực đối với điểm O là :

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = F.d = 2dt\Delta OAB$$

(Trong đó F.d bằng hai lần diện tích tam giác OAB, chỉ tính trị số mà không kể đơn vị).



Hình 16

Nếu ta gọi véctơ $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ là véc tơ bán kính điểm đặt A của lực $\vec{F}$ cà xác định véctơ $\vec{r} \wedge \vec{F}$ rồi so sánh với véctơ mômen lực $\vec{F}$ đói với điểm O là

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad (1.4)$$

Véctơ mômen của lực đối với một điểm bằng tích véctơ giữa véctơ bán kính điểm đặt của lực với lực đó.

Chọn hệ trục Oxyz, ta gọi các hình chiếu lực $\vec{F}$ là X, Y, Z và hình chiếu của véctơ $\vec{r}$ là x, y, z (x, y, z cũng là toạ độ điểm A). Do đó ta có :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Trong đó $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là véctơ đơn vị trên các trục toạ độ x, y, z.

Từ đó, ta suy ra hình chiếu véctơ mômen của lực $\vec{F}$ là :

$$\vec{M}_{Ox}(\vec{F}) = yZ - Zy$$
$$\vec{M}_{Oy}(\vec{F}) = zX - xZ \qquad (1.5)$$
$$\vec{M}_{Oz}(\vec{F}) = xY - yX$$

Nếu biết các hình chiếu này, véctơ mômen $\vec{M}_O(\vec{F})$ hoàn toàn xác định. Trong trường hợp các lực tác dụng lên vật cùng trong một mặt phẳng, ta coi mặt phẳng chứa lực $\vec{F}$ và điểm O đã được xác định. Vì vậy mômen lực $\vec{F}$ đối với điểm O trong mặt phẳng ấy là lượng đại số bằng cộng hoặc trừ tích số trị số lực $\vec{F}$ với chiều dài cánh tay đòn lực $\vec{F}$ đối với điểm O.

Ta kí hiệu :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \pm F.d \qquad (1.6)$$

Lấy dấu cộng khi lực $\vec{F}$ hướng quanh O ngược chiều kim đồng hồ và dấu trừ trong trường hợp ngược lại (Hình 17 a,b)

$$\overline{M}_O(\vec{F}) = +F.d \qquad \overline{M}_O(\vec{F}) = +F.d$$

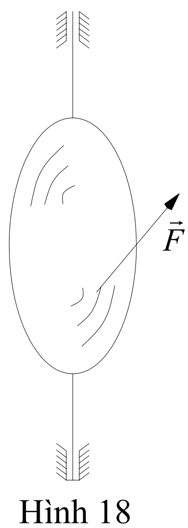
Hình 17

Đơn vị tính là : N/m

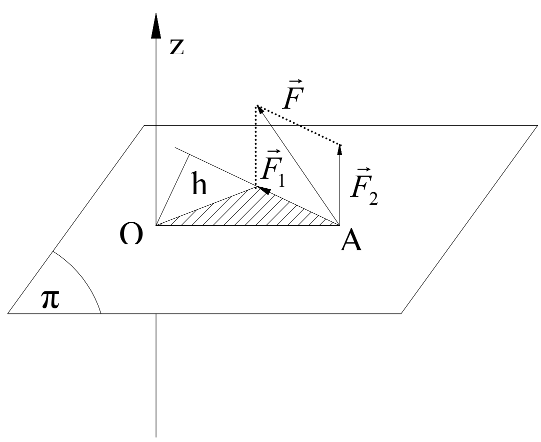
- Mômen của lực đối với một điểm không thay đổi khi ta trượt lực trên phương tác dụng của nó.
- Mômen của lực đối với điểm O bằng không khi phương tác dụng của lực qua O. Lúc này, tác dụng của lực $\vec{F}$ không làm vật quay, chỉ gây ra phản lực tại điểm O.

3.2 Mômen của lực đối với trục :

Mômen của lực đối với một trục đặt trưng tác dụng quay k khi lực tác dụng lên vật làm vật quay quanh trục đó. (hình 18)



Hình 18



Hình 19

Thật vậy, giả sử có lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật có thể quay quanh trục z, ta phân lực này ra hai thành phần là $\vec{F}_1$ vuông góc với z, $\vec{F}_1$ song song với trục z theo quy tắc hình bình hành. Ta nhận thấy chỉ có thành phần $\vec{F_1}$ gây ra tác dụng quay quanh trục z. Vì vậy, ta có định nghĩa sau :

1. *Định nghĩa :* Mômen lực $\vec{F}$ đối với trục z là lượng đại số bằng mômen của $\vec{F_1}$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục z lấy đối với giao điểm của trục và mặt phẳng ấy. (hình 19)

Ta kí hiệu mômen lực $\vec{F}$ đối với trục z là

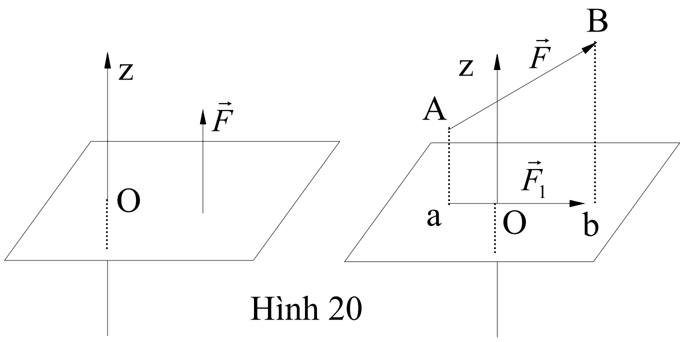
$$\vec{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) = \pm F_1.h$$

Ta lấy dấu cộng, nếu nhìn từ chiều dương của trục z xuống mặt phẳng (π) thấy lực $\vec{F}$ hướng quanh trục z ngược chiều kim đồng hồ, lấy dấu trừ với chiều ngược lại.

2. *Trường hợp đặc biệt :*

Nếu lực $\vec{F}$ song song với trục z thì $\vec{F_1} = 0$ hay lực $\vec{F}$ cắt trục z thì h = 0 (hình 20) và lúc đó :

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = 0$$



Hình 20

Trong trường hợp này, ta thấy lực $\vec{F}$ và trục z ở trong cùng mặt phẳng. Như vậy, mômen của lực đối với trục bằng 0 khi lực và trục cùng trong một mặt phẳng.

3.3 Định lý liên hệ mômen lực đối với một điểm và mômen lực đối với trục :

Giả sử cho một lực $\vec{F}$, một trục z và điểm O nằm trên trục z (hình 21). Ta lấy mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục z và điểm O giữa hai đại lượng đó có sự liên hệ nhau bởi định lý sau :

Định lý : Mômen lực đối với một trục bằng hình chiếu lên trục đó của véctơ mômen lực lấy đối với điểm bất kỳ nằm trên trục ấy, nghĩa là :

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = HC_z\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right] \qquad (1.8)$$

(hình chiếu lên trục z viết tắt là HC_z)

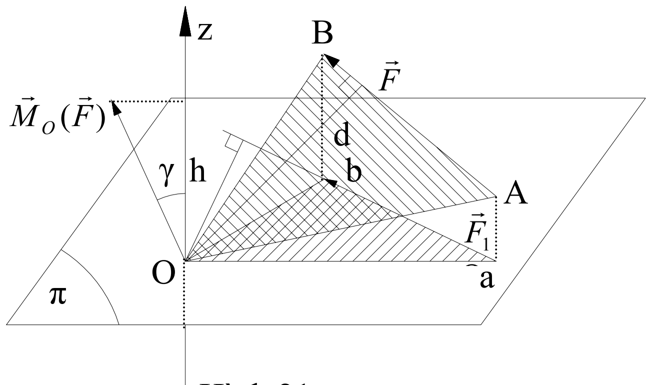
Chứng minh : Trên hình 21 ta thấy :

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = F_1 h = 2dt\Delta Oab$$

Ta cần chứng minh hình chiếu véctơ mômen $\vec{M}_O(\vec{F})$ lên trục z cũng có giá trị đó. Thật vậy, ta gọi γ là góc giữa trục và véctơ $\vec{M}_O(\vec{F})$, thì:

$$HC_z\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right] =$$

$$M_O.\cos\gamma = F.d\cos\gamma = 2dt\Delta OAB.\cos\gamma$$



Hình 21

Nhưng góc γ cũng chính là góc giữa hai mặt phẳng tam giác OAB và tam giác Oab (vì trục z và véctơ $\vec{M}_O(\vec{F})$ tương ứng vuông góc với các mặt phẳng đó). Vì vậy, theo định lý hình chiếu diện tích thì :

$$dt\Delta OAB.\cos\gamma = dt\Delta Oab$$

cho nên :

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = HC_z\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]$$

Định lý đã được chứng minh.

Từ định lý trên, ta có thể biểu diễn mômen lực đối với một trục bằng giải tích :

$$\vec{M}_x(\vec{F}) = HC_x\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right] = yZ - Zy$$

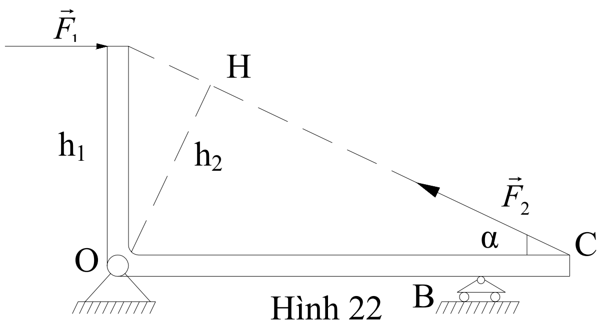
$$\vec{M}_y(\vec{F}) = HC_y\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right] = zX - xZ \qquad (1.9)$$

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = HC_z\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right] = xY - yX$$

Nhờ định lý này ta có thể chuyển việc tìm mômen của lực đối với một điểm về tính mômen của lực đối với một trục.

Sau đây ta làm một ví dụ :

Ví dụ 1: Cho một thanh L chịu lực tác dụng bởi lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ như hình 22. Biết OA= 4m, OC = 6m, α = 30^0, F_1 = 20 N, F_2 = 16 N. Tìm mômen các lực đối với điểm O.



Hình 22

Giải :

Ta tìm tay đòn của các lực là :

h_1 = OA = 4m.

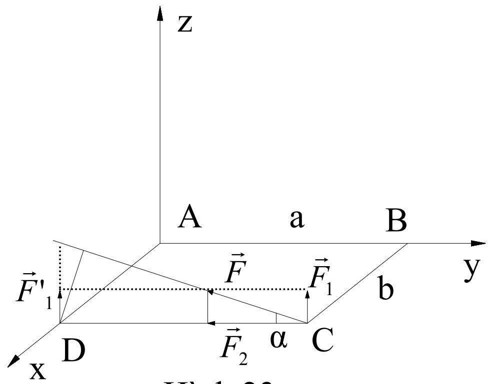
h_2 = Ocsinα = 6xl/2 = 3m.

Ta tính :

$$\overline{m}_O(\vec{F}_1) = -F_1 h_1 = -20.4 = 80Nm$$

$$\overline{m}_O(\vec{F}_2) = -F_2 h_2 = +16.3 = +48Nm$$

Ví dụ 2 : Tìm mômen lực $\vec{F}$ tác dụng lên tấm chữ nhật ABCD có cạnh a, b, đối với trục toạ độ x, y, z (Hình 23)



Hình 23

Giải :

Để tìm mômen lực $\vec{F}$ đối với trục x ta chiếu lên mặt phẳng vuông góc với trục x. Vì lực $\vec{F}$ nằm trong mặt phẳng này, nên cũng bằng chính nó. Vậy :

$$\overline{m}_x(\vec{F}) = \overline{m}_D(\vec{F}) = +F.h = +F.a.\sin\alpha$$

Ở đây ta lấy dấu cộng, vì nhìn từ chiều dương trục x đến thấy lực $\vec{F}$ hướng quanh trục x ngược chiều kim đồng hồ, còn h = DH = DCsinα = a.sinα

Tìm mômen lực $\vec{F}$ đối với trục y, ta chiếu lực $\vec{F}$ lên mặt phẳng A vuông góc với trục y là $\vec{F}_1'$, cánh tay đòn lực $\vec{F}_1'$ đối với điểm A là b. Theo hình vẽ ta có :

$$m_y(\vec{F}_1') = m_A(\vec{F}_1') = m_B(\vec{F}_1') = -F.b\sin\alpha$$

(Vì $F_1' = F_1.\sin\alpha$)

Ta lấy dấu trừ vì lực $\vec{F}_1'$ hướng quanh trục y thuận chiều kim đồng hồ khi ta nhìn từ chiều dương của trục đến.

Tương tự ta có :

$$m_z(\vec{F}) = m_A(\vec{F}_2) = -F.b\cos\alpha$$

§4. LÝ THUYẾT VỀ NGẪU LỰC

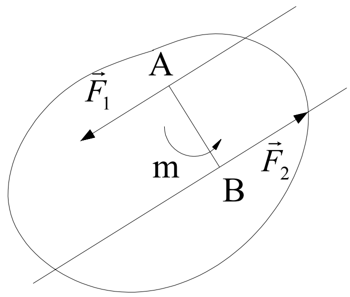
4.1. Khái niệm về ngẫu lực :

<u>*1. Định nghĩa :*</u> Ngẫu lực là hệ hai lực có phương tác dụng song song nhau, ngược chiều và có cùng trị số.

Ví dụ : Trên hình 24, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ tạo thành một ngẫu lực.

Một ngẫu lực không có hợp lực vì : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

nghĩa là ta không thể thay thế một ngẫu lực bằng một lực được. Tác dụng của ngẫu lực lên vật làm vật quay và được xác định bằng ba yếu tố:



Hình 24

- Mặt phẳng tác dụng ngẫu lực, nghĩa là mặt phẳng chứa hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ của ngẫu.

- Chiều quay của ngẫu lực, nghĩa là chiều đi vòng theo chiều các lực

Ta quy ước, chiều quay là dương nếu nó quay ngược chiều kim đồng hồ, ngược lại chiều quay âm.

- Trị số mômen ngẫu lực, kí hiệu m. m = F_1.d

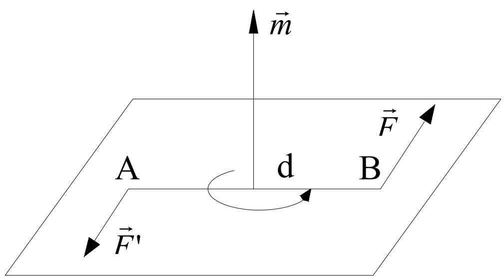
d – Gọi là cánh tay đòn ngẫu lực, là khoảng cách giữa hai phương tác dụng các lực của ngẫu.

Nếu lực tính bằng N, chiều dài cánh tay đòn d tính bằng m thì mômen tính bằng Nm.

Để biểu diễn ngẫu lực với ba đặc trưng ở trên, người ta dùng khái niệm véctơ mômen của ngẫu (kí hiệu : $\vec{m}$)

Véctơ này được xác định như sau :

- Phương vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu.
- Có chiều sao cho khi ta nhìn từ mút véctơ đến gốc thấy chiều quay của ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ.
- Còn độ dài biểu diễn trị số mômen ngẫu lực (hình 25)

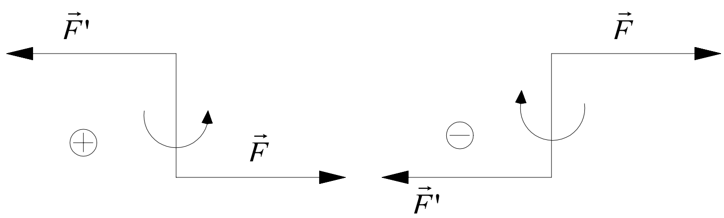


Hình 25

Trường hợp mặt phẳng ngẫu lực được xác định thì ngẫu lực được biểu diễn bằng mômen đại số :

$\overline{m} = \pm F.d$ (1.10)

Ta lấy dấu cộng khi chiều quay của ngẫu lực là dương và dấu trừ khi chiều quay của ngẫu là âm (hình 26)



Hình 26

Chú ý : * Về mặt toán học ta có thể biểu diễn véctơ mômen của ngẫu là :

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

trong đó A, B là điểm đặt của lực $\vec{F}$ và $\vec{F}'$ của ngẫu.

Thật vậy, nếu ta so sánh thì hai véctơ đó có cùng phương, cùng chiều và trị số bằng nhau.

* Trị số mômen của ngẫu là :

$$m = F.d = 2dt\Delta ABC$$

(Ở đây chỉ tính về trị số, mà không kể đơn vị)

2. Các tính chất tương đương của ngẫu lực :

Qua thực nghiệm và ta có thể chứng minh được là tác dụng một ngẫu lên một vật rắn không thay đổi nếu :

- Ta dời ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng của ngẫu hoặc dời trong những mặt phẳng song song với mặt phẳng tác dụng ngẫu lực.
- Ta có thể thay đổi chiều dài cánh tay đòn và trị số của lực.

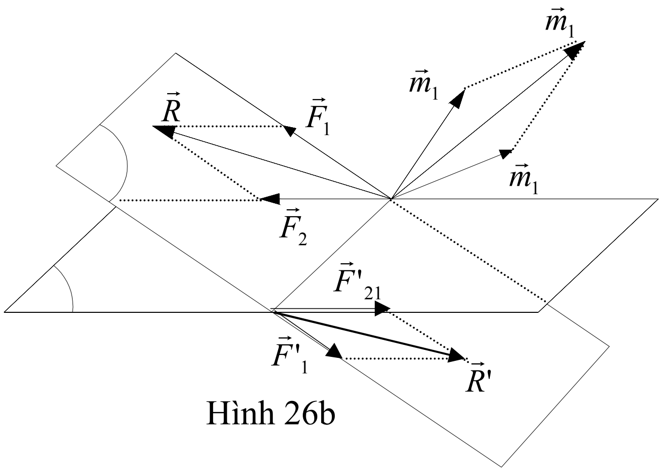
Từ đó, ta đi đến một kết luận tổng quát là :

Hai ngẫu lực có véctơ mômen bằng nhau thì tương đương nhau. Vì vậy người ta gọi véctơ mômen của ngẫu là véctơ tự do. Đối với vật rắn có những ngẫu lực tác dụng, ta sẽ áp dụng định lý hợp hệ ngẫu lực sau đây :

4.2 Định lý : Hợp hệ ngẫu lực tác dụng lên một vật rắn, ta được một ngẫu lực tổng cộng, có véctơ mômen bằng tổng hình học véctơ mômen các ngẫu lực thành phần.

Chứng minh :

Để chứng minh định lý này, trước tiên ta xét trường hợp hệ hai ngẫu lực tác dụng lên vật rắn là $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ và $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$ có mặt phẳng tác dụng là (π_1) và (π_2) giao nhau theo đường AB (hình 26b).



Hình 26b

Ta dời các ngẫu lực đó về cùng cánh tay đòn AB rồi lần lượt hợp các lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ được lực $\vec{R}$, hợp lực $\vec{F}'_1$ và $\vec{F}'_2$ được lực $\vec{R}'$. Nhìn hình vẽ ta có :

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{R}' = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 \end{cases} \text{ vì } \begin{matrix} \vec{F}' = -\vec{F}_1 \\ \vec{F}'_2 = -\vec{F}_2 \end{matrix} \text{ nên } \vec{R}' = -\vec{R}$$

Như vậy, lực $\vec{R}$ và $\vec{R}'$ tạo nên một ngẫu lực với véctơ mômen là $\vec{M}$ Ta tìm véctơ mômen ngẫu lực này.

Theo công thức (1.11) ta có :

$$\vec{M} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{BA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_2$$

Nhưng : $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_1 = \vec{m}_1$, còn $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_2 = \vec{m}_2$

Do đó : $\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$

Nghĩa là véctơ $\vec{M}$ biểu diễn bằng đường chéo hình bình hành mà các cạnh là các véctơ mômen các ngẫu lực thành phần. Đối với 2 ngẫu lực ta chứng minh xong.

Nếu một hệ ngẫu lực tác dụng lên vật rắn với các véctơ mômen là $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \ldots \vec{m}_n$ thì ta cũng tiến hành tương tự như trên, lần lượt hợp hai ngẫu lực một với nhau. Cuối cùng ta được ngẫu lực tổng cộng với véctơ mômen là :

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3 + \ldots + \vec{m}_n = \sum \vec{m}_k \qquad (1.13)$$

Nếu các ngẫu lực cùng nằm trong mặt phẳng thì mômen ngẫu lực tổng cộng bằng tổng đại số mômen ngẫu lực thành phần :

$$\vec{M} = \sum \vec{m}_k \qquad (1.13')$$

Để thuận tiện cho việc tính toán, véctơ mômen ngẫu lực tổng cộng $\vec{M}$ có thể tìm bằng phương pháp giải tích nhờ định lý hình chiếu véctơ lên một trục là:

$$M_x = \sum m_{kx}, \qquad M_y = \sum m_{ky}, \qquad M_z = \sum m_{kz}$$

Đó là các hình chiếu của véctơ $\vec{M}$ lên các trục toạ độ x, y, z. Trị số của M là:

$$M = \sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y + M^2{}_z}$$

CHƯƠNG II

LÝ THUYẾT HỆ LỰC

Bây giờ, ta sẽ áp dụng các lý luận ở trên để nghiên cứu cho hệ lực. Để khảo sát một hệ lực ta tiến hành hai bước sau :

- Thu gọn hệ lực
- Tìm điều kiện cân bằng của hệ lực

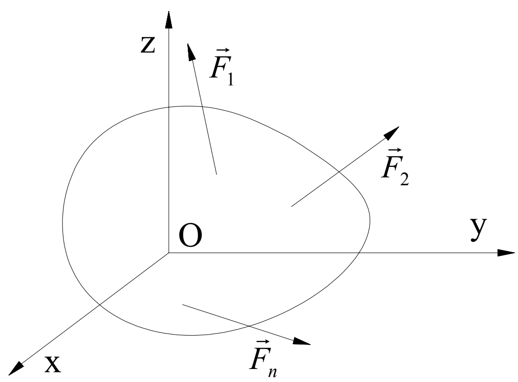
Trước khi thu gọn, ta phải nắm vững hai đặc trưng hình học cơ bản của hệ lực.

§1. HAI ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CƠ BẢN CỦA HỆ LỰC

1.1 Véctơ chính của hệ lực :

1. Định nghĩa : Giả sử cho một hệ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ tác dụng lên vật rắn, ta định nghĩa véctơ chính của hệ lực như sau :

Véctơ chính của hệ lực là một véctơ bằng tổng hình học véctơ các lực thành phần của hệ lực đó. Ta gọi $\vec{R}'$ là véctơ chính của hệ lực, thì :



Hình 27

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (2.1)$$

2. Phương pháp xác định véctơ chính :

Nếu chiếu đẳng thức véctơ (2.1) lên các trục toạ độ Đề-các vuông góc x, y, z ta được :

$$\begin{aligned} R'_x &= \sum F_{kx} = \sum X_k \\ R'_y &= \sum F_{ky} = \sum Y_k \\ R'_z &= \sum F_{kz} = \sum Z_k \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Trong đó R'_x, R'_y, R'_z là các hình chiếu véctơ $\vec{R}'$, còn X_k, Y_k, Z_k là hình chiếu lực $\vec{F}_k$ lên các trục toạ độ x, y, z.

Từ công thức (2.2) ta tìm trị số, phương chiều của véctơ chính $\vec{R}'$ như sau :

$$R' = \sqrt{\left(\sum X_k\right)^2 + \left(\sum Y_k\right)^2 + \left(\sum Z_k\right)^2} \qquad (2.3)$$

$$\cos(x,\vec{R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(x,\vec{R}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(x,\vec{R}) = \frac{R_z}{R}$$

Đặc biệt nếu các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ là hệ lực phẳng, các lực nằm trong cùng mặt phẳng thì véctơ chính chỉ có hai hình chiếu :

$$R'_x = \sum X_k, \qquad R'_y = \sum Y_k \qquad (2.4)$$

và
$$R' = \sqrt{\left(\sum X_k\right)^2 + \left(\sum Y_k\right)^2}$$

b. Phương pháp hình học :

Phương pháp này chỉ dùng cho hệ lực phẳng, còn hệ lực không gian, đa giác lực là đa giác ghềnh, ta khó xác định đựoc.

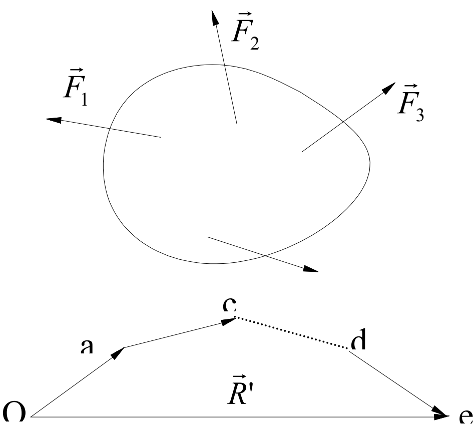
Thật vậy, cho một hệ lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$) tác dụng lên vật rắn. Từ điểm O bật kỳ (hình 28) ta lần lượt vẽ các véctơ :

$$\overrightarrow{Oa} = \vec{F}_1, \ \overrightarrow{ab} = \vec{F}_2, \ ..., \ \overrightarrow{de} = \vec{F}_n$$

Nối Oe ta được véctơ chính $\vec{R}'$ của hệ lực :

$$\vec{R}' = \overrightarrow{Oe} = \overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{ab} + ... + \overrightarrow{de}$$

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k$$



Hình 28

Đa giác Oab,..,de là đa giác lực, véctơ $\overrightarrow{Oe}$ đóng kín đa giác lực là véctơ chính.

Nếu véctơ chính bằng không, tức là $\vec{R}' = 0$, thì điểm e trên đa giác lực sẽ trùng với điểm O. Ta gọi đa giác lực tự đóng kín.

1.2 Mômen chính của hệ lực :

1. Định nghĩa : Mômen chính của hệ lực đối với một tâm là tổng mômen các lực thành phần của hệ lực đối với cùng tâm ấy.

2. Biểu thức và cách xác định : Đối với hệ lực không gian bất kỳ, mômen chính đối với tâm O là véctơ, kí hiệu $\vec{M}_O$. Theo định nghĩa ta có :

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (2.5)$$

Trong hệ lực phẳng mômen chính biểu diễn bằng mômen đại số :

$$\overline{M}_O = \sum \overline{m}(\vec{F}_k) \qquad (2.6)$$

Véctơ mômen chính được xác định bằng các hình chiếu sau đây :

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum HC_x\left[\vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)\right] = \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) \\ M_{Oy} &= \sum HC_y\left[\vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)\right] = \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) \\ M_{Oz} &= \sum HC_z\left[\vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)\right] = \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Trị số mômen chính là :

$$M_O = \sqrt{M^2{}_{Ox} + M^2{}_{Oy} + M^2{}_{Oz}}$$

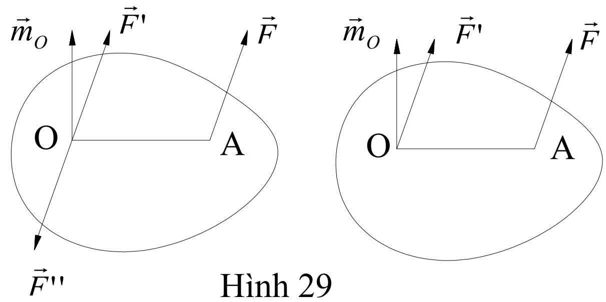
§2. HỆ LỰC THU GỌN

2.1 Thu gọn hệ lực về một tâm :

Để thu gọn hệ lực về một tâm ta dựa vào định lý dời lực song song.

1. Định lý : Dời song song một hệ lực tới một điểm khác, để cho tác dụng của lực không đổi, ta thêm vào một ngẫu lực phụ có véctơ mômen của lực đặt ở điểm cũ đối với điểm mà lực dời đến.

Chứng minh : Giả sử ta có lực $\vec{F}$ đặt tại A. Tại điểm O ta đặt thêm hai lực cân bằng là $\vec{F}'$ và $\vec{F}''$ sao cho $\vec{F}' = \vec{F} = -\vec{F}''$ theo tiên đề 2 ta có : $\vec{F}_A \sim (\vec{F}', \vec{F}'', \vec{F})$, nhưng $(\vec{F}, \vec{F}'')$ tạo thành một ngẫu lực có véctơ mômen $\vec{m}_O = \vec{m}_O(\vec{F})$



Hình 29

Nói cách khác là lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với lực $\vec{F}' = \vec{F}$ đặt tại và ngẫu lực $\vec{m}_O$. Véctơ mômen này vuông góc với lực $\vec{F}$ cũng vuông góc với lực $\vec{F}$. Từ đó ta có :

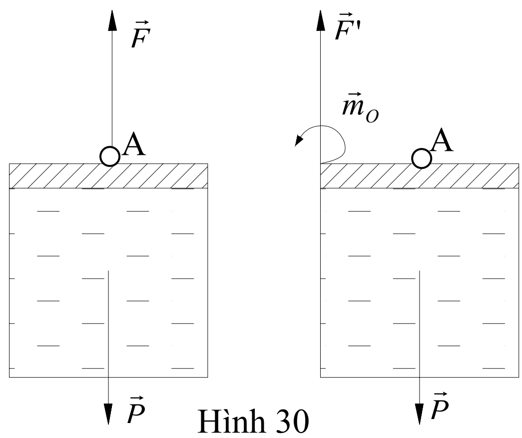
Định lý đảo: Một lực $\vec{F}'$ đặt tại O và một ngẫu lực có véctơ mômen $\vec{m}$ vuông góc với lực $\vec{F}'$ thì tương đương với lực $\vec{F}$ đặt tại điểm khác với $\vec{F} = \vec{F}'$.

Chứng minh : Thật vậy, từ ngẫu lực $\vec{m}$ ta phân ra hai lực thành phần $\vec{F}$ và $\vec{F}''$ sao cho có véctơ mômen bằng $\vec{m}$ và $\vec{F}' = \vec{F} = -\vec{F}''$. Theo tiên đề 1 lực $\vec{F}'$ và $\vec{F}''$ cân bằng nhau, theo tiên đề 2 ta có thể bỏ đi và hệ lực bây giờ còn một lực $\vec{F}$ đặt tại A.

Tất nhiên khi đó khoảng cách : $d = OA = \dfrac{m}{F}$.

Ví dụ : Khi ta xách một thùng nước trọng lượng P đặt tại điểm A với một lực $\vec{F}$ có trị số là F = P. Bây giờ ta xách thùng nước tại điểm O ở mép thùng nước ở trạng thái như cũ thì tay ta phải tạo ra một ngẫu lực nữa có mômen :

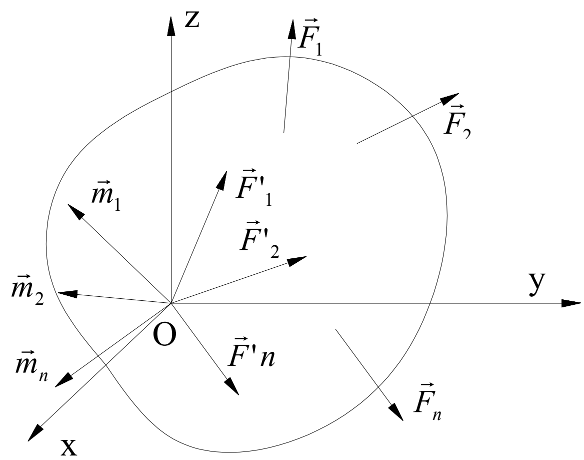
$\vec{m}_O = \vec{m}_O(\vec{F})$ về trị số $m_O = F.OA = F.d$



Hình 30

2. Phương pháp thu gọn hệ lực về một tâm :

Cho hệ lực bất kỳ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$. Hãy thu gọn hệ lực đó về tâm O tuỳ ý. Áp dụng định lý dời trục song song, lần lượt ta dời từng lực về O. Khi đó tại O ta được hệ lực đồng qui là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ và hệ ngẫu lực có véctơ mômen là $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, ..., \vec{m}_n$. Theo tiên đề 3 hợp hệ lực đồng qui trên ta được một hệ lực kí hiệu $\vec{R}'_O$ đặt tại O véctơ bằng véctơ chính của hệ lực đã cho là :



Hình 31

$$\vec{R}_O = \sum \vec{F}'_k = \sum \vec{F}_k = \vec{R}' \qquad (2.8)$$

Hợp các ngẫu lực $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, ..., \vec{m}_n$ ta được ngẫu lực tổng cộng có véctơ mômen là :

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_k = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n$$

Theo định lý dời lực song song thì :

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1),\ \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2), ...,\ \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)$$

Nên : $$\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + ... + \vec{m}_O(\vec{F}_n)$$

Hay : $$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (2.9)$$

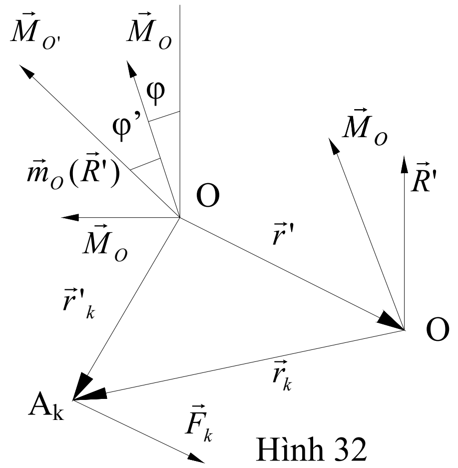
Như vậy ngẫu lực tổng cộng thu về O có véctơ mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn. từ đó ta đi đến kết luận :

Thu gọn một hệ lực bất kỳ về một tâm O nào đó, ta được một lực và một ngẫu lực. Lực đặt tại tâm thu gọn có véctơ bằng véctơ chính của hệ lực còn ngẫu lực có véctơ mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn đó.

Từ kết quả trên xác định tác dụng của một hệ lực lên vật rắn ta chỉ cần xác định véctơ chính và mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

3. Các bất biến của hệ lực :

Với môt hệ lực đã cho thì ta thấy dễ dàng là véctơ chính của hệ lực $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k$ không thay đổi khi tâm thu gọn O thay đổi. Nhưng mômen chính của hệ lực nói chung là thay đổi khi tâm thu gọn thay đổi.



Hình 32

Thật vậy, giả sử khi ta thu gọn hệ lực đã cho : $\vec{F}_k (k = 1,2,...,n)$ về tâm O nào đó thì được một lực bằng véctơ chính $\vec{R}'$ đặt tại O và một ngẫu lực có mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm O là $\vec{M}_O$. Như ta đã biết :

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_k \text{ và } \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

Bây giờ ta chọn tâm thu gọn khác là O', giả sử lực $\vec{F}_k$ đặt tại điểm A_k, có véctơ bán kính đối với điểm O và O' là $\vec{r}_k$ và $\vec{r}'_k$ còn véctơ $\overrightarrow{OO'}$ ta gọi $\vec{r}'$ (Hình 32).

Dễ dàng, tam giác A_kOO' ta có :

$$\vec{r}'_k = \vec{r}' + \vec{r}_k$$

Như vậy, mômen lực $\vec{F}_k$ đối với điểm O và O' sẽ là :

$$\vec{m}'_O(\vec{F}_k) = \vec{r}'_k \wedge \vec{F}_k = (\vec{r}' + \vec{r}_k) \wedge \vec{F}_k = \vec{r}' \wedge \vec{F}_k + \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$$

Như ta đã biết $\vec{m}_{O'}(\vec{F}_k) = \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$ và $\vec{m}'_O(\vec{F}_k) = \vec{m}_O(\vec{F}_k) + \vec{r}' \wedge \vec{F}_k$

Cộng mômen của lực $\vec{F}_k (k = 1,2,...,n)$ đối với tâm O' ta được mômen chính $\vec{M}'_O$ của hệ lực đã cho đối với tâm đó là :

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_{O'}(\vec{F}_k) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) + \sum (\vec{r}' \wedge \vec{F}_k) = \vec{M}_O + \sum (\vec{r}' \wedge \vec{F}_k)$$

Ta biến đổi số hạng : $\sum(\vec{r}'\wedge\vec{F}_k) = \vec{r}'\wedge\sum\vec{F}_k = \vec{r}'\wedge\vec{R}'$

Nhưng tích véctơ $\vec{r}'\wedge\sum\vec{F}_k$ là mômen véctơ chính $\vec{R}'$ đặt tại O lấy đối với O', nghĩa là :

$$\vec{r}'\wedge\vec{R}' = \vec{m}_{O'}(\vec{R}')$$

Do đó, đẳng thức trên có thể viết :

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{m}_{O'}(\vec{R}') \qquad (2.8)$$

hay : $$\vec{M}_{O'} - \vec{M}_O = \vec{m}_{O'}(\vec{R}') \qquad (2.8')$$

Như vậy, biến thiên mômen chính của hệ lực khi tâm quay thu gọn thay đổi bằng mômen véctơ chính đặt tại tâm cũ đối với tâm mới.

Ta nhận đẳng thức (2.8') với véctơ chính $\vec{R}'$, nhưng $\vec{R}'$ vuông góc với véctơ $\vec{m}_{O'}(\vec{R})$ nên : $\vec{m}_{O'}(\vec{R}).\vec{R}' = 0$. Do đó : $\vec{M}_{O'} - \vec{M}_O = 0$

hay : $$M_{O'}.\cos\varphi' = M_O.\cos\varphi \qquad (2.9)$$

trong đó góc φ và φ' là góc tương ứng giữa véctơ $\vec{M}_O$ và $\vec{M}_{O'}$ với véctơ chính $\vec{R}'$.

Từ đó suy ra : Hình chiếu mômen chính của hệ lực đã cho đối với tâm thu gọn bất kỳ, lên phương véctơ chính là không đổi không phụ thuộc việc chọn tâm đó.

2.2 Các dạng chuẩn – Định lý VARIGNON :

Từ kết quả thu gọn trên, có thể đưa đến các dạng chuẩn sau đây :

1. Nếu $\vec{R}'$ = 0 và $\vec{M}_O$ = 0, nghĩa là véctơ chính bằng không mômen chính khác không thì hệ lực thu về ngẫu lực.

2. Nếu $\vec{R}'$ = 0 và $\vec{M}_O \neq$ 0, nghĩa là véctơ chính bằng không và mômen chính khác không thì hệ thu về ngẫu lực.

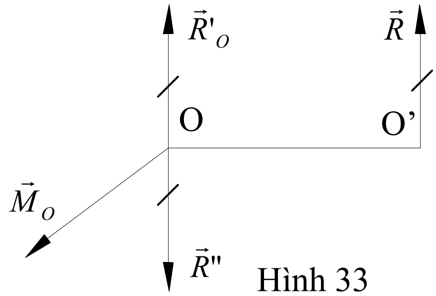
3. Nếu $\vec{R}' \neq$ 0 và $\vec{R}'.\vec{M}_O$ = 0 trong trường hợp này lực có thể thu về một lực. Nghĩa là có hợp lực.

Khi $\vec{M}_O$ = 0 thì hợp lực qua tâm.

Khi $\vec{M}_O \neq 0$ hợp lực không qua tâm O

vì $\vec{R}'.\vec{M}_O$ = 0 nghĩa là véctơ mômen chính và véctơ chính vuông góc nhau (hình 33)

Áp dụng định lý đảo, dời lực song song, ta phân tích ngẫu lực $\vec{M}_O$ ra hai lực $\vec{R}$ và $\vec{R}'$ sao cho $\vec{R} = \vec{R}_O = -\vec{R}'$. Bây giờ hệ có ba lực nhưng hai lực $\vec{R}_O$ và $\vec{R}''$ cân bằng nên ta bỏ đi chỉ còn lực $\vec{R}$ qua O'. Lực $\vec{R}$ chính là hợp lực của hệ lực đã cho. Đoạn d được xác định như sau :

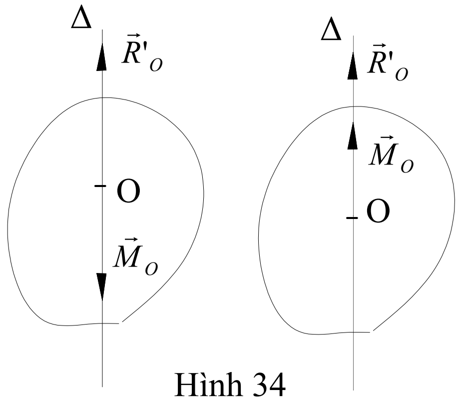


Hình 33

$$d = \frac{M_O}{R} \quad (\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{R}))$$

4. Nếu $\vec{R}'.\vec{M}_O \neq 0$ nghĩa là véctơ chính và mômen chính đều khác không và không vuông góc nhau.

Đặc biệt khi $\vec{R}'$ và $\vec{M}_O$ cùng phương cùng chiều gọi là vít thuận (hoặc đinh ốc).



Hình 34

Vật tự do dưới tác dụng của hệ lực này có chuyển động như chuyển động đinh ốc. Đường thẳng Δ mà véctơ $\vec{R}'_O$ và $\vec{M}_O$ nằm trên đó gọi là trục vít. (Hình 34)

Nếu $\vec{R}'_O$ và $\vec{M}_O$ ngược chiều ta được vít ngược (đinh ốc ngược).

Trường hợp $\vec{R}'_O$ và $\vec{M}_O$ làm thành góc α bất kỳ (α ≠ 0, α ≠ 180) ta đưa về hệ vít, nhưng trục vít không qua O và O'. Lực của hệ vít này xác định bằng véctơ chính $\vec{R}'$ của hệ lực, còn ngẫu lực xác định bằng hình chiếu véctơ mômen chính lên véctơ chính của hệ lực đó.

Khi hệ có hợp lực, ta có định lý VARIGNON như sau :

<u>Định lý:</u> Mômen hợp lực của hệ lực đối với một điểm (hay trục) nào đó bằng tổng mômen các lực thành phần của hệ lực đối với cùng điểm (hay trục) đó.

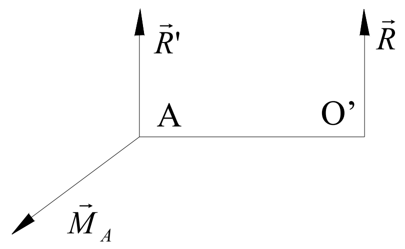
<u>Chứng minh :</u> Giả sử cho hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n)$ tác dụng lên vật rắn. Hệ lực này thu về O' được hợp lực là $\vec{R}$. Bây giờ ta lấy điểm A bất kỳ làm tâm thu gọn và gọi $\vec{M}'_A$ là mômen chính của hệ lực đã cho đối với điểm A.

Dùng công thức biến thiên mômen chính (2.3) ta có :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_{O'} = +\vec{m}_A(\vec{R})$$

Nhưng $\vec{M}_{O'} = 0$ nên :

$$\vec{M}_A = \vec{m}_A(\vec{R})$$



Hình 35

Mặt khác, theo định nghĩa mômen chính của hệ lực đối với tâm A bằng tổng mômen các lực thành phần của hệ lực đã cho đối với cùng tâm ấy, nghĩa là:

$$\vec{M}_A = \sum \vec{m}_A(\vec{F}_A)$$

Do đó : $$\vec{m}_A(\vec{R}) = \sum \vec{m}_A(\vec{F}_k) \qquad (2.10)$$

Tương tự đối với một trục toạ độ như trục z chẳng hạn, ta có :

$$\vec{m}_z(\vec{R}) = \sum m_z(\vec{F}_k) \qquad (2.11)$$

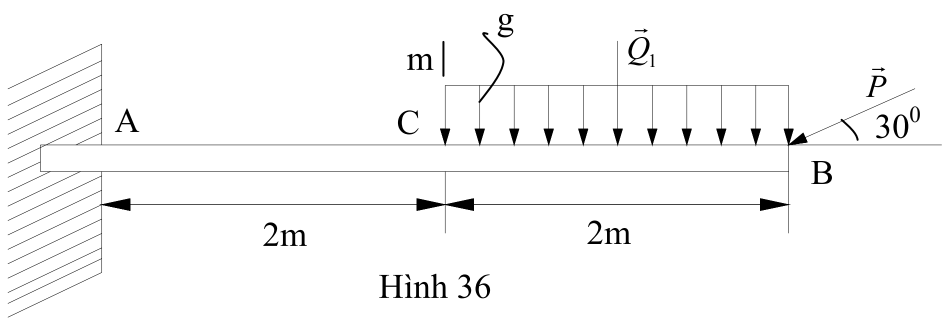
Như vậy định lý đã được chứng minh.

<u>Chú ý :</u> Đối với hệ lực phẳng chỉ xảy ra một trong ba trường hợp đầu. Hệ lực phẳng không bao giờ xảy ra chuyển động đinh ốc.

Sau đây ta sẽ làm hàm một số ví dụ về thu gọn hệ lực

<u>Ví dụ 1:</u>

Cho một dầm công xôn AB = 4 m chịu lực P = 60 N tác dụng và lực phân bố đều q = 10 N/m tác dụng ở phần OB. Hãy thu gọn hệ lực trên về tiết diện m-m của dầm (Hình 36)



Hình 36

Giải :

Trước hết ta thay lực phân bố đều q bằng lực tập trung :

$$Q_1 = q.CB = 10.2 = 20N.$$

Thu gọn hai lực $\vec{P},\vec{Q}_1$ về tiết diện m-m, ta được lực $\vec{R}'$ có hai thành phần thẳng đứng là Q và thành phần nằm ngang là N. Trong sức bền lực $\vec{Q}$ gọi là lực cắt, còn lực $\vec{N}$ gọi là lực kéo (hoặc nén). Còn tại tiết diện đó.

N = -P.cos30^0 = $30\sqrt{3}$ N

Q = Q_1 + P.sin30^0 =20 + 60.1/2 = 50 N

M = - Q_1.1- P.2.sin30^0 = -20-60.2.1/2 = -80 Nm

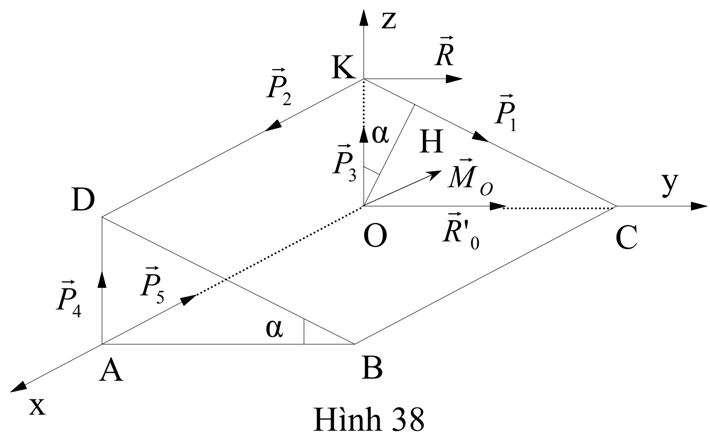
Ví dụ 2:

Cho một lang trụ tam giác có cạnh OA = 2, OK = 20 cm, góc α=30^0. theo các cạnh của lăng trụ có các lực tác dụng là :

P1 = 400 N, P3 = 150 N

P2 = P5 = 100 N, P4 = 50 N

Hãy thu gọn hệ lực trên về mặt chuẩn.



Hình 38

Giải :

Ta chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ. Tìm hình chiếu véctơ chính lên các trục tọa độ.

$$R_x = \sum X_k = P_2 - P_5 = 0$$
$$R_y = \sum Y_k = P_1\cos\alpha = 400\cos 30^0 = 200\sqrt{3}$$
$$R_z = \sum Z_k = P_3 + P_4 - P\sin\alpha = 150 + 50 - 400.\frac{1}{2} = 0$$

Như vậy véctơ chính hướng theo trục y có trị số bằng $200\sqrt{3}$.

Bây giờ ta tìm mômen chính $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_a(\vec{F}_k)$ bằng các hình chiếu như sau :

$$M_{Ox} = \sum m_x(\vec{F}_k) = m_x(\vec{P}_1)$$

Vì các lực $\vec{P}_3,\vec{P}_4,\vec{P}_5$ cắt trục x, lực $\vec{P}_2$ song song với trục x nên mômen các lực đó đối với trục x đều bằng không.

$$M_{Ox} = m_x(\vec{P}_1) = m_O(\vec{P}_1) = -P_1 OH = -P_1 OK.\cos\alpha.$$
$$M_{Ox} = -400.10.\frac{\sqrt{3}}{2} = -2000\sqrt{3}Ncm$$

Tương tự ta có :

$$M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_k) = m_y(\vec{P}_2) + m_y(\vec{P}_4)$$
$$m_y(\vec{P}_4) = -P_4.OA = -50.20 = -1000Ncm$$

Như vậy :

$$M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_k) = m_y(\vec{P}_2) + m_y(\vec{P}_4) = 0$$

Các lực $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5$ cắt trục z, lực $\vec{P}_4$ song song với trục đó, nên mômen các lực đó đối với trục z đều bằng không.

Vì vậy : $M_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_k) = 0$

Vì $M_{Oy} = M_{Oz} = 0$, còn $M_{Ox} <0$ nên mômen chính M_O hướng ngược chiều với trục x và có trị số :

$$M_O = \sqrt{M^2{}_{Ox} + M^2{}_{Oy} + M^2{}_{Oz}} = 2000\sqrt{3}\ \text{Ncm}$$

$$M_O = 20\sqrt{3}Nm$$

Trong trường hợp này hệ lực thu gọn về tâm O được một lực $\vec{R}'_O$ hướng theo trục y và một ngẫu lực hướng ngược chiều với trục x. Rõ ràng hai véctơ này vuông góc với nhau, nên hệ lực này cuối cùng thu về một hợp lực nằm trong mặt phẳng Oyz (vì lực $\vec{R}'_O$ nằm trong mặt phẳng này). Hợp lực $\vec{R}_O = \vec{R}'_O$ đặt tại O_1 cách O một đoạn là :

$$d = \frac{M'_O}{R'} = \frac{2000\sqrt{3}}{200\sqrt{3}} = 10cm$$

Đoạn OO_1 phải vuông góc với lực $\vec{R}'_O$ và véctơ $\vec{M}_O$. Như vậy O_1 phải nằm trên trục z và hướng về phía nào để mômen hợp lực $\vec{R}$ đối với O có véctơ trùng với véctơ $\vec{M}_O$. Vì OO_1 = 10cm nên O_1 trùng với điểm K. Điểm K trên hình 38 là điểm đặt của hợp lực $\vec{R}$ hướng song song với trục y có trị số :

$$R = R'_O = 200\sqrt{3}\ \text{N}$$

§3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG

3.1 Điều kiện cân bằng và hệ phương trình cân bằng của hệ lực không gian :

1. Điều kiện cân bằng : Điều kiện cần và đủ để một hệ lực không gian cân bằng là véctơ lực chính và véctơ mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn nào đó đồng thời bằng không, tức là :

$$\vec{R}'=0 \text{ và } \vec{M}_O = 0$$

Chứng minh: Điều kiện cần là hệ lực không gian cân bằng thì $\vec{R}'=0$ và $\vec{M}_O = 0$. Thật vậy, nếu $\vec{R}'\neq 0$, mà $\vec{M}_O = 0$ thì hệ thu về ngẫu lực hoặc cả $\vec{R}'\neq 0$ và $\vec{M}_O \neq 0$ thì hệ thu về hệ vít hoặc hợp lực. Điều đó trái với giả thuyết, nghĩa là khi hệ lực cân bằng thì :

$$\vec{R}'=0 \text{ và } \vec{M}_O = 0$$

Còn điều kiện đủ là hiển nhiên trong trường hợp tổng quát hệ thu về tâm O được một lực và ngẫu lực. Nếu $\vec{R}'=0$ và $\vec{M}_O = 0$ hệ lực là cân bằng.

2. Từ điều kiện cân bằng, ta thiết lập hệ phương trình cân bằng cho một hệ lực không gian sau đây :

Theo định nghĩa véctơ chính là : $\vec{R}'=\sum \vec{F}_k$ và hình chiếu của nó xuống các trục được xác định theo công thức :

$$R'_x = \sum X_k$$
$$R'_y = \sum Y_k$$
$$R'_z = \sum Z_k$$

Và mômen chính là :

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

Có các hình chiếu xác định theo công thức sau :

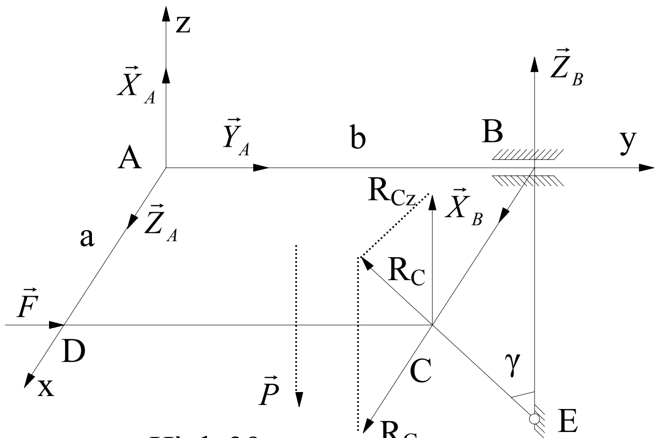
$$M_{Ox} = \sum (m_O(\vec{F}_k))_x = \sum \overline{m}_x(\vec{F}_k)$$
$$M_{Oy} = \sum (m_O(\vec{F}_k))_y = \sum \overline{m}_y(\vec{F}_k)$$
$$M_{Oz} = \sum (m_O(\vec{F}_k))_z = \sum \overline{m}_z(\vec{F}_k)$$

Ta biết rằng $\vec{R}'$ và $\vec{M}$ chỉ bằng không khi các hình chiếu của chúng đều bằng không. Do đó, khi hệ lực cân bằng ta có :

$$\begin{cases} \sum X_k = 0 \\ \sum Y_k = 0 \\ \sum Z_k = 0 \\ \sum \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum \overline{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (2.12)$$

Như vậy, khi hệ lực không gian cân bằng thì có 6 phương trình cân bằng. Ta sẽ áp dụng các phương trình cân bằng đó để giải bài toán cân bằng không gian.

Ví dụ 1: Cho một tấm chữ nhật đồng chất trọng lượng P, nếu chiều dài các cạnh là a, b. Tại A liên kết bản lề cầu, tại B liên kết bản lề trụ và tấm được giữ nằm ngang nhờ thanh CE hai đầu liên kết bản lề. Bỏ qua trọng lượng thanh, tại D tác dụng lực F dọc theo cạnh DC. Cho biết P0 = 200 N, F = 100 N, a = 60cm, b = 100 cm, góc $\gamma = 60^0$ (hình 39). Tìm phản lực tại A, B và nội lực thanh CE.



Hình 39

Bài giải :

Ta xét tấm ABCD cân bằng chịu hệ lực tác dụng sau đây : Lực $\vec{P}$, lực $\vec{F}$, phản lực tại A có ba thành phần $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, còn phản lực tại B chỉ có hai thành phần $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$ (vì liên kết bản lề trụ) vuông góc trục y. Phản lực thanh CE là $\vec{R}_C$ dọc thanh. Vì tấm ABCD cân bằng, nên hệ lực : $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{R}_C) \sim 0$

Ta phân phản lực $\vec{R}_C$ ra hai thành phần (vì $\vec{R}_C \perp$y) là $\vec{R}_{Cx}$ và $\vec{R}_{Cz}$ song song với trục x, z là :

$$R_{Cx} = R_C\sin\gamma,\ R_{Cz} = R_C\cos\gamma,\ R_{Cy} = 0.$$

Ta thiết lập hệ phương trình cân bằng :

$$\sum X = X_A + X_B + R_C \sin\gamma = 0 \quad (1)$$
$$\sum Y = Y_A + F = 0 \quad (2)$$
$$\sum Z = Z_A + Z_B - P + R_C \cos\gamma = 0 \quad (3)$$
$$\sum m_x(\vec{F}) = -\frac{b}{2}P + bZ_B + bR_C \cos\gamma = 0 \quad (4)$$
$$\sum m_y(\vec{F}) = \frac{a}{2}P - aR_C \cos\gamma = 0 \quad (5)$$
$$\sum m_z(\vec{F}) = -bX_B - bR_C \sin\gamma + aF = 0 \quad (6)$$

Giải hệ sáu phương trình trên ta được các kết quả sau :

Phương trình (5) cho ta :

$$R_C = \frac{P}{2\cos\gamma} = \frac{200}{2\cos 60} = \frac{200}{2.\frac{1}{2}} = 200N$$

Thay giá trị R vào phương trình (6) ta có :

$$X_B = \frac{aP}{b} - R_C \sin\gamma = \frac{60}{100}.100 - 200\frac{\sqrt{3}}{2} = -113,2N$$

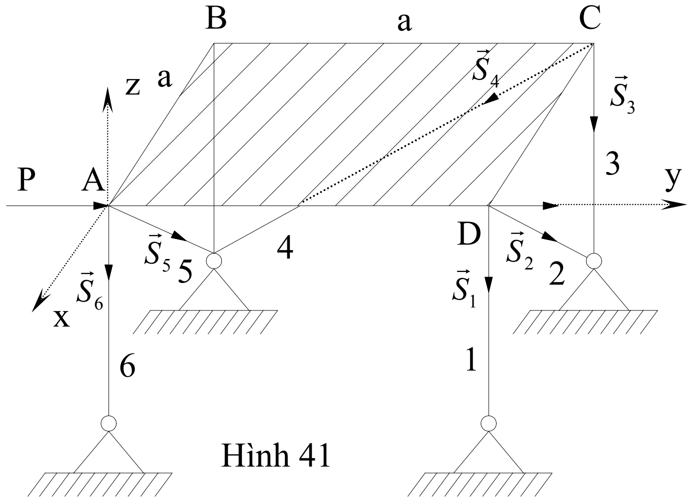
Bằng cách thay thế dần, cuối cùng ta tính được :

$$X_A = -60N, Y_A = -100N$$
$$Z_A = 100N, Z_B = 0$$

Từ kết quả trên, ta nhận thấy : $X_A < 0$, $X_B < 0$, do đó chiều phản lực của những thành phần này thực tế sẽ ngược chiều với chiều vẽ trên hình 39.

Phản lực $\vec{R}_C$ là lực của thanh CE tác dụng lên tấm . Theo tiên đề tác dụng và phản tác dụng thì tấm sẽ tác dụng lên thanh một lực $\vec{R}'_C = -\vec{R}_C$. Và để thanh CE cân bằng tại E có phản lực $\vec{R}_E$. Như vậy thanh CE sẽ chịu nén có nội lực N = -R_C = -200N (vì thanh chịu kéo, nội lực lấy dấu cộng).

<u>*Ví dụ 2 :*</u> Cho một tấm hình vuông cạnh a được giữ nằm ngang nhờ 6 thanh liên kết hai đầu bằng bản lề. Bỏ qua trọng lượng của thanh. Một lực P = 2000 N tác dụng dọc theo cạnh



Hình 41

AD của tấm. Tìm nội lực các thanh, biết chiều dài các thanh đứng 1, 3, 6 bằng a.

Bài giải :

Ta xét tấm ABCD cân bằng chịu các lực tác dụng như sau : Lực $\vec{P}$, phản lực các thanh là $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$ hướng dọc thanh ra phía ngoài tâm. Nếu các lực này dương thanh chịu kéo và âm thanh chịu nén.

Vì tấm ABCD cân bằng, nên hệ lực :

$$(\vec{P}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6) \sim 0$$

Ta chọn hệ trục Axyz như hình 41, các phương trình cân bằng của hệ lực sẽ là :

$$\sum X = -S_2 \cos 45^0 - -S_5 \cos 45^0 = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = P - S_4 \cos 45^0 = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = -S_1 - S_2 \cos 45^0 - S_3 - S_4 \cos 45^0 - S_5 \cos 45^0 - S_6 = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}) = -S_1 a - S_2 a \sin 45^0 - S_3 a - S_4 a \sin 45^0 = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}) = -S_3 a - S_4 a \cos 45^0 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}) = S_2 a \cos 45^0 + S_4 a \cos 45^0 = 0 \quad (6)$$

Giải hệ 6 phương trình trên ta tìm được các kết quả sau đây :

Tư phương trình (2) ta suy ra :

$$S_4 = \frac{P}{\cos 45^0} = 2P\sqrt{2} = 4000\sqrt{2}N$$

Từ phương trình (6) cho ta :

$$S_2 = -S_4 = 4000\sqrt{2}N$$

Phương trình (5) ta có :

$$S_3 = -S_4 \cos 45^0 = -2P\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -2P = 4000N$$

Tương tự như vậy ta tìm được :

$$S_1 = P = 2000N$$

$$S_5 = 2P\sqrt{2} = 4000\sqrt{2}$$

$$S_6 = -P = -2000N$$

Từ kết quả trên ta thấy S_1, S_4, S_5 dương nên thanh 1, 4, 5 chịu kéo, còn S_2, S_3, S_6 âm nên thanh 2, 3, 6 chịu nén.

Do kết quả trên, ta có quy tắc để biết thanh chịu nén hay chịu kéo như sau:

Khi xét bài toán có liên kết thanh, ta vẽ phản lực thanh hướng dọc thanh đó ra phía ngoài nút. Nếu phản lực của thanh dương thanh chịu kéo, phản lực của thanh âm thì thanh chịu nén. Còn trị số nội lực bằng trị số của phản lực ấy.

Từ điều kiện và phương trình cân bằng của hệ lực không gian ta suy ra điều kiện và phương trình cân bằng của hệ lực phẳng.

3.2 Điều kiện cân bằng và hệ phương trình cân bằng của hệ lực phẳng :

Điều kiện và hệ phương trình cân bằng .

Định lý : Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là véctơ chính và mômen chính của hệ lực đó đối với tâm nào đó bằng không, tức là :

$$\vec{R}' = 0 \text{ và } \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

Phần chứng minh tương tự như hệ lực không gian.

Vì hệ lực phẳng là hệ lực có các đường tác dụng các lực cầu nằm trong cùng một mặt phẳng. Ta chọn hệ trục Oxy là mặt phẳng chứa hệ lực. Vậy trục Oz vuông góc với các lực của hệ. Do vậy véctơ chính của hệ lực chỉ có hai thành phần.

$$R_x = \sum X_k \quad \text{và} \quad R_y = \sum Y_k$$

Mômen chính của hệ lực đối với trục x và y đều bằng không và các lực và các trục này đồng phẳng nên phương trình 4, 5 tự thoả mãn và

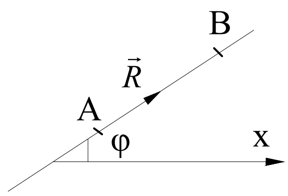
$$\sum m_z(\vec{F}) = \sum m_O(\vec{F})$$

Vì vậy hệ phương trình cân bằng của hệ lực phẳng chỉ có 3 phương trình là:

$$\text{Dạng I :} \begin{cases} \sum X_k = 0 \\ \sum Y_k = 0 \\ \sum m_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

Thực tế người ta còn dùng các hệ phương trình cân bằng khác tương đương với (2.13) như sau :

$$\text{Dạng II :} \begin{cases} \sum X_k = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum m_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (2.13')$$



Hình 42

trong đó đoạn AB không được vuông góc với trục x (hình 42).

Thật vậy, nếu hệ lực phẳng đã cho có mômen chính đối với một tâm bằng không, ta cần chứng minh là véctơ chính của hệ lực lúc đó cũng bằng không, thì hệ lực cân bằng.

Ngược lại, nếu $\vec{R}' \neq 0$, khi đó hệ lực thu về A được hợp lực (vì $M_A = \sum m_A(\vec{F}) = 0$) và hệ lực cũng thoả mãn điều kiện $M_B = \sum m_B(\vec{F}) = 0$, ta có :

$$m_B(\vec{R}) = \sum m_B(\vec{F}) = 0$$

Nghĩa là hợp lực phải qua B nữa, như vậy hình chiếu hợp lực lên trục x sẽ là :

$$\sum X = R_X = R\cos\varphi$$

Nhưng nếu góc φ ≠ 900 và R ≠ 0 thì $\sum X = R_X \neq 0$. Điều này trái với giả thuyết là $\sum X = 0$

Vậy $\vec{R}'$ là phải bằng không. ($\vec{R}' = 0$)

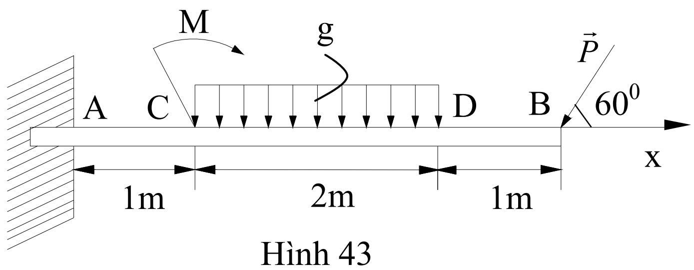
Dạng III : Hệ lực phẳng cân bằng phải thoả mãn 3 phương trình sau :

$$\begin{cases} \sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum m_C(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (2.14)$$

Khi đó A, B, C không được thẳng hàng.

Phương pháp chứng minh tương tự như dạng II

_Ví dụ :_ Một dầm công xôn AB, đầu A chịu liên kết ngàm và có tải trọng tác dụng như hình vẽ (hình 43). Cho biết : M = 4 KNm, P = 6 KN, q = 1,5 KN/m. Tìm phản lực tại A.



Hình 43

Bài giải :

Ta khảo sát dầm AB cân bằng.

Hệ lực tác dụng lên dầm gồm có : ngẫu lực M, lực $\vec{P}$, còn phân bố đều q ta thay bằng lực tập trung $\vec{Q}$ đặt ở trọng tâm hình phân bố. Có trị số Q = q.CD = 1,5x2 = 3kN

Ở A liên kết ngàm, nên có phản lực gồm lực $\vec{R}_A$ (chia thành hai thành phần $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$) và ngẫu lực $\vec{M}_A$. Vì dầm cân bằng nên hệ lực tác dụng lên dầm :

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A, \vec{M}) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng cho hệ lực :

$$\sum X_k = X_A - P\cos 60^0 = 0$$
$$\sum Y_k = Y_A - Q - P\sin 60^0 = 0$$
$$\sum m_A(\vec{F}) = M_A - M - 2Q - PAB\sin 60^0 = 0$$

(Chú ý : Cánh tay đòn lực $\vec{P}$ đối với điểm A là d=ABsin60^0)

Giải ba phương trình trên với các số liệu đã cho, ta có các kết quả sau:

$$X_A = 3\text{kN},\ Y_A = 8{,}2\text{ kN},\ M_A = 30{,}78\text{ kN}$$

Các kết quả đều dương, nên chiều phản lực đứng như hình vẽ.

3.3 Điều kiện cân bằng cho các hệ lực đặc biệt :

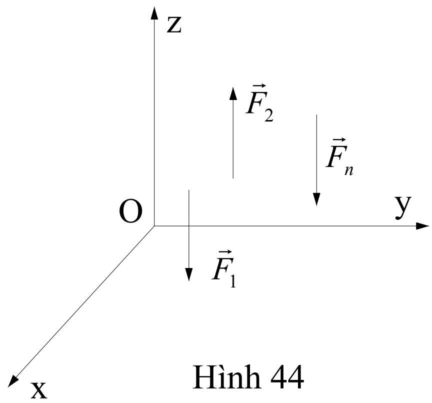
1. Hệ lực song song :

a- Hệ lực không gian song song :

Giả sử có hệ lực không gian song song ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) tác dụng lên vật rắn.

Ta dựng trục z song song các lực như vậy trục x và y sẽ vuông góc các lực. Tất nhiên hình chiếu từng lực lên trục x và y, cũng như mômen của chúng đối với trục z đều bằng không (hình 44), nghĩa là :

$$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum m_z(\vec{F}) = 0$$

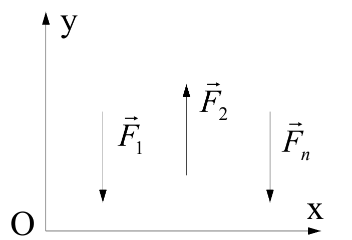


Hình 44

Đó là những phương trình tự thoả mãn, còn lại ba phương trình cân bằng là:

$$\begin{cases} \sum Z_k = 0 \\ \sum m_x(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Như vậy hệ lực không gian song song chỉ có ba phương trình cân bằng.



Hình 45

b- Hệ lực phẳng song song :

Là hệ lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) song song cùng nằm trong một mặt phẳng (hình 45).

Ta chọn mặt phẳng của hệ lực làm mặt phẳng Oxy với trục y song song các lực, như vậy trục z sẽ vuông góc với các lực đó.

Từ ba phương trình cân bằng của hệ lực phẳng ta nhận thấy phương trình $\sum X = 0$ tự thoả mãn (vì các lực đều vuông góc với trục x).

Như vậy, hệ lực phẳng song song chỉ có hai phương trình cân bằng :

$$\sum Y = 0;\ \ \sum m_O(\vec{F}) = 0 \qquad (2.16)$$

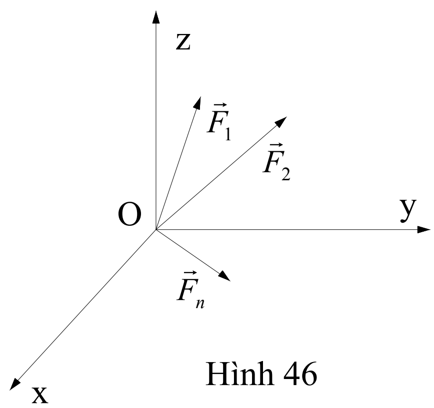
Hoặc $$\sum m_A(\vec{F}) = 0;\ \ \sum m_B(\vec{F}) = 0 \qquad (2.16')$$

Trong đó đoạn AB nằm trong mặt phẳng chứa hệ lực, nhưng không song song với các lực đó.

2. Hệ lực đồng qui :

a- Hệ lực đồng qui không gian :

Giả sử có hệ lực đồng qui không gian ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$). Điểm O là điểm đồng qui. Chọn O làm gốc toạ độ vẽ hệ trục Oxyz (hình 46)



Hình 46

Khi đó mômen các lực đối với các trục toạ độ x, y, z luôn luôn bằng không (vì các lực đều cắt các trục đó) nên :

$$\sum m_x(\vec{F}) = 0;\ \ \sum m_y(\vec{F}) = 0;\ \sum m_z(\vec{F}) = 0$$

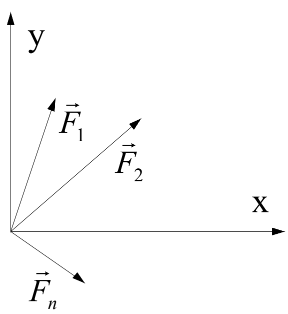
Hệ lực chỉ còn lại ba phương trình cân bằng là :

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

b- Hệ lực phẳng đồng qui :

Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ đồng qui tại O và cùng nằm trong mặt phẳng Oxy như vậy trục z vuông góc với các lực nên : (Hình 47)

$$\sum Z = 0$$

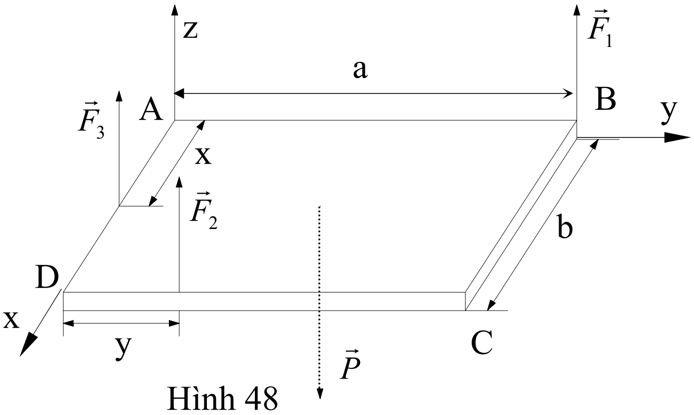


Hình 47

Ba phương trình trên chỉ còn lại hai phương trình là :

$$\begin{cases}\sum X = 0 \\ \sum Y = 0\end{cases} \quad (2.18)$$

Đây là hai phương trình cân bằng cho hệ lực phẳng đồng qui.



Hình 48

Ví dụ 6: Có bai người đỡ một tấm bê tông hình chữ nhật đồng chất trọng lượng P có cạnh a và b. Một người đỡ ở góc B hai người còn lại đỡ ở điểm E và K sao cho lực nâng ba người bằng nhau. Tìm vị trí điểm E và K.

Bài giải:

Ta khảo sát tấm ABCD cân bằng được dưới tác dụng của các lực ($\vec{P},\vec{P}_1,\vec{P}_2,\vec{P}_3$) ~ 0

Đây là hệ lực không gian song song, nên chỉ có ba phương trình cân bằng :

$$\sum Z = F_1 + F_2 + F_3 - P = 0 \qquad (1)$$

$$\sum m_x(\vec{F}) = F_1 a + F_2 y - P\frac{a}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_y(\vec{F}) = F_2 b - F_3 x + P\frac{b}{2} = 0 \qquad (3)$$

Theo đề bài ta có :

$$F_1 = F_2 = F_3$$

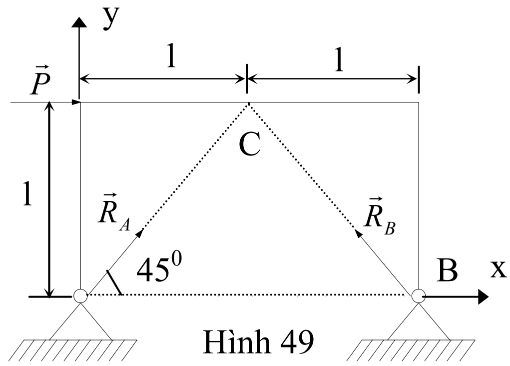
Kết hợp với phương trình (1) ta tìm được :

$$F_1 = F_2 = F_3 = P/3$$

Từ phương trình (2) ta có: y = a/2

phương trình (3) : x = b/2

Như vậy điểm E, K là trung điểm các cạnh AD và DC thi ba lực này sẽ bằng nhau.



Hình 49

Ví dụ 7: Cho một khung có ba khớp A, B, C là bản lề. Một lực $\vec{P}$ tác dụng lên khung có phương nằm ngang. Kích thước cho trên hình 49. Tìm phản lực tại A và B.

Bài giải :

Ta khảo sát khung ABC cân bằng.

Hệ lực tác dụng lên khung là $\vec{P}$, phản lực $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ tạo nên hệ ba lực cân bằng ($\vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$) ~ 0.

Nếu xét riêng phần BC cũng cân bằng và chỉ chịu tác dụng bởi hai lực $\vec{R}_B, \vec{R}_C$, nên theo tiên đề 1 thì phản lực $\vec{R}_B$ phải qua C. Vì $\vec{R}_B$ và lực $\vec{P}$ giao nhau tại C, theo định lí ba lực cân bằng nên lực $\vec{R}_A$ phải qua C. Như vậy, ta đã xác định phương phản lực $\vec{R}_B$ và $\vec{R}_A$. Để tìm trị số và chiều các phản lực đó, ta lập phương trình cân bằng .

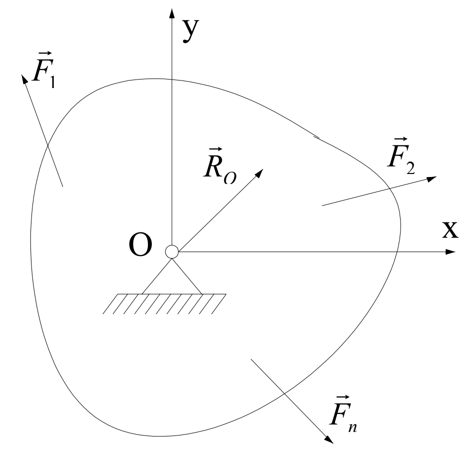
Đây là hệ lực phẳng đồng qui ta có hai phương trình :

$$\sum X = R_A \cos 45^0 - R_B \cos 45^0 + P = 0 \quad (1)$$
$$\sum Y = R_A \sin 45^0 + R_B \sin 45^0 = 0 \quad (2)$$

§4. CÁC BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT

4.1 Bài toán đòn :

- *Định nghĩa :* Đòn là một vật rắn có thể quay quanh một trục cố định O dưới tác dụng của một hệ lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục đó.



Hình 51

Giả sử có một vật rắn quay được quanh một trục O chịu tác dụng bởi hệ lực phẳng ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) (hình 51). Ngoài ra các lực tác dụng trên tại trục quay O xuất hiện một phản lực $\vec{R}_O$. Vì đòn cân bằng nên hệ lực :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{R}_O) \sim 0$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực là :

$$\sum X = R_{Ox} + \sum F_{kx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = R_{Oy} + \sum F_{ky} = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (3)$$

Ta nhận thấy phương trình (1) và (2) cho ta xác định phản lực $\vec{R}_O$, phương trình (3) chính là điều kiện cân bằng của đòn :

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (2.19)$$

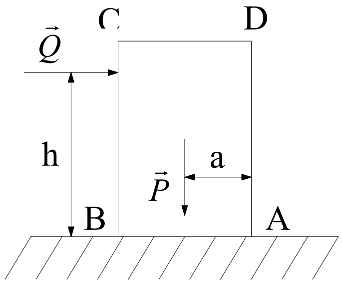
Điều kiện này chứng tỏ hệ lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) thu về O được hợp lực $\vec{R}$ hoặc cân bằng, hợp lực $\vec{R}$ nếu có sẽ cân bằng với phản lực $\vec{R}_O$.

Từ bài toán cân bằng đòn ta đi đến giải bài toán vật lật trong thực tế hay gặp.

4.2 Bài toán vật lật :

Vật lật cũng là một dạng của đòn, mà dưới tác dụng của hệ lực vật có thể lật quanh một điểm (hay trục) nào đó. Vì vậy từ điều kiện cân bằng đòn, ta suy ra điều kiện cân bằng của vật lật.

Giả sử có một hình chữ nhật ABCD trọng lượng $\vec{P}$, một lực $\vec{Q}$, tác dụng theo phương ngang cách đáy AB một đoạn h có khả năng làm cho vật lật quanh mép A (Hình 52).



Hình 52

Điều kiện cân bằng là :

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0$$

Hay : P.a – Q.h = 0

Suy ra : P.a = Q.h

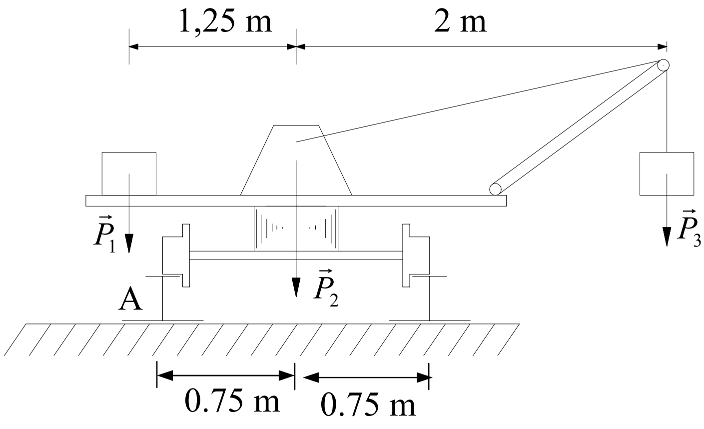
Từ hình vẽ ta nhận thấy lực P gây ra mômen giữa còn lực Q gây ra mômen lật quanh A. Ta kí hiệu là Mg và Ml thì :

Mg = P . a và Ml = Q . h

Như vậy, để vật không lật thì : Mg ≥ Ml

Trong kỹ thuật người ta thường dùng hệ số ổn định : $K = \dfrac{M_g}{M_l}$. Một vật không lật khi K > 1.

Ví dụ 8: Một cần trục có kích thước và tải trọng như hình vẽ 53. Xác định đối trọng P_1 để cần trục ổn định với hệ số K = 1,5. Cho cần trục với trọng lượng P_2= 50 KN trọng lượng vật nặng nâng lên P_3 = 40 KN.



Hình 53

Bài giải:

Giả sử dưới tác dụng lực $\vec{P}_3$ làm cần trục có khả năng lật đổ quanh B. Do đó mômen lực $\vec{P}_3$ đối với B là mômen lật, còn mômen $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ đối với B là mômen giữ, ta có :

$$M_l = 1,25.P_3 =1,25 \text{ x } 40 = 50 \text{ kNm}$$

$$M_g = 2.P_1 \text{ x } 0,75 \text{ x } 50 =2P_1 +37,5$$

Hệ số ổn định $K = \dfrac{M_g}{M_l}$ hay $M_g = KM_l$

Vì vậy ta có phương trình sau : $2P_1 +37,5 = 1,5 \text{ x } 50$

$$P_1 = 18,75 \text{ kN}$$

Suy ra P_1 là đối trọng cần tìm.

Nhận xét : Trong trường hợp cần trục không làm việc, nghĩa là không có $\vec{P}_3$ thì cần trục có thể lật đổ quanh A không ?.

Vì mômen $m_A(\vec{P}_1) < m_A(\vec{P}_2)$ nên cần trục không lật đổ quanh A được. Như vậy cần trục hoàn toàn ổn định cả hai trường hợp làm việc và không làm việc.

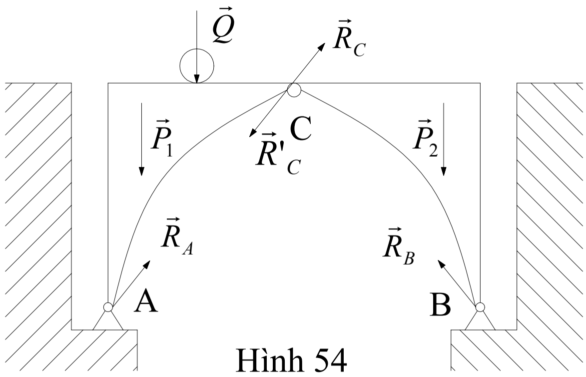
4.3 Bài toán hệ vật :

1. Định nghĩa : Hệ vật là một hệ gồm nhiều vật liên kết với nhau. Các lực tác dụng lên các vật thuộc hệ gồm hai loại lực ngoại lực và nội lực

Ngoại lực : Là các lực từ bên ngoài hệ tác dụng lên các vật thuộc hệ .

Nội lực : Là những lực do các vật thuộc hệ tác dụng lẫn nhau. Do vậy theo tiên đề 4, nôi lực có tùng đôi một trực đối nhau .

Ví dụ : Một cầu hình vòm có ba khớp ở A, B, C. Trọng lượng mỗi phần là $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$. Trên phần AC có đặt vật nặng là $\vec{Q}$. (Hình 54).



Hình 54

Đây là bài toán hệ vật gồm có : phần AC và BC của cầu. Ngoại lực có $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2, \vec{Q}$ và các phản lực $\vec{R}_A, \vec{R}_B$. Nội lực chỉ có lực liên kết tại C là $\vec{R}_C$ và $\vec{R}'_C$ với $\vec{R}_C = -\vec{R}'_C$.

Chú ý : Trọng lượng của vật bao giờ cũng là ngoại lực.

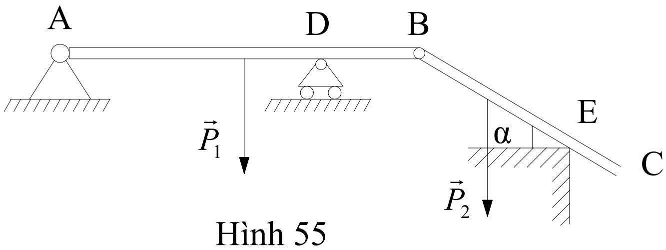
2. Phương pháp giả bài toán hệ vật :

Có hai phương pháp giải bài toán hệ vật là phương pháp tách vật và hoá rắn.

Phương pháp tách vật : Là xét từng vật riêng rẽ cân bằng dưới tác dụng các lực trực tiếp đặt lên vật đó. Cứ mỗi vật ta lập được ba phương trình cân bằng và giải phương trình ta được kết quả.

Phương pháp hoá rắn : Là xem cả hệ như một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực đặt lên hệ (nội lực triệt tiêu lẫn nhau từng đôi một) ta chỉ lập được ba phương trình cân bằng. Sau đó ta có thể tách thêm một số vật để khảo sát và lập thêm những phương trình cân bằng mới cần thiết để giải.

Ví dụ : Cho một hệ gồm hai thanh AB và BE như hình 55. Thanh AB có trọng lượng P1 = 200 N, thanh BC có trọng lượng P2 = 160 N AB = a, BD = $\frac{1}{3}a$, BC=b, EC = $\frac{1}{3}b$. Tìm phản lực tại A, D, E cho α=300.



Hình 55

Bài giải:

Đây là hệ gồm hai vật : thanh AB và BO. Áp dụng phương pháp tách vật, ta khảo sát từng vật một. Xét thanh AB cân bằng. Hệ lực tác dụng lên thanh gồm có $\vec{P}_1$ phản lực tại A là $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ phản lực tại D là $\vec{N}_D$ (gối di động) và nội lực tại bản lề B là $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$. Hệ lực này cân bằng : $(\vec{P}_1, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}_D) \sim 0$.

Phương trình của hệ lực là :

$$\sum X = X_A + X_B = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = Y_A + Y_B + N_D - P_1 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = -\frac{a}{2}P_1 + \frac{2}{3}aN_D + aY_B = 0 \qquad (3)$$

Xét thanh BE cân bằng với các lực tác dụng là $\vec{P}_2$, $\vec{N}_E \perp$ thanh và $\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B$ cân bằng:

$$(\vec{P}_2, \vec{N}_E, \vec{X}'_B, \vec{Y}'_B) \sim 0$$

Phương trình cân bằng là :

$$\sum X = X'_B + N_E \sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

$$\sum Y = -Y_B + P_2 + N_E \cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

$$\sum m_B(\vec{F}) = -\frac{2}{3}bN_E - \frac{b}{3}P_2\cos\alpha = 0 \qquad (6)$$

Giải 6 phương trình cân bằng trên với chú ý là :

$$\vec{X}'_B = -\vec{X}_B, \vec{Y}'_B = -\vec{Y}_B$$

ta tìm được kết quả :

Từ (6) ta tìm được: N = $\frac{3}{4}P\cos\alpha = 60N$

Từ (4) ta có : $X_B = X'_B = N_E \sin\alpha = 51{,}96N$

Tương tự ta tìm được :

$$Y_B = Y'_B = -P_2 + N_E\cos\alpha = -130N$$

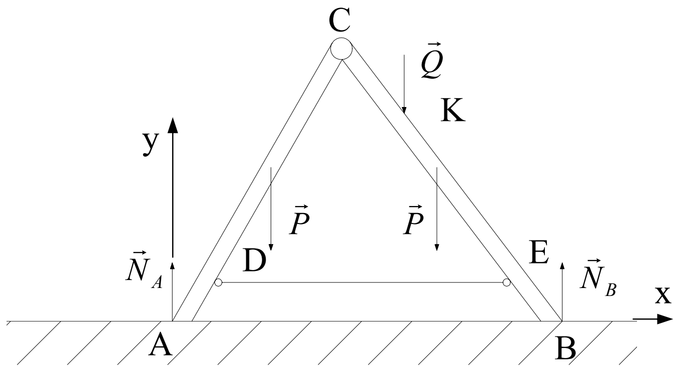
$$N_D = -\frac{3}{2}Y_B + \frac{3}{4}P_1$$

$$X_A = -X_B = -51{,}96N$$

$$Y_A = -Y_B - N_D + P_1 = -15N$$

Các lực $\vec{Y}_B$, $\vec{Y}'_B, \vec{Y}_A$ có giá trị âm nên chúng ngược chiều với chiều trên hình vẽ.

<u>*Ví dụ 5:*</u> Thanh di động ABC đặt trên nền nhẵn nằm ngang gồm hai phần AC và BC được nối với nhau bằng khớp bản lề C và dây DE. Trọng lượng mỗi phần là P = 100N. Cho AC = BC = 6 m, AD = BE = 2 m. Một người trọng lượng Q = 540N đứng tại điểm K của thang với CK = 1 m. Xác định phản lực tại AB và sức căng của dây ED. Biết góc $A\hat{B}C = B\hat{A}C = 60^0$.



Hình 56

<u>*Bài giải :*</u>

Đây là bài toán hệ vật, gồm hai vật là AC và BC. Để giải bài toán này thuận tiện hơn, dùng phương pháp hóa rắn.

Ngoại lực tác dụng lên hệ vật gồm hai trọng lượng $\vec{P}$ của thang, trọng lượng $\vec{Q}$ của người, phản lực tại A và B là $\vec{N}_A, \vec{N}_B$. Vì thang cân bằng nên hệ lực cân bằng (hình 56):

$$(2\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}_A, \vec{N}_B) \sim 0.$$

Phương trình cân bằng :

$$\sum Y = N_A + N_B - 2P - Q = 0(1)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 2N_B AC\cos 60^0 - \frac{P.AC}{2}\cos 60^0 - Q(AC+CK)\cos 60^0 - P(AC+\frac{BC}{2})\cos 60^0 = 0(2)$$

Hai phương trình cho ta : N_A = 325 N, N_B = 415 N.

Để tím sức căng của dây ta tách phần AC và xét cân bằng với các lực tác dụng :

$$(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T}) \sim 0$$

Lập phương trình mômen đối với điểm C (loại trừ phản lực $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$)

$$\sum m_C(\vec{F}) = -N.AC.\cos 60^0 + \frac{PAC}{2}\cos 60^0 + TCD\sin 60^0 = 0$$

Từ đó ta suy ra T = 303,1 N.

<u>*Chú ý :*</u> Trong bài toán hệ vật ta cần chú ý nội lực. Khi hoá rắn cả hệ, nội lực triệt tiêu, nhưng khi tách ra thì trên mỗi phần tách ra, ta đặt chúng có từng đôi một tương ứng trực đối nhau.

4.4 Bài toán siêu tĩnh :

Tất cả bài toán tĩnh học, nếu số ẩn của bài toán nhỏ hơn hoặc bằng số phương trình cân bằng tối đa lập được cho một vật (hoặc một hệ) thì gọi là bài toán xác định tĩnh (hoặc bài toán tĩnh định). Nếu số ẩn bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng nói trên thì gọi là bài toán siêu tĩnh.

Đối với hệ lực phẳng bất kỳ tác dụng một vật cân bằng ta chỉ có ba phương trình, với một hệ có n vật thì ta lập nhiều nhất là 3.n phương trình.

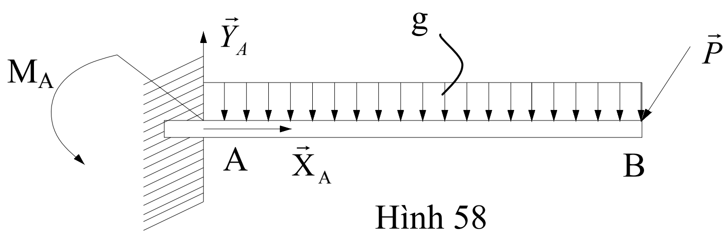
Gọi s là số ẩn của bài toán hệ có n vật, nếu :

- $s \leq 3.n$: Bài toán tĩnh định
- $s > 3.n$: Bài toán siêu tĩnh

Tương tự đối với bài toán hệ lực không gian bất kỳ, ta có :

- $s \leq 6.n$: Bài toán tĩnh định
- $s > 6.n$: Bài toán siêu tĩnh.

Ví dụ : Cho một dầm AB, đầu A ngàm, đầu B tự do, chịu tác dụng lực $\vec{P}$ và lực phân bố q.



Hình 58

Đây là bài toán tĩnh định vì n=1 và hệ lực phẳng tác dụng, ta lập được 3 phương trình cân bằng, còn liên kết ở ngàm có các phản lực $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, M_A nên s = 3n.

Bây giờ cũng dầm AB, nếu đầu B ta đặt thêm một liên kết ngàm nữa, nghĩa là s=6, như vậy s>3n nên bài toán này lá bài toán siêu tĩnh.

Khi s>3n, ta đặt m=s-3n, thì m gọi là bậc siêu tĩnh của bài toán.

Với bài toán trên : m= 6 – 3 = 3.

Đây là bài toán siêu tĩnh bậc 3

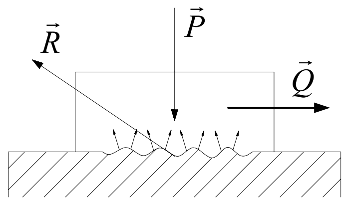
CHƯƠNG III

MA SÁT

§1. MỞ ĐẦU

Ma sát là hiện tượng phổ biến ta thường gặp trong thực tế và kỹ thuật. Ma sát có nhiều nguyên nhân, chủ yếu do bề mặt các vật tiếp xúc gồ ghề và biến dạng của các vật (Hình 60).

Ma sát cũng có lợi song rất có hại nhờ có ma sát mà con người, xe cộ có thể di chuyển trên mặt đất. Nhưng ma sát rất có hại là cản trở chuyển động làm hao mòn máy móc và hao tổn nhiên liệu.



Hình 60

Ngày nay, trong thực tế người ta lợi dụng ma sát trong kỹ thuật như làm móng cọc ma sát, chuyền chuyển động giữa dây cua roa và bánh xe, hãm chuyển động bằng ma sát. Người ta làm giảm ma sát bằng cách bôi trơn dầu mỡ, hay làm các bề mặt tiếp xúc nhẵn để các vật dễ chuyển động.

Tuỳ theo trạng thái chuyển động của vật mà người ta phân ma sát ra làm các loại khác nhau như : ma sát trượt, ma sát lăn, ma sát xoay...

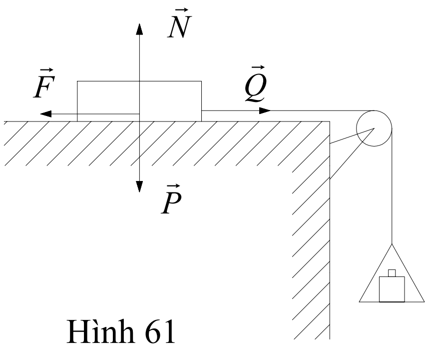
Trong chương này, ta sẽ khảo sát hai loại ma sát thường gặp là ma sát trượt và ma sát lăn, để hoàn thiện phản lực liên kết và cách giải bài toán cân bằng khi có ma sát.

§2. MA SÁT TRƯỢT

Ma sát trượt là hiện tượng ngăn cản chuyển động trượt hay có xu hướng trượt vật này trên mặt vật khác.

2.1 Thí nghiệm của Cu-lông :

Trên mặt bàn nằm ngang, người ta đặt vật nặng A trọng lượng P và buộc vào vật một sợi dây vòng qua ròng rọc, đầu dưới treo một đĩa cân (hình 61).



Hình 61

Ban đầu ta chưa cho quả cân vào đĩa, nghĩa là lực Q = 0, khi đó vật A cân bằng dưới tác dụng của trọng lượng P và phản lực

N, nghĩa là trị số N = P. Bây giờ ta cho quả cân có trọng lượng nhỏ thì lực $\vec{Q}$ còn bé, vật vẫn cân bằng. Như vậy để cân bằng với lực $\vec{Q}$ thì ở mặt liên kết xuất hiện lực $\vec{F}$. Lực $\vec{F}$ gọi là ma sát trượt. Trị số lực F = Q vì vật vẫn cân bằng cho đến khi $Q = Q_1$ thì lực F=Fmax , sau đó chỉ cần tăng lực Q một ít nữa vật bắt đầu trượt. Chứng tỏ lực ma sát $\vec{F}$ không tăng nữa. Lực F_{max} gọi là lực ma sát trượt cực đại (lớn nhất).

Từ thí nghiệm trên người ta rút ra các định luật về ma sát như sau :

1. Lực ma sát trượt : khi có ma sát trượt, thì ở bề mặt tiếp xúc ngoài phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, còn xuất hiện lực ma sát $\vec{F}$ hướng ngược chiều với chiều vật muốn trượt.

Lực ma sát trượt là lực biến thiên thụ động và có giới hạn, nghĩa là :

$$0 \le F \le F_{max}$$

2. Lực ma sát trượt cực đại là lực ma sát lớn nhất, được xác định theo công thức: $F_{max} = f.N$

Trong đó : N là phản lực pháp tuyến, f là hệ số tỷ lệ còn gọi là hệ số ma sát trượt, đó là một hư số.

Như vậy lực ma sát trượt cực đại tỷ lệ với phản lực pháp tuyến.

3. Hệ số ma sát trượt f chỉ phụ thuộc vào bản chất các vật (gỗ, sắt, gạch, ...) và trạng thái bề mặt vật tiếp xúc (trơn, nhám, ướt...) mà không phụ thuộc vào diện tích tiếp xúc.

Hệ số f được xác định bằng thực nghiệm. Sau đây là vài giá trị của f.

Gỗ trên gỗ : $f = 0,4 \div 0,7$

Thép trên thép : $f = 0,15 \div 0,25$

Đá trên đá : $f = 0,6 \div 0,7$

Cuối cùng ta có : $0 \le F \le f.N$

Khi vật A trượt, ta có hệ số ma sát trượt động $f_đ$. Hệ số $f_đ$ còn phụ thuộc vận tốc chuyển động của vật, nhưng thường lấy ≈ f.

2.2 Góc ma sát và nón ma sát :

Trên đây, khi giải các bài toán tĩnh học ta bỏ qua ma sát, giả thuyết các mặt liên kết nhẵn, nên chỉ có phản lực pháp tuyến ở mặt liên kết đó. Khi có ma sát trượt, ngoài phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ còn thêm lực ma sát trượt $\vec{F}$, khi đạt đến trạng thái giới hạn F = Fmax, hợp hai thành phần phản lực $\vec{N}$ và $\vec{F}_{ms}$ ta được phản lực toàn phần :

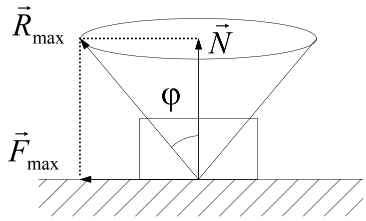
$$\vec{R}_{\max} = \vec{N} + \vec{F}_{\max}$$

Lực $\vec{R}_{\max}$ làm với phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ một φ, φ được gọi là góc ma sát trượt.

Theo hình 62, ta có :

$$tg\varphi = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{f.N}{N} = f$$

$$tg\varphi = f$$



Hình 62

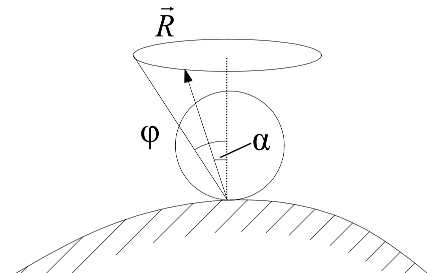
Như vậy, tang góc ma sát bằng hệ số ma sát trượt.

Khi vật cân bằng thì $F \le F_{\max}$ nên phản lực toàn phần $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$ nằm trong góc ma sát.

Nếu cho vật di chuyển theo mọi hướng trên mặt liên kết B thì phản lực $\vec{R}_{\max}$ sẽ quét nên hình nón, gọi đó là nón ma sát. Với mọi hướng góc ma sát không đổi thì ta được nón ma sát tròn xoay.

2.3 Bài toán cân bằng khi có ma sát :

Cũng như mọi bài toán tĩnh học, bài toán cân bằng khi có ma sát trượt thì hệ lực tác dụng lên vật phải thoả mãn điều kiện cân bằng.



Hình 63

Ngoài ra, lực ma sát trượt cần phải thoả mãn điều kiện giới hạn của nó, nghĩa là :

$$0 \le F \le f.N$$

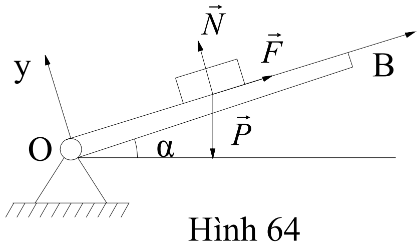
hoặc $\alpha \le \varphi$

($\vec{R}$ phải nằm trong nón ma sát)

Khi F = Fmax = f.N thì vật vẫn còn cân bằng, trạng thái cân bằng này gọi là cân bằng giới hạn.

Còn đối với mọi giá trị khác của $F \leq f.N$ vật vẫn cân bằng, nên bài toán ma sát không phải một mà nhiều vị trí cân bằng tạo thành một miền cân bằng.

Vì vậy để giải bài toán cân bằng khi có ma sát, ta thường khảo sát véctơ ở trạng thái cân bằng giới hạn, từ đó suy ra miền cân bằng của bài toán.



Hình 64

Ví dụ : Trên mặt phẳng OB có thể quay quanh O, ta đặt vật nặng A trọng lượng P. Hệ số ma sát trượt giữa vật nặng và mặt OD là f. Tìm góc α bao nhiêu để vật A bặt đầu trượt (hình 64)

Bài giải:

Ta khảo sát vật A cân bằng, dưới tác dụng của pháp tuyến $\vec{N}$ trọng lượng $\vec{P}$, lực ma sát $\vec{F}$ ($\vec{F}$ hướng lên vì vật A có xu hướng trượt xuống). Vì vật cân bằng :

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}) \sim 0$$

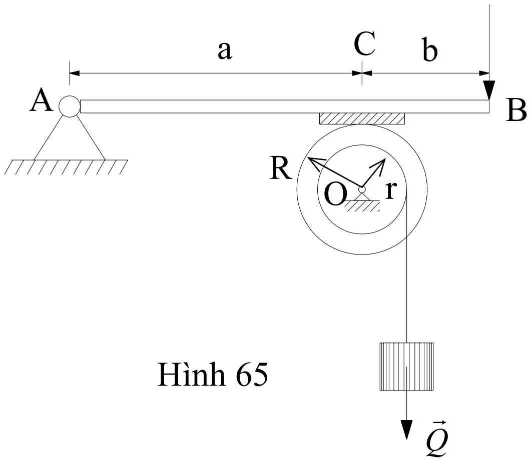
Lập các phương trình cân bằng :

$$\sum X = F - P\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$
$$\sum Y = N - P\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$
$$F = fN \qquad (3)$$

Giải các phương trình trên ta tìm được : tgα = f.

Khi vật A ở trạng thái cân bằng giới hạn thì tgα = tgφ hay α = φ.

Như vậy khi góc α bằng góc ma sát vật sẽ trượt. Đây cũng là thí nghiệm để tím góc ma sát φ và từ đó suy ra hệ số ma sát f.



Hình 65

Ví dụ 2: Cho một hệ như hình vẽ. Để giữ vật Q không rơi xuống cần tác dụng lực P nhỏ nhất bao nhiêu ? Cho biết hệ số ma sát trượt giữa má hãm và bánh xe là f. Bỏ qua bề dày má hãm Q.

Bài giải:

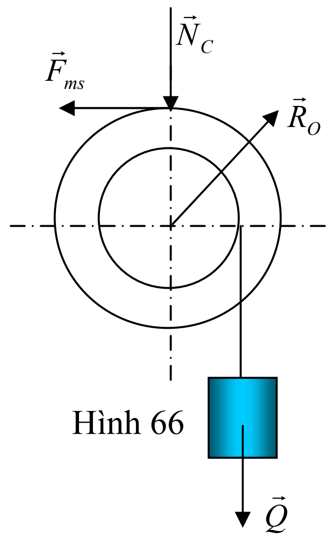
Ta chia bài toán này ra hai bước :

Bước I: Ta khảo sát bánh xe và trục O ở trạng thái cân bằng giới hạn, nghĩa là :

$$F = F_{max} = fN$$

Ở bánh xe và trục O gắn chặt với nhau. Hệ lực tác dụng lên vật là $(\vec{Q}, \vec{R}_O, \vec{N}_C, \vec{F}_{ms})$~0

Trong đó $\vec{R}_O$ là phản lực ở trục O, $\vec{N}_C$ là phản lực pháp tuyến của má hãm áp lên bánh xe. $\vec{F}_{ms}$ là lực ma sát trượt do má hãm đặt lên bánh xe (hình 66)



Hình 66

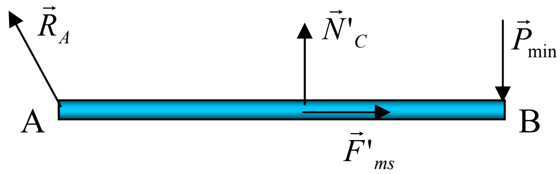
Ta lập phương trình mômen đối với O:

$$\sum m_O(\vec{F}) = -Q.r + F_{ms}.R = 0$$

và điều kiện của lực ma sát là :

$$F_{ms} = f.N_C$$

Từ điều kiện (1) và (2) ta suy ra : $N_C = \dfrac{rQ}{fR}$.



Hình 67

Bước 2: Xét cân bằng đòn AB với các lực tác dụng : $(\vec{R}_A, \vec{N}'_C, \vec{F}'_{ms}, \vec{F}_{min})$~0 trong đó $\vec{N}'_C$ và $\vec{F}'_{ms}$ là nội lực của hệ nên khi tách ra ta vẽ ngược chiều với $\vec{N}_C$ $\vec{F}_{ms}$ tác dụng lên bánh x. Vì xét cân bằng giới hạn nên lực P = P_{min} , nếu P>P_{min} thì N_C càng lớn và tời càng cân bằng, nếu P<P_{min} thì N_C sẽ nhỏ không đủ sức giữ vật Q và tời O quay. Ta lập điều kiện cân bằng là phương trình mômen đối với A.

$$\sum m_A(\vec{P}) = aN'_C - (a+b)P_{min} = 0$$

Từ đó suy ra : $N_C = \dfrac{a+b}{a}P_{min}$

Ta biết $N_C = N_C$ nên : $\dfrac{a+b}{a}P_{min} = \dfrac{rQ}{fR}$ và $P_{min} = \dfrac{raQ}{(a+b)fR}$

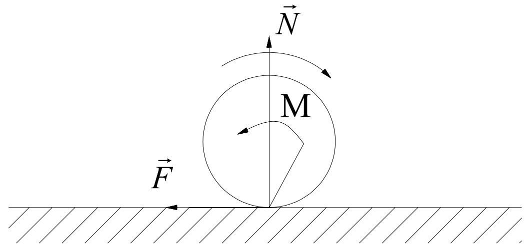
Vậy muốn tời cân bằng thì :

$$P_{min} \geq \frac{raQ}{(a+b)fR}$$

§3. MA SÁT LĂN

Ma sát lăn là hiện tượng chuyển động lăn hay có xu hướng lăn của vật này trên mặt vật khác.

Có một con lăn đặt trên mặt vật liên kết B có xu hướng lăn về phía bên phải thì tại điểm liên kết ngoài phản lực pháp



Hình 68

tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt $\vec{F}$ còn xuất hiện một ngẫu lực N cản chuyển động lăn gọi là ngẫu lực ma sát lăn.

3.1 Các định luật và ma sát lăn :

Qua thực nghiệm ta thấy :

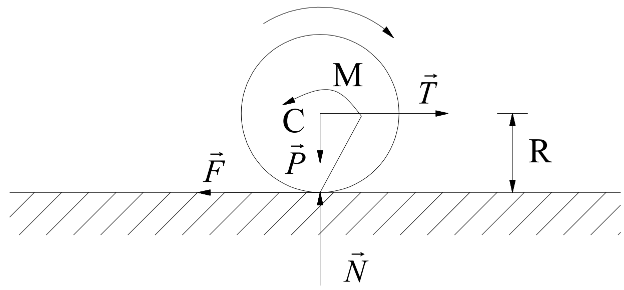
- Ngẫu lực ma sát lăn có chiều ngược với chiều vật có hướng lăn.
- Ngẫu lực ma sát lăn có mômen biến thiên và có giới hạn là M_{max} (M_{max} ngẫu lực ma sát lăn cực đại) : $0 \le M \le M_{max}$
- Mômen ngẫu lực ma sát lăn cực đại tỷ lệ phản lực pháp tuyến N.

$$M_{max} = kN$$

Hệ số tỷ lệ k gọi là hệ số ma sát lăn, có thứ nguyên dài được xác định bằng thực nghiệm. Hệ số k cũng phụ thuộc vào bản chất vật liệu và bề mặt tiếp xúc.

Sau đây là vài con số cề trị số của k :

- Gỗ trên gỗ : k = 0,05 ÷ 0,08 cm
- Thép trên thép : k = 0,005 cm
- Thép tôi trên thép tôi : k = 0,001 cm

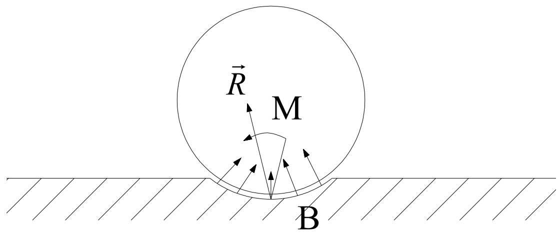


Hình 69

Thật vậy, khi đặt con lăn trên mặt liên kết B (hình 69) và kéo với lực $\vec{T}$ bé, con lăn vẫn cân bằng, nghĩa là ở bề mặt liên kết B ngoài phản lực $\vec{N}$, $\vec{F}$ còn xuất hiện ngẫu lực M để cân bằng với ngẫu lực ($\vec{Q}, \vec{F}$) gây ra chuyển động lăn.

$$M = R.T$$

Tiếp tục tăng T thì con lăn vẫn cân bằng cho đến khi T = T1 con lăn bặt đầu lăn, nghĩa là M $\le$ Mmax . Nguyên nhân chủ yếu có ma sát lăn là do vật liệu có biến dạng nên giữa con lăn và mặt liên kết tiếp xúc nhau một miền quanh điểm B. Phản lực liên kết tác dụng lên con lăn là một hệ lực khi thu về một điểm được một lực $\vec{R}$ có hai thành phần là $\vec{M}$ và $\vec{R}$, còn ngẫu lực M chính là ngẫu lực ma sát lăn (Hình 70)



Hình 70

3.2 Bài toán cân bằng khi có ma sát lăn :

Khi tác dụng lên con lăn một lực $\vec{T}$, thì con lăn có xu hướng lăn và cũng có xu hướng trượt. Do đó, ở mặt liên kết ngoài phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, có lực ma sát trượt $\vec{F}$ và ngẫu lực ma sát lăn M.

Vì vậy điều kiện vật cân bằng là hệ lực tác dụng lên vật phải thoả mãn điều kiện cân bằng của hệ lực nói chung, ngoài ra lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát phải thoả mãn điều kiện giới hạn của nó là :

$$M \leq M_{max} = kN \qquad (1)$$

$$F \leq F_{max} = fN \qquad (2)$$

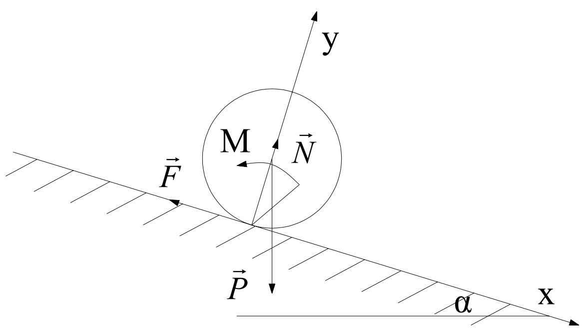
Nếu một trong hai điều kiện trên không thoả mãn thì sẽ phát sinh ra chuyển động tương ứng. Cả hai điều kiện (1) và (2) không thoả mãn thì vật sẽ vừa lăn vừa trượt.

Trong thực tế ma sát lăn thường nhỏ hơn ma sát trượt rất nhiều. Vì vậy đối với con lăn thì dễ lăn hơn dễ trượt, nên trong kỹ thuật cần đơn giản ma sát thì có thể thay ma sát trượt bằng ma sát lăn. Ví dụ thay bạc trong các ổ đỡ trục bằng các vòng bi, hay khi kéo một dầm cầu người ta đặt trên các con lăn...

Ví dụ 3 : Một hình trụ bán kính R, trọng lượng P đặt trên mặt phẳng nghiêng α. Tìm góc α để con lăn sẽ lăn đều. Cho hệ số ma sát lăn k = 0,005 cm.

Bài giải:

Ta khảo sát hình trụ cân bằng. Hệ lực tác dụng lên hình trụ ($\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}$, M) ~ 0 với



Hình 71

$$F \le fN$$

$$M \le kN$$

Lập điều kiện cân bằng, ta có các phương trình sau :

$$\sum X = P\sin\alpha - F = 0 \qquad (1)$$
$$\sum Y = N - P\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$
$$\sum m_B(\vec{F}) = M - P.R.\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$
$$F \le fN \qquad (4)$$
$$M \le kN \qquad (5)$$

Từ (2) : N = Pcosα.

Từ (1) và (4) ta tìm được : tgα ≤ f

Từ (3) và (5) ta được : tgα ≤ $\frac{k}{R}$

Thường $\frac{k}{R}$ rất bé so với f. Do đó để con lăn cân bằng thì : tgα ≤ $\frac{k}{R}$

Khi tgα = $\frac{k}{R}$ thì con lăn sẽ bắt đầu lăn (nếu chỉ tăng tgα lên một ít thôi). Khi đó con lăn đều. Nếu tiếp tục tăng α cho đến khi tgα ≥ f thì còn lăn vừa lăn vừa trượt.

CHƯƠNG IV

TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

Để xác định trọng tâm của vật rắn trước nhất ta làm quen khái niệm tâm của hệ lực song song.

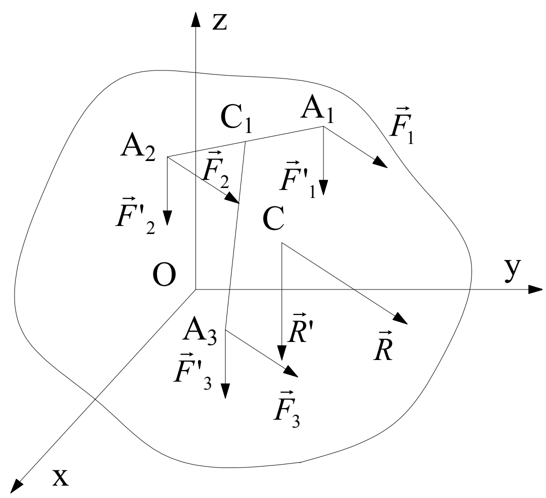
§1. TÂM HỆ LỰC SONG SONG - TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

1.1 Tâm hệ lực song song :

Giả sử cho hệ lực song song cùng chiều $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ đặt tại A_1, A_2, ..., A_n (hình 72). Hệ này có hợp lực $\vec{R}$ cùng chiều các lực thành phần và trị số :

$$R = \sum F_k$$

Nếu bây giờ ta xoay các lực của hệ quanh các điểm đặt của chúng theo cùng chiều và cùng một góc, ta được một hệ lực mới $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, ..., \vec{F}'_n$ song song cùng chiều và cùng trị số với nhau nhưng khác chiều hệ lực cũ. Hợp lực $\vec{R}'$ của hệ lực này rõ ràng có trị số bằng R và đường tác dụng sẽ khác đi. Song ta cần chứng minh rằng đường tác dụng của hợp lực $\vec{R}$ hay $\vec{R}'$ đều qua điểm C cố định nào đó. Điểm C này được gọi là <u>tâm hệ lực song song đã cho</u>



Hình 72

Thật vậy, bắt đầu ta hợp hai lực song song với $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ được hợp lực $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ đặt tại C_1. Ta nhận thấy khi quay $\vec{F}_1$ quanh A1, $\vec{F}_2$ quanh A_2 thì $\vec{R}_1$ quay quanh C_1 cùng chiều quay và cùng một góc với các lực đó. Điểm C_1 nằm trên A_1A_2 và thoả mãn bất đẳng thức $F_1.A_1C_1 = F_2.A_2C_2$ (theo điều kiện cân bằng của đòn ở đây ta coi A_1A_2 là đòn, điểm C_1 là điểm tựa hay trục quay của đòn). Vì khi quay $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng một góc và cùng chiều thì đoạn A_1A_2 và đẳng thức trên không đổi. Tiếp tục hợp lực $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ bao giờ cũng đi qua C_2 nằm trên đoạn thẳng C_1A_3...và tiếp tục làm như vậy cho đến lực $\vec{F}_n$, thì hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực song song này luôn đi qua điểm C không đổi đối với các điểm A_1, A_2, ..., A_n nằm trên vật.

Ta gọi toạ độ điểm $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$,...., $A_C(x_C,y_C,z_C)$ rồi quay các lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,....,\vec{F}_n$ quanh điểm đặt của chúng sao cho song song với trục z thành hệ lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,....,\vec{F}_n$.

Áp dụng định lý VARIGNON đối với trục y ta có :

$$m_y(\vec{R}) = \sum m_y(\vec{F}_k) \qquad \text{(a)}$$

Theo hình vẽ $\quad m_y(\vec{R}') = R.x_O \qquad$ (vì R’ = R)

Tương tự : $\quad m_y(\vec{F}_1') = F_1.x_1, ...$

Thay vào đẳng thức (a) ta được :

$$R.x_O = F_1.x_1 + F_2.x_2 + ... + F_n.x_n$$

Hay : $$x_c = \frac{F_1.x_1 + F_2.x_2 + ... + F_n.x_n}{R} = \frac{\sum F_k x_k}{R}$$

Tương tự : $$y_c = \frac{F_1.y_1 + F_2.y_2 + ... + F_n.y_n}{R} = \frac{\sum F_k y_k}{R}$$

$$z_c = \frac{F_1.z_1 + F_2.z_2 + ... + F_n.z_n}{R} = \frac{\sum F_k z_k}{R}$$

Trong đó : $$R = \sum F_k \qquad (4.1)$$

Áp dụng công thức này ta tìm trọng tâm vật rắn.

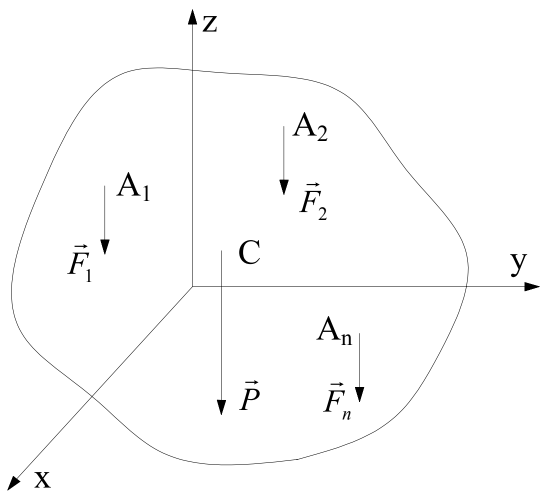
1.2 Trọng tâm vật rắn :

Các vật đặt gần quả đất đều chịu lực hút quả đất hướng thẳng đứng từ trên xuống gọi là trọng lực. Đối với vật có kích thước khá bé so với đường kính quả đất thì có thể xem trọng lực các phân tố của vật như các lực song song và có giá trị không đổi với từng phân tố khi ta xoay vật. Trong trường hợp như vậy gọi là trường hợp trọng lực đồng nhất. Giả sử ta có một vật rắn. Chia vật thành n phân tố chịu các lực $\vec{P}_1,\vec{P}_2,...,\vec{P}_n$ tác dụng. Hợp các lực này ta được lực $\vec{P}$. Đó chính là trọng lượng của vật, được tính theo công thức :

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k \qquad (4.2)$$

Dù vật quay thế nào các lực $\vec{P}_k$ vẫn giữ nguyên điểm đặt trên vật và song song với nhau.

Vì thế hợp lực $\vec{P}$ của chúng luôn đi qua điểm C cố định trên vật. C là tâm các lực song song $\vec{P}_k$ cũng là điểm đặt của trọng lực $\vec{P}$ còn gọi là trọng tâm của vật (Hình 73).



Hình 73

Vậy trọng tâm của vật là một điểm cố định trên vật mà trọng lượng của vật luôn luôn đặt tại điểm đó.

Theo công thức (4.1) ta suy ra công thức xác định trọng tâm của vật là :

$$x_C = \frac{\sum P_k.x_k}{P}$$
$$y_C = \frac{\sum P_k.y_k}{P} \qquad (4.3)$$
$$z_C = \frac{\sum P_k.z_k}{P}$$

Trong đó x_k, y_k, z_k là toạ độ điểm đặt của lực P_k của phân tố thứ k (k = 1,2,..n)

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM CỦA VẬT ĐỒNG CHẤT ĐỐI XỨNG, VẬT PHỨC TẠP (VẬT GHÉP, VẬT KHUYẾT)

2.1 Toạ độ trọng tâm các vật đồng chất:

Nếu các vật đồng chất là một khối thì trọng lượng P_k của phân tố nào cũng tỷ lệ với thể tích của nó $P_k = \gamma.V_k$. Trọng lượng P của vật tỷ lệ thể tích của vật V_1, nghĩa là $P = \gamma.V$ (γ là trọng lượng riêng của vật). Theo công thức (4.3) công thức xác định trọng tâm của vật là :

$$x_C = \frac{\sum V_k.x_k}{V}$$
$$y_C = \frac{\sum V_k.y_k}{V} \qquad (4.4)$$
$$z_C = \frac{\sum V_k.z_k}{V}$$

Tương tự vật là bản phẳng mỏng đồng chất thì toạ độ trọng tâm của bản là :

$$x_C = \frac{\sum S_k.xk}{S} \qquad y_C = \frac{\sum S_k.y_k}{S} \qquad (4.5)$$

S_k diện tích phân tố k của bản, S là diện tích của bản. Cũng vậy, toạ độ trọng tâm của đường cong đồng chất sẽ là :

$$x_C = \frac{\sum l_k.x_k}{l} \qquad y_C = \frac{\sum l_k.y_k}{l} \qquad z_C = \frac{\sum l_k.z_k}{l} \qquad (4.6)$$

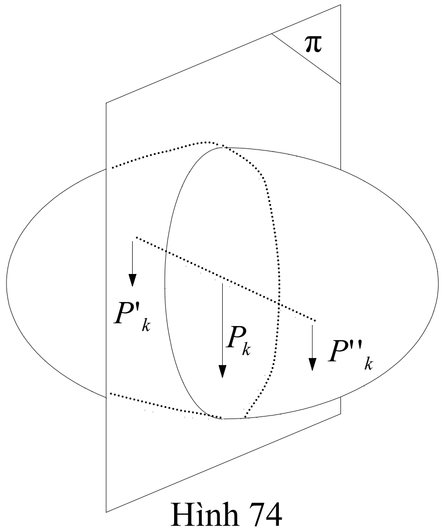
l_k chiều dài phân tố k, l chiều dài của đường cong.

2.2 Các phương pháp xác định trọng tâm của vật đồng chất :

1. Phương pháp đối xứng :

Định lý : Nếu vật đồng chất có mặt phẳng đối xứng, một trục hoặc tâm đối xứng thì trọng tâm của vật nằm trên mặt phẳng đối xứng, trục hoặc tâm đối xứng ấy.

Thật vậy, ta chia vật thành những cặp phần tử đối xứng bằng nhau qua mặt phẳng (Hình 74).



Hình 74

Hợp các trọng lực của từng cặp lại, ta được một hệ lực song song có điểm đặt nằm trên mặt phẳng. Trọng lực P của vật là hợp lực các lực này cũng nằm trên mặt phẳng đối xứng của vật.

Với trục đối xứng và tâm đối xứng ta cũng chứng minh như vậy.

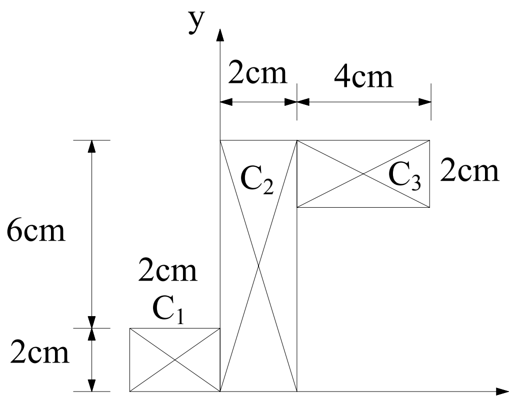
2. Phương pháp phân chia (vật ghép) :

Một vật có thể chia ra một số hữu hạn phần tử mà vị trí trọng tâm từng phần tử đó ta có thể xác định dễ dàng thì trọng tâm của vật có thể xác định theo công thức trên.

Ví dụ 1: Cho một bản đồng chất có kích thước như hình 75. Hãy xác định trọng tâm của bản.

Bài giải :

Ta dựng hệ trục Oxy và chia hình trên thành ba phần. Tính tọa độ trọng tâm của mỗi phần và diện tích của chúng.



Hình 75

	1	2	3
x_k	-1	1	4
y_k	1	4	7
S_k	4	16	8

Diện tích của bản là :

$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 16 + 8$

$S = 28\ cm^2$.

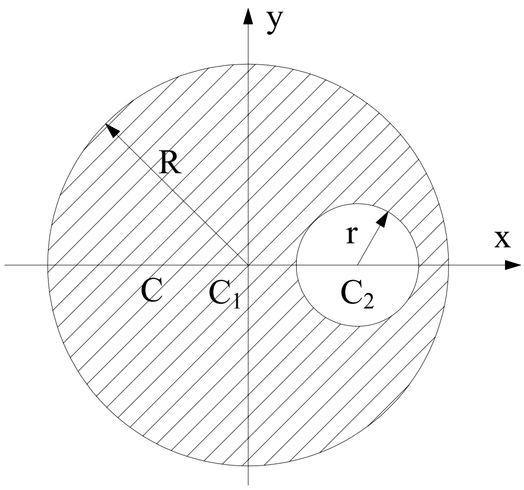
Thay các giá trị số trên vào công thức (4.5) ta được

$$x_C = \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{S} = \frac{-4+16+32}{28} = \frac{22}{14}cm$$
$$y_C = \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3}{S} = \frac{4+64+56}{28} = \frac{31}{7}cm$$

3. Phương pháp bù trừ (vật khuyết):

Phương pháp này là trường hợp riêng của phương pháp phân chia được sử dụng cho vật có lỗ khuyết, khi phân biệt trọng tâm của vật không có lỗ khuyết và bản thân lỗ khuyết.

Ví dụ : Xác định trọng tâm của bản tròn bán kính R, có lỗ khuyết bán kính r (Hình 76). Khoảng cách $C_1C_2 = a$.



Hình 76

<u>*Bài giải:*</u>

Trọng tâm của hình khuyết này là nằm trên trục đối xứng C_1C_2. Ta dựng hệ trục C_1xy. Để tìm x_C ta bù thêm diện tích bản tròn thành kín (phần I) rồi trừ diện tích bằng diện tích lỗ khuyết (phần II). Diện tích phần II (lỗ khuyết) lấy dấu âm. Khi đó, ta có :

$$x_{C1} = 0, \quad S_1 = \pi R^2$$
$$x_{C2} = a, \quad S_2 = -\pi r^2$$
$$S = S_1 + S_2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Thay các giá trị đó vào công thức (4.5) ta tìm được :

$$x_C = \frac{x_{C1}S_1 + x_{C2}S_2}{S} = \frac{-ar^2}{(R^2 - r^2)}$$
$$y_C = 0$$

Như vậy, trọng tâm O của hình khuyết nằm bên trái C_1 một đoạn bằng $\dfrac{ar^2}{(R^2 - r^2)}$.

<u>*4. Phương pháp thực nghiệm :*</u>

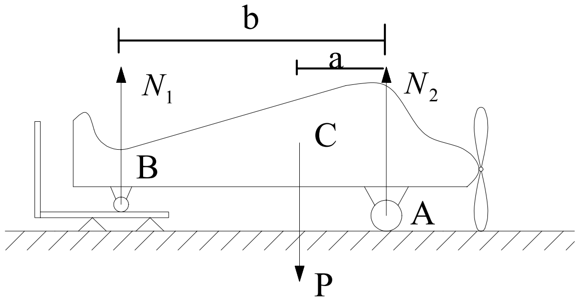
Ngoài các phương pháp trên, người ta còn dùng phương pháp thực nghiệm như treo hoặc cân vật để tìm trọng tâm của vật có hình dạng phức tạp:

<u>*Ví dụ :*</u> Để tìm trọng tâm của máy bay người ta lần lượt đặt các bánh xe lên bàn cân tìm được M_1 và M_2. Lập phương trình như sau:

$$a.N_2 = (b-a).N_1$$

Suy ra :

$$a = \frac{b.N_1}{N_1 + N_2}$$



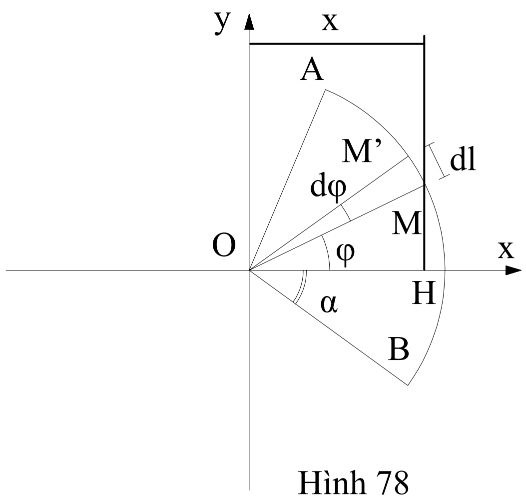
Hình 77

Hoặc ta dùng dây treo vật cần tìm trọng tâm thì phương của dây treo là phương của trọng lực. Ta cho vài ba điểm trên vật thì giao điểm các phương đó là trọng tâm của vật.

§3. CÔNG THỨC TÍNH TRỌNG TÂM CỦA VÀI VẬT ĐỒNG CHẤT ĐƠN GIẢN

Xét cung tròn AB bán kính, góc ở tâm $A\hat{O}B = 2$. Theo tính chất đối xứng trọng tâm của cung tròn sẽ nằm trên trục x (hình 78). Tính toạ độ trọng tâm theo công thức sau :

$$x_C = \lim_{\Delta lk \to 0} \frac{x_k \Delta l_k}{L} = \frac{1}{L}\int_{(L)} x.dl$$



Hình 78

Trong đó L là chiều dài cung AB. Để lấy tích phân trên cung AB ta lấy phân tố MM’ có chiều dài dl = Rdφ với góc định vị φ. Toạ độ x của phân tố là :

$$x = R\cos\varphi$$

Chiều dài của cung AB là : L = 2R.α

Từ đó ta có :

$$x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} xdl = \frac{R^2}{2R\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi.d\varphi$$

$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Như vậy trọng tâm của cung tròn nằm trên trục đối xứng của nó và cách điểm Q của cung một đoạn bằng :

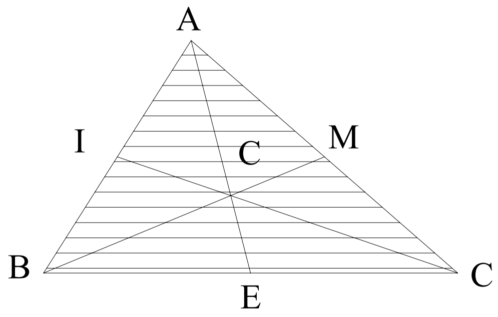
$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Trong đó α tính bằng radian.

3.2 Trọng tâm tam giác :

Dựng các đường thẳng song song cới cạnh đáy BD, chia tam giác ra thành nhiều dãi hẹp (hình 79)

Rõ ràng trọng tâm của mỗi dãi sẽ nằm trên trung tuyến AE của tam giác. Vì vậy trọng tâm của tam giác sẽ nằm trên trung tuyến này. Ta cũng làm như vậy đối với hai trung tuyến kia. Từ đó suy ra, trọng tâm tam giác sẽ nằm trên giao điểm của ba đường trung tuyến của nó, nghĩa là :



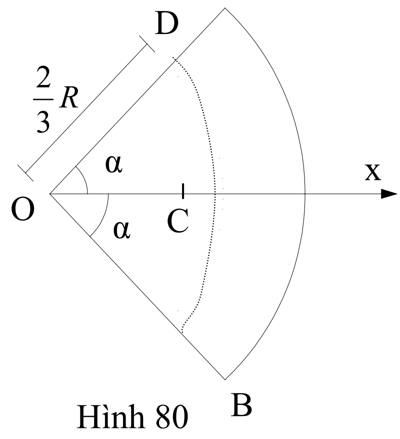
Hình 79

$$CE = \frac{1}{3}AE \qquad (4.7)$$

3.3 Trọng tâm hình quạt :

Cho một hình quạt bán kính R, góc ở tâm $A\hat{O}B = 2\alpha$. Từ điểm O, ta vẽ các bán kính chia hình quạt ra thành n hình quạt nhỏ. Khi n tăng lên vô hạn thì các hình quạt nhỏ xem như những tam giác mà nó có trọng tâm trên cung DE có bán kính $\frac{2}{3}R$.

Trọng tâm hình quạt trùng với trọng tâm của cung tròn DE. Theo công thức (4.6) thì trọng tâm hình quạt sẽ là :



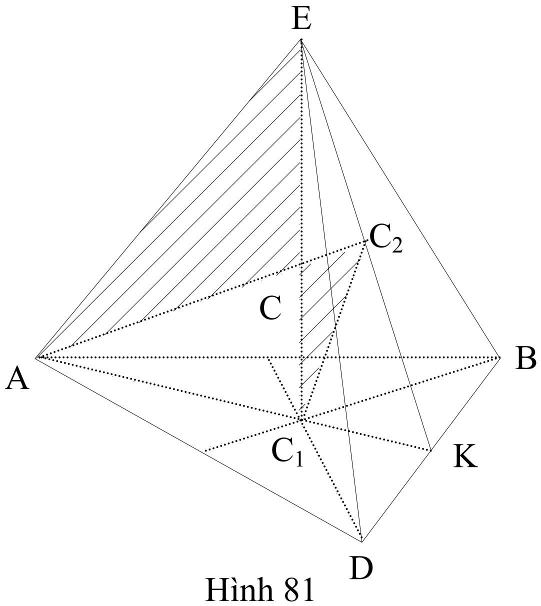
Hình 80

$$x_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (4.8)$$

3.4 Trọng tâm của chóp :

Cho khối chóp tam giác EABD. Để xác định trọng tâm C của khối ta dựng các mặt phẳng song song với đáy ABD, chia khối chóp ra n phân tố. Khi tăng n lên vô hạn ta coi mỗi phân tố đó là một tam giác phẳng. Trọng tâm các tam giác này nằm trên đường thẳng EC_1 (C_1 trọng tâm đáy ABD). Vì vậy trọng tâm của khối sẽ nằm trên EC_1.

Cũng tương tự, ta thấy trọng tâm của khối cũng nằm trên AC_2 (C_2 là trọng tâm mặt BDE). Vì vậy, trọng tâm của khối sẽ là giao điểm C của các EC_1 và AC_2.



Hình 81

Bây giờ ta xác định điểm C vì C_1C_2 và AE chia các cạnh của góc $A\hat{K}E$ thành các đoạn tỷ lệ, nên chúng song song nhau. Tam giác C_1C_2C đồng dạng tam giác EAC. Ngoài ra $KC_1 = \frac{1}{3}AK$ nên $C_1C_2 = \frac{1}{3}AK$. Từ đó ta tìm ra được :

$$\frac{CC_1}{CE} = \frac{C_1C_2}{AE} = \frac{1}{3}$$

do đó : $$CC_1 = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{4}EC$$

Kết quả này cũng đúng cho cả khối chóp đa giác và khối nón.

Để tìm trọng tâm của một số vật đồng chất khác ta có thể tra cứu trong các sách cẩm nang kỹ thuật.

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

GIÁO TRÌNH CƠ HỌC LÝ THUYẾT

PHẦN ĐỘNG HỌC

KHOA SƯ PHẠM KỸ THUẬT
BỘ MÔN CƠ KỸ THUẬT

ĐÀ NẴNG 2005

CHƯƠNG I
ĐỘNG HỌC ĐIỂM

§1. MỞ ĐẦU ĐỘNG HỌC

Động học là phần cơ học nghiên cứu các tính chất hình học của chuyển động các vật, không kể đến quán tính (khối lượng) và các lực tác dụng lên chúng để vật chuyển động. Khi nghiên cứu phần động học ta cần chú ý đến những điểm sau đây:

1. Mô hình vật thể của động học là động học điểm và vật rắn chuyển động. Động học điểm là điểm hình học chuyển động trong không gian, qua thời gian. Vật rắn chuyển động là tập hợp nhiều động điểm mà khoảng cách giữa mỗi cặp điểm đều không đổi trong chuyển động.

2. Chuyển động xảy ra trong không gian và theo thời gian. Không gian trong cơ học là không gian Euclide ba chiều. Tất cả các phép đo lường trong không gian này được xác định theo phương pháp hình học Euclide. Đơn vị chiều dài để đo khoảng cách là mét (m). Thời gian trong cơ học được coi là thời gian trôi đều không phụ thuộc vào hệ quy chiếu khảo sát. Đơn vị đo thời gian là giây (s). Thời gian được xem là đối số độc lập khi khảo sát chuyển động của các vật thể.

3. Để xác định vị trí của vật (hoặc điểm) đang chuyển động người ta gắn với vật chuẩn dùng để khảo sát chuyển động một hệ toạ độ nào đó mà cùng với nó tạo thành hệ quy chiếu. Nếu toạ độ của tất cả các điểm của vật trong hệ quy chiếu đã chọn luôn không đổi ta nói vật đứng yên. Còn nếu toạ độ của các điểm thay đổi theo thời gian ta nói vật chuyển động trong hệ quy chiếu.

4. Khảo sát về mặt chuyển động của một điểm hay của một vật rắn là tìm cách xác định vị trí của điểm ấy đối với hệ quy chiếu đã chọn ở mỗi thời điểm, đồng thời tìm cách mô tả chuyển động ấy theo thời gian. Muốn vậy, người ta dùng những khía niệm sau đây:

a) Thông số xác định vị trí của điểm hay của một vật rắn trong hệ quy chiếu đã chọn.

b) Phương trình chuyển động của điểm hay vật rắn chuyển động là những biểu thức liên hệ giữa thông số định vị nói trên với thời gian mà ta xem là đối số độc lập.

c) Vận tốc chuyển động là đại lượng biểu thị hướng và tốc độ chuyển động của điểm hay vật rắn ở thời điểm đang xét. Nói chung, vận tốc chuyển động cũng là đại lượng biến thiên theo thời gian.

d) Gia tốc chuyển động là đại lượng biểu thị tốc độ thay đổi của vận tốc chuyển động (phương chiều, độ lớn) theo thời gian. Gia tốc chuyển động cũng là hàm của thời gian.

5. Động học được chia làm hai phần chính:

- Động học điểm
- Động học vật rắn

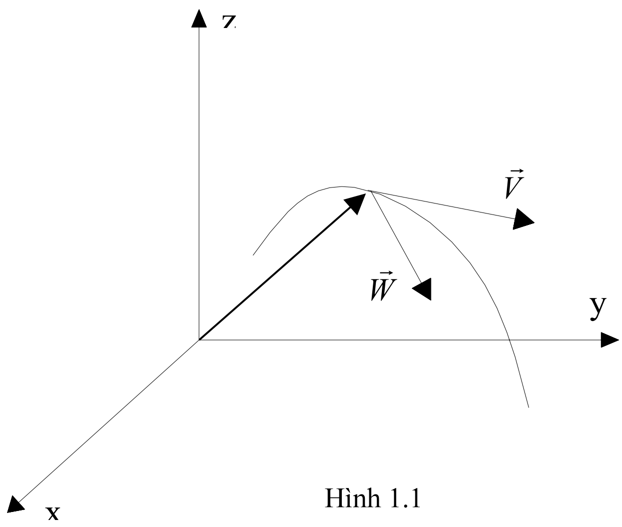
§2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

A- Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp véctơ (vector)

1. Phương trình chuyển động của điểm:

Xét chuyển động của điểm M trong hệ quy chiếu Oyxz. Rõ ràng là vị trí của M được xác định duy nhất bằng véctơ định vị $\vec{r} = \vec{OM}$, ta gọi là véctơ bán kính của động điểm trong hệ quy chiếu ấy.

Khi động điểm chuyển động, véctơ sẽ biến thiên liên tục theo thời gian cả về hướng lẫn độ dài do đó ta viết :



Hình 1.1

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) \quad (1.1)$$

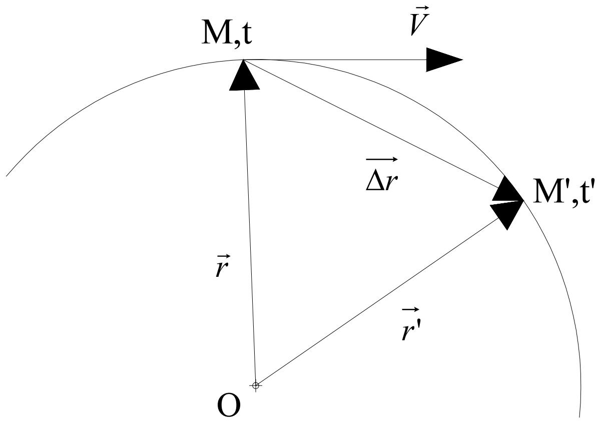
Biểu thức (1.1) là phương trình chuyển động của điểm viết dưới dạng véctơ. Quỹ tích các vị trí của chuyển động điểm trong không gian quy chiếu được gọi là : Quỹ đạo của chuyển động điểm trong hệ quy chiếu ấy.

Phương trình (1.1) cũng chính là phương trình quỹ đạo dưới dạng thông số.

2. Vận tốc chuyển động của điểm :

Giả thuyết tại thời điểm t động điểm M có véc tơ định vị $\vec{r}$, và tại thời điểm t'=t+Δt động điểm ở vị trí M' có véctơ định vị $\vec{r}$.

Véctơ $M\vec{M}'=\vec{r}'-\vec{r}\ =\Delta\vec{r}$ mô tả gần đúng hướng đi và quãng đường đi được của động điểm trong thời gian Δt, gọi là véctơ tốc độ lồi của điểm.



Hình 1.2

Đại lượng $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ được gọi là vận tốc trung bình của động điểm trong thời gian Δt. Kí hiệu $\vec{V}_{TB}$. Nếu Δt càng nhỏ thì độ chính xác càng cao do đó người ta định nghĩa :

Vận tốc tức thời ở thời điểm t của động điểm là véctơ $\vec{V}$ được xác định như sau:

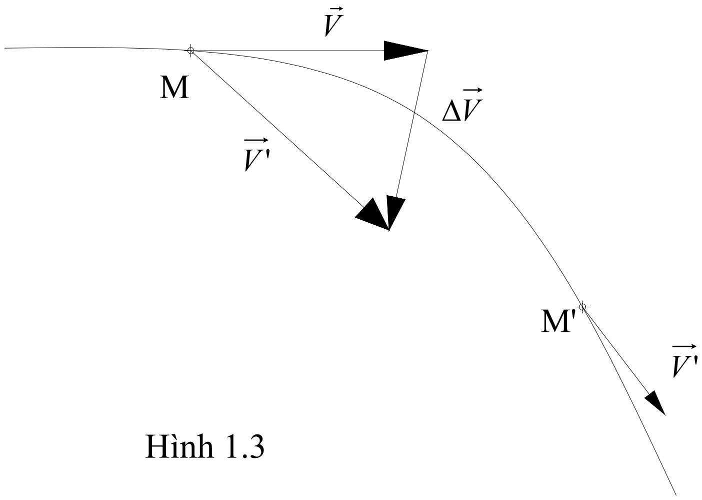
$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{V}_{TB}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}} \qquad (1.2)$$

nghĩa là : Vận tốc tức thời của động điểm là đạo hàm cấp một theo thời gian của véctơ định vị của động điểm (Ký hiệu $\dot{\vec{r}}$ (t)-từ nay về sau ta hiểu là đạo hàm theo thời gian)

Về mặt hình học khi tới giới hạn, vận tốc tức thời $\vec{V}$ phải hướng tiếp tuyến với quỹ đạo của động điểm tại M và thuận theo chiều chuyển động qua đó của động điểm. Đơn vị chính của vận tốc là m/s (mét/giây).

3. Gia tốc của động điểm :

Nói chung, véctơ $\vec{V}$ biến đổi cả về hướng và độ lớn theo thời gian $\vec{V}=\vec{V}$ (t). Đại lượng : $\dfrac{d\vec{V}}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ cho ta biết tốc độ biến đổi của véctơ $\vec{V}$ cả về phương chiều lẫn độ lớn tại thời điểm đang xét, nghĩa là nó



Hình 1.3

đặc trưng cho tốc độ đổi hướng và đổi hướng và đôi độ nhanh của chuyển động của điểm. Vì vậy, người ta định nghĩa:

Gia tốc tức thời $\vec{W}$ của động điểm là đại lượng véctơ bằng đạo hàm cấp một theo thời gian của vận tốc:

$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} \qquad (1.3)$$

Về mặt hình học, chú ý rằng véctơ $\Delta\vec{V}$ bao giờ cũng hướng vào bề lõm của quỹ đạo.

Đơn vị chính để tính gia tốc là m/s^2

4. Một số tính chất được suy ra trực tiếp từ biểu thức cảu vận tốc và gia tốc:

a) Nếu $\vec{V} \wedge \vec{W}$ đồng nhất triệt tiêu thì $\vec{V}$ và $\vec{W}$ luôn luôn cùng phương. Do đó $\vec{V}$ có phương không đổi nên chuyển động của điểm là chuyển động thẳng.

- Nếu $\vec{V} \wedge \vec{W}$ không đồng nhất triệt tiêu thì chuyển động là chuyển động cong vì khi ấy $\vec{V}$ đổi phương.

b) Tính đều hay biến đổi của chuyển động

Chuyển động là đều hay biến đổi tuỳ theo giá trị vận tốc V là không đổi hay tăng hoặc giảm theo thời gian.

- Nếu trị số vận tốc tăng hoặc giảm theo thời gian trong một khoảng thời gian nào đó ta nói điểm chuyển động nhanh hoặc chậm dần trong khoảng thời gian đó.

Chú ý rằng sự thay đổi V^2 đặc trưng cho sự thay đôi độ lớn của V và ta có:

$$V^2 = (\vec{V})^2, \ \frac{dV^2}{dt} = \frac{d(\vec{V})^2}{dt} = 2\vec{V}.\vec{W}$$

Ta rút ra kết luận như sau:

- Nếu $\vec{V}.\vec{W} \equiv 0$ thì động điểm chuyển động đều trên quỹ đạo của nó (có thể thẳng hay cong)

- Nếu $\vec{V}.\vec{W} \neq 0$ thì chuyển động biến đổi, cụ thể :

+ $\vec{V}.\vec{W} > 0$: Nhanh dần

+ $\vec{V}.\vec{W} < 0$: Chậm dần

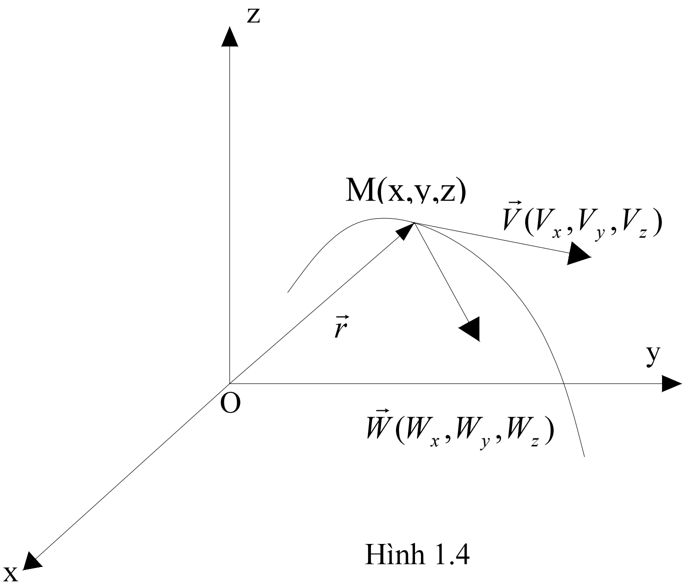
B- Khảo sát chuyển động của điểm bằng toạ độ Descartes

1. Phương trình chuyển động của động điểm:

Xét chuyển động của điểm trong toạ độ Descartes Oxyz. Vị trí của điểm được xác định bởi các toạ độ x,y,z. Vì vậy:

Phương trình chuyển động của điểm sẽ là :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (1.4)$$



Hình 1.4

(1.4) cũng chính là phương trình quỹ đạo viết dưới dạng tham số.

2. Vận tốc chuyển động của điểm :

Gọi i, j, k là các véctơ đơn vị trên ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz khi ấy :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ trong đó } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ là hằng.}$$

Ta có :
$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

Vậy : $\begin{cases} V_x = \dot{x} \\ V_y = \dot{y} \\ V_z = \dot{z} \end{cases}$ (1.5) Vận tốc của động điểm trong hệ Descartes từ (1.5) có thể xác định giá trị và hướng của $\vec{V}$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\cos(Ox, \vec{V}) = \frac{V_x}{V}, \ \cos(Oy, \vec{V}) = \frac{V_y}{V}, \ \cos(Oz, \vec{V}) = \frac{V_z}{V}$$

3.Gia tốc chuyển động của điểm :

Tương tự như đối với vận tốc, $\vec{W} = \vec{V} = \vec{r}$ ta có:

$$\begin{cases} W_x = \dot{V}_x = \ddot{x} \\ W_y = \dot{V}_y = \ddot{y} \\ W_z = \dot{V}_z = \ddot{z} \end{cases}$$ (1.6) Gia tốc trong toạ độ Descartes từ (1.6) ta cũng xác định giá trị và hướng W như sau :

$$\mathrm{W} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$c\mathrm{os}(\mathrm{Ox},\vec{W}) = \frac{W_x}{W},\ c\mathrm{os}(\mathrm{Oy},\vec{W}) = \frac{W_y}{W},\ c\mathrm{os}(\mathrm{Oz},\vec{W}) = \frac{W_z}{W}$$

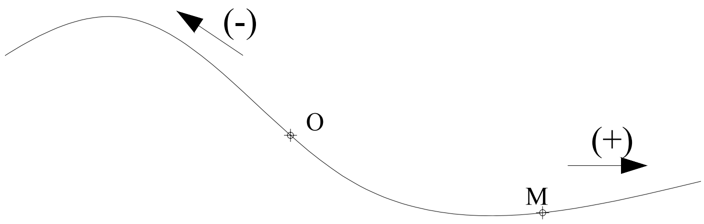
Cuối cùng dựa vào hình chiếu của vận tốc $\vec{V}$ và gia tốc $\vec{W}$ ta có thể mô tả các đặc điểm thẳng hay cong, đều hay biến đổi đều của chuyển động điểm.

C- Khảo sát chuyển động của điểm bằng toạ độ tự nhiên.

1. Phương trình chuyển động :

Khi đã biết quỹ đạo chuyển động của điểm ta thường khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tạo độ tự nhiên.

Chọn điểm O tuỳ ý trên quỹ đạo làm gốc và xem quỹ đạo như một trục toạ độ cong rồi định ra trên nó một chiều dương.



Hình 1.5

Gọi OM=s là toạ độ cong của động điểm trên quỹ đạo. Rõ ràng s chính là thông số định vị của điểm M trên quỹ đạo. Vậy phương trình chuyển động của M có dạng :

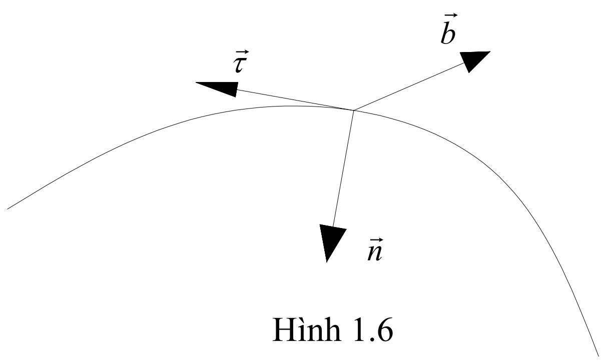
$$\overline{s} = \overline{s}(t)$$

2. Một số tính chất hình học của quỹ đạo :

a) Hệ toạ độ tự nhiên

Hệ toạ độ tự nhiên là hệ ba trục vuông góc được xác định như sau:

Trục tiếp tuyên tại M có hướng dương đã chọn trùng với hướng dương đã chọn trên quỹ đạo, véctơ đơn vị trên trục này ký hiệu $\vec{\tau}$.



Hình 1.6

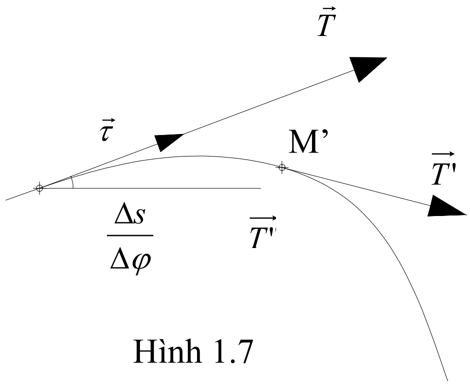
Lấy cung vô cùng bé $d\overline{s} = \overline{MM'}$ nằm trong mặt phẳng duy nhất qua Mτ và chứa tiếp tuyến M. Mặt phẳng π tại M được gọi là mặt phẳng mật tiếp. Trong mặt phẳng π ta điểm M kẻ pháp tuyến của quỹ đạo và định hướng dương vào bề mặt lõm của quỹ đạo. Pháp tuyến ấy gọi là pháp tuyến chính tại M. Kí hiệu là $\vec{n}$

Trục vuông góc với mặt phẳng gọi là trục trùng pháp tuyến, ký hiệu là $\vec{b}$ là véctơ đơn vị, và chọn $\vec{b}$ sao cho Mτnb là một tam diện thuận.

b) Độ cong và bán kính cong của quỹ đạo tại M

Độ cong của quỹ đạo tại M là một số dương K :

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$



Hình 1.7

Nếu quỹ đạo là đường tròn thì : $\frac{1}{K} = \left|\frac{ds}{d\varphi}\right| = R$ là bán kính của đường tròn.

Suy rộng ra đối với đường cong bất kỳ $\frac{1}{K}$ = ρ gọi là bán kính cong của quỹ đạo.

3. Xác định vận tốc và gia tốc của chuyển động :

a) Xác định hướng vận tốc của điểm M

Vì hướng theo tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm M, nên ta có thể viết :

$$\vec{V} = V_\tau.\vec{\tau} \qquad \text{(a)}$$

Mặt khác ta cũng có :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt}$$

nhưng : $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}$

Vậy : $\vec{V} = \frac{ds}{dt}.\vec{\tau}$ (b)

Từ (a) và (b) ta có thể viết :

$$\left|\vec{V}\right| = V = \left|V_\tau\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\dot{s}\right|$$

Xét quan hệ giữa V_τ và $\frac{ds}{dt}$:

- Khi M chuyển động theo chiều dương thì $\vec{V}$ và $\vec{\tau}$ cùng chiều, nghĩa là $V_\tau>0$ khi ấy $\bar{s}$ tăng theo thời gian có nghĩa là $\dot{s}>0$. vậy V_τ và $\dot{s}$ cùng dấu.
- Khi M chuyển động theo chiều âm thì $\vec{V}$ và $\vec{\tau}$ trái chiều, nên $V_\tau<0$ khi ấy $\bar{s}$ giảm theo thời gian nghĩa là $\dot{s}<0$. Vậy V_τ và $\dot{s}$ cùng dấu.

Vì vậy ta viết được $\vec{V} = V_\tau.\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \dot{s}.\vec{\tau}$

Giá trị $V = \left|V\right| = \left|\dot{s}\right|$ cho tốc độ chuyển động, còn dấu của V_τ cho biết chiều chuyển động của điểm thuận hay ngược với chiều dương đã chọn trên quỹ đạo.

b) Xác định gia tốc W của M:

Ta viết : $\vec{W} = W_\tau.\vec{\tau} + W_n.\vec{n} + W_b.\vec{b}$ trong hệ toạ độ Mτnb, cần phải tìm các giá trị W_τ, W_n, W_b theo $\bar{s}$

Từ (1.3) và (1.7) ta có:

$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \frac{d}{dt}(V_\tau.\vec{\tau}) = \dot{V}_\tau.\vec{\tau} + V_\tau.\dot{\vec{\tau}}$$

Nhưng trong hình học vi phân người ta đã chứng minh rằng :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \qquad \text{vì vậy :} \qquad \dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}.\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{\rho}.V_\tau$$

Do đó ta có : $\vec{W} = \dot{V}.\vec{\tau} + (V_\tau)^2.\frac{\vec{n}}{\rho} = \dot{V}_\tau.\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}.\vec{n}$

Từ đó suy ra : $W_\tau = \dot{\vec{V}}_\tau = \ddot{s}$, $W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\dot{s}^2)}{\rho}$, $W_b = 0$

Vậy: gia tốc của M ở vị trí đang xét được phân tích ra hai thành phần : gia tốc tiếp tuyến W_τ và gia tốc pháp tuyến W_n.

4. Phán đoán tính chất của chuyển động :

- Chuyển động đều là chuyển động trong đó $V=V_0$; có nghĩa là $W_\tau = \dot{V}_\tau = 0$. Khi đó $s = s_0 + V_0.t$, trong đó s_0 là toạ độ tự nhiên ban đầu của động điểm.
- Chuyển động biến đổi đều là chuyển động trong đó gia tốc tiếp $W_\tau = a = const$. Từ đó suy ra : $V_\tau = V_0 + at$, V_0 là vận tốc đều của chuyển động, phương trình chuyển động có dạng : $s = s_0 + V_0t + \frac{at^2}{2}$, s_0 là toạ độ tự nhiên ban đầu.
- Chuyển động biến đổi khi:

$$\vec{V}.\vec{W} = (V_\tau.\vec{\tau}).(W_\tau.\vec{\tau} + W_n.\vec{n}) = V_\tau.W_\tau \neq 0$$

Nếu : $V_\tau.W_\tau > 0$ Chuyển động nhanh dần

$V_\tau.W_\tau < 0$ Chuyển động chậm dần

Ví dụ 1: (Chuyển động Xyclôít)

Xét chuyển động lăn không trượt của đường tròn trên đường thẳng. Giả sử vận tốc của tâm đường tròn đó là v(t) và bán kính cảu nó là R.

a. Lập phương trình chuyển động của một điểm M bất kỳ trên đường tròn ấy.

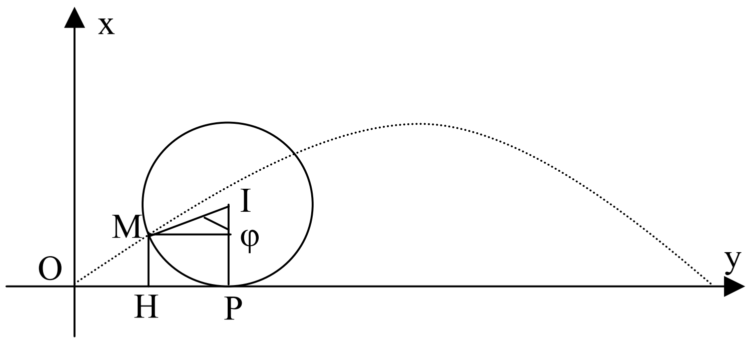
b. Khảo sát vận tốc và gia tốc của M những lúc nó ở trên đường thẳng tựa của đường tròn

c. Giả thuyết $V = V_0 = const$, khảo sát tính biến đổi chuyển động trên một cung quỹ đạo ứng với một vòng lăn của đường tròn.

Bài giải :

a. Lập phương trình chuyển động :

Khảo sát chuyển động của điểm M trên đường tròn, rõ ràng rất nhiều lần M vật chạm với đường tựa Ox. Ta chọn ngay một điểm như thế làm gốc O và bắt đầu khảo sát từ ấy.



Gọi φ = $(\vec{IM}, \vec{IP})$. Tìm sự liên hệ :

$$x = x(\varphi),\ y = y(\varphi),\ \varphi = \varphi(t)$$

trong đó x, y là tọa độ của M. Ta có : $x_M = \overline{OP} - \overline{HP}$

nhưng vì vòng tròn lăn không trượt nên : OP = PM = Rφ.

Vậy : $$\begin{aligned} x_M &= \overline{OP} - \overline{HP} = R\varphi - R\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi) \\ y_M &= \overline{PI} - \overline{KI} = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

cũng vì vòng tròn lăn không trượt nên:

$$OP = \int_0^t V(t).dt \qquad mà \quad OP = R\varphi$$

Vậy $$\varphi = \frac{1}{R}\int_0^t V(t).dt$$

Do đó phương trình chuyển động của điểm M được viết như sau:

$$\begin{aligned} x &= R(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= R(1 - \cos\varphi) \\ \varphi &= \frac{1}{R}\int_0^t V(t).dt \end{aligned}$$

Quỹ đạo của điểm M gồm những đường cong xyclôít tuần hoàn với chu kỳ là 2π cho nên ta chỉ xét chuyển động của nó trong 0 ≤ φ ≤ 2π.

b. Biểu thức vận tốc và gia tốc của điểm:

$$\vec{V}\begin{cases} V_x = \dot{x} = R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi) \\ V_y = \dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$$

$$\vec{W}\begin{cases} W_x = \ddot{x} = R\dot{\varphi}^2\sin\varphi + R\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi) \\ W_y = \ddot{y} = R\dot{\varphi}^2\cos\varphi + R\ddot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$$

M ở vị trí chạm mặt đường $\varphi = 0$ hoặc $\varphi = 2\pi$ thì $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$.

Vậy :

$$\vec{V}\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{cases} \qquad \vec{W}\begin{cases} W_x = 0 \\ W_y = R\dot{\varphi}^2 > 0 \end{cases}$$

Như vậy tức là $\vec{W} \neq 0$ và hướng vuông góc đường tựa của vòng tròn. Do vậy, ở những vị trí như thế M dừng tức thời và khởi động lại.

c. Trường hợp V = V_O = const.

$$\varphi = \frac{1}{R}\int_0^t V_0 dt = \frac{1}{R}V_0 t \qquad \text{vậy } \dot{\varphi} = \frac{V_0}{R},\ \ddot{\varphi} = 0$$

Do đó:

$$\vec{V}\begin{cases} V_x = V_0(1-\cos\varphi) \\ V_y = V_0\sin\varphi \end{cases} \qquad \vec{W}\begin{cases} W_x = \dfrac{V_0^{\,2}}{R}\sin\varphi \\ W_y = \dfrac{V_0^{\,2}}{R}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{V}.\vec{W} = V_x.W_x + V_y.W_y = \frac{V_0^{\,2}}{R}\left[\sin\varphi(1-\cos\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi\right] = \frac{V_0^{\,2}}{R}\sin\varphi$$

$$\vec{V}.\vec{W} = \begin{cases} > 0 & \text{trong khoảng } 0<\varphi<\pi \text{ chuyển động nhanh dần} \\ < 0 & \text{trong khoảng } \pi<\varphi<2\pi \text{ chuyển động chậm dần} \end{cases}$$

CHƯƠNG II
CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

Chuyển động cơ bản của vật rắn : chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay.

Sau này chúng ta sẽ thấy rằng mọi chuyển động của vật rắn đều đưa về hai chuyển động trên.

§1. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN

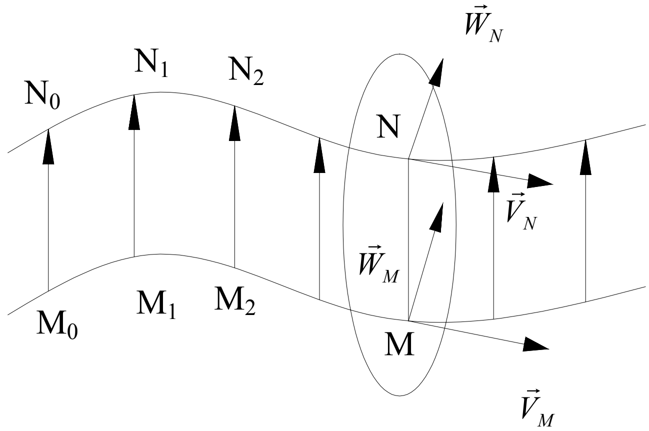
1. Định nghĩa : Chuyển động tịnh tiến của vật rắn là chuyển động trong đó mọi đường thẳng thuộc vật rắn đều luôn luôn không đổi phương.

2. Tính chất của chuyển động :

Định lý : Trong chuyển động tịnh tiến các điểm thuộc vật rắn chuyển động giống hệt nhau. Nghĩa là :

Quỹ đạo của chúng là những đường chồng khít lên nhau được và ở mỗi điểm chúng có cùng vận tốc và gia tốc.

Chứng minh: Chỉ cần khảo sát hai điểm bất kỳ thuộc vật chẳng hạn hai điểm M, N là đủ.



Xét vectơ $\overrightarrow{MN}$ vật chuyển động tịnh tiến nên $\overrightarrow{MN}$ không đổi hướng. Ngoài ra MN=const. Vậy vectơ $\overrightarrow{MN}$ không đổi trong chuyển động.

Từ đó suy ra rằng các tứ giác M_0N_0-M_1N_1, $M_1N_1M_2N_2$ đều là những hình bình hành, vì vậy ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{N_1N_2}$, $\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{N_2N}$, ... rõ ràng hai đường gãy $M_0M_1M_2M$..., $N_0N_1N_2N$,.. chồng khít lên nhau và do đó quỹ đạo của hai điểm M và N có thể chồng khít lên nhâu được .

Vì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ nên ta có :

$$\vec{V}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{NN'}}{\Delta t} = \vec{V}_N \text{, nghĩa là : } \vec{V}_M = \vec{V}_N$$

Suy ra : $\vec{W}_M = \vec{W}_N$

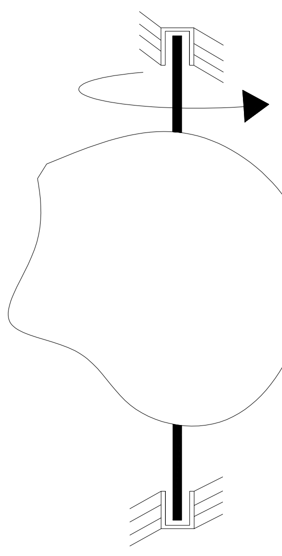
Từ định lý này suy ra :

- Việc khảo sát chuyển động của vật rắn chuyển động tịnh tiến được thay thế bằng việc khảo sát chuyển động của một điểm bất kỳ của nó.

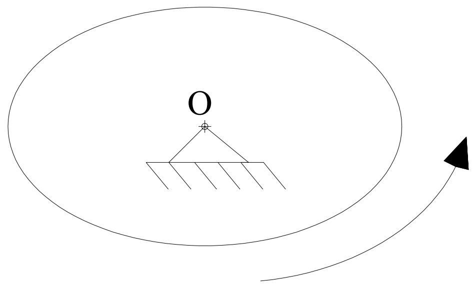
-Vận tốc $\vec{V}$ và gia tốc $\vec{W}$ chung cho tất cả các điểm của vật rắn trong chuyển động tịnh tiến được gọi là vận tốc và gia tốc chuyển động tịnh tiến. Chúng là những véctơ tự do.

§2. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

Định nghĩa : Nếu trong quá trình chuyển động, vật rắn có hai điểm luôn cố định, ta nói vật rắn có chuyển động quay quanh trục cố định qua hai điểm đó.



Mô hình không gian

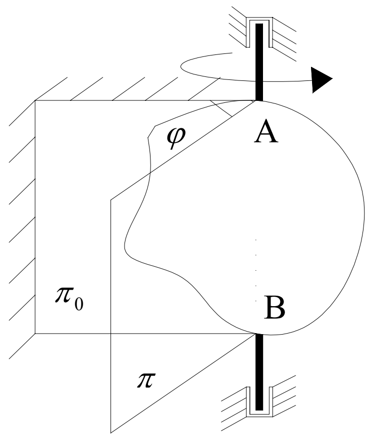


Mô hình phẳng

Mô hình của nó được biểu diễn :

A. Khảo sát chuyển động quay của cả vật rắn:

1. Phương trình chuyển động:



Dựng hai mặt phẳng π_0, π qua trục quay AB trong đó π_0 là mặt phẳng gắn với vật. Định chiều quay dương của vật. Vị trí của π xác định vị trí của vật. Gọi $\overline{\varphi}$ là góc đại số giữa hai mặt phẳng (π_0, π). Ta có thể coi $\overline{\varphi}$ là thông số định vị trí của vật quay quanh trục AB.

Vậy phương trình chuyển động của vật là:

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t) \qquad (2.1)$$

2. Vận tốc góc và gia tốc góc của vật chuyển động :

Giả thuyết trong thời gian Δt góc định vị $\overline{\varphi}$ biến thiên một lượng $\Delta\overline{\varphi}$ thì vận tốc góc trung bình là:

$$\overline{\omega}_{tb} = \frac{\Delta\overline{\varphi}}{\Delta t}$$

Vận tốc góc tức thời :

$$\overline{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\omega}_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \dot{\overline{\varphi}} \qquad (2.2)$$

Như vậy: Vận tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định là đạo hàm cấp một theo thời gian của góc định vị của vật ấy.

Dấu của $\overline{\omega}$ cho biết chiều quay của vật quay quanh trục, vì nếu $\overline{\omega}>0$ nghĩa là $\overline{\varphi}$ tăng theo thời gian và vật quay theo chiều dương.

Ngược lại nếu $\overline{\omega}<0$ thì vật quay theo chiều âm.

Giá trị $|\overline{\omega}| = \omega$ gọi là tốc độ góc của vật, nó phản ánh tốc độ quay quanh trục. Đơn vị của nó là rad/s hay s^{-1}.

Trong kỹ thuật người ta thường dùng tốc độ góc bằng đơn vị vòng/phút. Do đó có mối quan hệ giữa hai đơn vị này là:

$$\omega_{rad/s} = \frac{\pi}{30} n \text{ vòng/phút}$$

b) Gia tốc góc của vật:

Vì vận tốc góc của vật cho biết chiều quay và tốc độ quay của vật nên sự biến thiên của nó theo thời gian phản ánh tính biến đổi của chuyển động đó vì vậy ta định nghĩa:

Gia tốc góc của vật, kí hiệu $\bar{\varepsilon}$ là đạo hàm cấp một theo thời gian của vận tốc góc hay bằng đạo hàm cấp hai của một góc quay $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\bar{\varphi}}$

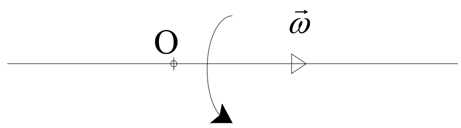
Đơn vị để tính gia tốc góc : rad/s^2 hay s^{-2}

3. Véctơ vận tốc góc và véctơ gia tốc góc:

a) Véctơ vận tốc góc:

Véctơ vận tốc góc kí hiệu $\vec{\omega}$ được xác định như sau:

$\vec{\omega}$ nằm trên trục quay của vật, sao cho nhìn từ ngọn đến gốc véctơ $\vec{\omega}$ sẽ thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ và $|\vec{\omega}| = \omega$. Nếu gọi $\vec{k}$ là véctơ đơn vị trên trục quay, ta có:



$$\vec{\omega} = \bar{\omega}.\vec{k} \qquad (2.3)$$

b) Véctơ gia tốc góc:

Véctơ gia tốc góc của vật được định nghĩa như sau :

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Kết hợp (2.3) và (2.4) ta suy ra được :

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}.\vec{k} = \bar{\varepsilon}.\vec{k} \qquad (2.4)$$

4. Phán đoán tính chất của chuyển động quay quanh trục cố định:

- Chuyển động quay được gọi là đều nếu tốc độ góc là không đổi theo thời gian, $\omega = \omega_0 = const$.
- Nếu tốc độ góc ω thay đổi thì chuyển động quay được gọi là biến đổi, nếu ω tăng lên thì chuyển động quay nhanh dần, nếu ω giảm thì chuyển động quay chậm dần.

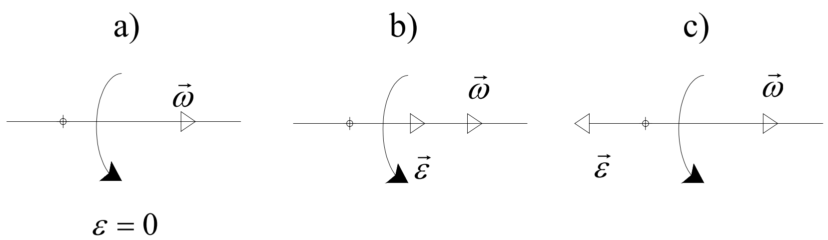
Chú ý rằng sự biến đổi của giá trị ω được đặt trưng bởi sự biến đổi của ω^2 và $\omega^2=\vec{\omega}^2$ nên để nhận xét tính chất chuyển động ta có thể xét dấu của đạo hàm $\dfrac{d(\vec{\omega})^2}{dt}$.

Ta có : $\dfrac{d(\vec{\omega})^2}{dt} = 2.\vec{\omega}.\dot{\vec{\omega}} = 2.\vec{\omega}.\vec{\varepsilon}$

Vậy ta đi đến kết luận :

a) Nếu ε ≡0 vật quay đều.
- Nếu ε ≠0 vật quay biến đổi.

b) Nếu $\vec{\omega}.\vec{\varepsilon} = \overline{\omega}.\overline{\varepsilon}$ >0 : Nhanh dần.



c) Nếu $\vec{\omega}.\vec{\varepsilon} = \overline{\omega}.\overline{\varepsilon}$ <0 : Chậm dần.

- Nếu ε=const chuyển động quay biến đổi đều khi ấy:

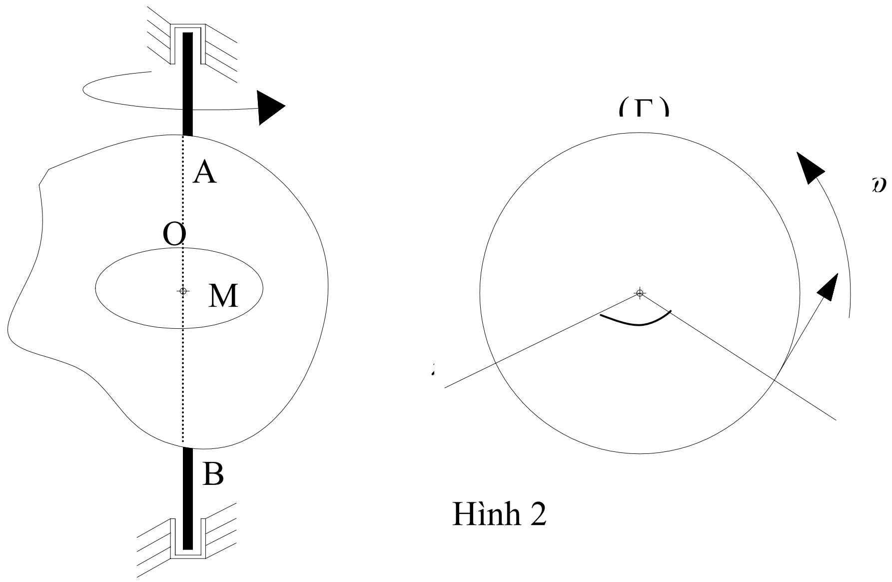
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}.t \ , \ \overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0 + \overline{\omega}_0.t + \overline{\varepsilon}.\frac{t^2}{2}$$

và cùng thoả mãn với điều kiện trên là: $\vec{\omega}.\vec{\varepsilon} > 0$ chuyển động quay nhanh dần đều, ngược lại $\vec{\omega}.\vec{\varepsilon} < 0$ chuyển động chậm dần đều.

B. Khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật rắn :

1. Quĩ đạo và phương trình chuyển động:

Xét một điểm M bất kỳ thuộc vật. Rõ ràng là mỗi điểm thuộc vật chuyển động theo quĩ đạo đường tròn tâm O trên trục quay và có bán kính OM. Với OM là khoảng cách từ M đến trục quay.



Hình 2

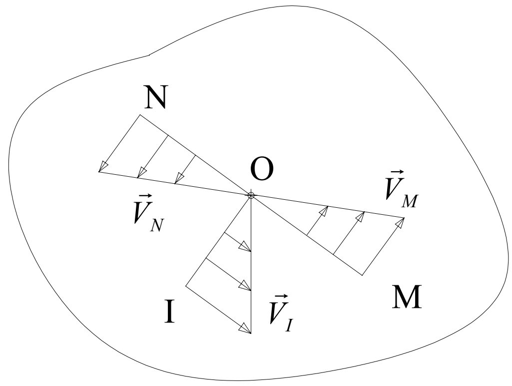
Gọi A là giao điểm của mặt phẳng π_0 với đường tròn quỹ đạo (Γ) của M, ta có góc AÔM = $\overline{\varphi}$. Lấy $\overline{AM} = \overline{s}$ là thông số cố định vị của M trên quĩ đạo và chọn chiều dương tính cung thuận với chiều dương tính góc ta có phương trình chuyển động của điểm M như sau :

$$\overline{s} = \overline{AM} = R.\overline{\varphi}$$

2. Vận tốc và gia tốc của điểm thuộc vật :

a) Vận tốc của điểm thuộc vật :

Ta đã biết rằng vận tốc của một điểm nằm theo tiếp tuyến với hướng quỹ đạo của điểm ấy, vì vậy ở đây $\vec{V}$ vuông góc với OM và hướng theo chiều quay của vật. Giá trị của vận tốc được xác định bởi biểu thức :



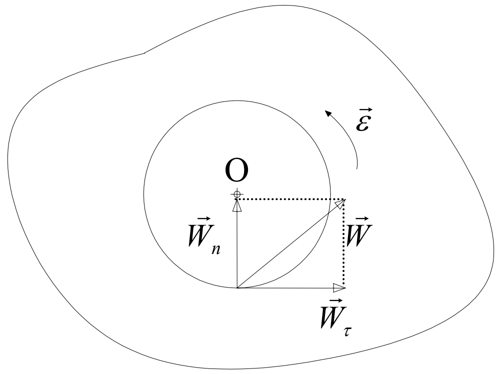
Hình 2.7

$$V = |\dot{s}| = \left|R.\frac{d\overline{\varphi}}{dt}\right| = |R.\overline{\omega}| = R.\omega$$

Như vậy, vận tốc của các điểm thuộc vật rắn quay quanh trục cố định được phân bố quanh trục quay theo quy tắc tam giác vuông đồng dạng. Từ kết luận trên ta có thể viết :

$$\frac{V_M}{OM} = \frac{V_N}{ON} = \frac{V_I}{OI} = ... = \omega$$

ω là hệ số đồng dạng.



Hình 2.8

b) Gia tốc của điểm thuộc vật :

Ta cần biết điểm M chuyển động tròn và nói chung là không đều, nên

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n$$

Ta cần xác định các thành phần $\vec{W}_\tau$, $\vec{W}_n$ và gia tốc toàn phần $\vec{W}$.

- Gia tốc pháp tuyến $\vec{W}_n$ hướng vào tâm O của quĩ đạo có giá trị :

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{R^2.\omega^2}{R} = R\omega^2$$

- Gia tốc tiếp tuyến $\vec{W}_\tau$ hướng cùng hay ngược ciều với vận tốc $\vec{V}$ tuỳ theo vật quay nhanh hay chậm dần, có giá trị :

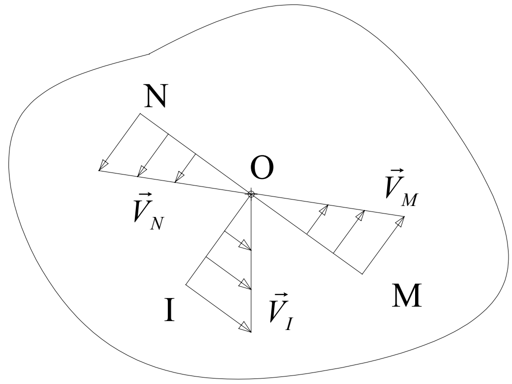
$$W_\tau = |\dot{V}| = \left|\frac{d}{dt}(R.\omega)\right| = R|\dot{\omega}| = R.\varepsilon$$

- Gia tốc toàn phần $\vec{W}$ tạo với $\overrightarrow{OM}$ một góc α mà tgα là :

$$tg\alpha = \frac{W\tau}{W_n} = \frac{R.\varepsilon}{R.\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

có giá trị :

$$W = \sqrt{W_\tau^{\ 2} + W_n^{\ 2}} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

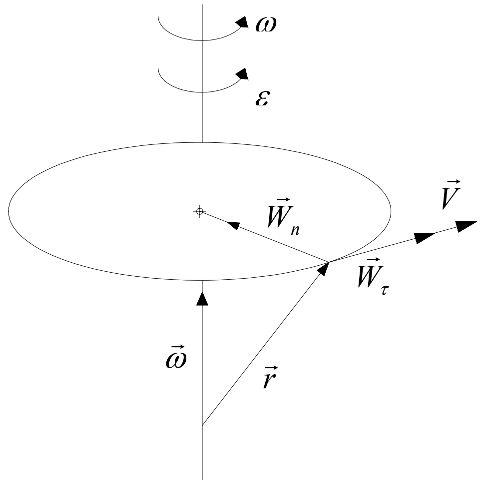


Hình 2.9

Từ kết quả của các điểm thuộc vật rắn chuyển động quay quanh trục cố định được phân bố theo quy tắc tam giác đồng dạng với hệ số tỷ lệ là : $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ ta có thể viết được :

$$\frac{W_M}{OM} = \frac{W_N}{ON} = \frac{W_I}{OI} = ... = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

c) Biểu diễn các véctơ $\vec{V}$ và $\vec{W}$ qua các véctơ $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$:



Hình 2.9

Lấy một điểm gốc bất kỳ trên trục quay của vật và đặt $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Dựa vào các kết quả trên ta có thể viết :

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}\ ,\ \ \vec{W}_\tau = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}\ ,\ \ \vec{W}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

<u>Ví dụ :</u> Trong giai đoạn lấy đà, bánh đà quay theo qui luật : $\varphi(t) = \frac{27}{32}t^3$. Hãy xác định vận tốc và gia tốc của điểm M cach trục quay một khoảng h = 0,8m khi gia tốc tiếp tuyến tại điểm đó bằng gia tốc pháp tuyến của nó.

<u>Bài giải:</u> Vận tốc góc và gia tốc góc của bánh đà :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{27}{32}t^2, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{27}{16}t$$

Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của điểm đang xét

$$W_\tau = h.\varepsilon, \qquad W_n = h.\omega^2$$

Gọi thời điểm lúc $W_\tau = W_n$ là t_1 khi đó $\varepsilon_1 = \omega_1^{\ 2}$

Hay : $$\frac{27}{16}t_1 = \left(\frac{27}{32}\right)^2 t_1^{\;4}$$

Vậy : $$t_1^{\;3} = \frac{64}{27} \quad và \quad t_1 = \frac{4}{3} \quad (s)$$

Thay t_1 vào biểu thức và ta có :

$$\omega_1 = \frac{3}{2} \quad (rad/s) \qquad \varepsilon_1 = \frac{9}{4} \quad (rad/s^2)$$

Từ đây ta có : $V_1 = h.\omega_1 = 1,2$ m/s

$$W_1 = h\sqrt{\varepsilon_1^{\;2} + \omega_1^{\;4}} = 1,8\sqrt{2} = 2,54 \quad m/s^2$$

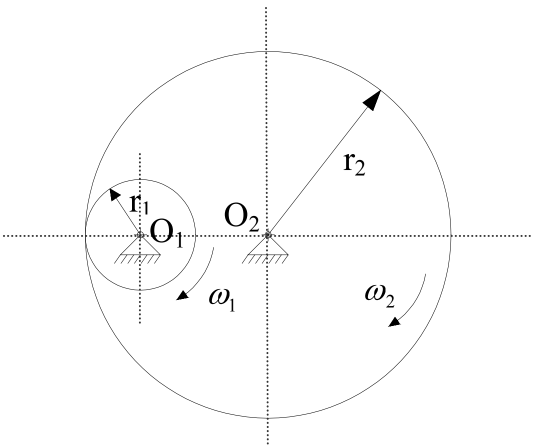
C. Truyền động đơn giản:

Trong một máy hay một tổ hợp máy thường gắn ba phần : động cơ, cơ cấu truyền động, bộ phận làm việc.

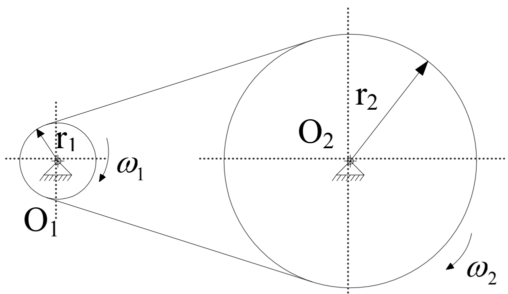
Ở đây bước đầu ta làm quen với một vài cơ cấu truyền động đơn giản nhằm biến chuyển động quay quanh một trục cố định thành chuyển động quay quanh một trục cố định khác; biến chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến; biến chuyển động tịnh tiến thành chuyển động quay....

1. Truyền động bằng cơ cấu bánh răng, đai truyền, xích :

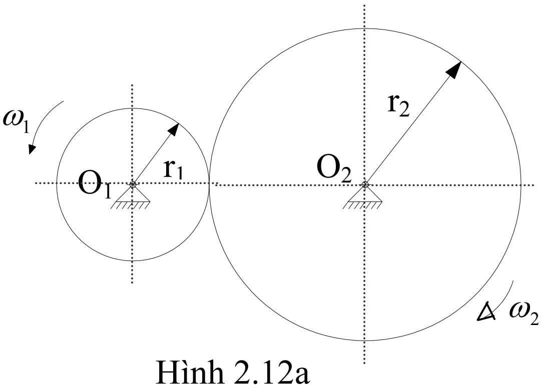
Truyền các chuyển động quay giữa hai trục cố định song song nhau, người ta dùng cơ cấu bánh răng, đai truyền, xích.



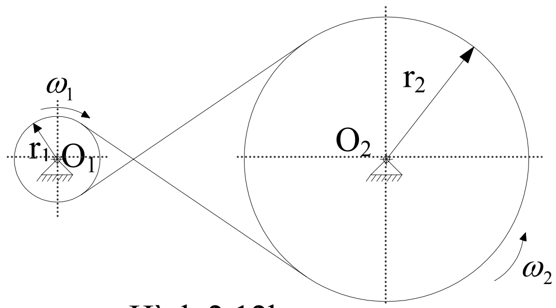
Hình 2.11a



Hình 2.12a



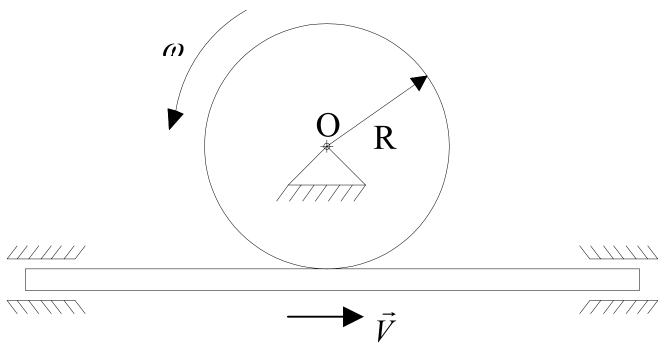
Hình 2.12a



Hình 2.12b

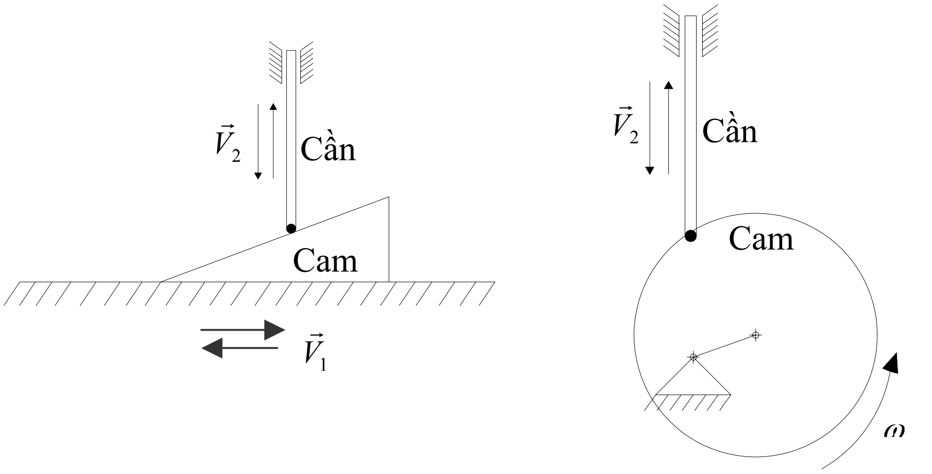
2. Truyền động bằng cơ cấu răng - thanh răng :

Để truyền chuyển động giữa một vật quay và một vật tịnh tiến người ta sử dụng cơ cấu bánh răng-thanh răng hoặc cơ cấu bánh-thanh ma sát.



3. Truyền động bằng cơ cấu cam :

Truyền chuyển động quay thành chuyển động tinh tiến hoặc chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến người ta sử dụng cơ cấu cam.



Hình 2.14

CHƯƠNG III

CHUYỂN ĐỘNG TỔNG HỢP CỦA ĐIỂM

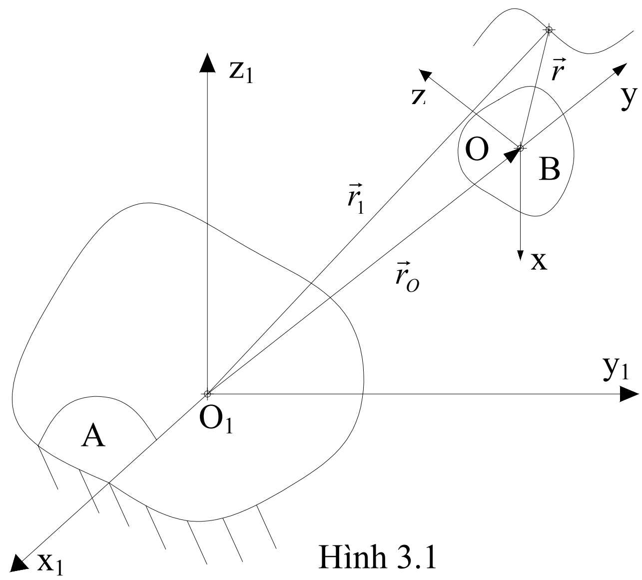
Trên đây ta đã xét chuyển động của điểm hay vật rắn đối với hệ quy chiếu cố định. Ở chương này ta xét chuyển động của điểm so với hệ quy chiếu đang chuyển động trong hệ quy chiếu khác đã chọn làm hệ quy chiếu cố định. Nhiều bài toán trong thực tế kỹ thuật đã được giải quyết với cách đặt vấn đề như vậy. Chẳng hạn, trong bài toán bắn con tàu vũ trụ lên mặt trăng, có thể chọn mặt trăng làm hệ quy chiếu động so với trái đất được chọn làm hệ quy chiếu cố định, hoặc giải thích hiện tượng : trong điều kiện lặng gió, hạt mưa rơi xiên đối với người đang đi tàu xe, ta phải lấy chính tàu, xe là hệ quy chiếu động so với mặt đất cố định...

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Đặt vấn đề :

Cho một động điểm M (hay vật M) chuyển động so với vật B, vật B lại chuyển động so với vật A xem là cố định.

Ta đặt hệ toạ độ $O_1x_1y_1z_1$ với vật A và hệ toạ độ Oxyz với vật B.



Hình 3.1

2. Các định nghĩa :

- Hệ quy chiếu $O_1x_1y_1z_1$ gọi là hệ quy chiếu cố định hay hệ quy chiếu tuyệt đối. Hệ quy chiếu Oxyz là hệ quy chiếu động hay hệ quy chiếu tương đối.

- Chuyển động của M đối với hệ quy chiếu cố định gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc và gia tốc của điểm M trong chuyển động này gọi là vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối ký hiệu $\vec{V}_a$, $\vec{W}_a$ trong đó :

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \quad \vec{W}_a = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}$$

- Chuyển động của điểm M đối với hệ quy chiếu động gọi là chuyển động tương đối. Vận tốc và gia tốc của một điểm M trong chuyển động này gọi là vận tốc tương đối và gia tốc tương đối ký hiệu $\vec{V}_r$, $\vec{W}_r$ trong đó:

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{r}}{dt}, \ \vec{W}_r = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

- Chuyển động của hệ quy chiếu động so với hệ quy chiếu cố định gọi là chuyển động kéo theo.

Trùng điểm của động điểm M ở thời điểm khảo sát là điểm M^* của hệ động trùng với điểm M lúc ấy.

Khi đó ta sẽ có định nghĩa vận tốc và gia tốc của M trong chuyển động kéo theo chính là vận tốc và gia tốc của trùng điểm M*:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{M*}, \vec{W}_e = \vec{W}_{M*}$$

Vì : $\vec{r}_{M^*} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x, y, z không đổi)

Nên ta có :

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{M^*} = \frac{d\vec{r}_{M^*}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{W}_e = \vec{W}_{M^*} = \frac{d^2\vec{r}_{M^*}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$$

Từ các định nghĩa trên ta thường gặp hai loại bài toán sau đây:

a) Bài toán tổng hợp chuyển động : Biết chuyển động tương đối và kéo theo của điểm hay vật rắn, tìm chuyển động tuyệt đối của điểm hay của vật rắn.

b) Bài toán phân tích chuyển động: Biết chuyển động tuyệt đối của điểm hay vật rắn, tìm hai chuyển động thành phần.

Để giải quyết hai bài toán đã nêu trên, ta sẽ tìm mối quan hệ giữa các chuyển động tuyệt đối, tương đối và kéo theo của điểm hay vật bằng những định lý sau đây:

§2. ĐỊNH LÝ HỢP VẬN TỐC

Định lý : Vận tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học véctơ vận tốc theo và vận tốc tương đối của nó tại thời điểm khảo sát : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

Chứng minh : Véctơ định vị của M trong hệ trục toạ cố định là $\vec{r}_1$ ($\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}$) trong đó là véc tơ định vị của M trong hệ trục động Oxyz :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véctơ đơn vị trên hệ toạ độ động (xem hình 1) đạo hàm theo thời gian $\vec{r}_1$.

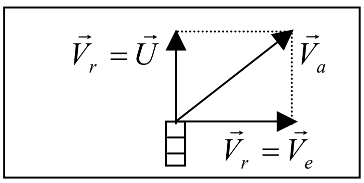
$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Bốn hạng thức đầu của vế phải là vận tốc theo của điểm vì nó là đạo hàm theo thời gian của véctơ định vị của trùng điểm M^* của động điểm M. Ba hạng thức sau là vận tốc tương đối của điểm vì nó là đạo hàm theo thời gian của toạ độ của điểm trong hệ động. Vậy :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad \text{(Định lý đựoc chứng minh)}$$

<u>*Ví dụ :*</u> Một con thuyền sang ngang dòng nước chảy. Vận tốc của dòng nước là $\vec{V}$, vận tốc của con thuyền trên mặt nước là $\vec{U}$ hướng vuông góc với $\vec{V}$. Tìm vận tốc tuyệt đối của con thuyền đối với bờ sông.

<u>*Bài giải:*</u>



Ta xem con thuyền là động điểm, chon hệ quy chiếu động là dòng nước chảy, hệ quy chiếu cố định là bờ sông. chuyển động của con thuyền đối với dòng nước là chuyển động tương đối, vận tốc tương đốicủa con thuyền $\vec{V}_r = \vec{U}$ chuyển động của dòng nước đối với bờ là chuyển động là chuyển động theo, vận tốc theo của con thuyền là $\vec{V}_e = \vec{V}_O$ vì hệ chuyển động tịnh tiến, vận tốc của trùng điểm của con thuyền bằng vận tốc dòng nước. Vậy vận tốc tuyệt đối của con thuyền :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V} + \vec{U}$$

$$V_a = \sqrt{V^2 + U^2}$$

qua hình vẽ ta thấy rằng, đối với bờ sông con thuyền qua sông chéo dòng nước với vận tốc là V_a.

§3. ĐỊNH LÝ HỢP GIA TỐC

1. Định lý : Ở mỗi thời điểm, gia tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học gia tốc theo, gia tốc tương đối và gia tốc Côriôlit

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

Trong đó :

$$\vec{W}_k = 2\left(\frac{dx}{dt}.\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

Chứng minh : Lấy đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc tuyệt đối của điểm ta có gia tốc tuyệt đối:

$$\vec{W}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}$$

$$\vec{W}_a = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$

$$\vec{W}_a = \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\right) +$$

$$+2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

Bốn hạng thức đầu tiên là gia tốc trùng điểm vì nó là đạo hàm cấp hai theo thời gian của véctơ định vị của trùng điểm đối với hệ trục cố định. Theo định nghĩa nó là gia tốc theo của động điểm. Ba hạng thức tiếp theo là gia tốc tương đối của động điểm vì nó là đạo hàm cấp hai theo thời gian của toạ độ của điểm trong hệ trục động, biểu thức cuối cùng được gọi là gia tốc Côriôlit, ký hiệu $\vec{W}_k$.

2. Biểu thức gia tốc Côriôlit :

a) Nếu hệ toạ độ động Oxyz chuyển động tịnh tiến thì các véctơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các đại lượng không đổi theo thời gian, vì vậy :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

Khi đó $\vec{W}_k = 0$ và gia tốc tuyệt đối của động điểm là :

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r$$

b) Nếu hệ toạ độ động Oxyz chuyển động quay quanh một trục cố định Δ với vận tốc góc $\vec{\omega}_e$, khi đó các véctơ đơn vị là những đại lượng thay đổi hướng theo thời gian, do vậy ta cần phải tính : $\frac{d\vec{i}}{dt};\frac{d\vec{j}}{dt};\frac{d\vec{k}}{dt}$

và $\vec{W}_k = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$

Muốn vậy, hãy xem véctơ đơn vị $\vec{i} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$ của điểm M nằm trên trục Ox cách O một đoạn bằng đơn vị chiều dài, ta có:

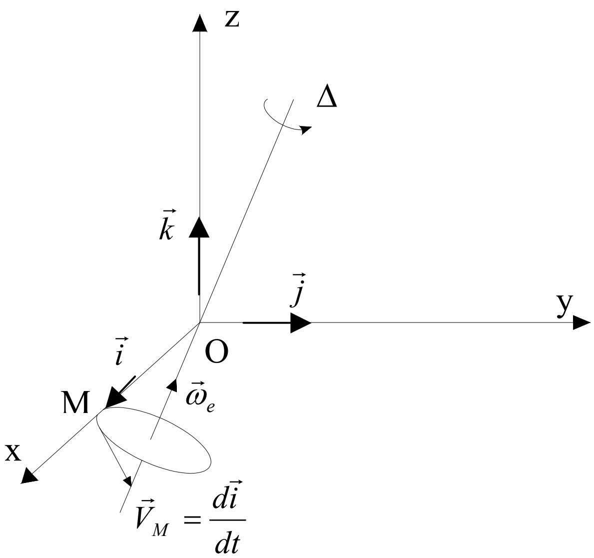
$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{V}_M$$

Vì :

$$\vec{V}_M = \vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{r}_M = \vec{\omega}_e \wedge \vec{i}$$

Vậy :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{i}$$



Hình 3.3

Tương tự như trên đối với véctơ $\vec{j}$, $\vec{k}$ ta nhận được :

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{j}\ ,\ \ \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{k}$$

Từ những kết quả nhận được ở trên, ta có :

$$\vec{W}_k = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

$$= 2\vec{\omega}_e \wedge \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$$

Vậy: $\vec{W}_k = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$

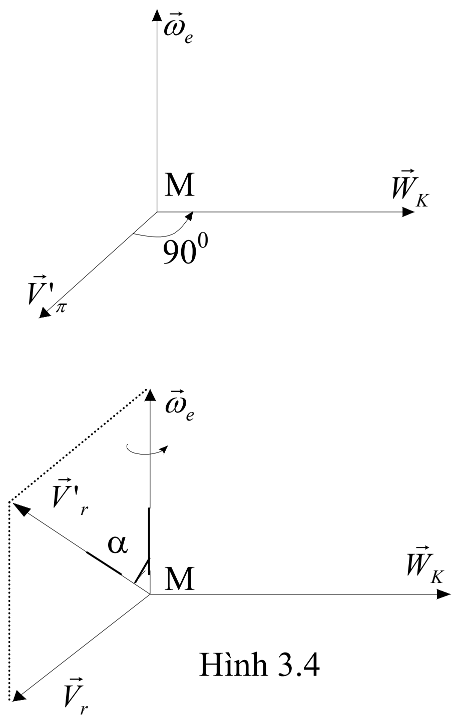
Chú ý : Trong trường hợp ω_e=0 khi đó hệ toạ độ động tịnh tiến, hoặc $\vec{\omega}_e // \vec{V}_r$ đều dẫn đến $\vec{W}_k$=0.

3. Phương pháp thực hành xác định phương, chiều và trị số $\vec{W}_k$.

Vì $\vec{W}_k = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$ là một véctơ vuông góc với mặt phẳng xác định bởi $\vec{\omega}_e$ và $\vec{V}_r$ nên :

- Nếu $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$: quay $\vec{V}_r$ trong mặt phẳng chứa nó và vuông góc với $\vec{\omega}_e$ một góc 90^0 theo chiều quay của $\vec{\omega}_e$ ta được phương và chiều của $\vec{W}_k$ với độ lớn : $W_k = 2.\omega_e V_r$

- Nếu $\vec{V}_r$ không vuông góc với $\vec{\omega}_e$ rồi quay hình chiếu ấy trong mặt phẳng vuông góc với $\vec{\omega}_e$ một góc 90^0 theo chiều quay của $\vec{\omega}_e$ ta sẽ được phương chiều $\vec{W}_k$ và độ lớn :



Hình 3.4

$W_k = 2.\omega_e V_r.\sin\alpha$ (trong đó góc α là góc tạo bởi $\vec{\omega}_e$ và $\vec{V}_r$)

Ví dụ 1: (Bài toán tổng hợp)

Tam giác vuông ABC có cạnh huyền AB = 2a =20cm và góc CBA = α =60^0 quay quanh trục Cz_1 theo quy luật φ = 10t –$2t^2$. Trên AB có điểm M dao động xung quanh trung điểm O theo quy luật như sau: ξ = a.cos(πt/3) (Trục Oξ hướng dọc theo OA). Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của điểm M tại thời điểm t = 2s.

Bài giải :

1) Ta xác định vị trí cảu điểm M trên quỹ đạo tương đối AB tại thời điểm t=2s:

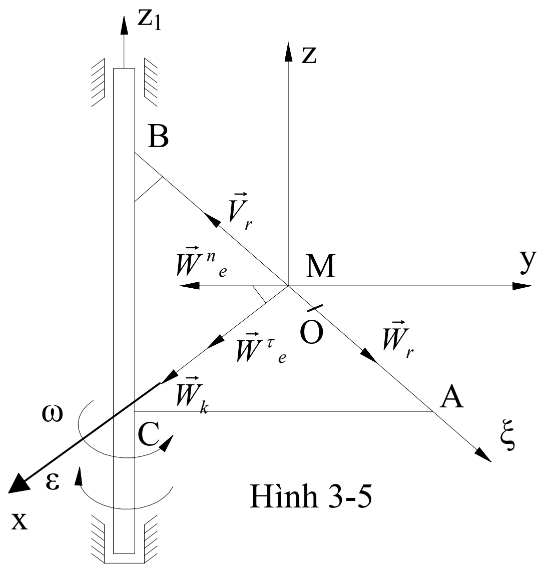
$$\xi\Big|_{t=2} = a.\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2}$$

Vậy M là trung điểm OB.

2) Xác định $\vec{V}_r$:

Vì chuyển động tương đối là chuyển động thẳng nên:

$$V_r = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\pi}{3}a\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$



Hình 3-5

$$V_r\Big|_{t=2s} = -\frac{\pi}{6}a\sqrt{3} = -\frac{5\pi}{3}\sqrt{3} \quad (cm/s)$$

Dấu (-) thể hiện rằng tại t = 2s, chuyển động quay hướng ngược chiều kim đồng hồ (nếu nhìn từ phía đầu trục Cz_1) và quay chậm dần.

4) Xác định $\vec{W}_r$

Vì chuyển động tương đối là chuyển động thẳng nên :

$$W_r = \frac{dV_r}{dt} = -\frac{\pi^2}{9}a\cos(\frac{\pi}{3}t)$$

$$W_r\Big|_{t=2s} = \frac{\pi^2}{18}a = \frac{5}{9}\pi^2 \quad (cm/s^2)$$

5) Xác định $\vec{W}_e$

Vì chuyển động của tam giác là chuyển động kéo theo của điểm M. Gia tốc $\vec{W}_e$ của M đúng bằng gia tốc điểm tam giác mà điểm M trùng với nó. Điểm này chuyển động theo vòng tròn bán kính MD = h mà tại thời điểm t = 2s có:

$$h = \frac{a}{2}\sin\alpha = 5\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (cm)$$

$$\vec{W}_e = \vec{W}_e^{\tau} + \vec{W}_e^{n} \quad t = 2s$$

$$W_e^{\tau} = gh = -10\sqrt{3} \ (cm/s^2) \quad W_e^{n} = \omega^2 h = 10\sqrt{3} \quad (cm/s^2)$$

Véctơ $\vec{W}_e^{\tau}$ có hướng vuông góc với mặt phẳng ABC và có chiều như hình vẽ. $\vec{W}_e^{n}$ hướng dọc theo MD về phía trục Cz_1.

6) Xác định W_k : Về trị số $W_k = 2.\omega_e V_r \sin\alpha = 10\pi$ cm/s^2 . Phương chiều như hình vẽ.

7) Xác định $\vec{W}_a$:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

Tại thời điểm t = 2s ta dựng hệ trục Oxyz (xem hình) rồi tìm hình chiếu các véctơ trên các trục đó :

$$W_{ax} = W_k + \left|W_e^{\tau}\right| = 10\pi + 10\sqrt{3} = 48{,}7 \quad (cm/s^2)$$

$$W_{ay} = W_r \sin\alpha = \frac{5\pi^2}{18}\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 12{,}6 \quad (cm/s^2)$$

$$W_{az} = -W_r \cos\alpha = \frac{5\pi^2}{18} = -2{,}7 \quad (cm/s^2)$$

Vậy:

$$W_a = \sqrt{W_{ax} + W_{ay} + W_{az}} = 50{,}4 \quad (cm/s^2)$$

ta có thể dựng véctơ $\vec{W}_a$ theo các véctơ thành phần của nó trên hệ trục Oxyz.

<u>*Ví dụ 2:*</u> (Bài toán phân tích)

Khảo sát chuyển động của các cơ cấu culít (xem hình). Giả thuyết rằng tay quay quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω_0. Thông qua con chạy A chuyển động được truyền sang cần lắc O_1B. Cho biết OA = a. Ở thời điểm khảo sát tay quay OA vuông góc với đường nối hai trục quay OO_1 và góc $O\hat{A}O_1 = 60^0$. Tìm vận tốc, gia tốc tương đương đối với con chạy so với cần lắc O_1B, gia tốc góc của O_1B.

<u>*Bài giải:*</u> Ta khảo sát chuyển động con chạy A xem như động điểm có chuyển động phức hợp. Điểm A chuyển động trên cần lắc đó là chuyển động tương đối. Cần lắc chuyển động xung quanh O_1 đó là chuyển động kéo theo. Lấy giá máy làm hệ quy

chiếu cố định. Chuyển động tuyệt đối của A đã xác định đó là chuyển động tròn quanh O. Các véctơ $\vec{V}_a, \vec{W}_a$ hướng như hình vẽ, trị số :

$$V_a = OA.\omega_0 = a.\omega_0$$
$$W_a = W_a^n = a.\omega_0^2$$

1) Tìm các vận tốc $\vec{V}_r, \vec{V}_e, \omega_1$

Vì chuyển động tuyệt đối phức hợp nên ta áp dụng định lý hợp vận tốc :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad \text{(a)}$$

Chuyển động tuyệt đối đã biết chuyển động tương đối của A là chuyển động thẳng dọc theo cần lắc quay quanh O_1 nên trùng điểm của A trên cần lắc chuyển động tròn, do đó $\vec{V}_e$ có hướng vuông góc với O_1B.

Dựa vào hệ thức (a) ta dựng được hình chữ nhật vận tốc (xem hình). Từ đó xác định vận tốc tương đối với vận tốc theo của A

$$V_r = V_a \sin 60^0 = \frac{a\omega_0\sqrt{3}}{2}$$
$$V_r = V_a \cos 60^0 = \frac{a\omega_0}{2}$$

Biết giá trị và hướng của $\vec{V}_e$ ta tìm được chiều quay và tốc độ góc của cần lắc O_1B ta có :

$$V_e = O_1A^*.\omega_1 = O_1A.\omega_1$$

tại thời điểm đang xét $O_1A = \dfrac{OA}{\cos 60^0} = 2a$ nên :

$$\omega_1 = \frac{V_e}{O_1A} = \frac{a\omega_0}{2}.2a = \frac{\omega_0}{4} \quad s^{-1}$$

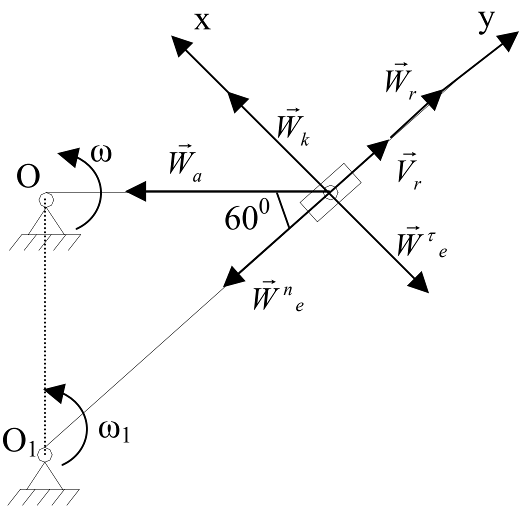
chiều quay ω_1 biểu diễn như hình vẽ.

2) Tìm gia tốc tương đối $\vec{W}_r$ và gia tốc ε_1 của con lắc :

Vì cần lắc là hệ quy chiếu động quay quanh trục O_1 cố định nên ta áp dụng công thức :

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

Gia tốc $\vec{W}_a$ đã biết. Chuyển động tương đối của A là chuyển động thẳng không đều dọc theo O_1B do đó $\vec{W}_r$ nằm trên O_1B, nhưng chưa biết chiều và giá trị. Cần O_1B quay không đều quanh O_1 nên gia tốc theo có 2 thành phần



$$W_e{}^n = O_1A.\omega_1{}^2 = 2a\frac{\omega_0{}^2}{16} = \frac{a\omega_0{}^2}{8}$$

có hướng từ A về O_1 ($\vec{W}_e{}^n$ đã được xác định), còn đối với $\vec{W}_e{}^\tau$ hướng vuông góc với O_1B nhưng chưa biết chiều và giá trị (chiều trên hình vẽ là chiều giả định). $\vec{W}_k$ là gia tốc được xác định phương chiều theo quy tắc đã nêu trên, có giá trị :

$$W_k = 2\omega_e V_r = 2\omega_1 V_r = 2\frac{\omega_0}{4}a\omega_0{}^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\omega_0{}^2\sqrt{3}}{4}$$

Như vậy hệ thức (b) có thể viết :

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e{}^\tau + \vec{W}_e{}^n + \vec{W}_r + \vec{W}_k \qquad \text{(c)}$$

trong đó $\vec{W}_r, \vec{W}_e{}^\tau$ còn chưa biết chiều và giá trị. Để xác định hai véctơ đó ta làm như sau :

Chọn trục x vuông góc với $\vec{W}_r$ và trục y vuông góc với $\vec{W}_e$ (như hình vẽ) chiếu (c) lên các trục ấy để có hai phương trình đại số chứa hai ẩn số W_r và $W^\tau{}_e$. Ta có :

$$\begin{cases} W_a\cos 30^0 = -W_e{}^\tau + W_k \\ -W_a\cos 60^0 = -W_e{}^n + W_r \end{cases} \qquad (d)$$

Giải các phương trình (d) ta được :

$$\begin{cases} W_e^{\tau} = W_k - W_a \cos 30^0 = \dfrac{a\omega_0^{\ 2}\sqrt{3}}{4} - \dfrac{a\omega_0^{\ 2}\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{a\omega_0^{\ 2}\sqrt{3}}{4} \\ W_r = -W_a \cos 60^0 + W_e^{\ n} = \dfrac{a\omega_0^{\ 2}}{8} - \dfrac{a\omega_0^{\ 2}}{2} = -\dfrac{3a\omega_0^{\ 2}}{8} \end{cases}$$

Như vậy các véctơ $\vec{W}_r, \vec{W}_e^{\ \tau}$ đều ngược hướng với chiều đã vẽ trên hình, nghĩa là ở vị trí ấy con chạy A chuyển động chậm dần so với cần lắc O_1B, còn cần này chuyển động nhanh đàn quanh O_1 với gia tốc góc :

$$\varepsilon_1 = \frac{\left|W_e^{\ \tau}\right|}{O_1A} = \frac{a\omega_0^{\ 2}\sqrt{3}}{4.2a} = \frac{\omega_0^{\ 2}\sqrt{3}}{8} \qquad s^{-1}$$

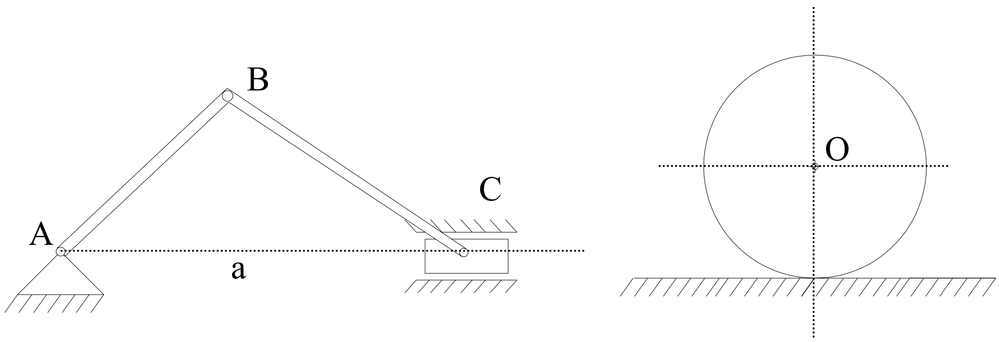
CHƯƠNG IV

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ MÔ HÌNH

1. Định nghĩa :

Vật rắn chuyển động song phẳng khi khoảng cách từ mỗi điểm của nó đến một mặt phẳng quy chiếu cố định luôn luôn không đổi.



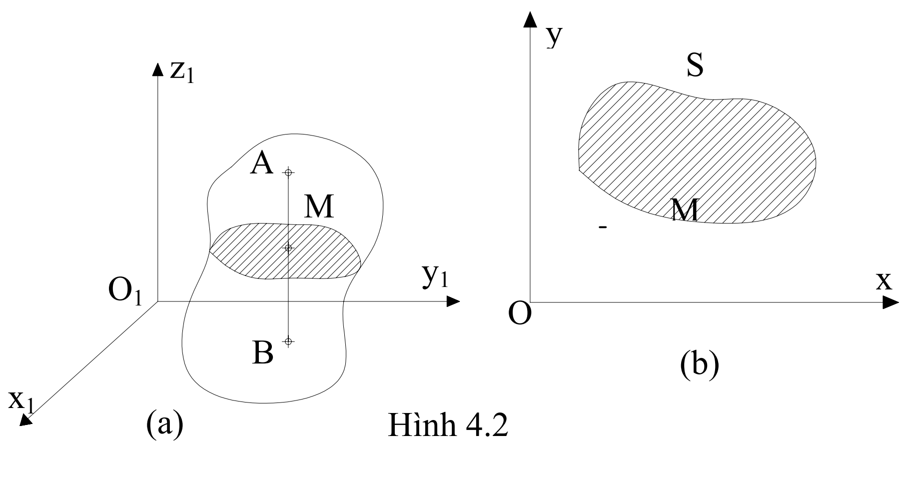
Hình 4.1

Từ định nghĩa ta thấy khi vật rắn chuyển động song phẳng, một tiết diện của vật song song với mặt phẳng quy chiếu cố định có chuyển động trong mặt phẳng chứa nó. Mỗi điểm của vật chuyển động trong mặt phẳng song song với mặt phẳng quy chiếu cố định.

2. Mô hình phẳng của vật rắn chuyển động song phẳng :

Xét một đoạn thẳng AB của vật rắn vuông góc với mặt phẳng quy chiếu. Khi vật rắn chuyển động song phẳng AB chuyển động tịnh tiến vì nó có phương luôn luôn không đổi.

Chuyển động của AB được đặc trưng bởi chuyển động của một điểm bất kỳ của nó. Ví dụ giao điểm M giữa AB và thiết diện song song (S) với mặt phẳng quy



Hình 4.2

chiếu. Xem vật rắn là tập hợp vô số những đoạn thẳng AB như thế, thì chuyển động của vật sẽ được đặc trưng bởi chuyển động của tập hợp những điểm M nói trên, nghĩa là chuyển động của thiết diện (S) trong mặt phẳng song song với mặt phẳng quy chiếu cố định.

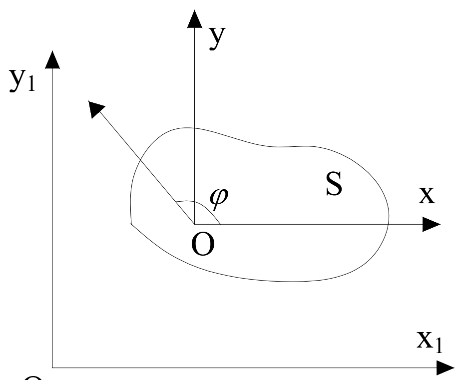
Như vậy để khảo sát chuyển động của vật, ta chỉ cần khảo sát chuyển động của thiết diện (S) song song với mặt phẳng quy chiếu cố định trong mặt phẳng chứa nó. Thiết diện (S) được gọi là mô hình phẳng của vật rắn chuyển động song phẳng.

§2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA CẢ VẬT RẮN

1. Phương trình chuyển động của vật :

Muốn lập phương trình chuyển động của vật, ta chỉ cần tìm phương trình chuyển động của thiết diện (S).

Trong mặt phẳng chứa thiết diện (S), lập hệ trục toạ độ cố định $O_1x_1y_1$. Qua một điểm O nào đó gọi là điểm cực trên thiết diện (S). Lập hệ trục tọa độ Oxy luôn luôn song song với hệ trục $O_1x_1y_1$ là hệ quy chiếu động.



Hình 4.3

Rõ ràng là thiết diện (S) chuyển động quay tương đối quanh cực O trong hệ quy chiếu Oxy. Hệ quy chiếu Oxy chuyển động tịnh tiến so với hệ quy chiếu cố định. Các thông số định vị của thiết diện (S) là toạ độ của điểm $O(x_0, y_0)$ và góc φ, chúng ta thay đổi theo thời gian. Vậy ta có phương trình chuyển động của vật rắn chuyển động song phẳng là:

$$\begin{cases} x_0 = x_0(t) \\ y_0 = y_0(t) \\ \overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t) \end{cases} \qquad (4.1)$$

Hai phương trình đầu cho ta phương trình chuyển động tịnh tiến của hệ động so với cực O, phương trình thứ ba là phương trình chuyển động quay tương đối quanh cực O của thiết diện (S).

Vậy chuyển động song phẳng đã được phân tích thành hai chuyển động đồng thời: chuyển động tịnh tiến cùng với cực O (chuyển động theo) và chuyển động quay tương đối quanh cực O (chuyển động quay tương đối).

2. Vận tốc và gia tốc của vật :

Từ cách phân tích chuyển động ở trên, muốn xác định vận tốc và gia tốc của vật ta phải tìm được vận tốc và gia tốc trong các chuyển động hợp thành.

a) Vận tốc của vật :

Ở mỗi thời điểm, trạng thái chuyển động của vật được mô tả bằng chuyển động quay tương đối quanh cực và chuyển động tịnh tiến kéo theo cùng cực. Vận tốc của vật được xác định bởi vận tốc $\vec{V}_0$ là vận tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến cùng điểm cực O và vận tốc góc $\overline{\omega}$ là thành phần vận tốc của vật quay tương đối quanh cực O:

$$\vec{V}_O \begin{cases} V_{Ox} = \dot{x}_O(t) \\ V_{Oy} = \dot{y}_O(t) \end{cases}$$

$$\overline{\omega}_{SP} = \dot{\overline{\varphi}}(t)$$

b) Gia tốc của vật :

Cũng tương tự như trên ta có : gia tốc $\vec{W}_0$ của cực O là gia tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến của vật và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$ là gia tốc góc trong thành phần chuyển động quay quanh cực O.

$$\vec{W}_O \begin{cases} W_{Ox} = \ddot{x}_O(t) \\ W_{Oy} = \ddot{y}_O(t) \end{cases}$$

$$\overline{\varepsilon}_{SP} = \ddot{\overline{\varphi}}(t)$$

c. Ảnh hưởng của việc chọn cực đến các yếu tố vận tốc và gia tốc của vật :

Khi ta xét vật rắn chuyển động song phẳng bất kỳ, tức là nó không chuyển động tịnh tiến, nên ở mỗi thời điểm vận tốc và gia tốc của các điểm thuộc vật sẽ khác nhau :

$$\vec{V}_1 \neq \vec{V}_0 \neq \vec{V}_A \text{ và } \vec{W}_1 \neq \vec{W}_0 \neq \vec{W}_A$$

Do đó, vận tốc và gia tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến phụ thuộc vào việc chọn điểm cực.

Trái lại, vận tốc góc $\overline{\omega}$ và gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$ của thành phần chuyển động quay tương đối của vật quanh cực hoàn toàn không phụ thuộc vào cách chọn cực. Điều này có thể chứng minh như sau:

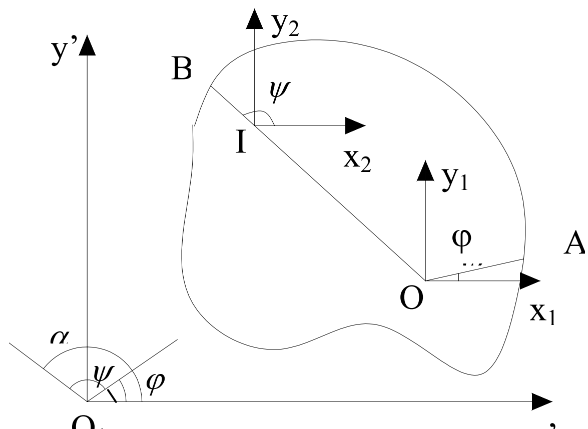
Theo định nghĩa thì vận tốc góc và gia tốc góc của (S) trong chuyển động quay tương đối quanh hai cực O và I được xác định bởi các hệ thức :

$$\overline{\omega}_0 = \dot{\overline{\varphi}}, \quad \overline{\varepsilon}_0 = \ddot{\overline{\varphi}}$$

$$\overline{\omega}_1 = \dot{\overline{\psi}}, \quad \overline{\varepsilon}_1 = \ddot{\overline{\psi}}$$

Trong đó :φ = xÔA, ψ = xÎB

Ta hãy tìm mối quan hệ giữa φ và ψ.



Hình 4.4

Từ O_1 vẽ hai nửa đường thẳng Δ và D song tương xứng với OA và IB. Gọi α là góc giữa D và Δ tức là góc giữa OA và IB. Hai đường thẳng này gắn chặt với vật rắn (S) nên góc giữa chúng là không đổi :

$$\alpha = \text{const}$$

Theo hình vẽ bên ta có thể viết :

$$\overline{\psi} = \overline{\varphi} + \overline{\alpha} \text{ với } \alpha = \text{const}$$

Khi ấy ta được

$\dot{\overline{\varphi}} = \dot{\overline{\psi}}$ hoặc là $\omega_0 = \omega_I$ và $\dfrac{d\omega_0}{dt} = \dfrac{d\omega_I}{dt}$ tức là : $\overline{\varepsilon}_0 = \overline{\varepsilon}_I$

Như vậy, ta đã chứng minh : vận tốc góc $\overline{\omega}$ và gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$ của vật rắn trong chuyển động tịnh tiến không phụ thuộc vào việc chọn cực.

§3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC ĐIỂM THUỘC VẬT

Ta chỉ khảo sát vận tốc và gia tốc của các điểm thuộc vật rắn.

1. Sự liên hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc vật :

Cho vận tốc $\vec{V}_0$ và vận tốc góc ω của hình phẳng quay tương đối quanh cực O, vận tốc của điểm M thuộc hình phẳng được xác định nhờ định lý sau :

a) Định lý : Vận tốc của điểm M thuộc vật bằng tổng hình học của vận tốc của điểm cực O và vận tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối quanh điểm cực O:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{V}_{MO} \qquad (4.2)$$

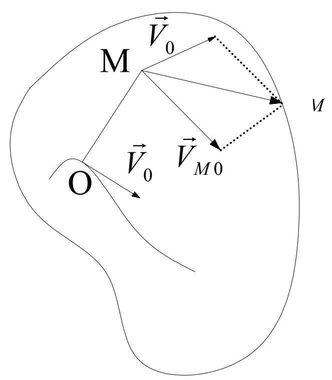
Trong đó, $\vec{V}_{MO}$ là vận tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối của (S) quanh cực O :

$$\vec{V}_{MO} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Chứng minh :

Thật vậy, vì chuyển động song phẳng, theo cách phân tích ở trên là tổng hợp hai chuyển động : tịnh tiến cùng cực O và quay tương đối quanh cực O. Như thế một điểm M bất kỳ trên vật cũng tham gia hai chuyển động thành phần trên, do đó theo định lý hợp vận tốc :

$$\vec{V}_M = \vec{V}^e{}_M + \vec{V}^r{}_M$$



Hình 4.5

Ở đây $\vec{V}^e{}_M = \vec{V}_0$ vì hệ động chuyển động tịnh tiến cùng cực O, còn $\vec{V}^r{}_M$ là vận tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng quanh cực O với vận tốc góc ω. Ta kí hiệu vận tốc tương đối của M là $\vec{V}_{MO}$ nên :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{V}_{MO}$$

Trong đó : $\vec{V}_{MO} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \perp$ MO theo chiều ω

$$V_{OM} = \omega.OM$$

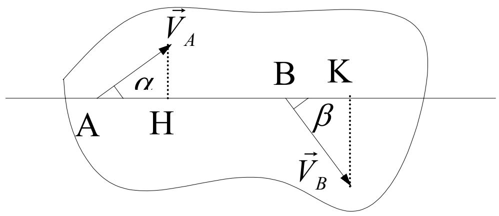
Chú ý : Vì có thể chọn điểm cực một cách tuỳ ý nên công thức trên (4.2) cũng là công thức liên hệ vận tốc của hai điểm bất kỳ. Giả sử xét hai điểm A,B bất kỳ ta có :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \qquad (4.3)$$

với $\vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

b) Định lý hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc vật :

Chiếu hệ thức (4.3) lên trục AB định hướng tuỳ ý với chú ý rằng véctơ $\vec{V}_{BA}$ vuông góc với AB ta nhận được :



$$hc_{AB}\vec{V}_A = hc_{AB}\vec{V}_B \qquad (4.4)$$

Hoặc : $V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$

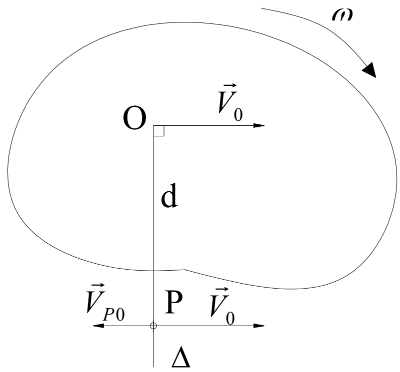
Định lý : Hình chiếu của véctơ vận tốc của hai điểm bất kỳ thuộc vật rắn chuyển động song phẳng lên trục qua hai điểm ấy bằng nhau.

2. Sự phân bố vận tốc của các điểm trên hình phẳng. Tâm vận tốc tức thời :

a) Tâm vận tốc tức thời :

Ta hãy xem ở mỗi thời điểm, vận tốc của các điểm trên hình phẳng được phân bố như thế nào ?

Từ công thức liên hệ vận tốc giữa hai điểm (4.3) ta thấy trên hình phẳng có thể tìm được một điểm có vận tốc bằng không, nếu hai vận tốc thành phần của điểm đó trực đối. Điểm có vận tốc bằng không được kí hiệu là P và gọi P là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng. Ta hãy chứng minh có một và chỉ một điểm P tại thời điểm khảo sát khi hình phẳng chuyển động.



Hình 4.7

Giả sử ta biết vận tốc của cực O là $\vec{V}_0$ và vận tốc góc của tấm phẳng là ω. Quay véctơ $\vec{V}_0$ quanh O một góc 90^0 theo chiều quay của ω ta được nửa đường thẳng OΔ. Trên OΔ lấy một đoạn thẳng $OP = \frac{V_0}{\omega}$. Điểm P nhận được chính là tâm vận tốc tức thời. Thật vậy, theo (4.2) ta có:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO}$$

Trong đó $\vec{V}_{PO}$ hướng vuông góc với O theo chiều quay của ω vì vậy nó hướng cùng phương và ngược chiều với $\vec{V}_O$ có giá trị :

$$V_{PO} = \omega.OP = \omega.\frac{V_0}{\omega} = V_0$$

Vậy : $$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO} = 0$$

Trong trường hợp đặc biệt khi $\omega \to 0$ thì $OP = \frac{V_0}{\omega} \to \infty$ vì nói chung $V_0 \neq 0$ nên $P \to \infty$.

Tính duy nhất của P chứng minh như sau :

Giả sử tại một thời điểm nào đó trên vật rắn chuyển động song phẳng có hai điểm P_1 và P_2 khác nhau mà $V_{P_1} = V_{P_2} = 0$. Dễ dàng suy ra : $V_{P_1P_2} = \omega.P_1P_2 = 0$. Vậy ω = 0 (vì $P_1P_2 \neq 0$)

Từ đó suy ra rằng vận tốc mọi điểm của vật đều bằng không vì :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{P1} + \vec{V}_{MP1} = 0 + 0 = 0$$

Điều này chỉ xảy ra ở trường hợp đặc biệt khi hình phẳng dừng chuyển động tức thời. Vậy nói chung ở một thời điểm khảo sát trên hình phẳng chỉ tồn tại một điểm duy nhất có vận tốc bằng không.

b) Sự phân bố vận tốc :

Chúng ta chuyển sang xét sự phân bố vận tốc của các điểm thuộc vật rắn (S). Xét trường hợp $\omega \neq 0$ chọn điểm P làm cực vận tốc của một điểm bất kỳ trên hình phẳng là :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PA}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} = \vec{V}_{BP} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PB}$$

trong đó $V_{AP} = \omega.PA$, $V_{PB} = \omega.PB$

Nhìn vào (4.5) ta thấy $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$ có phương vuông góc với PA và PB và tỉ lệ với khoảng cách từ A và B đến P.

Vậy : Vận tốc mọi điểm thuộc hình phẳng được phân bố như vật quay quanh trục qua tâm tức thời P với vận tốc góc ω. Ta nói hình thẳng quay tức thời quanh tâm P.

Xét trường hợp ω = 0 vận tốc của mọi điểm trên hình phẳng bằng nhau.

3. Sự liên hệ gia tốc của hai điểm thuộc vật :

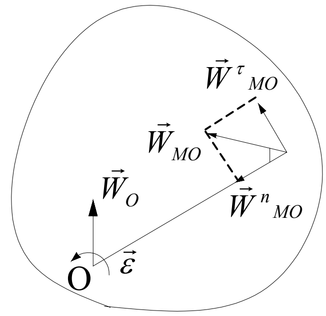
a) *Định lý :* Gia tốc của điểm M thuộc vật bằng tổng hình học gia tốc của điểm cực O và gia tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối quanh cực O.

$$\vec{W}_M = \vec{W}_O + \vec{W}_{MO} \quad (4.6)$$

Chứng minh : Vì hệ chuyển động tịnh tiến nên gia tốc của điểm M được xác định theo hệ thức :

$$\vec{W}_M = \vec{W}^e{}_M + \vec{W}^r{}_M$$

Ở đây $\vec{W}^e{}_M = \vec{W}_O$ (hệ chuyển động tịnh tiến cùng cực O), còn $\vec{W}^r{}_M$ là gia tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng quanh cực O với vận tốc ω và gia tốc góc ε. Kí hiệu gia tốc tương đối là $\vec{W}_{OM}$ vậy :



Hình 4.13

$$\vec{W}_M = \vec{W}_O + \vec{W}_{MO}$$

cụ thể hơn là : $$\vec{W}_M = \vec{W}_O + \vec{W}^\tau{}_{OM} + \vec{W}^n{}_{MO}$$

trong đó : $\vec{W}^\tau{}_{OM}$, $\vec{W}^n{}_{MO}$ là gia tốc tiếp và gia tốc pháp của M trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng quanh cực O.

$$\vec{W}^\tau{}_{OM} = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} \text{ có giá trị là ε.OM}$$

(Vì OM vuông góc với chiều của ε)

$$\vec{W}^n{}_{MO} = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_M \text{ hướng từ M về O nên có giá trị } \omega^2\text{.OM}$$

Do vậy : $W = OM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ và tgα = $\frac{\varepsilon}{\omega^2}$, α là góc giữa $\vec{W}_{OM}$ và đoạn thẳng OM.

Với hai điểm A và B bất kỳ thuộc hình phẳng ta có :

$$\vec{W}_A = \vec{W}_B + \vec{W}^\tau{}_{AB} + \vec{W}^n{}_{BA}$$

b) *Sự phân bố gia tốc các điểm thuộc hình phẳng. Tâm gia tốc tức thời :*

Từ công thức liên hệ gia tốc giữa hai điểm (4.6) ta thấy có thể tìm trên hình phẳng một điểm mà tại đó gia tốc bằng không. Điểm ấy kí hiệu là Q và được gọi là tâm gia tốc tức thời.

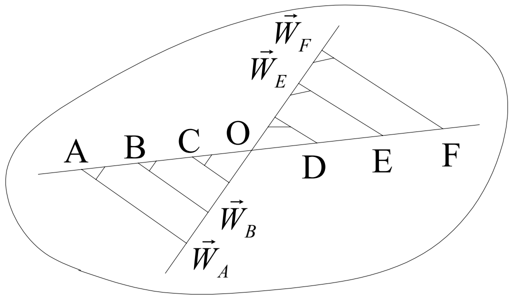
Trước tiên ta chứng minh rằng, tại mỗi thời điểm có một và chỉ một điểm thuộc hình phẳng có gia tốc bằng không.

Giả sử cho gia tốc $\vec{W}_O$ của cực O và vận tốc góc $\overline{\omega}$, gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$. Quay véctơ $\vec{W}_O$ quanh O một góc α theo chiều của gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$ với $tg\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ ta được nửa đường thẳng $O\Delta_1$, trên nửa đường thẳng $O\Delta_1$ lấy một đoạn $OQ = \dfrac{W_e}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$. Điểm Q nhận được chính là tâm gia tốc tức thời.

Thật vậy theo (4.6) ta có $\vec{W}_Q = \vec{W}_O + \vec{W}_{QO}$. Trong đó $\vec{W}_{QO}$ là véctơ gia tốc của điểm Q trong chuyển động của hình phẳng quay quanh O với vận tốc góc $\overline{\omega}$ và gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$. Như trên hình vẽ véctơ $\vec{W}_{QO}$ song song ngược chiều với $\vec{W}_O$ có giá trị :

$W_{QO} = QO\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_0$ do đó $\vec{W}_{QO} = -\vec{W}_O$ và

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_O + \vec{W}_{QO} = 0$$



Hình 4.15

Bây giờ ta cần chứng minh tính duy nhất của tâm gia tốc Q. Giả sử ở một thời điểm nào đó có hai điểm Q_1 và Q_2 phân biệt mà $W_{Q1} = W_{Q1} = 0$ ta suy ra rằng W_{Q1Q2} = 0 hoặc $W_{Q1Q2} = Q_1Q_2\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0$ vì $Q_1Q_2 \neq 0$ nên ta suy ra rằng $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0$ tức là $\omega = 0$ và $\varepsilon = 0$. Điều này chỉ xảy ra khi hình phẳng chuyển động tịnh tiến mà không thực hiện chuyển động song phẳng tổng quát.

Vậy ở mỗi thời điểm tồn tại duy nhất một điểm thuộc hình phẳng có gia tốc bằng không.

- *Sự phân bố gia tốc :* Ta khảo sát sự phân bố gia tốc của các điểm thuộc hình phẳng. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc (S) và lấy tâm gia tốc tức thời là Q làm cực theo (4.6) ta có:

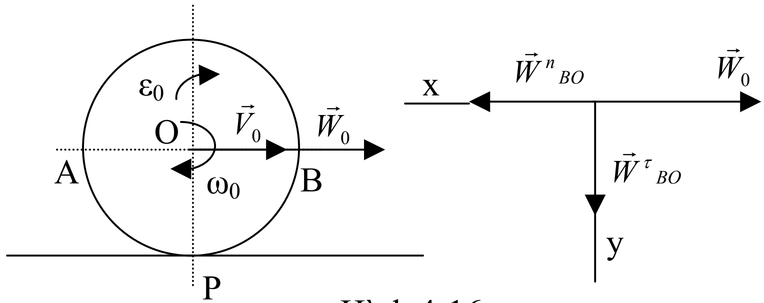
$$\vec{W}_M = \vec{W}_O + \vec{W}_{MO} = \vec{W}_{MO} \text{ vì } \vec{W}_{QO} = 0.$$

Vậy có thể kết luận như sau : Ở mỗi thời điểm gia tốc của một điểm bất kỳ thuộc hình phẳng được xác định giống như hình phẳng ấy quay quanh tâm gia tốc tức thời của nó với vận tốc góc $\overline{\omega}$ và gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$

c) Chú ý : Nói chung ở mỗi thời điểm tâm vận tốc tức thời P và tâm gia tốc tức thời Q không trùng nhau.

- Ở thời điểm hình phẳng chuyển động tịnh tiến tức thời thì $\omega = 0$ nhưng $\varepsilon \neq 0$ và vận tốc của các điểm bằng nhau nhưng gia tốc của chúng khác nhau.

Ví dụ : Tâm O của một bánh xe trên đường ray có vận tốc V_0 = 1 m/s và gia tốc W_0= 2m/s^2 . Bán kính bánh xe bằng 0,2m. Hãy xác định gia tốc của điểm B là điểm đầu nút của đường kính AB.



Hình 4-16

Bài giải: Lấy O làm cực vì đã biết V_0, W_0. Tiếp điểm P là tâm vận tốc tức thời nên vận tốc góc của bánh xe :

$$V_0 = \omega_0 .PO \Rightarrow \omega_0 = \frac{V_0}{PO} = \frac{V_0}{R}$$

chiều ω_0 được xác định theo chiều véctơ $\vec{V}_0$ được biểu diễn trên hình vẽ.

Gia tốc góc ε được xác định bằng cách đạo hàm theo thời gian của ω :

$$\varepsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{V_0}{R}) = \frac{1}{R}.\frac{dV_0}{dt} = \frac{1}{R}W_0$$

dấu của ε và ω trùng nhau do đó bánh xe quay nhanh dần.

Trong trường hợp đang khảo sát $\frac{dV_0}{dt}$ =W_0 vì O chuyển động thẳng còn trong trường hợp chung ta có :

$$\frac{dV_0}{dt} = W_{0\tau} .$$

Vì O là điểm cực nên theo (4-7) ta có :

$$\vec{W}_B = \vec{W}_O + \vec{W}^\tau{}_{BO} + \vec{W}^n{}_{BO}$$

trong đó: $W_{BO}{}^\tau$ = OB.ε = $R.\frac{W_0}{R} = W_0 = 2 \quad m/s^2$

$W_{BO}{}^n$ = OB.ω^2 = $R.\frac{V^2{}_0}{R} = \frac{V^2{}_0}{R} = 5 \quad m/s^2$

Để tính $\vec{W}_B$ ta chọn hai trục B_x, B_y vuông góc với nhau chiếu biểu thức (a) lên hai trục ấy ta được :

$$W_{Bx} = W_{BO}{}^{n} - W_0 = 3 \quad m/s^2$$
$$W_{By} = W^{\tau}{}_{BO} \qquad = 2 \quad m/s^2$$

Từ đó ta có :

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

GIÁO TRÌNH CƠ HỌC LÝ THUYẾT

PHẦN ĐỘNG LỰC HỌC

KHOA SƯ PHẠM KỸ THUẬT

BỘ MÔN CƠ KỸ THUẬT

ĐÀ NẴNG 2005

CHƯƠNG I
CÁC ĐỊNG LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

§1 BÀI MỞ ĐẦU

Trong phần Tĩnh học chúng ta đã nghiên cứu về lực và sự cân bằng của các vật thể dưới tác dụng của các lực với giả thuyết là các lực không thay đổi theo thời gian.

Trong phần Động học, chúng ta đã nghiên cứu sự chuyển động của các vật thể về mặt hình học không tính đến các nguyên nhân làm thay đổi các chuyển động đó.

Trên thực tế, một số lớn các lực là những đại lượng biến đổi và có thể phụ thuộc vào nhiều tham số. Quy luật chuyển động của vật thể phụ thuộc vào hình dáng, kích thước, khối lượng...của vật và các lực tác dụng lên nó. Động lực học là một phần của cơ học nghiên cứu các quy luật chuyển động của các vật thể dưới tác dụng của các lực.

Lý thuyết động lực học được xây dựng trên những định luật cơ bản động lực học. Chúng là kết quả của hàng loạt các thí nghiệm và quan sát và đã được kiểm nghiệm qua thực tiễn. Những định luật này lần đầu tiên được Newton trình bày một cách có hệ thống năm 1687 vì vậy người ta còn gọi là các định luật Newton hay là những định luật cơ học cổ điển.

§2. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Không gian, thời gian :

Như chúng ta đã biết, chuyển động cơ học là sự dời chỗ của các vật thể trong không gian theo thời gian. Không gian và thời gian ở đây hiểu theo nghĩa tuyệt đối cổ điển (Khác với khái niệm không gian, thời gian trong lý thuyết tương đối).

2. Quán tính :

Thực tế cho thấy rằng tác dụng của một lực lên hai vật thể tự do khác nhau, nói chung chúng chuyển động khác nhau.

Tính chất của vật thể thay đổi vận tốc chuyển động nhanh hơn hay chậm hơn khi có cùng lực tác dụng gọi là quán tính. Đại lượng dùng để đo lượng quán tính có thể là khối lượng.

3. Chất điểm :

Để nghiên cứu chuyển động của các vật thể có kích thước nhỏ so với độ dời của chúng, người ta đưa vào khái niệm chất điểm.

Chất điểm là vật thể có khối lượng mà kích thước có thể bỏ qua được trong khi nghiên cứu chuyển động của nó.

4. Cơ hệ :

Cơ hệ là tập hợp các chất điểm mà chuyển động của các chất điểm này liên quan đến chuyển động của các chất điểm khác thuộc hệ.

5. Vật rắn :

Vật rắn là một cơ hệ đặc biệt, trong đó khoảng cách giữa phần tử (chất điểm) bất kỳ của vật luôn luôn không đổi.

6. Hệ quy chiếu :

Để xác định chuyển động của một cơ hệ (hay một chất điểm) nào đó, người ta phải lấy một vật chuẩn làm mốc. Hệ toạ độ gắn với vật chuẩn gọi là hệ quy chiếu. Nếu toạ độ của tất cả các điểm thuộc cơ hệ trong hệ quy chiếu đã chọn, luôn luôn không đổi thì ta nói vật đứng yên trong hệ quy chiếu đó. Trong trường hợp ngược lại, nếu toạ độ của một số chất điểm nào đó thuộc cơ hệ thay đổi theo thời gian thì ta nói cơ hệ chuyển động trong hệ quy chiếu đã chọn.

§3. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN

1. Định luật quán tính (Định luật I) :

Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào thì giữ nguyên trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều.

Trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều của chất điểm được gọi là chuyển động theo quán tính.

Theo định luật này nếu không có lực nào tác dụng lên chất điểm hoặc hợp các lực tác dụng lên chất điểm bằng 0 thì véctơ vận tốc $\vec{v}$ của chất điểm sẽ không đổi cả về độ lớn lẫn hướng và do đó gia tốc $\vec{w} = 0$.

Hệ quy chiếu trong đó thoả mãn định luật quán tính gọi là hệ quy chiếu quán tính.

2. Định luật cơ bản của động lực học (Định luật II) :

Dưới tác dụng của lực, chất điểm tự do chuyển động với gia tốc cùng hướng với hướng của lực và có độ lớn tỷ lệ với độ lớn của lực :

$$\vec{F} = m.\vec{W} \qquad (1.1)$$

Trong đó m là khối lượng của chất điểm.

Hệ thức (1.1) được gọi là phương trình cơ bản của động lực học.

Từ hệ thức (1.1) chúng ta thấy rằng dưới tác dụng của cùng một lực, chất điểm nào có khối lượng nhỏ hơn sẽ có gia tốc lớn hơn. Như vậy khối lượng là đại lượng vật lý đặc trưng cho mức độ cản trở sự thay đổi vân tốc của chất điểm-quán tính của chất điểm.

Trong cơ học cổ điển khi vận tốc chuyển động của chất điểm nhỏ hơn nhiều so với vận tốc ánh sáng, người ta coi khối lượng là đại lượng không đổi.

Nhờ hệ thức (1.1) ta có thể tìm được hệ thức liên hệ giữa trọng lượng và khối lượng của một vật. Thật vậy, thực nghiệm đã chỉ rằng dưới tác dụng của trọng lực P một vật rơi tự do (ở độ cao không lớn lắm và không tính đến sức cản của không khí) đều có cùng gia tốc là g.

Do đó từ (1.1) ta suy ra :

$$P = m.g \qquad (1.2)$$

Cần nói thêm rằng, cũng như gia tốc g, trọng lượng thay đổi theo vĩ độ và độ cao nhưng khối lượng là một đại lượng không đổi với một vật.

3. Định luật về tác dụng và phản tác dụng : (Định luật III)

Hai lực mà hai chất điểm tác dụng lên nhau bằng nhau về số, cùng hướng tác dụng nhưng ngược chiều.

Ta cần chú ý rằng các lực tác dụng tương hỗ này không tạo thành một hệ lực cân bằng vì chúng đặt vào hai chất điểm khác nhau.

4. Định luật độc lập tác dụng :

Dưới tác dụng đồng thời của một số lực, chất điểm có gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc mà chất điểm có được khi từng lực tác dụng riêng biệt.

Giả sử chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Gọi là gia tốc của chất điểm có được khi các lực này tác dụng đồng thời, còn $\vec{W}_1, \vec{W}_2, ..., \vec{W}_n$ mà chất điểm có được nếu như từng lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ tác dụng riêng lẽ.

Theo tiên đề trên ta có :

$$\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + ... + \vec{W}_n \qquad (1.3)$$

Nhân hai vế của (1.3) với m và để ý đến tiên đề thứ 2 ta được :

$$m.\vec{W} = m.\vec{W}_1 + m.\vec{W}_2 + ... + m.\vec{W}_n$$

$$m.\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Hay là :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m.\vec{W} \qquad (1.4)$$

5. Hệ đơn vị :

Để đo các đại lượng cơ học người ta phải dùng ba đơn vị cơ bản. Tuỳ thuộc vào việc chọn hệ đơn vị cơ bản mà ta có hệ đơn cị do khác nhau :

- Hệ đơn vị quốc tế (SI) : Các đơn vị cơ bản mét (m), kilôgram (kg) và giây (s). Lực là đơn vị dẫn xuất được đo bằng Newton (N).

$$1N = 1\frac{kg.m}{s^2}$$

Hệ đơn vị MKS : Các đơn vị cơ bản là mét (m), kilôgram lực (kG) và giây (s). Đơn vị đo khối lượng là đơn vị dẫn xuất.

§4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

Dựa vào định luật cơ bản của động lực học, ở đây chúng ta sẽ thiết lập mối quan hệ giữa các lực tác dụng lên vật thể và quy luật chuyển động của nó. Mối quan hệ đó được gọi là phương trình vi phân chuyển động.

I. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM :

Xét chuyển động của chất điểm tự do dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ (Đối với các chất điểm không tự do, chúng ta dùng nguyên lý giải phóng liên kết bằng các phản lực để có thể xem chúng như chất điểm tự do).

1. Dạng véctơ :

Như chúng ta đã biết, gia tốc $\vec{W}$ của chất điểm được biểu thị qua véctơ bán kính $\vec{r}$ của nó như sau :

$$\vec{W} = \ddot{\vec{r}}$$

Vì vậy phương trình cơ bản của động lực học chất điểm (1.4) có dạng :

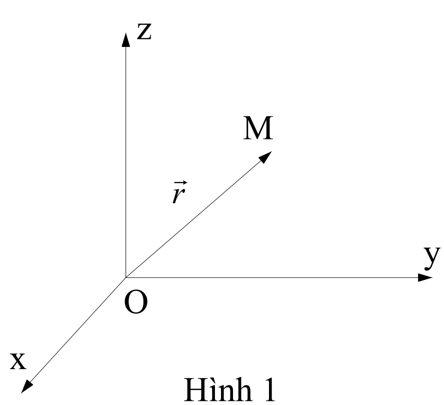
$$m.\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_k \qquad (1.5)$$

Phương trình (1.5) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng véctơ.

2. Dạng toạ độ Descarte :

Xét chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ Descarte Oy. Chiếu phương trình (1.5) lên các trục toạ độ Ox, Oy, Oz ta được :

$$\begin{cases} m.\ddot{x} = \sum F_{kx} \\ m.\ddot{y} = \sum F_{ky} \\ m.\ddot{z} = \sum F_{kz} \end{cases} \qquad (1.6)$$



Hình 1

hay :

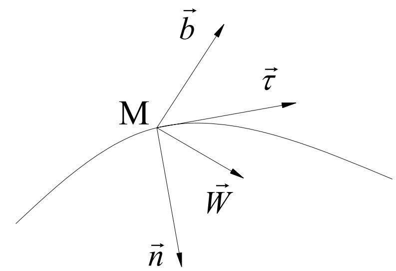
$$\begin{cases} m.\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx} \\ m.\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky} \\ m.\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz} \end{cases} \qquad (1.6')$$

Hệ phương trình (1.6) hay (1.6’) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ Descarte.

3. Hệ toạ độ tự nhiên :

Chiếu hai vế của phương trình (1.4) lên các trục của hệ toạ độ tự nhiên (τ, n, b) (Hình 2) ta được :

$$\begin{cases} m.W_\tau = \sum F_{k\tau} \\ m.W_n = \sum F_{kn} \\ m.W_b = \sum F_{kb} \end{cases}$$



Hình 2

Vì $W_\tau = \ddot{s}$, $W_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}$, $W_b = 0$ nên

$$\begin{cases} m.\ddot{s} = \sum F_{k\tau} \\ m.\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{kn} \\ 0 = \sum F_{kb} \end{cases} \qquad (1.7)$$

Những phương trình này được áp dụng một cách có hiệu quả khi biết quỹ đạo tuyệt đối của chất điểm. Phương trình thứ nhất của hệ (1.7) với điều kiện ban đầu tương ứng cho phép chúng ta xác định quy luật chuyển động của hệ, hai phương trình còn lại dùng để xác định các yếu tố khác chưa biết của bài toán (phản lực liên kết, bán kính cong ,...v..v)

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ :

Xét cơ hệ gồm n chất điểm $m_1, m_2, ..., m_n$. Gọi $\vec{F}^e{}_k$ là hợp lực của tất cả các lực ngoài và $\vec{F}^i{}_k$ là các hợp lực của tất cả các lực tổng tác dụng lên chất điểm thứ k của hệ. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm thứ k sẽ có dạng :

$$m_k\vec{W}_k = \vec{F}^e{}_k + \vec{F}^i{}_k$$

Viết phương trình tương tự cho tất cả các chất điểm của hệ ta được :

$$m_1\vec{W}_1 = \vec{F}^e{}_1 + \vec{F}^i{}_1$$

$$m_2\vec{W}_2 = \vec{F}^e{}_2 + \vec{F}^i{}_2$$

....

$$m_n\vec{W}_n = \vec{F}^e{}_n + \vec{F}^i{}_n$$

Hay :

$$m_1.\ddot{x} = F^e{}_{1x} + F^i{}_{1x}$$

$$m_1.\ddot{y} = F^e{}_{1y} + F^i{}_{1y}$$

$$m_1.\ddot{z} = F^e{}_{1z} + F^i{}_{1z}$$

.... (1.8)

$$m_n.\ddot{x} = F^e{}_{nx} + F^i{}_{nx}$$

$$m_n.\ddot{y} = F^e{}_{ny} + F^i{}_{ny}$$

$$m_n.\ddot{z} = F^e{}_{nz} + F^i{}_{nz}$$

(1.8) là hệ gồm 3.n phương trình.

Trong trường hợp nếu chúng ta phân loại lực ra thành lực hoạt động $\vec{F}^a{}_k$ và phản lực liên kết $\vec{N}_k$ thì tương tự với hệ (1.8) ta có :

$$m_1\vec{W}_1 = \vec{F}^a{}_1 + \vec{N}_1$$

$$m_2\vec{W}_2 = \vec{F}^a{}_2 + \vec{N}_2 \qquad (1.9)$$

....

$$m_n\vec{W}_n = \vec{F}^a{}_n + \vec{N}_n$$

§5. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Trong động lực học cần giải quyết hai bài toán cơ bản sau đây:

1. Xác định lực tác dụng lên chất điểm khi đã biết quy luật chuyển động của nó. (Bài toán thứ nhất của động lực học).

2. Xác định quy luật chuyển động của điểm khi biết các lực tác dụng lên nó (Bài toán thứ hai của động lực học).

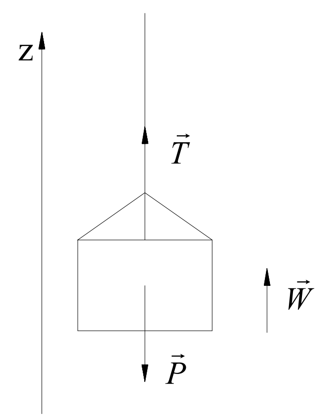
Để giải quyết bài toán này ta có thể sử dụng các phương trình (1.5), (1.6), (1.7) - đối với chất điểm và các hệ phương trình (1.8) hay (1.9)-đối với hệ cơ.

Tuy nhiên, cho đến nay chưa có phương pháp tổng quát để tích phân các hệ dạng (1.8) vì vậy trong thực tế người ta thường dùng những phương pháp khác hiệu quả hơn mà chúng ta sẽ xét trong những phần sau.

I. GIẢI BÀI TOÁN THỨ NHẤT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM:

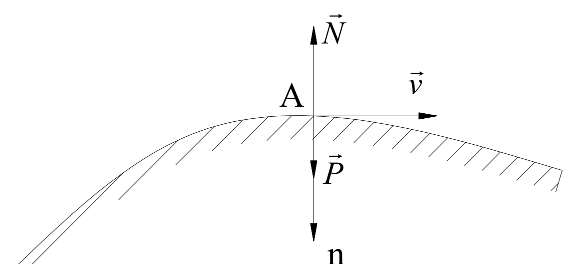
Khi biết quy luật chuyển động của chất điểm, chúng ta dùng các công thức đã biết trong phần động học để tính gia tốc của chất điểm và cuối cùng dùng phương trình cơ bản (1.5), (1.6), hay (1.7) để xác định các lực tác dụng lên nó.

Ví dụ 1.1 : Một thang máy có trọng lượng P (hình 3) bắt đầu đi lên với gia tốc W. Hãy xác định sức căng của dây cáp.



Hình 3

Ví dụ 1.2 : Tìm áp lực của ô-tô lên mặt cầu tại điểm A. Cho biết ô-tô có trọng lượng P, vận tốc chuyển động là $\vec{v}$ và bán kính cong của cầu tại A là ρ (hình 4).



Hình 4

II. GIẢI BÀI TOÁN THỨ HAI CỦA ĐỘNH LỰC HỌC ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM :

Với bài toán nà, chúng ta đã biết lực tác dụng lên chất điểm như hàm của thời gian, vận tốc, vị trí... nghĩa là :

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(t, \vec{v}, \vec{r})$$

Khi đó phương trình vi phân chuyển động của chất điểm có dạng :

$$\begin{cases} m.\ddot{x} = \sum F_{kx}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m.\ddot{y} = \sum F_{ky}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m.\ddot{z} = \sum F_{kz}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases} \qquad (1.10)$$

Đây là hệ ba phương trình vi phân cấp 2. Nghiệm tổng quát của nó phụ thuộc vào 6 hằng số tuỳ ý :

$$\begin{cases} x = f_1(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ y = f_2(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ z = f_3(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \end{cases} \qquad (1.11)$$

Những hằng số tích phân này sẽ được xác định nhờ những điều kiện ban đầu của chuyển động, chẳng hạn :

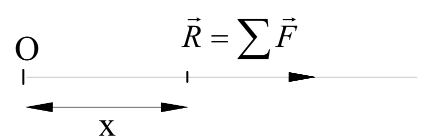
Khi t = 0 thì $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0 \qquad (1.12)$$

Việc giải hệ phương trình (1.10) không phải lúc nào cũng thực hiên được trong dạng giải tích. Chúng ta chỉ có thể tích phân hệ (1.10) với các điều kiện ban đầu (1.12) trong số trường hợp đơn giản.

1. Chuyển động thẳng của điểm :

Trong phần động học, chúng ta đã biết vận tốc và gia tốc của điểm trong chuyển động thẳng luôn luôn hướng theo đường quỹ đạo. Vì gia tốc có chiều trùng với chiều của hợp lực tác dụng lên chất điểm do đó chuyển động thẳng chỉ xảy ra khi : $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ có hướng không đổi và có vận tốc ban đầu bằng không hoặc cùng hướng với $\vec{R}$.



Hình 5

Vị trí của điểm M xác định bởi toạ độ x, phương trình chuyển động của chất điểm trong trường hợp này sẽ là :

$$m\dot{x} = R_x(t, x, \dot{x})$$

Hay :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R_x(t, x, \frac{dx}{dt}) \qquad (1.13)$$

Với điều kiện ban đầu .

Khi t = 0, $x = x_0$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \qquad (1.14)$$

Ngay cả trong trường hợp đơn giản này, phương trình (1.13) không phải lúc nào cũng giải được bằng phương pháp giải tích. Chúng ta xét một số trường hợp mà phương trình (1.13) có thể phân tích được ở dạng hữu hạn :

a) Lực chỉ phụ thuộc vào thời gian $R_x = f_x(t)$ khi đó :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

$$m\frac{dv}{dt} = f(t)$$

$$w = \frac{1}{m}\int f(t).dt + c_1 = f_1(t, c_1)$$

Từ đây ra suy ra : $x = f_2(t,c_1,c_2)$

Các hằng số phân tích c_1, c_2 được xác định từ điều kiện ban đầu (1.14)

b) Lực chỉ phụ thuộc vào khoảng cách : $R_x = f(x)$. Khi đó phương trình chuyển động có dạng :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

Ta có :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

nên :

$$mv\frac{dv}{dx} = f(x)$$

Đây là phương trình tách biến có thể phân tích được :

$$v = f_1(x,c_1)$$

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,c_1)$$

$$\frac{dx}{f_1(x,c_1)} = dt$$

Tích phân phương trình tách biến này ta được :

$$t = g(x,c_1,c_2)$$

hay : $$x = f_2(x,c_1,c_2)$$

c) Lực chỉ phụ thộc vào vận tốc: $R_x = f(\dot{x})$. Phương trình chuyển động viết dưới dạng :

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x}) \qquad (1.17)$$

Tích phân phương trình tách biến này ta được :

$$t = g_1(\dot{x},c_1)$$

Hay : $$\dot{x} = f_1(x,c_1)$$

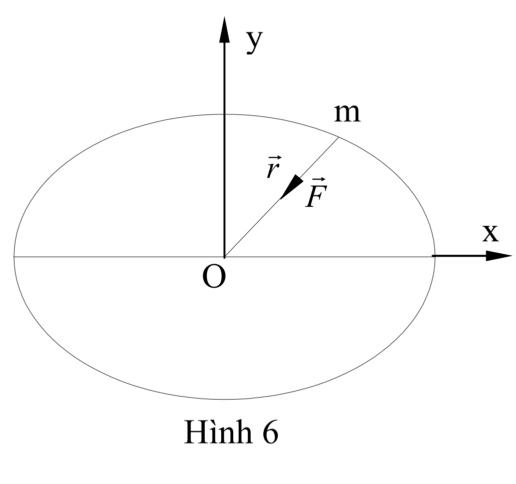
$$\frac{dx}{dt} = f_1(t,c_1)$$

Tiếp tục tích phân phương trình này ta được :

$$x = f_2(t,c_1,c_2)$$

2. Một số ví dụ :

Ví dụ 1.3 : Một chất điểm có khối lượng m, chuyển động trong mặt phẳng dưới tác dụng của lực hút $\vec{F}$ hướng tâm vào tâm O cố định theo luật $\vec{F} = -k^2 m.\vec{r}$. Trong đó $\vec{r}$ là véctơ định vị của chất điểm và k là hệ số tỷ lệ. Hãy xác định phương trình chuyển động và quỹ đạo của chất điểm ấy. Biết rằng tại thời điểm ban đầu x = l, y = 0, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.



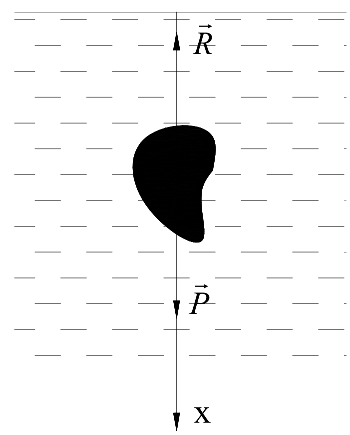
Hình 6

Ví dụ 1.4: Vật có trọng lượng P bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên trên mặt phẳng nằm ngang nhau dưới tác dụng của lực $\vec{R}$ có hướng không đổi và có trị số tăng tỷ lệ với thời gian theo quy luật R=kt. Tìm quy luật chuyển động của vật.

Ví dụ 1.5 : Giải bài toán vật rơi trong không khí từ độ cao không lớn lắm và sức cản tỷ lệ với bình phương của vận tốc :

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2$$

trong đó ρ là mật độ môi trường, S là diện tích hình chiếu của vật trên mặt phẳng vuông góc với phương chuyển động, biết rằng khi t = 0, x = v_x = 0.



Hình 7

CHƯƠNG II
CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Các định lý tổng quát của động lực học là hệ quả của định luật cơ bản của động lực học, chúng ta thiết lập mối liên hệ giữa các đại lượng cơ bản của chuyển động là động lượng, động năng và độ đo cơ bản tác dụng của lực là xung lượng và công.

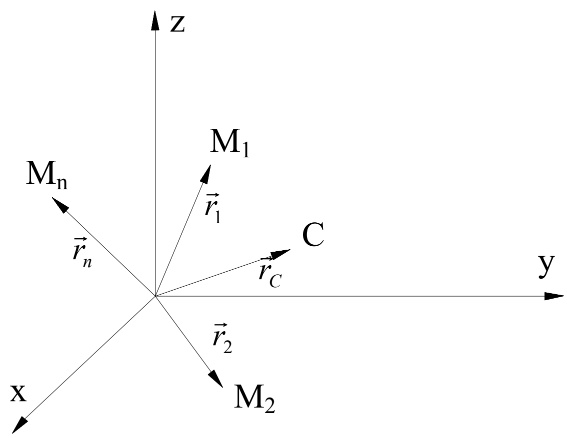
Trong nhiều trường hợp, nhất là trong động lực học việc tích phân hệ phương trình chuyển động (1.8) là việc làm hết sức phức tạp, hơn nữa trong phần lớn các bài toán động lực học của hệ, vấn đề chính không phải là khảo sát một cách chi tiết toàn bộ chuyển động của chất điểm thuộc hệ mà chỉ nghiên cứu các hiện tượng theo từng mặt riêng biệt có tầm quan trọng trong thực tiễn. Để giải quyết những bài toán như vậy sử dụng các định lý tổng quát sẽ làm cho quá trình giải đơn giản và nhanh chóng hơn.

§1. CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI LƯỢNG CỦA HỆ VÀ VẬT RẮN

1.1 Khối lượng của hệ - Khối tâm :

Như chúng ta đã biết, chuyển động của một cơ hệ ngoài việc phụ thuộc vào lực tác dụng còn phụ thuộc vào tổng khối lượng và phân bố các khối lượng của hệ đó. Khối lượng của hệ bằng tổng lượng của tất cả các phần tử hợp thành hệ đó :

$$M = \sum m_k$$



Hình 8

Khối tâm của một cơ hệ gồm n chất điểm ($M_1, M_2, ..., M_n$) khối lượng tương ứng là ($m_1, m_2, ..., m_n$) và có vị trí được xác định bởi các véctơ bán kính $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ là một điểm hình học C được xác định bởi công thức :

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M} \qquad (2.1)$$

Chiếu lên các trục toạ đô ta được :

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_k x_k}{M} \\ y_C = \dfrac{\sum m_k y_k}{M} \\ z_C = \dfrac{\sum m_k z_k}{M} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Từ các công thức trên chúng ta thấy rằng nếu cơ hệ nằm trong trọng trường đồng nhất thì khối tâm của cơ hệ sẽ trùng với trọng tâm của nó. Cũng cần nói thêm rằng, khối tâm được xác định theo công thức (2.1) hoăc (2.2) luôn luôn tồn tại như một thuộc tính của cơ hệ, còn trọng tâm của vật chỉ có nghĩa khi cơ hệ nằm trong trường trọng lực, khái niệm trọng tâm sẽ mất khi không còn trọng lượng. Đó là điều khác nhau cần phân biệt đối với hai khái niệm này.

1.2 Mômen quán tính :

Vị trí của khối tấm chưa đặc trưng hoàn toàn cho sự phân bố khối lượng của cơ hệ. Vì vậy trong cơ học cốnc một đặc trưng cho sự phân bố khối lượng mômen quán tính.

- Mômen quán tính của một vật thể (một cơ hệ) đối với trục Oz là đại lượng vô hướng bằng tổng các tích của khối lượng của điểm với bình phương khoảng cách từ các điểm tới trục.

$$J_z = \sum m_k d^2{}_k \qquad (2.3)$$

Nếu toạ độ của các điểm trong một hệ trục toạ độ Oxyz nào đó là x_k, y_k, z_k thì mômen quán tính của hệ đối với các trục toạ độ sẽ là :

$$\begin{cases} Jx = \sum m_k (y^2{}_k + z^2{}_k) \\ Jy = \sum m_k (x^2{}_k + z^2{}_k) \\ Jz = \sum m_k (y^2{}_k + x^2{}_k) \end{cases} \qquad (2.4)$$

Trong kỹ thuật mômen quán tính của vật thể đối với trục thường được biểu thị dưới dạng tích của khối lượng với bình phương của một khoảng cách trung bình nào đó.

$$J_z = M\rho^2{}_z \qquad (2.5)$$

Đại lượng $\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}}$ gọi là bán kính quán tính của một vật đối với trục z.

II. Mômen quán tính của vật thể (cơ hệ) :

Đối với một điểm O nào đó là đại lượng vô hướng bằng tổng các tích các khối lượng với bình phương khoảng cách từ các chất điểm tới tâm đó.

$$J_O = \sum m_k . r^2{}_k \qquad (2.6)$$

Nếu O là gốc toạ độ thì tương ứng với (2.4) ta có :

$$J_O = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k + z^2{}_k) \qquad (2.7)$$

và ta có mối liên hệ : $2J_0 = J_x + J_y + J_z$.

III. Mômen quán tính của vật thể đối với các trục song song. Định lý Huygen :

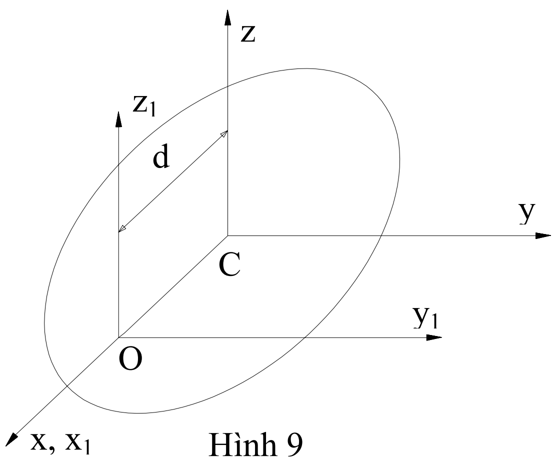
Định lý 1.1 : Mômen quán tính của vật đối với một trục z_1 nào đó bằng mômen quán tính đối với trục x đi qua khối tâm và song song với z_1 cộng với tích khối lượng của vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục.

$$J_{z1} = J_{Zc} + Md^2$$

Chứng minh :

Qua C dựng hệ trục toạ độ Cxyz sao cho trục x cắt z_1 tại O. Qua O dựng hệ trục toạ độ $Ox_1y_1z_1$ sao cho $x_1 \equiv x$.

Theo công thức thứ ba của (2.4) ta có :



Hình 9

$$J_{z1} = \sum m_k (x^2{}_{1k} + y^2{}_{1k})$$

$$J_z = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k)$$

ta có :

$$x_{1k} = x_k - d\,,\; y_{1k} = y_1$$

nên : $J_{z1} = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k) + \left(\sum m_k\right) d^2 - 2.d\left(\sum m_k x_k\right)$

nhưng : $J_{zc} = \sum m_k (x^2{}_k + y^2{}_k)$, $2.d\left(\sum m_k x_k\right) = 2dM_C = 0$ (vì C chính là gốc toạ độ)

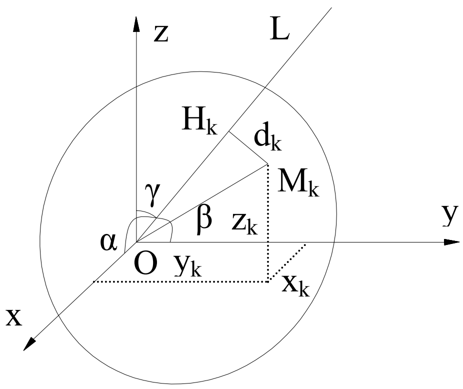
nên : $J_{z1} = J_{Zc} + Md^2$

Từ định lý này ta suy ra rằng đối với các trục trùng phương, mômen quán tính đối với trục qua khối tâm là nhỏ nhất.

IV. ĐỊNH LÝVỀ MÔMEN QUÁN TÍNH ĐỐI VỚI TRỤC QUA GỐC TOẠ ĐỘ :

Cho hệ trục toạ độ Oxyz và trục L đi qua O. Phương của L được xác định bởi ba góc chỉ phương α, β, γ (Hình 10).

Gọi khoảng cách từ điểm M_k bất kỳ thuộc vật đến trục L là $d_k = M_kH_k$. Theo định nghĩa :



Hình 10

$$J_L = \sum m_k d^2{}_k$$

Từ tam giác vuông H_kOM_k ta có :

$$d^2 = M_kH^2{}_k = OM^2{}_k - OH^2{}_k \quad (*)$$

Trong đó :

$$OM^2{}_k = x^2{}_k + y^2{}_k + z^2{}_k$$

OH_k là hình chiếu của $\overrightarrow{OM}_k$ lên trục L. Chiếu hai vế đẳng thức véctơ : $\overrightarrow{OM}_k = x_k.\vec{i} + y_k.\vec{j} + z_k\vec{k}$ lên trục L ta được :

$$OH_k = x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma$$

Thay vào (*) ta được :

$$d^2{}_k = x^2{}_k + y^2{}_k + z^2{}_k - (x_k\cos\alpha + y_k\cos\beta + z_k\cos\gamma)^2 = x^2{}_k(1 - \cos^2\alpha) + y^2{}_k(1 - \cos^2\beta) + z^2{}_k(1 - \cos^2\gamma) - 2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta - 2x_kz_k\cos\alpha\cos\gamma - 2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma.$$

Chú ý rằng : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Ta có :

$$d^2{}_k = x^2{}_k(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2{}_k(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) + z^2{}_k(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - 2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta - 2x_kz_k\cos\alpha\cos\gamma - 2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma$$

$$d^2{}_k = (y^2{}_k + z^2{}_k)\cos^2\alpha + (z^2{}_k + x^2{}_k)\cos^2\beta + (x^2{}_k + y^2{}_k)\cos^2\gamma - 2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta - 2x_kz_k\cos\alpha\cos\gamma - 2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma.$$

Do đó mômen quán tính của vật đối với L bằng :

$$J_L = \cos^2\alpha\sum m_k(y^2{}_k + z^2{}_k) + \cos^2\beta\sum m_k(y^2{}_k + x^2{}_k) + \cos^2\gamma\sum m_k(x^2{}_k + y^2{}_k) - $$
$$- 2\cos\beta\cos\gamma\sum m_ky_kz_k - 2\cos\alpha\cos\gamma\sum m_kz_kx_k - 2\cos\alpha\cos\beta\sum m_kx_ky_k$$

Hay:

$$J_L = J_x.\cos^2\alpha + J_y.\cos^2\beta + J_z.\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

Trong đó J_x, J_y, J_z là mômen quán tính của vật đối với các trục toạ độ còn các đại lượng :

$$J_{yz} = \sum m_k y_k z_k \ , \ J_{zx} = \sum m_k z_k x_k \ , \ J_{xy} = \sum m_k x_k y_k \qquad (2.10)$$

(2.10) được gọi là những mômen tích quán tính (hay còn gọi là mômen quán tính ly tâm) của vật trong hệ toạ độ Oxyz.

Với công thức (2.9) chúng ta đã chứng minh được định lý 1.2 :

Mômen quán tính của vật thể đối với một trục bất kỳ đi qua gốc toạ độ hoàn toàn có thể xác định được nếu biết toạ độ và mômen quán tính trong hệ toạ độ đó.

V. Trục quán tính chính và trục quán tính chính trung tâm :

Ta thấy các đại lượng J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} phụ thuộc vào vị trí của điểm O và phương của các trục tọa độ. Nếu đối với một hệ trục tọa độ Oxyz nào đó ta có $J_{xy} = J_{yz} = 0$ thì trục Oz được gọi là trục quán tính chính của vật thể đối với điểm O. Có thể chứng minh được rằng tại mỗi điểm của vật thể luôn luôn tồn tại ba trục quán tính chính vuông góc với nhau. Các trục quán tính chính đối với khối tâm được gọi là trục quán tính chính trung tâm.

Mômen quán tính của vật đối với trục quán tính chính gọi là mômen quán tính chính, còn đối với trục quán tính chính trung tâm thì gọi là mômen quán tính chính trung tâm.

Dễ dàng chứng minh được rằng trục quán tính chính trung tâm của vật là trục quán tính chính đối với mọi điểm thuộc trục ấy.

Trục quán tính của vật đối xứng đồng chất có thể tìm được dễ dàng nhờ hai định lý sau đây :

Định lý 1.3: Trục đối xứng của vật đồng chất là trục quán tính chính của vật đối với mọi điểm thuộc trục ấy.

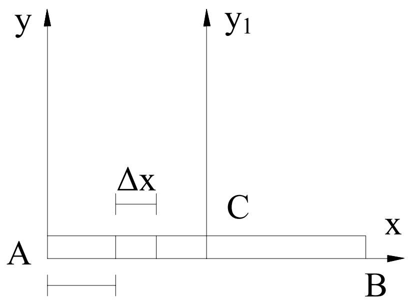
Định lý 1.4: Trục thẳng góc với mặt phẳng đối xứng của vật đồng chất là trục quán tính chính đối với giao điểm của trục và mặt phẳng đối xứng.

Hai định lý này dễ dàng được chứng minh bằng cách sử dụng tính đối xứng của vật thể để tính các biểu thức của mômen quán tính ly tâm.

VI. Cách tính mômen quán tính của một số vật đồng chất đơn giản :

a) Thanh đồng chất : Tính mômen quán tính của thanh mảnh AB đồng chất có chiều dài l và khối lượng M, đối với trục Ay vuông góc với thanh và đi qua đầu A của nó (Hình 11). Muốn vậy ta chia thanh ra nhiều phần tử. Xét một phần tử cách

Ay một khoảng x_k và có độ dài Δx_k khối lượng của nó là $m_k = \gamma\Delta x_k$ (γ là khối lượng riêng trên một đơn vị độ dài : $\gamma = M/l$)



Hình 11

Mômen quán tính của thanh đối với trục Ay bằng :

$$J_{Ay} = \sum m_k d^2{}_k = \sum \gamma x^2{}_k \Delta x_k$$

Chuyển tổng đó tới hạn ta được :

$$J_{Ay} = \int_0^l \gamma x^2 dx = \frac{\gamma l^3}{3} = \frac{1}{3}Ml^2$$

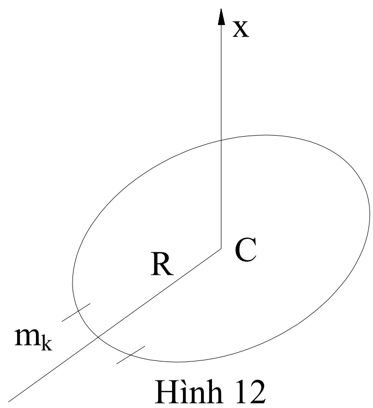
Áp dụng địng lý Huygen ta có thể chứng minh được mômen quán tính của thanh đối với trục khác vuông góc với thanh. Khi trục đi qua điểm giữa của thanh ta có :

$$J_{Cy1} = J_{Ay} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2 - \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{12}Ml^2$$

b)Vòng tròn đồng chất : Tính mômen quán tính của một vòng tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục C qua tâm C của vòng trìn và thẳng góc với mặt phẳng của nó. (Hình 11).

Ta có :

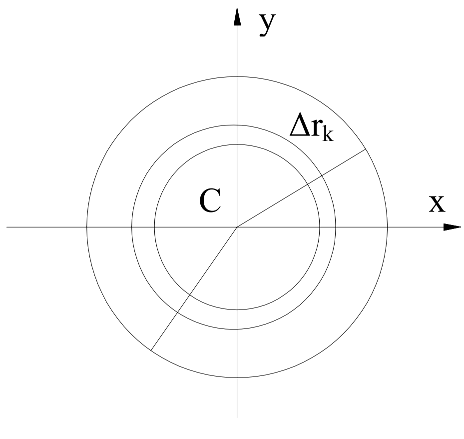
$$J_{Cz} = \sum m_k r^2{}_k = \sum m_k R^2 = MR^2 \qquad \text{(b)}$$



Hình 12

Công thức (b) cũng được dùng để tính mômen quán tính của vỏ hình trụ mỏng đối với trục của nó.

c)Tấm tròn đồng chất : Tính mômen quán tính của một tấm tròn mỏng đồng chất bán kính R, khối lượng M, đối với trục Cz qua tâm, thẳng góc với tấm và đối với các trục Cx, Cy trùng với trục đường kính của nó.



Hình 13

Muốn vậy, chia tấm thành nhiều vành tròn nhỏ, mỗi vành tròn có bán kính r_k độ rộng Δr_k và khối lượng $m_k = \gamma 2\pi r_k \Delta r_k$, trong đó γ là khối lượng riêng trên một đơn vị diện tích $\gamma = \frac{M}{\pi R^2}$

Theo công thức (b) mômen quán tính vành k đối với trục Cz bằng :

$$\Delta J_{Cz} = m_k r^2_k = \gamma 2\pi r_k \Delta r_k r^2_k = \gamma 2\pi r^3_k \Delta r_k$$

Mômen quán tính của tấm tròn đối với trục Cz bằng tổng của mômen quán tính của các vành tròn đối với trục đó :

$$J_{Cz} = \sum \Delta J_{Cz} = \sum \gamma 2\pi r_k^{\ 3} \Delta r_k$$

Chuyển tới giới hạn ta có :

$$J_{Cz} = \int_0^R \gamma 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2}\gamma \pi R^4 = \frac{1}{2} MR^2 \qquad \text{(c)}$$

Để tính các mômen quán tính J_{cx}, J_{cy} của tấm đối với trục Cx, Cy ta nhận thấy rằng với mọi điểm thuộc tấm $Z_k = 0$, vì vậy theo công thức (2.4) :

$$J_{Cx} = \sum m_k y_k^{\ 2}\ ,\ J_{Cy} = \sum m_k x_k^{\ 2}\ ,\ J_{Cz} = \sum m_k (x_k^{\ 2} + y_k^{\ 2})$$

Từ đó suy ra :

$$J_{Cx} + J_{Cy} = J_{Cz}.$$

Sự phân bố khối lượng của tấm đối với các trục Cx, Cy là hoàn toàn như nhau, vì vậy ta có :

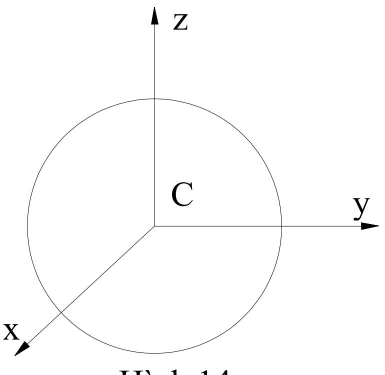
$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{1}{2} J_{Cz} = \frac{1}{4} MR^2$$

d)Khối cầu đồng chất : Do tính đối xứng nên trong trường hợp này :

$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{1}{2} J_{Cz} = \frac{2}{5} MR^2 \qquad \text{(d)}$$

e) Tấm chữ nhật khối lượng M có cạnh AB = a, BD = b (trục x hướng theo Ab, y hướng theo BD):

$$J_x = \frac{1}{3} Mb^2\ ,\ J_y = \frac{1}{3} Ma^2 \quad \text{(e)}$$



Hình 14

f) Khối nón liên tục có khối lượng M, bán kính đáy R (z hướng theo khối nón)

$$J_z = 0.3MR^2 \qquad \text{(f)}$$

§2. ĐỊNH LÝ VỀ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÝ VỀ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM.

2.1 Định lý về biến thiên động lượng :

1. Động lượng : Động lượng của chất điểm là một đại lượng véctơ bằng tích khối lượng của chất điểm với véctơ vận tốc của nó :

$$\vec{k} = m.\vec{v} \qquad (2.11)$$

- Động lượng của hệ là tổng hình học động lượng của tất cả các chất điểm của nó.

$$\vec{K} = \sum m_k.\vec{v}_k \qquad (2.12)$$

Nếu hệ nhiều vật thì động lượng của hệ bằng tổng hình học động lượng của mỗi vật. Đơn vị đo động lượng là kg.m/s.

Động lượng có thể xác định qua khối lượng của hệ và vận tốc của khối tâm. Thật vậy theo định nghĩa khối tâm ta có :

$$\sum m_k \vec{r}_k = M.\vec{r}_C$$

Đạo hàm hai vế lên theo thời gian ta được :

$$\sum m_k \dot{\vec{r}}_k = M.\dot{\vec{r}}_C$$

Hay :

$$\sum m_k \vec{v}_k = M.\vec{v}_C$$

Thế vào (2.12) ta được :

$$\vec{K} = M\vec{v}_C \qquad (2.13)$$

Vậy : Động lượng của hệ bằng tích khối lượng của toàn hệ với vận tốc khối tâm của nó.

Hình chiếu véctơ động lượng lên các trục tọa độ sẽ là :

$$K_x = \sum m_k \dot{x}_k = M\dot{x}_C,\ \ K_y = \sum m_k \dot{y}_k = M\dot{y}_C,\ \ K_z = \sum m_k.\dot{z}_k = M\dot{z}_C$$

Từ (2.13) suy ra rằng động lực của cơ hệ đối với hệ trục bất kỳ Cx'y'z' có gốc tọa độ ở khối tâm C và chuyển động cùng với tâm này sẽ bằng không vì đối với hệ tọa độ này $\vec{v}_C = 0$. Một trường hợp riêng thường gặp sẽ là chuyển động của một vật rắn quanh một trục cố định. Nếu trục quay đi qua khối tâm thì động lượng của vật trong chuyển động đó sẽ bằng không.

II. Xung lượng lực :

Để biểu thị tác dụng của lực lên một vật thể trong một khoảng thời gian người ta đưa ra khái niệm xung lượng của lực.

Đại lượng véctơ, kí hiệu $d\vec{s}$ bằng lực nhân với khoảng thời gian vô cùng bé dt :

$$d\vec{s} = \vec{F}.dt \quad (2.14)$$

gọi là xung lượng nguyên tố của lực.

Xung lượng của lực trong khoảng thời gian hữu hạn từ t_0 đến t_1 nào đó là đại lượng :

$$\vec{s} = \int_{t0}^{t1} \vec{F}dt \quad (2.15)$$

Hình chiếu xung lượng của lực trên các trục tọa độ sẽ là :

$$S_x = \int_{t0}^{t1} F_x dt, \quad S_y = \int_{t0}^{t1} F_y dt, \quad S_z = \int_{t0}^{t1} F_z dt \quad (2.16)$$

III. Định lý về động lượng :

Định lý 2.1 : Đạo hàm theo thời gian động lượng của chất điểm bằng tổng hình học các lực tác dụng lên chất điểm ấy.

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k \qquad (2.17)$$

Phương trình (2.17) thực tế là một cách viết khác phương trình cơ bản của động lực học (1.4).

Định lý 2.2 : Đạo hàm theo thời gian của động lượng của cơ hệ bằng véctơ, chính các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}^e{}_k \qquad (2.18)$$

Chứng minh: Gọi tổng các ngoại lực và tổng các nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k là $\vec{F}^e{}_k$ và $\vec{F}^i{}_k$.

Theo (2.17) đối với mọi điểm thuộc hệ ta có :

$$\frac{d(m_k\vec{v}_k)}{dt} = \vec{F}^e{}_k + \vec{F}^i{}_k \qquad (k = 1,2...n)$$

Cộng từng vế phương trình này ta được :

$$\frac{d}{dt}\sum m_k\vec{v}_k = \sum \vec{F}^e{}_k + \sum \vec{F}^i{}_k$$

Vì $\sum \vec{F}^i{}_k = 0$ và $\sum m_k\vec{v}_k = \vec{K}$ nên :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}^e{}_k \text{ (Định lý đã được chứng minh)}$$

Định lý 2.3 : Biến thiên động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian nào đó bằng tổng xung lượng của các lực tác dụng lên chất điểm trong khoảng thời gian đó.

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k \qquad (2.19)$$

Chứng minh: Từ (2.17) ta có :

$$d(m\vec{v}) = \sum \vec{F}_k.dt$$

Tích phân hai vế đẳng thức này với các cận tương ứng ta được :

$$\int_{m\vec{v}0}^{m\vec{v}1} d(m\vec{v}) = \int_{to}^{t1}\sum \vec{F}_k.dt = \sum\int_{t0}^{t1}\vec{F}_k dt = \sum \vec{S}_k$$

Hay : $m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k$.

Định lý 2.4 : Biến thiên động lượng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng xung lượng của tất cả các ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian đó.

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}^e{}_k \qquad (2.20)$$

Chứng minh : Từ (2.18) ta có :

$$d\vec{K} = \sum \vec{F}^e{}_k.dt$$

Tích phân hai vế đẳng thức này với các cận tương ứng ta được :

$$\int_{\vec{k}0}^{\vec{k}1} d\vec{K} = \int_{to}^{t1}\sum \vec{F}^e{}_k.dt = \sum\int_{t0}^{t1}\vec{F}^e{}_k dt = \sum \vec{S}^e{}_k$$

Hay : $\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}^e{}_k$.

Các định lý 2.1, 2.2 là định lý biến thiên động lượng của chất điểm dưới dạng vi phân còn các định lý 2.3 và 2.4 là các định lý viết dưới dạng hữu hạn.

Chiếu các hệ thức (2.17), (2.18), (2.19) và (2.20) xuống các trục tọa độ chúng ta sẽ được các biểu thức vô hướng thường dùng trong tính toán.

IV. Định luật bảo toàn động lượng :

Từ biểu thức (2.18) suy ra rằng :

Nếu $\sum \vec{F}^e{}_k = 0$ thì $\vec{K} = \overrightarrow{const}$

Đẳng thức (2.21) biểu thị định luật bảo toàn động lượng của hệ.

Nếu tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ luôn luôn bằng không thì véctơ động lượng của hệ sẽ không thay đổi.

Trong thực tế xảy ra những trường hợp khi $\sum \vec{F}_k \neq 0$ nhưng tổng hình chiếu của các ngoại lực lên một trục nào đó bằng không chúng ta sẽ có định luật bảo toàn hình chiếu động lượng của hệ lên hệ trục đó như sau:

Nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên hệ trên một trục nào đó bằng không thì hình chiếu véctơ động lượng lên trục đó sẽ không thay đổi.

2.2 Định lý chuyển động của khối tâm :

Nếu ta tính động lượng của hệ theo công thức (2.13) qua vận tốc khối tâm của hệ và thay vào biểu thức (2.18) ta được :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{W}_C) = M\vec{W}_C = \sum \vec{F}^e{}_k \qquad (2.22)$$

Biểu thức (2.22) được phát biểu dưới dạng một định lý như sau :

Định lý 2.5: Trong chuyển động của cơ hệ một khối tâm chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của toàn hệ và chịu tác dụng của lực được biểu diễn bằng véctơ chính của ngoại lực đã đặt vào hệ.

Chiếu (2.22) lên các trục toạ độ ta được :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum F^e{}_x \\ M\ddot{y}_C = \sum F^e{}_y \\ M\ddot{z}_C = \sum F^e{}_z \end{cases} \qquad (2.22')$$

Các phương trình (2.22') là những phương trình vi phân chuyển động khối tâm của hệ trong toạ độ Đề-cát.

Từ (2.22) ta thấy rằng nếu $\sum \vec{F}^e{}_k = 0$ thì $\vec{W}_C = 0$ hay $\vec{W}_C = const$ nghĩa là :

Nếu véctơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ bằng không thì khối tâm của hệ sẽ đứng yên hay chuyển động thẳng đều.

Đó là định luật bảo toàn chuyển động khối tâm của cơ hệ.

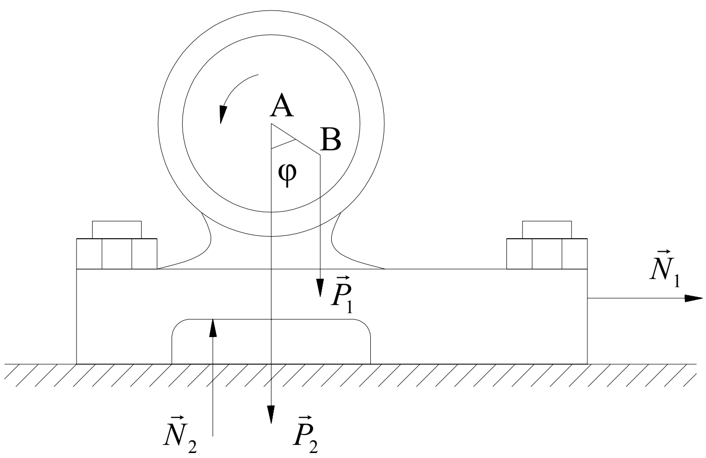
Tương tự như đã nói ở phần trên nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trên một trục nào đó bằng không thì hình chiếu của khối tâm trên trục đó sẽ đứng yên hay chuyển động thẳng đều.

Một số ví dụ minh hoạ :

1. Hiện tượng súng giật khi bắn : Xét cơ hệ gồm súng và đạn trong nòng súng. Khi đạn nổ xuất hiện một xung lực, xung lực đó là nội lực, không thể làm thay đổi chuyển động khối tâm của cơ hệ vì vậy nên đạn bay về phía trước thì súng sẽ chuyển động theo chiều ngược lại gây ra hiện tượng giật.
2. Người ta không thể đi được trên mặt phẳng nằm ngang trơn lý tưởng bởi vì tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên người, gồm trọng lực và phản lực pháp tuyến của mặt phẳng trên phương ngang bằng không. Lực của cơ bắp là nội lực không thể làm cho cơ thể di chuyển được. Trong thực tế chúng ta đi được là nhờ lực ma sát giữa bàn chân và mặt ngang.

Ví dụ 2.1 : Khối lượng bánh đà của một mô-tơ bằng m_1 còn khối lượng các phần còn lại là m_2. Bánh đà quay đều với vận tốc góc ω.

Khối tâm của nó lệch trục một khoảng AB = a. Tính phản lực tựa của nền và bu-lông giữ mô-tơ với giả thuyết rằng phản lực tương đương với một hợp lực với các thành phần $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ (Hình vẽ)



Hình 15

Giải :

Những ngoại lực tác dụng lên mô-tơ trong trường hợp này là $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ và $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Phương trình (2.22) chiếu lên các trục tọa độ x, y sẽ là :

$$M\ddot{x}_C = N_1$$
$$M\ddot{y}_C = N_2 - (m_1 + m_2)g$$

trong đó : M = $m_1 + m_2$. C là khối tâm của cơ hệ.

Trong trường hợp này chuyển động của khối tâm đã biết qua quy luật quay của bánh đà cụ thể là :

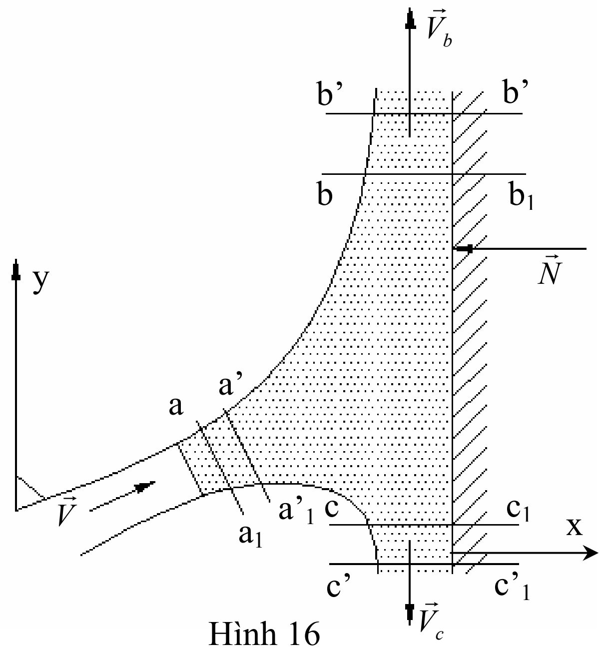
$$Mx_C = m_2 x_A + m_1(x_A + a\sin\omega t)$$
$$My_C = m_2 y_A + m_1(y_A - a\cos\omega t)$$

Vì : x_A = const, y_A = const nên :

$$M\ddot{x}_C = -m_1 a\omega^2 \sin\omega t$$
$$M\ddot{y}_C = m_1 a\omega^2 \cos\omega t$$

Nên :
$$N_1 = -m_1 a\omega^2 \sin\omega t$$
$$N_2 = (m_1 + m_2)g + m_1 a\omega^2 \cos\omega t$$

Ví dụ 2.2: (Áp dụng dòng chảy lỏng). Một cột chất lỏng chảy ra từ ống có diện tích thiết diện là S với vận tốc $\vec{v}$ nghiêng một góc so với phương thẳng đứng (hình 16). Xác định áp lực tổng hợp của dòng chảy lên tường đứng, xem dòng chảy là dừng.



Hình 16

Giải : Sử dụng phương trình (2.20) cho khối chất lỏng giới hạn bởi các thiết diện aa_1, bb_1, cc_1. Bỏ qua áp lực tại thiết diện aa_1và xem rằng khi gặp tường các phần tử chất lỏng không bị bắn trở lại.

Xét trong khoảng thời gian $t_1 - t_0 = 1$ giây. Ngoại lực tác dụng lên khối chất lỏng trong thời gian gồm trọng lực và phản lực $\vec{N}$.

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \int_{t0}^{t1} (\vec{P} + \vec{N})dt \qquad \text{(a)}$$

Trong khoảng thời gian 1 giây các thiết diện aa_1, bb_1, cc_1 dịch chuyển đến các vị trí $a'a'_1$, $b'b'_1$, $c'c'_1$ và biến thiên động lượng của khối nước trong khoảng thời gian đó sẽ là :

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = -m_1\vec{v}_a + m_2\vec{v}_b + m_3\vec{v}_c \qquad \text{(b)}$$

Trong đó m_1, m_2, m_3 là khối lượng chất lỏng trong khối $aa_1a'a'_1$, $bb_1b'b'_1$, $cc_1c'c'_1$.

Ta có $m_1 = \rho Sv$ (trong đó ρ là khối lượng riêng của chất lỏng).

Thế (b) vào (a) xem N = const và chiếu hai vế lên trục x ta được ($\vec{v}_b, \vec{v}_c \perp$ x)

$$-\rho Sv^2\sin\alpha = -N$$

hay :
$$N = \rho Sv^2\sin\alpha$$

§3. ĐỊNH LÝ VỀ MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

3.1 Các định nghĩa và khái niệm :

1- Mômen của véctơ động lượng $m\vec{v}$ đối với tâm O (hay trục z) được kí hiệu là $\vec{l}_0$ hay $\vec{l}_z$ và được gọi tương ứng là mômen động lượng của điểm đối với tâm O hay trục đó.

Cách tính mômen của véctơ động lượng cũng giống như cách tính mômen của lực. Như đã biết trong phần Tĩnh học ta có :

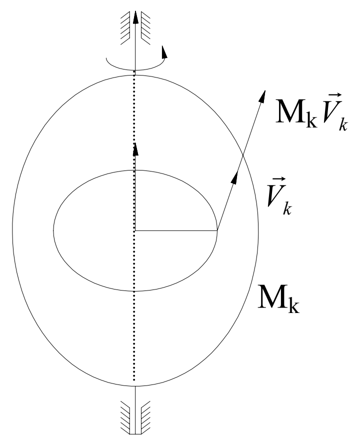
$$\vec{l}_0 = m_0(m\vec{v}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

$$l_z = m_z(m\vec{v}) = hc_z(\vec{l}_0) \quad (2.24)$$

2- Mômen chính động lượng của hệ đối với tâm (hay một trục) bằng tổng mômen động lượng của tất cả các điểm thuộc hệ đối với tâm (hay trục) đó :

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{l}_{0k} = \sum(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) \quad (2.25)$$

$$L_z = \sum l_{zk} = \sum hc_z\vec{l}_{0k} \quad (2.26)$$



Hình 17

3- Mômen chính động lượng của vật rắn quay quanh trục cố dịnh đối với trục quay của nó. Giả sử vật rắn quay quanh trục z với vận tốc góc ω. Mômen động lượng của một phần tử M_k của vật đối với trục quay sẽ là :

$$l_{zk} = r_k m_k v_k$$

mặt khác $v_k = r_k\omega$ nên $l_{zk} = m_k r_k^2\omega$. Do đó mômen chính động lượng của vật đối với trục quay sẽ là $L_z = \sum l_{zk} = \sum m_k r^2{}_k\omega = \omega\sum m_k r^2{}_k = J_z\omega$

3.2 Định lý biến thiên mômen động lượng đối với tâm (hay trục) cố định :

a) Đối với chất điểm;

Định lý 3.1: Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của chất điểm đối với một tâm (hay một trục) bằng tổng hình học (hay tổng đại số) mômen của các lực tác dụng lên chất điểm đối với cùng tâm (hay trục) ấy :

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k) \quad (2.27)$$

$$\frac{d\vec{l}_z}{dt} = \sum \vec{m}_z(\vec{F}_k) \quad (2.28)$$

Chứng minh : Giả sử chất điểm m chuyển động dưới tác dụng của hệ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Phương trình cơ bản của động lực học trong trường hợp này có dạng :

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_k$$

hay :
$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k$$

Gọi $\vec{r}$ là bán kính véctơ từ gốc hệ trục tới chất điểm. Nhân véctơ $\vec{r}$ với hai vế của đẳng thức trên ta được :

$$\vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_k$$

Ta có :
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Vì $\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$

Do đó ta có :
$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dl_0}{dt}$$

$$\vec{r} \wedge \sum \vec{F}_k = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_k = \frac{dl_0}{dt} \qquad \text{(đpcm)}$$

II. Đối với cơ hệ :

Định lý 3.2 : Đạo hàm theo thời gian mômen chính động lượng của cơ hệ đối với tâm (hay một trục) bằng tổng mômen của các ngoại lực đối với tâm (hay trục) đó :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}^e{}_k) \qquad (2.29)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum \vec{m}_z(\vec{F}^e{}_k) \qquad (2.30)$$

Chứng minh : Xét cơ hệ gồm n chất điểm, gọi $\vec{F}^e{}_k$ và $\vec{F}^i{}_k$ lần lượt là tổng các ngoại lực và tổng các nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k. Đối với từng chất điểm của hệ theo (2.27) ta có :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\ e} + \vec{r}_k \wedge \vec{F}^i{}_k$$

Cộng từng vế các đẳng thức này ta được :

$$\sum_k \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\ e} + \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}^i{}_k$$

Từ tính chất của các nội lực, ta có :

$$\sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}^i{}_k = 0$$

nên :

$$\sum_k \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\ e}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_k(\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k) = \sum_k \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{\ e}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}^e{}_k) \qquad \text{(đpcm)}$$

Theo kết quả vừa nhận được (2.29) đúng với mọi điểm O, chọn O nằm trên trục z, chiếu 2 vế đẳng thức (2.29) lên trục z ta sẽ nhận được (2.30).

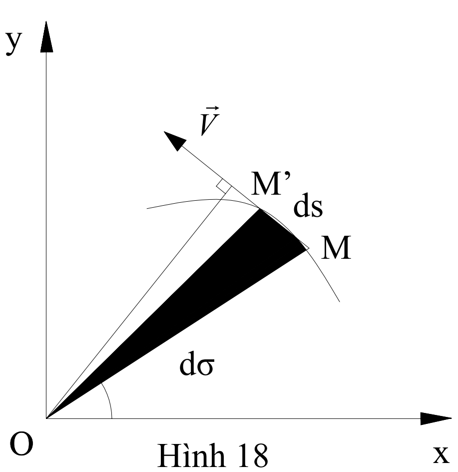
III. Định luật bảo toàn mômen động lượng :

Từ (2.29) chúng ta nhận thấy rằng, nếu :

$\sum \vec{m}_0(\vec{F}^e{}_k) = 0$ thì $\vec{L}_0 = \overrightarrow{const}$ (2.31)

Đẳng thức này biểu thị định luật bảo toàn mômen động lượng phát biểu như sau:

Nếu mômen chính của các ngoại lực tác dụng lên hệ đối với một tâm bằng không thì mômen chính động lượng của hệ đối với tâm ấy sẽ không đổi.



Hình 18

Định luật bảo toàn mômen động lượng

của cơ hệ đối với một trục được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Một hệ quả trực tiếp có tầm quan trọng trong ứng dụng thực tiễn của định luật bảo toàn mômen động lượng là trường hợp khi chất điểm chịu tác dụng của lực xuyên tâm (lực có đường tác dụng luôn đi qua 1 điểm O nào đó).

Xét chuyển động của chất điểm M chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm $\vec{F}$ (hình 17).

Vì trong trường hợp này $m_0(\vec{F}) = 0$ nên

$$\vec{m}_0(m\vec{v}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{const}$$

Vì véctơ $\vec{m}_0(m\vec{v})$ có hướng vuông góc với mặt phẳng chứa véctơ $\vec{r}$ và $\vec{v}$ nên nếu :

$\vec{m}_0(m\vec{v}) = \overrightarrow{const}$ thì véctơ $\vec{r}$ và $\vec{v}$ phải luôn nằm trong cùng một mặt phẳng, nghĩa là quỹ đạo của M là một đường cong phẳng và $|\vec{m}_0(m\vec{v})| = vh = const$.

Mặt khác : $$vh = \frac{ds}{dt}h = 2\frac{d\sigma}{dt}$$

($d\sigma$ là diện tích tam giác phân tố OMM'. Đại lượng $\frac{d\sigma}{dt}$ xác định vận tốc tăng của của diện tích phần mặt phẳng do bán kính $\overrightarrow{OM}$ quét được khi điểm M chuyển động gọi là vận tốc hạt quay vận tốc diện tích. Trong trường hợp đang xét :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{m}_0(m\vec{v})| = const$$

Những điều trên chứng tỏ rằng trong chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm, điểm chuyển động theo đường cong thẳng với vận tốc quạt không đổi, tức là chuyển động sao cho trong một khoảng thời gian bằng nhau, bán kính véctơ của điểm quét được những diện tích bằng nhau (định luật các diện tích). Đây là một trong những định luật Kepler.

Định luật bảo toàn mômen động lượng cho phép ta giải thích một số hiện tượng, chẳng hạn hiện tượng quay thân máy bay lên thẳng khi cất cánh (trong trường hợp không có cánh quạt lái). Thật vậy gọi trục Cz là trục thẳng đứng qua khối tâm C của máy bay, ta có :

$$L_Z(\text{máy bay}) + L_Z(\text{cánh quạt}) = 0$$

Do đó : L_Z(máy bay) = - L_Z(cánh quạt)

Nghĩa là máy bay phải quay ngược chiều với cánh quạt.

IV. Một số ví dụ áp dụng :

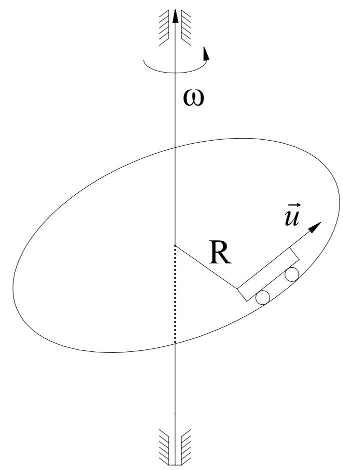
Chúng ta có thể sử dụng định lý biến thiên mômen động lượng để nghiên cứu chuyển động quay của các vật hay để nghiên cứu các hệ có vật chuyển động quay hay tịnh tiến.

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng ta có thể xác định sự biến thiên của vận tốc (hay góc quay) của một bộ phận nào đó của hệ theo độ dời vận tốc góc của bộ phận khác.

Ví dụ 2.2 : Đường ray đặt theo vành của một sân tròn nằm ngang có trọng lượng P, bán kính R. Sân cùng đầu máy trọng lượng Q đứng yên trên ray đang quay quanh trục thẳng đứng Oz với vận tốc góc ω_0. Tại thời điểm nào đó người ta bắt đầu cho máy chạy trên ray với vận tốc tương đối u (đối với sân quay) theo chiều quay của sân. Hãy xác định vận tốc góc của sân.

Bài giải : Xét hệ gồm sân quay, đầu máy. Các mômen của các ngoại lực tác dụng lên hệ đối với trục z bằng không do đó L_z = const. Xem sân quay như một đĩa tròn đồng chất ($J_z = 0.5MR^2$) còn đầu máy như một chất điểm, ta có :

$$K_{z0} = (0,5\frac{P}{g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2)\omega_0.$$



Hình 19

Khi đầu máy bắt đầu chạy, vận tốc tuyệt đối của nó bằng : $v_a = u + \omega R$, trong đó ωlà vận tốc góc tức thời của sân quay. Mômen động lượng của đầu máy đối với trục z khi đó sẽ bằng $m.v_a.R$ và của cả hệ sẽ là :

$$K_{z0} = (0,5\frac{P}{g}R^2 + \frac{Q}{g}(uR + R^2\omega)$$

Vì $K_{z1} = K_{z0}$ nên ta tìm được :

$$\omega = \omega_0 - \frac{Q}{0,5P + Q}.\frac{u}{R}$$

§4.ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

I. Động năng :

- Động năng của chất điểm là đại lượng vô hướng, kí hiệu T, bằng nửa tích khối lượng của chất điểm với bình phương vận tốc của nó :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.32)$$

- Động năng của hệ là tổng động năng của tất cả các chất điểm thuộc hệ :

$$T = \sum_k \frac{1}{2}m_k v_k{}^2 \qquad (2.33)$$

Trong trường hợp đặc biệt nếu hệ gồm nhiều vật thì động năng của hệ bằng tổng động năng của các vật.

- Động năng của vật rắn trong một số chuyển động cơ bản.

a) Vật rắn chuyển động tịnh tiến : Trong trường hợp này vận tốc của mọi điểm đều bằng nhau và bằng v_c nên :

$$T = \sum_k \frac{1}{2}m_k v_k{}^2 = \frac{1}{2}V_C{}^2 \sum m_k = \frac{1}{2}MV_C{}^2 \quad (a)$$

b) Vật rắn quay quanh trục cố định : Trong trường hợp này ta có

$$T = \sum_k \frac{1}{2}m_k v_k{}^2 = \frac{1}{2}\sum m_k(\omega.h_k)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_k.h_k = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \qquad (b)$$

c) Vật rắn chuyển động song phẳng : Như chúng ta đã biết, trong chuyển động song phẳng, tại mỗi thời điểm vận tốc các điểm thuộc vật phân bố giông như vật quay quanh trục Δ vuông góc với mặt phẳng chuyển động và đi qua tâm vận tốc tức thời P vì vậy ta có thể sử dụng công thức (b) để tính động năng trong trường hợp này :

$$T = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 \qquad (c)$$

Trong đó J_Δ là mômen quán tính của vật đối với trục quay tức thời và ω vận tốc góc tức thời.

Nếu biểu thức (c) ít được áp dụng trong thực tế vì tâm vận tốc tức thời luôn luôn thay đổi nên J cũng biến đổi theo thời gian. ta có thể dùng định lý Huygen để biến đổi (c) về dạng dễ ứng dụng hơn. Gọi J_C là mômen quán tính của vật đối với trục song song với Δ và đi qua khối tâm C.

Ta có : $J_\Delta = J_C + Md^2$ (d = CF)

Thay vào (c) ta được :

$$T = \frac{1}{2}(J_C + Md^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}Md^2\omega^2$$

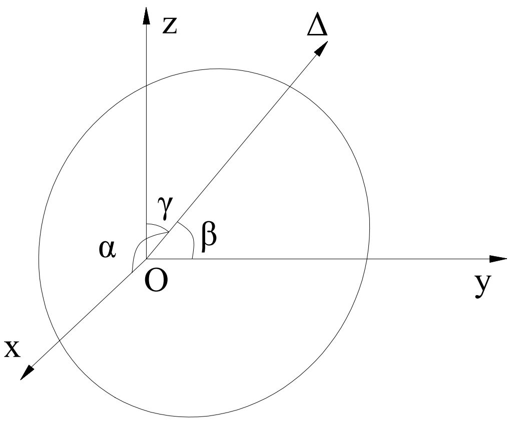
Nhưng d.ω = cp.ω = v_C, do đó :

$$T = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^{\ 2} \qquad \text{(d)}$$

d) Vật rắn quay quanh điểm cố định : Khi vật rắn quay quanh điểm cố định, tại mỗi thời điểm vận tốc các điểm thuộc vật phân bố như là vật quay quanh trục tức thời Δ đi qua điểm cố định đó vì vậy :

$$T = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 \qquad \text{(e)}$$

Nếu gọi α, β, γ là các góc chỉ phương của Δ (Hình 19)



Hình 20

Theo công thức (2.9) ta có :

$$J_\Delta = J_x.\cos^2\alpha + J_y.\cos^2\beta + J_z.\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

Thay biểu thức này vào (e) và để ý rằng :

$$\omega.\cos\alpha = \omega_x,\ \omega.\cos\beta = \omega_y,\ \omega.\cos\gamma = \omega_z$$

Ta được :

$$T = \frac{1}{2}\left[J_x.\omega_x^{\ 2} + J_y.\omega_y^{\ 2} + J_z.\omega_y^{\ 2} - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x\right] \quad \text{(f)}$$

e) Trường hợp chuyển động tổng quát : Lấy khối tâm C của vật làm cực, vận tốc của các điểm được xác định như sau :

$$\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v'}_k$$

Trong đó : $v_k = \omega h_k$

$$v_k^{\ 2} = v^2{}_c + v'^2{}_k + 2.\vec{v}_C.\vec{v}'_k$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k(v^2{}_c + v'^2{}_k + 2.\vec{v}_C.\vec{v}'_k)$$

$$= \frac{1}{2}Mv_C^{\ 2} + \frac{1}{2}\sum m_k\omega^2 h_k^{\ 2} + \vec{v}_C.\sum m_k\vec{v}'_k$$

vì : $$\frac{1}{2}\sum m_k\omega^2 h_k{}^2 = J_{cp}, \sum m_k \vec{v}'_k = M\vec{v}'_C$$

nên :

$$T = \frac{1}{2}Mv_C{}^2 + \frac{1}{2}J_{cp}.\omega^2 \qquad (g)$$

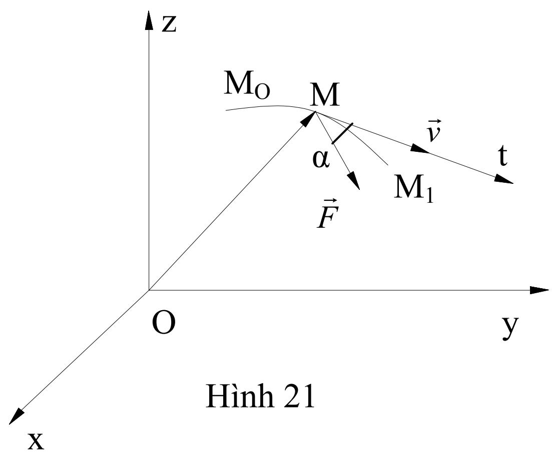
Vậy : Động năng của vật trong trường hợp chuyển động tổng quát bằng động năng của vật chuyển động tịnh tiến cùng với khối tâm cộng với động năng của chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm đó.

II. Công của lực :

Để biểu diễn tác động của lực trên độ dời của vật ta đưa vào khái niệm công của lực.

Cho lực $\vec{F}$ có điểm đặt dời chỗ trên đường cong (c) (Hình 20).

a) Công nguyên tố của lực : Công nguyên tố của lực $\vec{F}$ trên độ dời vô cùng bé ds của điểm đặt của nó là đại lượng vô hướng bằng :



Hình 21

$$dA = F\tau ds \qquad (2.34)$$

Hoặc: $$dA = Fds\cos\alpha \qquad (2.35)$$

Biểu thức công nguyên tố còn được viết dưới các dạng khác như sau :

vì ds = vdt nên dA = Fvcosαdt (2.36)

Gọi hình chiếu của $\vec{F}$ trên các trục tọa độ là F_x, F_y, F_z và của $d\vec{r}$ là dx, dy, dz biểu thức (2.37) được viết lại là :

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (2.38)$$

(2.34), (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) là các cách viết khác nhau của biểu thức công nguyên tố. Tùy các trường hợp cụ thể người ta dùng biểu thức này hoặc biểu thức khác để phép tính đơn giản hơn.

b) Công của lực trên quãng đường hữu hạn :

Công của lực trên độ dài hữu hạn bất kỳ bằng tổng các công nguyên tố do lực gây ra nên độ dời đó :

$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA \qquad (2.39)$$

Đơn vị tính công là Jun hay Niutơn.mét.

$$1\ J = 1\ N.m = 1m^2kg^{-2}$$

Tùy dạng của biểu thức công nguyên tố mà khi tính công hữu hạn ta có các tích phân đường loại 1 hay loại 2.

III. Công mất :

Công mất là công sinh ra trong một đơn vị thời gian :

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad (2.40)$$

Đon vị đo công suất là W.

$$1W = 1J/s$$

IV. Cách tính công trong một số trường hợp :

1. Công của trọng lực : Giả sử điểm M chịu tác dụng của trọng lực P dời chỗ từ $M_O(x_0, y_0, z_0)$ đến $M_1(x_1, y_1, z_1)$ theo đường cong M_0M_1. Với hệ trục như hình vẽ, áp dụng công thức (2.38) ta có:

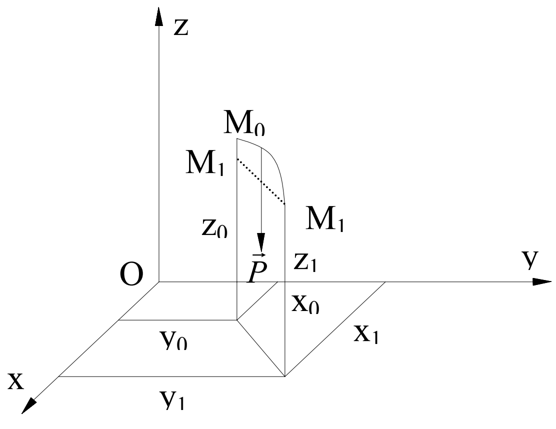
$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \int_{M0M1} (-P)dz = \int_{z0}^{z1} -Pdz = P(Z_0 - Z_1)$$

Gọi $|z_0 - z_1| = h$ ta có :

$AM_0M_1 = \pm Ph \qquad (2.41)$

Ta lấy dấu + nếu M_O ở cao hơn M_1 và lấy dấu – trong trường hợp ngược lại.

Với kết quả trên ta thấy rằng với công của trọng lực không phụ thuộc vào quỹ đạo chuyển của M và chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và cuối của quãng đường di chuyển.



Hình 22

2. Công của lực đàn hồi : Trong một số trường hợp, các liên kết tác dụng lên chất điểm khảo sát những tỷ lệ với các véctơ định vị của chất điểm so với một tâm gọi là tâm đàn hồi, lực như vậy gọi là lực đàn hồi (ví dụ lực của lò xo chẳng hạn)

$\vec{F} = -c\vec{r}$

$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA = \int_{M0M1} -c\vec{r}d\vec{r} = -\frac{c}{2}\int_{r0}^{r1} d(r^2) = -\frac{c}{2}(r_1^{\ 2} - r_0^{\ 2}) \qquad (2.42)$$

3. Công của lực tác dụng lên vật rắn chuyển động :

a) Trường hợp vật chuyển động tịnh tiến:

$$dA = \vec{F}d\vec{r}_C \quad (2.43)$$

b) Vật quay quanh trục cố định :

Vận tốc của điểm đặt lực M:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_M$$

$$dA = \vec{F}.d\vec{r}_M = \vec{F}.\vec{v}.dt = \vec{F}.(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_M).dt = \vec{\omega}.(\vec{r}_M \wedge \vec{F}).dt = \vec{\omega}.\vec{m}_O(\vec{F}).dt = \omega.m_\Delta(\vec{F}).dt$$

Với Δ là trục quay.

Vậy : $$dA = \omega.m_\Delta(\vec{F}).dt = m_\Delta(\vec{F}).d\varphi \qquad (2.44)$$

c) Vật chuyển động tổng quát :

Chọn điểm A tùy ý làm cực, điểm đặt M của lực $\vec{F}$ có vận tốc :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \ \text{(với } \vec{r} = \overrightarrow{AM}\text{)}$$

Nên : $$dA = \vec{F}d\vec{r}_M = \vec{F}.\vec{v}_M.dt = \vec{F}.\vec{v}_A.dt + \vec{F}.(\vec{\omega} \wedge \vec{r}).dt$$

Theo các phép biến đổi đã trình bày ở phần *a)* và *b)* ta có :

$$dA = \vec{F}.d\vec{r}_A + m_\Delta(\vec{F}).d\varphi \qquad (2.45)$$

trong đó Δ- là trục quay tức thời của vật đi qua A.

4. Công của lực ma sát tác dụng lên vật lăn :

Giả sử bánh xe O lăn không trượt trên mặt phẳng nhám, lực ma sát $\vec{F}_{msM1}$ cản lại sự trượt của điểm tiếp xúc B.

Công nguyên tố của lực ma sát bằng :

$$dA = \vec{F}_{msmB}\vec{v}_B.dt$$

Vì B là tâm vận tốc của vật lăn không trượt nên $\vec{v}_B = 0$ nên dA = 0.

Vậy : khi lăn không trượt, công của lực ma sát trượt trong chuyển dời bất kỳ của vật bằng không.

Trong trường hợp vật trượt, công của lực ma sát luôn luôn âm.

5. Công của các nội lực của vật không biến hình :

Xét hai phần tử M_1 và M_2 thuộc vật. Lực tác dụng tương hỗ giữa chúng là $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ và có phương theo đường thẳng nối hai điểm đó. Công nguyên tố của các lực đó trên các độ dời $d\vec{r}_1$ và $d\vec{r}_2$ hiệu là dA_1 và dA_2 ta có :

$$dA_1 + dA_2 = \vec{F}_{12}d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}\vec{v}_1dt + \vec{F}_{21}\vec{v}_2dt = \vec{F}_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)dt$$

Vì $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{M1M2}$ nên : $dA_1 + dA_2 = \vec{F}_{12}.\vec{v}_{M1M2}dt$

nhưng vì $\vec{v}_{M1M2} \perp M_1M_2$ tức vuông góc với $\vec{F}_{12}$

nên : $dA_1 + dA_2 = 0$.

vậy tổng công của tất cả các nội lực của vật rắn trong bất cứ chuyển động nào của vật đều bằng 0.

$$\sum_k dA^1{}_k = 0 \qquad (2.46)$$

V. Định lý biến thiên động năng :

Định lý 4.1 : Vi phân động năng của chất điểm bằng tổng đại số công nguyên tố của các lực tác dụng trên chất điểm ấy :

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \sum dA_k \qquad (2.47)$$

Chứng minh : Xét chất điểm chuyển động dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$.

Phương trình cơ bản của động lực học đối với chất điểm là :

$$m\vec{w} = \sum \vec{F}_k$$

Hay :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k$$

Nhân vô hướng hai vế với $d\vec{r}$ ta được :

$$m\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = \sum \vec{F}_k d\vec{r}$$

Hay :

$$m\vec{v}.d\vec{v} = \sum dA_k$$

Vì $$\vec{v}.d\vec{v} = \frac{1}{2}d(\vec{v}.\vec{v}) = \frac{1}{2}d(v^2)$$

Nên : $$m\vec{v}d\vec{v} = \frac{1}{2}md(v^2) = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

và ta có điều cần phải chứng minh.

Chú ý rằng nếu ta sử dụng khái niệm công suất thì định lý 4.1 có thể được phát biểu lại như sau :

Đạo hàm theo thời gian động năng của chất điểm bằng tổng đại số công suất của tất cả các lực tác dụng lên chất điểm đó.

Định lý 4.2 : Vi phân động năng của hệ bằng tổng đại số công nguyên tố của các ngoại lực và nội lực tác dụng vào các chất điểm của hệ:

$$dT = \sum dA^0{}_k + \sum dA^1{}_k \qquad (2.48)$$

Chứng minh : Áp dụng công thức (2.37) đối với từng chất điểm ta có :

$$d(\frac{1}{2}m_k v^2{}_k) = dA^0{}_k + dA^1{}_k$$

($dA^0{}_k$, $dA^1{}_k$ là tổng công nguyên tố của tất cả các ngoại lực, nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k)

Viết phương trình trên cho tất cả các chất điểm của hệ và cộng từng vế các đẳng thức (*) ta được :

$$d\sum(\frac{1}{2}m_k v^2{}_k) = \sum dA^0{}_k + \sum dA^1{}_k$$

Hay : $dT = \sum dA^0{}_k + \sum dA^1{}_k$ (đpcm).

Định lý 4.3: Biến thiên động năng của chất điểm trên một độ dời hữu hạn bằng tổng đại số công của các lực tác dụng lên chất điểm trên cùng độ dời đó :

$$\frac{1}{2}mv^2{}_1 - \frac{1}{2}mv^2{}_0 = \sum A_{kM0M1} \qquad (2.49)$$

Chứng minh : Tích phân 2 vế công thức (2.37) theo các cận tương ứng ta được :

$$\frac{1}{2}mv^2{}_1 - \frac{1}{2}mv^2{}_0 = \sum A_{kM0M1} \text{ (đpcm)}$$

Định lý 4.4 : Biến thiên động năng của hệ trên một chuyển dời nào đó bằng tổng đại số công của các ngoại lực và nội lực đặt vào chất điểm trên các chuyển dời tương ứng :

$$T_1 - T_0 = \sum A^0{}_k + \sum A^1{}_k \quad (2.50)$$

Chứng minh : Trong chuyển dời của hệ từ vị trí 0 đến vị trí 1 chất điểm M_k của hệ dời chỗ từ M_{k0} đến M_{k1}. Theo (2.39) ta có :

$$\frac{1}{2}m_k v^2{}_{k1} - \frac{1}{2}m_k v^2{}_{k2} = A^e{}_k + A^i{}_k$$

($A^e{}_k$, $A^i{}_k$ – Tổng công các ngoại lực và nội lực tác dụng lên chất điểm M_k trên độ dời $M_{k0}M_{k1}$).

Cộng từng vế các dẳng thức này ta được :

$$\sum\frac{1}{2}m_k v^2{}_{k1} - \sum\frac{1}{2}m_k v^2{}_{k2} = \sum A^e{}_k + \sum A^i{}_k$$

Đây là điều phải chứng minh.

Các định lý 4.1, 4.2 là định lý động năng dưới dạng vi phân, các định lý 4.3, 4.4 là định lý động năng dưới dạng hữu hạn.

Tương tự như định lý 4.1, định lý 4.2 cũng có thể phát biểu dưới dạng khác.

Đạo hàm theo thời gian động năng cua hệ bằng tổng đại số công suất của ngoại lực và nội lực đặt vào các chất điểm thuộc hệ.

§5. ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN CƠ NĂNG

I. Trường lực : Trương lực là phần không gian vật lý mà khi ta đặt một chất điểm vào đó nó phải chịu tác dụng của một lực phụ thuộc vào vị trí của chất điểm ấy.

Trường trọng lực, trường đàn hồi là những ví dụ về trường lực.

Một lực được cho bởi ba hình chiếu của nó, vì vậy trường lực được xác định bởi hàm số :

$$F_x = \Phi_1(x,y,z),\ F_y = \Phi_1(x,y,z),\ F_z = \Phi_1(x,y,z) \quad (2.51)$$

Công của lực mà trường tác dụng lên chất điểm được tính theo biểu thức (2.39). Trong trường hợp tổng quát, để tính công theo biểu thúc (2.39) ta phải biết phương trình quỹ đạo của đường cong M_0M_1. Tuy nhiên nếu biểu thức dưới dấu tích phân (2.39) :

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

là vi phân toàn phần của một hàm U(x,y,z) nào đó thì như chúng ta đã biết, ta có thể tính công A_{M0M1} không cần biết quỹ đạo điểm M. Trong trường hợp này công của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và cuối của điểm đặt di chuyển của lực.

Hàm U(x,y,z) gọi là hàm lực và trường lực như vậy gọi là trường lực thế :

$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA = \int_{M0M1} dU(x,y,z) = U_1 - U_2 \qquad (2.52)$$

II. Thế năng :

Đối với các lực chúng ta có thể đưa vào một khái niệm thế năng là đại lượng dặc trưng về "dự trữ công" của tác dụng lên chất điểm tại vị trí của nó trong trường lực.

Để so sánh mức "dự trữ công" đó với nhau ta cần chọn một vị trí "O" nào đó "dự trữ công" bằng không (điểm chọn này là tùy ý".

Thế năng của chất điểm ứng với vị trí M là đại lượng vô hướng bằng công các lực của trường có thể sinh ra trên độ dời của điểm từ vị trí M đến vị trí "O".

$$\Pi = A_{MO}$$

Từ định nghĩa này ta thấy thế năng là một hàm của các tọa độ :

$$\Pi = \Pi(x,y,z)$$

Trong đó Π được gọi là hàm thế.

Thế năng tại vị trí nào đó là tổng công mà các lực của trường lực sinh ra trên những độ dời của các chất điểm thuộc hệ từ vị trí đó về vị trí "O".

$$\Pi = A_{1O}$$

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$$

Với các định nghĩa hàm lực và thế năng như trên, nếu ta chọn hàm lực sao cho tại vị trí "O" là $U_0 = 0$ thì ta sẽ có :

$$\Pi = A_{1O} = U_0 - U_1$$

$$\Pi = -U \qquad (2.53)$$

Từ đây ta thấy rằng khi xét các trường lực có thế ta có thể lấy khái niệm thế năng tha cho hàm lực. Từ (2.52) và (2.53) ta có :

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 \qquad (2.54)$$

II. Định luật bảo toàn cơ năng :

Áp dụnh định lý biến thiên động năng cho hệ ta được :

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k + \sum A^i{}_k = \sum A_k$$

Nếu nội lực và ngoại lực tác dụng lên hệ đều là lực có thế ta có :

$$\sum A_k = \Pi_0 - \Pi_1 .$$

Do đó : $$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

hay : $$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = const \qquad (2.55)$$

Ta có định luật bảo toàn cơ năng phát triển như sau :

Khi hệ chuyển động trong trường lực thế thì tổng động năng và cơ nănng của hệ không đổi.

Tổng động năng và thế năng của cơ hệ gọi là cơ năng và kí hiệu là E.

E = T + Π.

Hệ thức (2.55) gọi là tích phân năng lượng. Cơ hệ nghiệm đúng định luật bảo toàn cơ năng gọi là hệ bảo toàn. Lực tác dụng lên hệ đó là bảo toàn.

Nếu ngoài các lực bảo toàn ra còn có những lực không bảo toàn chẳng hạn như lực ma sát, tác dụng lên hệ thì cơ năng của hệ sẽ biến đổi do có sự trao đổi năng lượng giữa hệ với môi trường nghĩa là có sự chuyển hóa năng lượng.

Định luật bảo toàn cơ năng là một trường hợp riêng của định luật bảo toàn năng lượng trong vật lý.

Chú ý rằng, trong trường hợp hệ không biến hình, như chúng ta đã biết :

$$\sum A^i{}_k = 0$$

Và định lý biến thiên động năng có dạng :

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k$$

Nếu các ngoại lực tác dụng lên hệ là lực có thế :

$$\sum A^e{}_k = \Pi^e{}_0 - \Pi^e{}_1$$

Và ta có : $$T_1 - T_0 = \Pi^e{}_0 - \Pi^e{}_1$$

$$T_1 + \Pi^e{}_1 = T_0 + \Pi^e{}_0 = const$$

Nghĩa là : Khi xét cơ hệ không biến hình, trong biểu thức (2.55) ta chỉ cần xét đến thế năng của trường ngoại lực mà không cần để ý đến hệ nội lực.

§6. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Định lý biến thiiên động năng thường được dùng để giải các bài toán :

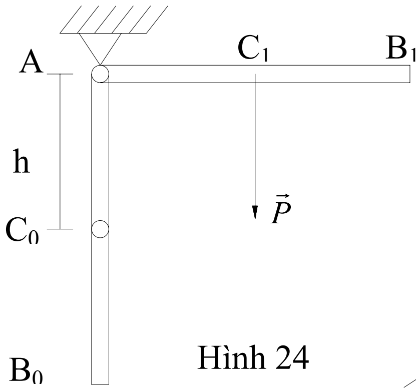
1) Tìm lực tác dụng lên vật.

2) Tìm độ dời của vật.

3) Tìm vận tốc của vật ở vị trí đầu hoặc vị trí cuối độ dời.

4) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ. Chủ yếu dùng cho hệ không biến hình, đối với hệ biến hình chúng ta chỉ có thể dùng định lí để giải toán trong trường hợp biết được các nội lực. Sau đây là một số ví dụ áp dụng :

Ví dụ 2.3 : Thanh AB với chiều dài l được treo bằng khớp vào điểm A (hình 23). Bỏ qua ma sát ở khớp, hãy xác định vận tốc góc ω_0 bé nhất cần phải truyền cho thanh để thanh có thể đạt tới vị trí nằm ngang.



Hình 24

Bài giải: Theo bài ra ta có : $\omega_1 = 0$, $B_0\hat{A}B_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Tính ω_0

Phương trình (2.40) có dạng :

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k$$

Gọi M là khối lượng của thanh, có:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_A \omega_0 = \frac{1}{6} M l^2 \omega^2{}_0$$

Ở vị trí cuối $\omega_1 = 0$ nên $T_1 = 0$.

Vì không tính đến lực ma sát nên chỉ có lực $\vec{P} = m\vec{g}$ sinh ra công trong chuyển dời trên của vật :

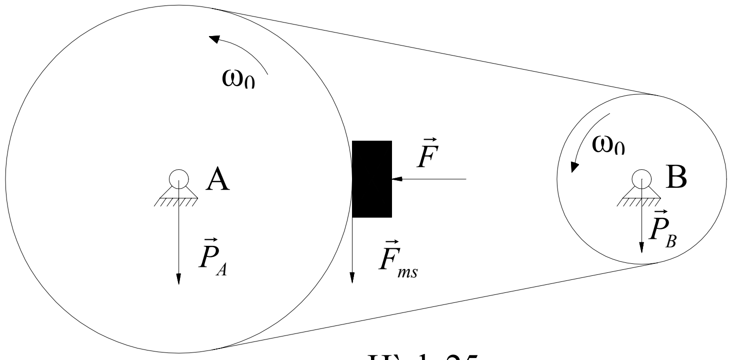
$$A^e = -P.h_c = -Mg\frac{l}{2}$$

Do đó ta có :

$$\frac{1}{6} M l^2 \omega^2{}_0 = -Mg\frac{l}{2}$$

Hay : $$\omega_0 = \frac{\sqrt{3}g}{l}$$

Ví dụ 2.4 : Các puly A và B liên kết với nhau bằng curoa (Hình 2.4) sau khi ngắt động cơ Puly A có vận tốc ω_0. Tổng trọng lượng của 2 Puly bằng P, trọng lượng của curoa bằng Q. Để hãm



Hình 25

chúng lại người ta ép vào bánh A, bán kính R một má hãm với lực ép bé bằng $\vec{F}$, hệ số ma sát bằng f. Cho rằng ma sát ở các trục bé không đáng kể, còn các Puly là đĩa đặc đồng chất. Hãy xác định số vòng mà Puly A quay được cho tới khi nó dừng hẳn.

Bài giải : Đây là bài toán xác định độ dời, biết vận tốc đầu và cuối, áp dụng công thức (2.50).

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k \qquad \text{(a)}$$

Theo điều kiện bài toán thì $T_1 = 0$; $T_0 = T_A + T_B + T_C$.

(T_C là động năng của curoa). Chú ý rằng tất cả các điểm thuộc curoa có vận tốc ban đầu bằng $V_{CO} = \omega_0.R = \omega'_0.r$. Trong đó ω'_0 và r là vận tốc góc ban đầu và bán kính của Puly B. Ta có :

$$T_A = \frac{1}{2}(\frac{P_A}{2g}R^2)\omega^2{}_0; T_B = \frac{1}{2}(\frac{P_B}{2g}r^2)\omega'^2{}_0 = \frac{P_B}{4g}R^2\omega^2{}_0$$

$$T_C = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V^2{}_{CO} = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\omega^2{}_0$$

$$T_0 = T_A + T_B + T_C = \frac{P_A}{4g}R^2\omega^2{}_0 + \frac{P_B}{4g}R^2\omega^2{}_0 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\omega^2{}_0 = \frac{P+2Q}{4g}R^2\omega^2{}_0$$

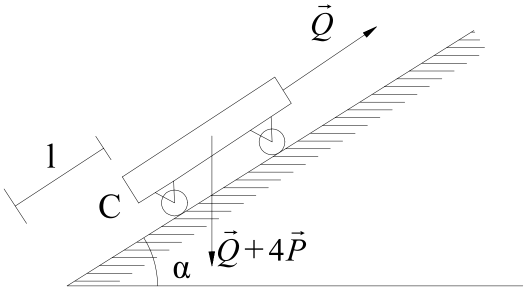
Trong chuyển động của hệ trọng lực của các vật thuộc hệ không sinh công vì điểm đặt của chúng không thay đổi. Lực ma sát $F_{ms} = f.F$ sinh công bằng :

$$A_{ms} = -(f.F.R)\varphi_1 = -f.F.R.2.\Pi N_{vq}$$

Thay các giá trị tìm được vào phương trình (a) giả ra ta có :

$$N_{vq} = \frac{(P+2Q)R\omega^2{}_0}{8\Pi gfF}$$

Ví dụ 2.5: Một xe goòng được kéo lên theo mặt phẳng nghiêng bằng lực không đổi Q = 16 kG (Hình 25). Cho biết góc nghiêng α so với mặt phẳng nằm ngang là 30^0, trọng lượng thùng xe P = 18 kG, mỗi bánh xe đặc trọng lượng P = 2 kG (có 4 bánh). Hãy xác định :



Hình 26

1) Vận tốc tịnh tiến v_1 của xe su khi đi được quãng đường l = 4m cho biết vận tốc ban đầu $v_0 = 0$.

2) Gia tốc của xe. Biết rằng các bánh đều lăn không trượt, ma sát lăn không đáng kể.

Bài giải :

1) Để xác định v_1 ta sử dụng phương trình (2.40)

$$T_1 - T_0 = \sum A^e{}_k \qquad \text{(a)}$$

Trong trường hợp khảo sát, ta có : $T_0 = 0$.

$$T_1 = T_{xe} + 4T_{bánh}$$

$$T_{xe} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2{}_1$$

$$T_{bánh} = \frac{1}{2}Mv^2{}_C + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2{}_C = \frac{3}{4}\frac{P}{g}v^2{}_1$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2{}_1 + 4\left(\frac{3}{4}\frac{P}{g}v^2{}_1\right) = \frac{1}{2g}(P+6p)v^2{}_1$$

Các lực sinh công trong trường hợp này gồm Q, P, 4p ta có :

$$A(\vec{Q}) = Q.l; A(\vec{P}) = (P+4p)h_C = -(P+4p)l\sin\alpha$$

Thay các giá trị được vào (a) và giải đối với v_1 ta được :

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gl[Q-(P-4p)\sin\alpha]}}{P+6p} = 2{,}8m/s \qquad \text{(b)}$$

2) Để xác định gia tốc ta xem v_1 = v và l trong các đẳng thức trên là hàm của thời gian t. Đẳng thức (b) có thể viết lại :

$$(P+6p).v^2{}_1 = 2gl[Q-(P-4p)\sin\alpha]$$

Đạo hàm 2 vế theo t ta được :

$$2(P+6p).v\frac{dv}{dt} = 2g\frac{dl}{dt}\left[Q-(P-4p)\sin\alpha\right]$$

Vì : $\frac{dl}{dt} = v; \frac{dv}{dt} = w$ nên cuối cùng ta được :

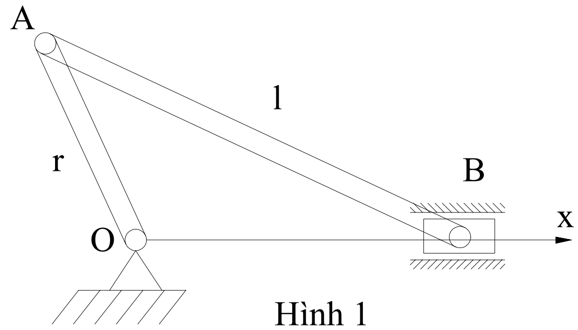
$$w = \frac{Q-(P+4p)\sin\alpha}{P+6p}g \approx 0.98g/m^2.$$

CHƯƠNG III
NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ
§1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

1.1. Liên kết :

Trước đây ta đã đưa ra định nghĩa và cách xác định lực liên kết. Bây giờ ta nhắc lại và đi sâu vào tính chất của các liên kết, phương trình, phân loại liên kết.

a) Định nghĩa : Tất cả những điều kiện cản trở những chuyển động của vật khảo sát trong không gian được gọi là liên kết.



Hình 1

Ví dụ : Cơ cấu tây quay thanh truyền. Tay quay OA quay quanh trục O. Thanh truyền AB chuyển động song phẳng. Con trượt B chuyển động thẳng theo Ox.

b) Phương trình liên kết :

Liên kết thường biểu diễn bằng các hệ thức giữa vị trí và vận tốc các chất điểm của cơ hệ. Các hệ thức này gọi là phương trình liên kết được viết dưới dạng tổng quát như sau :

$$f_i(\vec{r}_k, \vec{v}_k, t) \geq 0 \qquad (3.1)$$

Với ví dụ trên ta có thể viết các phương trình liên kết của cơ cấu phẳng tay quay thanh truyền như sau :

$$x(0) = y(0) = 0.$$

$$x^2{}_A + y^2{}_A = r^2$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

e) Phân loại liên kết :

Liên kết được chia thành các loại chính sau đây :

- Liên kết dừng và liên kết không dừng

Liên kết mà phương trình của nó không chứa yếu tố thời gian gọi là liên kết dừng, ngược lại có chứa t gọi là liên kết không dừng.

$f_i(\vec{r}_k, \vec{v}_k) \geq 0$ - Liên kết dừng

$f_i(\vec{r}_k, \vec{v}_k, t) \geq 0$ - Liên kết không dừng.

- Liên kết hình học và liên kết động học.

Liên kết mà phương trình liên kết của nó không chứa yếu tố vận tốc $\vec{v}_k$ hoặc nếu có ta có thể tích phân được gọi là liên kết hình học, ngược lại có chứa yếu tố vận tốc gọi là liên kết động học.

Từ nay về sau ta chỉ xét các cơ hệ chịu liên kết dừng, và hình học.

Với ví dụ trên cơ hệ chịu liên kết hình học và liên kết dừng.

1.2 Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do :

a) Di chuyển khả dĩ :

Di chuyển khả dĩ của hệ là tập hợp tất cả những độ dời vô cùng bé của các chất điểm của hệ mà tất cả các liên kết cho phép ở tại thời điểm khảo sát.

Như vậy di chuyển khả dĩ hay còn gọi là di chuyển ảo của hệ phải thỏa mãn 2 điều kiện sau:

+ Di chuyển vô cùng bé

+ Các di chuyển thực hiện được mà không phá vỡ liên kết.

Ta kí hiệu di chuyển khả dĩ như sau :

$$\delta\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) - \vec{r}(t) \qquad (3.2)$$

b) Số bậc tự do :

Số di chuyển khả dĩ độc lập với nhau của hệ gọi là số bậc tự do của hệ.

Ta có thể tính số bậc tự do của hệ theo quy tắc sau :

$$m = 3s \text{ hoặc } m = 2n - s \qquad (3.3)$$

Với m : số bậc tự do.

n : số chất điểm

s : số phương trình liên kết

1.3 Tọa độ suy rộng :

Các tham số độc lập nếu chúng có số lượng đúng bằng số bậc tự do của hệ và xác định duy nhất được vị trí của hệ thì gọi là các tọa độ suy rộng của hệ.

Ta kí hiệu tọa độ suy rộng bằng :

$$\{q_i\} = q_1, q_2, q_3, ..., q_n \qquad (3.4)$$

Tọa dộ suy rộng có thể là đoạn thẳng, các cung, các góc, các diện tích..v..v. Không kể chúng có thứ nguyên hay có ý nghĩa hình học hoặc ý nghĩa vật lý như thế nào.

Theo định nghĩa số tọa độ suy rộng bằng số bậc tự do của hệ nên việc chọn tọa độ suy rộng gắn liền với việc xác định số bậc tự do của hệ.

Ta gọi δq_i số gia phân tố của tọa độ suy rộng, ta có thể biểu diễn các tọa độ Đề-các x_k, y_k, z_k qua tọa độ suy rộng :

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, q_3, .., q_m) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, q_3, .., q_m) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, q_3, .., q_m) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Hoặc $$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m) \qquad (3.6)$$

Bây giờ ta đi xác định di chuyển khả dĩ qua tọa độ suy rộng.

Từ (3.2) :

$$\delta\vec{r}_k(t) = \vec{r}_k{}^*(q_1{}^*, q_2{}^*, ..., q_m{}^*) - \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m)$$

Trong đó : $q^*_i = q_i + \delta q_i$

Vậy :

$$\delta\vec{r}_k(t) = \vec{r}_k{}^*(q_1 + \delta q_1, q_2 + +\delta q_2, ..., q_m + +\delta q_m) - \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta \vec{r}_k}{\delta q_i}\delta q_i \qquad (3.7)$$

Khi hệ chuyển động các tọa độ suy rộng sẽ biến đổi liên tục theo thời gian :

$$q_1 = f_1(t);\ q_2 = f_2(t);....;\ q_n = f_n(t)$$

Các phương trình này gọi là các phương trình động học của hệ trong các tọa độ suy rộng. Đại lượng $\frac{dq_i}{dt} = q_i$ gọi là vận tốc suy rộng của hệ.

1.4 Lực suy rộng :

Xét cơ hệ gồm n chất điểm, chịu tác dụng của hệ lực $\{\vec{F}_k\}$. Cho hệ có m bậc tự do được xác định bởi tọa độ suy rộng $\{q_i\} i = 1,2,...,m$.

Ta đi biểu diễn lực và phương pháp tính lực trong tọa độ suy rộng. Để tìm đặc trưng của hệ lực tác dụng lên cơ hệ, ta xét khả năng sinh công của hệ lực.

Ta gọi δA là công khả dĩ của hệ lực $\{\vec{F}_k\}$ tác dụng lên cơ hệ là tổng công các lực trong tập hợp di chuyển khả dĩ.

$$\delta A = \sum_k \vec{F}_k \delta\vec{r}_k \qquad (3.8)$$

Trong tọa độ Đề-các (3.8) có dạng :

$$\delta A = \sum_k F_{kx}\delta r_{kx} + F_{ky}\delta r_{ky} + F_{kz}\delta r_{kz} \quad (3.9)$$

Bây giờ ta tính nó trong tọa độ suy rộng :

Thế (3.7) vào (3.8)

$$A = \sum_k \vec{F}_k \left(\sum_i \frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_i} \delta q_i \right) = \sum_i \left(\sum_k \vec{F}_k \frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_i} \right) \delta q_i$$

Đặt $Q_i = \sum_k \vec{F}_k \frac{\delta\vec{r}_k}{\delta q_i}$ (3.10). Q_i được gọi là lực suy rộng, vậy :

$$\delta A = \sum_{(i)} Q_i \delta q_i \qquad (3.11)$$

Để tính lực suy rộng Q_i nào đó ta truyền cho hệ một di chuyển khả dĩ độc lập sao cho tọa độ suy rộng q_i có số gia $\delta q_i \neq 0$, còn các tọa độ khác $\delta q_i = 0$ với $j \neq i$. Tính tổng công của các lực trên di chuyển khả dĩ. Theo (3.11) từ đây xét ra :

$$Q_i = \frac{\delta A}{\delta q_i}$$

Tương tự như vậy, ta có thể tính được các lực suy rộng : Q_1, Q_2, ..,Q_i,...,Q_m.

Thứ nguyên của lực suy rộng Q_i bằng thứ nguyên của công chia cho thứ nguyên của tọa độ suy rộng tương ứng.

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]}$$

Giả sử : q là độ dài thì thứ nguyên là lực thông thường theo hệ SI là N.

Nếu q là góc thì Q đo bằng Nm – Thứ nguyên của mômen lực.

Nếu q là thể tích thì Q đo bằng N/m^2 – Thứ nguyên của áp suất.

Nếu các lực tác dụng lên hệ là các lực thế như ta đã biết hệ sẽ có hàm lực :

$$U = U(x_k, y_k, z_k)$$

và
$$\delta U = \sum \delta A_k = \delta A$$

Khi tính trong hệ tọa độ suy rộng thì :

$$U = U(q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

Ta tính :

$$\delta U = \delta A = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_m}\delta q_m$$

So sánh (3.12) với (3.11) ta có :

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, Q_m = \frac{\partial U}{\partial q_m} \quad (3.13)$$

Vì thế năng π = -U nên (3.13) có thể biểu diễn lực suy rộng qua thế năng π như sau :

$$Q_1 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial \pi}{\partial q_2}, \ldots, Q_m = -\frac{\partial \pi}{\partial q_m} \quad (3.14)$$

Vậy theo lực suy rộng được tính theo (3.14) trong trường hựop các lực là lực thế.

1.5 Liên kết lý tưởng :

Ta đã gặp những loại liên kết mà tổng cộng của các lực liên kết sinh ra trên các độ dời phân tố của hệ triệt tiêu. Hay nói cách khác liên kết này không ảnh hưởng đến biến thiên động năng của hệ trong quá trình chuyển động. Ta đưa ra khái niệm cơ hệ lý tưởng. Ta có định nghĩa sau :

Các liên kết của hệ sẽ được gọi là lý tưởng nếu tổng công nguyên tố của các lực liên kết trên mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không. Tức là :

$$\delta A(l_k) = \sum \vec{N}_k . \delta \vec{r}_k = 0 \quad (3.15)$$

Các liên kết thường gặp sau đây là liên kết lý tưởng :

- Liên kết tựa không ma sát
- Liên kết lăn không trượt trên mặt cong nhám.
- Liên kết bản lề không ma sát
- Liên kết dây mềm không giãn.
- Liên kết thanh ...v..v

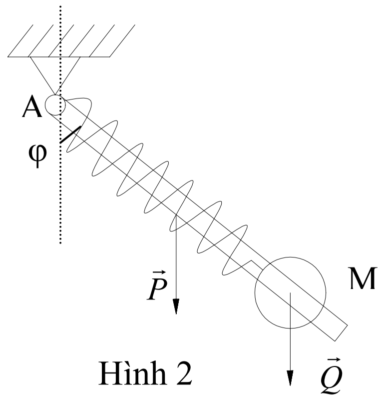
1.6 Ví dụ lực suy rộng :

Ví dụ : Hãy xác định các lực suy rộng của hệ bỏ qua lực ma sát (như hình vẽ 2), gồm thanh AB dài l trọng lượng P, có thể quay quanh trục A trên mặt phẳng thẳng đứng. Viên bi M có khối lượng Q chuyển động trên thanh. Chiều dài tự nhiên của lò xo AM = a, độ cứng là C.

Giải : Hệ có hai bậc tự do, ta chọn $q_1 = \varphi$ và $q_2 = x$. Làm 2 tọa độ suy rộng.

Ta tính Q_φ và Q_x tương ứng.

Trước hết ta đi tính Q_φ, muốn vậy ta truyền cho hệ một di chuyển khả dĩ sao cho chỉ có góc φ thay đổi, còn x = const nên δx = 0.



Hình 2

Trên di chuyển δφ này, các lực $\vec{P},\vec{Q}$ sinh công :

$$\delta A = \left[-\frac{Pl}{2}\sin\varphi - Q(a+x)\sin\varphi\right]\delta\varphi$$

Vậy : $$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = -\left[\frac{Pl}{2} + Q(a+x)\right]\sin\varphi$$

Để tính Q_x, ta truyền cho hệ một di chuyển khả dĩ sao cho chỉ có x thay dổi với δx ≠ 0, còn φ = const.

Trên di chuyển δx này, các lực $\vec{P},\vec{Q}$ sinh công.

Trong đó : $$F = cx$$

$$\delta A = [-cx + Q\cos\varphi]\delta x$$

Vậy : $$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = Q\cos\varphi - cx$$

Kết quả :

$$Q_1 = Q_\varphi = -\left[\frac{Pl}{2} + Q(a+x)\right]\sin\varphi$$

$$Q_2 = Q_x = Q\cos\varphi - cx$$

§2. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1 Nguyên lý :

Điều kiện cần và đủ để cho cơ hệ chịu liên kết lý tưởng được cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực chủ động tác dụng lên hệ trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ phải bằng không.

$$\sum \delta A_{F_k} = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (3.16)$$

($\vec{F}_k$ là lực chủ động thứ k)

Chứng minh :

Điều kiện cần: Cho cơ hệ chịu lực liên kết lý tưởng được cân bằng ta chứng minh rằng (3.16) là đúng.

Thật vậy, vì hệ cân bằng nên từng chất điểm riêng biệt sẽ cân bằng. Ta xét chất điểm M_k gồm có $\vec{F}_k$ lực chủ động, $\vec{N}_k$ phản lực liên kết.

Vì nó cân bằng nên : $\vec{F}_k + \vec{N}_k = 0$

Nhân hai vế với $\delta \vec{r}_k$ ta có:

$$(\vec{F}_k + \vec{N}_k)\delta \vec{r}_k = \delta A_{F_k} + \delta A_{N_k} = 0$$

Đối với toàn hệ ta có tổng công :

$$\sum \delta A_{F_k} + \sum \delta A_{N_k} = 0$$

Vì chịu liên kết lý tưởng, nên $\sum \delta A_{N_k} = 0$.

Do đó : $\sum \delta A_{F_k} = 0$

Điều kiện đủ : Cho cơ hệ chịu liên kết lý tưởng và thỏa mãn (3.16), ta cần chứng minh cơ hệ cân bằng. Ta dùng phương pháp phản chứng, giả sử cơ hệ không cân bằng. Tức là tại thời điểm nào đó cơ hệ chuyển động theo định lý biến thiên động năng của cơ hệ, ta có :

$$dT = dA_F + dA_N > 0$$

Vì liên kết lý tưởng : $dA_N = 0$.

nên $dA_F > 0$.

Điều này trái với đẳng thức (3.16). Vậy cơ hệ cân bằng.

Nhờ nguyên lý di chuyển khả dĩ ta có thể đưa ra điều kiện cân bằng tổng quát của cơ hệ không tự do.

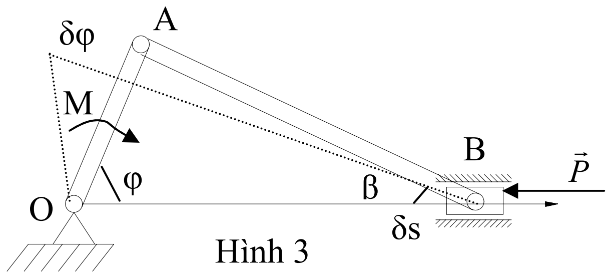
$$\delta A_F = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (3.17)$$

Trong tọa độ Đềcác, ta có điều kiện sau :

$$\sum F_{kx}\delta r_{kx} + F_{ky}\delta r_{ky} + F_{kz}\delta r_{kz} = 0 \qquad (3.18)$$

2.2 Ví dụ :

Ví dụ 1: Tìm hệ thức giữa mômen M của ngẫu lực tác dụng lên tay quay của cơ cấu thanh truyền và áp lực P lên píttông khi cân bằng. Cho biết OA = r, AB = l (Hình vẽ 3).



Hình 3

Giải :

Cơ cấu có một bậc tự do, chọn φ làm tọa độ suy rộng. Lực $\vec{P}$, ngẫu lực M sinh công.

Cho tay quay di chuyển khả dĩ δφ, khi đó con trượt B di chuyển δs.

Theo điều kiện cân bằng ta có :

$$-M.\delta\varphi + P.\delta s = 0$$

Vì thanh truyền AB chuyển động song phẳng ta tính V_B qua ω như sau :

$$V_A.\cos\alpha = V_B.\cos\beta. \qquad (\alpha = 90 - (\varphi + \beta))$$

$$V_B = \frac{r\omega.\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} = \omega.r(\sin\varphi + \cos\varphi.tg\beta)$$

Xét ΔOAB : $$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\varphi}{l}$$

$$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

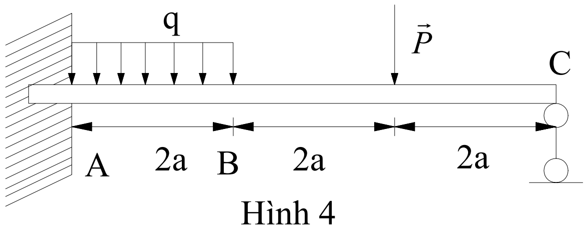
Do đó : $$V_B = \omega.r\left(1 + \frac{r\cos\varphi.}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi$$

Vậy : $$M = P.r\left(1 + \frac{r\cos\varphi.}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi$$

Ví dụ 2: Cho hệ dầm chịu liên kết và chịu lực như hình vẽ 4. Bỏ qua ma sát, tìm phản lực ở gối C và ngàm A.

Giải :

Khảo sát hệ dầm :



Hình 4

- Tìm phản lực $\vec{R}_C$, giải phóng gối C, cho hệ thực hiện di chuyển khả dĩ là dầm BC, quay quanh B một góc δφ.

$$\delta A = 0 \rightarrow$$

$$m_B(\vec{P}).\delta\varphi + m_B(\vec{R}_C).\delta\varphi = 0$$

$$-2a.P\delta\varphi + 4aR_C\delta\varphi = 0$$

hay : $$(-2a.P + 4aR_C)\delta\varphi = 0$$

vì $\delta\varphi \neq 0$, nên $R_C = \dfrac{P}{2}$

- Tìm phản lực tại ngàm A :

Giải phóng ngàm thay bằng $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A$

Rõ ràng $X_A = 0$.

Tương tự như $\vec{R}_C$ ta tính được :

$$Y_A = Q + \frac{P}{2}$$

với Q = 2aq.

Để tính M_A ta thay ngàm bằng bản lề và ngẫu lực $\vec{M}_A$

Cho hệ di chuyển khả dĩ δφ

$$\delta A = 0 \rightarrow M_A.\delta\varphi + m_A(\vec{Q})\delta\varphi + m_C(\vec{P})\delta\varphi_1 = 0$$

Trong đó δφ và $\delta\varphi_1$ liên hệ như sau :

$$2a\delta\varphi = 4a\delta\varphi_1 \rightarrow \delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\delta\varphi$$

Thế $\delta\varphi_1$ vào phương trình trên ta có:

$$M_A.\delta\varphi + aQ\delta\varphi + 2aP\frac{\delta\varphi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M_A = a(P + Q)$$

Qua các ví dụ trên ta thấy ý nghĩa của nguyên lý di chuyển khả dĩ ở chỗ nó cho ta điều kiện cân bằng của mọi cơ hệ dưới dạng tổng quát. Trong khi đó các phương pháp tĩnh học yêu cầu xét sự cân bằng của từng vật trong hệ. Khi dùng nguyên lý chỉ cần xét các lực chủ động, cho nên ngay từ đầu đã tránh được không phải xét đến phản lực liên kết chưa biết, khi chúng là các liên kết lý tưởng.

§3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ TRONG TỌA ĐỘ SUY RỘNG

3.1 Trường hợp chung :

Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ từ (3.16) và (3.11) ta có :

$$\delta A = \sum_{(i)} Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_m \delta q_m = 0$$

vì $\delta q_1, \delta q_1, \ldots \delta q_m$ độc lập với nhau nên ta rút ra :

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_m \qquad (3.19)$$

Vậy điều kiện cần và đủ để cân bằng là tất cả các lực suy rộng tương ứng với các tọa độ suy rộng của hệ phải bằng không.

3.2 Trường hợp các lực có thế :

Ta xét cơ hệ chịu tác dụng của hệ lực là các lực thế.

Khi đó theo (3.14) và (3.19) ta có :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = \ldots = \frac{\partial \pi}{\partial q_m} = 0 \qquad (3.20)$$

CHƯƠNG IV
NGUYÊN LÝ ĐALAMBE

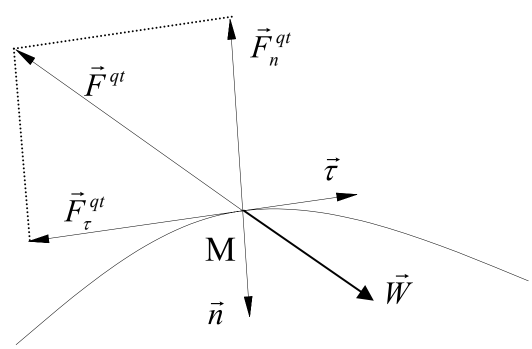
Tất cả các phương pháp giải bài toán động lực học đã trình bày trước đây đều dựa trên các phương trình được suy ra từ hệ tiên đề của động lực học hoặc từ các định lý tổng quát là các hệ quả của chúng. Bấy giờ ta có thể thiết lập các phương trình chuyển động hay điều kiện cân bằng của cơ hệ dựa trên những cơ sở khác nữa là các nguyên lý cơ học có thể thay cho tiên đề 2. Áp dụng các nguyên lý này ta có thể tìm được những phương pháp giải bài toán rất hiệu quả. Nó cho ta thấy được vai trò của các áp lực chủ động trong mối quan hệ với chuyển động của cơ hệ.

Nguyên lý Đalambe được coi là mệnh đề tương đương với tiên đề 2.

§1. KHÁI NIỆM VỀ LỰC QUÁN TÍNH HỆ QUÁN TÍNH

1.1 Định nghĩa :

Các chất điểm M có khối lượng m, chuyển động với gia tốc $\vec{W}$ dưới tác dụng của hệ lực trong hệ quy chiếu quán tính.



Hình 5

Đại lượng :

$\vec{F}^{qt} = -m\vec{W}$ (4.1)

Chiếu (4.1) lên các trục ox, oy, oz

$$\begin{cases} F_x^{qt} = -m\ddot{x} \\ F_y^{qt} = -m\ddot{y} \\ F_z^{qt} = -m\ddot{z} \end{cases} \quad (4.2)$$

Trong hệ tọa độ tự nhiên ta có :

$$\vec{F}^{qt} = \vec{F}_n^{qt} + \vec{F}_\tau^{qt}$$

Với : $\vec{F}_n^{qt} = -m\vec{W}^n$ gọi là lực quán tính pháp hay còn gọi là lực quán tính ly tâm.

$\vec{F}_\tau^{qt} = -m\vec{W}^\tau$ gọi là lực quán tính tiếp.

Từ định nghĩa ta thấy lực quán tính không phải là lực thực sự tác dụng lên chất điểm khảo sát.

1.2 Thu gọn hệ lực quán tính :

Xét cơ hệ gồm n chất điểm có khối lượng M = $\sum_{(k)} m_k$ và gia tốc của điểm tương ứng $\vec{W}_k$.

Khi đó ta thu được hệ lực quán tính :

$$\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, ..., \vec{F}_n^{qt} \text{ hay } \left\{\vec{F}_k^{qt}\right\} \text{ với k = 1, 2,..., n}$$

Để thu gọn hệ lực quán tính này dựa vào kết quả từ tĩnh học, ta có thể thu gọn về một tâm. Ta được một lực và một ngẫu lực :

$$\left\{\vec{F}_k^{qt}\right\} \sim \left(\vec{R}^{qt}, \vec{M}^{qt}\right)$$

Trong đó :

$$\vec{R}^{qt} = \sum_{(k)} \vec{F}_k^{qt}$$

$$\vec{M}_k^{qt} = \sum_{(k)} \vec{m}_0(\vec{F}_k^{qt})$$

được gọi là véctơ chính và mômen chính của hệ lực quán tính đối với tâm O.

Ta cần đi xác định véctơ chính và mômen chính của lực quán tính của vật rắn chuyển động khi nó thu gọn về khối tâm C của vật.

Đối với $\vec{R}^{qt}$ ta có :

$$\vec{R}^{qt} = \sum -m_k\vec{W}_k = -M\vec{W}_C \quad (4.4)$$

Vậy véctơ chính của lực quán tính của vật trong chuyển động bất kỳ luôn được xác định theo (4.4)

Còn $\vec{M}_C^{qt} = \sum \vec{m}_C(\vec{F}^{qt}{}_k)$ sẽ thay đổi khi vật thay đổi chuyển động. Ta xét vật chuyển động cụ thể như sau :

a) Chuyển động song phẳng :

Xét vật chuyển động song phẳng, tức là quay quanh trục Cz vuông góc với mặt phẳng chuyển động (π) với vận tốc góc là $\vec{\omega}$ và gia tốc góc là $\vec{\varepsilon}$.

Như trên : $\vec{M}_C^{qt} = -\sum(m_k\vec{r}_k \wedge \vec{W}_k)$

Trong đó : $\vec{W}_k = \vec{W}_C + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k)$

Theo phép biến đổi véctơ ta có :

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k) = \vec{\omega}.(\vec{\omega}.\vec{r}_k) - \omega^2.\vec{r}_k$$

vì $\vec{r}_k \perp \vec{\omega}$ nên : $\vec{r}_k.\vec{\omega} = 0$

Do đó : $\vec{W}_k = \vec{W}_C + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k - \omega^2 \vec{r}_k$

Ta thế $\vec{W}_k$ và tình :

$$m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_k = m_k \left[(\vec{r}_k \wedge \vec{W}_C + \vec{r}_k \wedge (\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k) - \omega^2 (\vec{r}_k \wedge \vec{r}_k) \right]$$

Vì : $\vec{r}_k \wedge \vec{r}_k = 0$, $\vec{r}_k \perp \vec{\varepsilon}$ nên :

$$m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_k = m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_C + m_k {r_k}^2 \vec{\varepsilon}$$

Vậy :

$$\vec{M}_C{}^{qt} = -\sum m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_C - \sum m_k {r_k}^2 \vec{\varepsilon}$$

Vì : $\sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C = 0$ ta có :

$$\vec{M}_C{}^{qt} = -J_C \vec{\varepsilon}$$

Vì vật chuyển động song phẳng nên véctơ $\vec{\varepsilon}$ luôn vuông góc với mặt phẳng (π), nên ta có thể thay $\vec{\varepsilon}$ bằng $\overline{\varepsilon}$.

Do đó : $\overline{M}_C{}^{qt} = -J_C \overline{\varepsilon}$ (4.5)

Vậy : Vật chuyển động song phẳng thì hệ lực quán tính thu về khối tâm C của vật được một lực và một ngẫu lực xác định theo (4.4) và (4.5).

Nghĩa là :

$$\vec{R}^{qt} = -M\vec{W}_C$$
$$\overline{M}^{qt}{}_C = -J_C \overline{\varepsilon}$$

c) Vật quay một quanh trục:

Cho vật quay quanh một trục Oz với vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$. Thu gọn hệ lực quán tính của vật về một điểm O. Ta thu được $\vec{R}^{qt}$ xác định theo (4.4) còn mômen chính $\vec{M}^{qt}$ được tính như sau :

$$\vec{M}_O{}^{qt} = \sum m_k \vec{r}_k \wedge \vec{W}_k$$

trong đó : $\vec{W}_k = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_k + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k) = (\omega^2 x_k + \varepsilon x_k)\vec{i} + (\omega^2 y_k + \varepsilon y_k)\vec{j}$ (4.6)

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véctơ đơn vị của các trục ox, oy, oz.)

Do đó : $$\vec{M}_O{}^{qt} = (-\omega^2 J_{yz} + \bar{\varepsilon} J_{xz})\vec{i} + (\omega^2 J_{xz} - \bar{\varepsilon} J_{yz})\vec{j} + J_z \vec{\varepsilon}$$

Trong đó : J_{xz}, J_{yz} mômen tích quán tính.

Chiếu lên các trục ox, oy, oz ta nhận được :

$$\begin{aligned} \overline{M}_x{}^{qt} &= J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 \\ \overline{M}_x{}^{qt} &= J_{xz}\omega^2 - J_{xz}\varepsilon \\ \overline{M}_x{}^{qt} &= J_z\varepsilon \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Ta xét trường hợp đặc biệt :

- Nếu trục Oz là trục quán tính chính tức là :

$J_{xz} = J_{yz} = 0$ khi đó $\overline{M}_x{}^{qt} = \overline{M}_y{}^{qt} = 0$

Chỉ còn $\overline{M}_z{}^{qt} = -J_z\varepsilon$ và $\vec{R}^{qt} = -M\vec{W}_C$

- Nếu trục Oz là trục quán tính chính trung tâm tức là $C \in Oz$:

Ta có : $$\vec{R}^{qt} = 0$$

$$\vec{M}_z{}^{qt} = -J_z.\vec{\varepsilon}$$

§2. NGUYÊN LÝ ĐALAMBE

2.1 Đối với chất điểm :

Tại mỗi thời điểm nếu đặt thêm vào chất điểm lực quán tính của nó ta được một hệ lực cân bằng gồm lực chủ động, lực liên kết và lực quán tính của chất điểm.

Cho lực $\vec{F}$ chủ động

$\vec{N}$ phản lực liên kết

$\vec{F}^{qt}$ lực quán tính

Theo nguyên lý $(\vec{F}, \vec{N}, \vec{F}^{qt}) \sim 0$

Hay : $$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{qt} = 0$$

Thật vậy từ tiên đề 2 của động lực học ta có :

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{N}$$

$$\vec{F} + \vec{N} - m\vec{W} = 0$$

Vì $\vec{F} = -m\vec{W}$

Nên : $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{qt} = 0$

2.2 Đối với cơ hệ :

Tại một thời điểm, nếu đặt thê vào mỗi chất điểm của hệ các lực quán tính tương ứng thì cùng với các ngoại lực và nội lực thực sự tác dụng lên hệ. Ta sẽ được một hệ cân bằng.

Cho $\{\vec{F}_k^{\,e}\}$ ngoại lực

$\{\vec{F}_k^{\,i}\}$ nội lực

$\{\vec{F}_k^{\,qt}\}$ lực quán tính

Ta có : $(\{\vec{F}_k^{\,e}\}, \{\vec{F}_k^{\,i}\}, \{\vec{F}_k^{\,qt}\}) \sim 0$

Khi đó :

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_O = 0 \end{cases} \qquad (4.9)$$

Nguyên lý Đalambe cho phép chúng ta giải các bài toán động lực chọ bằng cách thiết lập các phương trình chuyển động của hệ dạng các phương trình cân bằng quen thuộc. Đó chính là nội dung của phương pháp tĩnh động lực học.

§3. ÁP DỤNG

3.1 Phương pháp tĩnh động lực học :

Từ nguyên lý Đalambe ta thiết lập các phương trình cân bằng dựa vào kết quả cỉa tĩnh học.

a) Đối với chất điểm :

$$\vec{R} = 0 \Rightarrow R_x = F_x + N_x + F^{qt}{}_x = 0$$

b) Đối với hệ :

Ta phân lực thành nội lực và ngọai lực $\vec{R}^i, \vec{R}^e$

Trong đó : $\vec{R}^i = \sum \vec{F}_k{}^i = 0$

và $\vec{M}_O{}^i = \sum \vec{m}_O(\vec{F}^i{}_k) = 0$

Theo nguyên lý ta có :

$$\vec{R}^e + \vec{R}^{qt} = 0$$
$$\vec{M}_O{}^e + \vec{M}_O{}^{qt} = 0$$

Chiếu lên các trục tọa độ ta thu nhận :

$$\begin{aligned} R_x{}^e + R_x{}^{qt} &= 0 \\ R_y{}^e + R_y{}^{qt} &= 0 \\ R_z{}^e + R_z{}^{qt} &= 0 \\ M_x{}^e + M_x{}^{qt} &= 0 \\ M_y{}^e + M_y{}^{qt} &= 0 \\ M_z{}^e + M_z{}^{qt} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Phương pháp tĩnh học thường dùng để tính các phản lực động.

3.2 Phản lực trục quay và khái niệm cân bằng trục quay :

a) Phản lực động của trục quay:

Cho vật (S) dưới tác dụng của các ngoại lực $\{\vec{F}_k{}^{(p)}\}$ quay quanh trục Oz với vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc c.

Ta cần xác định phản lực tại các ổ trục tác dụng lên trục.

Các phản lực xuất hiện khi vật quay với $\vec{\omega} \neq 0$, ta gọi các phản lực này là phản lực động. Còn nếu $\vec{\omega} = 0$, theo trước đây ta gọi chúng là phản lực tĩnh.

Giải phóng liên kết tại A, B thay bằng :

$$\vec{R}_A \sim (\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A) \text{ và } \vec{R}_B \sim (\vec{X}_B, \vec{Y}_B)$$

Theo nguyên lý Đalambe ta có :

$$(\{\vec{F}_k{}^{(p)}\}, \vec{R}_A, \vec{R}_B, \{\vec{F}_k{}^{qt}\}) \sim 0$$

Trong đó : $\{\vec{F}_k{}^{qt}\} \sim (\vec{R}^{qt}, \vec{M}^{qt})$

Thu gọn về tâm O trên trục quay $\vec{R}^{qt} = -M\vec{W}_C$

Trong đó $\vec{W}_C$ được tính theo công thức (4.6). Còn $\vec{M}^{qt}$ chiếu lên các trục tọa độ được tính theo công thức (4.7)

Ta thiết lập phương trình cân bằng :

$$
\begin{gathered}
R_x^{\ e} + X_A + X_B + M_{xC}\omega^2 + M_{yC}\bar{\varepsilon} = 0 \\
R_y^{\ e} + Y_A + Y_B + M_{yC}\omega^2 - M_{xC}\bar{\varepsilon} = 0 \\
R_z^{\ e} + Z = 0 \\
M_x^{\ e} + X_A a - Y_B b + J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\bar{\varepsilon} = 0 \\
M_y^{\ e} + X_A a - X_B b + J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\bar{\varepsilon} = 0 \\
M_z^{\ e} - J_z\bar{\varepsilon} = 0
\end{gathered} \qquad (4.12)
$$

Phương trình cuối cùng của (4.12) chính là phương trình vi phân chuyển động của vật quay. Còn các phương trình còn lại xác định các phản lực $\vec{R}_A, \vec{R}_B$.

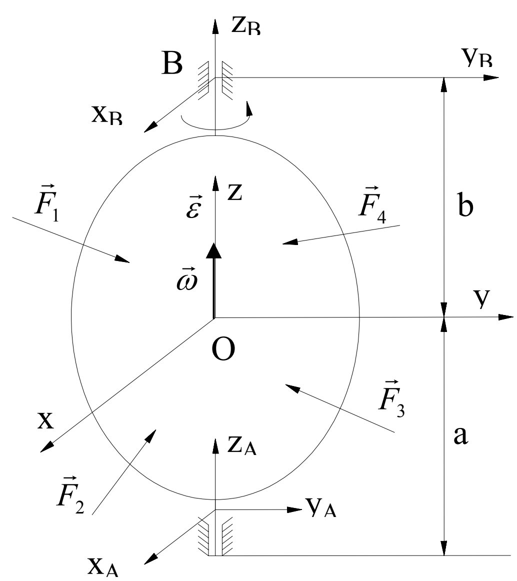
b) Cân bằng của trục quay :

Từ những phương trình (4.12) ta thấy các giá trị ω và ε của phản lực động không những phụ thuộc vào giá trị mà còn phụ thuộc vào các đại lượng X_C, Y_C, J_{xz} , J_{yz} đặc trưng cho sự phân bố khối lượng của vật đối với trục quay Oz.

Ta thấy chuyển động quay không ảnh hưởng đến giá trị của phản lực ở các ổ trục quay nếu :

$X_C = 0$ và $Y_C = 0$ (4.13)

$J_{xz} = J_{yz} = 0$ (4.14)



Hình 6

Điều kiện (4.13) và (4.14) chính là điều kiện cân bằng động của các khối lượng các vật quay quanh trục Oz. Điều kiện (4.13) chứng tỏ khối tâm C nằm trên trục quay. Còn (4.14), trục quay Oz là trục quán tính chính trung tâm của vật.

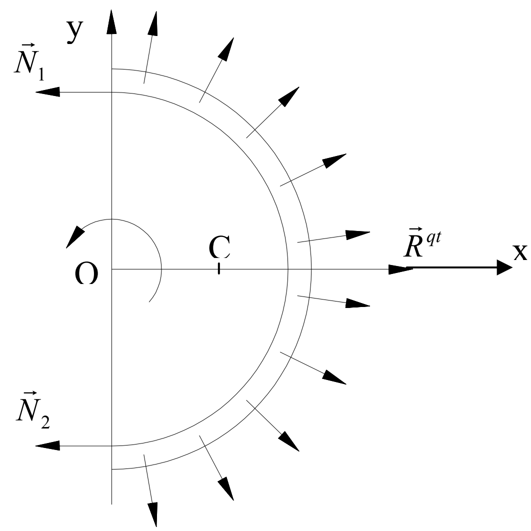
Vậy : Phản lực động tác dụng lên trục của vật quay sẽ bằng phản lực tĩnh nếu trục quay là một trong những trục quán tính chính trung tâm của vật.

Từ đây nó cho ta ý nghĩa của các đại lượng J_{xz} và J_{yz} là đặc trưng cho mức độ mất cân bằng động của các khối lượng của vật khi nó quay quanh trục Oz. Phương pháp cân bằng các khối lượng như vậy được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật để cân bằng các trục khuỷu, các tay quay, các bộ truyền ..v..v.

3.3 Các ví dụ :

a) Ví dụ 1: Một vôlăng trọng lượng P quay quanh một trục có định Oz vuông góc với mặt phẳng của nó với vận tốc không đổi. Coi vôlăng là một vòng tròn đồng chất bán kính r. Bỏ qua khối lượng của các nan hoa và tác dụng của trọng lượng, hãy xác định lực có khuynh hướng phá vỡ vôlăng (Hình 7).

Giải : Đối với vôlăng, lực cần phải tìm là nội lực. Để xác định nó ta cắt vôlăng ra làm hai phần bỏ đi phần phía trái và giữ lại phần bên phải. Thay vào bằng các lực $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Xác định lực quán tính, vì vôlăng quay đều nên ε = 0 do đó chỉ có lực quán tính pháp, do tính chất đối xứng nên các lực quán tính có hợp lực đặt tại khối tâm C nằm trên trục Ox và có độ lớn bằng :



Hình 7

$$R^{qt} = MW_C = Mx_C\omega^2$$

Trong đó :

$$M = \frac{1}{2}\frac{P}{g}, x_C = \frac{2r}{\pi}$$

Do đó : $$R^{qt} = \frac{\Pr\omega^2}{\pi.g}$$

Theo nguyên lý Đalămbe ta có : $\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{R}^{qt}\right) \sim 0$

Chiếu lên trục Ox :

$$- N_1 - N_2 + R^{qt} = 0$$

Do tính đối xứng : $N_1 = N_2 = N$.

Vậy : $$N = \frac{R^{qt}}{2} = \frac{PR\omega^2}{2\pi.g}$$

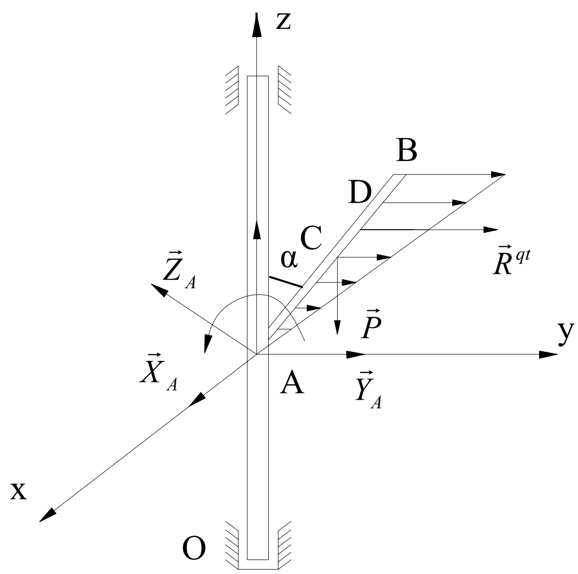
Ví dụ 2 :

Một thanh đồng chất AB trọng lượng P dài l, được ghép chặt vào trục thẳng đứng OO_1 dưới góc α, Trục CO_1 cùng với thanh AB quay với vận tốc góc không đổi ω. Hãy xác định phản lực tại ngàm (Hình 8).

Giải :

Khảo sát chuyển động của thanh AB. Hệ lực tác dụng : $\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{M}_A$.

Ta đi xác định lực quán tính các phần tử của thanh AB.



Hình 8

Vì ω = const nên chỉ có thành phần $\vec{F}_{kn}^{qt}$ hướng theo bán kính $\vec{r}_k$ có độ lớn bằng:

$$F_{kn}^{qt} = m_k W_{kn} = m_k r_k \omega^2$$

Đây là hệ lực song song phân bố theo quy luật tam giác.

Thu gọn hệ lực này được hợp lực đi qua điểm D cách A một đoạn bằng 2/3l có độ lớn bằng :

$$R^{qt} = MW_C = \frac{P}{g} r_C \omega^2 = \frac{P}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha.\omega^2$$

Theo nguyên lý Đalămbe ta có :

$$\left(\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{M}_A, \vec{R}^{qt}\right) \sim 0$$

Thiết lập phương trình cân bằng (Hình 8)

$$R_x = X_A = 0$$
$$R_y = Y_A + R^{qt} = 0$$
$$R_z = Z_A - P = 0$$
$$M_x = -P\frac{l}{2}\sin\alpha + M_{Ax} - R^{qt}\frac{2}{3}l\cos\alpha = 0$$
$$M_y = M_{Ay} = 0$$
$$M_z = M_{Az} = 0$$

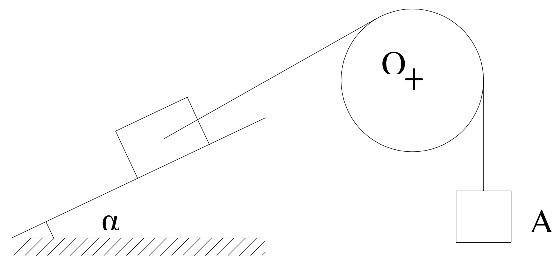
Từ đây ta tìm được :

$$X_A = 0, Y_A = -\frac{Pl\omega^2}{2g}\sin\alpha, Z_A = P$$

$$M_{Ax} = \frac{Pl}{2}(\sin\alpha + \frac{l\omega^2}{3g}\sin 2\alpha); M_{Ay} = M_{Az} = 0$$

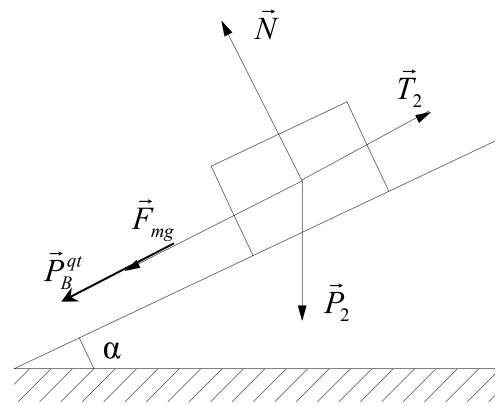
Ví dụ 3:

Vật A và B nối nhau bằng một sợi dây không giãn mắc qua ròng rọc D. Khi thả vật A trọng lượng P_1 ròng rọc D trọng lượng P_3 quay quanh trục cố định O, còn vật B trọng lượng P_2 trượt lên trên mặt phẳng nghiêng α.



Hình 9

Hãy xác định gia tốc của vật A và B và sức căng của hai nhánh dây. Cho hệ số ma sát trượt là f. Ròng rọc coi như đĩa tròn đồng chất. (hình 9).



Giải :

Hệ khảo sát gồm ba vật A, B và ròng rọc D.

- Xét vật A : Ta tách vật A theo nguyên lý Đalambe ta có: $\left(\vec{P}_1, \vec{T}_1, \vec{F}^{qt}{}_A\right) \sim 0$.

Trong đó : $$F_A^{qt} = \frac{P}{g}W_A$$

Chiếu lên phương X :

$$P_1 - T_1 - \frac{P_1}{g}W_A = 0\ (1)$$

Xét vật B tương tự ta có :

$$\left(\vec{P}_2, \vec{T}_2, \vec{N}, \vec{F}_B{}^{qt}, \vec{F}_{ms}\right) \sim 0$$

Trong đó :

$$F_{ms} = f.N = f.P_2.\cos\alpha$$

Chiếu lên phương Y :

$$T_2 - F_{ms} - F_B^{qt} - P_2\sin\alpha = 0$$

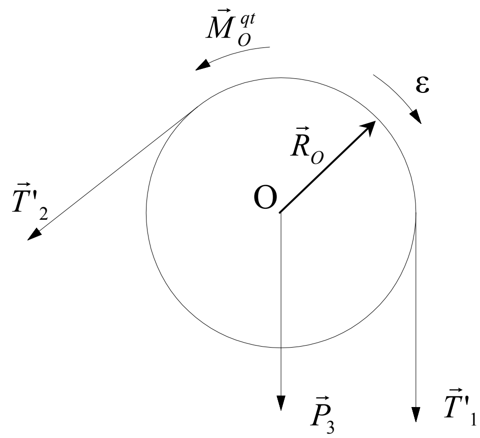
hay : $$T_2 - f.P_2\cos\alpha - \frac{P}{2}W_B - P_2\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

- Xét ròng rọc D : $$\left(\vec{P}_3, \vec{T}'_1, \vec{T}'_2, \vec{R}_0, \vec{M}_B{}^{qt}\right) \sim 0$$

Trong đó : $$M_O^{qt} = J_O.\varepsilon$$

$$J_O = \frac{P_3}{2g}r^2$$

còn $$\varepsilon = \frac{W_A}{r}$$



Nên :

$$M^{qt} = \frac{P_3}{2g}rW_A$$

$$\overline{M}_O = 0 \Rightarrow T'_2\, r + \frac{P_3}{2g}rW_A - T'_1\, r = 0$$

hay : $$T'_2 + \frac{P_3}{2g}W_A - T'_1 = 0 \quad (3)$$

vì $$T'_1 = T_1,\ T'_2 = T_2 \text{ và } W_B = W_A$$

Nên các đẳng thức (1), (2), (3) có thể viết như sau :

$$P_1 - T_1 - \frac{P_1}{g}W_A = 0$$

$$T_2 - f.P_2\cos\alpha - \frac{P}{2}W_B - P_2\sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

$$T'_2 + \frac{P_3}{2g}W_A - T'_1 = 0$$

Từ (4) giải ra ta tìm được :

$$W_A = W_B = 2g\frac{P_1 - P_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}$$

$$T_1 = \frac{2P_1P_2(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}$$

$$T_2 = \frac{2P_1P_2(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha) - P_3\left[P_1 - P_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]}{2P_1 + 2P_2 + P_3}$$

Để vật A rơi xuống phải thỏa mãn điều kiện :

$$P_1 > P_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

CHƯƠNG V
NGUYÊN LÝ ĐALAMBE – LAGORĂNG
§1. NGUYÊN LÝ ĐALAMBE – LAGORĂNG

1.1 Nguyên lý :

Kết hợp hai nguyên lý : Di chuyển khả dĩ và nguyên ý Đalambe. Ta có thể phát biểu như sau :

Tại mỗi thời điểm cơ hệ chịu liên kết hình học lý tưởng là tổng công của các lực chủ động và các phản lực quán tính trong mọi di chuyển khả dĩ bằng không.

$$\delta A(ch) + \delta A(qt) = 0 \qquad (5.1)$$

trong đó :

$$\delta A(ch) = \sum_{(k)} \vec{F}_k^{(ch)} \delta\vec{r}_k$$

$$\delta A(qt) = \sum_{(k)} \vec{F}_k^{(qt)} \delta\vec{r}_k$$

với

$$\vec{F}_k^{(qt)} = -m_k \vec{W}_k$$

1.2 Phương trình tổng quát của động lực học :

Từ nguyên lý trên ta rút ra phương trình tổng quát của động lực học dưới dạng :

- Véctơ :

$$\sum_{(k)} (\vec{F}_k^{(ch)} - m_k \vec{W}_k)\delta\vec{r}_k = 0 \qquad (5.2)$$

- Tọa độ Đềcác :

$$\sum_{(k)} (F_{kx} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k)\delta \ddot{y}_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k = 0 \qquad (5.3)$$

1.3 Ví dụ :

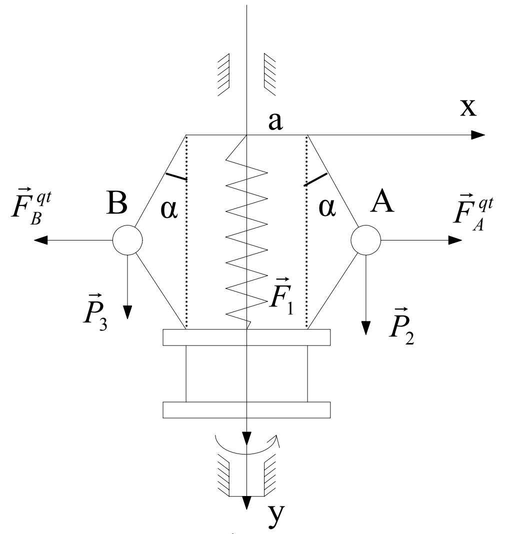
Cho cơ cấu điều tiết ly tâm như hình 10. Trục máy quay đều với vận tốc góc ω và không cân bằng tương đối. Tìm liên hệ giữa vận tốc góc của trục máy với góc nghiêng α của thanh treo với phương thẳng đứng, khi không cân bằng tương đối trên mặt phẳng của nó. Cho biết độ cứng lò xo là C và khi α = 0 thì lò xo không biến dạng, trọng lượng của đối trọng là $P_1 = P$ và của mỗi quả văng là $P_2 = P_3 = Q$, chiều dài của mỗi thanh treo là l, bản lề nối các thanh vào trục quay và vào đối trọng đều cách trục qua là a.

Bỏ qua khối lượng của các thanh, của lò xo, bỏ qua ma sát.

Giải:

Chọn cơ cấu làm hệ khảo sát :

Ta xét cơ cấu ở trạng thái cân bằng tương đối trong mặt phẳng của nó. Khi đó hệ có một bậc tự do. Chọn q = α làm tạo độ suy rộng. Hệ chịu liên kết lý tưởng vì bỏ qua ma sát. Lực chủ động gồm : $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{F}$.



Hình 10

Theo phương trình tổng quát của động lực học ta có :

$$\delta A(ch) + \delta A(qt) = 0$$

Lực quán tính :

$$F_A{}^{qt} = \frac{P_2}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2$$
$$F_B{}^{qt} = \frac{P_3}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2$$

Để tính toán ta dùng hệ trục tọa độ Đềcác XY :

$$\vec{P}_1\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = P \end{cases},\ \vec{P}_2\begin{cases} X_2 = 0 \\ Y_2 = Q \end{cases},\ \vec{P}_3\begin{cases} X_3 = 0 \\ Y_3 = Q \end{cases}$$

$$\vec{F}_1\begin{cases} X = 0 \\ Y = F = 2Cl(1-\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\vec{F}_A{}^{qt} = -\vec{F}_B{}^{qt}\begin{cases} X = \dfrac{Q}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$P\delta Y_C + P_2\delta Y_A + P_3\delta Y_B + F_{Ax}{}^{qt}\delta X_A + F_{Bx}{}^{qt}\delta X_B + F_y{}^{qt}\delta Y_C = 0$$

với $X_A = -X_B = l\sin\alpha$

$Y_A = Y_B = l\cos\alpha$

$X_C = 0$

$Y_C = 2l\cos\alpha$

Do đó :

$$\left[-2Pl\sin\alpha - 2Ql\sin\alpha + \frac{2Q}{g}(a + l\sin\alpha)\cos\alpha\omega^2 - 4Cl(1-\cos\alpha)\sin\alpha\right]\delta\alpha = 0$$

Rút ra : $$\omega^2 = \frac{P + Q + 2Cl(1-\cos\alpha)}{Q(a + l\sin\alpha)} g.tg\alpha$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LAGƠRĂNG LOẠI II

2.1 Trường hợp chung :

Từ nguyên lý Đalambe-Lagơrăng ta có thể đưa phương trình tổng quát của động lực học đối với cơ hệ không tự do dưới dạng tọa độ Đềcác. Để mô tả nguyên lý này trong tọa độ suy rộng, ta thiết lập phương trình Lagơrăng loại II như sau :

Cho cơ hệ liên kết lý tưởng hình học có n chất điểm có m bậc tự do, tương ứng m tọa độ suy rộng $q_1, q_2,...,q_m$ dưới dạng tác dụng của hệ lực $\{\vec{F}_k\}$ từ (3.11) ta có :

$$\delta A(ch) = \sum_{(i)} Q_i \delta q_i, i = \overline{1,m}$$

Còn lực quán tính :

$$\delta A(qt) = \sum_{(k)} - m_k \vec{W}_k \delta \vec{r}_k$$

Thay $\delta\vec{r}_k$ từ (3.7) :

$$\delta A(qt) = \sum_{(i)} \left[\sum_{(k)} - m_k \vec{W}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_{(i)} Q_i^{qt} \delta q_i$$

Với : $$Q_i^{qt} = \sum_{(k)} - m_k \vec{W}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \qquad (5.4)$$

Q_i^{qt} gọi là lực quán tính suy rộng.

Theo nguyên tắc Đalambe-Lagơrăng ta có :

$$\sum_{(i)} (Q_i + Q_i^{qt}) \delta q_i = 0$$

Suy ra : $$Q_i + Q_i^{qt} = 0, i = 1,2,..,m \qquad (5.5)$$

Phương trình (5.5) là phương trình tổng quát của động lực học viết dưới dạng tọa độ suy rộng. Trong đó lực suy rộng quán tính chưa tính được. Ta cần biến đổi nó qua động năng của hệ.

Từ giải tích véctơ ta có :

$$m_k \vec{W} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = m_k \frac{d}{dt}(\vec{V}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) - m_k \vec{V}_k . \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) \qquad (5.6)$$

Trong (5.6) cần xác định $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ và $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i})$

- Tính $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$:

Từ $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1)$ suy ra :

$$\vec{r}_k = \vec{V}_k = \sum_{(i)} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} q_i \qquad (5.7)$$

Lấy đạo hàm hai vế (5.7) theo q_i ta nhận được :

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_i} \qquad (5.8)$$

- Tính $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i})$:

Từ (5.7) ta lấy đạo hàm theo q_i ta có :

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_i} = \sum_{(j)} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} q_j \qquad (5.9)$$

Mặt khác : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{(j)} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} q_j \qquad (5.10)$$

So sánh (5.9) và (5.10) suy ra :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_i} \qquad (5.11)$$

Thế (5.8) và (5.11) vào (5.6), từ (5.4) suy ra :

$$Q_i^{qt} = -\sum_{(k)} m_k \frac{d}{dt}(\vec{V}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) - \sum_{(k)} m_k \vec{V}_k . \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{(k)} \frac{m_k V_k^{\ 2}}{2} + \frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{(k)} \frac{m_k V_k^{\ 2}}{2}$$

vì $\sum_{(k)} \frac{m_k V_k^{\ 2}}{2}$ = T là động năng của hệ, do đó :

$$Q_i^{qt} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial q_i})$$

Thế (5.12) và (5.5) ta nhận được phương trình Lagorăng loại II:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial q_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i , i = 1,2,..,m \qquad (5.13)$$

2.2. Trường hợp các lực có thế :

Ví các lực có thế nên ta có thể tính lực suy rộng qua thế năng $\pi = \pi(q_i)$ theo (3.14) :

$$Q_i = -\frac{\partial \pi}{\partial q_i} \text{ vì } \frac{\partial \pi}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Nên phương trình (5.13) có thể viết :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \pi}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0, i = 1...m$$

Ta đưa hàm Lagorăng : L = T – π. Khi đó phương trình Lagorăng loại II trong trường hợp các lực có thế có dạng sau :

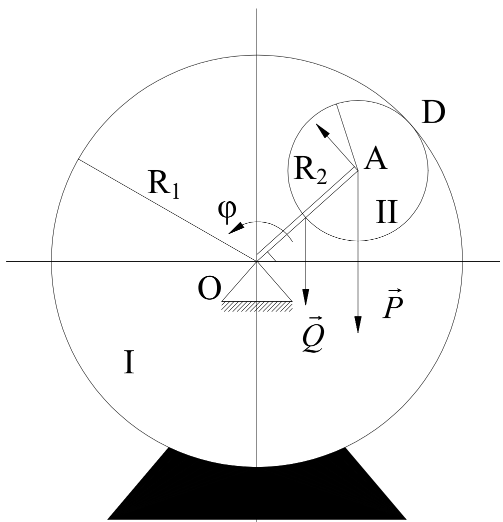
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1...m \qquad (5.4)$$

Các phương trình Lagorăng cho ta một phương pháp nhất quán và khá đơn giản để giải các bài toán động lực học, ưu điểm chính là nó không phụ thuộc vào số lượng các vật trong hệ, nó chỉ phụ thuộc vào số lượng các vật trong hệ, nó chỉ phụ thuộc vào số bậc tự do của hệ. Ngoài ra nếu các liên kết lý tưởng thì nó có các lực suy rộng chủ động tham gia trong các phương trình, cho nên các phương trình này cho phép loại bỏ trước tất cả các phản lực liên kết chưa biết.

2.3 Ví dụ :

Ví dụ : Cho cơ cấu gồm bánh xe cố định I, bán kính R_1, bánh xe chủ động II, bán kính R_2, trọng lượng P. Tay quay OA trọng lượng Q, chịu tác dụng một ngẫu lực với mômen không đổi M.

Hãy xác định gia tốc góc tay quay OA, cho biết cơ cấu đặt trong mặt phẳng thẳng đứng. Bánh xe II lăn không trượt trên bánh xe I. Bỏ qua ma sát, các bánh xe là đĩa đồng chất, thanh OA là thanh đồng chất. (Hình 11).



Hình 11

Giải :

Cơ cấu có 1 bậc tự do. Chọn q = φ là tọa độ suy rộng, khi đó phương trình Lagơrăng :

- Tính động năng của hệ :

$$T = T_{OA} + T_{bxII}$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}\frac{P}{g}V_A{}^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_{II}{}^2$$

Ta tính $\vec{V}_A$ và ω_{II} theo φ :

Vì bánh xe chuyển động song phẳng nên D là tâm vận tốc tức thời :

$\omega_{II} = \frac{V_A}{D_A}$ mà $V_A = OA\dot{\varphi}$

$OA = R_1 - R_2$, $AD = R_2$ nên :

$$T_{bxII} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}\frac{P}{g}R_2{}^2.\frac{(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2}{R_2{}^2} = \frac{3}{4}\frac{P}{g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2$$

Vậy động năng của hệ :

$$T_{bxII} = \frac{2Q + 9P}{12g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}^2$$

Tính lực suy rộng Q_φ :

Các lực sinh công M, P, Q cho cơ hệ thực hiện di chuyển khả dĩ δφ :

$$\delta A = M\delta\varphi - \frac{Q(R_1 - R_2)}{2}\cos\varphi\delta\varphi - P(R_1 - R_2)\cos\varphi\delta\varphi + \frac{1}{2}\{2M - (Q + 2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\delta\varphi\}$$

Suy ra : $Q_\varphi = \frac{1}{2}\{2M - (Q + 2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\}$

- Tính $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ và $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \,;\; \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2Q + 9P}{6g}(R_1 - R_2)^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{2Q + 9P}{6g}(R_1 - R_2)^2\ddot{\varphi}$$

Thế vào phương trình Lagơrăng loại II ta nhận được :

$$\frac{2Q + 9P}{6g}(R_1 - R_2)^2\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\{2M - (Q + 2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\}$$

Vậy : $$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\left[2M - (Q+2P)(R_1 - R_2)\cos\varphi\right]}{(2Q+9P)(R_1-R_2)^2}$$

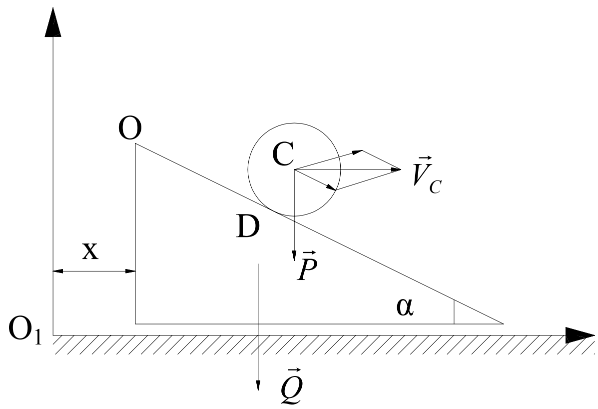
Từ đây ta nhận thấy :

ε > 0 tức là M > $\frac{1}{2}(Q+2P)(R_1-R_2)\cos\varphi$ quay nhanh dần.

ε = 0 tức là M = $\frac{1}{2}(Q+2P)(R_1-R_2)\cos\varphi$ quay đều.

ε < 0 tức là M < $\frac{1}{2}(Q+2P)(R_1-R_2)\cos\varphi$ quay chậm dần.

Ví dụ 2: Một trụ đồng chất có khối lượng m, chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của một lăng trụ tam giác A, có khối lượng M, góc nghiêng là α. Lăng trụ có thể trượt trên mặt phẳng ngang, nhẵn. Tìm gia tốc khối tâm A của trụ đối với lăng trụ và gia tốc của lăng trụ. Bỏ qua ma sát (Hình 12).



Hình 12

Giải : Hệ khảo sát hình trụ tròn C, lăng trụ tam giác A. Hệ có hai bậc tự do, chọn $q_1 = x$, $q_2 = s$.

Vì lúc lực tác dụng lên hệ là lực thế : $\vec{P}, \vec{Q}$ nên ta dùng phương trình Lagorăng loại II dạng :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \qquad (2)$$

- Tính thế năng π của hệ :

π = - mgY_C +const, trong đo Y_C = s.sinα. nên : π = -mgs.sinα + const.

- Tính động năng T của hệ : T = $T_A + T_C$.

trong đó : $T_A = \frac{1}{2}M\dot{X}^2$

vì trục C chuyển động song phẳng nên :

$$T_C = \frac{1}{2}mV_C{}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2{}_{tru}$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_r + \vec{V}_e \Rightarrow V_{Cx} = \dot{x} + \dot{s}\cos\alpha, V_{Cy} = -\dot{s}\sin\alpha$$

$$\omega_{tru} = \frac{V_r}{R} = \frac{\dot{s}}{R}; J_C = \frac{1}{2}mR^2$$

Do đó : $$T_C = \frac{1}{2}m\left[(\dot{X} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + \dot{s}^2\sin^2\alpha\right] + \frac{1}{4}m\dot{s}^2$$

Vậy động năng của hệ là :

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha + \dot{s}^2\right] + \frac{1}{4}m\dot{s}^2$$

Hàm Lagorăng L = T- π của hệ là :

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + m\dot{x}\dot{s}\cos\alpha - ms\sin\alpha + const$$

Ta tính : $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}; \frac{\partial L}{\partial x}; \frac{\partial L}{\partial \dot{s}}; \frac{\partial L}{\partial s}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{s}\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \frac{\partial L}{\partial s} = -mg\sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{3m\dot{s}}{2} + m\dot{x}\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{3m}{2}\ddot{s} + m\ddot{x}\cos\alpha$$

Thay các biểu thức này vào phương trình (1) và (2) ta nhận được :

$$(M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{3m}{2}\ddot{s} + m\ddot{x}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) dễ dàng tìm được :

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin 2\alpha}{3(M+m) - 2m\cos^2\alpha}$$

$$\ddot{s} = \frac{2(M+m)g\sin\alpha}{3(M+m) - 2m\cos^2\alpha}$$

Vậy hệ chuyển động biến đổi đều. Nếu ban đầu hệ đứng yên thì khối trụ lăn xuống, còn lăng trụ sẽ trượt qua trái.

LÝ THUYẾT VA CHẠM

Mọi quá trình chuyển động của vật thể không phải bao giờ cũng diễn ra một cách đều đặn, mà có thể xảy ra sự biến đổi đột ngột. Vì vậy, khi nghiên cứu ta cần chú ý đến các đặc điểm, các hiện tượng đặc biệt của chuyển động. Ở chương này ta sẽ nghiên cứu một loại chuyển động đặc biệt đó là sự vật chạm. Va chạm là một bài toán ta thường gặp trong thực tế và kỹ thuật. Trước khi nghiên cứu hiện tượng này ta cần nắm vững các đặc điểm và các giả thuyết sau đây :

§1. CÁC ĐẶC ĐIỂM VÀ GIẢ THUYẾT VỀ VA CHẠM

1. Va chạm : Là quá trình động lực trong đó vận tốc chuyển động cảu cơ hệ thay đổi đột ngột trong khoảng thời gian vô cùng bé. Thời gian va chạm của hai vật thường xảy ra khoảng từ 10^{-2} đến 10^{-4} giây.

Ví dụ về va chạm như khi búa đóng đinh, đóng cọc, quả bóng đá vào tường lại bật ra ngay.

2. Các giai đoạn va chạm :

Quan sát hiện tượng, ta thấy các vật khi va chạm bị biến dạng ở vùng chúng tiếp xúc nhau, sau đó hình dạng có thể lại được phục hồi. Mức độ biến dạng và hồi phục của các vật va chạm phụ thuộc vào tính đàn hồi của các vật đó. Từ đó ta nhận thấy quá trình va chạm có thể chia hai giai đoạn : Biến dạng và phục hồi.

Giai đoạn biến dạng xảy ra từ lúc hai vật bắt đầu tiếp xúc nhau đến lúc dừng biến dạng. Giai đoạn phụ hồi từ lúc dừng biến dạng đến lúc kết thúc va chạm. Trong giai đoạn này các vật va chạm nhau dần dần trở lại hình dạng cũ đến mức độ nào đó.

Căn cứ vào mức độ phục hồi lại hình dạng cũ của các vật va chạm, người ta phân biệt các loại va chạm như sau :

- Nếu va chạm không có giai đoạn phục hồi được gọi là va chạm mềm hay va chạm không đàn hồi. Đặc điểm cơ bản của loại va chạm này là khi kết thúc quá trình va chạm, những phần tử của hai vật va nhau có cùng vận tốc pháp ở vùng tiếp xúc.

- Nếu va chạm có giai đoạn phục hồi thì gọi là va chạm đàn hồi. Hình dáng cũ của các vật va chạm được phục hồi hoàn toàn gọi là va chạm hoàn toàn đàn hồi. Đặc điểm va chạm đàn hồi là kết thúc va chạm vận tốc pháp truyền các phần tử của hai vật ở vùng tiếp xúc khác nhau.

Để đánh giá sự phục hồi của vật va chạm người ta đưa vào hệ số phục hồi là :

$$k = \frac{S_2}{S_1} \qquad (7\text{-}1)$$

Trong đó $\vec{S}_1 = \int_0^{\tau_1} \vec{N}dt$ là xung lượng va chạm trong giai đoạn biến dạng, còn $\vec{S}_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{N}dt$ là xung lượng va chạm trong giai đoạn phục hồi.

Rõ ràng k=0 là va chạm mềm khi k=1 là va chạm hoàn toàn đàn hồi, còn 0<k<1 là va chạm đàn hồi. Hệ số k phụ thuộc tính chất đàn hồi của các vật va chạm và được xác định bằng thực nghiệm.

3. Bỏ qua di chuyển của hệ trong va chạm :

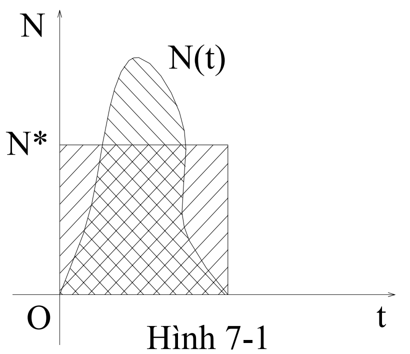
Va chạm xảy ra rất nhanh, nên khi va chạm ta xem như các vật không di chuyển. Thật vậy, quãng đường di chuyển của chất điểm trong khoảng thời gian va chạm là :

$$s = \int_0^{\tau} v.dt \le V_{max}.\tau$$

V_{max} là đại lượng giới nội và khoảng thời gian τ rất bé, nên s cũng rất bé ta có thể bỏ qua được.

4. Lực va chạm và xung lực va chạm :

Trong va chạm, ngoài những lực thường tác dụng lên cơ hệ như trọng lực, lực cản,..v...v . các chất điểm của cơ hệ còn chịu thêm những phản lực liên kết ở vùng tiếp xúc xuất hiện từ lúc bắt đầu va chạm và mất đi ngay khi hết va chạm. Những phản lực đó gọi là những lực va chạm. Ta ký hiệu lực va chạm là $\vec{N}$ lực va chạm biến đổi trong khoảng thời gian va chạm và có lúc đạt đến giá trị rất lớn, nên nó biểu diễn là hàm thời gian $\vec{N} = \vec{N}$ (t). Vì vậy, người ta thường đánh giá tác dụng lực va chạm trong khoảng thời gian va chạm τ bằng xung lượng va chạm $\vec{S}$.



Hình 7-1

$$\vec{S} = \int_0^\tau \vec{N}.dt = \vec{N}*.\tau$$

trong đó $\vec{N}*$ là lực va chạm trung bình.

Áp dụng định lý động lượng cho chất điểm thuộc hệ trong thời gian va chạm ta có :

$$m\Delta\vec{v} = \int_0^\tau \vec{F}dt + \int_0^\tau \vec{N}dt$$

trong đó $\vec{F}$ là hợp lực các lực thường tác dụng lên chất điểm ấy. Rõ ràng, ta có :

$$\left|\int_0^\tau \vec{F}dt\right| \le F_{\max}.\tau$$

Thực tế F_{max} không lớn lắm mà τ lại rất bé nên xung lượng lực thường cũng rất bé so với xung lượng va chạm. Do đó trong quá trình va chạm ta bỏ qua xung lượng của lực thường. Phương trình trên có dạng :

$$m\Delta\vec{v} = \int_0^\tau \vec{N}dt = \vec{S} \qquad (7\text{-}2)$$

Đây là phương trình cơ bản của hiện tượng va chạm.

Ví dụ :

Một búa tạ có khối lượng m = 5kg, vận tốc của búa lúc bặt đầu đập lên vật rèn là v= 5m/s. Thời gian vật đập lên vật rèn là $\tau = 10^{-2}$ giây. tính lực vật đập trung bình cảu búa lên vật rèn.

Bài giải:

Theo phương trình (7-2) ta có :

$$5.5 = S = N^*.\ 10^{-2}$$

ta suy ra : $$N^* = \frac{25}{10^{-2}} = 2500 \quad N$$

Lực này bằng áp lực tĩnh của một vật có khối lượng m = 2500/10 = 250 không gian đè lên. Vì vậy, mà người ta gọi búa ấy là búa tạ, mặc dầu khối lượng chỉ có 250kg.

§2. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Áp dụng trong quá trình vật chạm. Dựa và phương trình cơ bản :

$$m\Delta\vec{v} = \vec{S}$$

với những giả thuyết đơn giản về lực và di chuyển trong quá trình va chạm. Bây giờ ta sẽ áp dụng các định lý tổng quát động lực cơ hệ vào quá trình va chạm như sau :

2.1 Định lý biến thiên động lượng:

Ta xét va chạm cơ hệ n chất điểm có khối lượng M = $\sum m_k$. Bỏ qua tác dụng xung lượng của lực thường, theo định lí động lượng cơ hệ, ta có :

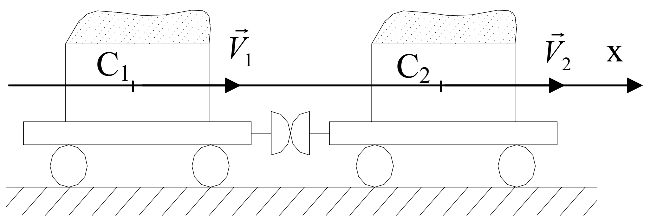
$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_{ek} \qquad (7\text{-}3)$$

Áp dụng định lý này cho trục x, ta có :

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{ekx} \qquad (7\text{-}4)$$

Ta đã biết $\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k = M\vec{V}_C$ là động lượng của hệ ngay sau khi va chạm, còn $\vec{Q}_0 = \sum m_k \vec{V}_k(0) = M\vec{V}_C(0)$ là động lượng của hệ ngay trước va chạm. $\vec{V}_C$ và $\vec{V}_C(0)$ là vận tốc khối tâm của hệ sau và trước va chạm.

Ví dụ : Hai toa xe có khối lượng m_1 và m_2 chạy trên đường ray thẳng với vận tốc V_1 và V_2 va vào nhau ($V_1 > V_2$) . Giả thuyết vật chạm mềm, tìm vận tốc chung của hai toa xe sau va chạm.



Hình 7-2

Bài gải :

Khảo sát cơ hệ gồm hai toa xe xung lượng vật chạm giữa chúng là xung lượng trong. Bỏ qua tác dụng của các lực thường là trọng lượng P_1, P_2 và các phản lực đường ray N_1, N_2. Ở đây không có xung lượng va chạm ngoài nên động lượng của hệ được bảo toàn trong quá trình va chạm. Do đó ta có :

$$m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = (m_1 + m_2)V_x$$

Từ đó suy ra :

$$V_x = \frac{m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x}}{m_1 + m_2}$$

hay :
$$V = \frac{m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x}}{m_1 + m_2}$$

2.2 Định lý biến thiên mômen động lượng :

Cũng như trước đây, ta kí hiệu :

$$\vec{L}_O = \sum \vec{m}_O (m_k \vec{V}_k)$$

$$L_z = \sum m_z (m_k \vec{V}_k)$$

là mômen động lượng của hệ đối với tâm O và trục z. Bỏ qua tác dụng của lực thường, áp dụng định lý biến thiên mômen động của hệ, ta có :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O (\vec{F}_k) = \vec{M}_O{}^{(e)}$$

Hay :
$$\vec{L}_O(2) - \vec{L}_O(1) = \int_0^\tau \vec{M}_O{}^{(e)} dt \qquad (a)$$

Nhưng:
$$\int_0^\tau \vec{M}_O{}^{(e)} dt = \int_0^\tau \sum \vec{m}_O (\vec{F}_{ek}) dt = \sum \int_0^\tau (\vec{r}_k \wedge \vec{F}_{ek}) dt$$

Bỏ qua di chuyển của chất điểm trong vật chạm, ta viết được :

$$\int_0^\tau \vec{M}_O{}^{(e)} dt = \sum \vec{r}_k \wedge \int_0^\tau \vec{F}_{ek} dt = \sum \vec{m}_O (\vec{S}_{ek})$$

Do đó, hệ thức (a) có thể viết lại :

$$\vec{L}_O(2) - \vec{L}_O(1) = \sum \vec{m}_O (\vec{S}_{ek}) \qquad (7-5)$$

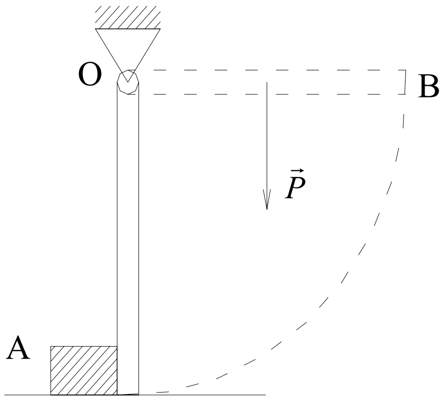
Như vậy : Biến thiên mômen động của hệ đối với tâm O trong thời gian va chạm bằng tổng mômen xung lượng các ngoại lực va chạm tác dụng lên cơ hệ trong cùng thời gian và cùng tâm ấy.

Tương tự đối với trục z, ta cũng có :

$$L_z(2) - L_z(1) = \sum m_z (\vec{S}_{ek}) \qquad (7-6)$$

$L_z(1)$ và $L_z(2)$ là mômen động của hệ đối với trục z trước và sau va chạm.

Ví dụ : Thanh đồng chất OB = l, khối lượng M có trục quay O nằm ngang, được thả từ vị trí nằm ngang đến chạm vào vật A khối lượng M. Tìm vận tốc vật A sau va chạm. Giả thuyết k: hệ số phục hồi k = 0 (H 7.3)



Hình 7-3

Bài giải :

Trước khi khảo sát hiện tượng va chạm, ta xét thanh OB chuyển động từ vị trí nằm ngang đến vị trí thẳng đứng để tìm vận tốc góc của nó trước lúc va chạm.

Áp dụng định lý biên thiên động năng cho thanh OB, ta có :

$$T_1 - T_0 = \Sigma A = Pl/2.$$

Ban đầu thanh nằm yên nên $T_0 = 0$, còn $T_1 = ½.J_0\omega_1^2 = \frac{Ml^2}{6}\omega_1^2$

Thay vào biểu thức (b), ta được :

$$\frac{Ml^2}{6}\omega_1^2 = Pl/2 = Mgl/2.$$

Từ đó ta có : $\omega_1^2 = \frac{3g}{l}$ là vận tốc thanh OB trước lúc va chạm.

Bây giờ ta xét thanh OB và vật A trong giai đoạn va chạm. Lực xuất hiện giữa vật A và thanh OB là nội lực của hệ. Để triệt tiêu lực va chạm ở trục quay O, ta áp dụng định lý mômen động đối với trục O, thì :

$$\vec{m}_O(\vec{S}_{ek}) = 0$$

Do đó, mômen động của hệ đối với trục O được bảo đảm nghĩa là : mômen động của hệ sau va chạm bằng mômen động của hệ đối với tâm O bằng nhau.

$$\vec{L}_O(2) = \vec{L}_O(1)$$

Hay: $$\sum m_0(m\vec{V}) = \sum m_0(m\vec{U})$$

Lúc đầu vật A nằm yên, chỉ có mômen động của thanh, sau va chạm kết thanh thành một khố, lúc đó vận tốc của thanh là ω_2. Ta có :

$$\sum m_0(m\vec{V}) = J_0\omega_1$$

Vì va chạm không đàn hồi (k=0) nên vật A và thanh sau va chạm kết thành một khối, lúc đó vận tốc của thanh là ω_2 . Ta có:

$$\sum m_0(m\vec{U}) = (J_0 + ml^2)\omega_2$$

Như vậy, ta viết được :

$$(J_0 + ml^2)\omega_2 = J_0\omega_1$$

Từ đó ta có :

$$\omega_2 = \frac{J_0}{J_0 + ml^2}\omega_1$$

Vận tốc vật A sau va chạm là :

$$V_A = l.\omega_2 = \frac{J_0}{J_0 + ml^2} l\omega_1$$

Thay biểu thức : $J_0 = \frac{Ml^2}{3}$ và $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ cuối cùng ta nhận được :

$$V_A = \frac{M}{M + 3m}\sqrt{3gl}$$

2.3 Định lý mất động năng :

Nói chung trong va chạm một phần động năng bị tiêu hao chuyển hóa thành nhiệt năng. Vì vậy trong va chạm không áp định lý bảo toàn cơ năng.

Lượng động năng bị mất mát la $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$, trong đó T_1 và T_2 là động năng của hệ trước và sau va chạm. Trong va chạm ta không thể tính được công các lực va chạm tỏng quá trình va chạm, nên ta không dùng định lý động năng. Sau đây, ta sẽ dùng định lý động lượng và mômen động lượng đê nghiên cứu một số bài toán ứng dụng va chạm.

§3. HAI BÀI TOÁN VỀ VA CHẠM

Sau đây là hai bài toán va chạm được ứng dụng quan trọng.

3.1 Va chạm xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến :

1. Đặt vấn đề : Giả sử có hai vật M_1 và M_2 có khối lượng m_1 và m_2 va chạm nhau. Vận tốc của chúng trước va chạm là $\vec{V}_1$ và $\vec{V}_2$.

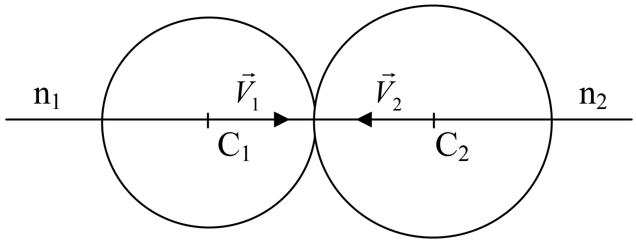
Gọi pháp tuyến chung của hai mặt tiếp xúc nhau của hai vật tại điểm I là n_1In_2 và khối tâm của chung là C_1 và C_2 .

Đường thẳng n_1In_2 gọi là đường va chạm, đường thẳng C_1C_2 gọi là đường xuyên tâm. Từ đó ta có định nghĩa :

Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến là đường va chạm trùng với đường thẳng xuyên tâm của hai vật và vận tốc $\vec{V}_1$ và $\vec{V}_2$ đều nằm trên đường ấy.

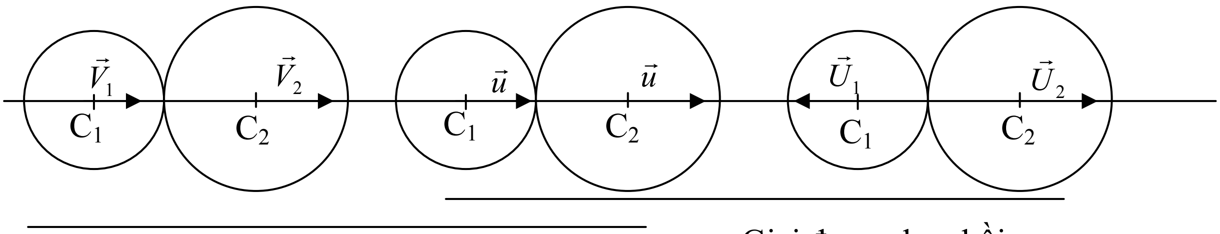
Sau đây ta chỉ xét va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật với mô hình đơn giản ta xét va chạm hai quả cầu.

Ta gọi $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ và $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ là vận tốc ngay trước và sau va chạm của hai quả cầu. Ta sẽ tìm vận tốc vủa chúng sau va chạm, xung lượng va chạm và mất động năng trong va chạm.



Hình 7-4

<u>*2. Giải bài toán :*</u> Giả sử hai quả cầu có khối lượng m_1 và m_2 vận tốc trước va chạm V_1 và V_2 ($V_1 > V_2$). Các giai đoạn va chạm như hình vẽ (7-5).



Hình 7-5

Áp dụng định lý biến thiên động lượng trong quá trình va chạm cho hai giai đoạn, ta có :

Giai đoạn biến fạng :

$$m_1(u - V_1) = S_{21} = -S_1 \qquad (a)$$

$$m_1(u - V_2) = S_{12} = S_1 \qquad (b)$$

Giai đoạn phục hồi

$$m_1(U_1 - u) = S'_{21} = -S_2 \qquad (c)$$

$$m_1(U_2 - u) = S'_{12} = S_2 \qquad (d)$$

Trong đó $\vec{u}$ là vận tốc chung của hai vật lúc kết thúc giai đoạn biến dạng chuyển sang giai đoạn phục hồi. $\vec{S}_{12}, \vec{S}_{21}$ xung lượng tương hỗ giữa hai vật trong giai đoạn phục hồi.

Ngoài ra bốn phương trình trên, ta còn có một phương trình nữa là :

$$S_2 = kS_1 \qquad (e)$$

Giải hệ năm phương trình trên, ta nhận được :

$$u = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= V_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2) \\ u_1 &= V_1 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2) \end{aligned} \qquad (7\text{-}7)$$

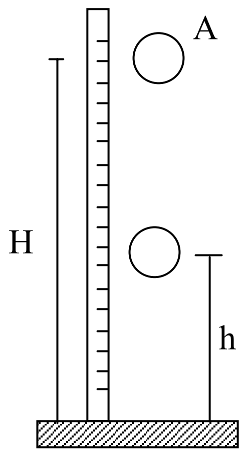
$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}\left|V_1 - V_2\right| \\ S_1 &= \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}\left|U_2 - U_1\right| \end{aligned} \qquad (7\text{-}8)$$

3. Xác định hệ số phục hồi bằng thực nghiệm :

Từ kết quả trên, ta có hệ số phụ hồi :

$$k = \left|\frac{S_2}{S_1}\right| = \left|\frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1}\right| = \frac{U_r}{V_r}$$

Trong đó U_r = | $U_2 - U_1$| và V_r = | $V_2 - V_1$ | là vận tốc tương đối của hai vật va chạm xuyên tâm ngay sau và trước va chạm. Dựa vào công vừa tìm được, người ta tiến hành nhiều thí nghiệm xác định hệ số k. Sau đây là một trong các thí nghiệm ấy.



Hình 7-6

Ta thả viên bi rơi xuống không vận tốc đầu từ độ cao H tới nền nằm ngang cố định, sau đó viên bi bật lên độ cao lớn nhất h rồi lại rơi xuống. Vì nền cố định, nên $V_2 = U_2 = 0$ theo công thức Galilê thì vận tốc viên bi trước và sau va chạm là $V_1 = \sqrt{2gH}$. Do đó hệ số phục hồi :

$$k = \frac{U_r}{V_r} = \left|\frac{U_1}{V_1}\right| = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

4. Biểu thức mất động năng :

Trong khi hai vật va chạm nhau thì một phần động năng bị mất đi là $\Delta T = T_1 - T_2$ trong đó T_1 và T_2 là động năng của hệ ngay trước và sau va chạm.

Theo định nghĩa ta có :

$$T_1 = \frac{m_1 V_1{}^2}{2} + \frac{m_2 V_2{}^2}{2}$$

$$T_1 = \frac{m_1 U_1{}^2}{2} + \frac{m_2 U_2{}^2}{2}$$

Do đó ΔT = $T_2 - T_1$ = $\frac{m_1}{2}(V_1{}^2 - U_1{}^2) + \frac{m_2}{2}(V_2{}^2 - U_2{}^2)$. Theo công thức (7-7) sau khi biến đổi ta nhận được :

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-k^2)(V_1 - V_2)^2 \qquad (7-9)$$

Ta sẽ áp dụng công thức này vào việc dùng búa rèn và đóng cọc đinh. Trước khi va đập búa có vận tốc V_1 còn vật bị va đập $V_2 = 0$. Khi đó :

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-k^2).V_1^2$$

Nếu T_1 là động năng của hệ trước va đập, ta có :

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-k^2).T_1$$

Hay : $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-k^2) = \frac{1-k^2}{1+\frac{m_1}{m_2}}$ là hiệu suất của búa rèn.

Rõ ràng để tăng hiệu suất η thì ta phải giảm tỉ số $\frac{m_1}{m_2}$, nghĩa là khối lượng của búa phải hơn khối lượng của đe rất nhiều.

Vídụ : Nếu $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{10}$ và k = 0 thì η = 90%. Khi dùng búa đóng cọc hay đóng đinh , lượng ΔT là vô ích, từ công thức trên ta tìm hiệu suất của búa là :

$$\eta = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} = 1 - \frac{\Delta T}{T_1} = 1 - \frac{1-k^2}{1+\frac{m_1}{m_2}}$$

Vậy muốn tăng hiệu suất của búa thì khối lượng của búa phải lớn hơn không lượng của đinh hay cọc rất nhiều lần.

Vậy muốn tăng hiệu suất của búa thì khối lượng của búa phải lớn hơn không lượng của đinh hay cọc rất nhiều lần.

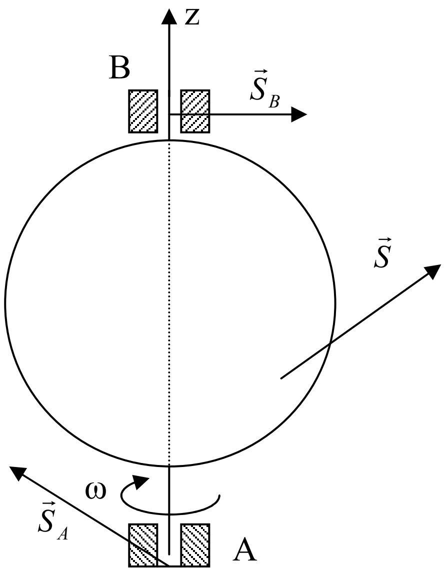
Ví dụ : $\frac{m_1}{m_2} = 10$, k = 0 thì η = 90%.

3.2 Va chạm của vật qauy. Tâm va chạm :

1. Va chạm của vật quay:

Giả sử ta có vật rắn quay quanh trục z cố định, chịu tác dụng xung lượng $\vec{S}$. Khi đó ở các ổ đỡ A và B sẽ xuất hiện các xung lượng va chạm $\vec{S}_A$ và $\vec{S}_B$. Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng ta có:

$$L_z(2) - L_z(1) = \sum m_z(\vec{S}_{ek}) \qquad \text{(a)}$$



Hình 7-7

Trong đó $L_z(1) = J_z.\omega_1$, $L_z(1) = J_z.\omega_2$ là mômen động lượng của vật đối với trục z trước và sau va chạm. Còn :

$$\sum m_z(\vec{S}_{ek}) = m_z(\vec{S}) + m_z(\vec{S}_A) + m_z(\vec{S}_B).$$

Nhưng $m_z(\vec{S}_A) = m_z(\vec{S}_B) = 0$. Cho nên phương trình (a) có thể viết :

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = m_z(\vec{S})$$

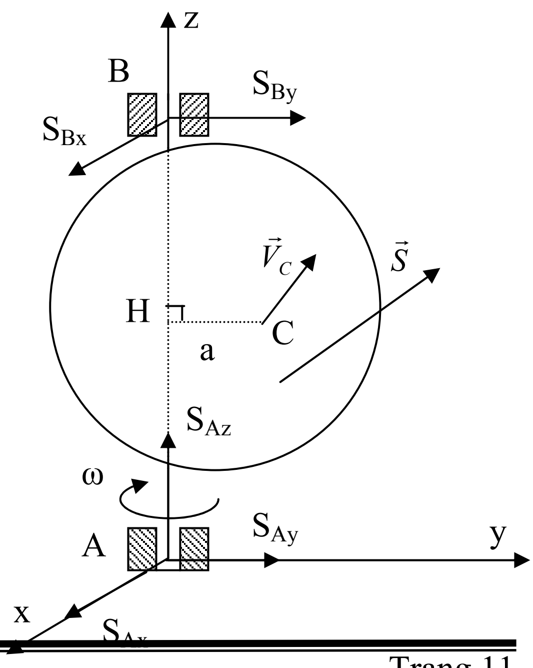
Hay : $$\omega_2 - \omega_1 = \frac{m_z(\vec{S})}{J_z} \qquad \text{(7-10)}$$

2. Xung lượng phản lực va chạm :

Bây giờ ta tìm xung lượng phản lực va chạm ổ trục A và B là $\vec{S}_A$ và $\vec{S}_B$. Muốn vậy, ta chọn hệ trục Axyz sao cho khối tâm C của vật nằm trong mặt phẳng Ayz. Giả sử AB = b, HC = a. (HC ⊥ trục z). Áp dụng các định lý động lượng và mômen động lượng với chú ý hình chiếu động lượng lên các trục tọa độ là

$$Q_{1x} = -MV_C(1) = -M.a.\omega_1$$

$$Q_{2x} = -MV_C(2) = -M.a.\omega_2$$



Hình 7-8

Còn $Q_y = Q_z = 0$. Do đó, ta có :

$$\begin{aligned}
&-Ma(\omega_2 - \omega_1) = S_{Ax} + S_{Bx} + S_x \\
&S_{Ay} + S_{By} + S_y = 0 \\
&S_{Az} + S_z = 0 \\
&-J_{xz}(\omega_2 - \omega_1) = -S_{By}.b + m_x(\vec{S}) \\
&-J_{yz}(\omega_2 - \omega_1) = S_{By}.b + m_y(\vec{S})
\end{aligned}$$

Từ năm phương trình này ta tìm được xung lượng phản lực : S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}.

3. Tâm va chạm :

Từ kết quả trên ta nhận thấy rằng khi tác dụng xung lượng $\vec{S}$ lên vật quay mà không sinh ra phản lực động lực $\vec{S}_A$ và $\vec{S}_B$ ở các ổ trục do va chạm gây ra, nên thỏa mãn điều kiện sau :

$$\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$$

Ta suy ra : $S_y = S_z = 0$, nghĩa là xung lượng $\vec{S}$ phải vuông góc mặt phẳng Ayz hay nói cách khác là xung lượng $\vec{S}$ vuông góc mặt phẳng chứa trục quay và khối tâm C của vật. Vì $\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$ nên hệ phương trình không phụ thuộc vào việc chọn gốc tọa độ. Vì vậy, để đơn giản ta có thể chọn hệ trục tọa độ mới là Oxyz, mà xung lượng $\vec{S}$ nằm trong mặt phẳng Oxy. Khi đó, ta có :

$$m_x(\vec{S}) = m_y(\vec{S}) = 0$$

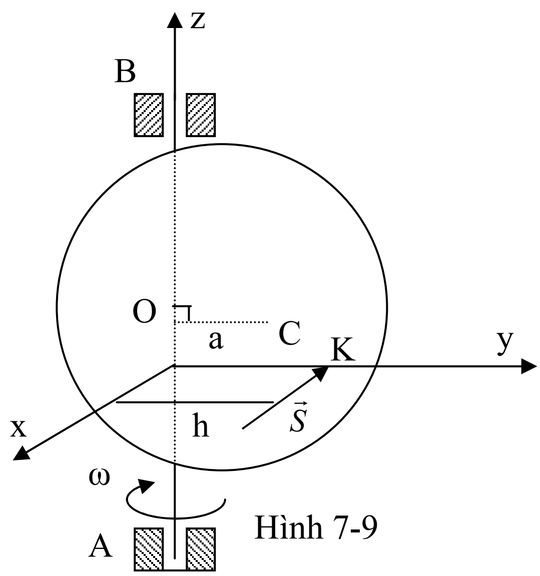
và từ hệ phương trình ta suy ra $J_{xy} = J_{yz} = 0$, nghĩa là mặt phẳng Oxy là mặt phẳng đối xứng. Như vậy, từ phương trình đầu của hệ phương trình ta có : $S = Ma(\omega_2 - \omega_1)$, vì $S_A = S_B = 0$ nên $S_{Ax} = S_{Bx} = 0$, còn $S_x = -S$.

Ta đã biết :

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{m_z(\vec{S})}{J_z} = \frac{hS}{J_z}$$

Cuối cùng ta cũng nhận được :

$$h = \frac{J_z}{Ma} \qquad (7\text{-}12)$$



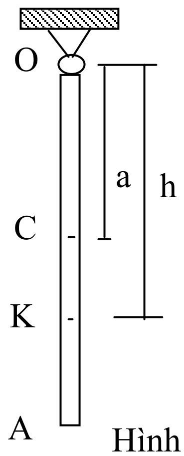
Hình 7-9

Tóm lại, muốn cho vật quay quanh một trục cố định không phát sinh phản lực va chạm. Khi có xung lực tác dụng thì cần có các điều kiện sau :

a) Xung lượng va đập $\vec{S}$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay và trục quay là trục quán tính chính đối với giao điểm của trục với mặt phẳng ấy.

b) Xung lượng va đập $\vec{S}$ phải vuông góc mặt phẳng chứa trục quay và khối tâm của vật.

c) Xung lượng va đập $\vec{S}$ cách trục quay một đoạn $h = \frac{J_z}{Ma}$ và ở về cùng phía với khối tâm của vật.



Hình 7-10

Ví dụ : Tìm tâm va chạm của thanh đồng chất OA = l quay quanh trục O vuông góc thanh.

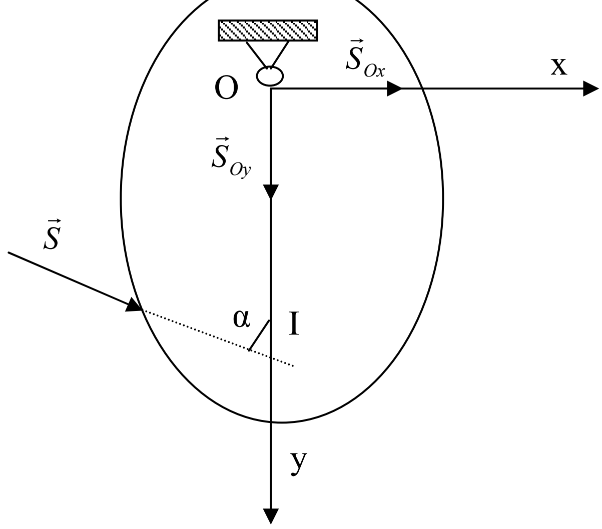
Bài giải: Giả sử xung lượng va đập $\vec{S}$ thỏa mãn điều kiện trên va đập là K. Áp dụng công thức trên ta có :

$$h = \frac{J_z}{Ma} = \frac{Ml^2}{3\frac{Ml}{2}}$$

$$h = \frac{2}{3}l$$

Va chạm của vật quy quanh trục cố định và tâm va chạm

a) Bài toán : Cho tấm phẳng quay quanh một trục vuông góc với mặt tấm tại O. Xung lượng va chạm $\vec{S}$ tác dụng trong mặt phẳng của tâm tạo bởi OC một góc α. Tại thời điểm va chạm, tấm có vận tốc góc ω_0. Hãy tìm vận tốc góc ω của tâm sau va chạm và xung lượng của các phản lực ở trục O.



Bài giải: Xét tấm quay

Áp dụng định lí động lượng ta có :

$$M\vec{V}_{1C} - M\vec{V}_{OC} = \vec{S} + \vec{S}_0 \qquad (1)$$

Còn theo động lượng mômen động lượng ta có :

$$J_O.\overline{\omega}_1 - J_O.\overline{\omega}_0 = \overline{m}_0(\vec{S}) \qquad (2)$$

Từ (1) đối với trục Ox, Oy ta có :

$$\begin{aligned} MV_{1C} - MV_{OC} &= S_{Ox} + S\sin\alpha \\ 0 &= S_{Oy} + S\cos\alpha \end{aligned} \qquad (3)$$

(2) => $J_O(\omega_1 - \omega_0) = S.\sin\alpha.OI$

Đặt OC = a, ta có $V_{1C} = a\omega_1$, $V_{OC} = a\omega_0$

(3) => $Ma(\omega_1 - \omega_0) = S.\sin\alpha.OI$ (5)

Từ (3), (4) & (5) ta tìm được :

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= \vec{\omega}_0 + \frac{S}{J_0} OI\sin\alpha \\ S_{Oy} &= -S\cos\alpha \\ S_{Ox} &= S.\sin\alpha\left(\frac{Ma.OI}{J_0} - 1\right) \end{aligned} \qquad (a)$$

Tâm va chạm :

$S_{Oy} = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2$

$S_{Ox} = 0 \Rightarrow \frac{Ma.OI}{J_0} - 1 = 0 \Rightarrow OI = \frac{.J_0}{Ma}$

Vậy ở tại trục O chúng xuất hiện xung lực va chạm của phản lực khi tấm chịu tác dụng lực va chạm $\vec{S}$. Thì $\vec{S}$ phải vuông góc đường thẳng OC và đi qua I $\in$OC, sao cho $OI = \frac{.J_0}{Ma}$. Điểm được gọi là tâm va chạm.