ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

=========================

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ

GIẢI TÍCH SỐ

TRẦN ĐÌNH QUỐC

BỘ MÔN TOÁN HỌC TÍNH TOÁN VÀ TOÁN ỨNG DỤNG

Email: *quoctd@vnu.edu.vn*

HÀ NỘI 12-2006

1. SAI SỐ

1.1. **Các kiến thức cơ bản.**

1.1. Sai số tuyệt đối và tương đối.

- Số x là *số gần đúng* của số x^* nếu x gần với x^* (hay x sai khác x^* không nhiều).
- Giả sử x^* là **lời giải đúng** của bài toán nào đó, còn x là **lời giải gần đúng** của bài toán này theo một phương pháp số (gần đúng) nào đó. Khi đó

$$\Delta x = |x - x^*|$$

gọi là sai số tuyệt đối của **lời giải gần đúng** x đối với **lời giải đúng** x^*. Do x^* không biết nên Δx không biết, nên ta thường ước lượng cận trên bé nhất có thể:

$$|x - x^*| \leq \Delta x \quad \text{hay} \quad x - \Delta x \leq x^* \leq x + \Delta x$$

- Sai số tương đối: Nếu $x \neq 0$ thì đại lượng

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

gọi là **sai số tương đối** của **lời giải gần đúng** x đối với **lời giải đúng** x^*

1.2. Phân loại sai số. Có các loại sai số sau:

- *Sai số giả thiết.* Do trong khi mô hình hoặc giải quyết các bài toán, người ta đưa thêm các giả thiết nhằm giảm độ phức tạp của mô hình.
- *Sai số phương pháp.* Do lựa chọn phương pháp sai, chưa phù hợp. Trong nhiều trường hợp có thể khắc phục được.
- *Sai số dữ liệu.* Do quá trình quan sát, đo đạc, tính toán mang đến các dữ liệu không chính xác. Có thể hạn chế hay khắc phục được.
- *Sai số tính toán.* Do quá trình tính toán với số gần đúng, hoặc làm tròn số.
- *Sai số ngẫu nhiên.* Do các yếu tố ngẫu nhiên ảnh hưởng, không thể loại bỏ, nhưng có thể quản lý được.

1.3. Sai số của các phép toán.

- Phép cộng/trừ: Nếu $x = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$ thì sai số tuyệt đối có quan hệ:

$$\Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

- Phép nhân/chia: Nếu $x = \dfrac{x_1 x_2 \cdots x_p}{x_{p+1} \cdots x_n}$ thì sai số tương đối có quan hệ:

$$\delta x \leq \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$$

- Phép luỹ thừa/căn thức: Nếu $y = x^\alpha$ thì sai số tương đối có quan hệ:

$$\delta y = |\alpha| \delta x$$

1.2. **Ví dụ minh họa.**

Ví dụ 1.1. Cho $x = 0.0001, y = 1.0001, z = 1000.0001$ là các lời giải gần đúng tương ứng với các lời giải đúng $x^* = 0.0002, y^* = 1.0099, z^* = 1000.0002$ của các bài toán $1, 2$ và 3 tương ứng đã cho. Khi đó sai số tuyệt đối tương ứng với ba bài toán này sẽ là:

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.0001, \quad \Delta y = |y - y^*| = 0.0001, \quad \Delta z = |z - z^*| = 0.0001.$$

Về mặt trực giác, mặc dù sai số tuyệt đối của ba bài toán là như nhau, nhưng ta có thể thấy bài toán 1 có lời giải không chính, bài toán 2 có độ chính xác chấp nhận được, còn bài toán 3 có độ chính xác cao.
Sai số tương đối của ba bài toán này sẽ là

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = 0.5, \quad \delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = 0.9999 \times 10^{-4}, \quad \delta z = \frac{\Delta z}{|z|} = 0.9999 \times 10^{-7}.$$

Ví dụ 1.2. Cho $x = 2.3456 \pm 0.0001, y = 1.2421 \pm 0.0002$. Tính sai số của $x + 2y, xy, x^6$.
Ta có

- Sai số của $z := x + 2y$: $\Delta z \leq \Delta x + 2\Delta y = 0.0001 + 2 \times 0.0002 = 0.0005$.
- Sai số của $z := xy$ hoặc $z := x/y$ là $\delta z \leq \delta x + \delta y = \frac{0.0001}{2.3456} + \frac{0.0002}{1.2421} = 2.0365 \times 10^{-4}$
- Sai số của $z = x^6$ là $\delta z = |6|\,\delta x = 6\frac{0.0001}{2.3456} = 0.2558 \times 10^{-4}$

1.3. **Bài tập thực hành.**
Bài 1. Cho $a = 4.024 \pm 0.112, b = 2.142 \pm 0.082, c = 8.213 \pm 0.201$. Tính sai số tuyệt đối (tương đối của):

(1) $a, b, c, a + b, c - b, a + b - c$.
(2) $ab, \frac{bc}{a}$.
(3) $a^2, \sqrt[4]{b}$.

Bài 2. Giả sử x, y là dữ liệu đầu vào của một bài toán nào đó. Còn z là dữ liệu đầu ra của bài toán này, sao cho $z = f(x, y)$. Hãy tính sai số mắc phải của đầu ra z theo sai số dữ liệu đầu vào x, y biết

(1) $x = 2.0001 \pm 0.0001, y = 20.0000 \pm 0.0003$ và $f(x, y) = 4x^4 + 2x^2y^2 + xy + 3y^4$.
(2) $x = 1000.0000 \pm 0.0002, y = 2000.0000 \pm 0.0004$ và $f(x, y) = x^5 + y^5 - 4x^2y + xy^2 - 2x^4y$.

Bài 3. Hãy nghiên cứu ảnh hưởng của sai số đến nghiệm của phương trình bậc hai $P_2(x) := ax^2 + bx + c = 0$. Biết rằng phương trình này có nghiệm và sai số của các hệ số a, b, c lần lượt là $a^* \pm \Delta a,\ b^* \pm \Delta b,\ c^* \pm \Delta c$.

2. NỘI SUY

2.1. **Các kiến thức cơ bản cần nhớ.** Trong chương này, trình bày phương pháp xây dựng đa thức nội suy của một hàm cho dưới dạng bảng.
Khi nào cần xây dựng đa thức nội suy? Có hai nhu cầu thực tế thường dẫn đến bài toán nội suy là:

- *Các hàm cho dưới dạng phức tạp, khó tính toán, công thức cồng kềnh.*
- *Hàm không cho dưới dạng biểu thức mà cho dưới dạng bảng (tức là chỉ biết một số giá trị của hàm tại các điểm cụ thể).*

Có thể xây dựng đa thức nội suy dạng Lagrange hoặc đa thức nội suy Newton (tiến, lùi, trung tâm...).

Bài toán nội suy: Giả sử hàm $f : [a, b] \to R$ cho dưới dạng bảng nội suy: $\{(x_i, y_i) \mid y_i := f(x_i), 0 \leq i \leq N\}$ trong đó:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

Hãy tìm một đa thức bậc N có dạng $P_N(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ sao cho:

$$P_N(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad \forall i = \overline{0, N} \quad \textit{(điều kiện nội suy)}$$

a) Đa thức nội suy Lagrange.

Đa thức nội suy Lagrange cho dưới dạng:

$$P_N(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_N L_N(x)$$

trong đó

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1} \cdots (x - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1} \cdots (x_k - x_N)}$$

với mọi $k = \overline{0, N}$.

Hoặc có thể viết dưới dạng

$$P_N(x) := \sum_{k=0}^{N} y_k \prod_{j=0, j \neq k}^{N} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Đa thức nội suy Lagrange có **ưu điểm** là đơn giản, dễ tính toán, dễ lập trình cho máy tính. Tuy nhiên, **nhược điểm** là khi thêm hoặc bớt một mốc nội suy thì cần phải tính lại toàn bộ công thức.

b) Đa thức nội suy Newton trên lưới đều.

Đa thức nội suy New tơn có nhiều dạng khác nhau. Tuy nhiên có hai công thức thông dụng là: *công thức Newton tiến* và *công thức Newton lùi*. Các công thức này sử dụng trong trường hợp nội suy với lưới đều (tức là mốc nội suy cách đều): $x_i = x_0 + ih$ trong đó $h = \dfrac{(b - a)}{N}$ và $i = \overline{0, N}$.

- *Công thức Newton tiến*. Thường được sử dụng để nội suy các giá trị **đầu bảng**. Dạng công thức này như sau:

$$\begin{aligned} P_N(x) = y_0 &+ \frac{\Delta y_0}{1! h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ \frac{\Delta^N y_0}{N! h^N}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{N-1}) \end{aligned}$$

  Hay ở dạng rút gọn:

$$\begin{aligned} P_N(x) = P(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t - 1) + \cdots \\ + \frac{\Delta^N y_0}{N!} t(t - 1)(t - 2) \cdots (t - N + 1) \end{aligned}$$

  Trong đó $\Delta^k y_0$ là sai phân tiến cấp k của f tại x_0, được tính theo công thức đệ quy sau:

$$\begin{cases} \Delta^1 y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) \\ \Delta^{k+1} y_0 = \Delta(\Delta^k y_0), \quad (\forall k \geq 1) \end{cases}$$

Hay dưới dạng bảng:

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\cdots$	$\Delta^N y$
x_0	y_0						
		Δy_0					
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$				
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$			
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$		
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Công thức nội suy Newton tiến thường dùng để nội suy các giá trị đầu bảng, tức là nội suy tại các điểm $x \approx x_0$. Có ưu điểm là đơn giản, dễ tính toán, không cần phải tính lại đa thức nội suy nếu thêm hoặc bớt mốc nội suy.

- *Công thức Newton lùi*. Thường được sử dụng để nội suy **cuối bảng.** Dạng công thức này như sau:

$$P_N(x) = y_N + \frac{\nabla y_N}{1!h^1}(x - x_N) + \frac{\nabla^2 y_N}{2!h^2}(x - x_N)(x - x_{N-1}) + \cdots + \frac{\nabla^N y_N}{N!h^N}(x - x_N)(x - x_{N-1}) \cdots (x - x_1)$$

Hay ở dạng rút gọn:

$$P_N(x) = P(x_N + th) = y_N + \frac{\nabla y_N}{1!}t + \frac{\nabla^2 y_N}{2!}t(t+1) + \cdots + \frac{\nabla^N y_N}{N!}t(t+1)(t+2)\cdots(t+N-1)$$

Trong đó $\nabla^k y_N$ là sai phân lùi cấp k của f tại x_N, được tính theo công thức đệ quy sau:

$$\begin{cases} \nabla^1 y_N = y_{N-1} - y_N = f(x_{N-1}) - f(x_N) \\ \nabla^{k+1} y_N = \nabla(\nabla^k y_N), \quad (\forall k \geq 1) \end{cases}$$

Tương tự như trường hợp (1), ta cũng có thể dùng bảng sai phân để tính các sai phân lùi cấp cao. Công thức nội suy Newton tiến thường dùng để nội suy các giá trị cuối bảng, tức là nội suy tại các điểm $x \approx x_N$.

- Ngoài các công thức nội suy thường gặp trên, ta còn có các công thức nội suy Newton giữa bảng (công thức Gauss I, Gauss II), công thức Stirling, công thức Bessel, và công thức Newton cho trường hợp mốc nội suy không cách đều...

c) Đánh giá sai số cho đa thức nội suy.

Công thức sai số của đa thức nội suy $P_N(x)$ của hàm $f(x)$ là:

$$R_N(x) = f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}w_N(x)$$

trong đó: $w_N(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_N)$ và $\xi \in (a, b)$ là điểm trung gian.
Như vậy nếu gọi:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(N+1)}(x)|$$

thì ta có:

$$|R_N(x)| \leq \frac{M}{(N+1)!}|w(x)|$$

Nếu mốc nội suy cách đều, ta có:

$$|R_N(x)| \leq \frac{M}{(N+1)!}|t(t-1)(t-2)\cdots(t-N)|h^{N+1}.$$

2.2. **Các ví dụ.** Dưới đây là một số ví dụ mẫu cơ bản để tham khảo:

Ví dụ 2.1. Xây dựng đa thức nội suy cấp 2 của hàm f trên đoạn $[-1, 1]$ cho bởi bảng nội suy sau:

x_i	-1	0	1
y_i	1/3	1	3

Sau đó tính gần đúng giá trị của f tại $x_1 = -0.5$ và $x_2 = 0.5$. So sánh với giá trị đúng $f(-0.5) = 0.577350$ và $f(0.5) = 1.732051$.
Biết $f(x) = 3^x$, hãy dùng công thức đánh giá sai số ước lượng các sai số tại $x_1 = -0.5$ và $x_2 = 0.5$.
Bài giải:
Do bảng có 3 mốc nội suy: $N = 3$ nên đa thức nội suy nhận được có cấp 2: $P_2(x)$. Ta sử dụng công thức nội suy Lagrange cho bảng nội suy này ta có:

$$P_2(x) = \frac{1}{3}\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 1.\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 3\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}$$

Rút gọn ta có:

$$P_2(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Do vậy, tại $x_0 = -0.5$, ta có:

$$f(-0.5) \approx P_2(-0.5) = 1 + \frac{4}{3}(-0.5) + \frac{2}{3}(-0.5)^2 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 0.500000$$

Do đó: $|f(-0.5) - P_2(-0.5)| = |0.577350 - 0.500000| = 0.077350$
Tại $x_1 = 0.5$, ta có:

$$f(0.5) \approx P_2(0.5) = 1 + \frac{4}{3}(0.5) + \frac{2}{3}(0.5)^2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1.833333$$

Do đó: $|f(0.5) - P_2(0.5)| = |1.732051 - 1.833333| = 0.101282$
Dùng công thức đánh giá sai số cho đa thức nội suy, dễ thấy: $f^3(x) = 3^x(\ln 3)^3$, do đó:

$$M = \sup_{x\in[-1,1]} |3^3(ln3)^3| = 3(\ln 3)^3 = 3.977907$$

Do đó ta có đánh giá sai số:

$$|R_2(-0.5)| \leq \frac{3.977907}{3!}|(-0.5+1)(-0.5-0)(-0.5-1)| = \frac{3.977907}{6}(0.375) = 0.248619$$

và

$$|R_2(0.5)| \leq \frac{3.977907}{3!}|(0.5+1)(0.5-0)(0.5-1)| = \frac{3.977907}{6}(0.375) = 0.248619$$

Ví dụ 2.2. Xây dựng đa thức nội suy của hàm f trên đoạn $[-2, 2]$ cho bởi bảng nội suy sau:

x_i	-2	-4/3	0	4/3	2
y_i	0	1	2	1	0

Sau đó tính gần đúng giá trị $f(1)$ theo đa thức nội suy này và so sánh với giá trị chính xác $f(1) = 1.414214$.

Bài giải:

Ta có số mốc nội suy $N = 5$, do vậy đa thức nội suy sẽ là cấp 4. Ta xây dựng đa thức nội suy dạng Lagrange $P_4(x)$ như sau:

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = 0.&\frac{(x+\frac{4}{3})x(x-\frac{4}{3})(x-2)}{(-2+\frac{4}{3})(-2-0)(-2-\frac{4}{3})(-2-2)}\\
+1.&\frac{(x+2)x(x-\frac{4}{3})(x-2)}{(-\frac{4}{3}+2)(-\frac{4}{3}-0)(-\frac{4}{3}-\frac{4}{3})(-\frac{4}{3}-2)}\\
+2.&\frac{(x+2)(x+\frac{4}{3})(x-\frac{4}{3})(x-2)}{(2)(\frac{4}{3})(-\frac{4}{3})(-2)}\\
+1.&\frac{(x+2)(x+\frac{4}{3})x(x-2)}{(\frac{4}{3}+2)(\frac{4}{3}+\frac{4}{3})(\frac{4}{3})(\frac{4}{3}-2)}\\
+0.&\frac{(x+2)(x+\frac{4}{3})x(x-\frac{4}{3})}{(2+2)(2+\frac{4}{3})(2)(2-\frac{4}{3})}
\end{aligned}
$$

Rút gọn ta có:

$$P_4(x) = \frac{9x^4 - 196x^2 + 640}{320}$$

Khi đó $f(1) \approx P_4(1) = \dfrac{9 - 196 + 640}{320} = 1.415625$. Do vậy $|f(1) - P_4(1)| = 0.001411$

Ví dụ 2.3. Xây dựng đa thức nội suy cho hàm $f(x) = x^2 + x + 1$ cho dưới dạng bảng sau:

x_i	1	2	3	4
y_i	3	7	13	21

Do mốc nội suy cách đều, do vậy ta sẽ dùng công thức nội suy Newton tiến.

Trước hết ta xây dựng bảng sai phân tiến:

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3			
		4		
2	7		2	
		6		0
3	13		2	
		8		
4	21			

Như vậy ta có đa thức nội suy Newton tiến của $f(x)$ là:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}(x-1) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(x-1)(x-2) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= 3 + 4(x-1) + (x-1)(x-2) \\
&= x^2 + x + 1
\end{aligned}$$

Như vậy đa thức nội suy dạng Newton của đa thức là đa thức và trùng với chính nó.

Ví dụ 2.4. Xây dựng đa thức nội suy cho hàm $f(x)$ cho dưới dạng bảng sau:

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/4	1	4	16

Tính giá trị gần đúng của hàm f tại $x = -0.5$ và so sánh với giá trị đúng $f(-0.5) = 0.5$.
Biết $f(x) = 4^x$ hãy đưa ra công thức đánh giá sai số.
Bài giải:
Do mốc nội suy cách đều, do vậy ta sẽ dùng công thức nội suy Newton tiến.
Trước hết ta xây dựng bảng sai phân tiến:

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	$\frac{1}{4}$			
		$\frac{3}{4}$		
0	1		$\frac{9}{4}$	
		3		$\frac{27}{4}$
1	4		9	
		12		
2	16			

Như vậy ta có đa thức nội suy Newton tiến của $f(x)$ là:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}(x+1) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(x+1)x + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}(x+1)x(x-1) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x+1) + \frac{9}{8}(x+1)x + \frac{27}{24}(x+1)x(x-1) \\
&= \frac{27x^3 + 27x^2 + 18x + 24}{24}
\end{aligned}$$

Khi đó, với $x = -0.5$ ta có

$$f(-0.5) \approx P_3(-0.5) = \frac{27(-0.5)^3 + 27(-0.5)^2 + 18(-0.5) + 24}{24} = 0.765625$$

Khi đó $|f(-0.5) - P_3(-0.5)| = |0.500000 - 0.765625| = 0.265625$
Để đánh giá sai số, ta có: $f^{(4)}(x) = 4^x(ln4)^4$. Do đó

$$M = \sup_{x \in [-1,2]} |f^{(4)}(x)| = 16(ln4)^4 = 59.093785$$

Vậy ta có:

$$E_3(-0.5) \leq \frac{M}{4!}(0.5)(0.5)(1.5)(2.5)(3.5) = 2.308351$$

Ví dụ 2.5. Một tích phân phụ thuộc tham số có dạng

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\sin\alpha)^2 \sin^2 x}}$$

Biết rằng $K(1) = 1.5709$, $K(4) = 1.5727$ và $K(6) = 1.5751$. Hãy sử dụng phương pháp nội suy để tìm $K(3.5)$

Bài giải. Ta có

$$L_0(3.5) = \frac{(3.5-4.0)(3.5-6.0)}{(1.0-4.0)(1.0-6.0)} = 0.08333$$
$$L_1(3.5) = \frac{(3.5-1.0)(3.5-6.0)}{(4.0-1.0)(4.0-6.0)} = 1.04167$$
$$L_2(3.5) = \frac{(3.5-1.0)(3.5-4.0)}{(6.0-1.0)(6.0-4.0)} = -0.12500$$

Do vậy

$$K(3.5) \approx 1.5709 \times 0.08333 + 1.5727 \times 1.04167 + 1.5751 \times (-0.12500) = 1.57225$$

2.3. **Bài tập thực hành.**

(1) Cho bảng nội suy của một hàm $f(x)$ như sau. Hãy xây dựng đa thức nội suy Lagrange hoặc Newton.

a.

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

b.

x_i	1	2	4	8
y_i	0	1	2	3

c.

x_i	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
y_i	-1	0	1

(2) Cho biết hàm $f(x) = \ln x$ tại các điểm $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ lần lượt là $y_1 = 0.000000$; $y_2 = 0.693147$; $y_3 = 1.098612$; $y_4 = 1.386294$.

a. Hãy xây dựng đa thức nội suy cho hàm $f(x)$.

b. Biết $f(1.5) = 0.405465$, hãy tính giá trị gần đúng của $f(1.5)$ qua đa thức nội suy và so sánh với giá trị đúng.

c. Đưa ra công thức đánh giá sai số.

(3) Cho biết hàm $f(x) = 2\cos\frac{\pi}{2}x$ tại $x = -1; 0; 1; 2$ lần lượt là $y = 0; 1; 0; -1$.

a. Hãy xây dựng đa thức nội suy cho hàm $f(x)$.

b. Biết $f(-0.5) = -0.707107$, hãy tính giá trị gần đúng của $f(-0.5)$ qua đa thức nội suy và so sánh với giá trị đúng.

c. Đưa ra công thức đánh giá sai số.

3. Giải gần đúng phương trình phi tuyến một ẩn số

3.1. **Các kiến thức cơ bản cần nhớ.** Trong chương này cần lưu ý đến ba phương pháp chính là: *phương pháp lặp đơn, phương pháp dây cung và phương pháp Newton*.

Lược đồ chung cho bài toán giải một phương trình phi tuyến bao gồm các bước như sau:

- **Bước 1:** *Tìm khoảng $[a, b]$ chứa nghiệm, từ điều kiện $f(a)f(b) \le 0$.*
- **Bước 2:** *Tìm điểm xuất phát $x_0 \in [a, b]$ (chẳng hạn như điểm Fourier), tìm điều kiện để hội tụ.*
- **Bước 3:** *Xây dựng lược đồ lặp.*
- **Bước 4:** *Tính thử với một số bước lặp.*
- **Bước 5:** *Xây dựng thuật toán dưới dạng sơ đồ khối hoặc mã giả (nếu có).*
- **Bước 6:** *Tìm điều kiện dừng, đưa ra công thức đánh giá sai số.*

Dưới đây là một số phương pháp cơ bản

(1) **Phương pháp chia đôi.** Xét phương trình

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{1}$$

Giả thiết: *Phương trình* (1) *có duy nhất nghiệm x^* trong (a, b) và $f(a)f(b) < 0$, đồng thời f liên lục trên $[a, b]$.*

Phương pháp: Ta xây dựng một thuật toán bao gồm các bước sau:

- **Bước 0:** *Đặt $a_0 = a, b_0 = b, r_0 = (a_0 + b_0)/2$, tính $d_0 = f(r_0)f(a_0)$.*
  - Nếu $d_0 < 0$, đặt $a_1 = a_0, b_1 = r_0, r_1 = (a_1 + b_1)/2$
  - Nếu $d_0 > 0$, đặt $a_1 = r_0, b_1 = b_0, r_1 = (a_1 + b_1)/2$
  - Nếu $d_0 = 0$, thì nghiệm là $x^* = r_0$, dừng lặp thuật toán.
- **Bước 1:** *Tính $d_1 = f(r_1)f(a_1)$.*
  - Nếu $d_1 < 0$, đặt $a_2 = a_1, b_2 = r_1, r_2 = (a_2 + b_2)/2$.
  - Nếu $d_1 > 0$, đặt $a_2 = r_1, b_2 = b_1, r_2 = (a_2 + b_2)/2$.
  - Nếu $d_1 = 0$, thì nghiệm là $x^* = r_1$, dừng lặp thuật toán.
- ....
- **Bước k:** *Tính $d_k = f(r_k)f(a_k)$.*
  - Nếu $d_k < 0$, đặt $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = r_k, r_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$.
  - Nếu $d_k > 0$, đặt $a_{k+1} = r_k, b_{k+1} = b_k, r_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$.
  - Nếu $d_k = 0$, thì nghiệm là $x^* = r_k$, dừng lặp thuật toán.
- ....

Do $|x^k - x^*| \le \dfrac{b-a}{2^n}$ nên để dừng thuật toán ta dùng tiêu chuẩn:

$$n \ge log_2 \frac{(b-a)}{\epsilon}$$

trong đó $\epsilon > 0$ là sai số cho trước, n là số bước lặp cần thiết để đạt đến sai số ϵ.

(2) **Phương pháp lặp đơn.** Xét phương trình

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in D \subset R$$

trong đó giả thiết: $f \in C^1_{[a,b]}$.

Sơ đồ giải bao gồm các bước:

- Tìm $a, b \in D$ sao cho: $f(a)f(b) < 0$, nghĩa là phương trình có nghiệm $x^* \in [a, b]$.
- Đưa phương trình về dạng: $x = g(x)$ trong đó hàm $g : [a, b] \to [a, b]$.

- Tìm điều kiện để
$$\max_{x\in[a,b]} |g^{'}(x)| = q < 1$$
- Xây dựng dãy lặp:
$$\begin{cases} x^0 \in [a,b] \\ x^{k+1} = g(x^k), \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$
- Điều kiện dừng: Dùng một trong hai điều kiện $|x^{k+1} - x^k| < \dfrac{(1-q)\epsilon}{q}$ hoặc $n \geq \big[\log_q(\dfrac{(1-q)\epsilon}{|x^1 - x^0|})\big] + 1$.

(3) **Phương pháp dây cung.** Xét phương trình
$$f(x) = 0, \quad \forall x \in D \subset R$$
trong đó giả thiết: $f \in C^2_{[a,b]}$.
Sơ đồ giải bao gồm các bước:

- *Tìm $a, b \in D$ sao cho: $f(a)f(b) < 0$, nghĩa là phương trình có nghiệm $x^* \in [a,b]$.*
- *Tính $f^{'}(x), f^{''}(x)$ và tìm điểm Fourier (tức là điểm $x_1 \in [a,b]$ sao cho $f(x_1)f^{''}(x_1) > 0$).*
- *Tính $m = \inf_{x\in[a,b]} |f^{'}(x)|$ và $M = \sup_{x\in[a,b]} |f^{'}(x)|$.*
- *Xây dựng sơ đồ lặp:*
  (i) Nếu $x_1 = a$ là điểm Fourier (tức là $f^{'}(x) < 0, f^{''}(x) > 0$), ta có sơ đồ lặp:
$$\begin{cases} x^0 = b \\ x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{f(x^k) - f(a)}(x^k - a), \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$
  (ii) Nếu $x_1 = b$ là điểm Fourier (tức là $f^{'}(x) > 0, f^{''}(x) > 0$), ta có sơ đồ lặp:
$$\begin{cases} x^0 = a \\ x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{f(x^k) - f(b)}(x^k - b), \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$
- *Điều kiện dừng:* Dùng một trong hai điều kiện $|f(x^k)| < m\epsilon$ hoặc $|x^{k+1} - x^k| < \dfrac{m\epsilon}{M - m}$

(4) **Phương pháp Newton.** Xét phương trình
$$f(x) = 0, \quad \forall x \in D \subset R$$
trong đó giả thiết: $f \in C^2_{[a,b]}$.
Sơ đồ giải bao gồm các bước:

- Tìm $a, b \in D$ sao cho phương trình có nghiệm $x^* \in [a,b]$.
- Tính $f^{'}(x), f^{''}(x)$ và tìm điểm Fourier (tức là điểm $x_1 \in [a,b]$ sao cho $f(x_1)f^{''}(x_1) > 0$).
- Tính $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} |f^{'}(x)|$ và $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f^{''}(x)|$.
- Xây dựng sơ đồ lặp: Giả sử $x = a$ là điểm Fourier, ta có sơ đồ lặp:
$$\begin{cases} x^0 = a \\ x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{f^{'}(x^k)}, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$
- Điều kiện dừng: $(x^{k+1} - x^k)^2 < \dfrac{2m_1\epsilon}{M_2}$

Đánh giá và so sánh giữa các phương pháp

- Phương pháp chia đôi là phương pháp cổ điển nhất, đơn giản, không sử dụng thông tin của hàm f, tốc độ hội tụ chậm, do vậy ít được sử dụng.
- Phương pháp lặp đơn là phương pháp đơn giản, tuy nhiên điều kiện cần thỏa mãn rất chặt, tốc độ hội tụ tuyến tính.
- Phương pháp dây cung tính toán đắt hơn, ít được sử dụng.
- Phương pháp Newton là phương pháp rất tốt, hội tụ bậc hai, tính toán khá đắt, thường được sử dụng để giải "tinh" bài toán. Hiện nay, phương pháp Newton được cải tiến, sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực.

3.2. **Các bài tập mẫu.** Dưới đây sẽ xét các ví dụ cơ bản.

Ví dụ 3.1. Giải phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn:

$$x^3 + x - 1000 = 0$$

Bài giải. Ta có: $f(9)f(10) < 0$, do vậy phương trình có ít nhất một nghiệm $x^* \in [9;10]$.
Có nhiều cách để đưa phương trình trên về dạng $x = g(x)$, chẳng hạn như:

1) $x = g_1(x) := 1000 - x^3$
2) $x = g_2(x) := \dfrac{1000}{x^2} - \dfrac{1}{x}$
3) $x = g_3(x) := \sqrt[3]{1000 - x}$

Xét lần lượt từng trường hợp, ta có:

$$\max_{x\in[9;10]} |g_1^{'}(x)| = 300 >> 1$$

$$\max_{x\in[9;10]} |g_2^{'}(x)| = 2 > 1$$

$$\max_{x\in[9;10]} |g_3^{'}(x)| = \frac{1}{300} < 1$$

Như vậy để phép lặp hội tụ, ta chọn phép biến đổi dạng 3), và lấy $x^0 = 10$ ta có sơ đồ lặp:

$$\begin{cases} x^0 = 10 \\ x^{k+1} = \sqrt[3]{100 - x^k}, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó tiêu chuẩn dừng máy là:

$$|x^{k+1} - x^k| < 299\epsilon$$

Hãy dùng máy tính tính các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và đánh giá sai số.

Ví dụ 3.2. Giải phương trình sau bằng phương pháp dây cung:

$$x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$$

Bài giải. Đặt $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$, thì $f(1) = -0.6; f(1.5) = 1.425$, do vậy $f(1)f(1.5) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm $x^* \in [1;1.5]$.
Dễ thấy $f^{'}(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2 > 0; f^{''}(x) = 6x - 0.4 > 0, \forall x \in [1;1.5]$. Vậy điểm Fourier

$x_1 = 1.5$.

Xây dựng sơ đồ lặp:

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ f^k = (x^k)^3 - 0.2(x^k)^2 - 0.2x^k - 1.2 \\ x^{k+1} = x^k - \dfrac{f^k}{1.425 - f^k}(1.5 - x^k), \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Ta có

$$m = \inf_{x \in [1;1.5]} |f^{'}(x)| = |3 - 0.4 - 0.2| = 2.4$$

$$M = \sup_{x \in [1;1.5]} |f^{'}(x)| = |3 \times (1.5)^2 - 0.4 \times 1.5 - 0.2| = 5.95$$

Khi đó tiêu chuẩn dừng máy là:

$$|x^{k+1} - x^k| < \frac{2.4}{5.95 - 2.4}\epsilon = 0.676056\epsilon$$

Hãy dùng máy tính tính các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và đánh giá sai số.

Ví dụ 3.3. Giải phương trình sau bằng phương pháp Newton:

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

Bài giải. Đặt $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000$, thì $f(-10) = -1050; f(-11) = 3453$, do vậy $f(-10)f(-11) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm $x^* \in [-11; -10]$.

Dễ thấy $f^{'}(x) = 4x^3 - 6x + 75 < 0; f^{''}(x) = 12x^2 - 6 > 0, \forall x \in [-11; -10]$. Vậy điểm Fourier $x_1 = -11$.

Xây dựng sơ đồ lặp:

$$\begin{cases} x^0 = -11 \\ f^k = (x^k)^4 - 3(x^k)^2 + 75x^k - 10000 \\ df^k = 4(x^k)^3 - 6x^k + 75 \\ x^{k+1} = x^k - \dfrac{f^k}{df^k}, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Ta có $f^{(3)}(x) = 24x < 0, \forall x \in [-11; -10]$, do vậy hàm $f^{''}(x)$ nghịch biến, $f^{'}(x)$ nghịch biến. Do đó

$$m_1 = \inf_{x \in [-11;-10]} |f^{'}(x)| = \inf_{x \in [-11;-10]} |4x^3 - 6x + 75| = |4(-10)^3 - 6(-10) + 75| = 3865$$

$$M_2 = \sup_{x \in [-11;-10]} |f^{''}(x)| = \sup_{x \in [-11;-10]} |12x^2 - 6| = |12(-11)^2 - 6| = 1446$$

Khi đó tiêu chuẩn dừng máy là:

$$(x^{k+1} - x^k)^2 < \frac{7730}{1446}\epsilon = 5.345781\epsilon$$

Hãy dùng máy tính tính các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và đánh giá sai số.

Ví dụ 3.4. Giải phương trình sau bằng phương pháp Newton:

$$\cos x - x = 0$$

Bài giải. Đặt $f(x) = \cos x - x$, thì $f(\pi/2) = -\pi/2; f(0) = 1$, do vậy $f(\pi/2)f(0) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm $x^* \in [0; \pi/2]$.

Dễ thấy $f^{'}(x) = -\sin x - 1 < 0; f^{''}(x) = -\cos x < 0, \forall x \in [0; \pi/2]$. Vậy điểm Fourier $x_1 = \pi/2 \approx$

1.570796.

Xây dựng sơ đồ lặp:

$$\begin{cases} x^0 = 1.570796 \\ x^{k+1} = x^k + \dfrac{\cos x^k - x^k}{\sin x^k + 1}, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$m_1 = \inf_{x \in [0;\pi/2]} |f^{'}(x)| = \inf_{x \in [0;\pi/2]} |\sin x + 1| = 1$$

$$M_2 = \sup_{x \in [0;\pi/2]} |f^{''}(x)| = \sup_{x \in [0;\pi/2]} |\cos x| = 1$$

Khi đó tiêu chuẩn dừng máy là:

$$(x^{k+1} - x^k)^2 < 2\epsilon$$

Nếu chọn $x^0 = \pi/4 \approx 0.785398$ thì ta tính được: $x_1 \approx 0.739536; x_2 \approx 0.739085; x_3 \approx 0.739085; x_4 \approx$ 0.739085

3.3. **Các bài tập thực hành.** Hãy làm các bài tập sau:

(1) Giải các phương trình sau bằng lược đồ lặp đơn. Hãy dùng máy tính tính các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và đánh giá sai số.
 a) $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$
 b) $2\sin \pi x + x = 0$ trên đoạn $[1;2]$
 c) $3x^2 - e^x = 0$

(2) Giải các phương trình sau bằng các lược đồ dây cung. Hãy dùng máy tính tính các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và đánh giá sai số.
 a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ trên đoạn $[1;4]$
 b) $x - 0.8 - 0.2\sin x = 0$ trên đoạn $[0;\pi/2]$
 c) $2^x - x^2 = 0$

(3) Giải các phương trình sau bằng các lược đồ Newton. Hãy dùng máy tính tính các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và đánh giá sai số.
 a) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ trên đoạn $[-3;-2]$
 b) $x - \cos x = 0$ trên đoạn $[0;\pi/2]$
 c) $e^x + \dfrac{1}{2^x} + 2\cos x - 6 = 0$ trên đoạn $[1;2]$

(4) Sử dụng phương pháp Newton, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:
 a) $\dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - x = 0$ trên đoạn $[-3;-2]$
 b) $e^x - x^3 = 0$ trên đoạn $[3;5]$

Hướng dẫn. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đạt được tại điểm mút $x = a$ hoặc $x = b$ hoặc tại điểm x_0 sao cho $f^{'}(x_0) = 0$ (điểm dừng). Do đó đưa về giải phương trình $f^{'}(x) = 0$.

4. Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

4.1. **Kiến thức cần nắm vững.** Trong phần này cần nắm vững các công thức về tính gần đúng đạo hàm và tích phân.

1. Tính gần đúng đạo hàm. Bài toán tính gần đúng đạo hàm do hai yêu cầu chính:

(i) Biết hàm $f(x)$, nhưng biểu thức đạo hàm phức tạp, khó tính toán.

(ii) - Biết hàm $f(x)$, nhưng cho dưới dạng bảng (cho bằng số) và có thể không chính xác.

Có các công thức tính đạo hàm cơ bản: Công thức sai phân, công thức Richardson, công thức nội suy...

a. *Công thức sai phân (tiến, lùi, trung tâm)*: Có thể dùng một trong ba công thức sau

- Công thức sai phân tiến

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Công thức sai phân lùi

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

- Công thức sai phân trung tâm

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

trong đó $h > 0$ là bước lưới của sai phân.

- Sai số của công thức sai phân tiến và lùi là cỡ $O(h)$, nếu ta gọi $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ thì công thức đánh giá sai số đạt được là:

$$E(x) \leq \frac{M}{2}h$$

Còn công thức sai phân trung tâm có sai số cỡ $O(h^2)$.

b. *Công thức Richardson*: Công thức này có dạng:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$$

hoặc

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

Sai số đạt được của hai công thức này là cỡ $O(h^2)$, Nếu ta gọi $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'''(x)|$ thì công thức đánh giá sai số đạt được là:

$$E(x) \leq \frac{M}{3}h^2$$

c. *Công thức dùng đa thức nội suy*: Công thức này có dạng:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \cdots]$$

trong đó $\Delta^k y_0$ là sai phân cấp k của $f(x)$ tại $x = x_0$ (xem phần đa thức nội suy Newton tiến).

2. Tính gần đúng tích phân. Cần nắm vững các phương pháp tính tích phân (1 lớp). Chủ yếu là các phương pháp: *hình thang, parabol (simpson), Newton-Cotes*.... Cần tính tích phân

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

a. *Phương pháp hình thang.* Công thức tính toán:

$$\bar{I} = \frac{(b-a)}{2n}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)$$

trong đó $f_k = f(x_k) = f(a+kh)$, n là số điểm chia, $h = \frac{(b-a)}{n}$.
Sai số của công thức hình thang:

$$|r| \leq \frac{M(b-a)}{12}h^2$$

trong đó $M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{''}(x)\right|$

b. *Phương pháp Parabol (Simpson).* Công thức tính toán:

$$\bar{I} = \frac{(b-a)}{6n}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n})$$

trong đó $f_k = f(x_k) = f(a+kh)$, $2n$ là số điểm chia, $h = \frac{(b-a)}{2n}$.
Sai số của công thức Parabol:

$$|r| \leq \frac{M(b-a)}{180}h^4$$

trong đó $M = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)'}(x)|$

b. *Phương pháp Newton-Cotes.* Công thức tính toán:

$$\bar{I} = (b-a)[y_0P_n^0 + y_1P_n^1 + \cdots + y_nP_n^n]$$

trong đó

$$P_n^k = \frac{\int_0^1 t(t-\frac{1}{n})(t-\frac{2}{n})\cdots(t-\frac{k-1}{n})(t-\frac{k+1}{n})\cdots(t-1)dt}{\frac{k}{n}(\frac{k}{n}-\frac{1}{n})\cdots(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n})(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n})\cdots(\frac{k}{n}-1)}$$

với $k = \overline{0,n}$
Chú ý rằng: P_n^k thoả mãn tính chất: $P_n^k = P_n^{n-k}$ và $\sum_{k=0}^n P_n^k = 1$

4.2. **Các bài tập mẫu.** Dưới đây là một số ví dụ mẫu:

Ví dụ 4.1. Tính đạo hàm của hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tại $x = 1$ theo công thức sai phân tiến (lùi, trung tâm). So sánh với kết quả đúng và đưa ra công thức đánh giá sai số cho mỗi trường hợp (chú ý là chọn h tối thiểu là 0.1).
Bài giải: Ta biết $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, nên $f'(1) = \frac{1}{3} \approx 0.333333$ Nếu chọn $h = 0.1$, gọi $df(x)$ là giá trị gần đúng của đạo hàm tại x, ta có:

- Dùng công thức sai phân tiến:

$$df(1) = \frac{\sqrt[3]{1.1} - 1}{0.1} = 0.322801$$

Khi đó sai số: $|f^{'}(1) - df(1)| = 0.010532$

- Dùng công thức sai phân tiến:

$$df(1) = \frac{1 - \sqrt[3]{0.9}}{0.1} = 0.345106$$

Khi đó sai số: $|f^{'}(1) - df(1)| = 0.011773$

- Dùng công thức sai phân trung tâm:

$$df(1) = \frac{\sqrt[3]{1.1} - \sqrt[3]{0.9}}{0.2} = 0.333954$$

Khi đó sai số: $|f^{'}(1) - df(1)| = 0.000621$

Để đánh giá sai số ta có: $f^{''}(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$, do đó:

$$M = \sup_{x\in[0.9;1.1]} |\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}| = \frac{2}{9\sqrt[3]{(0.9)^5}} = 0.264880$$

Sai số đạt được là

$$E(1) \leq \frac{M}{2}h = \frac{0.264880}{2}(0.1) = 0.013244$$

Ví dụ 4.2. Tính đạo hàm của hàm $f(x) = log_3 x$ tại $x = 1$ theo công thức Richardson. So sánh với kết quả đúng và đưa ra công thức đánh giá sai số (chú ý là chọn h tối thiểu là 0.1).

Bài giải:

Ta biết rằng $f^{'}(x) = \frac{1}{xln3}$, do đó $f^{'}(1) = \frac{1}{ln3} = 0.910239$.

Mặt khác sử dụng công thức Richarson thứ nhất, với $h = 0.1$ (với ký hiệu $df(x)$ là giá trị gần đúng cho đạo hàm của $f(x)$) ta có :

$$df(1) = \frac{1}{0.2}[log_3(0.8) - 4log_3(0.9) + 3log_3(1)] = \frac{-0.203114 + 0.383613}{0.2} = 0.902495$$

Vậy sai số so với giá trị chính xác là:

$$|f^{'}(1) - df(1)| = |0.910239 - 0.902495| = 0.007744$$

Nếu sử dụng công thức Richardson thứ hai ta thu được:

$$df(1) = \frac{1}{0.2}[-3log_3(1) + 4log_3(1.1) - log_3(1.2)] = \frac{0.347020 - 0.165956}{0.2} = 0.905320$$

$$|f^{'}(1) - df(1)| = |0.910239 - 0.905320| = 0.004919$$

Để đánh giá sai số của phương pháp Richardson, ta có: $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3 ln3}$, do đó:

$$M = \sup_{x\in[0.8;1.2]} |\frac{2}{x^3 ln3}| = \frac{2}{(0.8)^3 ln3} = 3.555622$$

Do đó:

$$|E(1)| \leq \frac{3.555622}{3}(0.1)^3 = 0.011852$$

Ví dụ 4.3. Giả sử hàm $f(x)$ cho dưới dạng bảng sau:

x_i	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
y_i	0.617034	0.7247797	0.851340	1.000000	1.174619	1.379730	1.620657

Hãy tính $f'(-0.3)$ bằng phương pháp Richardson và phương pháp nội suy.

Bài giải:

Dùng công thức Richardson thứ 2 ta tính được:

$$\begin{aligned} df(-0.3) &= \frac{-3f(-0.3)+4f(-0.2)-f(-0.1)}{2h} \\ &= \frac{-1.851102+2.8991188-0.851340}{0.2} \\ &= 0.983384 \end{aligned}$$

Trong khi giá trị chính xác là $f'(-0.3) = 0.993078$.

Dùng công thức đa thức nội suy Newton để tính, ta cần lập bảng sai phân:

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
-0.3	0.617034						
		0.1077457					
-0.2	0.7247797		0.0188146				
		0.1265603		0.0032851			
-0.1	0.851340		0.0220997		0.0005742		
		0.14866		0.0038593		0.0000995	
0.0	1.000000		0.025959		0.0006737		0.0000178
		0.174619		0.004533		0.0001173	
0.1	1.174619		0.030492		0.004533		
		0.205111		0.005324			
0.2	1.379730		0.035816				
		0.240927					
0.3	1.620657						

Khi đó áp dụng công thức nội suy ta có:

$$\begin{aligned} df(-0.3) &= \frac{1}{0.1}(0.1077457 - \frac{0.0188146}{2} + \frac{0.0032851}{3} \\ &- \frac{0.0005742}{4} + \frac{0.0000995}{5} - \frac{0.0000178}{6}) \\ &= 0.99419045 \end{aligned}$$

Ví dụ 4.4. Tính tích phân sau bằng phương pháp hình thang, và đưa ra công thức đánh giá sai số (với ít nhất 4 điểm chia).

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x}$$

Bài giải: Khi $n = 4$ ta có $h = (5-1)/4 = 1$. Do đó:

$$\bar{I} = \frac{(5-1)}{8}[1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5}] = \frac{101}{60} = 1.683333$$

Vì $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, nên $M = \sup_{x\in[1;5]} |2/x^3| = 2$. Do đó công thức đánh giá sai số là:

$$|r| \leq \frac{8}{12}1^2 = 2/3 = 0.666667$$

Ví dụ 4.5. Tính tích phân sau bằng phương pháp Simpson, và đưa ra công thức đánh giá sai số (với ít nhất 2 điểm chia).

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Bài giải: Khi $n = 2$ ta có $h = (1-0)/4 = 0.25$. Do đó:

$$\bar{I} = \frac{(1-0)}{12}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4] = (1 + 3.76471 + 1.6 + 2.560000 + 0.5) = 0.785399$$

Ta có $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, do đó $y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)} = -2xy^2$
Nên $y'' = -4xyy' - 2y^2 = 8x^2y^3 - 2y^2$, suy ra $y^{(3)} = 24xy^3 - 48x^3y^4$. Cuối cùng ta có: $y^{(4)} = 384x^3y^5 - 288x^2y^4 + 24y^3$.
Vậy ta có:

$$M = \sup_{x\in[0;1]} |f^{(4)}(x)| < 384 + 288 + 24 = 696$$

Do đó ta có đánh giá sai số:

$$|r| \le \frac{696}{180}(0.25)^4 = 0.0151042$$

Ví dụ 4.6. Tính tích phân sau bằng phương pháp Newton-Cotes

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Bài giải
Ta sử dụng công thức Newton-Cotes với $n = 6$. Khi đó tính toán các tích phân $P_6^i, i = 0..6$ ta có:

$$P_6^0 = P_6^6 = \frac{41}{840}; P_6^1 = P_6^5 = \frac{91}{35}; P_6^2 = P_6^4 = \frac{9}{280}; P_6^3 = \frac{34}{105}$$

còn $h = \dfrac{1-0}{6} = \dfrac{1}{6}$.
Tương tự tính toán các f_i ta có:

$$f_0 = 1; f_1 = \frac{6}{7}; f_2 = \frac{3}{4}; f_3 = \frac{2}{3}; f_4 = \frac{3}{5}; f_5 = \frac{6}{11}; f_6 = \frac{1}{2}$$

Khi đó thay vào công thức ta có:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{1}{840}[41 + 185.142857 + 20.25 + 181.333333 + 16.2 + 117.818182 + 20.25] \\ &= \frac{581.994372}{840} \\ &= 0.692850\end{aligned}$$

Trong khi đó giá trị chính xác của tích phân này là $I = ln2 = 0.693147$

Ví dụ 4.7. Tính tích phân sau bằng phương pháp hình thang với ít nhất 4 khoảng chia.

$$I = \int_0^1 x\ln(1+x)dx = \frac{\pi}{4}$$

Bài giải. Chia $[0,1]$ thành 4 phần: $N = 4,\ h = 1/4 = 0.25$ bởi các điểm chia

$$0.00 = x_0 < x_1 = 0.25 < x_2 = 0.50 < x_3 = 0.75 < x_4 = 1.00$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{1}{8}(0 + 2\frac{1}{4}\ln(\frac{5}{4}) + 2\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}) + 2\frac{3}{4}\ln(\frac{7}{4}) + \ln 2)\\ &\approx \frac{1}{8}(0.411571775 + 0.405465108 + 0.839423681 + 0.69314718)\\ &= \frac{2.049607744}{8} = 0.256200968.\end{aligned}$$

Sai số thực sự là

$$\text{Actualy Error} := \left|\bar{I} - I\right| = 0.00620$$

Để ước lượng sai số ta có: $f'' = \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$ nên $M = \sup_{x\in[0,1]}\left|f''(x)\right| = 2$.

$$E := \left|\bar{I} - I\right| \leq \frac{1\times 2}{12\times 4^2} \approx 0.01.$$

4.3. **Các bài tập thực hành.**

(1) Dùng công thức sai phân tiến, lùi và sai phân trung tâm, tính các đạo hàm (với h ít nhất là 0.1). (Đưa ra công thức đánh giá sai số)

a. $f'(1.0)$ với $f(x) = x^3e^x$

b. $f'(1.5)$ với $f(x) = x^2\sin x$

c. $f'(0.5)$ với $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x + x^2}$

(2) Dùng công thức Rechardson tính các đạo hàm cho ở bài 1(Đưa ra công thức đánh giá sai số).

(3) Một hàm $f(x)$ cho dưới dạng bảng sau:

x_i	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
y_i	0.125	0.250	0.500	1.000	2.125	2.250	3.725

Hãy tính $f'(-0.3)$ bằng phương pháp Richardson và phương pháp nội suy.

(4) Dùng công thức hình thang tính các tích phân sau (với ít nhất 4 điểm chia). Hãy đưa ra công thức đánh giá sai số (nếu có thể)

a. $I = \int_0^1 e^x dx$

b. $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$

c. $I = \int_1^2 xlnxdx$

d. $I = \int_{-2}^2 x^3 2^x dx$

(5) Dùng công thức Simpson tính các tích phân sau (với ít nhất 4 điểm chia).Hãy đưa ra công thức đánh giá sai số (nếu có thể)

a. $I = \int_1^3 \dfrac{x}{x^2+4}dx$

b. $I = \int_0^2 e^{3x}\sin 3x dx$

c. $I = \int_0^{\pi/4} tgxdx$

d. $I = \int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx$

(6) Dùng công thức Newton-Cotes tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ b. $I = \int_0^1 e^x dx$

5. Phương pháp số trong đại số tuyến tính

5.1. **Các kiến thức cơ bản.** Trong phần này cần lưu ý đến ba bài toán của Đại số tuyến tính (ĐSTT):

- *Giải hệ phương trình ĐSTT*
- *Tính định thức và ma trận nghịch đảo*
- *Tính giá trị riêng, véc tơ riêng*

a. Các phương pháp giải hệ đại số tuyến tính. Xét hệ phương trình đại số tuyến tính

$$Ax = b \tag{2}$$

trong đó $A = (a_{ij})_{n\times n} \in R^{n\times n}$, $x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in R^n$, $b = (b_1, \cdots, b_n)^T \in R^n$ và rank $A = n$

Định lý cơ bản. *Hệ* (2) *có nghiệm nếu* rank A = rank $\overline{A}$, *ở đây* $\overline{A} = [A, b]$ *là ma trận mở rộng của* A.

Đối với ma trận vuông A, có ba định nghĩa chuẩn của ma trận như sau:

(1) Chuẩn ∞ (chuẩn Chebyshev)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ứng với chuẩn véc tơ $\|x\|_\infty = \sum_{i=1}^n |x_i|$

(2) Chuẩn 1:

$$\|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

ứng với chuẩn véc tơ $\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$

(3) Chuẩn 2:(Euclide)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A^T A)}$$

ứng với chuẩn véc tơ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ trong đó $\lambda_i(A^T A)$ là giá trị riêng lớn nhất của ma trận $A^T A$

Có hai loại phương pháp giải hệ đại số tuyến tính (2):

a. **Phương pháp trực tiếp.** Phương pháp Crammer, PP khử Gauss, PP Gass compact, PP phần tử trội, PP Căn bậc 2, PP phân tích nhân tử Cholesky (LU), PP trực giao...
b. **Phương pháp lặp.** PP lặp đơn, PP Jacobi, PP Seidel, PP Gauss-Seidel...

Trong phần này nên lưu ý đến phương pháp khử Gauss và các PP lặp:

(A) **Phương pháp khử Gauss.** Gồm hai bước:

Bước thuận. Đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng tam giác.

Ta đặt $A^{(0)} = \overline{A}$, sau đó dùng phương pháp biến đổi sơ cấp (biến đổi tuyến tính), đưa ma trận $A^{(0)}$ về dạng tam giác:

$$A^{(0)} \to A^{(1)} \to \cdots \to A^{(n)}$$

trong đó $A^{(n)}$ là ma trận tam giác.

Bước ngược. Giải hệ tam giác.

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}}, \quad \forall k = \overline{n, 1}$$

Chú ý. Phép biến đổi sơ cấp trong đại số tuyến tính bao gồm.

1) Tráo đổi hai hàng (cột).
2) Nhân / chia một hàng (cột) với một số thực khác không.
3) Thay một hàng (cột) bằng tổ hợp tuyến tính các hàng khác (nói riêng, cộng một hàng (cột) với các hàng (côt) khác).

(B) **Phương pháp căn bậc hai và phương pháp phân tích nhân tử Cholesky.** Yêu cầu A là ma trận đối xứng, khi đó PP căn bậc hai gồm hai bước:

Bước phân tích. Phân tích $A = LU = S^T S$ trong đó $U = S$ là ma trận tam giác trên và $L = S^T$ là ma trận tam giác dưới.

Bước giải hệ. Giải hai hệ tam giác. Đặt $y = Ux$, ta giải hệ tam giác dưới $Ly = b$. Sau khi tìm được y, giải hệ tam giác trên $Ux = y$.

Nếu ta gọi $S = (s_{ij})_{n\times n}$ thì S được tính qua A theo công thức sau:

$$\begin{cases} s_{11} = \sqrt{a_{11}}; s_{ij} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}; & \forall j = \overline{2, n} \\ s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}, & \forall i = \overline{2, n} \\ s_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj}}{s_{ii}} & 2 \le i < j \le n \\ s_{ij} = 0, \quad j < i & \end{cases}$$

Chú ý rằng, các phần tử của ma trận S có thể là các số phức, do đó việc tính toán khá phức tạp.

Tuy nhiên nếu A không là ma trận đối xứng, ta cũng phân tích được $A = LU$ trong đó L là ma trận tam giác dưới, U là ma trận tam giác trên, nhưng lúc này $L^T \neq U$. Công thức tính toán trong tường hợp này khá phức tạp. Xem ví dụ dưới để rõ hơn.

(C) **Phương pháp lặp đơn**: Phương pháp lặp đơn dựa vào định lý cơ bản sau:

Định lý 5.2. *Nếu ma trận A có $\|B\| := q < 1$ thì phép lặp đơn:*

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d, \quad k \ge 0$$

hội tụ về nghiệm $x* \in R^n$ duy nhất của phương trình $x = Bx + d$ với mọi $x^{(0)} \in R^n$ tuỳ ý. Hơn nữa, ta còn có hai công thức đánh giá sai số sau

(1)

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\| \le \frac{q}{1-q} \left\| x^{k+1} - x^k \right\| \quad \forall k \ge 0.$$

(2)

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\| \le \frac{q^{k+1}}{1-q} \left\| x^1 - x^0 \right\| \quad \forall k \ge 0.$$

Do vậy để thực hiện phương pháp lặp đơn, ta chuyển hệ (5.1) về dạng

$$x = Bx + d \tag{3}$$

sao cho $\|B\| := q < 1$. Sau đó xây dựng dãy lặp:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d, \quad k \geq 0$$

Hay

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = d_i \\ x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad k \geq 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

(D) **Phương pháp lặp Jacobi.** Xét hệ chéo trội:

a. Hệ chéo trội theo hàng: $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = \overline{1, n}$
Biến đổi hệ (5.1) về dạng tương đương:

$$\begin{cases} x_i = -\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Khi đó xây dựng dãy lặp:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}} \\ x_i^{(k+1)} = -\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad k \geq 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Dãy lặp này sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất $x* \in R^n$ của phương trình (2).

b. Hệ chéo trội theo cột: $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad j = \overline{1, n}$
Đặt $z = (z_1, \cdots, z_n)^T$ trong đó $z_i = a_{ii} x_i$. Biến đổi hệ (5.1) về hệ mới:

$$\begin{cases} z_i = -\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} z_j + b_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Khi đó xây dựng dãy lặp:

$$\begin{cases} z_i^{(0)} = b_i \\ z_i^{(k+1)} = -\sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} z_j^{(k)} + b_i, \quad k \geq 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Dãy lặp này sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất $z^* = (z_1^*, \cdots, z_n^*)^T \in R^n$ và khi đó $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ với $x_i^* = \frac{z_i^*}{a_{ii}}$ sẽ là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

(E) **Phương pháp lặp Seidel**: Xét hệ dạng:

$$x = B_1 x + B_2 x + d \tag{4}$$

trong đó $B = B_1 + B_2$ và B_1 là ma trận tam giác dưới và các phần tử trên đường chéo bằng 0, B_2 là ma trận tam giác trên, tức là:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

và:

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó dãy lặp Seidel được xây dựng như sau:

$$x^{(k+1)} = B_1 x^{(k+1)} + B_2 x^{(k)} + d, \quad k \geq 0$$

Hay

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = b_i \\ x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} x_j^{(k)} + b_i, \quad k \geq 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Định lý sau sẽ khẳng định sự hội tụ của PP Seidel.

Định lý 5.3. *Phương pháp Seidel hội tụ nếu* $\|B\|_\infty := q < 1$.

Phương pháp đánh giá sai số của phương pháp Seidel. Gồm các bước sau

– Tính các hệ số

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \quad \text{và} \quad \gamma_i = \sum_{j=i}^{n} |b_{ij}|$$

– Tính

$$\rho = \max_{1 \leq i \leq n} \{\frac{\gamma_i}{1 - \beta_i}\}$$

– Có đánh giá

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\| \leq \rho \left\| x^k - x^* \right\|, \quad k \geq 0$$

Do đó điều kiện dừng là $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon \dfrac{(1-\rho)}{\rho}$ trong đó $\epsilon > 0$ là sai số.

(F) **Phương pháp lặp Gauss-Seidel**: Xét hệ chéo trội:

Trong phần này ta sẽ xét hệ chéo trội theo hàng, tức là hệ (5.1) thoả mãn:

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = \overline{1, n}$$

Biến đổi hệ (5.1) về dạng tương đương:

$$\begin{cases} x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \dfrac{b_i}{a_{ii}} \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Khi đó xây dựng dãy lặp:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \dfrac{b_i}{a_{ii}} \\ x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i_1}^{n} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \dfrac{b_i}{a_{ii}}, \quad k \geq 0 \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Dễ thấy $\|B\|_\infty := q < 1$, nên theo định lý (5.3) thì dãy lặp này sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất $x* \in R^n$ của phương trình (2).

2)**Các phương pháp tính định thức, ma trận nghịch đảo**

a. Để tính định thức ta cũng có thể sử dụng phương pháp khử Gauss. Đưa định thức của ma trận A về định thức ma trận tam giác. Khi đó định thức của ma trận tam giác chính là tích các phần tử trên đường chéo, tức là:
Nếu $T = (t_{ij})_{n\times n}$ là ma trận tam giác thì $det(T) = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}$
Các phép biến đổi với định thức bao gồm:
(1) Tráo đổi hai hàng (cột), định thức đổi dấu.
(2) Nhân/ chia một hàng (cột) với một số thực k khác không thì định thức tăng/giảm k lần.

(3) Thay một hàng (cột) bằng tổ hợp tuyến tính các hàng khác (nói riêng, cộng một hàng (cột) với các hàng (côt) khác) định thức không đổi.
(4) Định thức có một hàng (cột) bằng 0, thì bằng 0.
(5) Định thức có hai hàng(cột) bằng nhau hoặc tỷ lệ với nhau thì bằng 0.

b. Để tính ma trận nghịch đảo cũng có thể sử dụng phương pháp khử Gauss.
Ma trựân $B \in R^{n\times n}$ gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận không suy biến $A \in R^{n\times n}$ nếu $AB = BA = E$, với $E \in R^{n\times n}$ là ma trận đơn vị. Thường ký hiệu là $A^{-1} = B$
Sơ đồ tính ma trận nghịch đảo là:

$$\tilde{A} := [A, E] \to \tilde{B} := [E, B]$$

Dùng phép biến đổi sơ cấp đưa $\tilde{A}$ về $\tilde{B}$. Khi đó $B = A^{-1}$. Cũng có thể dùng phương pháp giải hệ đại số tuyến tính để tính A^{-1}. Cụ thể là ta giải n hệ phương trình tuyến tính dạng:

$$\begin{cases} Ax_i = e_i \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

trong đó $e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)^T$ là véc tơ đơn vị thứ i của R^n, còn $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni})^T \in R^n$. Khi đó ma trận $X = (x_{ij})_{n\times n} = A^{-1}$.

5.2. **Các bài tập mẫu.** Dưới đây là một số ví dụ cơ bản.

Ví dụ 5.1. Giải hệ sau bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Bài giải: Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Bước thuận:</u> Biến đổi $\overline{A}$ về dạng tam giác

$$\overline{A} = A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \to A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & -4 & -8 & | & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \to A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Bước ngược:</u> Giải hệ tam giác.
Hệ được viết thành

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Từ đây ta có $x_1 = 1; x_2 = x_3 = 0$ là nghiệm của hệ trên.

Ví dụ 5.2. Giải hệ sau bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Bài giải: Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}; \overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & | & 7 \\ 2 & -4 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 4 & | & -5 \end{bmatrix}$$

<u>Bước thuận:</u> Biến đổi $\overline{A}$ về dạng tam giác

$$\overline{A} = A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & | & 7 \\ 2 & -4 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 4 & | & -5 \end{bmatrix} \to A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & | & 7 \\ 0 & -5 & -\frac{5}{2} & | & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{19}{4} & | & -\frac{13}{4} \end{bmatrix} \to$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & | & 7 \\ 0 & -5 & -\frac{5}{2} & | & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 & | & -4 \end{bmatrix}$$

<u>Bước ngược:</u> Giải hệ tam giác.
Hệ được viết thành

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -5x_2 - \frac{5}{2}x_3 = -\frac{5}{2} \\ 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Từ đây ta có $x_1 = 2; x_2 = 1; x_3 = -1$ là nghiệm của hệ trên.

Ví dụ 5.3. Tính ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài giải: Ta viết:

$$P = [A, E] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dùng biến đổi Gauss đưa $P = [A, E]$ về dạng $Q = [E, B]$. Biến đổi $(P_2 - 2P_1) \to (P_1); (P_3 + P_1) \to (P_3); (P_3 + P_2) \to (P_3)$, ta thu được

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & | & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & \frac{-8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Vậy khi đó

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 5.4. Dùng phương pháp phân tích nhân tử Cholesky giải hệ sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Bài giải: Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Bước thuận: Cần phân tích $A = LU$. Ta biến đổi $\overline{A}$ về dạng tam giác (bằng biến đổi sơ cấp)

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{19}{4} \end{bmatrix} \to$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Đặt

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Khi đó L được xác định như sau:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm $l_{21}; l_{31}; l_{32}$ từ điều kiện: $LU = A$, hay:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Giải hệ này ra ta thu được $l_{21} = 1/2; l_{31} = -1/4; l_{32} = -3/10$, do đó

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & -3/10 & 1 \end{bmatrix}$$

Bước ngược: Ta giải hệ $Ly = b$, tức là:

$$\begin{cases} y_1 & = 7 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 & = 1 \\ \frac{-1}{4}y_1 - \frac{3}{10}y_2 + y_3 & = -5 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có: $y = (y_1; y_2; y_3)^T = (7; -5/2; -4)^T$ Tiếp theo ta giải hệ tam giác trên: $Ux = y$, tức là:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -5x_2 - \frac{5}{2}x_3 = \frac{-5}{2} \\ 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Giải ra ta thu được: $x = (x_1; x_2; x_3)^T = (2; 1; -1)^T$

Ví dụ 5.5. Dùng phương pháp lặp đơn giải hệ sau

$$\begin{cases} x_1 = 0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 1.1 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.8 \\ x_3 = 0.1x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 1.2 \end{cases}$$

Bài giải:
Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy $||A||_\infty = \max\{0.5; 0.5; 0.8\} = 0.8 := q < 1$.
Theo định lý (5.1), dãy lặp sau sẽ hội tụ:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 0.0; x_2^{(0)} = 0.0; x_3^{(0)} = 0.0; \\ x_1^{(k+1)} = 0.3x_1^{(k)} + 0.1x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.1 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.8 \\ x_3^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 0.3x_3^{(k)} + 1.2 \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Thực hiện tính toán ta thu được bảng kết quả sau:

k	x_1	x_2	x_3
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.100000	0.800000	1.200000
2	1.630000	1.310000	1.990000
3	1.919000	1.623000	2.484000
...	...	...	...
10	2.324398	2.090562	2.228146

Để đánh giá sai số và đưa ra tiêu chuẩn dừng, ta sử dụng một trong hai công thức sau

(1) $\left\|x^{k+1} - x^k\right\|_\infty \leq \dfrac{(1-q)}{q}\epsilon = 0.25\epsilon$

(2) $k \geq \left[\log_q \dfrac{(1-q)\epsilon}{\|x^1 - x^0\|_\infty}\right] = \left[\log_{0.8} \dfrac{0.2\epsilon}{\|x^1 - x^0\|_\infty}\right]$

Trong đó $\left\|x^{k+1} - x^k\right\|_\infty = \max\{\left|x_1^{k+1} - x_1^k\right|, \left|x_2^{k+1} - x_2^k\right|, \left|x_3^{k+1} - x_3^k\right|\}$ và $[x]$ là ký hiệu phần nguyên của số thực x (tức là số nguyên lớn nhất mà không vượt quá x).

Ví dụ 5.6. Dùng phương pháp lặp Jacobi giải hệ sau

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Bài giải: Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy hệ này đều chéo trội theo hàng và theo cột. Do đó có thể áp dụng phương pháp lặp Jacobi. Chia các phương trình lần lượt cho 10, chuyển về hệ dạng $x = Bx + b$, tức là:

$$\begin{cases} x_1 = -0.3x_2 - 0.2x_3 + 1.0 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.3x_3 + 1.2 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.8 \end{cases}$$

Dễ thấy $||A||_\infty = \max\{0.5; 0.4; 0.2\} = 0.5 := q < 1$. Do đó theo định lý (5.1) thì dãy lặp sau hội tụ:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 0.0; x_2^{(0)} = 0.0; x_3^{(0)} = 0.0 \\ x_1^{(k+1)} = -0.3x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} + 1.0 \\ x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.3x_3^{(k)} + 1.2 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} + 0.8 \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Thực hiện các phép lặp ta thu được kết quả sau (k- số phép lặp):

k	x_1	x_2	x_3
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	1.000000	1.200000	0.800000
2	0.480000	0.860000	0.580000
3	0.626000	0.978000	0.666000
...	...	...	...
7	0.586957	0.947749	0.646876

Tương tự như ví dụ 5.6, ta cũng có thể đưa ra tiêu chuẩn dừng cho phương pháp Jacobi.

Ví dụ 5.7. Dùng phương pháp lặp Gauss-Seidel giải hệ sau:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Bài giải: Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Chia các phương trình lần lượt cho 10, chuyển về hệ dạng $x = Bx + b$, tức là:

$$\begin{cases} x_1 = -0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_2 = -0.2x_1 - 0.1x_3 + 1.3 \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 1.4 \end{cases}$$

Dễ thấy $||A||_\infty = \max\{0.2; 0.3; 0.4\} = 0.4 := q < 1$. Do đó theo định lý (5.1) thì dãy lặp sau hội tụ:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 1.2; x_2^{(0)} = 0.0; x_3^{(0)} = 0.0 \\ x_1^{(k+1)} = -0.1x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.2 \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.3 \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} - 0.2x_2^{(k)} + 1.4 \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Thực hiện các phép lặp ta thu được kết quả sau (k- số phép lặp):

k	x_1	x_2	x_3
0	1.200000	0.000000	0.000000
1	1.200000	1.060000	0.948000
2	0.999200	1.005360	0.999088
3	0.999555	1.000180	1.000053
3	0.999977	0.999999	1.000005
3	1.000000	1.000000	1.000000

Để đưa ra tiêu chuẩn dừng, ta thực hiện như sau

- Tính $\beta_1 = 0.0,\ \beta_2 = 0.2,\ \beta_3 = 0.2 + 0.2 = 0.4$ và $\gamma_1 = 0.1 + 0.1 = 0.2,\ \gamma_2 = 0.1,\ \gamma_3 = 0.0$.
- Tính
$$\rho = \max_{1\leq i\leq 3}\{\frac{\gamma_i}{1-\beta_i}\} = \max\{\frac{0.2}{1.0}, \frac{0.1}{0.8}, \frac{0.0}{0.6}\} = 0.2.$$
- Ta có tiêu chuẩn dừng
$$\left\|x^{k+1} - x^k\right\|_\infty \leq \frac{(1-\rho)}{\rho}\epsilon = 4\epsilon,$$
trong đó $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty = \max\{\left|x_1^{k+1} - x_1^k\right|, \left|x_2^{k+1} - x_2^k\right|, \left|x_3^{k+1} - x_3^k\right|\}$.

5.3. **Các bài tập thực hành.**

(1) Dùng phương pháp khử Gauss giải các hệ phương trình sau:

a.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

(2) Tính ma trận nghịch đảo của ma trận A bằng PP khử Gauss:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) Hãy kiểm tra các hệ phương trình sau có đủ điều kiện để thực hiện PP lặp đơn, Jacobi, Seidel, Gauss-Seidel không? Nếu được hãy xây dựng sơ đồ lặp.

a.

$$\begin{cases} x_1 &= & 0.5x_2 & +0.1x_3 & +1.0 \\ x_2 &= 0.2x_1 & +0.2x_2 & +0.1x_3 & +0.7 \\ x_3 &= 0.1x_1 & +0.2x_2 & +0.2x_3 & +0.6 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 15 \\ x_1 & +10x_2 & +4x_3 & = 15 \\ 2x_1 & +x_2 & +10x_3 & = 13 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} 10x_1 & +8x_2 & +1x_3 & = 19 \\ x_1 & +10x_2 & +4x_3 & = 15 \\ x_1 & +6x_2 & +10x_3 & = 17 \end{cases}$$

6. Giải gần đúng phương trình vi phân thường

6.1. Cac kien thuc co ban

6.1. Các kiến thức cơ bản. Trong chương này, cần lưu ý đến hai lớp phương pháp:

- *Phương pháp giải tích.* Có các phương pháp như: *PPlặp Picard và PP chuỗi nguyên, PP Newton-Kantorovich, PP tham số bé, PP biến đổi Laplat, Fourier...*
- *Phương pháp số.* Có các phương pháp như:*PP Euler, PP Runge-Kutta, PP Adams-Backforth, PP dự báo hiệu chỉnh (PC)...*

Đối với lớp phương pháp số, cần nắm vững đặc điểm là: chỉ giải cho một số lớp hẹp các phương trình vi phân, các tính toán đều phải tường minh. Cần chú ý hai phương pháp là: phương pháp lặp Picard và PP chuỗi nguyên.

Đối với lớp PP số: Có hai loại (pp đơn bước và đa bước). Chú trọng vào PP Euler và PP Runge-Kutta...

Xét bài toán giá trị ban đầu (bài toán Cauchy)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ t_0 \le t \le T \end{cases} \tag{5}$$

trong đó hàm f thoả mãn một số giả thiết nào đó (gọi là định lý tồn tại và duy nhất nghiệm (đã được đề cập trong phần giải tích)) để bài toán (5) có nghiệm. Dưới đây ta xét các PP cơ bản sau:

1) Phương pháp lặp Picard.

Tích phân bài toán (5) từ t_0 đến t ta có:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \quad (t \in [t_0, T])$$

Xây dựng dãy lặp Picard như sau:

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0 \\ y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds \quad (t \in [t_0, T]) \\ n \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

Nếu bài toán (5) có nghiệm duy nhất $y(t)$ thì dãy lặp Picard hội tụ về nghiệm duy nhất $y(t)$ này.

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = y(t) \quad (t \in [t_0, T])$$

Đánh giá sai số cho công thức nghiệm: Giả sử, nghiệm của bài toán Cauchy tồn tại và duy nhất trong một lân cận hình chữ nhật

$$D = [t_0, T] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$$

trong đó $[a, b]$ là lân cận của y_0 (tức là $y_0 \in [a, b]$).

i. Hàm f liên tục Lipschitz theo biến y, nghĩa là $\exists L > 0$ sao cho:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad t \in [t_0, T], y_1, y_2 \in [a, b].$$

ii. Hàm f bị chặn trên miền $D = [t_0, T] \times [a, b]$ của nó, tức là:

$$M = \sup_{D} |f(t, y)| < +\infty$$

Khi đó ta có:

$$|r_n(t)| = |y_n(t) - y(t)| \leq \frac{ML^n(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2) Phương pháp chuỗi nguyên.

Xét hàm $f : D := [t_0, T] \times [a, b] \to [a, b]$ là hàm giải tích theo t và y trong lân cận của (t_0, y_0), nghĩa là f khai triển được thành chuỗi luỹ thừa:

$$f(t, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}(t - t_0)^i (y - y_0)^j$$

Khi đó nghiệm $y(t)$ có thể khai triển được thành chuỗi Taylor:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(t_0)}{i!}(t - t_0)^i$$

Khi đó để tính các $y^{(i)}(t_0) : i \geq 0$, ta có:

$$\begin{cases} y^{(0)}(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = f(t_0, y_0) \\ y''(t_0) = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dx}y'|_{t=t_0} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dx}f|_{t=t_0} \\ \dots \end{cases}$$

3) Phương pháp biến đổi Laplace.

Giả sử $f(t)$ là một hàm xác định với mọi $t > 0$. Biến đổi Laplace của hàm f, ký hiệu là $L_\alpha(f)$ (với $\alpha > 0$) xác định bởi tích phân sau.

$$L_\alpha(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}dt$$

Hàm $f(t)$ được gọi là biến đổi Laplace ngược của hàm $L_\alpha(f)$, ký hiệu là $L_\alpha^{-1}(f)$.

Tính chất.

(1) $L_\alpha(af + bg) = aL_\alpha(f) + bL_\alpha(g)$.

(2) $L_\alpha^{-1}(af + bg) = aL_\alpha^{-1}(f) + bL_\alpha^{-1}(g)$.

(3) $L_\alpha(f') = \alpha L_\alpha(f) - f(0)$.

(4) $L_\alpha(\int_0^t f(s)ds) = \dfrac{1}{\alpha}L(f(t))$.

(5) $L_\alpha^{-1}(\dfrac{L_\alpha(f)}{\alpha}) = \int_0^t f(s)ds$.

Áp dụng giải phương trình vi phân.

- Tính biến đổi Laplace của hàm y' theo công thức ở tính chất 3.
- Sử dụng tính chất 1 và 2 để tính $L_\alpha(y)$.
- Sử dụng biến đổi Laplace ngược để tính y.

4) Phương pháp sai phân Euler.

Đối với bài toán Cauchy (5), ta sẽ tìm nghiệm của (5) tại các điểm $t_i = t_0 + ih$ với bước $h > 0, \forall i \geq 0$.

Giả sử ta chia đoạn $[t_0, T]$ thành N phần với bước chia $h = (T - t_0)/N > 0$, khi đó $t_i = t_0 + ih$, do đó ta cần tính nghiệm $y(t)$ tại các điểm $t = t_i$, ký hiệu $y_i = y(t_i)$.

Sử dụng công thức khai triển Taylor ta có:

$$y_{i+1} - y_i = y'(t_i)h + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2 = f(t_i, y_i)h + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2, \forall i = \overline{0, N-1}$$

hoặc

$$y_i - y_{i+1} = -y'(t_{i+1})h - \frac{y''(\eta_{i+1})}{2}h^2 = -f(t_{i+1}, y_{i+1})h - \frac{y''(\eta_{i+1})}{2}h^2, \forall i = \overline{0, N-1}$$

Do vậy khi h bé ta có công thức sau:

$$\begin{cases} Y_0 = y_0 \\ Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i), \quad \forall i = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{7}$$

gọi là công thức Euler hiển .

Tương tự ta có công thức Euler ẩn:

$$\begin{cases} Y_0 = y_0 \\ Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1}), \quad \forall i = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{8}$$

Nói chung công thức Euler ẩn để tính Y_{i+1} qua Y_i, ta cần phải giải một phương trình $Y_{i+1} = Y_i + hf(t_{i+1}, Y_{i+1})$

Tương tự ta cộng hai công thức (7) và (8) ta suy ra công thứ Euler trung tâm:

$$\begin{cases} Y_0 = y_0, Y_1 = Y_0 + hf(t_0, Y_0) \\ Y_{i+1} = Y_{i-1} + 2hf(t_i, Y_i), \quad \forall i = \overline{1, N-1} \end{cases} \tag{9}$$

Nếu gọi $M = \sup_{t\in[t_0,T]|y^t(t)|}$ thì ta có đánh giá sai số địa phương là:

$$|r_i| \le \frac{M}{2}h^2$$

Sai số toàn cục là:

$$|e_i| \le \frac{Mh}{2L}(e^{hLi} - 1)$$

trong đó L là hằng số Lipschitz.

5) Phương pháp Runge-Kutta. Phương pháp Runge-Kutta tổng quát cấp 2 có dạng sau:

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + w_1k_1 + w_2k_2 \\ k_1 = hf(t_i, Y_i) \\ k_2 = hf(t_i + \alpha_2 h, Y_i + \beta_{21}k_1), \quad \forall i = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{10}$$

và các hệ số $w_1, w_2, \alpha_2, \beta_{21}$ xác định là nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2\alpha_2 = \frac{1}{2} \\ w_2\beta_{21} = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{11}$$

a. Khi $w_1 = w_2 = 1/2, \alpha_2 = \beta_{21} = 1$, ta có công thức RK2 (công thức hình thang):

$$\begin{cases} Y_0 = y_0 \\ Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, Y_i) + f(t_i + h, Y_i + hf(t_i, Y_i))], \quad \forall i = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{12}$$

b. Khi $w_1 = 0, w_2 = 1, \alpha_2 = \beta_{21} = 1/2$, ta có công thức Euler cải tiến:

$$\begin{cases} Y_0 = y_0 \\ Y_{i+1} = Y_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}f(t_i, Y_i)), \quad \forall i = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{13}$$

c. Khi $w_1 = 1/4, w_2 = 3/4, \alpha_2 = \beta_{21} = 2/3$, ta có công thức:

$$\begin{cases} Y_0 = y_0 \\ \hat{Y}_{i+2/3} = Y_i + \frac{2}{3}hf(t_i, Y_i) \\ Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{4}[f(t_i, Y_i) + 3f(t_i + \frac{2}{3}h, \hat{Y}_{i+2/3})], \quad \forall i = \overline{0, N-1} \end{cases} \tag{14}$$

trường hợp này đạt được sai số bé nhất.

Các công thức RK2 có độ chính xác khá cao.

6.2. **Các bài tập mẫu.**

Ví dụ 6.1. Giải bài toán Cauchy sau bằng phương pháp lặp Picard.

$$\begin{cases} y' = t - y \\ y(0) = 1 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Bài giải: Ta có $f(t,y) = t - y$ và đặt $D = \{(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]\}$. Khi đó $M = \sup_{(t,y)\in D} |f(t,y)| = 2$. Đồng thời $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, do đó $L = 1$.
Ta xây dựng công thức lặp Picard như sau:

$$\begin{cases} y_0(t) = 1 \\ y_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t (s - y_n(s))ds, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Từ đây ta tính được:

$$\begin{cases} y_0(t) = 1 \\ y_1(t) = 1 + \int_0^t (s-1)ds = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ y_2(t) = 1 + \int_0^t (2s - 1 - \frac{s^2}{2})ds = 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{6} \\ \ldots \\ y_n(t) = 1 - t + 2(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^n}{n!}) \end{cases}$$

Cho $n \to +\infty$, ta thu được

$$y_\infty(t) = 1 + t + 2\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} = 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} - 1 + t = 2e^{-t} - 1 + t$$

Vậy nghiệm của phương trình trên là $y(t) = 2e^{-t} - 1 + t$.
Công thức đánh giá sai số là:

$$|r_n(t)| = |y_n(t) - y(t)| \leq \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ví dụ 6.2. Giải bài toán Cauchy sau bằng phương pháp lặp Picard.

$$\begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

Bài giải: Ta có $f(t,y) = 2y$ và đặt $D = \{(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]\}$. Khi đó $M = \sup_{(t,y)\in D} |f(t,y)| = 4$. Đồng thời $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = 2|y_1 - y_2|$, do đó $L = 2$.
Ta xây dựng công thức lặp Picard như sau:

$$\begin{cases} y_0(t) = 1 \\ y_{n+1}(t) = 1 + 2\int_0^t y_n(s)ds, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Từ đây ta tính được:

$$\begin{cases} y_0(t) = 1 \\ y_1(t) = 1 + 2\int_0^t ds = 1 + 2t \\ y_2(t) = 1 + 2\int_0^t (2t+1)ds = 1 + 2t + 2t^2 \\ \ldots \\ y_n(t) = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2!} + \frac{8t^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n t^n}{n!}) \end{cases}$$

Cho $n \to +\infty$, ta thu được

$$y_\infty(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n t^n}{n!} - 1 = e^{2t}$$

Vậy nghiệm của phương trình trên là $y(t) = e^{2t}$.
Công thức đánh giá sai số là:

$$|r_n(t)| = |y_n(t) - y(t)| \leq 4\frac{2^n t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ví dụ 6.3. Giải bài toán Cauchy sau bằng phương pháp chuỗi nguyên.

$$\begin{cases} y' = t - y \\ y(0) = 1 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

Bài giải: Ta có $f(t,y) = t - y$ và đặt $D = \{(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]\}$.
Ta tính:

$$\begin{cases} y^{(0)}(0) = 1 \\ y'(0) = f(0,1) = 0 - 1 = -1 \\ y''(0) = f_x + f_y y'|_{t=0} = 1 - y'(0) = 2 \\ y'''(0) = -y''(0) = -2 \\ \dots \\ y^{(k)}(0) = (-1)^k 2, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Do đó

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k - 1 - t = 2e^{-t} - 1 + t$$

Ví dụ 6.4. Giải bài toán Cauchy sau bằng phương pháp Euler hiện.

$$\begin{cases} y' = y - t \\ y(0) = 0 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

với bước lưới $h = 0.1$.
Bài giải: Ta có $f(t,y) = y - t$ và đặt $D = \{(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]\}$. Khi đó $M = \sup_{(t,y)\in D} |f(t,y)| = 2$. Đồng thời $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, do đó $L = 1$.
Dùng công thức Euler hiện :

$$\begin{cases} Y_0 = 0 \\ Y_{i+1} = Y_i + 0.1(Y_i - t_i), \quad \forall i = \overline{0,9} \end{cases}$$

trong đó $\{t_0; \cdots; t_{10}\} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1.0\}$
Thay vào tính toán ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} Y_0 = 0.00000 & Y_1 = 0.00000 & Y_2 = -0.01000 \\ Y_3 = 0.03100 & Y_4 = -0.06410 & Y_5 = -0.11051 \\ Y_6 = -0.17156 & Y_7 = -0.24872 & Y_8 = -0.34359 \\ Y_9 = -0.45795 & Y_{10} = -0.59374 & \end{cases}$$

Để đánh giá sai số, do $y(t) = 1 + t - e^t$ là nghiệm, nên $y''(t) = -e^t$, do đó: $M_1 = \sup_{t\in[0,1]} |e^t| = e$.
Ta có công thức đánh giá sai số toàn cục là:

$$|e_i| \leq \frac{eh}{2}(e^{ih} - 1)$$

Ví dụ 6.5. Giải bài toán Cauchy sau bằng phương pháp Euler ẩn.

$$\begin{cases} y' = -5y \\ y(0) = 1 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

với bước lưới $h = 0.1$.
Bài giải: Ta có $f(t,y) = -5y$ và đặt $D = \{(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]\}$. Khi đó $M = \sup_{(t,y)\in D} |f(t,y)| = 10$. Đồng thời $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, do đó $L = 5$.
Dùng công thức Euler ẩn :

$$\begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_{i+1} = Y_i - 5hY_{i+1}, \quad \forall i = \overline{0,9} \end{cases}$$

trong đó $\{t_0; \cdots; t_{10}\} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1.0\}$
Hay ta có:

$$\begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_{i+1} = \dfrac{Y_i}{1+5h}, \quad \forall i = \overline{0,9} \end{cases}$$

Thay vào tính toán ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} Y_0 = 1.00000 & Y_1 = 0.66667 & Y_2 = 0.44444 \\ Y_3 = 0.29630 & Y_4 = 0.19753 & Y_5 = 0.13169 \\ Y_6 = 0.08779 & Y_7 = 0.05853 & Y_8 = 0.03902 \\ Y_9 = 0.02601 & Y_{10} = 0.01734 & \end{cases}$$

Để đánh giá sai số, do $y(t) = e^{-5t}$ là nghiệm, nên $y''(t) = 25e^{-5t}$, do đó: $M_1 = \sup_{t\in[0,1]} |e^t| = 25$.
Ta có công thức đánh giá sai số toàn cục là:

$$|e_i| \leq 2.5h(e^{5ih} - 1)$$

Ví dụ 6.6. Giải bài toán Cauchy sau bằng phương pháp RK2.

$$\begin{cases} y' = -ty^2 \\ y(0) = 2 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

với bước lưới $h = 0.1$.
Bài giải: Ta có $f(t,y) = -ty^2$ và đặt $D = \{(t,y) \in [0,1] \times [-1,1]\}$.
Dùng công thức RK2:

$$\begin{cases} Y_0 = 2 \\ \hat{Y}_{i+1} = Y_i + hf(t_i, Y_i) = Y_i(1 - ht_iY_i) \\ Y_{i+1} = Y_i + \dfrac{h}{2}[f(t_i, Y_i) + f(t_i + h, \hat{Y}_{i+1})] = Y_i - \dfrac{h}{2}[t_iY_i^2 + (t_i + h)\hat{Y}_{i+1}^2], \quad \forall i = \overline{0,9} \end{cases}$$

trong đó $\{t_0; \cdots; t_{10}\} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1.0\}$
Thay vào tính toán ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} Y_0 = 2.00000 & Y_1 = 1.98000 & Y_2 = 1.92273 \\ Y_3 = 1.83449 & Y_4 = 1.72391 & Y_5 = 1.60007 \\ Y_6 = 1.47105 & Y_7 = 1.34317 & Y_8 = 1.22080 \\ Y_9 = 1.10658 & Y_{10} = 1.00184 & \end{cases}$$

6.3. **Các bài tập thực hành.**

(1) Giải các hệ sau bằng PP Lặp Picard hoặc chuỗi nguyên:

a. $\begin{cases} y' = ty \\ y(0) = 0 \\ t \in [0; 1] \end{cases}$ b. $\begin{cases} y' = t^3 \\ y(0) = 0 \\ t \in [0; 1] \end{cases}$ c. $\begin{cases} y' = -2y + 1 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0; 1] \end{cases}$

Đưa ra công thức đánh giá sai số (nếu có thể).

(2) Giải các hệ sau bằng phương pháp Euler

a. $\begin{cases} y' = t + y \\ y(0) = 0 \\ t \in [0; 1] \end{cases}$ b. $\begin{cases} y' = t^2 \\ y(0) = 0 \\ t \in [0; 0.5] \end{cases}$ c. $\begin{cases} (1 + t^2)y' + ty = 0 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0; 0.5] \end{cases}$

Đưa ra công thức đánh giá sai số (nếu có thể).

(3) Giải các hệ sau bằng phương pháp RK2 (hoặc Euler cải tiến)

a. $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0; 1] \end{cases}$ b. $\begin{cases} y' = 2t^2 y \\ y(0) = 1 \\ t \in [0; 0.5] \end{cases}$ c. $\begin{cases} y' = -y + t^2 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0; 1] \end{cases}$

7. Xấp xỉ hàm

7.1. **Các kiến thức cần nhớ.** Trong phần này ta xét ba phương pháp xấp xỉ hàm: Phương pháp bình phương tối thiểu, Xấp xỉ đều và Xấp xỉ trung bình phương một hàm liên tục bằng một đa thức).

1. Phương pháp bình phương tối thiểu. Ý nghĩa của phương pháp bình phương tối thiểu:

- Khi dữ liệu quá lớn, không thuận tiện cho việc sử dụng phương pháp nội suy.
- Khi dữ liệu mắc sai số, điều kiện nội suy $P_N(x_i) = y_i$ không thỏa mãn

- Khi cần xấp xỉ dưới dạng đa thức lượng giác hoặc các đa thức hay hàm đặc biệt khác
- Khi hàm cần xấp xỉ không đủ trơn (không có đạo hàm cấp đủ cao).

Phương pháp bình phương tối thiểu khắc phục được các nhược điểm này. Mục tiêu của phương pháp bình phương tối thiểu là xác định đa thức bậc m là $P_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ sao cho (tổng bình phương các sai số là bé nhất)

$$E(f, P_m) := \sum_{i=0}^{N}(y_i - P_m(x_i))^2 \to \min$$

với $y_i = f(x_i)$, với $i = \overline{0, N}$. Đại lượng $E(f, P_m)$ gọi là phương sai giữa hàm f và đa thức $P_m(x)$.

Điều kiện để xác định $a_0, a_1, \cdots a_m$ là giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + \cdots s_ma_m = b_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + \cdots s_{m+1}a_m = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_ma_0 + s_{m+1}a_1 + \cdots s_{2m}a_m = b_m \end{cases}$$

trong đó $s_k = \sum_{i=0}^{N} x_i^k$ với $k = \overline{0, 2m}$ và $b_l = \sum_{i=0}^{N} x_i^l y_i$ với $l = \overline{0, m}$.

Có hai trường hợp đặc biệt

(1) Khi $m = 1$ (gọi là xấp xỉ tuyến tính): Đa thức cần xấp xỉ có dạng $P_1(x) = a_0 + a_1x$. Điều kiện xác định a_0, a_1 là giải hệ sau

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1\sum_{i=0}^{N} x_i = \sum_{i=0}^{N} y_i \\ a_0\sum_{i=0}^{N} x_i + a_1\sum_{i=0}^{N} x_i^2 = \sum_{i=0}^{N} x_iy_i \end{cases}$$

(2) Khi $m = 2$ (gọi là xấp xỉ bằng tam thức bậc hai): Đa thức cần xấp xỉ có dạng $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Điều kiện xác định a_0, a_1, a_2 là giải hệ sau

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1\sum_{i=0}^{N} x_i + a_2\sum_{i=0}^{N} x_i^2 = \sum_{i=0}^{N} y_i \\ a_0\sum_{i=0}^{N} x_i + a_1\sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_2\sum_{i=0}^{N} x_i^3 = \sum_{i=0}^{N} x_iy_i \\ a_0\sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_1\sum_{i=0}^{N} x_i^3 + a_2\sum_{i=0}^{N} x_i^4 = \sum_{i=0}^{N} x_i^2y_i \end{cases}$$

2. Xấp xỉ đều. Xét không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ là $C_{[a,b]}$. Gọi $P^n_{[a,b]}$ là không gian các đa thức bậc không quá n trên $[a, b]$. Khi đó $P^n_{[a,b]}$ là một không gian con của $C_[a, b]$.

Cho một hàm $f \in C_{[a,b]}$. Bài toán xấp xỉ đều đặt ra là tìm một đa thức $P_n(.) \in P^n_{[a,b]}$ sao cho

$$||f - P_n|| = \min_{Q_n \in P^n_{[a,b]}} ||f - Q_n|| \tag{7.1}$$

trong đó chuẩn $||f|| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Ký hiệu $E_n(f) = ||f - P_n||$ là sai số của pp xấp xỉ đều tốt nhất.

Ta có 4 định lý quan trọng sau:

- *Định lý 7.1*: Giả sử tồn tại $n + 2$ điểm

  $$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$$

  sao cho: $f(x_i) - Q_n(x_i)$ luân phiên đổi dấu, tức là:

  $$sgn\{(-1)^i(f(x_i) - Q_n(x_i))\} = const \quad (i = \overline{0, n+1})$$

thì

$$E_n(f) \geq \mu := \min_{i=\overline{0,n+1}} |f(x_i) - Q_n(x_i)|$$

- *Định lý 7.2*: Điều kiện cần và đủ để P_n là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của f là tồn tại $n+2$ điểm

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b$$

luân phiên Chebyshev sao cho:

$$f(x_i) - P_n(x_i) = c(-1)^{|}|f - P_n|| \quad (i = \overline{0, n+1})$$

trong đó $c = \pm 1$

- *Định lý 7.3*: Đa thức xấp xỉ đều tốt nhất P_n của f là duy nhất.
- *Định lý 7.4*: Đa thức xấp xỉ đều tốt nhất P_n của hàm f chẵn (lẻ) là đa thức chẵn (lẻ).

a) Xấp xỉ đều tốt nhất bằng đa thức bậc 0: Cho hàm $f \in C_{[a,b]}$, khi đó đa thức xấp xỉ đều bậc 0 của hàm f là

$$P_0(x) = \frac{m+M}{2}$$

trong đó

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

b) Xấp xỉ đều tốt nhất bằng đa thức bậc nhất: Cho hàm $f \in C_{[a,b]}$ là hàm lồi, khi đó đa thức xấp xỉ đều bậc nhất của hàm f là

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

trong đó: Nếu f là đa thức bậc nhất thì $f \equiv P_1$, ngược lại, thì a_0, a_1 xác định qua công thức sau:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}; \qquad a_0 = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{a+c}{2} a_1$$

với c là hằng số xác định qua điều kiện:$f'(c) = a_1$ còn nếu f không khả vi thì c chính là điểm cực tiểu của hàm lồi này.

3. Xấp xỉ trung bình phương. Xét không gian các hàm bình phương khả tích trên đoạn $[a,b]$ là $L^2_{[a,b]}$. Gọi $P^n_{[a,b]}$ là không gian các đa thức bậc không quá n trên $[a,b]$. Khi đó $P^n_{[a,b]}$ là một không gian con của $L^2_[a,b]$.

Cho một hàm $f \in L^2_{[a,b]}$. Bài toán xấp xỉ trung bình phương đặt ra là tìm một đa thức $P_n(.) \in P^n_{[a,b]}$ sao cho

$$||f - P_n|| = \min_{Q_n \in P^n_{[a,b]}} ||f - Q_n|| \tag{7.1}$$

trong đó chuẩn $||f|| = (\int_a^b p(x) f^2(x) dx)^{1/2}$ với $p(x)$ là hàm trọng không âm xác định trên $[a,b]$.

Ký hiệu $E_n(f) = ||f - P_n||$ là sai số của pp xấp xỉ đều tốt nhất.

Giả sử $\{e_0(x); e_1(x); \cdots; e_n(x)\}$ là một hệ trực chuẩn của $P^n_{[a,b]}$. Khi đó đa thức xấp xỉ trung bình phương tốt nhất của f trên $L^2_{[a,b]}$ là đa thức P_n có dạng sau:

$$P_n(x) = c_0 e_0(x) + c_1 e_1(x) + \cdots + c_n e_n(x)$$

trong đó:

$$c_k = \int_a^b p(x) f(x) e_k(x) dx; \quad (k = \overline{0,n})$$

a) Xấp xỉ trung bình phương bằng đa thức Legendre: Giả sử $f \in L^2_{[-1,1]}$ là hàm cần xấp xỉ trung bình phương. Xét hệ đa thức trực giao Legendre:

$$L_0(x) = 1; \quad L_1(x) = x; \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$
$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \quad L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$
$$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x); \quad \cdots$$

Khi đó đa thức xấp xỉ trung bình phương tốt nhất của f là:

$$P_n(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + \cdots + c_n L_n(x)$$

trong đó

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) L_k(x) dx \quad (k = \overline{0, n})$$

b) Xấp xỉ trung bình phương bằng đa thức lượng giác: Giả sử $f \in L^2_{[-\pi,\pi]}$ là hàm cần xấp xỉ trung bình phương. Xét hệ đa thức trực giao lượng giác:

$$1; \sin x; \cos x; \sin 2x; \cos 2x; \cdots; \sin nx; \cos nx$$

Khi đó đa thức xấp xỉ trung bình phương tốt nhất của f là:

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = \overline{0, n})$$

Ngoài ra ta còn có thể xấp xỉ bằng đa thức trực giao Chebysev, đa thức Hermitte...

7.2. **Các bài tập mẫu.**

Ví dụ 7.1. Xây dựng đa thức xấp xỉ bậc nhất theo phương pháp bình phương tối thiểu của hàm f cho dưới dạng bảng sau

x_i	1.0	2.0	3.0
y_i	0.1	0.9	2.0

Bài giải: Giả sử đa thức xấp xỉ có dạng $P_1(x) = a_0 + a_1 x$. Khi đó do $s_0 = n + 1 = 2$, $s_1 = 1 + 2 + 3 = 6$, $s_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ và $b_0 = 0.1 + 0.9 + 2.0 = 3.0$, $b_1 = 4.9$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a_0 + 3a_1 = 3 \\ 3a_0 + 5a_1 = 4.9 \end{cases}$$

Do vậy $a_0 = 0.05, a_1 = 0.95$ nên đa thức xấp xỉ là $P_1(x) = 0.05 + 0.95x$.

Ví dụ 7.2. Xây dựng đa thức xấp xỉ bậc hai theo phương pháp bình phương tối thiểu của hàm f cho dưới dạng bảng sau

x_i	-1.1	2.1	3.2	4.4	5.2
y_i	0.78	7.3	9.2	11.9	13.3

Bài giải: Giả sử đa thức xấp xỉ có dạng $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x$. Khi đó do $s_0 = n + 1 = 5$, $s_1 = \sum_{i=0}^4 x_i = 13.8$, $s_2 = \sum_{i=0}^4 x_i^2 = 62.26$, $s_3 = \sum_{i=0}^4 x_i^3 = 266.49$, $s_4 = \sum_{i=0}^4 x_i^4 = 1231.741$ và $b_0 = \sum_{i=0}^4 y_i = 42.48$ $b_1 = \sum_{i=0}^4 y_ix_i = 165.432$, $b_2 = \sum_{i=0}^4 y_ix_i^2 = 717.3608$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5a_0 + 13.8a_1 + 62.26a_2 = 42.48 \\ 13.8a_0 + 62.26a_1 + 266.49a_2 = 165.432 \\ 62.26a_0 + 266.49a_1 + 1231.741a_2 = 717.3608 \end{cases}$$

Do vậy $a_0 \approx 2.99948, a_1 \approx 2.00679$ và $a_2 \approx -0.00339$ nên đa thức xấp xỉ là $P_2(x) = 2.99948 + 2.00679x - 0.00339x^2 \approx 3 + 2x$.

Ví dụ 7.3. Xây dựng đa thức xấp xỉ đều bậc không của hàm $f(x) = |x|$ trên đoạn $[-1; 4]$

Bài giải: Ta có $f(x) = |x|$ là hàm liên tục trên $[-1; 4]$ nên khi đó:

$$m = \min_{[-1;4]} |x| = 0; \qquad M = \max_{[-1;4]} |x| = 4$$

Do đó đa thức xấp xỉ đều tốt nhất

$$P_0(x) = \frac{M + m}{2} = 2$$

Ví dụ 7.4. Xây dựng đa thức xấp xỉ đều bậc không của hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$

Bài giải: Ta có $f(x) = x^2$ là hàm liên tục trên $[-1; 2]$ nên khi đó: $f'(x) = 0$ nếu $x = 0$ và $f(0) = 0$. Do vậy ta có:

$$m = \min_{[-1;2]} x^2 = 0; \qquad M = \max_{[-1;2]} x^2 = 4$$

Do đó đa thức xấp xỉ đều tốt nhất

$$P_0(x) = \frac{M + m}{2} = 2$$

Ví dụ 7.5. Xây dựng đa thức xấp xỉ đều bậc nhất của hàm $f(x) = |x|$ trên đoạn $[-1; 5]$

Bài giải: Ta có $f(x) = |x|$ là hàm liên tục trên $[-1; 5]$ nên khi đó. Ta đặt:

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

trong đó:

$$a_1 = \frac{f(5) - f(1)}{5 + 1} = \frac{2}{3}$$

Hàm không khả vi tại $x = 0$ nhưng tại $x = 0$ hàm đạt cực tiểu nên $c = 0$. Do vậy:

$$a_0 = \frac{f(-1) + f(0)}{2} - \frac{-1 + 0}{2}\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

Vậy đa thức xấp xỉ bậc nhất tốt nhất của $f(x) = |x|$ trên đoạn $[-1; 5]$ là: $P_1(x) = \dfrac{4x + 5}{6}$

7.3. **Các bài tập thực hành.**

(1) Tìm đa thức xấp xỉ bậc nhất và bậc hai của hàm f cho ở dạng bảng sau bằng phương pháp bình phương tối thiểu

a.

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.5	2.25	4.5	7.75

b.

x_i	-2.0	-1.5	1.2	3.5	5.0
y_i	0.65	1.35	2.25	6.50	9.35

(2) Tìm đa thức xấp xỉ bậc 1, bậc 2 và bậc 3 của hàm $f(x) = 2^x \sin x$ và hàm $f(x) = \ln(1 + x + x^2e^x)$ trên đoạn $[0, 5]$ với ít nhất 5 mốc chia.

(3) Tìm đa thức xấp xỉ bậc không tốt nhất của các hàm sau:

a. $f(x) = x^2 - 1$ trên $[-1; 2]$ b. $f(x) = 2^x$ trên $[-1; 1]$

(4) Tìm đa thức xấp xỉ bậc nhất tốt nhất của các hàm sau:

a. $f(x) = e^x$ trên $[-1; 1]$ b. $f(x) = -ln^x$ trên $[1; e]$

(5) Tìm a, b, c từ điều kiện sau:

a. $\max_{x\in[-1;1]} |x^2 + ax + b| \to \min_{a,b}$

b. $\max_{x\in[0;1]} \sqrt{x} - (ax + b)| \to \min_{a,b}$

c. $\max_{x\in[-1;1]} |x^3 + ax^2 + bx + c| \to \min_{a,b,c}$