Paul Dawkins

Người dịch LÊ LỄ (CĐSP NINH THUẬN)

Complex Numbers Primer

SỐ PHỨC

Contents[1]

[1] Có thể click chuột vào tiêu đề để nhảy đến nội dung tương ứng

LỜI NGƯỜI DỊCH

Hiện nay trường sô phức ℂ được xây dựng theo nhiều cách, trong đó có hai cách đại số thường sử dụng :

- ℂ là trường phân rã của đa thức bất khả quy x^2+1(trên ℝ) . $x^2+1=0$ có nghiệm trong ℂ , tức là tồn tại i∈ ℂ , $i^2=-1$.
- Xem ℂ = R^2 ={(a;b)}, xây dựng phép toán cộng và nhân thích hợp, rồi chứng minh (ℂ ,+,x) là một trường. Tác giả xây dựng ℂ ***trên tinh thần*** này . Phần lớn quy tắc tính được thao tác trên các ví dụ một cách hình thức. Tiếp theo là định nghĩa và cuối cùng kiểm chứng kết quả. Việc xây dựng ℂ của tác giả vừa đảm bảo chính xác vừa dễ hiểu, dễ áp dụng.

Tài liệu dành phần đầu nêu định nghĩa số phức và các phép toán .

Phần hai nói về bất đẳng thức tam giác.

Dạng lượng giác và mũ của số phức được nêu ở phần ba.

Phần cuối dùng trình bày về lũy thừa và căn bậc n của một số phức.

Đọc tài liệu này:

Học sinh, sinh viên có nhu cầu thực hành các phép toán trên số phức, tìm thấy hướng dẫn rõ ràng, chi tiết;

Nếu muốn tìm lời giải đáp vì sao tập số phức có nhiều tính chất đẹp mà ℝ không có, sẽ được thỏa mãn;

Nếu đã biết một ít về số phức vẫn thấy thú vị.

Còn ...tôi thì ít thời gian mà ham nhiều việc, nghĩ rằng thiếu sót không tránh khỏi.

Nước đầm Nại đủ sạch, xin rửa tai nghe chỉ giáo.

1.Tập số phức và các phép toán

1.1Định nghĩa tập số phức

- Cho a,b∈ ℝ . Mỗi biểu thức dạng a+bi được gọi là một số phức[2]

a: phần thực của z.

b: phần ảo của z.

Tập các số phức ký hiệu là ℂ . a∈ ℝ , a= a+0i=z . Vậy ℝ⊂ ℂ [3]

Ta cần định nghĩa phép cộng và nhân hai số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$.

Tổng $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

Tích $z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Công thức trên đúng cho trường hợp hai số thực $z_1 = a + 0i, z_2 = c + 0i$.[4]

Thật vậy $\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + 0i) + (c + 0i) = a + c \\ z_1.z_2 &= (a + 0i)(c + 0i) = ac \end{aligned}$

- Điều cuối cùng trong phần này, ta phải chứng minh $i^2 = -1$như một hệ quả của phép nhân. Thật vậy:

$$i^2 = i.i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0.0 - 1.1) + (0.1 + 1.0)i = -1$$

1.2.Các phép toán

- Khi thực hành cộng và nhân hai số phức, chỉ cần thực hiện theo quy tắc cộng và nhân đa thức với chú ý $i^2 = -1$.

[2] Dạng đại số của số phức(ND)

[3] Tồn tại đơn cấu trường :ℝ→ ℂ (ND).

[4] Hai phép toán cộng, nhân cảm sinh trên ℝ thành hai phép toán cộng và nhân thông thường (ND) .

Ví dụ: Tính

a. (58-i)+(2-17i)

b. (6+3i)(10+8i)

c. (4+2i)(4-2i)

Bài giải

a. (58-i)+(2-17i)=58-i+2-17i=60-18i

b. (6+3i)(10+8i)=60+48i+30i+24i^2=60+78i+24(-1)=36+78i

c. (4+2i)(4-2i)=16-(2i)^2=16+4=20 .

Phép nhân hai số phức , cho ta hệ thức : $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$. Hê thức này được sử dụng khi chia hai số phức ở phần sau.

- Bây giờ xét đến phép trừ và chia hai số phức. Thử làm một cách hình thức ví dụ sau

Ví dụ :

a. $(58-i)-(2-17i)=58-i-2+17i=56+16i$

b. $\dfrac{6+3i}{10+8i}=\dfrac{(6+3i)}{(10+8i)}.\dfrac{(10-8i)}{(10-8i)}=$

$$\frac{60-48i+30i-24i^2}{100+64}=\frac{84-18i}{164}=\frac{84}{164}-\frac{18}{164}i=\frac{21}{41}-\frac{9}{82}i$$

c. $\dfrac{5i}{1-7i}=\dfrac{5i(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}=\dfrac{-35+5i}{50}=\dfrac{-7}{10}+\dfrac{1}{10}i$

- Trước khi định nghĩa phép trừ và phép chia hai số phức, ta cần một số chuẩn bị:

Số đối của số phức z ký hiệu –z , thỏa mãn z+(-z)=0

Trong các trường đại số tổng quát nói chung không có hệ thức $-z=(-1).z$

Rất may mắn, trong trường ℂ ta có $-z=(-1).z=-a-bi$

- Hiệu hai số phức z_1, z_2: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

Nên $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a+bi) + (-c-di) = (a-c) + (b-d)i$

- Điều cần chuẩn bị cho định nghĩa thương hai số phức là số nghịch đảo của một số phức.

Số nghịch đảo của số phức z ($\neq 0$) là một số phức ký hiệu z^{-1} sao cho $z.z^{-1}=1$.

Số nghịch đảo của số phức được làm rõ qua đoạn sau:

Giả sử $z^{-1}=u+vi$ là số nghịch đảo của $z=a+bi$,

$$z.z^{-1}=(a+bi)(u+vi)=(au-bv)+(av+bu)i=1$$

Nên $\begin{cases} au - bv = 1 \\ av + bu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ v = -\dfrac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \; z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} i$.

Mọi số phức z khác 0 tồn tại số nghịch đảo z^{-1}.

Định nghĩa thương hai số phức. Cho hai số phức z_1, z_2 ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1}$$

Theo định nghĩa trên , ta có

Ví dụ :

$$\frac{6+3i}{10+8i} = (6+3i)(10+8i)^{-1},$$

$$(10+8i)^{-1} = \frac{10}{10^2+8^2} - \frac{8}{10^2+8^2} i = \frac{10-8i}{164}$$

$$\frac{6+3i}{10+8i}=(6+3i)(10+8i)^{-1}=(6+3i)\frac{10-8i}{164}$$

$$=\frac{60-48i+30i-24i^2}{164}=\frac{21}{41}-\frac{9}{82}i$$

Ta có lại kết quả trước đây khi tiến hành chia hai số phức một cách hình thức.

- Dựa vào nhận xét này, ta có thể tiến hành chia hai số phức mà không cần bận tâm đến công thức tìm số nghịch đảo của số phức.

Chẳng hạn $\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$

hay $(10+8i)^{-1}=\frac{1}{10+8i}.\frac{10-8i}{(10-8i)}=\frac{10-8i}{10^2+8^2}=\frac{5}{82}-\frac{2}{41}i$

2.Bất đẳng thức tam giác

2.1 Số phức liên hợp

- Số phức liên hợp của z=a+bi , ký hiệu $\overline{z}$,

$$\overline{z}=a-bi.$$

(nói cách khác chỉ cần đổi dấu phần ảo của z, ta được $\overline{z}$)

- Một số tính chất của số phức liên hợp

$$\overline{\overline{z}}=z$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

$$\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Ví dụ : Tính

(a) $\overline{\overline{z}}, z = 3 - 15i$

(b) $\overline{z_1 - z_2}, z_1 = 5 + i, z_2 = -8 + 3i$

(c) $\overline{z_1} - \overline{z_2}, z_1 = 5 + i, z_2 = -8 + 3i$

Bài giải

(a) $\overline{z} = 3 + 15i \Rightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{3 + 15i} = 3 - 15i = z$

(b) $z_1 - z_2 = 13 - 2i \Rightarrow \overline{z_1 - z_2} = \overline{13 - 2i} = 13 + 2i$

(c) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{5 + i} - (\overline{-8 + 3i}) = 5 - i - (-8 - 3i) = 13 + 2i$

- Với số phức z=a+bi, ta có

$$z + \overline{z} = a + bi + (a - bi) = 2a,$$
$$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$$

2.2 Môđun của số phức

- Cho z=a+bi, Môđun của z ký hiệu |z|,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Môđun của một số phức là số thực không âm.

- z là số thực (z=a+0i), $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Vậy Môđun của một số thực chính là giá trị tuyệt đối của số ấy.
- $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 \Rightarrow |z| \geq |a| \geq$ a.

Tương tự $|z| \geq |b| \geq b$

Các hệ thức diễn tả mối quan hệ giữa Môđun và số liên hợp của z:

$$z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad z.\overline{z} = |z|^2$$

$$|z| = |\overline{z}|$$

$$|-z| = |z|$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Ví dụ:Tính $\dfrac{6+3i}{10+8i}$

Bài giải

$z_1 = 6+3i, z_2 = 10+8i, \overline{z_2} = 10-8i, |z|^2 = 164$

$$\frac{6+3i}{10+8i} = \frac{(6+3i)(10-8i)}{164} = \frac{60-48i+30i-24i^2}{164} = \frac{21}{41} - \frac{9}{82}i$$

- Tính chất của Môđun số phức

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Thật vậy:

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} \\ &= (z_1 z_2)(\overline{z_1}\,\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2|z_2|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

2.3 Bất đẳng thức tam giác

- Mối quan hệ giữa Môđun số hạng và Môđun tổng hai số phức:

  $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Chứng minh

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$

$$\Rightarrow |z_1+z_2|^2=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$$

Lưu ý rằng $\overline{z_2\overline{\overline{z_1}}}=\overline{z_2}\overline{\overline{z_1}}=\overline{z_2}z_1$Nên

$z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\Re e(z_1\overline{z_2})\le 2|z_1\overline{z_2}|=2|z_1||\overline{z_2}|=2|z_1||z_2|$

$z_1\overline{z_1}=|z_1|^2;z_2\overline{z_2}=|z_2|^2$

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\\ &=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2\\ &\le|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\ &=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

Nên $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

$|z_1|=|z_1+z_2-z_2|$

$\le|z_1+z_2|+|-z_2|$ (giả sử $|z_1|\ge|z_2|,|z_1|<|z_2|$ luôn

$=|z_1+z_2|+|z_2|\Rightarrow|z_1+z_2|\ge|z_1|-|z_2|\ge 0$

đúng)

Tương tự

$|z_1+z_2| \geq |z_2|-|z_1| = -(|z_1|-|z_2|) \geq 0$ (giả sử $|z_1| \leq |z_2|, |z_1| > |z_2|$ luôn đúng)

Do đó $|z_1+z_2| \geq ||z_1|-|z_2||$

Bây giờ thay z_2 bởi $-z_2$, ta có

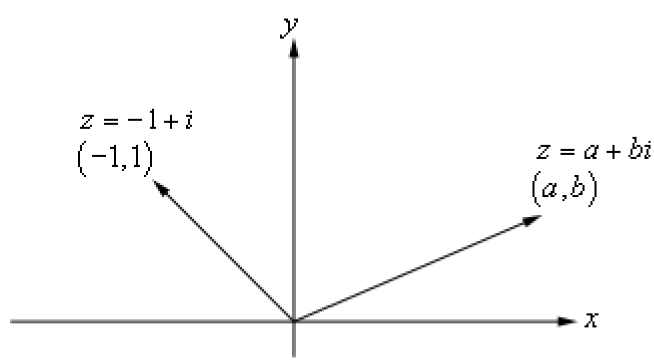
$|z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

$|z_1-z_2| \geq ||z_1|-|z_2||$

3.Dạng lượng giác và dạng mũ

3.1 Biểu diễn hình học của số phức

Xét mặt phẳng Oxy, mỗi số phức z=a+bi được biểu diễn bởi điểm M(a;b) hoặc

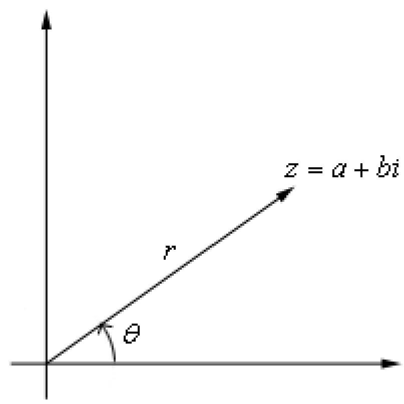


Vectơ có tọa độ (a;b)

Trục Ox gọi là trục thực, Oy gọi là trục ảo, mặt phẳng trên gọi là mặt phẳng phức.

3.2 Dạng lượng giác

- Xét số phức z=a+bi≠ 0, M(a;b) trong mặt phẳng phức. Số đo (rađian) của



mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM gọi là một acgumen của z.

- Cho z=a+bi≠ 0

|z|=r>0, θ là acgumen của z. Khi đó $\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$: dạng lượng giác của số phức.

- Lưu ý

$z = a + bi, a \neq 0 : \begin{cases} r = |z| \\ \tan\theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$, θ sai khác k2π, thường chọn –π<θ≤ π

a=0, chọn $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Vi dụ. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác

(a) $z = -1 + \sqrt{3}i$

(b) z= -9

(c) z=12i

Bài giải

(a) r=|z|= $\sqrt{1+3}=2$

$$-\pi < \ \theta \leq \ \pi, \ \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \quad z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

Không được viết: $z = 2(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$: dấu trừ trước côsin!

Cũng như $z = -2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$: r<0!

(b) $\begin{cases} r = \sqrt{81+0} = 9 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow \ z = 9(\cos\pi + i\sin\pi)$

(c) $\begin{cases} r = \sqrt{144+0} = 12 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \ z = 12(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

3.3 Dạng mũ của số phức

- Công thức Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta .$$

- Dùng công thức trên số phức có thể được viết dưới dạng mũ:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

- Làm việc với số phức dạng mũ có nhiều tiện lợi :

$$|z| = |re^{i\theta}| = |r||\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{r^2+0}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = r$$

Với z≠ 0, $z^{-1} = (re^{i\theta})^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} \Rightarrow \ z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

$$z_1z_2 = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \Rightarrow z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)], z_2 \neq 0$$

- Lưu ý

$$acgumen(z_1z_2) = acgumenz_1 + acgumenz_2$$

$$acgumen\frac{z_1}{z_2} = acgumenz_1 - acgumenz_2$$

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2}$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_2 = r_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \end{cases} (k \in Z).$$

4.Lũy thừa và khai căn

4.1 Lũy thừa với số mũ n nguyên dương

- Cho z là số phức có |z|=r, θ là một acgumen của z. Tức là

$$z = re^{i\theta}.$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta}$$

$\Rightarrow [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$:công thức Moa-vrơ(Moivre)

Ví dụ: Tính $(3+3i)^5$

Bài giải

$r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, $\tan\theta = \frac{3}{3}$, chọn $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$(3+3i)^5 = [3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^5 = (3\sqrt{2})^5(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$$

$$= 972\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -972 - 972i$$

4.2 Căn bậc n của số phức

- Khi r=1, ta có $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Trước hết tìm căn bậc n của đơn vị, tức là tìm số phức z sao cho $z^n = 1$.

Giả sử nghiệm $z = re^{i\theta} \Rightarrow (re^{i\theta})^n = 1 \Rightarrow r^n e^{in\theta} = 1e^{i\,0}$

Nên $\begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$. k∈ ℤ

Do đó căn bậc n của đơn vị là n sô phân biệt

$$e^{i\frac{2\pi k}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0,1,2\ldots,n-1 .$$

Ví dụ: Giải phương trình

(a) $z^2 = 1$

(b) $z^3 = 1$

(c) $z^4 = 1$

Bài giải

(a) Căn bậc hai của đơn vị gồm hai số $\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{2}} = e^{i\pi k}, k = 0;1$

$\omega_0 = e^0 = 1$.

$\omega_1 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

(b) Căn bậc ba của đơn vị gồm ba số $\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{3}}, k = 0;1;2$

$\omega_0 = e^0 = 1$

$$\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(c) Căn bậc bốn của đơn vị gồm bốn số $\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{4}} = e^{i\frac{\pi k}{2}}, k = 0;1;2;3$

$$\omega_0 = e^0 = 1$$

$$\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$\omega_2 = (e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\omega_3 = (e^{i\frac{\pi}{2}})^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Lưu ý : tổng các căn bậc n của đơn vị bằng 1. Thật vậy

Các căn bậc n của đơn vị là $\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0;1;2;\ldots;n-1$

$$\Sigma_{k=0}^{k=n-1}\omega_k = 1 + \omega + \ldots + \omega^{n-1}, \quad (\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}})$$

$$= \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0, (\omega^n = e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1)$$

- Xét căn bậc n (n∈ N, n>1)của một số phức w tùy ý . Tức là tìm nghiệm phương trình $z^n = w$. Giả sử

R=|w|, α là một acgumen của w. Tức là $w = \mathrm{R}e^{i\alpha}$

r =|z|, θ là một acgumen của z. Tức là $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$

$$(re^{i\theta})^n = Re^{i\alpha} \Rightarrow r^n e^{ni\theta} = Re^{i\alpha}$$

suy ra $r = \sqrt[n]{R}, \theta = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{n}$, k∈ ℤ .

Vậy căn bậc n của $w = \mathrm{Re}^{i\alpha}$ là n số phân biệt:

$a_k = \sqrt[n]{R}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n})} = \sqrt[n]{R}[\cos(\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{2\pi k}{n}) + i\sin(\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{2\pi k}{n})]$, k=0,1,2… n-1.

Ví dụ: Tìm

(a) Căn bậc hai của 2i

(b) Căn bậc ba của $\sqrt{3} - i$

Bài giải

(a) $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Căn bậc hai của 2i có hai giá trị: $a_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi k)}$, k=0,1

$$a_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 + i$$

$$a_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -1 - i .$$

(b) $\sqrt{3} - i = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$. Có 3 giá trị căn bậc ba là:

$a_k = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3})}$, k=0,1,2

$$a_0 = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{18})} = \sqrt[3]{2}[\cos(-\frac{\pi}{18}) + i\sin(-\frac{\pi}{18})] = 1,24078 + 0,21878i$$

$$a_1 = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{11\pi}{18}} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{18} + i\sin\frac{11\pi}{18}) = -0,43092 + 1,18394i$$

$$a_2 = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi 2}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{23\pi}{18}} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{23\pi}{18} + i\sin\frac{23\pi}{18}) = -0,80986 - 0,96516i$$

- Lưu ý .

Với w≠ 0, các căn bậc n (n≥ 3) của w biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh n giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $\sqrt[n]{R}, R = |w|$.

----------------------------HẾT-----------------------------------

Mời đọc: Bài tập số phức