Chương II

TÍNH GIÁ TRỊ VÀ XẤP XỈ HÀM SỐ

I TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ.

1.1 Thuật toán Horner (tính giá trị đa thức)

Cho đa thức $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + . . +a_{n-1}x + a_n$.

Để tính giá trị p(x) theo từng số hạng ta cần (2n-1) phép nhân và n phép cộng. Đa thức p(x) có thể viết dưới dạng:

$p(x) = (((a_0 x + a_1) x +a_2) x + a_3) x +\dots)x+a_n$

Từ đó dễ dàng thấy có thể tính p(x) theo từng bước như sau:

$y_0 =a_0$

$y_1 = y_0.x +a_1 = (a_0x+a_1)$

$y_2= y_1.x+a_2 = ((a_0x+a_1) x + a_2 = a_0x^2+a_1x + a_2$

$y_3= y_2.x+a_3 = [(a_0x+a_1) x + a_2] x + a_3 = a_0x^3+a_1x^2 + a_2 x+ a_3$

. . . .

$y_n = y_{n-1}.x+a_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + . . +a_{n-1}x + a_n$.

Thủ tục tính giá trị của đa thức tại x=c được viết như sau:

```
float Horner (float c, float a[])
  { // float a[n] là mảng các hệ số của đa thức với a[i] =ai
    float y = a[0]; int i;
    for ( i=1; i<= n ; i++)
          y:=y*c + a[i] ;
    return (y);
 }
```

Trong thuật toán trên mỗi bước lặp cần 1 phép nhân và một phép cộng, vậy tất cả cần n phép nhân và n phép cộng.

Ví dụ: Tính giá trị của $3x^2+ x + 1$ tại x=2 bằng cách thực hiện từng bước thuật toán trên.

Bước 0. y=3;

Bước 1: y= 3.2+1 =7

Bước 2: y=7.2 +1 =15.

1.2 Tính giá trị của hàm nhờ chuỗi lũy thừa.

Nếu hàm số y=f(x) dễ tính đạo hàm mọi cấp tại x_0 và f(x) có thể khai triển thành chuỗi Taylor:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

thì ta có thể tính gần đúng giá trị của hàm này khi x gần x_0 bởi đa thức:

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2.1)$$

Khi đó sai số được ước lượng bởi công thức sau:

$$|R_n(x)|=|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}||x-x_0|^{n+1}$$

Ví dụ: Tính sin 36^0, với n=1. c=π/6 ta có

$$\sin 36^0 = \sin(\pi/6+\pi/30)=\sin(\pi/6)+(\pi/30)\cos(\pi/6)+R_1$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{30}.\frac{\sqrt{3}}{2}+R_1$$

trong đó

$$R_1=|\frac{\sin c}{2}|\left(\frac{\pi}{30}\right)^2\le 10^{-2}$$

Chú ý: Trong Thư viện oán (math.h) của trình biên dịch TURBO C (hoặc một ngôn ngữ lập trình bậc cao nào khác) thường cung cấp cho chúng ta khá nhiều thủ tục tính giá trị tại một điểm của các hàm thường gặp. Trước khi tính toán chúng ta cần kiểm tra xem trong math.h đã có hàm mà ta cần tính chưa. Nếu chưa có mới đi tìm các phương pháp khác nhau để áp dụng.

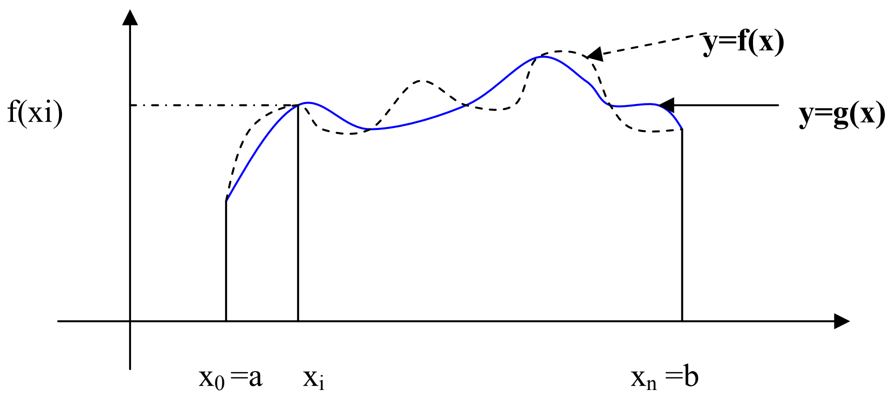
II XẤP XỈ HÀM BẰNG NỘI SUY

2.1 Bài toán nội suy.

Giả sử chúng ta có hàm số y=f(x), và biết giá trị của nó tại các điểm x_0 =a < x_1 <x_2 < .. <x_n=b; y_i = f(x_i) với ∀i=0,..,n. Hãy tìm biểu thức g(x) đủ đơn giản xác định trên [a,b] sao cho: y= f(x) ≅ g(x) và g(x_i) =y_i

Hàm f(x) thường là hàm thực nghiệm hoặc hàm khó tính giá trị nên chỉ xác định giá trị tại một số điểm nhất định. Các điểm x_i (i=0,..,n) gọi là các mốc nội suy.

Về mặt hình học bài toán nội suy được diễn đạt như sau: Tìm hàm g(x) có đồ thị đi qua các điểm $(x_i, f(x_i))$



Lược đồ giải bài toán nội suy.

Người ta cố gắng tìm hàm $G(c_0, .., c_n, x)$ khá đơn giản, thỏa mãn một số điều kiện nhất định và phụ thuộc n+1 tham số c_i . Các tham số c_i này sẽ được xác định nhờ hệ phương trình sau:

$$G(c_0,..,c_n,x_k) = y_k \text{ với } k=0,..,n \tag{2.2}$$

Thường người ta chọn hàm G có dạng:

$$G(c_0, c_1, .., c_n, x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{2.3}$$

Trong đó các hàm $\{\varphi_k(x)\}$ (k=0;n) là họ hàm độc lập tuyến tính cho trước và thỏa mãn điều kiện

$$|\ \varphi_k(x_i)\ | \neq 0 \tag{2.4}$$

Khi đó hệ (2.2) là luôn giải được và có duy nhất nghiệm đối với c_i.

Các hàm $\{\varphi_k(x)\}$ (k=0;n) được chọn theo kinh nghiệm hoặc bằng hàm x^k để dễ tính toán.

Với các c_i. (i=0;n) tìm được, hàm $g(x) = G(c_0, .., c_n, x)$ gọi là hàm nội suy và dùng làm công thức để tính giá trị của hàm f(x) với các x trong đoạn [a,b]. Mục tiếp theo chúng ta sẽ xét các phương pháp nội suy bằng đa thức.

2.2 Đa thức nội suy Lagrange

Lagrange đã xét trường hợp $\varphi_k(x) = x^k$, (k=0;n), khi đó hàm nội suy là đa thức bậc n. Còn định thức $|\ \varphi_k(x_i)\ |$ là định thức Vandermon nên khác không. Tuy vậy giải hệ (2.2) với n lớn vẫn rất khó khăn nên Lagrange đã xây dựng đa thức nội suy đơn giản sau.

2.2.1 Xây dựng đa thức nội suy.

Ký hiêu $L_n(x)$ là đa thức nội suy cần tìm. Lagrange chọn đa thức này dưới dạng:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_n^k(x) \quad (2.5)$$

trong đó $L_n^k(x)$ (k=0;n) là (n+1) đa thức bậc n có n nghiệm $x = x_i$ (với $i \neq k$) và $L_n^k(x_k) = 1$;

Dễ thấy:

$$L_n^k(x) = \frac{\prod_{i \neq k}(x - x_i)}{\prod_{i \neq k}(x_k - x_i)} \quad (2.6)$$

Khi đó $L_n(x)$ là đa thức nội suy cần tìm.

Ví dụ 1. Giả sử với hàm y=f(x) ta đo được tại x_0 và x_1 tương ứng là $y_0 = f(x_0)$ và $y_1 = f(x_1)$ thì:

$$L_1^0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1^1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

từ (2.5) ta được:

$$L_1(x) = \frac{y_0(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + \frac{y_1(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Đây chính là đường thẳng đi qua 2 điểm (x_0,y_0) và (x_1,y_1).

Ví dụ 2: Hàm y=f(x) đo được tại 4 điểm như sau.

x	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
y_i	-0,5	0	0,2	1

Khi đó ta có:

$$L_3^0(x) = \frac{(x - 0{,}1)(x - 0{,}3)(x - 0{,}5)}{(-0{,}1)(-0{,}3)(-0{,}5)} = -\frac{x^3 - 0{,}9x^2 + 0{,}23x - 0{,}015}{0{,}015}$$

$$L_3^2(x) = \frac{x(x-0,1)(x-0,5)}{0,3.0,2.(-0,2)} = -\frac{x^3 - 0,6x^2 + 0,05x}{0,012}$$

$$L_3^3(x) = \frac{x(x-0,1)(x-0,3)}{0,5.0,4.0,2} = \frac{x^3 - 0,4x^2 + 0,03x}{0,04}$$

Vì y_1=0 nên không cần tính $L_3^1(x)$.

Vậy

$$L_3(x) = y_0\, L_3^0(x) + y_2 L_3^2(x) + y_3 L_3^3(x) = \frac{125}{3}x^3 - 30\,x^2 + \frac{73}{12}x - 0,5$$

là đa thức nội suy cần tìm.

2.2.2 Sai số nội suy.

Với $x \in [a,b]$ ta ước lượng sai số $f(x) - L_n(x)$, trong đó x cho trước.

Đặt $\omega_n(t) = (t-x_0)(t-x_1)..(t-x_n)$

Rõ ràng nếu x không bằng mốc nội suy thì $\omega_n(x) \neq 0$, nên tìm được hằng số k để:

$$f(x) - L_n(x) = k\ \omega_n(x) \qquad (2.7)$$

Xét hàm số:

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - k.\omega_n(t) \qquad (2.8)$$

Hàm này có n+2 nghiệm phân biệt $t=x_i$ (i=0;n) và t=x; Bằng phương pháp quy nạp chúng ta có thể chứng minh được rằng tồn tại điểm $c \in [a,b]$ sao cho $F^{(n+1)}(c)=0$. Vì L_n là đa thức bậc n nên có thể tính đạo hàm cấp (n+1) biểu thức (2.8). Ta có:

F(n+1)(c) = f(n+1) (c) – 0 – k (n+1) =0

Vậy $k = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. Thay giá trị của k vào (2.7) ta được:

$$f(x) - L_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} \qquad (2.9)$$

Điểm c thay đổi khi x thay đổi. Nếu đạo hàm cấp (n+1) của f bị chặn: $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ với $\forall x \in [a,b]$ thì ta có ước lượng sai số nội suy là:

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|\omega_n(x)| \qquad (2.10)$$

2.3 Đa thức nội suy với mốc cách đều.

Ta xét trường hợp đặc biệt khi các mốc nội suy cách nhau một đoạn bằng nhau:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = (b-a)/n \text{ (với i=0; n-1)}$$

Dùng phép đổi biến $(x - x_0)/h = t$, các đa thức $L_n^k(x)$ sẽ là các đa thức theo t và chỉ phụ thuộc vào số mốc n và có nhiều cách biểu diễn đơn giản, dễ sử dụng hơn.

2.3.1 Công thức tổng quát.

Đặt $\quad x - x_0 = h.t \qquad (2.11)$

Ta có: $\quad x - x_k = (t-k)\,h;\ \forall k=1;n;\ \ x_j - x_k = (j-k)\,h \qquad (2.12)$

Thay vào (2.6) ta được:

$$L_n^k(x) = P_n^k(t) = \frac{\prod_{i\neq k}(x - x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)} = \frac{t(t-1)..(t-k+1)(t-k-1)..(t-n)}{(-1)^{n-k}\,k!(n-k)!}$$

hay

$$P_n^k(t) = (-1)^{n-k}\frac{C_n^k}{n!}t(t-1)..(t-k+1)(t-k-1)..(t-n)$$

không phụ thuộc vào mốc nội suy. Tùy theo từng trường hợp người ta có các công thức hàm nội suy thích ứng.

2.3.2 Sai phân hữu hạn

Trong trường hợp các mốc nội suy cách đều $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = const$ với $i=0, ..,n-1$. Các sai phân hữu hạn được định nghĩa như sau:

Sai phân cấp 1: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Sai phân cấp 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

. . . .

Sai phân cấp k: $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

Để tính sai phân hữu hạn bằng tay người ta thường dùng bảng như sau:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

Ví dụ với hàm y=e ^{x} ta có bảng sai phân với 4 mốc như sau:

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	3.60	36,598	1,877	0,095	0,007
x_1	3.65	38,475	1,972	0,102	
x_2	3,70	40,447	2,074		
x_3	3,75	42,521			

2.3.3 Công thức nội suy Newton.

Với các sai phân định nghĩa như trên ta có công thức nội suy Newton hay còn gọi là công thức Newton tiến.

Với phép biến đổi x-x_0 =ht như trên ta có:

$$L_n(x) = P_n(t) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Với biểu diễn sai số:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t-1)..(t-n)}{(n+1)!}$$

Với y= e^x trong ví dụ ở mục trước ta có hàm nội suy là:

$$g(x) \approx 36,598 + 1,877\,t + \frac{0,095}{2}t(t-1) + \frac{0,007}{6}t(t-1)(t-2)$$

trong đó x =3,60 + 0,05 t.

III XẤP XỈ BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Trên đây chúng ta đã xét bài toán xấp xỉ hàm với đòi hỏi hàm gần đúng phải có giá trị trùng với giá trị đã biết tại các mốc nội suy. Khi số mốc nội suy lớn thì số tham số cần tìm để xác định hàm g(x) càng nhiều. Nếu nội suy bằng đa thức thì bậc đa thức sẽ lớn khi có nhiều mốc nội suy, kết quả không ổn định. Để khắc phục nhược điểm trên người ta chấp nhận giá trị gần đúng ở các mốc đo được và chọn hàm dạng đơn giản có sai số bình phương nhỏ nhất. Đó chính là *phương pháp bình phương tối thiểu*.

3.1 Xấp xỉ thực nghiệm.

Bài toán: Giả sử có thể đo dược giá trị của hàm y=f(x) tại n điểm thuộc đoạn [a,b]:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n; \quad y_i = f(x_i)\ (i=1;n)$$

Với k≤ n-1 ta tìm được hàm

$$\varphi(x) = \Phi(c_1, .. c_k, x) \tag{2.13}$$

trong đó, Φ là hàm cho trước, c_j là các tham số cần tìm sao cho sai số trung bình bình phương

$$\sum = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i) - y_i)^2 \tag{2.14}$$

nhỏ nhất.

Khi đó ta nói hàm φ(x) là xấp xỉ tốt nhất của y(x) trong lớp các hàm có dạng (2.13) theo nghĩa bình phương tối thiểu.

Về mặt hình học, đồ thị hàm y=φ(x) không đòi hỏi đi qua các điểm $(x_i, f(x_i))$ như trong phép nội suy.

Bài toán tìm cực tiểu hàm (2.14) trong trường hợp tổng quát là rất khó.Trong trường hợp hàm $\Phi(c_1, .. c_k, x)$ có dạng:

$$\Phi(c_1,..,c_k,x) = \sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j(x) \tag{2.15}$$

trong đó $\varphi_k(x)$ là các hàm độc lập tuyến tính và có dạng đơn giản thì cực trị toàn cục của hàm Σ có thể xác định được nhờ giải hệ phương trình đại số tuyến tính của điều kiện các đạo hàm cấp 1 bằng không. Sau đây chúng ta xét trường hợp Φ có dạng đa thức.

3.1 Xấp xỉ bằng đa thức.

Với k≤ n-2 ta tìm xấp xỉ tốt nhất của y(x) dưới dạng đa thức bậc k:

$$P_k(x)=\sum_{j=0}^{k} a_j x^j$$

Khi đó sai số trung bình bình phương là:

$$\Sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, x_i^j - y_i\right)^2 \qquad (2.16)$$

Để tìm cực tiểu của (2.16) ta giải hệ phương trình đại số tuyến tính :

$$\frac{\partial}{\partial a_p}\Sigma = 0\ ;\ \ p = 0,..,k \qquad (2.17)$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j x_i^j\right) x_i^p = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^p\ ; \quad p = 0,..,k$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+p} = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^p\ ; \quad p = 0,..,k \qquad (2.18)$$

Hệ (2.18) có duy nhất nghiệm a0,..,ak cho ta xấp xí tốt nhất

$$P_k(x)=\sum_{j=0}^{k} a_j x^j$$

Để làm ví dụ ta xét xấp xỉ bậc nhất (k=1). Khi đó y(x) được xấp xỉ bằng:
P(x) = a.x +b và hệ (2.18) trở thành:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ a.\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,b = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (2.19)$$

Để giải ra a và b ta phải tính các hệ số với các giá trị x_i, y_i cho trước.
Ví dụ nếu ta có:

x_i = -1; 0; 1; 2; 4
y_i = 4; 1; 2; 0; -3

thì hệ (2.19) có dạng:

$$\begin{cases} 22\,a + 6\,b = -14 \\ 6\,a + 5\,b = 4 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm a = -42/37, b= 86/37 và xấp xỉ tốt nhất

$$P(x) = -\frac{42}{37}x + \frac{86}{37}$$

3.2 Xấp xỉ hàm khả tích.

3.2.1 Bài toán ước lượng tham số tổng quát.

Gọi $L^2(a,b)$ là tập các hàm bình phương khả tích trên đoạn [a,b] và y=f(x) ∈ $L^2(a,b)$. Ta muốn xấp xỉ y(x) bởi hàm φ(x) có dạng:

$$\varphi(x) = \Phi(c_1, .. c_k, x) \tag{2.20}$$

trong đó c_1, .. c_k là các hệ số được xác định sao cho sai số bình phương trung bình:

$$\Sigma = \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi(x) - f(x))^2\, dx \tag{2.21}$$

đạt cực tiểu. Khi đó ta nói hàm φ(x) là xấp xỉ tốt nhất của hàm f(x) trên đoạn [a,b] theo bình phương tối thiểu.

Để dễ tìm cực trị của hàm (2.21) thường người ta tìm φ(x) dưới dạng:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \varphi_i(x)$$

trong đó $\{\varphi_i(x)\}$ (i=1,..,k) độc lập tuyến tính trong $L^2(a,b)$ được chọn trước theo phương pháp chuyên gia. Lúc đó c_j được tìm bằng giải hệ phương trình tuyến tính.

$$\frac{\partial}{\partial c_j}\Sigma = 0\ ;\ j = 1,..,k$$

hay

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx \qquad \text{j=1,..,k} \tag{2.22}$$

Xấp xỉ bằng đa thức:

Nếu ta chọn $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ thì (2.22) có dạng:

$$\sum_{j=0}^{k}\left(\int_a^b x^{j+p}\, dx\right) a_j = \int_a^b f(x)\, x^p\, dx \qquad \text{(j=0,..,k)} \tag{2.23}$$

Ví dụ: Nếu y=sin x ; x $\in$(0,π/2); φ(x) = a.x +b và ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} \int_0^{\pi/2} x^2\,dx.a + \int_0^{\pi/2} xdx = \int_0^{\pi/2} \sin x.xdx \\ \int_0^{\pi/2} xdx \quad .a \quad + \int_0^{\pi/2} dx\,.b = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \frac{\pi^3}{24}a + \frac{\pi^2}{8}b = 1 \\ \frac{\pi^2}{8}a + \frac{\pi}{2}b = 1 \end{cases}$$

Giải ra ta được:

$$\varphi(x) = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\pi^3} 96x + 8\frac{\pi - 3}{\pi^2}$$