Chương 3

TÍNH ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

I TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM.

Trong nhiều bài toán thực tế ta cần phải tính đạo hàm của hàm số y=f(x) khi biết giá trị của hàm này tại các mốc xi. t.l biết

$$y_i = f(x_i) \qquad (3.1)$$

Ta có thể dùng công thức nội suy Lagrange để tính đạo hàm:

$$f'(x) \approx L_n'(x) \qquad (3.2)$$

với ước lượng sai số:

$$R_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,\omega_n(x)\right) \qquad (3.3)$$

Vì điểm c phụ thuộc x nên ước lượng (3.3) chỉ đánh giá được khi x là các mốc nội suy x=xi;

Thông thường người ta xét đa thức nội suy với mốc cách đều với $h = x_{i+1} - x_i$.

1.1 Tính đạo hàm cấp 1.

a) Đạo hàm tại các điểm biên.

Khi x là điểm biên x0 hoặc xn ta dùng công thức nội suy bậc nhất với hai mốc nội suy để tính gần đúng đạo hàm:

$$y'(x_0) = (y_1 - y_0)/h \qquad (3.4)$$

$$y'(x_n) = (y_n - y_{n-1})/h$$

Vì $y_n = y_{n-1} + y'(x_n)\, h + 0(h^2)$ nên sai số của ước lượng (3.4) là $O(h^2)$.

b) Đạo hàm tại các điểm trong.

Khi x=xi là các điểm trong (i=1,2,..,n-1) ta dùng công thức nội suy bậc 2 có xi là điểm giữa

$$y(x) \approx y_{i-1} + t\,\Delta y_{i-1} + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_{i-1} \qquad (3.5)$$

với $x = x_{i-1} + ht$

Đạo hàm (3.5) theo x ta được:

$$y'(x) = y'_t t'_x \approx \left(\Delta y_{i-1} + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_{i-1}\right).\frac{1}{h}$$

thay x=xi hay t=1 vào công thức trên ta được:

$$y'(x_i) \approx \left(\Delta y_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{i-1}\right).\frac{1}{h} = \left(\Delta y_{i-1} + \frac{1}{2}(\Delta y_i - \Delta y_{i-1})\right)\frac{1}{h}$$

$$y'(x_i) \approx \frac{1}{2h}\left(\Delta y_i + \Delta y_{i-1}\right)$$

hay

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad (3.6)$$

với $\forall$i=1,2,…,n-1.

Để tính ước lượng sai số ta có các công thức:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hy'_i + \dfrac{h^2}{2} y''_i + O(h^3) \\ y_{i-1} = y_i - hy'_i + \dfrac{h^2}{2} y''_i + O(h^3) \end{cases}$$

Do vậy:

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = y'_i + O(h^2)$$

hay công thức (3.6) có sai số là $O(h^2)$.

1.2 Đạo hàm cấp 2.

Để tính đạo hàm cấp 2 ta dùng công thức nội suy cấp 2 để tính y’’(x_i). Đạo hàm hai lần liên tiếp biểu thức (3.5) ta có:

$$y''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}\Delta^2 y_{i-1} = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right) \qquad (3.7)$$

ta có các công thức sau:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hy'_i + \dfrac{h^2}{2} y''_i + \dfrac{h^3}{6} y_i^{(3)} + O(h^4) \\ y_{i-1} = y_i - hy'_i + \dfrac{h^2}{2} y''_i - \dfrac{h^3}{6} y_i^{(3)} + O(h^4) \end{cases}$$

từ đó ta có:

$$\frac{1}{h^2}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})=y_i^{''}+O(y^2) \qquad (3.8)$$

Vậy sai số có bậc $O(h^2)$.

Chú ý:

- Chúng ta đã có công thức tính đạo hàm cấp 1 và cấp 2 tại các mốc nội suy. Để tính đạo hàm tại các điểm không là mốc ta lại áp dụng phương pháp nội suy Lagrange.
- Sai số khi tính đạo hàm ngoài sai số của công thức còn phải tính đến sai số làm tròn, và các bước nội suy h phải đủ nhỏ.

Ví dụ: Hàm y=f(x) được cho tại các mốc sẽ có đạo hàm cấp 1 và cấp 2 tại các mốc này được tính và cho trong bảng sau:

i	x_i	y_i	y'_i	y_i''
0	1,0	1,266	0,6	
1	1,1	1,326	0,635	0,7
2	1,2	1,393	0,715	0,9
3	1,3	1,469	0,8	0,8
4	1,4	1,553	0,89	1,0
5	1,4	1,647	0,94	

II.TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 Công thức hình thang.

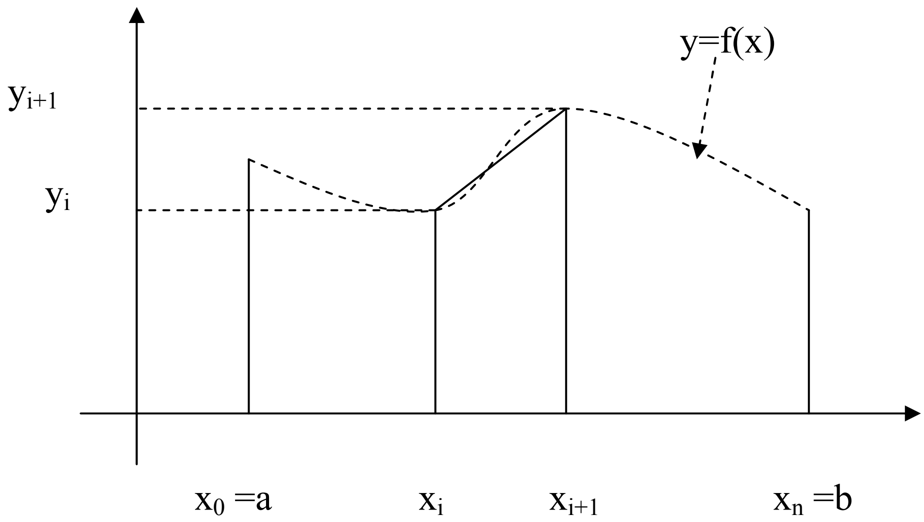
Giả sử chúng ta biết giá trị của hàm y=f(x) tại các mốc cách đều xi trên đoạn [a,b]. Hãy lập công thức tính tích phân hàm f(x) trên [a,b] qua các giá trị tại mốc.

Chia [a,b] thành n phần bằng nhau. Khi đó ta có:

$$h=(b-a)/n;\ x_0=a;\ x_n=b;\ x_i=a+ih;\ y_i=f(x_i); \qquad (3.9)$$

Công thức hình thang dựa trên ý tưởng sau.Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ta thay diện tích hình thang cong bởi diện tích hình thang tương ứng. Điều đó có nghĩa là:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{y_{i+1}+y_i}{2}h \qquad (3.10)$$



Lấy tổng trên các đoạn [xi,xi+1] (i=0;n-1) ta có:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_{i+1}+y_i}{2}\,h$$

hay

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+\ldots+2y_{n-1}+y_n) \quad (3.11)$$

Ước lượng sai số:

Thực chất của công thức (2.11) là thay hàm f(x) trên đoạn Δxi bởi công thức nội suy bậc nhất của nó trên đoạn này. Với i=0 ta có:

$$f(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)\ +R(x)$$

$$|R(x)|=\left|\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)(x-x_1)\ \right|\le\frac{M_2}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

với M2 = max | f’’(x)| ;   với mọi x∈[a,b]

Vậy sai số của tích phân trên đoạn Δx_0 là

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx-\frac{y_1+y_0}{2}h\right|\le\frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx=\frac{M_2h^3}{12}$$

trên n đoạn ta có sai số toàn phần:

$$R_1(n)\le n\frac{M_2\,h^3}{12}=\frac{M_2\,(b-a)\,h^2}{12} \qquad (3.12)$$

Ví dụ: Tính $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Ta lập bảng giá trị của hàm $y=e^{-x^2}$

i	x_i	x^2_i	y_i
0	0,0	0,00	1,0000
1	0,1	0,01	0,9900
2	0,2	0,04	0,9608
3	0,3	0,09	0,9139
4	0,4	0,16	0,8521
5	0,5	0,25	0,7788
6	0,6	0,36	0,6977
7	0,7	0,49	0,6126
8	0,8	0,64	0,5273
9	0,9	0,81	0,4449
10	1,0	1,00	0,3679

Với

$$y''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + \sum_{i=1}^{9} y_i = 7,4620$$

Vậy

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0,7462$$

| f''(x) | đạt max tại x=0 là $M_2 = 2$. Vậy

$$R_{10} \le \frac{2(0,1)^2}{12} < 0,002$$

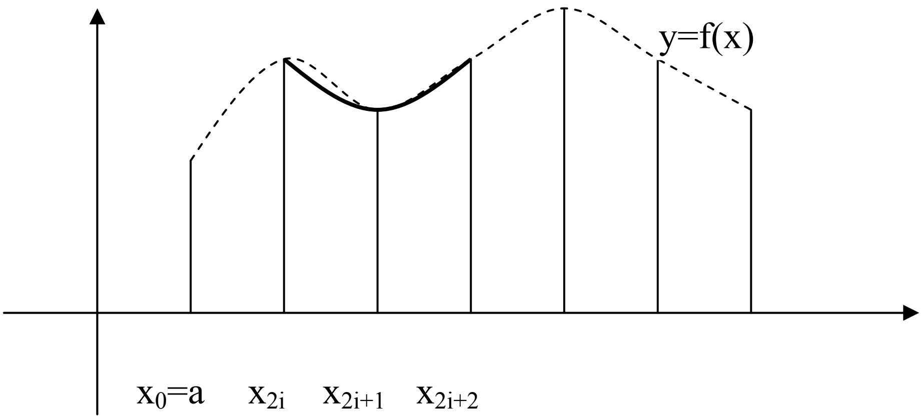
Nên sau khi làm tròn ta có:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0,746$$

2.2 Công thức Simson (Công thức parabol)

a) Xây dựng công thức.

Chia đoạn [a,b] thành 2n đoạn bằng nhau, khi đó h=(b-a)/2n; Trên mỗi đoạn [x2i, x2(i+1)] thay hàm f(x) bởi công thức nội suy bậc hai và diện tích hình thang cong giới hạn bởi ham f(x) bởi diện tích hình thang cong giới hạn bởi parabol nội suy.



Ta có:

$$f(x) \approx y_{2i} + t\,\Delta y_{2i} + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_{2i}$$

với $\qquad t = \dfrac{x - x_{2i}}{h}$

nên

$$\int_{x_{2i}}^{2i+2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}\right) \qquad (3.13)$$

Lấy tổng theo i=0,..,n-1 ta được:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + .\;\; . + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \qquad (3.14)$$

c) <u>Ước lượng sai số.</u>

Người ta đã chứng minh công thưc sước lượng sai số như sau:

$$R_2(2n) = \frac{(b-a)}{180} M_4\, h^4 \qquad (3.15)$$

trong đó

$M_4 = \max |f^{(4)}(x)|$ với $x \in [a,b]$

Ví dụ. tính $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ .. Chia đoạn [0,1] thành 10 phần bằng nhau. Khi đó ta có 2n=10. Các giá trị của hàm $y = e^{x^2}$ cho trong bảng sau:

i	x_i	x^2_i	$y = e^{x_i^2}$		
			i=0 và i=10	i lẻ	i chẵn
0	0,0	0,00	1,0000		
1	0,1	0,01		1,0101	
2	0,2	0,04			1,0408
3	0,3	0,09		1,0942	
4	0,4	0,16			1,1725
5	0,5	0,25		1,2840	
6	0,6	0,36			1,4333
7	0,7	0,49		1,6329	
8	0,8	0,64			1,8965
9	0,9	0,81		2,2479	
10	1,0	1,00	2,7189		

Đạo hàm 4 lần liên tiếp ta được:

$$y^{(4)} = 4(4x^4 + 12x^2 + 3)\,e^{x^2}$$

Hàm này đạt giá trị cực đại tại x=1 và M_2= 76.e

Vậy:

$$R_2 \le \frac{76e}{180}.0{,}1^4 \approx 0{,}000115 < 0{,}00012$$

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}\left(3{,}7188 + 4.7{,}2685 + 2.5{,}4441\right) = 1{,}46268 \approx 1{,}4627$$