Chương 5

GIẢI GẦN ĐÚNG
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

I PHƯƠNG PHÁP SỐ GIẢI BÀI TOÁN CÔ-SI

1.1 Bài toán Cauchy:

Cho phương trình vi phân cấp 1:

$$y' = f(x,y) \qquad (5.1)$$

Tìm nghiệm y=y(x) của phương trình (5.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0$$

Các phương pháp số giải bài toán trên theo cách tiếp cận sau. Chọn bước h đủ bé, xác định các điểm $x_i = x_0 + h$ (i=0,1,…) và tính gần đúng giá trị $y(x_i)$ bởi y_i.

1.2 Phương pháp Ơle.

Ta có công thức số gia hữu hạn Lagrange:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(c_i)\,h \qquad (5.2)$$

Phương pháp Ơle thay gần đúng $y'(c_i)$ bởi $f(x_i,y_i)$ và nhận được công thức tính xấp xỉ y_i như sau:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i,y_i) \qquad (5.3)$$

Giả sử trong miền R={ |x-x0| ≤a; |y-y0| ≤b} hàm f(x,y) thỏa mãn các điều kiện:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le N|y_1 - y_2| \qquad (\forall y_1, y_2)$$

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.f'\right| \le M \qquad (5.4)$$

ở đây M và N là các hằng số.

Ta có ước lượng sai số như sau:

$$|y(x_n) - y_n| \le \frac{hM}{2N}\left((1+hN)^n - 1\right) \qquad (5.5)$$

Trong thực hành để ước lượng sai số người ta dùng cách tính kép, t.l tính lại với bước h/2 ta có các xấp xỉ $y(x_n) = y_n^*$. Khi đó ta có

$| y(x_n) - y_n^*| \approx | y_n - y_n^*|$.

Hay $| y(x_n) - y_n| < | y_n - y_n^*| + | y(x_n) - y_n^*| = 2| y_n - y_n^*|$

Ví dụ:Giải phương trình vi phân $y' = y - \frac{2x}{y}$ với điều kiện ban đầu y(0)=1; h=0,2.

Phương trình có nghiệm đúng là $y = \sqrt{2x+1}$.

Tính theo phương pháp Ơ le ta có:

i	x_i	$\Delta y_i = h\,f(x_i,y_i)$	y_i	nghiệm đúng $y(x_i)$
0	0,0	0,2000	1,0000	1,0000
1	0,2	0,1733	1,2000	1,1832
2	0,4	0,1561	1,3733	1,3416
3	0,6	0,1492	1,5294	1,4832
4	0,8	0,1451	1,6786	1,6124
5	1,0		1,8237	1,7320

1.3 Phương pháp Ơle cải tiến 1.

Tính thêm các điểm giữa các điểm trong phương pháp gốc.

$$\begin{cases} x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \dfrac{h}{2} \\ y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \dfrac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}} \right) \end{cases} \qquad (5.6)$$

Và công thức lặp là:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f_{i+\frac{1}{2}} \qquad (5.7)$$

1.4 Phương pháp Ơle cải tiến 2.

Ta đặt

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \\ \bar{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) \end{cases} \qquad (5.8)$$

Khi đó

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f_i + \bar{f}_{i+1}}{2} \qquad (5.9)$$

Các phương pháp Ơle cải tiến đều có độ chính xác $O(h^3)$.

Để đánh giá sai số tại x_n người ta dùng cách tính kép, t.l tính lại với bước h/2 ta có các xấp xỉ $y(x_n)= y_n^*$. Khi đó ta có

$$3 \mid y(x_n) - y_n^* \mid \approx \mid y_n - y_n^* \mid.$$

Hay $| y(x_n) - y_n| < | y_n - y_n^*| + | y(x_n) - y_n^*| = (4^*| y_n - y_n^*|)/3$.

Ví dụ 2. Xét lại ví dụ trước $y' = y - \frac{2x}{y}$

y(0) =1; h=0,2.

i	x_i	Phương pháp thứ nhất				Phương pháp thứ 2			
		y_i	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	Δy_i	y_i	$\bar{y}_{i+1}$	Δy_i	$y(x_i)$
0	0	1,0000	0,1	1,1000	0,1836	1,0000	1,2000	0,1867	1,0000
1	0,2	1,1836	0,3	1,2682	0,1590	1,2067	1,3566	0,1617	1,1832
2	0,4	1,3427	0,5	1,4173	0,1424	1,3484	1,4993	0,1454	1,3416
3	0,6	1,4850	0,7	1,5527	0,1302	1,4938	1,6180	0,1341	1,4832
4	0,8	1,6152	0,9	1,6777	0,1210	1,6279	1,7569	0,1263	1,6124
5	1,0	1,7362				1,7543			1,7320

1.5 Phương pháp Runge-Kutta

Theo Runge-Kutta giá trị gần đúng của yi+1 được xác định nhờ công thức sau:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad (5.11)$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right) \qquad (5.12)$$

trong đó:

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_3^{(i)} = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_4^{(i)} = h\,f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right)$$

Độ chính xác là h^4.

Để đánh giá sai số tại x_n người ta dùng cách tính kép, t.l tính lại với bước h/2 ta có các xấp xỉ $y(x_n) = y_n^*$. Khi đó ta có

$$15.|\ y(x_n) - y_n^*| \approx |\ y_n - y_n^*|.$$

Hay $|\ y(x_n) - y_n| < |\ y_n - y_n^*| + |\ y(x_n) - y_n^*| = (16.|\ y_n - y_n^*|)/15.$

II PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH GIẢI BÀI TOÁN CÔ-SI

2.1 Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp n.

Hãy tìm nghiệm y=y(x) thỏa mãn phương trình

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (5.12)$$

với điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0;\quad y'(x_0) = y'_0;\quad \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (5.13)$$

trong đó: $y_0;\ y'_0;\ \ldots, y_0^{(n-1)}$ là các số đã cho.

Bài toán Cauchy cho hệ n phương trình vi phân.

Tìm các hàm $y_1 = y_1(x); \ldots y_n = y_n(x)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (5.14)$$

và thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$y_j(x_0) = y_{j0} \quad \forall j = 1, .., n \qquad (5.15)$$

Bằng cách đặt $y_1 = y', \ \ldots\ ; y_{n-1} = y^{(n-1)}$ phương trình cấp n (5.12) luôn đưa được về hệ n phương trình vi phân:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, .., y_{n-1}) \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0;\ y_j(x_0) = y_0^{(j)};\quad (j=1,..,n-1);$$

Phương pháp giải tích tìm nghiệm xấp xỉ của (5.12) với điều kiện ban đầu (5.13) (hoặc của hệ (5.14) với điều kiện (5.15)) dưới dạng biểu diễn giải tích mà thường là dưới dạng chuỗi lũy thừa.

2.2 Phương pháp đạo hàm liên tiếp.

Giả sử nghiệm của (5.12) có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại x_0. Ta sẽ xác định n số hạng đầu của khai triển nhờ (5.12) và (5.13). Sau đó xác định các số hạng tiếp theo nhờ đạo hàm liên tiếp (5.12) và sử dụng các giá trị của đạo hàm cấp thấp hơn tại x_0 đã tính được.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad (5.16)$$

với điều kiện:

$$y(0)=0;\ y'(0) = 1 \qquad (5.17)$$

Giải: Từ (5.16) và (5.17) ta có:

$y''=-xy' - y$ (5.16') vậy $y''(0) = 0$;

$y^{(3)} =-y'-xy''-y'=-xy''-2y'$

$y^{(4)}=-xy^{(3)}-3y''$;

. . . . . .

$y^{(n+1)}= -xy^{(n)}-ny^{(n-1)}$

Ta tính được

$y''(0)=0\ y^{(3)}(0) =-2$;

$y^{(4)}(0) =0;\ y^{(5)}(0) = 8$;

$y^{(2n)}(0) =-(2n-1)y^{(2n-2)}=0$;

$y^{(2n+1)}(0) = -2n.y^{(2n-1)}(0) = (-1)^n .2^n. n!$

Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$

Với các điều kiện trên ta nhận được chuỗi lũy thừa:

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \ldots + (-1)^n \frac{2^n\, n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots$$

Ví dụ 2.

Tìm khai triển bậc 3 cho nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y'(x) = y\cos x - z\sin x \\ z'(x) = y\sin x - z\cos x \end{cases} \qquad (5.18)$$

với điều kiện ban đầu: y(0)=1, z(0)=0 (5.19)

Từ (5.18) và (5.19) ta có:

y'(0)= 1; z'(0)= 0;

Đạo hàm hai vế (5.18) ta có:

y''(x) = -(y+z')sin x –(z-y')cos x

z''(x)= (y'+z) sin x +(y-z') cos x

y''(0)= 1; z''(0)=1;

Đạo hàm lần nữa ta được:

y(3)(x) = (z-2y'-z'') sin x –(y+2z'-y'') cos x

z(3)(x) = -(y-2z'-y'') sin x +(z-2y'-z'') cos x

y(3)(0) =1; z(3)(0) =1;

Cuối cùng ta có nghiệm gần đúng:

$$\begin{cases} y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\ z(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

2.3 Phương pháp hệ số bất định

Phương pháp này thường dùng để giải một phương trình hoặc hệ phương trình vi phân tuyến tính. Người ta tìm nghiệm dưới dạng chuỗi lũy thừa;

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i$$

trong đó ci là các hệ số cần xác định.

Để tìm ci ta tính đạo hàm các cấp của chuỗi trên rồi thay vào (5.12). hệ số ci được tính đệ quy nhờ việc đồng nhất các hệ số của chuỗi kết hợp với các điều kện ban đầu.

Ví dụ 3.

Tìm nghiệm của phương trình:

y'' +xy'+2y =12 (5.20)

với y(0)=5; y'(0)=2. (5.21)

Giải:

Tìm nghiệm dưới dạng:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

Khi đó:

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k.c_k x^{k-1}$$

$$y''(x) = 2c_2 + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1).c_k x^{k-2}$$

Do (5.21) nên c_0 =5; c_1=2

Thay vào (5.20) ta có:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 12$$

$$\Rightarrow 2c_2 + 2c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)(k+2)\, c_{k+2} + (k+2)c_k\,] x^k = 12$$

Từ đó:

c_2= 6-c_0= 6-5 =1;

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{k+1}$$

$$c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} c_2}{(2k-1)!!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}$$

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k)!!} = \frac{2.(-1)^k}{(2k)!!}$$

III BÀI TOÁN BIÊN TUYẾN TÍNH

3.1 Bài toán biên 2 điểm.

Cho phương trình vi phân:

$$F(x,y,y',y'') = 0 \qquad (5.22)$$

Tìm hàm y=y(x) trên đoạn [a,b] thỏa mãn (5.22) và điều kiện biên:

$$\varphi_1[y(a), y'(a)] = 0$$
$$\varphi_2[y(b), y'(b)] = 0 \qquad (5.23)$$

Chúng ta chỉ xét trường hợp phương trình (5.22) và điều kiện biên (5.23) là tuyến tính. Khi đó bài toán biên tuyến tính được phát biểu: Tìm nghiệm của

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=f(x) \qquad (5.24)$$

với điều kiện biên:

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \qquad (5.25)$$

ở đây p(x),q(x), f(x) là các hàm đã biết xác định trên [a,b] còn α_0, α_1, β_0, β_1, A, B là các hằng số đã biết và thỏa mãn:

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$$

Nếu A=B=0 thì điều kiện biên gọi là đều.

3.2 Phương pháp sai phân

Chia đoạn [a,b] bởi các điểm $x_i+a=ih$; n.h=b-a; ký hiệu $p_i=p(x_i)$, $q_i=q(x_i)$, $f_i=f(x_i)$, $y'(x_i)=y_i'$; $y''(x_i)=y_i''$ (i=1,2,..n); Ta thay gần đúng đạo hàm y_i'; y_i'' theo các công thức (3.4), (3.6) và (3.7) trong Chương 3:

$$\begin{cases} y_i' = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (i = 1,..,n-1) \\ y_0' = \dfrac{y_1 - y_0}{h}, \quad y_n' = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} \end{cases} \qquad (5.26)$$

vào (5.24) và (5.25). Ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để tính các y_i (i=0,..,n):

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i; \quad (i = 1,..,n-1) \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{cases} \qquad (5.27)$$

Sai số được đánh giá bởi công thức:

$$|y_i - y(x_i)| \le \frac{h^2 M_4}{96}(b-a)^2 \qquad (5.28)$$

$$\textit{trong đó} \quad M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

<u>*Ví dụ*</u>: Giải phương trình:

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' = 1 \\ y(1) = 0; \quad y(1,4) = 0,0566 \end{cases} \qquad (5.29)$$

Với h=0,1 dùng phép thế (5.26) hệ (5.27) có dạng:

$$\begin{cases} 2x_i^2(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + x_i(y_{i+1} - y_{i-1})h = 2h^2; \quad i = 1,2,3 \\ y_0 = y(1) = 0; \qquad\qquad y_4 = y(1,4) = 0,0566 \end{cases}$$

hay ta có hệ:

$$\begin{cases} 2,31y_0 - 4,84y_1 + 2,53y_2 = 0,02 \\ 2,76y_1 - 5,76y_2 + 3,00y_3 = 0,02 \\ 3,25y_2 - 6,76y_3 + 3,51y_4 = 0,02 \\ y_0 = 0; \quad y_4 = 0,0566 \end{cases} \qquad (5.30)$$

Giải ra ta được: y_0=0; y_1=0,0046; y_2=0,0167; y_3=0,0345; y_4=0,0566

Nghiệm chính xác của phương trình là $y(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$ có các giá trị:

y_0=0; $y(x_1)$=0,0047; $y(x_2)$=0,0166; $y(x_3)$=0,0344; $y(x_4)$=0,0566

3.3 Phương pháp vượt

Trong phương pháp này ta thêm điểm x_{n+1} rồi thay điều kiện biên thứ hai bởi biểu thức:

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B$$

và giải hệ như sau. Viết n-1 phương trình đầu của (5.27) dưới dạng:

$$\begin{cases} y_{i+1} + m_i y_i + k_i y_{i-1} = \dfrac{2h^2 f_i}{2 + hp_i} = \varphi_i \quad (i = 1,..n-1) \\ \textit{trong đó}: \quad m_i = \dfrac{2q_i h^2 - 4}{2 + hp_i}; \quad k_i = \dfrac{2 - hp_i}{2 + hp_i} \end{cases} \qquad (5.31)$$

kết hợp với điều kiện biên:

$$(\alpha_0 h - \alpha_1)y_0 + \alpha_1 y_1 = hA$$

ta có hệ:

$$\mathbf{y_i = c_i(d_i - y_{i+1})} \qquad \text{với } (i=1,..,n) \qquad (5.32)$$

trong đó c_i được tính theo công thức sau:

với i=1 :

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_1(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_1\alpha_1} \\ d_1 = \dfrac{2f_1h^2}{2 + p_1h} + k_1\dfrac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} = \varphi_1 + k_1\dfrac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} \end{cases} \quad (5.33)$$

và với i=2,3,…,n

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_ic_{i-1}};\ d_i = \frac{2f_ih^2}{2 + hp_i} - k_ic_{i-1}d_{i-1} = \varphi_i - k_ic_{i-1}d_{i-1} \quad (5.34)$$

Việc tính toán chia thành hai quá trình nối tiếp:

Quá trình thuận. Tính m_i, k_i theo (5.31). Xác định c_1 và d_1 theo (5.33) và c_i, d_i theo (5.34).

Quá trình ngược: Kết hợp công thức (5.32) khi i=n và i=n-1 với điều kiện biên thứ hai ta có hệ:

$$\begin{cases} y_n = c_n(d_n - y_{n+1}) \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n) \\ \beta_0 y_n + \beta_1\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B \end{cases}$$

từ hệ này ta tính được yn :

$$y_n = \frac{2Bh - \beta_1(d_n - c_{n-1}d_{n-1})}{2\beta_0 h + \beta_1(c_{n-1} - \dfrac{1}{c_n})}$$

Dùng các giá trị c_n, d_n, c_{n-1}, d_{n-1} đã biết để tìm y_n; Các y_i còn lại (i=n-1, …,2,1) được tính đệ quy bởi (5.32). y_0 được tính từ điều kiện biên thứ nhất.

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x$$

với $y(0) - y'(0) = 0;\ 2y(1) - y'(1) = 1$

Giải: Với h=0,1 ta có hệ:

$$
\begin{cases}
\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 2x_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 2y_i = -4x_i \; ; \; (i = 1,..,9) \\
y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{h} = 0 \\
2y_{10} - \dfrac{y_{11} - y_9}{2h} = 1
\end{cases}
$$

ta có:

$$m_i = -\frac{2 + 2h^2}{1 - x_i h}; \qquad k_i = \frac{1 + x_i h}{1 - x_i h}; \qquad \varphi_i = -\frac{4h^2}{1 - x_i h} x_i$$

$c_1 = -0{,}899; \qquad d_1 = -0{,}004$

Kết quả tính như sau (nghiệm đúng $y = x + e^{x^2}$)

i	**x_i**	**y_i**	**$y(x_i)$**
0	0,0	1,03	1,00
1	0,1	1,13	1,11
2	0,2	1,26	1,24
3	0,3	1,41	1,39
4	0,4	1,60	1,57
5	0,5	1,81	1,78
6	0,6	2,06	2,03
7	0,7	2,36	2,33
8	0,8	2,72	2,70
9	0,9	3,17	3,15
10	1,0	3,73	3,72