Cơ sở hình học vi phân, A. Pressley

Phó Đức Tài

Ngày 9 tháng 9 năm 2007

Mục lục

1 Đường cong **1**
1.1 Đường cong là gì? 1
1.2 Độ dài cung 5
1.3 Tham số hóa lại 7
1.4 Quan hệ giữa đường cong định mức và đường cong tham số 11

2 Uốn cong **15**
2.1 Độ cong 15
2.2 Các đường cong phẳng 18
2.3 Đường trong không gian 24

3 Tính chất toàn cục **31**
3.1 Đường cong đóng đơn 31
3.2 Bất đẳng thức đẳng chu 34
3.3 Định lý Bốn đỉnh 36

4 Mặt cong **39**
4.1 Mặt cong là gì? 39
4.2 Mặt trơn 42

5 Độ cong Gauss **45**
5.1 Độ cong Gauss và độ cong trung bình 45
5.2 Mặt giả cầu 48
5.3 Mặt dẹt 51

Lời ngỏ

Hình học vi phân trong tựa đề cuốn sách này đề cập đến việc nghiên cứu hình học của đường cong và mặt cong trong không gian 3 chiều dùng các kỹ thuật tính toán giải tích. Môn học này hàm chứa một số kết quả đẹp đẽ nhất trong Toán học, ngoài ra để có thể hiểu hầu hết các kết quả này chúng ta chỉ cần một số kiến thức nền tảng về giải tích (bao gồm đạo hàm riêng), véctơ và đại số tuyến tính (bao gồm ma trận và định thức).

Rất nhiều kết quả về đường cong và mặt cong mà chúng ta sẽ thảo luận trong cuốn sách này là dạng sơ khai của các kết quả tổng quát trong trường hợp chiều cao, chẳng hạn định lý Gauss-Bonnet, trong chương 11, là dạng sơ khai của một số lớn các kết quả về mối quan hệ của các tính chất 'địa phương' và 'toàn cục' của các đối tượng hình học. Việc nghiên cứu các quan hệ như thế đã tạo ra một mảng chính của Toán học trong thế kỷ XX.

Chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng, các phương pháp sử dụng trong cuốn sách này không nhất thiết có thể mở rộng lên chiều cao. (Chẳng hạn khái niệm 'liên kết' sẽ không được bàn đến trong suốt cuốn sách). Chúng tôi cố gắng dùng những hướng tiếp cận đơn giản nhất để chứng minh các kết quả. Nó không chỉ nhằm hạn chế kiến thức cần phải bổ sung, mà còn giúp chúng ta tránh những khái niệm khó thường gặp trong khi nghiên cứu Hình học vi phân trong chiều cao. Chúng tôi hy vọng cách tiếp cận này sẽ làm cho môn học đẹp đẽ có thể đến được với nhiều độc giả hơn.

Một sự thật là không thể học toán bằng cách chỉ đọc lý thuyết mà còn phải thực hành. Có khoảng 200 bài tập trong sách, độc giả nên cố gắng giải càng nhiều càng tốt.

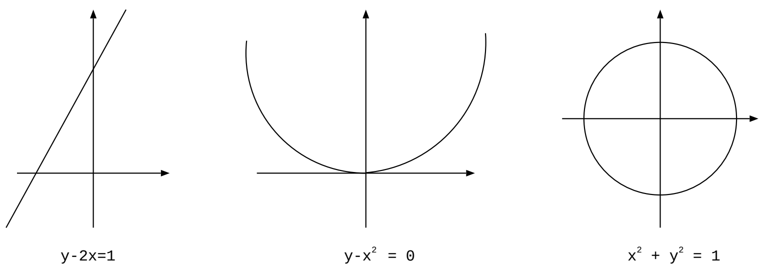
Chương 1

Đường cong trong mặt phẳng và trong không gian

Trong chương này chúng ta sẽ thảo luận hai định nghĩa về khái niệm (trực giác) của một đường cong. Quan hệ giữa chúng khó nhận ra, vì vậy chúng ta sẽ bắt đầu bằng một vài ví dụ của đường cong với mỗi định nghĩa, và từ thực hành ta sẽ có mối liên kết giữa chúng.

1.1 Đường cong là gì?

Nếu có ai hỏi cho ví dụ một đường cong, bạn có thể cho ngay một đường thẳng, chẳng hạn $y - 2x = 1$ (mặc dù nó không cong), hoặc một đường tròn, chẳng hạn $x^2 + y^2 = 1$, hoặc có lẽ một parabôn, chẳng hạn $y - x^2 = 0$.



Tất cả các đường cong này được mô tả thông qua phương trình của chúng trong hệ tọa độ Descartes

$$f(x, y) = c,$$

trong đó f là hàm có biến x, y và c là hằng số. Theo quan điểm đó, một đường cong là một tập hợp các điểm, đó là

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\}. \tag{1.1}$$

Những ví dụ trên đều là các đường cong trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, nhưng chúng ta cũng có thể xét các đường cong trong $\mathbb{R}^3$ - ví dụ, trục x trong hệ tọa độ 3 chiều là một đường thẳng được cho bởi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\},$$

và tổng quát hơn, một đường cong trong $\mathbb{R}^3$ có thể định nghĩa bằng một cặp phương trình

$$f_1(x, y, z) = c_1, f_2(x, y, z) = c_2.$$

Đường cong có dạng như thế được gọi là *đường định mức* (level curve), theo nghĩa, chẳng hạn đường cong cho bởi Pt. (1.1), gồm các điểm (x, y) trong mặt phẳng có đại lượng $f(x, y)$ đạt mức c.

Có một cách khác để mô tả một đường cong mà hóa ra rất tiện ích trong nhiều trường hợp. Đó là quỹ tích của một điểm chuyển động. Do đó, nếu $\gamma(t)$ là vị trí vectơ của điểm tại thời điểm t thì đường cong được mô tả bởi hàm γ của biến số t nhận giá trị véctơ (trong $\mathbb{R}^2$ cho đường cong phẳng, $\mathbb{R}^3$ cho đường cong trong không gian). Chúng ta sử dụng ý tưởng này để đưa ra định nghĩa hình thức đầu tiên cho một đường cong trong $\mathbb{R}^n$ (chúng ta sẽ chỉ quan tâm trong hai trường hợp $n = 2$ hoặc 3, nhưng để thuận tiện xét chúng đồng thời):

Định nghĩa 1.1. Một *đường cong được tham số* (hoặc còn gọi là *cung được tham số*) trong $\mathbb{R}^n$ là một ánh xạ $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, với α, β thỏa mãn $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.

Kí hiệu (α, β) là khoảng mở

$$(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbb{R} | \alpha < t < \beta\}.$$

Một đường cong tham số có ảnh chứa trong một đường cong định mức được gọi là một tham số hóa (thành phần) của $\mathcal{C}$. Các ví dụ dưới đây sẽ minh họa một cách thực hành làm thế nào từ đường cong định mức để có đường cong tham số và ngược lại.

Ví dụ 1.1. Tìm một tham số hóa $\gamma(t)$ cho parabôn $y = x^2$. Nếu $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, các thành phần γ_1 và γ_2 của γ phải thỏa mãn

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \tag{1.2}$$

với mọi t trong khoảng (α, β) mà γ được định nghĩa (chưa được xác định), như vậy mỗi điểm nằm trên parabôn phải có tọa độ $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ với $t \in (\alpha, \beta)$. Rõ ràng, có thể nhận ra ngay một nghiệm của Pt. (1.2) là $\gamma_1(t) = t, \gamma_2(t) = t^2$. Để xác định tất cả các điểm trên parabôn, chúng ta cho t nhận mọi giá trị số thực (vì $\gamma(t)$ có tọa độ đầu chính bằng t, mà tọa độ đầu của một điểm trên parabôn có thể là một số thực bất kỳ), bởi vậy chúng ta lấy $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Do đó, ta có tham số hóa:

$$\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t^2).$$

Nhưng đây không phải là tham số hóa duy nhất của parabôn đã cho. Chẳng hạn một tham số hóa khác, chẳng hạn $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ (với $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$). Hoặc một dạng khác là $(2t, 4t^2)$, và dĩ nhiên có (vô số) các dạng khác nữa. Như vậy, tham số hóa của một đường cong định mức cho trước là không duy nhất.

Ví dụ 1.2. Xét đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Nếu làm tương tự như ví dụ trên, lấy $x = t$ khi đó $y = \sqrt{1 - t^2}$ (chúng ta cũng có thể chọn $y = -\sqrt{1 - t^2}$). Như vậy chúng ta có tham số hóa

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Nhưng đây chỉ là tham số hóa của nửa trên của đường tròn, vì $\sqrt{1 - t^2}$ luôn luôn ≥ 0. Tương tự, nếu chúng ta chọn $y = -\sqrt{1 - t^2}$ thì chỉ phủ được nửa dưới của đường tròn.

Nếu muốn có một tham số hóa của toàn bộ đường tròn thì phải tìm cách khác. Chúng ta cần tìm các hàm số $\gamma_1(t)$ và $\gamma_2(t)$ sao cho chúng thỏa mãn

$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \tag{1.3}$$

với mọi $t \in (\alpha, \beta)$. Có một nghiệm hiển nhiên của Pt. (1.3) là: $\gamma_1(t) = \cos t$ và $\gamma_2(t) = \sin t$ (vì $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ với mọi t). Chúng ta có thể chọn $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$, nhưng như thế là hơi thừa. Chỉ cần lấy khoảng mở (α, β) có khoảng cách lớn hơn 2π bất kỳ là đủ.

Ví dụ sau đây chỉ cách làm thế nào để từ một đường cong tham số hóa ta tìm ra đường cong định mức.

Ví dụ 1.3. Xét đường cong được tham số hóa như sau, được gọi là *astroid* (đường hình sao):

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Do $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ với mọi t, nên các tọa độ $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ của điểm $\gamma(t)$ thỏa mãn

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Đường cong định mức này trùng với ảnh của ánh xạ γ.

Trong cuốn sách này chúng ta sẽ nghiên cứu các đường cong (và sau đó, các mặt cong) sử dụng các tính toán giải tích. Để lấy đạo hàm một hàm giá trị véctơ như $\gamma(t)$ (như trong Định nghĩa 1.1), chúng ta lấy đạo hàm từng phần: nếu

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$$

thì

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, ..., \frac{d\gamma_n}{dt}\right), \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}, ..., \frac{d^2\gamma_n}{dt^2}\right), \quad \text{v.v...} \end{aligned}$$

Để tiết kiệm, chúng ta sẽ dùng kí hiệu $\dot{\gamma}(t)$ thay cho $d\gamma/dt$, $\ddot{\gamma}(t)$ thay cho $d^2\gamma/dt^2$, v.v...

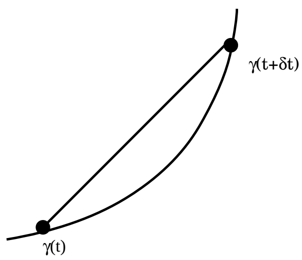
Chúng ta nói rằng γ là *trơn* nếu mỗi thành phần $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ của γ là trơn, tức là tất cả các đạo hàm $d\gamma_i/dt$, $d^2\gamma_i/dt^2$,$d^3\gamma_i/dt^3$,... tồn tại, với mọi $i = 1, 2, ..., n$. *Kể từ đây về sau, tất cả các đường cong tham số hóa được nói đến trong quyển sách này được giả thiết là trơn.*

Định nghĩa 1.2. Giả sử $\gamma(t)$ là một đường cong tham số hóa. Khi đó, đạo hàm cấp 1 của nó $d\gamma/dt$ được gọi là *véctơ tiếp xúc* của γ tại điểm $\gamma(t)$.

Để tìm hiểu ý nghĩa cho thuật ngữ này, xét vectơ

$$\frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$$

song song với cung nối giữa 2 điểm $\gamma(t)$ và $\gamma(t + \delta t)$ của ảnh $\mathcal{C}$ của γ:



Chúng ta mong chờ, khi δt tiến tới 0, dây cung sẽ song song với tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại $\gamma(t)$. Do đó, tiếp tuyến phải song song với

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t} = \frac{d\gamma}{dt}.$$

Bằng trực giác dễ thấy kết quả sau đây:

Mệnh đề 1.1. *Nếu vectơ tiếp xúc của một đường cong tham số là vectơ hằng, thì ảnh của đường cong là (một phần) đường thẳng.*

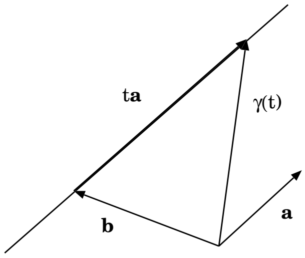
Chứng minh. Giả sử $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{a}$ với mọi t, trong đó $\mathbf{a}$ là vectơ hằng. Lấy tích phân hai vế, ta có

$$\gamma(t) = \int \frac{d\gamma}{dt} dt = \int \mathbf{a} dt = t\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

với $\mathbf{b}$ là vectơ hằng khác. Nếu $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, thì đây là phương trình tham số của đường thẳng song song với $\mathbf{a}$ đi qua điểm đích của vectơ $\mathbf{b}$:

Nếu $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ thì ảnh của γ là một điểm đơn, trùng với điểm đích của vectơ $\mathbf{b}$. □

BÀI TẬP



1.1. Hãy kiểm tra xem $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ có phải là một tham số hóa của parabôn $y = x^2$ hay không?

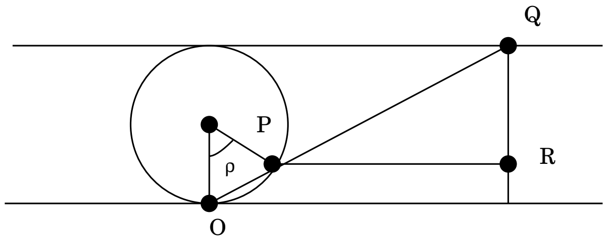
1.2. Tìm tham số hóa của các đường cong định mức sau:
(i) $y^2 - x^2 = 1$;
(ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1.3. Tìm phương trình trong hệ tọa độ Descartes của đường cong tham số:
(i) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$;
(ii) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$.

1.4. Tính véctơ tiếp xúc của các đường cong ở Bài tập 1.3.

1.5. Phác họa đường hình sao trong Ví dụ 1.3. Tính vectơ tiếp xúc của nó tại mỗi điểm. Tại những điểm nào thì có vectơ tiếp xúc bằng vectơ không?

1.6. Giả sử P là một điểm bất kỳ nằm trên đường tròn $\mathcal{C}$ có bán kính $a > 0$ và có tâm tại điểm $(0, a)$ trong hệ tọa độ Oxy. Đường thẳng qua P và gốc tọa độ cắt đường thẳng $y = 2a$ tại Q, đường thẳng qua P song song với trục x cắt đường thẳng qua Q song song với trục y tại R. Khi P chạy quanh $\mathcal{C}$ thì quỹ tích của R là một đường cong, được gọi là *ma thuật của Agnesi* (witch of Agnesi) [1] Đối với đường cong này:
(i) Tìm một tham số hóa;
(ii) Tìm phương trình trong hệ tọa độ Descartes.



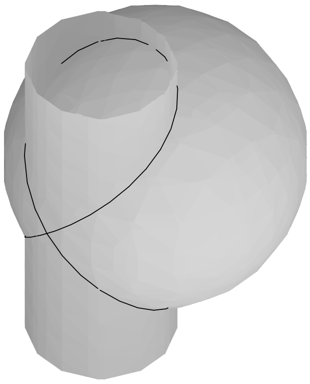
1.7. Quỹ tích của một điểm cố định trên đường tròn khi đường tròn đó lăn (không trượt) dọc theo một đường thẳng được gọi là đường cong *xycloit* (cycloid). Chứng minh rằng nếu đường thẳng là trục x và đường tròn có bán kính $a > 0$ thì xycloit có thể tham số hóa bởi

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t).$$

1.8. Tổng quát hóa bài tập trên, hãy tìm tham số hóa của một *êpixycloit* (tương ứng, hypôxycloit), quỹ tích của một điểm cố định trên đường tròn khi đường tròn đó lăn (không trượt) phía ngoài (tương ứng, bên trong) tựa theo một đường tròn.

[1] Nd: Đường cong "witch of Agnesi" được Maria Agnesi trình bày trong sách Toán bằng tiếng Ý của bà vào 1748 (được xem là tác phẩm Toán học đầu tiên do một phụ nữ viết).

1.9. Chứng minh rằng $\gamma(t) = (\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t)$ là một tham số hóa của đường cong giao của mặt trụ có bán kính $\frac{1}{2}$ xoay quanh trục z và mặt cầu bán kính 1 có tâm $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$. (Đường cong này có tên gọi là *đường cong Viviani*).



1.10. Chứng minh rằng góc giữa $\gamma(t)$ và vectơ tiếp xúc tại $\gamma(t)$ không phụ thuộc t. Ở đây, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ là đường xoắn ốc lôgarit (xem hình vẽ của nó ở Ví dụ 1.4).

1.2 Độ dài cung

Giả sử $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ là vectơ trong $\mathbb{R}^n$ với *độ dài* bằng

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Nếu $\mathbf{u}$ là một vectơ khác trong $\mathbb{R}^n$ thì $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ là độ dài của đoạn thẳng nối 2 điểm biểu diễn của $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ trong $\mathbb{R}^n$.

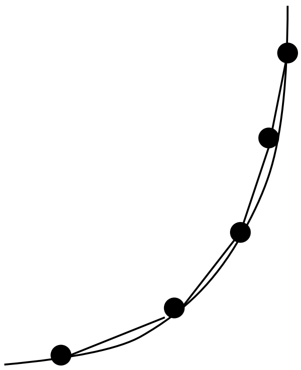
Để tìm một công thức cho độ dài cho độ dài của một đường cong tham số γ, ta chú ý rằng, nếu δt rất bé, phần ảnh $\mathcal{C}$ của γ giữa $\gamma(t)$ và $\gamma(t + \delta t)$ gần như là một đoạn thẳng, do đó độ dài của nó xấp xỉ bằng

$$\|\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)\|.$$

Hơn nữa, do δt nhỏ, $(\gamma(t + \delta t) - \gamma(t))/\delta t$ xấp xỉ bằng $\dot{\gamma}(t)$, vậy độ dài xấp xỉ

$$\|\dot{\gamma}(t)\|\delta t. \tag{1.4}$$

Nếu chúng ta muốn tính độ dài của một phần (không nhất thiết nhỏ) của $\mathcal{C}$ chúng ta có thể chia nó thành nhiều đoạn, mỗi một đoạn tương ứng với một gia số nhỏ δt của t, rồi tính độ dài của mỗi đoạn sử dụng 1.4, và cộng các kết quả lại. Lấy δt tiến tới 0 ta sẽ có chính xác độ dài.



Điều này gợi mở đến định nghĩa sau đây:

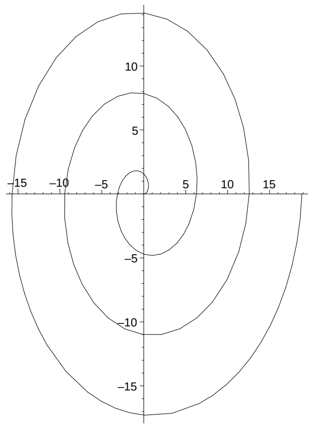
Định nghĩa 1.3. *Độ dài cung* của một đường cong γ xuất phát từ điểm $\gamma(t_0)$ là hàm số $s(t)$ được cho bởi

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(u)\|\, du.$$

Vậy $s(t_0) = 0$ và $s(t)$ là dương hoặc âm phụ thuộc vào t lớn hơn hay bé hơn t_0. Nếu ta chọn điểm khởi đầu là $\gamma(\tilde{t}_0)$ khác, thì độ dài cung $\tilde{s}$ khác s một hằng số bằng $\int_{t_0}^{\tilde{t}_0}$.

Ví dụ 1.4. Xét *đường xoắn ốc lôgarit* (logarithmic spiral)

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t),$$



ta có

$$\begin{array}{rcl} \dot{\gamma} & = & (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)), \\ \therefore \|\dot{\gamma}\|^2 & = & (e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 = 2e^{2t}. \end{array}$$

Do đó, độ dài cung của γ xuất phát, chẳng hạn từ điểm $\gamma(0) = (1,0)$ là

$$s = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}}du = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Nếu s là độ dài cung của đường cong γ xuất phát từ $\gamma(t_0)$, khi đó

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(u)\|du = \|\dot{\gamma}(t)\|. \tag{1.5}$$

Xem $\gamma(t)$ như là vị trí của một điểm chuyển động tại thời điểm t, thì ds/dt là vận tốc của điểm đó (là tỉ lệ của sự thay đổi khoảng cách trên đường cong). Với lí do này, chúng ta đi đến định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.4. Giả sử $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ là một đường cong tham số, khi đó *vận tốc* của nó tại điểm $\gamma(t)$ là $\|\dot{\gamma}(t)\|$, và γ được gọi là *đường cong có vận tốc đơn vị* nếu $\dot{\gamma}(t)$ là vectơ đơn vị với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

Chúng ta sẽ thấy trong nhiều ví dụ, các công thức và kết quả đối với các đường cong sẽ đơn giản đi nhiều nếu đường cong có vận tốc đơn vị. Lí do của sự đơn giản hóa được mô tả trong mệnh đề dưới đây. Mặc dù vấn đề này đầu tiên có vẻ không thú vị, nhưng thực sự nó rất hữu ích về sau.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử* $\mathbf{n}(t)$ *là vectơ đơn vị, là một hàm trơn của biến* t*. Khi đó, có tích*

$$\dot{\mathbf{n}}(t).\mathbf{n}(t) = 0$$

với mọi t*, tức là* $\dot{\mathbf{n}}(t)$ *bằng 0 hoặc vuông góc với* $\mathbf{n}(t)$ *với mọi* t*.*

Đặc biệt, nếu γ *là đường cong có vận tốc đơn vị, thì* $\ddot{\gamma}$ *bằng không hoặc vuông góc với* $\dot{\gamma}$*.*

Chứng minh. Sử dụng 'công thức tích' đối với đạo hàm của tích của các hàm có giá trị vectơ $\mathbf{a}(t)$ và $\mathbf{b}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}.\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Lấy đạo hàm theo t hai vế của phương trình $\mathbf{n}.\mathbf{n} = 1$, theo công thức trên thu được

$$\dot{\mathbf{n}}.\mathbf{n} + \mathbf{n}.\dot{\mathbf{n}} = 0,$$

do đó $2\dot{\mathbf{n}}.\mathbf{n} = 0$.

Phần còn lại được suy ra bằng cách lấy $\mathbf{n} = \dot{\gamma}$. □

BÀI TẬP

1.11. Tính độ dài cung của *dây xích* (catenary) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ từ điểm $(0, 1)$.

1.12. Chứng minh rằng các đường cong dưới đây có vận tốc đơn vị:

(i) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$;

(ii) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$.

1.13. Tính độ dài cung của xycloid trong Bài tập 1.7 khi quay hết một vòng tròn.

1.3 Tham số hóa lại

Ở trong các Ví dụ 1.1 và 1.2, chúng ta đã thấy một đường cong có thể có nhiều tham số hóa. Mối quan hệ giữa các tham số hóa là điều quan trọng cần bàn đến.

Định nghĩa 1.5. Đường cong tham số $\tilde{\gamma} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to \mathbb{R}^n$ là một *tham số hóa lại* của đường cong tham số $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ nếu có một song ánh trơn $\phi : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to (\alpha, \beta)$ (được gọi là *ánh xạ tham số hóa lại*) sao cho ánh xạ $\phi^{-1} : (\alpha, \beta) \to (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ cũng là ánh xạ trơn và

$$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\phi(\tilde{t})) \text{ với mọi } \tilde{t} \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

Do ánh xạ ngược của ϕ là ánh xạ trơn, nên γ là một tham số hóa lại của $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma}(\phi^{-1}(t)) = \gamma(\phi(\phi^{-1}(t))) = \gamma(t) \text{ với mọi } t \in (\alpha, \beta).$$

Hai đường cong là tham số hóa lại với nhau thì có cùng ảnh, vì vậy chúng có các tính chất hình học giống nhau.

Ví dụ 1.5. Trong Ví dụ 1.2, ta có tham số hóa $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ cho đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, và một tham số hóa khác

$$\tilde{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t)$$

(vì $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Để chứng tỏ $\tilde{\gamma}$ là tham số hóa lại của γ, ta cần tìm ánh xạ tham số hóa lại ϕ sao cho

$$(\cos\phi(t), \sin\phi(t)) = (\sin t, \cos t)$$

Tồn tại ϕ như vậy, chẳng hạn $\phi(t) = \pi/2 - t$.

Như ở nhận xét trong phần trước, việc khảo sát đường cong sẽ đơn giản hơn nếu nó có vận tốc đơn vị. Vì vậy cần biết đường cong nào có tham số hóa lại là đường cong có vận tốc đơn vị.

Định nghĩa 1.6. Điểm $\gamma(t)$ của đường cong tham số γ được gọi là *điểm chính qui* nếu $\dot{\gamma}(t) \neq 0$; ngược lại nó được gọi là *điểm kì dị*. Một đường cong được gọi là *chính qui* nếu mọi điểm của nó đều chính qui.

Trước khi chỉ ra mối quan hệ giữa tính chính qui và biểu diễn tham số hóa lại có vận tốc đơn vị, ta nêu ra dưới đây hai tính chất đơn giản của đường cong chính qui. Mặc dù trông các kết quả này chẳng có gì lôi cuốn, nhưng chúng rất quan trọng trong ứng dụng về sau.

Mệnh đề 1.3. *Mọi tham số hóa lại của một đường cong chính qui đều chính qui.*

Chứng minh. Giả sử γ và $\tilde{\gamma}$ có quan hệ như trong Định nghĩa 1.5, đặt $t = \phi(\tilde{t})$ và $\psi = \phi^{-1}$ sao cho $\tilde{t} = \psi(t)$. Lấy đạo hàm theo biến t hai vế của phương trình $\phi(\psi(t)) = t$, theo luật hợp thành ta có

$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}}\frac{d\psi}{dt} = 1.$$

Điều đó chứng tỏ $d\phi(t)/d\tilde{t}$ không thể bằng 0. Do $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\phi(\tilde{t}))$, tương tự áp dụng luật hợp thành ta có

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\phi}{d\tilde{t}},$$

từ đó suy ra $d\tilde{\gamma}/d\tilde{t}$ khác 0 với mọi $\tilde{t}$ nếu $d\gamma/dt$ khác 0 vói mọi t. □

Mệnh đề 1.4. *Nếu $\gamma(t)$ là đường cong chính qui thì độ dài cung, s (như trong Định nghĩa 1.3), xuất phát từ một điểm bất kỳ của γ, là một hàm trơn theo t.*

Chứng minh. Như chúng ta đã biết (không cần phải giả thiết γ chính qui) s là hàm khả vi theo t và

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Để đơn giản hóa kí hiệu, từ đây giả sử γ là đường cong phẳng, chẳng hạn

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)),$$

với u và v là các hàm trơn biến t. Định nghĩa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ như sau

$$f(u,v) = \sqrt{u^2+v^2},$$

sao cho

$$\frac{ds}{dt} = f(\dot{u}, \dot{v}). \tag{1.6}$$

Điểm mấu chốt là có f *trơn* trong $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tức là tất cả các đạo hàm riêng của f ở mọi bậc đều tồn tại và là các hàm liên tục ngoại trừ tại gốc tọa độ $(0,0)$. Chẳng hạn,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

là định nghĩa tốt và liên tục ngoại trừ khi $u = v = 0$, tương tự cho các đạo hàm bậc cao hơn. Vì γ chính qui, nên $\dot{u}$ và $\dot{v}$ không đồng thời bằng 0 và từ Pt. (1.6) suy ra ds/dt là hàm trơn. Chẳng hạn,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial u}\ddot{u} + \frac{\partial f}{\partial v}\ddot{v},$$

và tương tự với các đạo hàm bậc cao hơn. □

Kết quả chính là mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.5. *Một đường cong tham số hóa có một tham số hóa lại có vận tốc đơn vị khi và chỉ khi nó là đường chính qui.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử đường cong tham số $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ có một tham số hóa lại $\tilde{\gamma}$ có vận tốc đơn vị, gọi ϕ là ánh xạ tham số hóa lại. Với $t = \phi(\tilde{t})$, ta có

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\tilde{t}) &= \gamma(t), \\ \therefore \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} &= \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}, \\ \therefore \quad \|\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}}\| &= \|\frac{d\gamma}{dt}\|\,|\frac{dt}{d\tilde{t}}|. \end{aligned}$$

Do $\tilde{\gamma}$ có vận tốc đơn vị, suy ra $\|d\tilde{\gamma}/d\tilde{t}\| = 1$, vì vậy rõ ràng $d\gamma/dt$ khác không.

Điều kiện đủ. Giả sử vectơ tiếp xúc $d\gamma/dt$ luôn luôn khác không.Từ Pt. (1.5), ta có $ds/dt > 0$ với mọi t, trong đó s là độ dài cung của γ xuất phát từ điểm bất kỳ trên đường cong, từ Mệnh đề 1.4 suy ra s là hàm trơn theo t. Áp dụng định lý hàm ngược, ta có $s : (\alpha, \beta) \to R$ là một đơn ánh, ảnh của nó là một khoảng mở $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, và ánh xạ ngược $s^{-1} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to (\alpha, \beta)$ là trơn. (Bạn đọc nào không quen thuộc với định lý hàm ngược tạm thời chấp nhận khẳng định này; định lý này sẽ được nêu trong mục 1.4 và cụ thể hơn trong Chương 4.) Lấy $\phi = s^{-1}$ và $\tilde{\gamma}$ tương ứng là tham số hóa lại của γ sao cho

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}\frac{ds}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt}, \\ \therefore \quad \|\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{s}}\|\frac{ds}{dt} &= \|\frac{d\gamma}{d\tilde{t}}\| = \frac{ds}{dt} \quad \text{(do Pt. (1.5))}, \\ \therefore \quad \|\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{s}}\| &= 1. \end{aligned}$$

□

Chứng minh của Mệnh đề 1.5 chứng tỏ rằng độ dài cung thực chất là biến của tham số hóa lại có vận tốc đơn vị của đường cong chính qui:

Hệ quả 1.1. *Giả sử γ là một đường cong chính qui và $\tilde{\gamma}$ là một tham số hóa lại của γ có vận tốc đơn vị:*

$$\tilde{\gamma}(u(t)) = \gamma(t) \quad \text{với mọi } t,$$

trong đó u là một hàm trơn theo t. Khi đó, nếu s là độ dài cung của γ (xuất phát từ điểm bất kỳ) thì

$$u = \pm s + c, \tag{1.7}$$

với c là một hằng số. Ngược lại, nếu u có giá trị như ở Pt. (2.7) với hằng số c nào đó và một trong hai dấu, thì $\tilde{\gamma}$ là một tham số hóa lại của γ.

Chứng minh. Tính toán như trong phần đầu của chứng minh Mệnh đề 1.5 chứng tỏ rằng u có một tham số hóa lại có vận tốc đơn vị khi và chỉ khi

$$\frac{du}{dt} = \pm\|\frac{d\gamma}{dt}\| = \pm\frac{ds}{dt} \quad \text{do Pt. (1.5).}$$

Vậy $u = \pm s + c$ với hằng số c nào đó. □

Mặc dù mọi đường cong chính qui đều có một tham số hóa lại có vận tốc đơn vị, nhưng có thể rất phức tạp, hoặc thậm chí không thể viết ra chính xác, như các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1.6. Với đường xoắn ốc lôgarit

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t),$$

trong Ví dụ 1.4 ta đã biết

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = 2e^{2t}.$$

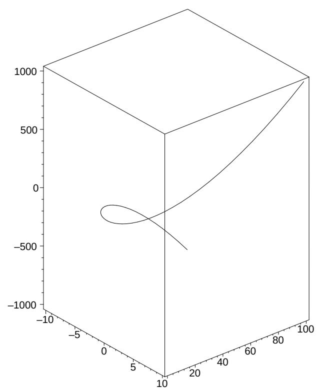
Vế phải luôn luôn khác không, do đó γ là chính qui. Độ dài cung γ xuất phát từ điểm $(1,0)$ như đã biết $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$. Do đó, $t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$, vì vậy có một tham số hóa lại có vận tốc đơn vị của γ có công thức khá dài dưới đây

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)\right).$$

Ví dụ 1.7. *Đường cong xoắn bậc ba* (twisted cubic) là đường cong không gian cho bởi

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \quad -\infty < t < \infty.$$

Ta có



$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (1, 2t, 3t^2), \\ \therefore \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}. \end{aligned}$$

Vế phải của đẳng thức sau cùng luôn luôn khác không, vì vậy γ là chính qui. Độ dài cung xuất phát từ điểm $\gamma(0) = \mathbf{0}$ bằng

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}du.$$

Không thể biểu diễn tích phân này qua các hàm quen thuộc như lôgarit, hàm e mũ, hàm lượng giác. v.v... (ví dụ này thường được gọi là *tích phân elliptic*.)

Ví dụ sau cùng dưới đây sẽ chứng tỏ một đường cong có thể có cả hai dạng tham số hóa lại: chính qui và không chính qui.

Ví dụ 1.8. Xét tham số hóa

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$

của parabôn $y = x^2$, có $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$ luôn luôn khác không, do đó γ là chính qui.

Nhưng

$$\tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$$

cũng là một tham số hóa của parabôn ở trên. Vì $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = (3t^2, 6t^5)$, và nó bằng không khi $t = 0$, do đó $\tilde{\gamma}$ không chính qui.

BÀI TẬP

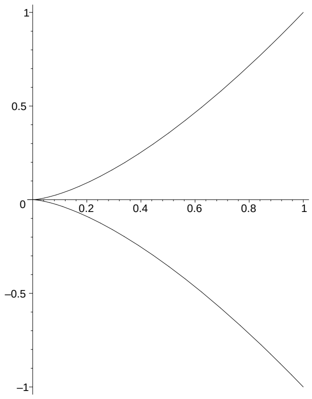
1.14. Trong những đường cong dưới đây trường hợp nào là chính qui:

(i) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ với $-\infty < t < \infty$;

(ii) với đường cong như trong (i), nhưng $0 < t < \pi/2$;

(iii) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ với $-\infty < t < \infty$.

Tìm tham số hóa lại có vận tốc đơn vị của (các) đường chính qui.



1.15. *Đường xixôit của Diocles* (cissoid of Diocles) như ở hình vẽ trên, trong hệ tọa độ cực (r, θ) có phương trình

$$r = \sin\theta \tan\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Hãy tìm một tham số hóa của xixôit với biến θ, và chứng minh rằng

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\right), \quad -1 < t < 1,$$

là một tham số hóa lại của nó.

1.16. Giả sử γ là đường cong trong $\mathbb{R}^n$ và $\tilde{\gamma}$ là tham số hóa lại của γ với ϕ là ánh xạ tham số hóa lại (sao cho $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\phi(\tilde{t}))$). Xét $\tilde{t}_0$ là một giá trị cố định của $\tilde{t}$, đặt $t_0 = \phi(\tilde{t}_0)$. Giả sử s và $\tilde{s}$ là độ dài cung của γ và $\tilde{\gamma}$ xuất phát từ điểm $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(\tilde{t}_0)$. Chứng minh rằng $\tilde{s} = s$ nếu $d\phi/d\tilde{t} > 0$ với mọi $\tilde{t}$, và $\tilde{s} = -s$ nếu $d\phi/d\tilde{t} < 0$ với mọi $\tilde{t}$.

1.4 Quan hệ giữa đường cong định mức và đường cong tham số

Bây giờ chúng ta sẽ cố gắng làm sáng tỏ chi tiết mối quan hệ giữa hai dạng mô tả của đường cong mà đã đề cập trong phần trước.

Đường cong định mức nói chung như chúng ta đã định nghĩa không phải luôn luôn là đối tượng mà ta muốn gọi là đường cong. Lấy ví dụ, 'đường cong' định mức $x^2 + y^2 = 0$ chỉ là một điểm. Trong định lý dưới đây, những điều kiện cần cho một hàm số $f(x,y)$ để đường cong định mức $f(x,y) = c$ (với c là hằng số) có thể tham số hóa được, sẽ được trình bày. Chú ý rằng chúng ta có thể coi $c = 0$ (vì có thể thay f bởi $f - c$).

Định lý 1.1. *Giả sử $f(x,y)$ là một hàm trơn hai biến (tức là, mọi đạo hàm riêng của f, tại mọi cấp, đều tồn tại và là các hàm liên tục). Giả sử thêm rằng tại mọi điểm của đường cong định mức*

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\},$$

$\partial f/\partial x$ và $\partial f/\partial y$ không đồng thời bằng không. Nếu P là một điểm của $\mathcal{C}$, với tọa độ (x_0, y_0), thì tồn tại một đường cong tham số hóa chính qui $\gamma(t)$, xác định trên một khoảng mở chứa 0, sao cho γ đi qua P khi $t = 0$ và $\gamma(t)$ chứa trong $\mathcal{C}$ với mọi t.

Chứng minh định lý này ta dùng định lý hàm ngược (trong chứng minh Mệnh đề 1.5 một dạng của định lý hàm ngược đã được sử dụng). Tại thời điểm này chúng tôi chỉ cố gắng thuyết phục bạn đọc chấp nhận nó. Chứng minh sẽ được nêu trong bài tập phần sau (Bài tập 4.31), sau khi định lý hàm ngược được giới thiệu một cách chính thức và sử dụng trong những bàn luận về mặt cong.

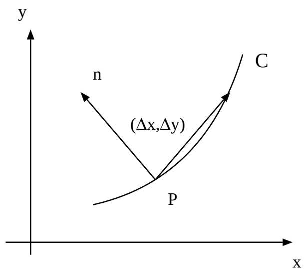
Để hiểu về các điều kiện của f trong Định lý 1.1, giả sử $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ điểm trên $\mathcal{C}$ nằm gần P, sao cho $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$. Từ định lý Taylor với hàm hai biến,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y},$$

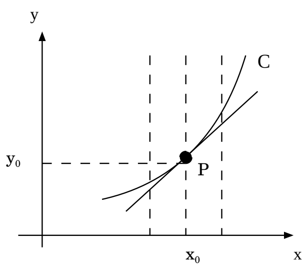
lờ đi các tích của các đại lượng bé Δx và Δy (các đạo hàm riêng lấy giá trị tại (x_0, y_0)) Do đó,

$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1.8}$$

Vì Δx và Δy bé, vectơ $(\Delta x, \Delta y)$ gần với vectơ tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại P, Pt. (2.8) suy ra vectơ $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ là véctơ pháp tuyến của $\mathcal{C}$ tại P. Giả thiết trong Định lý 1.1 nói rằng vectơ $\mathbf{n}$ khác không tại mọi điểm của $\mathcal{C}$.



Giả sử, chẳng hạn $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ tại P. Như thế $\mathbf{n}$ không song song với trục x tại P, vì vậy tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại P không song song với trục y. Điều này suy ra những đường thẳng đứng $x =$ constant gần $x = x_0$ đều giao



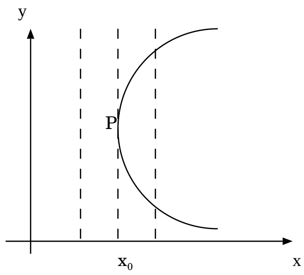
$\mathcal{C}$ tại duy nhất một điểm (x, y) gần P. Nói cách khác, *phương trình*

$$f(x, y) = 0 \tag{1.9}$$

có duy nhất nghiệm y gần y_0 với mọi x gần x_0. Chú ý rằng điều này không còn đúng trong trường hợp tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại P song song với trục y: Trong ví dụ này, những đường thẳng $x =$ constant bên trái $x = x_0$ không cắt $\mathcal{C}$ trong lân cận điểm P, trong khi ở bên phải $x = x_0$ chúng cắt $\mathcal{C}$ nhiều hơn một điểm.

Khẳng định in chữ nghiêng ở trên có nghĩa là có một hàm số $g(x)$, định nghĩa với x trong lân cận x_0, sao cho $y = g(x)$ là nghiệm duy nhất của Pt. (2.9) trong lân cận y_0. Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa tham số hóa γ thành phần của $\mathcal{C}$ trong lân cận của P bởi

$$\gamma(t) = (t, g(t)).$$

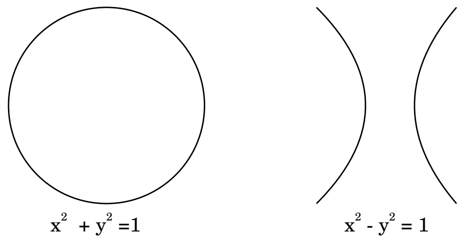


Nếu chúng ta chấp nhận g là hàm trơn (điều này có được từ định lý hàm ngược), thì γ hẳn là đường chính qui, do

$$\dot{\gamma} = (1, \dot{g})$$

hiển nhiên luôn luôn khác không. Điều đó chứng minh Định lý 1.1.

Thật ra có thể chứng minh hơn một ít khẳng định đã nêu trong Định lý 1.1. Giả sử $f(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện trong định lý, và giả thiết thêm rằng đường cong định mức $\mathcal{C}$ cho bởi $f(x, y) = 0$ là *liên thông*. Đối với các bạn đọc không quen thuộc với tôpô tập điểm, điều này hiểu nôm na là $\mathcal{C}$ chỉ có 'một phần'. Ví dụ, đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là liên thông, còn hypecbôn $x^2 - y^2 = 1$ thì không: Với những giả thiết này cho f,



thì sẽ có đường cong tham số γ chính qui có ảnh là *toàn bộ* $\mathcal{C}$. Hơn nữa, nếu $\mathcal{C}$ không 'khép kín' (như đường thẳng hay parabôn), có thể xây dựng γ là đơn ánh, ngược lại nếu $\mathcal{C}$ 'khép kín' (như đường tròn hay ellip), thì γ ánh xạ từ khoảng đóng $[\alpha, \beta]$ lên $\mathcal{C}$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ và γ là đơn ánh trên khoảng mở (α, β).

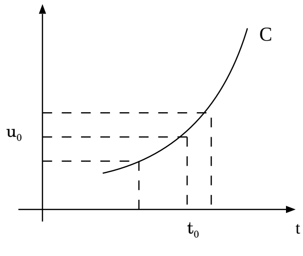
Có thể sử dụng lập luận tương tự để từ đường cong tham số hóa đi đến đường cong định mức:

Định lý 1.2. *Giả sử γ là một đường cong tham số chính qui, và $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ là một điểm trong ảnh của γ. Khi đó, tồn tại một hàm trơn có giá trị thực $f(x, y)$, định nghĩa với x và y nằm trong các khoảng mở chứa x và y tương ứng, và f thỏa mãn các điều kiện trong Định lý* **??**, *sao cho $\gamma(t)$ chứa trong đường cong định mức $f(x, y) = 0$ với mọi giá trị của t nằm trong khoảng mở nào đó chứa t.*

Chứng minh của Định lý 1.2 tương tự như Định lý 1.1. Giả sử

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)),$$

trong đó u và v là các hàm trơn. Do γ chính qui, nên ít nhất một trong $\dot{u}(t_0)$ và $\dot{v}(t_0)$ phải khác không, giả sử là $\dot{u}(t_0)$. Điều này có nghĩa đồ thị của u (hàm số theo biến t) không song song với trục t tại t_0: Như trong



chứng minh của Định lý 1.1, đường thẳng nào song song với trục t, trong lân cận $u = x_0$ cắt đồ thị của u

tại một điểm duy nhất $u(t)$ với t gần t_0. Do đó xây dựng được hàm $h(x)$, định nghĩa với x nằm trong một khoảng mở chứa x_0, sao cho $t = h(x)$ là nghiệm duy nhất của $u(t) = x$ nếu x trong lân cận x_0 và t trong lân cận t_0. Định lý hàm ngược chứng tỏ h trơn. Khi đó, hàm số

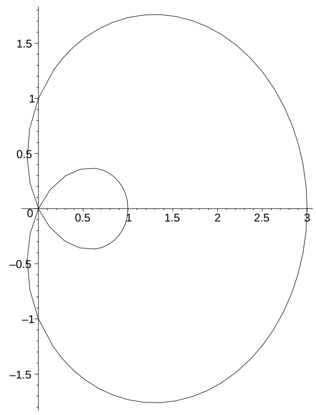
$$f(x,y) = y - v(h(x))$$

có những tính chất mà chúng ta muốn.

Xét trường hợp tổng quát, có thể không tồn tại một hàm f nào thỏa mãn điều kiện trong Định lý 1.1 sao cho ảnh của γ chứa trong đường cong định mức $f(x,y) = 0$, ví dụ như trong trường hợp γ có điểm tự giao như đường cong *limacon*

$$\gamma(t) = ((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t).$$

Từ định lý hàm ẩn suy ra không tồn tại hàm f số nào thỏa mãn các điều kiện trong Định lý 1.1 để biểu



diễn một đường cong trong lân cận điểm tự cắt như trên.

BÀI TẬP

1.17. Tổng quát hóa Định lý 1.1 cho các đường cong định mức trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi $f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0$. (Để phỏng đoán điều kiện tương tự cho f như trong Định lý 1.1, chứng tỏ rằng $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$) là pháp diện của mặt $f(x,y,z) = 0$, và tìm điều kiện cho hai mặt cắt nhau tại một đường thẳng. Xem bài tập 4.16 cho một phát biểu chặt chẽ.

1.18. Tổng quát hóa Định lý 1.2 cho đường cong trong $\mathbb{R}^3$ (và cả $\mathbb{R}^n$).

1.19. Phác họa đường cong đinh mức $\mathcal{C}$ cho bởi $f(x,y) = 0$ với $f(x,y) = y - |x|$. Chú ý rằng f không thỉa mãn các điều kiện trong Định lý 1.1 bởi vì $\partial f/\partial x$ tại điểm $(0,0)$ trên đường cong là không tồn tại. Chứng tỏ dù vậy vẫn có một đường cong tham số trơn γ có ảnh là toàn bộ $\mathcal{C}$. Liệu có đường cong tham số hóa chính qui có tính chất này hay không?

Từ đây cho đến hết cuốn sách, chúng ta đơn giản gọi 'đường cong' chung cho cả hai dạng, định mức và tham số.

Chương 2

Đường cong uốn cong như thế nào?

Trong chương này chúng ta sẽ mô tả đường cong trong $\mathbb{R}^3$ bởi hai hàm vô hướng, đó là độ cong và độ xoắn. Độ cong là tiêu chuẩn để đánh giá đường cong sai khác đường thẳng (đường thẳng có độ đo bằng không), còn độ xoắn là tiêu chuẩn đánh giá đường cong không nằm trong một mặt phẳng (đường cong phẳng có độ xoắn bằng không). Cuối cùng chúng ta sẽ thấy độ cong và độ xoắn quyết định hình dáng của đường cong.

2.1 Độ cong

Chúng ta muốn đo một đường cong 'uốn cong' như thế nào. Do 'độ cong' này chỉ phụ thuộc vào 'hình dáng' của đường cong, nên:

(i) độ cong không đổi khi đường cong có tham số hóa lại.

Hơn nữa, độ cong phải thỏa mãn các trường hợp đơn giản mà ta có được từ trực giác, chẳng hạn:

(ii) độ cong của một đường thẳng bằng không, các đường tròn lớn có độ cong bé hơn các đường tròn bé.

Ghi nhớ (ii), chúng ta sẽ lần ra định nghĩa của độ cong nhờ Mệnh đề 1.1: nếu đường cong phẳng γ có $\ddot{\gamma} = \mathbf{0}$ tại mọi nơi, thì γ là một phần của một đường thẳng, vì vậy nó phải có độ cong bằng không. Vì vậy độ cong của γ được gợi ý sẽ bằng $\|\ddot{\gamma}\|$ (chúng ta lấy chuẩn vì muốn đây là một vô hướng, chứ không phải là một vectơ). Không may, nó phụ thuộc (một cách khá phức tạp) vào tham số hóa của γ. Để tránh chuyện này chúng ta thay bằng tham số hóa lại γ có vận tốc đơn vị, tức là $\|\dot{\gamma}\| = 1$ ở mọi nơi. (Thật ra do Hệ quả 1.1 nên không cần thiết phải lo đến khả năng tồn tại tham số hóa lại.) Vì vậy ta có:

Định nghĩa 2.1. Nếu γ là đường cong vận tốc đơn vị với tham số s, *độ cong* $\kappa(s)$ tại điểm $\gamma(s)$ được định nghĩa là $\|\ddot{\gamma}(s)\|$.

Phần đầu của điều kiện (ii) rõ ràng thỏa mãn. Phần thứ hai, xét đường tròn tâm (x_0, y_0) bán kính R. Nó có một tham số hóa có vận tốc đơn vị

$$\gamma(s) = \big(x_0 + R\cos\frac{s}{R}, y_0 + R\sin\frac{s}{R}\big).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(s) &= \big(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\big),\\
\therefore \|\dot{\gamma}(s)\| &= \sqrt{\big(-\sin\frac{s}{R}\big)^2 + \big(\cos\frac{s}{R}\big)^2} = 1,
\end{aligned}$$

chứng tỏ rằng γ có vận tốc đơn vị, do đó

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma}(s) &= \big(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\big),\\
\therefore \|\ddot{\gamma}(s)\| &= \sqrt{\big(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}\big)^2 + \big(-\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\big)^2} = \frac{1}{R},
\end{aligned}$$

do đó độ cong của đường tròn bằng nghịch đảo của bán kính.

Để kiểm tra điều kiện (i), nhắc lại Hệ quả 1.1, nếu $\gamma(s)$ là đường cong có vận tốc đơn vị, thì các tham số hóa lại có vận tốc đơn vị của γ đều có dạng $\gamma(u)$, với

$$u = \pm s + c,$$

và c là một hằng số. Theo luật hợp thành,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{du}\frac{du}{ds} = \pm\frac{d\gamma}{du},$$

$$\therefore \frac{d^2\gamma}{ds^2} = \frac{d}{du}\Big(\frac{d\gamma}{ds}\Big)\frac{du}{ds} = \pm\frac{d}{du}\Big(\pm\frac{d\gamma}{du}\Big) = \frac{d^2\gamma}{du^2}.$$

Điều đó chứng tỏ rằng độ cong của đường cong với biến s có vận tốc đơn vị cũng giống như với biến u có vận tốc đơn vị.

Vậy làm cách nào để tính độ cong nếu đường cong $\gamma(t)$ không có vận tốc đơn vị? Nếu γ là chính qui (xem Định nghĩa 1.6), thì do Mệnh đề 1.5 nên γ có một tham số hóa lại có vận tốc đơn vị $\tilde{\gamma}$. Chúng ta định nghĩa độ cong của γ là độ cong của đường cong có vận tốc đơn vị $\tilde{\gamma}$. Nhưng không phải luôn luôn có một biểu diễn tham số hóa lại một cách chính xác (xem Ví dụ 1.7), do đó chúng ta thật sự cần một công thức cho độ cong chỉ thông qua γ và t.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $\gamma(t)$ là một đường cong chính qui trong $\mathbb{R}^3$. Khi đó, độ cong của nó bằng*

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \tag{2.1}$$

ở đây $\times$ là kí hiệu tích vectơ, và dấu chấm trên đầu kí hiệu d/dt.

Dĩ nhiên một đường cong trong $\mathbb{R}^2$ có thể xem như là đường cong trong $\mathbb{R}^3$ với tọa độ cuối bằng không, nên có thể sử dụng Pt. (2.1) để tính độ cong của một đường cong phẳng.

Chứng minh. Giả sử $\tilde{\gamma}$ (với biến s) là một tham số hóa lại của γ có vận tốc đơn vị. Kí hiệu dấu phẩy trên đầu cho d/ds. Khi đó, do luật hợp thành

$$\tilde{\gamma}'\frac{ds}{dt} = \dot{\gamma},$$

do đó

$$\kappa = \|\tilde{\gamma}''\| = \Big\|\frac{d}{ds}\Big(\frac{\dot{\gamma}}{ds/dt}\Big)\Big\| = \Big\|\frac{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{\gamma}}{ds/dt}\Big)}{ds/dt}\Big\| = \Big\|\frac{\ddot{\gamma}\frac{ds}{dt} - \dot{\gamma}\frac{d^2s}{dt^2}}{(ds/dt)^3}\Big\|. \tag{2.2}$$

Ta có

$$\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 = \|\dot{\gamma}\|^2 = \dot{\gamma}.\dot{\gamma},$$

và đạo hàm theo t cho

$$\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = \dot{\gamma}.\ddot{\gamma}.$$

Sử dụng điều này và Pt. (2.2), thu được

$$\kappa = \Big\|\frac{\ddot{\gamma}\big(\frac{ds}{dt}\big)^2 - \dot{\gamma}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt}}{(ds/dt)^4}\Big\| = \frac{\|\ddot{\gamma}(\dot{\gamma}.\dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\dot{\gamma}.\ddot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^4}.$$

Sử dụng đồng nhất thức về tích của ba vectơ

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$$

(ở đây $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$), thu được

$$\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}) = \ddot{\gamma}(\dot{\gamma}.\dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\dot{\gamma}.\ddot{\gamma}).$$

Hơn nữa, $\dot{\gamma}$ và $\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}$ là các vectơ trực giao, nên

$$\|\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})\| = \|\dot{\gamma}\|\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{\|\ddot{\gamma}(\dot{\gamma}.\dot{\gamma}) - \dot{\gamma}(\dot{\gamma}.\ddot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^4} &= \frac{\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\|^4} \\ &= \frac{\|\dot{\gamma}\|\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^4} \\ &= \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}. \end{aligned}$$

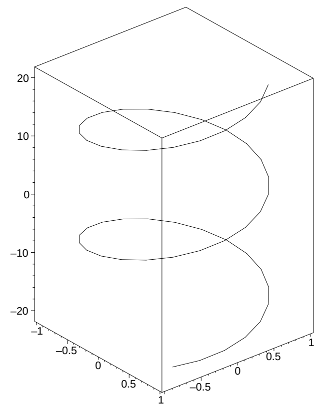
□

Nếu γ là đường cong không chính qui nói chung ta không định nghĩa được độ cong của nó. Dù sao, công thức (2.1) chứng tỏ rằng vẫn xác định được độ cong tại các điểm chính qui.

Ví dụ 2.1. Một *đường xoắn ốc tròn* quay quanh trục z là đường cong có dạng

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta), \qquad -\infty < \theta < \infty,$$

trong đó a và b là các hằng số.



Nếu (x, y, z) là một điểm ở trên (ảnh của) đường xoắn ốc thì

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z = b\theta,$$

với θ nào đó, nên $x^2 + y^2 = a^2$, chứng tỏ rằng đường xoắn ốc nằm trên hình trụ quay quanh trục z với bán kính $|a|$; số dương $|a|$ được gọi là *bán kính* của đường xoắn ốc. Khi θ quay một góc 2π thì điểm $(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$ quay một vòng quanh trục z và nâng theo trục z một khoảng $2\pi b$; số dương $2\pi b$ được gọi là *độ cao* của đường xoắn ốc (chúng ta lấy giá trị tuyệt đối vì không có giả thiết cho a hay b là số dương).

Bây giờ chúng ta sẽ tính độ cong của đường xoắn ốc dựa vào công thức trong Mệnh đề 2.1. Kí hiệu chấm trên đầu là cho $d/d\theta$, ta có

$$\dot{\gamma}(\theta) = (-a\sin\theta, a\cos\theta, b),$$
$$\therefore \|\dot{\gamma}(\theta)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Điều đó chứng tỏ $\dot{\gamma}(\theta)$ luôn luôn khác không, nên γ là chính qui (ngoại trừ trường hợp $a = b = 0$, khi đó ảnh của đường xoắn ốc chỉ là một điểm). Do đó có thể sử dụng công thức trong Mệnh đề 2.1, ta có

$$\ddot{\gamma} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0),$$
$$\therefore \ddot{\gamma} \times \dot{\gamma} = (-ab\sin\theta, ab\cos\theta, -a^2),$$

$$\therefore \kappa = \frac{\|(-ab\sin\theta, ab\cos\theta, -a^2)\|}{\|(-a\sin\theta, a\cos\theta, b)\|^3} = \frac{(a^2b^2 + a^4)^{1/2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}. \tag{2.3}$$

Vì vậy độ cong của đường xoắn ốc là hằng số.

Chúng ta thử kiểm chứng lại kết quả này qua một số trường hợp đã biết. Trước hết, trường hợp $b = 0$ (nhưng $a \neq 0$). Thì đường xoắn ốc đơn giản chỉ là đường tròn trong mặt phẳng xy với bán kính $|a|$, như đã tính ở Định nghĩa 2.1 thì độ cong bằng $1/|a|$. Mặt khác, công thức (2.3) suy ra độ cong bằng

$$\frac{|a|}{a^2 + 0^2} = \frac{|a|}{a^2} = \frac{|a|}{|a|^2} = \frac{1}{|a|}.$$

Tiếp đến, xét trường hợp $a = 0$ (nhưng $b \neq 0$). Khi đó ảnh của đường xoắn ốc chỉ là trục z, là một đường thẳng nên có độ cong bằng 0. Và công thức (2.3) cũng cho cùng kết quả khi $a = 0$.

BÀI TẬP

2.1. Hãy tính độ cong của các đường cong sau:

(i) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$;

(ii) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$;

(iii) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$;

(iv) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

Đối với đường hình sao ở câu (iv), chứng tỏ rằng độ cong tiến tới vô cùng tại lân cận một trong bốn điểm $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$. So sánh với hình vẽ phát họa trong Bài tập 1.5.

2.2. Chứng minh rằng, nếu độ cong $\kappa(t)$ của một đường cong chính qui $\gamma(t)$ là > 0 ở mọi nơi, thì $\kappa(t)$ là một hàm trơn theo t. Hãy cho một phản ví dụ nếu thiếu giả thiết $\kappa > 0$.

2.2 Các đường cong phẳng

Đối với các đường cong phẳng, ta có thể làm tinh tế định nghĩa của độ cong một ít và có một mô tả hình học đẹp.

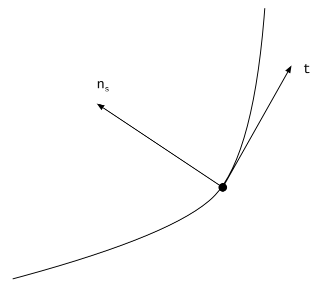
Giả sử $\gamma(s)$ là đường cong có vận tốc đơn vị trong $\mathbb{R}^2$. Kí hiệu d/ds bởi dấu chấm trên, lấy

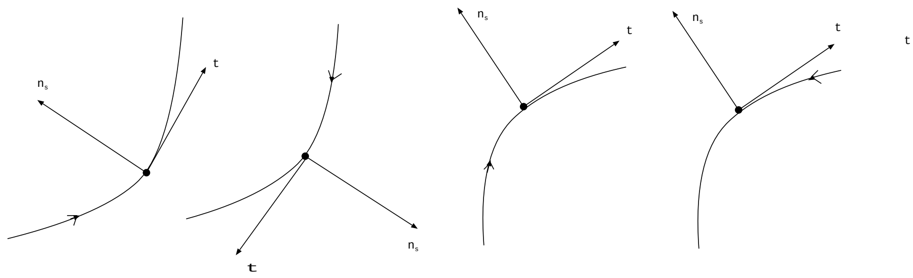
$$\mathbf{t} = \dot{\gamma}$$

là vectơ tiếp xúc của γ; chú ý rằng $\mathbf{t}$ là vectơ đơn vị. Có hai vectơ độ dài đơn vị vuông góc với $\mathbf{t}$; chọn vectơ $\mathbf{n}_s$ là vectơ đơn vị nhận được bởi quay $\mathbf{t}$ một góc $\pi/2$ theo ngược chiều kim đồng hồ, $\mathbf{n}_s$ được gọi là (vectơ) *chuẩn đơn vị xác định dấu* của γ.

Từ Mệnh đề 1.2 suy ra $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\gamma}$ vuông góc với $\mathbf{t}$ nên nó song song với $\mathbf{n}_s$. Bởi vậy, tồn tại số κ_s sao cho

$$\ddot{\gamma} = \kappa_s \mathbf{n}_s.$$





Vô hướng κ_s được gọi là *độ cong có dấu* của γ (nó có thể dương, âm hoặc bằng không). Chú ý vì $\|\mathbf{n}_s\| = 1$ nên

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \|\kappa_s \mathbf{n}_s\| = |\kappa_s|, \tag{2.4}$$

vì vậy độ cong của γ là giá trị tuyệt đối của độ cong có dấu của nó. Hình vẽ dưới đây cho ta cách xác định dấu của độ cong có dấu.

Độ cong có dấu có một mô tả hình học như sau:

Mệnh đề 2.2. *Giả sử $\gamma(s)$ là đường cong phẳng có vận tốc đơn vị, và giả sử $\varphi(s)$ là góc quay từ một vectơ có độ dài đơn vị cho trước tới vectơ tiếp xúc $\mathbf{t}$ của γ. Khi đó*

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Chú ý, mặc dù góc φ xác định sai khác bởi cộng thêm bội nguyên của 2π, nhưng $d\varphi/ds$ luôn định nghĩa tốt.

Vậy độ cong có dấu đo tốc độ quay của vectơ tiếp xúc của đường cong. Như ở hình vẽ trên, độ cong có dấu mang dấu dương hay âm phụ thuộc vào $\mathbf{t}$ quay theo ngược hay cùng chiều kim đồng hồ khi chuyển động dọc theo đường cong theo chiều hướng s tăng dần.

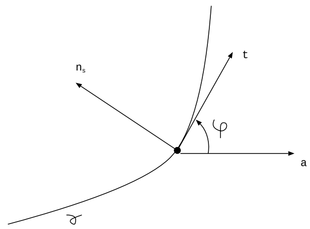
Chứng minh. Giả sử $\mathbf{a}$ là vectơ có độ dài đơn vị cho trước và $\mathbf{b}$ là vectơ có độ dài đơn vị nhận được từ $\mathbf{a}$ sau khi quay một góc $\pi/2$ ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \mathbf{a}\cos\varphi + \mathbf{b}\sin\varphi, \\
\therefore \dot{\mathbf{t}} &= (-\mathbf{a}\sin\varphi + \mathbf{b}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}, \\
\therefore \dot{\mathbf{t}}.\mathbf{a} &= -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}, \\
\therefore \kappa_s(\mathbf{n}_s.\mathbf{a}) &= -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} \quad (\text{vì } \dot{\mathbf{t}} = \kappa_s\mathbf{n}_s).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Nhưng góc giữa $\mathbf{n}_s$ và $\mathbf{a}$ là $\varphi + \pi/2$, lí do $\mathbf{t}$ phải quay một góc $\pi/2$ theo chiều kim đồng hồ để đến trùng với $\mathbf{n}_s$ (xem hình vẽ dưới đây). Do đó

$$\mathbf{n}_s.\mathbf{a} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi.$$

Thay vào Pt. (2.5) ta có đẳng thức cần phải chứng minh. □



Kết quả dưới đây sẽ chứng tỏ rằng một đường cong có vận tốc đơn vị được xác định (sai khác một phép dời hình trong $\mathbb{R}^2$) nếu chúng ta biết độ cong có dấu của nó tại mọi điểm trên đường cong. Nhắc lại một phép dời hình trong $\mathbb{R}^2$ là một ánh xạ $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có dạng

$$M = T_{\mathbf{a}} \circ R_\theta,$$

trong đó R_θ là phép quay xung quanh gốc tọa độ một góc θ ngược chiều kim đồng hồ,

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta),$$

và T_a là phép tịnh tiến bởi vectơ $\mathbf{a}$,

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a},$$

với mọi vectơ (x, y) và $\mathbf{v}$ trong $\mathbb{R}^2$.

Định lý 2.1. *Giả sử $k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn bất kỳ. Khi đó, tồn tại một đường cong có vận tốc đơn vị $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ với độ cong có dấu bằng k.*

Hơn nữa, nếu $\tilde{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ là một đường cong có vận tốc đơn vị bất kỳ khác, với độ cong có dấu bằng k. Khi đó tồn tại một phép dời hình M trong $\mathbb{R}^2$ sao cho

$$\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s)) \quad \text{với mọi } s \in (\alpha, \beta).$$

Chứng minh. Với khẳng định đầu tiên, cố định $s_0 \in (\alpha, \beta)$ và với mỗi $s \in (\alpha, \beta)$ định nghĩa

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_{s_0}^{s} k(u)du, \quad \text{(xem Mệnh đề 2.3)}, \\ \gamma(s) &= \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)dt, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)dt \Big). \end{aligned}$$

Khi đó, vectơ tiếp xúc của γ là

$$\dot{\gamma}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)),$$

đó là vectơ có độ dài đơn vị tạo một góc $\varphi(s)$ đối với trục Ox. Như vậy, γ có vận tốc đơn vị và, do Mệnh đề 2.3, độ cong có dấu của nó bằng

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds}\int_{s_0}^{s} k(u)du = k(s).$$

Với khẳng định thứ hai, giả sử $\tilde{\varphi}(s)$ là góc giữa trục Ox và vectơ tiếp xúc có độ dài đơn vị $\dot{\tilde{\gamma}}$ của $\tilde{\gamma}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}(s) &= (\cos\tilde{\varphi}(s), \sin\tilde{\varphi}(s)), \\ \tilde{\gamma}(s) &= \Big(\int_{s_0}^{s} \cos\tilde{\varphi}(t)dt, \int_{s_0}^{s} \sin\tilde{\varphi}(t)dt \Big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Từ Mệnh đề 2.3 ta có

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\varphi}}{ds} &= k(s) \\ \therefore \tilde{\varphi}(s) &= \int_{s_0}^{s} k(u)du + \tilde{\varphi}(s_0). \end{aligned}$$

Thay vào Pt. (2.6), lấy **a** là vectơ hằng $\tilde{\gamma}(s_0)$ và θ bằng hằng số $\tilde{\varphi}(s_0)$, thu được

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(s) &= T_{\mathbf{a}}\Big(\int_{s_0}^{s}\cos(\varphi(t)+\theta)dt, \int_{s_0}^{s}(\sin\varphi(t)+\theta)dt\Big)\\
&= T_{\mathbf{a}}\Big(\cos\theta\int s_{s_0}\cos\varphi(t)dt - \sin\theta\int s_{s_0}\sin\varphi(t)dt,\\
\sin\theta\int s_{s_0}\cos\varphi(t)dt - \cos\theta\int s_{s_0}\sin\varphi(t)dt\Big) &= T_{\mathbf{a}}R_{\theta}\Big(\int_{s_0}^{s}\cos\varphi(t)dt, \int_{s_0}^{s}\sin\varphi(t)dt\Big)\\
&= T_{\mathbf{a}}R_{\theta}(\gamma(s)).
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.2. Bất kỳ đường cong chính qui nào có độ cong là một hằng số dương đều là một thành phần của đường tròn. Để kiểm tra điều này, giả sử κ là độ cong (hằng số) của đường cong γ, và κ_s là độ cong có dấu của nó. Khi đó, từ Pt. (2.4) suy ra

$$\kappa_s = \pm\kappa.$$

Xét trường hợp $\kappa_s = \kappa$ tại một số điểm ở trên đường cong và $\kappa_s = -\kappa$ tại một số điểm khác, nhưng điều này không thể xảy ra vì κ_s là một hàm liên tục theo s (xem bài tập 2.4), nên theo Định lý Giá trị Trung gian, nếu κ_s nhận cả hai giá trị κ và $-\kappa$ thì nó phải nhận tất cả các giá trị ở giữa. Như vậy, hoặc $\kappa_s = \kappa$ tại mọi điểm trên đường cong, hoặc $\kappa_s = -\kappa$ tại mọi điểm trên đường cong. Tức là κ_s là một hằng số.

Việc còn lại là chứng tỏ, với bất kỳ giá trị nào của κ_s, chúng ta đều có thể tìm được một đường cong tham số với κ_s là độ cong có dấu. Theo định lý ở trên, bất kỳ đường cong nào có độ cong có dấu là κ_s đều có thể nhận được từ đường tròn này qua một phép dời hình. Do phép quay và phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn, nên bất kỳ đường cong nào có độ cong có dấu là hằng số phải là (một phần) đường tròn.

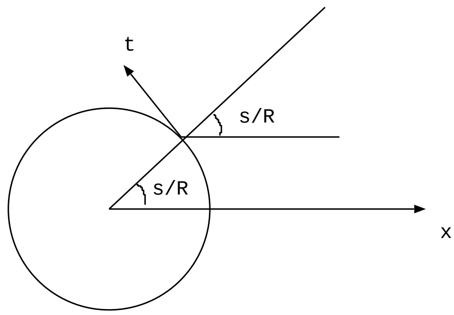
Tham số hóa có vận tốc đơn vị của đường tròn với tâm tại gốc tọa độ và bán kính R là

$$\gamma(s) = \big(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}\big).$$

Vectơ tiếp xúc của nó

$$\mathbf{t} = \dot{\gamma}(s) = \big(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\big)$$

là vectơ có độ dài đơn vị tạo thành một góc $\pi/2 + s/R$ đối với trục Ox:



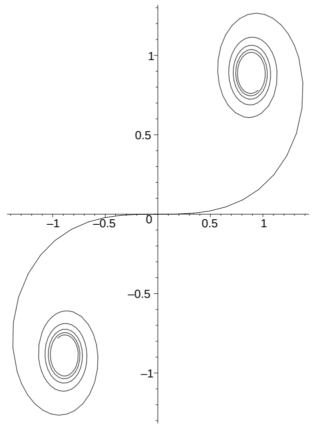
Do đó, độ cong có dấu của γ là

$$\frac{d}{ds}\big(\frac{\pi}{2} + \frac{s}{R}\big) = \frac{1}{R}.$$

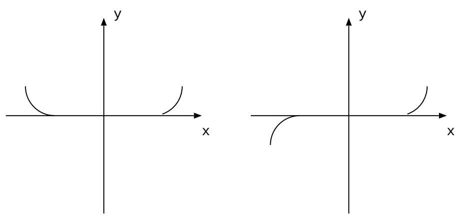
Vậy nếu $\kappa_s > 0$ đường tròn có bán kính $1/\kappa_s$ có độ cong có dấu bằng κ_s.

Ví dụ 2.3. Định lý 2.1 chứng tỏ rằng chúng ta có thể tìm được đường cong với độ cong có dấu bằng một hàm trơn cho trước. Nhưng có những độ cong đơn giản mà đường cong lại phức tạp. Lấy ví dụ, độ cong có dấu $\kappa_s(s) = s$. Theo như chứng minh của Định lý 2.1, lấy $s_0 = 0$, thu được

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int s_0 u du = \frac{s^2}{2}, \\ \gamma(s) &= \Big(\int s_0 \cos\big(\frac{t^2}{2}\big)dt, \int s_0 \sin\big(\frac{t^2}{2}\big)dt\Big). \end{aligned}$$



Tích phân này không tính được qua các hàm 'cơ sở'. (Nó xuất hiện trong lý thuyết nhiễu xạ của ánh sáng, ở đó người ta gọi là *tích phân Fresnel*. Mặc dù Euler khám phá ra đầu tiên, nhưng đường cong γ được gọi là *đường xoắn ốc Cornu*). Dùng tính toán tích phân bằng phương pháp số ta có hình vẽ của γ như ở trên.



Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu Định lý 2.1 có còn đúng không nếu ta thay 'độ cong có dấu' bằng 'độ cong'. Phần đầu tiên đúng nếu (và chỉ nếu) có giả thiết $k \geq 0$, do có thể chọn γ có độ cong có dấu k nên nó cũng có độ cong k. Phần sau của Định lý 2.1 không còn đúng nữa. Chẳng hạn, chúng ta có thể lấy đường cong (trơn) γ có phần $-1 \leq x \leq 1$ trùng với trục hoành, phần còn lại nằm phía trên trục hoành. (Bạn đọc có thể viết phương trình cho đường cong này, xem bài tập 1.19.) Ta thực hiện phép lật đối xứng qua trục x cho phần đường cong $x \leq 0$. Đường cong mới có cùng độ cong như γ (xem bài tập 2.12), nhưng rõ ràng ta không thể có nó bằng phép dời hình đối với γ. Xem bài tập 2.13 để có một phiên bản của Định lý 2.1 đúng cho độ cong thay vì độ cong có dấu.

BÀI TẬP

2.3. Chứng minh rằng nếu γ là đường cong có vận tốc đơn vị thì

$$\dot{\mathbf{n}}_s = -\kappa_s \mathbf{t}.$$

2.4. Chứng minh rằng độ cong có dấu của bất kì đường cong chính qui $\gamma(t)$ nào đều là hàm trơn theo t. (So sánh với bài tập 2.2.)

2.5. Giả sử $\gamma(t) = (e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t)$, với $-\infty < t < \infty$ và k là một hằng số khác không (đây là đường xoắn ốc lôgarit - xem bài tập 1.4). Chứng minh rằng có duy nhất một tham số có vận tốc đơn vị s của γ sao cho $s > 0$ với mọi t và $s \to 0$ khi $t \to \mp$ nếu $\pm k > 0$, hãy viết s như là hàm theo t. Chứng minh độ cong có dấu của γ là $1/ks$. Ngược lại, hãy mô tả đường cong có độ dài có hướng bằng $1/ks$ với hằng số k khác không như một hàm của độ dài cung s.

2.6. Đường cong có vận tốc đơn vị γ có tính chất vectơ tiếp xúc $t(s)$ tạo thành một góc θ cố định với $\gamma(s)$ với mọi s. Chứng minh:

(i) nếu $\theta = 0$, thì γ là một phần của đường thẳng (viết $\gamma = r\mathbf{t}$ và chỉ ra $\kappa_s = 0$);

(ii) nếu $\theta = \pi/2$ thì γ là một đường tròn (viết $\gamma = r\mathbf{n}_s$);

(iii) nếu $0 < \theta < \pi/2$, thì γ là đường xoắn ốc lôgarit (chứng tỏ κ_s).

2.7. Giả sử $\gamma(t)$ là đường cong chính qui và λ là một hằng số. Định nghĩa *đường cong song song* γ^λ của γ như sau

$$\gamma^\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{n}_s(t).$$

Chứng minh rằng nếu $|\lambda\kappa_s(t)| < 1$ với mọi t, thì γ^λ là đường chính qui và độ cong có dấu của nó bằng $\kappa_s/(1-\lambda\kappa_s)$.

2.8. Giả sử γ là đường cong có vận tốc đơn vị có độ cong khác không ở mọi nơi. Định nghĩa *tâm của độ cong* $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$ của γ tại điểm $\gamma(s)$ là

$$\boldsymbol{\varepsilon}(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_s(s)}\mathbf{n}_s(s).$$

Chứng minh rằng đường tròn có tâm $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$ và bán kính $|1/\kappa_s(s)|$ tiếp xúc với γ tại $\gamma(s)$ và có cùng độ cong với γ tại điểm đó. Đường tròn này được gọi là *đường tròn mật tiếp* với γ tại điểm $\gamma(s)$. (Hãy vẽ hình minh họa.)

2.9. Với kí hiệu như bài 2.8, xét $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$ như tham số hóa của một đường cong mới, gọi nó là *đường pháp bao* của γ (nếu γ là một đường cong chính qui thì đường pháp bao của nó là đường tham số hóa lại có vận tốc đơn vị của nó). Giả sử $\dot\kappa_s(s) \neq 0$ với mọi giá trị s (dấu chấm trên kí hiệu cho d/ds), có thể giả sử $\dot\kappa_s(s) > 0$ với mọi s (vì có thể thay s bởi $-s$). Chứng minh rằng độ dài cung của $\boldsymbol{\varepsilon}$ là $u_0 - \frac{1}{\kappa_s(s)}$, với u_0 là một hằng số, tính độ cong có dấu của $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Chứng minh đường pháp bao của xyclôit

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 < t < 2\pi,$$

với $a > 0$ là hằng số, bằng

$$\boldsymbol{\varepsilon} = a(t + \sin t, -1 + \cos t)$$

(xem bài tập 1.7), bằng một phép tham số hóa lại nào đó, chứng tỏ $\boldsymbol{\varepsilon}$ có thể nhận được từ γ qua phép tịnh tiến trong mặt phẳng.

2.10. Một sợi dây có độ dài bằng ℓ được gắn vào điểm $s = 0$ của một đường cong $\gamma(s)$ có vận tốc đơn vị. Uốn sợi dây theo đường cong sao cho trong quá trình uốn thì đầu dây kia vạch thành đường cong

$$\iota(s) = \gamma(s) + (\ell - s)\dot\gamma(s),$$

với $0 < s < \ell$ và dấu chấm trên kí hiệu cho d/ds. Đường cong ι được gọi là *đường thân khai* của γ (nếu γ là đường cong chính qui, chúng ta định nghĩa đường thân khai của nó là tham số hóa lại có vận tốc đơn vị của γ). Giả sử độ cong có dấu κ_s của γ luôn khác không, chẳng hạn $\kappa_s(s) > 0$ với mọi s. Chứng minh rằng độ cong có dấu của ι là $1/(\ell - s)$.

2.11. Giả sử γ là một đường cong chính qui. Chứng minh rằng

(i) đường thân khai của đường pháp bao của γ là đường cong song song với γ.

(ii) đường pháp bao của đường thân khai của γ là γ.

(Có thể so sánh các khẳng định này với: tích phân của đạo hàm của một hàm trơn f thì bằng f cộng với hằng số, còn đạo hàm của tích phân của f thì bằng f.)

2.12. Chứng minh rằng việc lấy đối xứng của một đường cong qua một đường thẳng làm thay dấu độ cong có dấu của nó.

2.13. Chứng minh nếu hai đường cong phẳng $\gamma(t)$ và $\tilde{\gamma}(t)$ có cùng độ cong khác không với mọi t, thì $\tilde{\gamma}$ có thể nhận được từ γ bằng một phép dời hình hoặc một phép đối xứng qua một đường thẳng sau khi thực hiện một phép dời hình.

2.3 Đường trong không gian

Chủ đề mà chúng ta quan tâm chính trong cuốn sách này sẽ là đường cong (và mặt cong) trong $\mathbb{R}^3$, tức là đường trong không gian. Trong khi đường cong phẳng hoàn toàn xác định bởi độ cong của nó (xem Định lý 2.1), thì điều này không còn đúng đối với đường trong không gian. Ví dụ, đường tròn có bán kính bằng đơn vị trong mặt phẳng Oxy và đường xoắn ốc với $a = b = 1/2$ (xem Ví dụ 2.1) có cùng độ cong ở mọi nơi, tuy nhiên rõ ràng không thể chuyển từ đường này sang đường kia bởi tổ hợp các phép quay và các phép tịnh tiến. Chúng ta sẽ định nghĩa một kiểu độ cong khác cho các đường trong không gian, được gọi là *độ xoắn*, và chúng ta sẽ chứng minh độ cong cùng với độ xoắn sẽ xác định đường cong sai khác một phép dời hình (Định lý 2.3).

Giả sử $\gamma(s)$ là một đường cong có vận tốc đơn vị trong $\mathbb{R}^3$, và đặt $\mathbf{t} = \dot{\gamma}$ là véctơ tiếp xúc đơn vị của nó. Nếu *độ cong $\kappa(s)$ khác không*, chúng ta định nghĩa *pháp tuyến chính* của γ tại điểm $\gamma(s)$ là véctơ

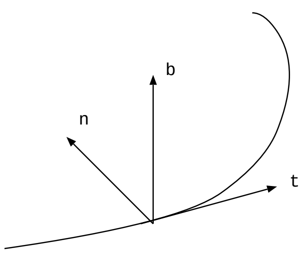
$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\dot{\mathbf{t}}(s) \tag{2.7}$$

Do $\|\dot{\mathbf{t}}\| = \kappa$, nên $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị. Mặt khác, theo Mệnh đề 1.2, $\mathbf{t}.\dot{\mathbf{t}} = 0$, nên $\mathbf{t}$ và $\mathbf{n}$ vuông góc với nhau. Từ đó suy ra

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \tag{2.8}$$

là véctơ đơn vị vuông góc với cả $\mathbf{t}$ lẫn $\mathbf{n}$. Véctơ $\mathbf{b}(s)$ được gọi là *trùng pháp tuyến* của γ tại điểm $\gamma(s)$. Như vậy, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$, và theo chiều tay phải, tức là

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}.$$



Do $\mathbf{b}(s)$ là véctơ đơn vị với mọi s, nên $\dot{\mathbf{b}}$ vuông góc với $\mathbf{b}$. Bây giờ chúng ta sẽ dùng 'luật nhân' đối với đạo hàm theo biến s của tích véctơ của các hàm giá trị véctơ $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}.$$

Áp dụng điều này cho $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ thu được

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}, \tag{2.9}$$

và theo định nghĩa (2.7) của $\mathbf{n}$,

$$\dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Phương trình (2.9) chứng tỏ $\dot{\mathbf{b}}$ vuông góc với $\mathbf{t}$. Do vuông góc với cả $\mathbf{t}$ và $\mathbf{b}$, nên $\dot{\mathbf{b}}$ phải song song với $\mathbf{n}$, vì vậy

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}, \tag{2.10}$$

với τ là một vô hướng, và gọi nó là *độ xoắn của* γ (dấu trừ là ngầm định). Chú ý rằng độ xoắn chỉ định nghĩa được nếu độ cong khác không.

Dĩ nhiên, chúng ta định nghĩa độ xoắn của một đường cong chính qui γ bất kỳ qua độ xoắn của tham số hóa lại có vận tốc đơn vị của γ. Như trong trường hợp độ cong, để xem điều này có nghĩa như thế nào, chúng ta phải chứng tỏ rằng nếu thay đổi tham số có vận tốc đơn vị của γ có dạng

$$u = \pm s + c,$$

với c là hằng số, thì τ không đổi. Thật vậy, khi thay đổi tham số thì các véctơ đã định nghĩa ở trên thay đổi như sau:

$$\mathbf{t} \mapsto \pm \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}} \mapsto \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n} \mapsto \mathbf{n}, \mathbf{b} \mapsto \pm \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}} \mapsto \dot{\mathbf{b}}.$$

Từ phương trình (2.8) suy ra $\tau \mapsto \tau$.

Như chúng ta đã làm đối với độ cong trong Mệnh đề 2.1, có thể đưa ra một công thức tính độ xoắn của một đường trong không gian γ chỉ thông qua γ, mà không cần điều kiện tham số hóa lại có vận tốc đơn vị:

Mệnh đề 2.3. *Giả sử $\gamma(t)$ là một đường cong chính qui trong $\mathbb{R}^3$ với độ cong khác không mọi nơi. Khi đó độ xoắn của nó được xác định bởi*

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}).\dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}, \tag{2.11}$$

trong đó kí hiệu dấu chấm trên cho d/dt.

Chú ý rằng công thức này chứng tỏ $\tau(t)$ định nghĩa ở mọi nơi trên đường cong $\gamma(t)$ mà tại đó độ cong $\kappa(t)$ khác không, từ Mệnh đề 2.1 thì đây là điều kiện để mẫu số của vế phải trong đẳng thức trên khác không.

Chứng minh. Chúng ta có thể 'nhận được' Pt. (2.11) bằng lặp lại các bước như chứng minh của Mệnh đề 2.1. Tuy nhiên có cách khác dễ và rõ ràng hơn sẽ được trình bày dưới đây, mặc dù phương pháp này đòi hỏi biết trước kết quả của τ như Pt. (2.11).

Trước hết chúng ta xét trường hợp γ có vận tốc đơn vị. Sử dụng các Pt. (2.7) và (2.10),

$$\tau = -\mathbf{n}.\dot{\mathbf{b}} = -\mathbf{n}.(\mathbf{t} \times \mathbf{n})^{\cdot} = -\mathbf{n}.(\dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}) = -\mathbf{n}(\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}).$$

Vì $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\dot{t} = \frac{1}{\kappa}\ddot{\gamma}$, nên

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\kappa}\ddot{\gamma}.\Big(\dot{\gamma} \times \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\kappa}\ddot{\gamma}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{\kappa}\ddot{\gamma}.\Big(\dot{\gamma} \times \Big(\frac{1}{\kappa}\dddot{\gamma} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\ddot{\gamma}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{\kappa^2}\dddot{\gamma}.(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}), \end{aligned}$$

do $\ddot{\gamma}.(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) = 0$ và $\ddot{\gamma}.(\dot{\gamma} \times \dddot{\gamma}) = -\dddot{\gamma}.(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma})$. Nên ta có Pt (2.11) do γ có vận tốc đơn vị, $\dot{\gamma}$ và $\ddot{\gamma}$ vuông góc, do đó

$$\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \|\dot{\gamma}\|\|\ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\| = \kappa.$$

Trong trường hợp tổng quát, giả sử s là độ dài cung dọc theo γ và kí hiệu d/ds bởi dấu phẩy. Khi đó

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{ds}{dt}\gamma',\\ \ddot{\gamma} &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\ddot{\gamma}'' + \frac{d^2s}{dt^2}\gamma',\\ \dddot{\gamma} &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\dot{\gamma}''' + 3\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\gamma'' + \frac{d^3s}{dt^3}\gamma'.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\gamma'\times\gamma'',\\ \dddot{\gamma}\Big(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\Big) &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^6\gamma'''.(\gamma'\times\gamma''),\end{aligned}$$

và vì vậy

$$\frac{\dddot{\gamma}.(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2} = \frac{\gamma'''.(\gamma'\times\gamma'')}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2}.$$

□

Ví dụ 2.4. Tính độ xoắn của đường xoắn ốc

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$$

đã được học trong Ví dụ 2.1. Ta có

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\theta) &= (-a\sin\theta, a\cos\theta, b),\\ \ddot{\gamma}(\theta) &= (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)\\ \dddot{\gamma}(\theta) &= (a\sin\theta, -a\cos\theta, 0).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} &= (ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2)\\ \|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2 &= a^2(a^2+b^2),\\ (\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}).\dddot{\gamma} &= a^2b,\end{aligned}$$

và vì vậy độ xoắn

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}).\dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2} = \frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Chú ý rằng độ xoắn của đường xoắn ốc trong ví dụ trên bằng không khi $b=0$, khi đó đường xoắn ốc chỉ là đường tròn trong mặt phẳng Oxy. Điều này cho chúng ta một suy diễn hình học cho độ xoắn, như khẳng định sau đây:

Mệnh đề 2.4. *Giả sử γ là một đường cong chính qui trong $\mathbb{R}^3$ với độ cong khác không mọi nơi (tức là độ xoắn τ của γ định nghĩa được). Khi đó, ảnh của γ nằm trong một mặt phẳng khi và chỉ khi τ bằng không tại mọi điểm trên đường cong.*

Chứng minh. Chúng ta có thể giả sử γ có vận tốc đơn vị (vì tham số hóa lại của γ không làm thay đổi độ xoắn hay tính chất nằm trên một mặt phẳng của đường cong). Kí hiệu tham số của γ là s và d/ds bởi dấu chấm trên như thông thường.

Trước hết giả sử ảnh của γ nằm trong mặt phẳng $\mathbf{r}.\mathbf{a} = d$, trong đó $\mathbf{a}$ là véctơ hằng và d là một hằng số ($\mathbf{r}$ là véctơ vị trí của một điểm trong $\mathbb{R}^3$). Ta có thể giả thiết $\mathbf{a}$ là véctơ đơn vị. Lấy đạo hàm của $\gamma.\mathbf{a} = d$ theo biến s, thu được

$$\begin{aligned} \mathbf{t}.\mathbf{a} &= 0, && (2.12) \\ \therefore\ \dot{\mathbf{t}}.\mathbf{a} &= 0 \quad (\text{vì } \dot{\mathbf{a}} = 0), \\ \therefore\ \kappa\mathbf{n}.\mathbf{a} &= 0 \quad (\text{vì } \dot{t} = \kappa\mathbf{n}), \\ \therefore\ \mathbf{n}.\mathbf{a} &= 0 \quad (\text{vì } \kappa \neq 0). && (2.13) \end{aligned}$$

Các phương trình (2.12) và (2.13) chứng tỏ $\mathbf{t}$ và $\mathbf{n}$ đều vuông góc với $\mathbf{a}$. Điều đó chứng tỏ rằng $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ song song với $\mathbf{a}$. Do $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ là các véctơ đơn vị, và $\mathbf{b}(s)$ là hàm trơn (nên cũng liên tục) theo biến s, suy ra phải có $\mathbf{b}(s) = \mathbf{a}$ với mọi s hoặc $\mathbf{b}(s) = -\mathbf{a}$ với mọi s. Trong cả hai trường hợp, $\mathbf{b}$ là một véctơ hằng. Nên $\dot{\mathbf{b}} = 0$, suy ra $\tau = 0$.

Ngược lại, giả sử $\tau = 0$ ở mọi nơi. Theo Pt. (2.10), $\dot{\mathbf{b}} = 0$, vì vậy $\mathbf{b}$ là véctơ hằng. Như chứng minh ở trên γ phải nằm trong mặt phẳng $\mathbf{r}.\mathbf{b} = \text{constant}$. Xét

$$\frac{d}{ds}(\gamma.\mathbf{b}) = \dot{\gamma}.\mathbf{b} = \mathbf{t}.\mathbf{b} = 0,$$

suy ra $\dot{\gamma}.\mathbf{b}$ là một hằng số, ta đặt bằng d. Điều này có nghĩa là γ nằm trong mặt phẳng $\mathbf{r}.\mathbf{b} = d$. □

Có một thiếu sót trong tính toán mà chúng ta muốn xét đến. Đó là, như đã biết, với một đường cong có vận tốc đơn vị, thì

$$\dot{t} = \kappa\mathbf{n} \quad \text{và } \dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$$

(đó là các định nghĩa tương ứng của $\mathbf{n}$ và τ), nhưng chúng ta đã không tính $\dot{\mathbf{n}}$. Thật ra nó không khó. Do $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ là cơ sở trực chuẩn theo chiều tay phải của $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}.$$

Do đó,

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{t}} = -\tau\mathbf{n} \times \mathbf{t} + \kappa\mathbf{b} \times \mathbf{n} = \kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}.$$

Kết hợp những điều này lại, ta có

Định lý 2.2. *Giả sử γ là đường cong có vận tốc đơn vị trong $\mathbb{R}^3$ với độ cong khác không mọi nơi. Khi đó*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \kappa\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} && (2.14) \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\tau\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Các phương trình (2.14) được gọi là các phương trình Frenet-Serret (hoặc đôi khi có tên ngược lại, Serret-Frenet). Chú ý ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

biểu diễn $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$ và $\dot{\mathbf{b}}$ thông qua $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ và $\mathbf{b}$ là ma trận phản đối xứng. Điều này giúp người ta nhớ được công thức. ('Lí do' có ma trận phản đối xứng, xem bài tập 2.22.)

Sau đây là một ứng dung đơn giản của Frenet-Serret:

Mệnh đề 2.5. *Giả sử γ là một đường cong có vận tốc đơn vị trong $\mathbb{R}^3$ với độ cong hằng số và độ xoắn bằng không. Khi đó, γ là (một phần của) đường tròn.*

Chứng minh. Kết quả này thật ra là một hệ quả của Ví dụ 2.2 và Mệnh đề 2.4, nhưng chứng minh sau đây có tính xây dựng và cho nhiều thông tin, đó là thông tin về tâm và bán kính của đường tròn và về mặt phẳng chứa đường tròn đó.

Theo chứng minh của Mệnh đề 2.4, trùng pháp tuyến chính $\mathbf{b}$ là véctơ hằng và γ thì nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\mathbf{b}$. Xét

$$\frac{d}{ds}(\gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}) = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{n}} = 0,$$

ở đây chúng ta đã sử dụng tính chất độ cong κ là hằng số và phương trình Frenet-Serret

$$\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} = -\kappa\mathbf{t} \quad (\text{vì } \tau = 0).$$

Do đó, $\gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$ là một véctơ hằng, đặt bằng $\mathbf{a}$, vì vậy

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} &= \mathbf{a}, \\ \therefore \|\gamma - \mathbf{a}\| &= \|-\frac{1}{\kappa}\mathbf{n}\| = \frac{1}{\kappa}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Điều này chứng tỏ γ nằm trên mặt cầu có tâm $\mathbf{a}$ và bán kính $1/\kappa$. Do giao của một mặt phẳng và một mặt cầu là đường tròn, ta có điều phải chứng minh. (Chú ý rằng mặt phẳng giao với mặt cầu tại đường tròn lớn nhất, vì $\mathbf{n}$ song song với mặt phẳng, vì vậy theo Pt. (2.15) tâm $\mathbf{a}$ của mặt cầu nằm trên mặt phẳng.) □

Chúng ta kết thúc chương này bằng một kết quả tương tự như Định lý 2.1 cho đường cong trong không gian. Nhắc lại một phép dời hình trong $\mathbb{R}^3$ là một phép tịnh tiến và một phép quay quanh gốc tọa độ.

Định lý 2.3. *Giả sử $\gamma(s)$ và $\tilde{\gamma}(s)$ là hai đường cong có vận tốc đơn vị trong $\mathbb{R}^3$, có cùng độ cong $\kappa(s) > 0$ và cùng độ xoắn $\tau(s)$ với mọi s. Khi đó, tồn tại một phép dời hình M trong $\mathbb{R}^3$ sao cho*

$$\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s)) \quad \textit{với mọi } s.$$

Hơn nữa, nếu k và t là các hàm trơn với $k > 0$ mọi nơi, thì tồn tại một đường cong có vận tốc đơn vị trong $\mathbb{R}^3$ có độ cong là k và độ xoắn là t.

Chứng minh. Giả sử $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ và $\mathbf{b}$ tương ứng là các véctơ tiếp xúc, pháp tuyến chính và trùng pháp của γ và $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ và $\mathbf{b}$ tương tự cho $\tilde{\gamma}$. Giả sử s_0 là một giá trị cố định của tham số s. Do $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ và $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ là các hệ trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ có chiều tay phải, nên có một phép quay quanh gốc tọa độ biến hệ này thành hệ kia với thứ tự véctơ tương ứng. Hơn nữa, có một phép tịnh tiến đưa $\gamma(s_0)$ đến $\tilde{\gamma}(s_0)$ (mà không ảnh hưởng đến $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ và $\mathbf{b}$). Thực hiện phép tịnh tiến sau đó đến phép quay, ta có thể giả thiết

$$\gamma(s_0) = \tilde{\gamma}(s_0), \mathbf{t}(s_0) = \tilde{\mathbf{t}}(s_0), \mathbf{n}(s_0) = \tilde{\mathbf{n}}(s_0), \mathbf{b}(s_0) = \tilde{\mathbf{b}}(s_0) \tag{2.16}$$

Xét biểu thức

$$A(s) = \tilde{\mathbf{t}}.\mathbf{t} + \tilde{\mathbf{n}}.\mathbf{n} + \tilde{\mathbf{b}}.\mathbf{b}.$$

Từ Pt. (2.16), ta có $A(s_0) = 3$. Mặt khác, do $\tilde{\mathbf{t}}$ và $\mathbf{t}$ là các véctơ đơn vị, $\tilde{\mathbf{t}}.\mathbf{t} \leq 1$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$; tương tự đối với $\tilde{\mathbf{n}}.\mathbf{n}$ và $\tilde{\mathbf{b}}.\mathbf{b}$. Do đó $A(s) \leq 3$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$, $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$ và $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$. Như vậy, nếu chúng ta có thể chứng minh A là hằng số, thì $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$, tức là $\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\gamma}$, do đó $\tilde{\gamma}(s) - \gamma(s)$ là hằng số. Nhưng lần nữa theo Pt. (2.16), hằng số này phải bằng không, vậy $\tilde{\gamma} = \gamma$.

Do đó đối với phần đầu của định lý, chúng ta đưa về việc chứng minh A là hằng số. Nhưng sử dụng phương trình Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{\tilde{\mathbf{t}}}.\mathbf{t} + \dot{\tilde{\mathbf{n}}}.\mathbf{n} + \dot{\tilde{\mathbf{b}}}.\mathbf{b} + \tilde{\mathbf{t}}.\dot{\mathbf{t}} + \tilde{\mathbf{n}}.\dot{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{b}}.\dot{\mathbf{b}} \\ &= \kappa\tilde{\mathbf{n}}.\mathbf{t} + (-\kappa\tilde{\mathbf{t}} + \tau\tilde{\mathbf{b}}).\mathbf{n} + (-\tau\tilde{\mathbf{n}}).\mathbf{b} + \tilde{\mathbf{t}}.\kappa\mathbf{n} + \tilde{\mathbf{n}}.(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + \mathbf{b}.(-\tau\mathbf{n}), \end{aligned}$$

và nó triệt tiêu do các số hạng từng cặp khử nhau.

Đối với phần hai của định lý, trước hết theo lý thuyết phương trình vi phân, các phương trình

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= k\mathbf{N}, && (2.17)\\ \dot{\mathbf{N}} &= -k\mathbf{T} + t\mathbf{B}, && (2.18)\\ \dot{\mathbf{B}} &= -t\mathbf{N} && (2.19) \end{aligned}$$

có duy nhất nghiệm $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ sao cho $\mathbf{T}(s_0)$, $\mathbf{N}(s_0)$, $\mathbf{B}(s_0)$ là các véctơ trực chuẩn chính tắc $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ tương ứng. Do ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}$$

biểu thị $\dot{\mathbf{T}}$, $\dot{\mathbf{N}}$ và $\dot{\mathbf{B}}$ qua $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ là phản đối xứng, suy ra các véctơ $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ và $\mathbf{B}$ trực chuẩn với mọi giá trị của s (xem Bài tập 2.22).

Bây giờ ta định nghĩa

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{T}(u)du.$$

Khi đó, $\dot{\gamma} = \mathbf{T}$, vì vậy do $\mathbf{T}$ là véctơ đơn vị, nên γ có vận tốc đơn vị. Tiếp đến, $\dot{\mathbf{T}} = k\mathbf{N}$ theo Pt. (2.17), nên $\mathbf{N}$ là vectơ đơn vị, k là độ cong của γ và $\mathbf{N}$ là pháp tuyến chính. Tiếp đến, do $\mathbf{B}$ là véctơ đơn vị vuông góc với $\mathbf{T}$ và $\mathbf{N}$, $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{T} \times \mathbf{N}$ với λ là một hàm trơn theo s và bằng ± 1 với mọi s. Do $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, nên $\lambda(s_0) = 1$, suy ra $\lambda(s) = 1$ với mọi s. Do đó, $\mathbf{B}$ là véctơ trùng pháp của γ và theo Pt. (2.19), t là độ xoắn của γ. □

BÀI TẬP

2.14. Hãy tính $\kappa, \tau, \mathbf{t}, \mathbf{n}$ và $\mathbf{b}$ đối với mỗi đường cong dưới đây, kiểm chứng lại các phương trình Frenet-Serret:

(i) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$;

(ii) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$.

2.15. Chứng minh rằng đường cong

$$\gamma(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t}\right)$$

là đường cong phẳng.

2.16. Chứng minh đường cong trong Bài tập 2.14(ii) là một đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính của nó, và tìm mặt phẳng chứa nó.

2.17. Mô tả tất cả các đường cong trong $\mathbb{R}^3$ với độ cong hằng số $\kappa > 0$ và độ xoắn hằng số τ. (Chỉ ra một đường cong có độ cong κ và độ xoắn τ là đủ.)

2.18. Chứng minh độ xoắn của một đường cong chính qui $\gamma(t)$ là một hàm trơn theo t nếu nó xác định.

2.19. Giả sử $\gamma(t)$ là đường cong có vận tốc đơn vị trong $\mathbb{R}^3$, và độ cong $\kappa(t)$ của nó khác không với mọi t. Định nghĩa một đường cong mới δ như sau

$$\delta(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}.$$

Chứng minh δ là đường cong chính qui và nếu s là độ dài cung tham số của δ thì

$$\frac{ds}{dt} = \kappa.$$

Chứng minh rằng độ cong của δ là

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

và hãy tìm công thức cho độ xoắn của δ theo κ, τ và các đạo hàm của chúng đối với t.

2.20. Một đường cong chính qui γ trong $\mathbb{R}^3$ với độ cong > 0 được gọi là *đường xoắn ốc tổng quát* nếu véctơ tiếp xúc của nó hợp thành một góc cố định θ với một véctơ cố định $\mathbf{a}$. Chứng minh độ xoắn τ và độ cong κ của γ có quan hệ $\tau = \pm\kappa\cos\theta$. (Giả thiết γ có vận tốc đơn vị và chứng tỏ $\mathbf{a} = \mathbf{t}\cos\theta + \mathbf{b}\sin\theta$.)

Chứng minh điều ngược lại, nếu độ xoắn và độ cong của một đường cong chính qui có quan hệ $\tau = \lambda\kappa$ với λ là một hằng số thì đường cong là một đường xoắn ốc tổng quát. (Vì vậy, các Ví dụ 2.1 và 2.4 chứng tỏ một đường xoắn ốc vòng quanh là đường xoắn ốc tổng quát.)

2.21. Giả sử $\gamma(t)$ là đường cong có vận tốc đơn vị với $\kappa(t) > 0$ và $\tau(t) \neq 0$ với mọi t. Chứng tỏ rằng, nếu γ nằm trên một mặt cầu thì

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}\right). \tag{2.20}$$

(Nếu γ nằm trên mặt cầu có tâm $\mathbf{a}$ và bán kính r, thì $(\gamma - \mathbf{a}).(\gamma - \mathbf{a}) = r^2$; sau đó lấy đạo hàm lặp lại.) Ngược lại, nếu Pt. (2.20) thỏa mãn thì

$$\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2 = r^2$$

với hằng số (dương) r nào đó, trong đó $\rho = 1/\kappa$ và $\sigma = 1/\tau$, và chứng tỏ γ nằm trên một mặt cầu có bán kính r (Xét $\gamma + \rho\mathbf{n} + \dot{\rho}\sigma\mathbf{b}$.) Hãy kiểm chứng Pt. (2.20) thỏa mãn đối với đường cong Viviani (Bài tập 1.9).

2.22. Giả sử (a_{ij}) là một ma trận phản đối xứng 3×3 (tức là $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi i, j). Giả sử $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ và $\mathbf{v}_3$ là các hàm trơn của tham số t thỏa mãn các phương trình vi phân

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\mathbf{v}_j,$$

với $i = 1, 2$ và 3 và giả sử với giá trị tham số s_0 nào đó các véctơ $\mathbf{v}_1(s_0)$, $\mathbf{v}_2(s_0)$ và $\mathbf{v}_3(s_0)$ là trực chuẩn. Chứng minh $\mathbf{v}_1(s)$, $\mathbf{v}_2(s)$ và $\mathbf{v}_3(s)$ trực chuẩn với mọi s. (Tìm một hệ các phương trình vi phân bậc nhất cho tích $\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_j$, và sử dụng tính duy nhất nghiệm nếu cho trước các điều kiện đầu.)

Phần còn lại của cuốn sách, qui ước tất cả các đường cong tham số là chính qui.

Chương 3

Các tính chất toàn cục của đường cong

Cho đến nay tất cả các tính chất của đường cong chúng ta thảo luận đều là 'địa phương': chúng chỉ phụ thuộc vào dáng điệu của đường cong trong lân cận một điểm cho trước, chứ không phụ thuộc vào hình dạng 'toàn cục' của đường cong. Trong chương này chúng ta sẽ khảo sát một số kết quả toàn cục về đường cong. Nổi tiếng nhất, và có lẽ cổ nhất, đó là 'bất đẳng thức đẳng chu', bàn đến quan hệ giữa độ dài (chu vi) của đường cong 'đóng' với diện tích mà nó bao quanh.

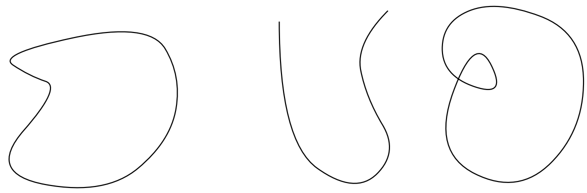
3.1 Đường cong đóng đơn

Trước hết trong chương này chúng ta sẽ bàn đến một dạng đường cong được gọi là 'đường cong đóng đơn'. Một cách trực giác, các đường cong như thế 'nối kín' nhưng không tự cắt nhau. Định nghĩa chính xác như sau:

Định nghĩa 3.1. Giả sử $a \in \mathbb{R}$ là một hằng số dương. Một *đường cong đóng đơn* trong $\mathbb{R}^2$ với *chu kỳ a* là một đường cong (chính qui) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sao cho

$$\gamma(t) = \gamma(t') \text{ khi và chỉ khi } t' - t = ka \text{ với số nguyên } k \text{ nào đó.}$$

Như thế điểm $\gamma(t)$ quay trở lại điểm đầu khi t tăng thêm a, chứ không phải trước đó.



Đường cong đóng đơn (trái) và không đóng đơn (phải)

Một kết quả về tôpô trong $\mathbb{R}^2$ thông dụng nhưng không tầm thường, là *Định lý đường cong Jordan*, định lý nói rằng mỗi đường cong đóng đơn trong mặt phẳng có một 'phần trong' và một 'phần ngoài': nói chính xác hơn, tập hợp các điểm trong $\mathbb{R}^2$ nếu *không* nằm trên đường cong γ là hợp rời của hai tập con của $\mathbb{R}^2$, kí hiệu bởi $\mathrm{int}(\gamma)$ và $\mathrm{ext}(\gamma)$, chúng có các tính chất sau đây:

(i) $\mathrm{int}(\gamma)$ *bị chặn*, nghĩa là nó nằm trong một đường tròn có bán kính đủ lớn.

(ii) $\mathrm{ext}(\gamma)$ không bị chặn;

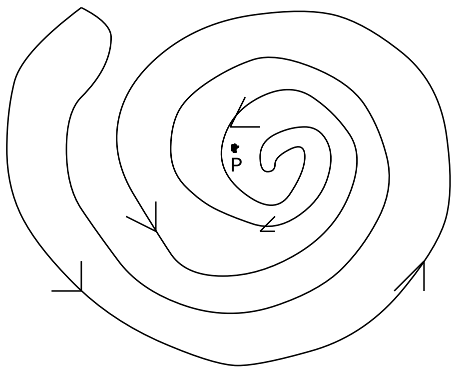
(iii) cả hai miền $\mathrm{int}(\gamma)$ và $\mathrm{ext}(\gamma)$ đều liên thông, nghĩa là chúng có tính chất bất kỳ hai điểm trong cùng một miền có thể nối bởi một đường cong nằm trong miền đó (nhưng bất kỳ đường cong nối một điểm của $\mathrm{int}(\gamma)$ với một điểm của $\mathrm{ext}(\gamma)$ đều cắt ngang đường cong γ).

Ví dụ 3.1. Đường tròn tham số

$$\gamma(t) = \Big(\cos\Big(\frac{2\pi t}{a}\Big), \sin\Big(\frac{2\pi t}{a}\Big)\Big)$$

là đường cong đóng đơn với chu kỳ a. Dĩ nhiên, phần trong của γ là $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ còn phần ngoài của γ là $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$.

Tuy nhiên không phải đường cong đóng đơn nào cũng xác định được phần trong và phần ngoài một cách dễ dàng. Chẳng hạn, hãy xác định xem điểm P trong hình vẽ dưới đây nằm ở phần trong hay phần ngoài của đường cong đóng đơn?



Do mỗi điểm trên một đường cong đóng đơn γ có chu kỳ a đều là vết của γ với tham số t, khi t biến đổi một đoạn có khoảng cách bằng a bất kỳ, chẳng hạn $0 \leq t \leq a$, nên có lí do khi ta định nghĩa *độ dài* của γ bởi

$$\ell(\gamma) = \int_0^a \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \tag{3.1}$$

trong đó dấu chấm trên kí hiệu đạo hàm của γ theo tham số. Do γ chính qui, nên nó có một tham số hóa lại có vận tốc đơn vị $\tilde{\gamma}$ với độ dài

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\| du$$

của γ là tham số của nó (sao cho $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$). Chú ý

$$s(t + a) = \int_0^{t+a} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^a \|\dot{\gamma}(u)\| du + \int_a^{t+a} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \ell(\gamma) + s(t),$$

đặt $v = u - a$ và do $\gamma(u - a) = \gamma(u)$, thu được

$$\int_a^{t+a} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^t \|\dot{\gamma}(v)\| dv = s(t).$$

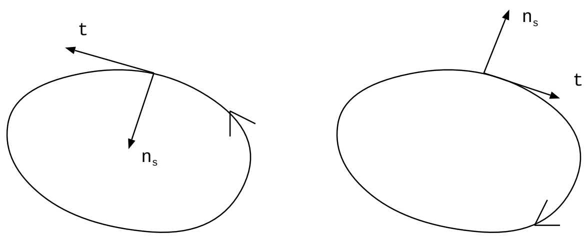
Do đó

$$\tilde{\gamma}(s(t)) = \tilde{\gamma}(s(t')) \Leftrightarrow \gamma(t) = \gamma(t') \Leftrightarrow t' - t = ka \Leftrightarrow s(t') - s(t) = k\ell(\gamma),$$

trong đó k là một số nguyên. Điều này chứng tỏ $\tilde{\gamma}$ là một đường đóng đơn với chu kỳ $\ell(\gamma)$. Chú ý rằng, do $\tilde{\gamma}$ có vận tốc đơn vị, điều này cũng đúng cho độ dài của $\tilde{\gamma}$. Nói tóm lại, *chúng ta luôn có thể giả sử đường đóng đơn có vận tốc đơn vị và nó có chu kỳ của bằng độ dài.*

Thông thường ta xét đường cong đóng đơn γ có *định hướng dương*. Có nghĩa là chuẩn đơn vị xác định dấu $\mathbf{n}_s$ của γ (xem §2.2) hướng vào bên trong $\text{int}(\gamma)$ tại mọi điểm của γ. Điều này luôn luôn thực hiện được bằng cách thay tham số t của γ bởi $-t$, nếu cần thiết.

Trong các hình vẽ trên, mũi tên cho biết chiều tăng của tham số. Hãy xác định xem đường cong đóng đơn ở trang trước có định hướng dương?



Đường cong định hướng dương (trái) và định hướng âm (phải)

Trong tiết sau, chung ta sẽ quan tâm đến diện tích của miền bao bởi một đường đóng đơn γ, tức là

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \int\int_{\text{int}(\gamma)} dxdy. \tag{3.2}$$

Ta có thể tính nó nhờ vào Định lý Green, nhắc lại: với mọi hàm trơn $f(x,y)$ và $g(x,y)$ (tức là các hàm có đạo hàm riêng liên tục ở mọi cấp),

$$\int\int_{\text{int}(\gamma)} \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)dxdy = \int_\gamma f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

với γ là một đường cong đóng đơn định hướng dương.

Mệnh đề 3.1. *Giả sử $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ là một đường cong đóng đơn định hướng dương trong $\mathbb{R}^2$ với chu kỳ a, khi đó*

$$\mathcal{A}(int(\gamma)) = \frac{1}{2}\int_0^a (x\dot{y} - y\dot{x})dt \tag{3.3}$$

Chứng minh. Thay $f = -\frac{1}{2}y, g = \frac{1}{2}x$ vào định lý Green, thu được

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx,$$

từ đó ta có ngay Pt. (3.3). □

Chú ý, mặc dù công thức ở Pt. (3.3) phụ thuộc vào tham số t của γ, nhưng rõ ràng từ định nghĩa (3.2) của $\mathcal{A}(\text{int})(\gamma)$, nó không thay đổi nếu γ được tham số hóa lại.

BÀI TẬP

3.1. Chứng minh rằng độ dài $\ell(\gamma)$ và diện tích $\mathcal{A}(\text{int})(\gamma)$ không đổi qua phép dời hình của γ (xem §2.2).

3.2. Chứng minh đường ellip

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t),$$

trong đó a và b là các hằng số dương, là một đường đóng đơn. Tính diện tích phần trong của nó.

3.3. Chứng minh đường limacon

$$\gamma(t) = ((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t)$$

là một đường cong (chính qui) có $\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t)$ với mọi giá trị của t, nhưng γ không phải là đường đóng đơn.

3.4. Chứng minh rằng nếu $\gamma(t)$ là một đường cong đóng đơn có chu kỳ a, và $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_s$ và κ_s tương ứng là các véctơ tiếp xúc, chuẩn đơn vị xác định dấu và độ cong có dấu, thì

$$\mathbf{t}(t + a) = \mathbf{t}(t),\ \mathbf{n}_s(t + a) = \mathbf{n}_s(t),\ \kappa_s(t + a) = \kappa_s(t).$$

(Lấy đạo hàm phương trình $\gamma(t + a) = \gamma(t)$.)

3.2 Bất đẳng thức đẳng chu

Kết quả quan trọng nhất về tính toàn cục của đường cong phẳng là

Định lý 3.1 (Bất đẳng thức đẳng chu). *Giả sử γ là một đường cong đóng đơn và $\ell(\gamma)$, $\mathcal{A}(int(\gamma))$ tương ứng là độ dài và diện tích phần trong của nó. Khi đó*

$$\mathcal{A}(int(\gamma)) \leq \frac{1}{4\pi}\ell(\gamma)^2,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi γ là một đường tròn.

Rõ ràng đẳng thức xảy ra đối với γ là đường tròn, vì khi đó $\ell(\gamma) = 2\pi R$ và $\mathcal{A}(\mathrm{int}(\gamma)) = \pi R^2$, trong đó R là bán kính của đường tròn.

Để chứng minh định lý này, chúng ta cần một kết quả từ giải tích, đó là *bất đẳng thức Wirtinger*:

Mệnh đề 3.2. *Giả sử $F : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn thỏa mãn $F(0) = F(\pi) = 0$. Khi đó*

$$\int_0^\pi \Big(\frac{dF}{dt}\Big)dt \geq \int_0^\pi F(t)^2 dt,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $F(t) = A\sin t$ với mọi $t \in [0, \pi]$, với A là một hằng số.

Thừa nhận kết quả này bây giờ chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đẳng chu.

Chứng minh . Để làm đơn giản chứng minh, trước hết chúng ta sẽ chuẩn bị một vài giả thiết cho γ. Đầu tiên, có thể giả sử γ được tham số hóa bởi độ dài cung s. Tuy nhiên, do có π xuất hiện trong Định lý , sẽ thuận tiện nếu ta giả sử chu kỳ của γ là π. Nếu ta thay đổi tham số của γ từ s thành

$$t = \pi s/\ell(\gamma), \tag{3.4}$$

đường cong thu được vẫn đóng đơn, và có chu kỳ π vì khi s tăng $\ell(\gamma)$, t tăng π. Do đó từ bây giờ chúng ta sẽ giả sử γ được tham số hóa sử dụng tham số t như trong Pt. (3.4).

Đơn giản hóa thứ hai, chú ý rằng $\ell(\gamma)$ và $\mathcal{A}(\mathrm{int}(\gamma))$ không thay đổi nếu thực hiện phép tịnh tiến đối với γ bởi $\gamma(t) \mapsto \gamma(t) + \mathbf{b}$, với $\mathbf{b}$ là véctơ hằng bất kỳ (xem Bài tập 3.1). Lấy $\mathbf{b} = -\gamma(0)$, chúng ta có thể giả thiết $\gamma(0) = \mathbf{0}$, tức là có thể giả thiết γ bắt đầu và kết thúc tại gốc tọa độ.

Để chứng minh Định lý 3.2 chúng ta sẽ tính $\ell(\gamma)$ và $\mathcal{A}(\mathrm{int}(\gamma))$ nhờ sử dụng hệ tọa độ cực

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

Theo luật hợp thành, ta có

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2,\ x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta},$$

trong đó d/dt được ký hiệu bởi dấu chấm trên. Khi đó, sử dụng Pt. 3.4, thu được

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 = \Big(\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2\Big)\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi^2}, \tag{3.5}$$

vì $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1$. Hơn nữa, từ Pt. (3.3), ta có

$$\mathcal{A}(\mathrm{int}(\gamma)) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\dot{\theta}dt. \tag{3.6}$$

Điều cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{4\pi}\ell(\gamma)^2 - \mathcal{A}(\mathrm{int}(\gamma)) \geq 0,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi γ là một đường tròn. Theo Pt. (3.5),

$$\int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)dt = \frac{\ell(\gamma)^2}{\pi}.$$

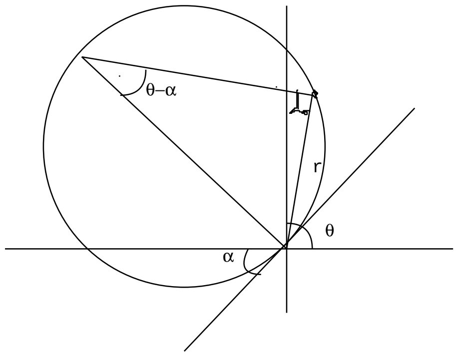
Do đó, sử dụng Pt. (3.6),

$$\frac{\ell(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\mathrm{int}(\gamma)) = \frac{1}{4}\int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\dot{\theta}dt = \frac{1}{4}\mathcal{I},$$

trong đó

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r^2\dot{\theta})dt. \tag{3.7}$$

Vì vậy để kết thúc chứng minh, chúng ta cần chỉ ra $\mathcal{I} \geq 0$, và $\mathcal{I} = 0$ khi và chỉ khi γ là một đường tròn.



Bằng tính toán đơn giản,

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi r^2(\dot{\theta} - 1)^2 dt + \int_0^\pi (\dot{r}^2 - r^2)dt. \tag{3.8}$$

Tích phân đầu tiên ở vế phải Pt. (3.8) rõ ràng ≥ 0, và tích phân sau ≥ 0 do bất đẳng thức Wirtinger (lấy $F = r$: chú ý rằng $r(0) = r(\pi) = 0$ vì $\gamma(0) = \gamma(\pi) = \mathbf{0}$). Do đó $\mathcal{I} \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi cả hai tích phân này bằng không. Nhưng tích phân đầu tiên bằng không chỉ khi $\dot{\theta} = 1$ với mọi t, còn tích phân thứ hai bằng không chỉ khi $r = A\sin t$ với A là một hằng số nào đó (do Wirtinger). Vì vậy $\theta = t + \alpha$, với α là một hằng số, nên $r = A\sin(\theta - \alpha)$. Dễ dàng nhận ra trong hệ tọa độ cực đây là phương trình đường tròn có bán kính A. Ta kết thúc chứng minh Định lý 3.2. $\square$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức Wirtinger:

Đặt $G(t) = F(t)/\sin t$. Với kí hiệu dấu chấm trên cho d/dt, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \dot{F}^2 dt &= \int_0^\pi (\dot{G}\sin t + G\cos t)^2 dt \\ &= \int_0^\pi \dot{G}\sin^2 t + 2\int_0^\pi G\dot{G}\sin t\cos t dt + \int_0^\pi G^2\cos^2 t dt.\end{aligned}$$

Tính tích phân từng phần:

$$\begin{aligned}2\int_0^\pi G\dot{G}\sin t\cos t dt &= G^2\sin t\cos t\big|_0^\pi - \int_0^\pi G^2(\cos^2 t - \sin^2 t)dt \\ &= \int_0^\pi G^2(\sin^2 t - \cos^2 t)dt.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \dot{F}^2 dt &= \int_0^\pi \dot{G}\sin^2 t + \int_0^\pi G^2(\sin^2 t - \cos^2 t)dt + \int_0^\pi G^2\cos^2 t dt \\ &= \int_0^\pi (G + \dot{G}^2)\sin^2 t dt = \int_0^\pi F^2 dt + \int_0^\pi \dot{G}^2\sin^2 t dt,\end{aligned}$$

và

$$\int_0^\pi \dot{F}^2 dt - \int_0^\pi F^2 dt = \int_0^\pi \dot{G}^2 \sin^2 t dt.$$

Tích phân ở vế phải rõ ràng ≥ 0, và nó bằng không khi và chỉ khi $\dot{G} = 0$ với mọi t, tức là, khi và chỉ khi $G(t)$ bằng một hằng số, chẳng hạn A, với mọi t. Vậy $F(t) = A \sin t$, ta có điều phải chứng minh. □

BÀI TẬP

3.5. Sử dụng bất đẳng thức đẳng chu cho ellip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

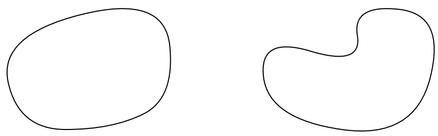
(với a và b là các hằng số dương), hãy chứng minh

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \geq 2\pi \sqrt{ab},$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ (xem bài tập 3.2).

3.3 Định lý Bốn đỉnh

Chúng ta kết thúc chương này bằng một kết quả nổi tiếng về đường cong lồi trong mặt phẳng. Một đường cong đóng đơn γ được gọi là *lồi* nếu phần trong của nó $\mathrm{int}(\gamma)$ là hình lồi, theo nghĩa thông thường tức là mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong $\mathrm{int}(\gamma)$ hoàn toàn nằm bên trong nó.



Đường cong lồi (trái) và lõm (phải)

Định nghĩa 3.2. Một *đỉnh* của đường cong $\gamma(t)$ trong $\mathbb{R}^2$ là điểm mà độ cong có dấu κ_s tại đó có tính ổn định, tức là $d\kappa_s/dt = 0$.

Dễ thấy định nghĩa này không phụ thuộc vào tham số hóa cho γ (xem Bài tập 3.7).

Ví dụ 3.2. Đường ellip $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, với a và b là các hằng số dương, là một đường cong đóng đơn lồi với chu kỳ bằng 2π (xem các Bài tập 3.2 và 3.6). Dễ dàng tính được độ cong có dấu của nó bằng

$$\kappa_s(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Do đó

$$\frac{d\kappa_s}{dt} = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}}$$

triệt tiêu tại đúng bốn điểm trên ellip, đó là các điểm với $t = 0, \pi/2, \pi$ và $3\pi/2$, là điểm cuối của ellip nằm trên hai trục tọa độ.

Định lý sau đây chỉ ra số đỉnh bé nhất mà một đường cong đóng đơn có thể có.

Định lý 3.2 (Định lý Bốn đỉnh)**.** *Mọi đường cong đóng đơn lồi trong $\mathbb{R}^2$ đều có ít nhất bốn đỉnh.*

Thật ra định lý vẫn đúng nếu bỏ đi giả thiết lồi, nhưng chứng minh sẽ phức tạp hơn chứng minh mà chúng ta đưa ra dưới đây.

Chứng minh. Chúng ta có thể giả thiết $\gamma(t)$ có vận tốc đơn vị, chu kỳ bằng độ dài ℓ của nó. Xét tích phân

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s(t)\gamma(t)dt,$$

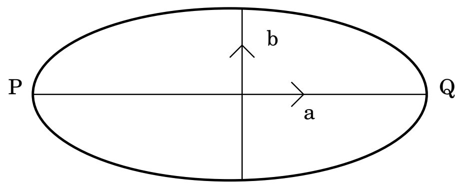
dấu chấm trên kí hiệu cho d/dt. (Nhắc lại ở Bài tập 2.4, κ_s là một hàm trơn theo t.) Lấy tích phân từng phần và sử dụng phương trình $\dot{\mathbf{n}}_s = -\kappa_s(t)$ (xem bài tập 2.3), thu được

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s\gamma dt = -\int_0^\ell \kappa_s\dot{\gamma}dt = -\int_0^\ell \kappa_s\mathbf{t}dt = -\int_0^\ell \dot{\mathbf{n}}_s dt = \mathbf{n}_s(\ell) - \mathbf{n}_s(0) = \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

Vì κ_s đạt được mọi giá trị của nó trong đoạn đóng $[0,\ell]$, vì vậy κ_s phải nhận giá trị cực đại và cực tiểu của nó tại các điểm, chẳng hạn tương ứng P và Q của γ. Ta có thể giả sử $P \neq Q$, nếu không κ_s phải là hàm hằng, nên γ là một đường tròn (xem bài tập 2.2), và mọi điểm của γ đều là đỉnh. Giả sử $\mathbf{a}$ là véctơ đơn vị song song với véctơ $\mathbf{PQ}$, và giả sử $\mathbf{b}$ là véctơ thu được bằng cách quay $\mathbf{a}$ một góc $\pi/2$ ngược chiều kim đồng hồ. Xét tích véctơ của tích phân trong Pt. (3.9) với véctơ hằng $\mathbf{b}$, thu được

$$\int_0^\ell \dot{\kappa}_s(\gamma.\mathbf{b})dt = 0. \tag{3.10}$$

Giả sử chỉ có P và Q là các đỉnh của γ. Do γ lồi, nên đường thẳng nối P và Q chia γ thành hai cung, và do



Đường cong lồi (trái) và lõm (phải)

giữa chúng không có đỉnh nào khác, chúng ta có thể giả sử $\dot{\kappa}_s > 0$ ở phần cung này và $\dot{\kappa}_s < 0$ ở phần cung kia. Nhưng hàm lấy tích phân ở vế trái của Pt. (3.10) luôn luôn > 0 hoặc luôn luôn < 0 (ngoại trừ tại P và Q thì nó triệt tiêu), do đó tích phân phải > 0 hoặc < 0, vô lí.

Do đó, tồn tại thêm ít nhất một đỉnh, chẳng hạn R. Nếu không có đỉnh nào khác thì ba biểm P, Q và R chia γ thành ba cung, mỗi cung có $\dot{\kappa}_s$ luôn luôn > 0 hoặc < 0. Vì thế $\dot{\kappa}_s$ phải cùng dấu ở hai cung kề nhau. Do đó, có một đường thẳng chia γ làm hai cung, $\dot{\kappa}_s > 0$ ở phần cung này và $\dot{\kappa}_s < 0$ ở phần cung kia. Tương tự như ở phần trên ta có điều vô lí. □

BÀI TẬP

3.6. Chứng minh rằng ellip trong Bài tập 3.2 là lồi.

3.7. Chứng minh định nghĩa của một đỉnh của một đường cong không phụ thuộc vào tham số hóa của nó.

3.8. Chứng minh limacon trong Bài tập 3.3 chỉ có hai đỉnh.

Chương 4

Các mặt cong trong không gian ba chiều

Trong chương này chúng ta sẽ giới thiệu một vài cách khác nhau để ra một cách toán học khái niệm của mặt cong. Mặc dù đơn giản nhất coi mặt cong như là một miếng vá, như thế đã đủ cho hầu hết cuốn sách, nhưng như vậy chưa thể mô tả một cách thỏa đáng cho các đối tượng mà chúng ta muốn gọi là các mặt cong. Chẳng hạn, mặt cầu không phải là một miếng vá, nhưng nó có thể mô tả bởi dán hai miếng vá một cách thích hợp. Ý tưởng đằng sau phép dán này khá đơn giản, nhưng việc thực hiện một cách chính xác hóa ra có một chút phức tạp. Chúng tôi cố gắng làm giảm thiểu những phiền hà này bằng cách đưa những chứng minh cần sự kiên nhẫn ở tiết cuối cùng của chương này; những kết quả đó không được sử dụng ở chỗ khác trong cuốn sách nên nếu muốn có thể bỏ qua. Thật ra, các mặt cong (đối lập với miếng vá) sẽ được sử dụng một cách chính xác chỉ một vài chỗ trong cuốn sách.

4.1 Mặt cong là gì?

Một mặt cong là một tập con của $\mathbb{R}^3$ mà mỗi lân cận của mỗi điểm tựa như một mảnh của $\mathbb{R}^2$, chẳng hạn bề mặt của quả địa cầu, mặc dù nó gần như là một mặt cầu, nhưng đối với một người đứng trên mặt đất quan sát thì nó dường như là một mặt phẳng. Để hiểu một cách chính xác những nhóm từ 'tựa như' và 'lân cận' trước hết chúng ta cần có một vài chuẩn bị. Chúng ta sẽ phát biểu cho $\mathbb{R}^n$ với mọi $n \geq 1$, mặc dù chỉ cần cho $n = 1, 2$ hoặc 3.

Trước hết, một tập con U của $\mathbb{R}^n$ được gọi là *mở*, nếu với mỗi điểm $\mathbf{a}$ trong U, tồn tại một số dương ε sao cho mọi điểm $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ cách điểm $\mathbf{a}$ một khoảng cách bằng ε đều nằm trong U:

$$\mathbf{a} \in U \text{ và } \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{u} \in U.$$

Ví dụ, toàn bộ $\mathbb{R}^n$ là một tập mở, cũng như đối với

$$\mathcal{D}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| < r\},$$

quả cầu mở tâm $\mathbf{a}$ bán kính $r > 0$. (Nếu $n = 1$, một quả cầu mở được gọi là một khoảng mở; nếu $n = 2$ nó được gọi là một đĩa mở.) Tuy nhiên,

$$\bar{\mathcal{D}}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

không mở, vì với số ε nhỏ như thế nào cũng đều có một điểm cách điểm $(a_1 + r, a_2, ..., a_n) \in \bar{\mathcal{D}}_r(\mathbf{a})$ một khoảng cách bằng ε mà nó không nằm trong $\bar{\mathcal{D}}_r(\mathbf{a})$ (chẳng hạn lấy điểm $(a_1 + r + \frac{\varepsilon}{2}, a_2, ..., a_n)$).

Tiếp đến, nếu X và Y tương ứng là các tập con của $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ và $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là liên tục tại một điểm $\mathbf{a} \in X$ nếu các điểm gần với điểm $\mathbf{a}$ có ảnh qua f là các điểm trong Y gần với điểm $f(\mathbf{a})$. Chính xác hơn, f *liên tục* tại $\mathbf{a}$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\mathbf{u} \in X \text{ và } \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon.$$

Và f được gọi là *liên tục* nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc X. Hợp của hai ánh xạ liên tục là liên tục.

Dựa vào định nghĩa của tập mở, ta có khẳng định tương đương sau: f liên tục khi và chỉ khi, với mọi tập mở V trong $\mathbb{R}^n$, tồn tại tập mở U trong $\mathbb{R}^m$ sao cho f ánh xạ $U \cap X$ vào trong $V \cap Y$.

Nếu $f : X \to Y$ liên tục và song ánh, và ánh xạ ngược của nó $f^{-1} : Y \to X$ cũng liên tục, thì f được gọi là một *đồng phôi* và X được gọi là đồng phôi với Y.

Bây giờ chúng ta đã có thể đi đến khái niệm mặt cong trong $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa 4.1. Một tập con $\mathcal{S}$ của $\mathbb{R}^3$ được gọi là một *mặt cong* nếu với mọi điểm $P \in \mathcal{S}$, tồn tại một tập mở U trong $\mathbb{R}^2$ và một tập mở W chứa P trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $\mathcal{S} \cap W$ đồng phôi với U.

Như vậy mỗi một mặt cong được trang bị bởi các đồng phôi $\sigma : U \to \mathcal{S} \cap W$, mà chúng ta sẽ gọi là các *miếng vá* hoặc các *tham số hóa*. Tập hợp tất cả các miếng vá này được gọi là một *bản đồ* của $\mathcal{S}$. Mỗi một điểm của $\mathcal{S}$ nằm trong ảnh của ít nhất một miếng vá trong bản đồ của $\mathcal{S}$. Lí do cho thuật ngữ này sẽ rõ hơn qua các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4.1. Mỗi mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$ là một mặt cong với bản đồ là một miếng vá. Thật vậy, giả sử $\mathbf{a}$ là một điểm nào đó trên mặt phẳng, $\mathbf{p}$ và $\mathbf{q}$ là hai véctơ vuông góc với nhau, có độ dài đơn vị và song song với mặt phẳng đã cho. Khi đó mỗi véctơ song song với mặt phẳng là một tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{p}$ và $\mathbf{q}$, có dạng $u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$ với các vô hướng u và v. Với $\mathbf{r}$ là một điểm bất kỳ trên mặt phẳng, thì véctơ $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ song song với mặt phẳng, do đó

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = u\mathbf{p} + v\mathbf{q},$$
$$\therefore \quad \mathbf{r} = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q},$$

với các vô hướng u và v nào đó. Như vậy có thể xét mảnh vá là

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q},$$

và ánh xạ ngược của nó là

$$\sigma^{-1}(\mathbf{r}) = ((\mathbf{r} - \mathbf{a}).\mathbf{p}, (\mathbf{r} - \mathbf{a}).\mathbf{q}).$$

Từ các công thức trên có thể thấy ngay rằng σ và σ^{-1} là các ánh xạ liên tục, do đó σ là một đồng phôi. (Chúng ta sẽ không kiểm tra chi tiết điều này.)

Trong ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ thấy vì sao cần phải xét đến mặt cong, mà không phải chỉ là các miếng vá.

Ví dụ 4.2. Xét *mặt cầu đơn vị*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

là một mặt cong. Tham số hiển nhiên nhất là thông qua vĩ độ θ và kinh độ φ:

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta).$$

hinhve!!

Nếu không hạn chế (θ, φ), thì σ không phải là một song ánh (và do đó nó không phải là một đồng phôi). Để phủ hết mặt cầu, rõ ràng chọn như sau là đủ

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Tuy nhiên, tập hợp các điểm (θ, φ) thỏa mãn các bất đẳng thức trên không phải là một tập con mở của $\mathbb{R}^2$, vì vậy nó không thể coi như là một miếng vá. Tập mở lớn nhất thỏa mãn các bất đẳng thức trên là

$$U = \{(\theta, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi\},$$

nhưng khi đó ảnh của $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ không phải là toàn bộ mặt cầu, mà là phần bù của nửa đường tròn lớn $\mathcal{C}$ bao gồm các điểm trên mặt cầu có tọa độ $(x, 0, z)$ với $x \geq 0$. Do đó, $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ chỉ phủ lên một 'mảnh' của mặt cầu. Một lần nữa, chúng ta sẽ không kiểm tra chi tiết tại sao σ là một đồng phôi giữa U và phần giao của mặt cầu với tập mở

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0 \text{ hoặc } y \neq 0\}.$$

hinhve!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Vì vậy để chứng tỏ mặt cầu là một mặt cong, chúng ta cần phải xây dựng thêm ít nhất một mảnh vá nữa để phủ nốt phần mặt cầu bị σ bỏ qua. Ví dụ, xét $\tilde{\sigma}$ là mảnh vá nhận được bằng cách quay σ một góc π quanh trục Oz và sau đó một góc $\pi/2$ quanh trục Ox. Cụ thể, $\tilde{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin\varphi)$$

(tập mở U cũng giống như trong trường hợp của σ). Ảnh của $\tilde{\sigma}$ là phần bù của nửa đường tròn lớn $\tilde{\mathcal{C}}$ bao gồm các điểm trên mặt cầu có tọa độ $(x, y, 0)$ với $x \leq 0$ (xem hình vẽ dưới đây). Rõ ràng $\mathcal{C}$ và $\tilde{\mathcal{C}}$ không giao nhau, vì vậy hợp thành của các ảnh của σ và $\tilde{\sigma}$ là toàn bộ mặt cầu. Chú ý rằng hầu hết các điểm của mặt cầu nằm trên ảnh của cả hai mảnh vá.

hinhve!!

Một trực giác rõ ràng, tuy nhiên chứng minh không phải là hiển nhiên, đó là mặt cầu không thể phủ bởi duy nhất một mảnh vá (xem Bài tập 4.5).

Ví dụ cuối cùng của chúng ta (tại thời điểm này) là một tập con của $\mathbb{R}^3$ gần như là, nhưng không phải, một mặt cong.

Ví dụ 4.3. Xét *mặt nón đúp*

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

hinhve!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Để nhận thấy đây không phải là một mặt cong, giả sử $\sigma : U \to \mathcal{S} \cap W$ là một mảnh vá chứa đỉnh $(0, 0, 0)$ của mặt nón, và giả sử $\mathbf{a} \in U$ là điểm tương ứng với đỉnh này. Chúng ta có thể giả thiết U là một quả cầu mở với tâm $\mathbf{a}$, vì mọi tập mở U chứa $\mathbf{a}$ phải chứa một quả cầu mở như thế. Rõ ràng tập mở W phải chứa một điểm $\mathbf{p}$ trong phần bên dưới $\mathcal{S}_-$ với $z < 0$ của $\mathcal{S}$ và một điểm $\mathbf{q}$ trong phần bên trên $\mathcal{S}_+$ với $z > 0$ của $\mathcal{S}$; gọi $\mathbf{b}$ và $\mathbf{c}$ là các điểm tương ứng thuộc U. Rõ ràng tồn tại một đường cong $\boldsymbol{\pi}$ nằm trong U đi qua $\mathbf{b}$ và $\mathbf{c}$, nhưng không đi qua $\mathbf{a}$. Qua ánh xạ σ ảnh của nó là đường cong $\gamma = \sigma \circ \boldsymbol{\pi}$ nằm trọn trong $\mathcal{S}$, đi qua $\mathbf{p}$ và $\mathbf{q}$, nhưng không đi qua đỉnh. (Chú ý rằng trong trường hợp tổng quát, γ không trơn mà chỉ liên tục, nhưng điều này không làm ảnh hưởng đến khẳng định.) Điều này không thể xảy ra. (Bạn đọc thành thạo về tôpô tập điểm có thể đưa ra lập luận chặt chẽ cho khẳng định này.)

hinhve!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Nếu chúng ta bỏ đi đỉnh thì sẽ nhận được mặt cong $\mathcal{S}_- \cup \mathcal{S}_+$. Nó có một bản đồ bao gồm hai miếng vá $\sigma_\pm : U \to \mathbb{R}^3$, với $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, xác định bởi ánh xạ ngược của phép chiếu lên mặt phẳng Oxy:

$$\sigma_\pm(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Như trong ví dụ của mặt cầu, một điểm $\mathbf{a}$ của một mặt cong $\mathcal{S}$ nói chung nằm trong ảnh của nhiều hơn một miếng vá. Giả sử $\sigma : U \to \mathcal{S} \cap W$ và $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to \mathcal{S} \cap \tilde{W}$ là hai miếng vá mà $\mathbf{a} \in \mathcal{S} \cap W \cap \tilde{W}$. Do σ và $\tilde{\sigma}$ là các đồng phôi, nên $\sigma^{-1}(\mathcal{S} \cap W \cap \tilde{W})$ và $\tilde{\sigma}^{-1}(\mathcal{S} \cap W \cap \tilde{W})$ là các tập mở $V \subseteq U$ và $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ tương ứng. Đồng phôi hợp thành $\sigma \circ \tilde{\sigma} : \tilde{V} \to V$ được gọi là *ánh xạ chuyển* từ σ đến $\tilde{\sigma}$. Nếu kí hiệu ánh xạ này là Φ, ta có

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma(\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

với mọi $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{V}$.

hinhve!!!

BÀI TẬP

4.1. Chứng minh đĩa mở trong mặt phẳng Oxy là một mặt cong.

4.2. Chứng minh rằng *mặt trụ tròn xoay*

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

có thể phủ bởi một miếng vá, vì vậy nó là mặt cong. (Gợi ý: Lấy U là mặt phẳng bỏ đi 1 điểm.)

4.3. Định nghĩa các miếng vá $\sigma_{\pm}^{x} : U \to \mathbb{R}^3$ cho mặt cầu có bán kính đơn vị từ việc giải phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ biến x theo y và z:

$$\sigma_{\pm}^{x}(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

xác định trên tập mở $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$. Tương tự, giải phương trình theo y và z có thể định nghĩa được tương ứng các miếng vá $\sigma_{\pm}^{y}$ và $\sigma_{\pm}^{z}$ (với cùng một U). Chứng minh rằng với sáu miếng vá này mặt cầu có cấu trúc mặt.

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

4.4. Hyperboloid một tầng là

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

(Hình vẽ của một hyperboloid có thể xem trong Mệnh đề 4.6.) Chứng minh rằng, với mỗi θ, đường thẳng

$$(x - z)\cos\theta = (1 - y)\sin\theta, \quad (x + z)\sin\theta = (1 + y)\cos\theta$$

nằm trên $\mathcal{S}$, và mỗi điểm của $\mathcal{S}$ thì nằm trên một trong những đường thẳng này. Hãy chứng tỏ $\mathcal{S}$ có thể phủ bởi một miếng vá, do đó nó là một mặt. (So sánh với trường hợp mặt trụ trong Bài tập 4.2.)

Hãy tìm một họ đường thẳng thứ hai trên $\mathcal{S}$, và hãy chứng tỏ rằng bất kỳ hai đường thẳng nào trong cùng một họ thì không cắt nhau, trong khi mỗi đường thẳng thuộc họ thứ nhất thì giao với tất cả các đường thẳng thuộc họ thứ hai ngoại trừ một trường hợp. Vì thế người ta gọi $\mathcal{S}$ là *mặt thước kép*.

4.5. Chứng minh rằng mặt cầu đơn vị không thể phủ bằng một miếng vá. (Cần kiến thức về tôpô tập điểm.)

4.2 Mặt trơn

Trong Hình học vi phân chúng ta sẽ dùng các tính toán giải tích để nghiên cứu các mặt (và cũng như các đối tượng hình học khác). Chẳng hạn ... Với lý do đó, chúng ta cần xét các mặt với các cấu trúc bổ sung.

Trước hết, với U là một tập con mở của $\mathbb{R}^m$, ánh xạ $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ được gọi là trơn nếu mỗi trong n thành phần của $\mathbf{f}$, là các hàm $U \to \mathbb{R}$, có đạo hàm riêng liên tục ở mọi cấp. Khi đó các đạo hàm riêng của $\mathbf{f}$ được tính mỗi thành phần. Ví dụ, nếu $m = 2$ và $n = 3$, và

$$\mathbf{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)),$$

thì

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v}\right),$$

và tương tự cho các đạo hàm cấp cao hơn. Chúng ta thường dùng cách viết ngắn gọn sau:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \mathbf{f}_u, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \mathbf{f}_v,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u^2} = \mathbf{f}_{uu}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u \partial v} = \mathbf{f}_{uv}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v^2} = \mathbf{f}_{vv},$$

và tương tự. Chú ý rằng $\mathbf{f}_{uv} = \mathbf{f}_{vu}$, vì tất cả các đạo hàm riêng của các thành phần của $\mathbf{f}$ liên tục.

Bây giờ thì có thể nói đến tính trơn của các miếng vá $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ trong bản đồ của $\mathcal{S}$. Tuy nhiên chúng ta cần thêm một điều kiện nữa.

Định nghĩa 4.2. Một miếng vá $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ được gọi là *chính qui* nếu nó trơn và các véctơ σ_u và σ_v độc lập tuyến tính tại mọi điểm $(u, v) \in U$. Một cách tương đương, σ trơn đồng thời tích véctơ $\sigma_u \times \sigma_v$ khác véctơ không tại mọi điểm của U.

Cuối cùng chúng ta đi đến định nghĩa của lớp các mặt sẽ được học trong cuốn sách này.

Định nghĩa 4.3. Một *trơn* là một mặt σ mà bản đồ bao gồm các miếng vá chính qui.

Ví dụ 4.4. Mặt phẳng trong Ví dụ 4.1 là một mặt trơn. Do

$$\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$$

rõ ràng là trơn và $\sigma_u = \mathbf{p}$, $\sigma_v = \mathbf{q}$ độc lập tuyến tính (vì $\mathbf{p}$ và $\mathbf{q}$ theo cách chọn là các véctơ có độ dài đơn vị vuông góc với nhau).

Ví dụ 4.5. Mặt cầu có bán kính đơn vị S^2 trong Ví dụ 4.2, có σ và $\tilde{\sigma}$ trơn. Để kiểm tra tính chính qui, tính

$$\sigma_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad \sigma_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0),$$

dẫn đến

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2\theta\cos\varphi, -\cos^2\theta\sin\varphi, -\sin\theta\cos\theta)$$

do đó $\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos\theta|$. Hơn nữa nếu $(\theta, \varphi) \in U$, thì $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, do đó $\cos\theta \neq 0$. Tương tự, có thể kiểm tra tính chính qui của $\tilde{\sigma}$.

Trong Bài tập 4.3 chúng ta cho một họ các miếng vá khác phủ mặt cầu đơn vị S^2, và cũng dễ dàng kiểm tra được tính chính qui của chúng (xem Bài tập 4.7). Cùng với Ví dụ 4.5, chúng ta có hai bản đồ cho S^2 bao gồm các miếng vá chính qui, vì thế câu hỏi đặt ra: bản đồ nào chúng ta dùng để nghiên cứu mặt cầu? Câu trả lời là chúng ta có thể dùng mỗi một, hoặc cả hai. Với tám miếng vá trong Bài tập 4.3 và cùng với Ví dụ 4.5 ta có bản đồ thứ ba. Trong hầu hết các trường hợp (không phải tất cả, xem Định nghĩa **??**), với mỗi mặt ta có thể dùng thuật ngữ *bản đồ cực đại*, đó là bản đồ chứa tất cả các miếng vá chính qui $\sigma : U \to \mathcal{S} \cap W$, trong đó U và W, tương ứng, là các tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$. Các miếng vá như vậy được gọi là các miếng vá *chấp nhận được* của $\mathcal{S}$. Bản đồ cực đại không phụ thuộc vào cách chọn nào.

Hai kết quả dưới đây có vẻ không thú vị ngay, nhưng chúng rất quan trọng cho hệ quả sau đó.

Mệnh đề 4.1. *Các ánh xạ chuyển của một mặt trơn là trơn.*

Chứng minh của khẳng định này sẽ được trình bày trong Tiết 4.7. Kết quả tiếp theo như là điều khẳng định ngược lại.

Mệnh đề 4.2. *Giả sử U và $\tilde{U}$ là các tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ là một miếng vá chính qui. Giả sử $\Phi : \tilde{U} \to U$ là một song ánh trơn với ánh xạ ngược $\Phi^{-1} : U \to \tilde{U}$ cũng trơn. Khi đó, $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ là một miếng vá chính qui.*

Chứng minh. Miếng vá $\tilde{\sigma}$ là trơn do hợp thành của các ánh xạ trơn là trơn. Với tính chính qui, giả sử $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$. Theo qui tắc dây chuyền,

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\sigma_v, \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\sigma_v,,$$

vì vậy

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) \sigma_u \times \sigma_v. \tag{4.1}$$

Vô hướng trong vế phải của phương trình trên là định thức của *ma trận Jacobi*

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

của Φ. Nhắc lại kiến thức trong giải tích, nếu Ψ và $\tilde{\Psi}$ là hai ánh xạ giữa các tập mở trong $\mathbb{R}^2$,

$$J(\tilde{\Psi} \circ \Psi) = J(\tilde{\Psi})J(\Psi).$$

(Thật ra, điều này tương đương với qui tắc dây chuyền cho đạo hàm riêng cấp một của $\tilde{\Psi} \circ \Psi$.) Lấy $\Psi = \Phi$ và $\tilde{\Psi} = \Phi^{-1}$, ta có $J(\Phi^{-1}) = J(\Phi)^{-1}$. Đặc biệt, $J(\Phi)$ khả nghịch, vì vậy định thức của nó khác không và từ Pt. (4.1) suy ra $\tilde{\sigma}$ chính qui. □

Nếu các miếng vá chính qui σ và $\tilde{\sigma}$ như trong mệnh đề trên, chúng ta nói $\tilde{\sigma}$ là một *tham số hóa lại* của σ, còn Φ là *ánh xạ chuyển*. Chú ý rằng σ khi đó cũng là một tham số hóa lại của $\tilde{\sigma}$, vì $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \Phi^{-1}$.

Cũng chú ý rằng, nếu $\sigma : U \to \mathcal{S} \cap W$ và $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to \mathcal{S} \cap \tilde{W}$ là hai miếng vá chấp nhận được của một mặt trơn $\mathcal{S}$, và nếu $V \subseteq U$ và $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ là các tập con mở sao cho $\sigma(V) = \tilde{\sigma}(\tilde{V}) = \mathcal{S} \cap W \cap \tilde{W}$, thì $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} : \tilde{V} \to V$ là song ánh, trơn và có ánh xạ ngược cũng trơn do Mệnh đề 4.1. Vì vậy, $\tilde{\sigma}$ là *một tham số hóa lại của σ tại những nơi mà cả hai đều xác định*.

Nhận xét này dẫn đến một nguyên lí rất cơ bản mà chúng ta sẽ sử dụng trong suốt cuốn sách. Đó là, *chúng ta có thể định nghĩa một tính chất của bất kỳ mặt cho trước nào nếu chúng ta có thể định nghĩa nó cho mỗi miếng vá chính qui với điều kiện nó không thay đổi khi miếng vá được tham số hóa lại*.

Để minh họa nguyên lí này, chúng ta định nghĩa cái gọi là *ánh xạ trơn* $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$, trong đó $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ là các mặt trơn. Theo nguyên lí chung của chúng ta, có thể giả sử $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ được phủ bởi chỉ mỗi một miếng vá $\sigma_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3$ và $\sigma_2 : U_2 \to \mathbb{R}^3$, và định nghĩa này phải không bị ảnh hưởng bởi tham số hóa lại của σ_1 và σ_2. Do σ_1 và σ_2 là các song ánh, mỗi ánh xạ $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ cho ta ánh xạ $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \to U_2$, và chúng ta nói rằng f trơn nếu ánh xạ này trơn (chúng ta đã có khái niệm trơn của một ánh xạ giữa các tập con mở của $\mathbb{R}^2$). Bây giờ giả sử $\tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \to \mathbb{R}^3$ và $\tilde{\sigma}_2 : \tilde{U}_2 \to \mathbb{R}^3$ là các tham số hóa lại của σ_1 và σ_2, với $\Phi_1 : \tilde{U}_1 \to U_1$ và $\Phi_2 : \tilde{U}_2 \to U_2$ tương ứng là các ánh xạ tham số hóa lại. Chúng ta phải chứng tỏ rằng ánh xạ tương ứng $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ là trơn nếu $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ trơn. Điều này đúng, do

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 &= \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ (\tilde{\sigma}_2 \circ \tilde{\sigma}_2^{-1}) \circ f \circ (\tilde{\sigma}_1 \circ \tilde{\sigma}_1^{-1}) \circ \tilde{\sigma}_1 \\ &= (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \tilde{\sigma}_2) \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ (\tilde{\sigma}_1^{-1}) \circ \tilde{\sigma}_1) \\ &= \Phi_2^{-1} \circ (\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1) \circ \Phi_1, \end{aligned}$$

và Φ_1, Φ_2^{-1} là các ánh xạ trơn (giữa các tập con mở của $\mathbb{R}^2$).

Chương 5

Độ cong Gauss và ánh xạ Gauss

Chúng ta sẽ giới thiệu hai độ cong khác của mặt, đó là độ cong Gauss và độ cong trung bình. Mặc dù cả hai độ cong này kết hợp lại thì cùng cho thông tin như hai độ cong chính, tuy vậy chúng có nhiều ý nghĩa hình học hơn. Đặc biệt trong chương 10 chúng ta sẽ thấy một tính chất đáng chú ý, độ cong Gauss không đổi khi ta uốn mà không làm giãn mặt cong, điều này không xảy ra đối với các độ cong chính. Trong chương này chúng ta sẽ bàn đến một số tính chất cơ bản của các độ cong Gauss và trung bình, và ý nghĩa hình học của chúng.

5.1 Độ cong Gauss và độ cong trung bình

Định nghĩa 5.1. Giả sử κ_1 và κ_2 là hai độ cong chính của một mảnh vá. Khi đó *độ cong Gauss* của mảnh vá là

$$K = \kappa_1\kappa_2,$$

và *độ cong trung bình* của nó là

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Chú ý có một vài tác giả thường bỏ qua thừa số $1/2$ trong định nghĩa của H, mặc dù như vậy thì có vẻ mâu thuẫn với nghĩa thông thường của 'trung bình'.

Theo Bài tập 6.17 thì độ cong Gauss không thay đổi khi tham số hóa lại mặt cong, trong khi độ cong trung bình thì có thể thay đổi bởi dấu. Vì vậy *độ cong Gauss được định nghĩa tốt cho bất kì mặt cong S nào.*

Dễ dàng thu được các công thức cụ thể cho H và K như sau:

Mệnh đề 5.1. *Giả sử $\sigma(u,v)$ là một mảnh vá và các dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai của nó tương ứng là*

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad \text{và} \quad Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Khi đó:

(i) $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$;

(ii) $H = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$;

(iii) Các độ cong chính là $H \pm \sqrt{H^2-K}$.

Chứng minh. Theo Định nghĩa **??**, các độ cong chính κ_1, κ_2 là nghiệm của phương trình

$$\begin{vmatrix} L-\kappa E & M-\kappa F \\ M-\kappa F & N-\kappa G \end{vmatrix} = 0,$$

$$\therefore (L - \kappa E)(N - \kappa G) - (M - \kappa F)^2 = 0,$$

$$\therefore (EG - F^2)\kappa^2 - (LG - 2MF + NE)\kappa + LN - M^2 = 0.$$

Từ định lý Viet suy ra:

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}.$$

Khẳng định cuối là do từ định nghĩa của H và K suy ra κ_1 và κ_2 là nghiệm của phương trình

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0,$$

vì vậy nhận các giá trị $H \pm \sqrt{H^2 - K}$. □

Ví dụ 5.1. Đối với mặt cầu đơn vị, theo ví dụ **??** thì $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, do đó $K = H = 1$. Đối với mặt trụ tròn xoay có bán kính 1, theo ví dụ **??** thì $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 0$, do đó $K = 0, H = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5.2. Trong Ví dụ **??** chúng ta đã xét mặt tròn xoay cho bởi

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

trong đó giả thiết $f > 0$ và $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ khắp nơi (dấu chấm trên kí hiệu cho d/du). Chúng ta đã tính được

$$E = 1, F = 0, F = f^2,$$

$$L = \dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g}, M = 0, N = f\dot{g}.$$

Theo Mệnh đề 5.1(i), độ cong Gauss bằng

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g})f\dot{g}}{f^2}. \tag{5.1}$$

Chúng ta có thể làm đơn giản công thức trên nhờ điều kiện $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$, lấy đạo hàm đẳng thức này theo biến u suy ra

$$\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} = 0,$$

$$\therefore (\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g})\dot{g} = -\dot{f}^2\ddot{f} - \ddot{f}\dot{g}^2 = -\ddot{f},$$

$$\therefore K = -\frac{\ddot{f}f}{f^2} = -\frac{\ddot{f}}{f}.$$

Ví dụ 5.3. Đối với mặt kẻ, xét phương trình

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\boldsymbol{\delta}(u),$$

(xem Ví dụ **??**). Kí hiệu d/du bởi dấu chấm trên, ta có

$$\boldsymbol{\sigma}_u = \dot{\boldsymbol{\gamma}} + v\dot{\boldsymbol{\delta}}, \boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\delta},$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma}_{uv} = \dot{\boldsymbol{\delta}}, \boldsymbol{\sigma}_{vv} = 0.$$

Do đó, nếu $\mathbf{N} = (\sigma_u \times \sigma_v)/\|\sigma_u \times \sigma_v\|$ là véctơ pháp tuyến chuẩn tắc của σ, thì $M = \sigma_{uv}.\mathbf{N} = \dot{\delta}.\mathbf{N}$ and $N = 0$. Do đó

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-(\dot{\delta}.\mathbf{N})^2}{EG - F^2} \leq 0,$$

tức là *độ cong Gauss của mặt kẻ là một số âm hoặc bằng không*, có thể chứng minh khẳng định này bằng cách khác (xem Bài tập 7.8). Chúng ta sẽ quay trở lại ví dụ này trong Mục 7.3.

BÀI TẬP

5.1. Tính độ cong Gauss và độ cong trung bình của mặt

$$\sigma(u, v) = (u + v, u - v, uv)$$

tại điểm (2,0,1).

5.2. Tính độ cong Gauss của mặt helicoid và mặt catenoid (xem các Bài tập 4.14 và 4.18).

5.3. Tính độ cong Gauss của mặt $z = f(x, y)$, trong đó f là một hàm trơn.

5.4. Với kí hiệu như trong Ví dụ 5.3, chứng minh

(i) nếu δ là véctơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ của γ hoặc là véctơ trùng pháp $\mathbf{b}$ của nó, thì $K = 0$ khi và chỉ khi bg là một đường cong phẳng. (sử dụng Mệnh đề 2.4);

(ii) nếu γ là một đường cong trên mặt $\mathcal{S}$ và δ là pháp tuyến chuẩn tắc của $\mathcal{S}$, thì $K = 0$ khi và chỉ khi γ là một đường thẳng cong của $\mathcal{S}$ (sử dụng Bài tập 6.18.)

5.5. Giả sử σ là biểu diễn tham số của mặt xuyến trong Bài tập 4.10, và giả sử K là độ cong Gauss của nó. Chứng minh rằng

$$\iint K d\mathcal{A}_\sigma = 0.$$

(Ý nghĩa của kết quả này sẽ được giải thích trong Mục 11.3.)

5.6. Chứng minh rằng độ cong Gauss và độ cong trung bình không đổi sau một phép dời hình, nhưng qua phép vị tự $(x, y, z) \mapsto a(x, y, z)$, trong đó a là một hằng số khác không, thì chúng thay đổi bởi nhân thêm a^{-2} và a^{-1}, tương ứng.

5.7. Chứng minh rằng độ cong Gauss và độ cong trung bình của một mảnh vá $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ là các hàm trơn trên U. Chứng minh các độ cong chính là các hàm trơn trên mọi tập con mở của U mà trên đó σ không có điểm rốn nào. (Sử dụng Mệnh đề 5.1.)

5.8. Chứng minh rằng $K \leq 0$ tại mọi điểm thuộc đường cong tiệm cận trên một mặt cong (sử dụng Hệ quả **??**). Dựa vào đó, bằng một cách khác chứng minh độ cong Gauss của một mặt kẻ $\leq$ mọi nơi (sử dụng Bài tập 6.12).

5.9. Chứng minh rằng, nếu $\mathcal{F}_{III}$ là dạng cơ bản của một mảnh vá σ (xem Bài tập 6.22), thì

$$\mathcal{F}_{III} - 2H\mathcal{F}_{II} + K\mathcal{F}_I = 0,$$

trong đó K và H tương ứng là độ cong Gauss và độ cong trung bình của σ. (Sử dụng kết quả sau: đối với ma trận $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ta có đẳng thức $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0$.)

5.10. Sử dụng Bài tập 7.9 chứng tỏ rằng, nếu $\gamma(t)$ là một đường cong trên mảnh vá σ, thì dọc theo γ,

$$\dot{\mathbf{N}}.\dot{\mathbf{N}} + 2H\dot{\mathbf{N}}.\dot{\gamma} + K\dot{\gamma}.\dot{\gamma} = 0.$$

(Chú ý rằng, nếu $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)), T = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$, thì $\dot{\mathbf{N}}.\dot{\mathbf{N}} = T^t \mathcal{F}_{III} T$). Từ đó suy ra độ xoắn τ của một đường cong tiệm cận trên một mặt liên hệ với độ cong Gauss K của mặt bởi $\tau^2 = -K$. (Sử dụng Bài tập 6.12.)

5.2 Mặt giả cầu

Trong các ví dụ ở mục 7.1 chúng ta đã thấy một số mặt có độ cong bằng không hoặc hằng số dương. Trong mục này chúng ta sẽ xây dựng một mặt cong có độ cong Gauss bằng hằng số âm. Cho mục đích này, lần nữa chúng ta lại xét mặt tròn xoay

$$\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

Theo Ví dụ 5.2, độ cong Gauss của nó bằng

$$K = -\frac{\ddot{f}}{f}. \tag{5.2}$$

Trường hợp $K = 0$ khắp nơi. Khi đó, Pt. (5.2) suy ra $\ddot{f} = 0$, nên $f(u) = au + b$ với a và b là các hằng số. Do $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$, ta có $\dot{g} = \pm\sqrt{1-a^2}$ (vì thế cần điều kiện $|a| \leq 1$) và do đó $g(u) = \pm\sqrt{1-a^2}u + c$, trong đó c là một hằng số khác. Bằng một phép tịnh tiến theo trục z chúng ta có thể giả sử $c = 0$, và bằng một phép quay quanh chẳng hạn (trục x) có thể giả thiết dấu ở đây là $+$. Như vậy ta thu được mặt kẻ

$$\sigma(u, v) = (b\cos v, b\sin v, 0) + u(a\cos v, a\sin v, \sqrt{1-a^2}).$$

Nếu $a = 0$ đây là mặt trụ tròn xoay; nếu $|a| = 1$ nó là mặt phẳng xy; và nếu $0 < |a| < 1$ nó là một phần của mặt nón (để rõ hơn đặt biến mới $\tilde{u} = au + b$).

Trường hợp $K = 1$ khắp nơi. (Bất kì mặt có độ cong Gauss là một hằng số dương có thể đưa về trường hợp này bằng một phép vị tự trong $\mathbb{R}^3$, xem Ví dụ **??**) Khi đó, Pt. (5.2) trở thành

$$\ddot{f} + f = 0,$$

phương trình này có nghiệm tổng quát

$$f(u) = a\cos(u + b),$$

với a và b là các hằng số. Chúng ta có thể giả sử $b = 0$ bằng phép đổi biến $\tilde{u} = u + b, \tilde{v} = v$. Bằng một phép thay dấu và thêm bớt hằng số, ta có

$$g(u) = \int \sqrt{1 - a^2\sin^2 u}du.$$

Tích phân này không biểu diễn được qua các hàm 'cơ sở' ngoại trừ $a = 0$ hoặc ± 1. Trường hợp $a = 0$ không cho ta mặt cong, vì vậy chỉ cần xét $a = 1$ (do $a = -1$ có thể đưa trở lại trường hợp này bằng cách quay mặt cong một góc π theo trục z). Do đó, $f(u) = \cos u, g(u) = \sin u$, vì vậy đây là mặt cầu đơn vị.

Trường hợp cuối cùng, $K = -1$ khắp nơi. Nghiệm tổng quát của Pt. (5.2) có dạng

$$f(u) = ae^u + be^{-u},$$

trong đó a và b là các hằng số tùy ý. Đối với hầu hết các giá trị của a và b chúng ta không thể biểu diễn g qua các hàm cơ sở, vì vậy ở đây chúng ta chỉ xét trường hợp $a = 1$ và $b = 0$. Khi đó, $f(u) = e^u$ và

$$g(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du. \tag{5.3}$$

Chú ý để tích phân trong Pt. (5.3) có nghĩa thì cần có điều kiện $u \leq 0$. Tích phân này có thể tính bằng cách đặt $v = e^u$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{2u}} du &= \int \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v} dv \\ &= \int \left(\frac{1}{v} - v\right) \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &= \sqrt{1 - v^2} + \int \frac{dv}{v\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned}$$

Đặt $= v^{-1}$ trong tích phân cuối cùng. Dẫn đến

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{2u}} du &= \sqrt{1 - v^2} + \int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 1}} \\ &= \sqrt{1 - v^2} - \cosh^{-1} w \\ &= \sqrt{1 - v^2} - \cosh^{-1} \left(\frac{1}{v}\right) \\ &= \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u}). \end{aligned}$$

Ở đây chúng ta bỏ qua hằng số, vì có thể làm nó bằng không qua một phép tịnh tiến thích hợp theo phương của trục z. Vậy

$$f(u) = e^u, \quad g(u) = \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u}).$$

Đặt $x = f(u), z = g(u)$, ta thấy đường sinh trong mặt phẳng xz có phương trình

$$z = \sqrt{1 - x^2} - \cosh^{-1} \left(\frac{1}{x}\right). \tag{5.4}$$

Quay đường cong này quanh trục z thu được một mặt được gọi là *mặt giả cầu*, mặt này có độ cong Gauss bằng -1 khắp nơi. Chú ý, do $u \leq 0$, $x = e^u$ bị hạn chế trong miền $0 < x \leq 1$.

Hình vẽ định nghĩa bởi Pt. (**??**) được gọi là *đường tractrix*, nó có một minh họa hình học thú vị. Xét đường tiếp tuyến tại một điểm P trên đường cong này, giả sử nó cắt trục z tại điểm Q. Chúng ta đi tính độ dài đoạn PQ.

Giả sử P là điểm có tọa độ (x_0, z_0). Bằng cách tính toán trực tiếp hoặc nghiên cứu cách tính tích phân (5.3), có thể thu được

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

Do đó, tiếp tuyến tại P có phương trình

$$z - z_0 = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0}(x - x_0).$$

Tiếp tuyến này cắt trục z tại điểm $(0, z_1)$, trong đó

$$z_1 - z_0 = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0}(0 - x_0) = -\sqrt{1 - x_0^2}.$$

Do vậy khoảng cách PQ được tính bởi

$$(PQ)^2 = x_0^2 + (z_1 - z_0)^2 = x_0^2 + 1 - x_0^2 = 1,$$

tức là, khoảng cách PQ là *hằng số* và bằng 1.

Điều này có nghĩa là đường tractrix có thể mô tả như sau. Giả sử một con lừa kéo một thùng đá bằng một sợi dây có chiều dài bằng một. Giả sử ở thời điểm xuất phát con lừa ở điểm $(0,0)$, còn thùng đá thì ở điểm $(1,0)$, và giả sử rằng con cừu đi chậm rãi dọc theo hướng âm của trục z. Khi đó, thùng đựng đá sẽ chuyển động dọc theo đường tractrix.

Nghiên cứu hình học trên một mặt giả cầu là một chủ đề được gọi là *hình học phi euclid*. Rất nhiều kết quả của hình học phẳng euclid cũng đúng trên mặt giả cầu, nhưng cũng có một số thì khác. Chẳng hạn, tổng ba góc trong của một tam giác trên mặt giả cầu luôn *bé* hơn π. (Chúng ta sẽ giải thích khái niệm cạnh 'thẳng' để hiểu được thế nào là một tam giác trong Chương 8 - cụ thể xem Ví dụ **??**.) Bạn đọc nên so sánh với Định lý **??**, trong đó khẳng định tổng ba góc trong của một tam giác trên mặt cầu luôn *lớn* hơn π.

BÀI TẬP

5.11. Đối với mặt giả cầu:

(i) tính độ dài của đường sinh;

(ii) tính diện tích tổng thể;

(iii) tính các độ cong chính;

(iv) chứng minh tất cả mọi điểm đều là điểm hyperbolic.

5.12. Chứng minh rằng

(i) nếu đặt $w = e^{-u}$, khi đó tham số hóa lại của mặt giả cầu $\boldsymbol{\sigma}_1(v,w)$ có dạng cơ bản thứ nhất bằng

$$\frac{dv^2 + dw^2}{w^2}$$

(được gọi là *mô hình nửa mặt phẳng trên*);

(ii) nếu đặt

$$U = \frac{v^2 + w^2 - 1}{v^2 + (w+1)^2}, V = \frac{-2v}{v^2 + (w+1)^2}$$

khi đó tham số hóa lại $\boldsymbol{\sigma}_2(U,V)$ của mặt giả cầu có dạng cơ bản thứ nhất bằng

$$\frac{dU^2 + dV^2}{(1 - U^2 - V^2)^2}.$$

Đây được gọi là *mô hình đĩa*, vì miền $w > 0$ trong mặt phẳng vw tương ứng với đĩa $U^2 + V^2 < 1$ trong mặt phẳng UV.

Những miền nào trong mô hình nửa mặt phẳng và mô hình đĩa tương ứng với miền $u < 0, -\pi < v < \pi$ mà tham số hóa $\boldsymbol{\sigma}$ của mặt giả cầu được xác định trong miền này?

5.13. Giả sử $\mathcal{S}$ là một mặt tròn xoay có trục là trục z, và giả thiết thêm đường sinh của nó là đường cong $\gamma(u)$ có vận tốc đơn vị trong mặt phẳng xz. Giả sử γ cắt vuông góc với trục z khi $u = \pm\pi/2$, nhưng không cắt trục z khi $-\pi/2 < u < \pi/2$. Chứng minh rằng, nếu độ cong Gauss K của $\mathcal{S}$ bằng hằng số, thì hằng số này bằng 1 và $\mathcal{S}$ là mặt cầu đơn vị.

5.3 Mặt dẹt

Trong mục 7.2, chúng ta đã đưa ra vài ví dụ về các mặt có độ cong Gauss K bằng hằng số, nhưng vẫn chưa phân loại đầy đủ được những mặt như thế. Trong mục này chúng ta sẽ mô tả khá đầy đủ các *mặt dẹt*, tức là các mặt có $K = 0$ khắp nơi. Để làm được vậy, chúng ta sẽ sử dụng một dạng tham số đặc biệt, dùng được cho mặt cong tùy ý, nó được mô tả trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 5.2. *Giả sử P là điểm thuộc mặt cong $\mathcal{S}$ và giả sử P không phải là một điểm rốn. Khi đó, tồn tại một mảnh vá $\boldsymbol{\sigma}(u,v)$ của $\mathcal{S}$ chứa P mà dạng cơ bản thư nhất và thứ hai của nó tương ứng là*

$$Edu^2 + Gdv^2 \quad \text{và} \quad Ldu^2 + Ndv^2,$$

với E, G, L và N là các hàm trơn nào đó.

Nhắc lại, trong Mục 6.3, một điểm P thuộc mặt $\mathcal{S}$ là một điểm rốn nếu hai độ cong chính của $\mathcal{S}$ tại P bằng nhau. Trong Mục 6.3, ta có đối với mảnh vá $\boldsymbol{\sigma}$ trong mệnh đề, thì $\boldsymbol{\sigma}_u$ và $\boldsymbol{\sigma}_v$ là các véctơ chính tương ứng với các độ cong chính L/E và N/G. Ta gọi $\boldsymbol{\sigma}$ là một *mảnh vá chính*.

Tạm thời chúng ta chấp nhận Mệnh đề 5.3 để chứng minh kết quả sau đây.

Mệnh đề 5.3. *Giả sử P là một điểm nằm trên một mặt dẹt $\mathcal{S}$, và P không phải là một điểm rốn. Khi đó, tồn tại một mảnh vá của $\mathcal{S}$ chứa P mà là một mặt kẻ.*

Chứng minh. Xét mảnh vá $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ chứa điểm P như trong Mệnh đề 5.2, chẳng hạn $P = \boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0)$. Theo Mệnh đề 5.1(ii), độ cong Gauss $K = LN/EG$. Do độ cong Gauss bằng không khắp nơi, vì vậy $L = 0$ hoặc $N = 0$ tại mỗi điểm thuộc U, và do P không phải là một điểm rốn nên L và N không đồng thời bằng không. Giả sử $L(u_0, v_0) \neq 0$. Khi đó, $L(u,v) \neq 0$ với mọi (u,v) nằm trong tập con mở nào đó chứa điểm (u_0, v_0). Bằng cách thu nhỏ U nếu cần thiết, ta có thể giả sử $L \neq 0$ với mọi điểm thuộc U. Vì vậy, $N = 0$ khắp nơi, và dạng cơ bản thứ hai của $\boldsymbol{\sigma}$ bằng Ldu^2.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng các đường cong tham số $u =$ hằng số là các đường thẳng. Một đường thẳng như thế có thể tham số bởi $v \mapsto \boldsymbol{\sigma}(u_0, v)$, trong đó u_0 là một giá trị hằng số cho biến u. Khi đó $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}_v/G^{1/2}$, vì vậy theo Mệnh đề 1.1 chúng ta chỉ cần phải chứng minh $\mathbf{t}_v = \mathbf{0}$.

Theo Mệnh đề **??**, véctơ pháp tuyến chuẩn có đạo hàm bằng

$$\mathbf{N}_u = -E^{-1}L\boldsymbol{\sigma}_u, \quad \mathbf{N}_v = 0. \tag{5.5}$$

Do đó, $\mathbf{t}_v.\mathbf{N}_u = -EL^{-1}\mathbf{t}_v.\mathbf{N}_u$. Do $\mathbf{t}.\mathbf{N}_u = 0$ và $\mathbf{N}_{uv} = \mathbf{0}$, nên từ Pt. (5.5) suy ra $\mathbf{t}_v.\mathbf{N}_u = -\mathbf{t}.\mathbf{N}_{uv}$. Do đó $\mathbf{t}_v.\boldsymbol{\sigma}_u = 0$. Mặt khác $\mathbf{t}_v.\mathbf{t} = 0$, do theo cách xây dựng $\mathbf{t}$ là véctơ đơn vị, vì vậy $\mathbf{t}_v.\boldsymbol{\sigma}_v = 0$. Cuối cùng, cũng từ Pt. (5.5) có $\mathbf{t}_v.\mathbf{N} = -\mathbf{t}.\mathbf{N}_v = 0$. Do các véctơ $\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_v$ và $\mathbf{N}$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, ta có kết luận $\mathbf{t}_v = \mathbf{0}$. □

Do đó nhiệm vụ của chúng ta là mô tả cấu trúc của các mặt kẻ dẹt. Lấy tham số của mặt kẻ như trong Ví dụ 5.3:

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\boldsymbol{\delta}(u).$$

Ta có $\boldsymbol{\sigma}_u = \dot{\boldsymbol{\gamma}} + v\dot{\boldsymbol{\delta}}$, $\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\delta}$, dấu chấm trên kí hiệu cho d/du, và độ cong Gauss của $\boldsymbol{\sigma}$ bằng không khi và chỉ khi

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}.(\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v) = 0.$$

Do

$$\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\delta} + v\dot{\boldsymbol{\delta}} \times \boldsymbol{\delta},$$

và $\dot{\boldsymbol{\delta}}.(\dot{\boldsymbol{\delta}} \times \boldsymbol{\delta}) = 0$, suy ra

$$K = 0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \dot{\boldsymbol{\delta}}.(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\delta}) = 0. \tag{5.6}$$

Như vậy, $K = 0$ *khi và chỉ khi* $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, $\boldsymbol{\delta}$ *và* $\dot{bd}$ *độc lập tuyến tính tại khắp nơi.*