KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC
BỘ MÔN GIẢI TÍCH

Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Hà Nội, 2006

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

Mở đầu. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai

1.1 Giới thiệu chung

Phương trình đạo hàm riêng là một lĩnh vực quan trọng của toán học. Có rất nhiều mô hình trong tự nhiên được mô tả bởi một phương trình hoặc một hệ phương trình vi phân nói chung và phương trình vi phân đạo hàm riêng nói riêng.

Định nghĩa 1.1. Một phương trình liên hệ giữa ẩn hàm $u(x_1, \dots, x_n)$, các biến độc lập x_i và các đạo hàm riêng của nó được gọi là một phương trình vi phân đạo hàm riêng (hay phương trình đạo hàm riêng cho gọn). Nó có dạng

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \dots\right) = 0, \tag{1.1}$$

trong đó F là một hàm nào đó của các đối số của nó, với ký hiệu $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$[a].

Cấp cao nhất của đạo hàm riêng của u có mặt trong phương trình được gọi là *cấp của phương trình*.

Phương trình được gọi là *tuyến tính* nếu nó tuyến tính đối với ẩn hàm và các đạo hàm riêng của ẩn hàm. Ví dụ phương trình tuyến tính cấp hai tổng quát đối với hàm $u = u(x, y)$ có dạng

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u = g(x,y). \tag{1.2}$$

Phương trình được gọi là *á tuyến tính* nếu nó tuyến tính đối với đạo hàm riêng cấp

[a] Người ta thường sử dụng ký hiệu

$$D_k u = \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \quad \text{với } k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n.$$

cao nhất của ẩn hàm. Ví dụ phương trình á tuyến tính cấp hai tổng quát có dạng

$$a(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y,u,u_x,u_y) = 0. \quad (1.3)$$

Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng có hai nét đặc thù cơ bản. Thứ nhất là mối liên hệ trực tiếp với các bài toán vật lý, vì quá trình nghiên cứu các bài toán vật lý và cơ học dẫn đến các bài toán phương trình đạo hàm riêng, vì vậy người ta còn gọi phương trình đạo hàm riêng là phương trình vật lý toán. Những nhà tiên phong trong lĩnh vực này là J.D'Alembert (1717-1783), L.Euler (1707-1783), D.Bernoulli (1700-1782), J.Lagrange (1736-1813), P.Laplace (1749-1827), S.Poisson (1781-1840), J.Fourier (1768-1830). Thứ hai là mối liên hệ mật thiết của phương trình đạo hàm riêng với các ngành Toán học khác như giải tích hàm, lý thuyết hàm, tôpô, đại số, giải tích phức.

Trong khuôn khổ chương trình học, chúng ta sẽ đề cập đến các phương trình tuyến tính cấp hai cơ bản nhất và các bài toán biên hoặc bài toán giá trị ban đầu tương ứng, thông qua các phương trình đặc trưng của mỗi loại: đó là phương trình Laplace, phương trình truyền nhiệt trên một thanh và phương trình truyền sóng trên dây căng thẳng, đặc trưng cho phương trình elliptic, parabolic và hyperbolic.

1.2 Một số phương trình đạo hàm riêng tiêu biểu

Trong mục này ta giới thiệu một số phương trình đạo hàm riêng tiêu biểu, có ứng dụng trong thực tiễn trong các ngành khoa học thực nghiệm như vật lý, hoá học, môi trường, khoa học trái đất,...

1.2.1 Các phương trình đạo hàm riêng

1. **Phương trình Laplace** do Laplace đưa ra vào khoảng năm 1780

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Phương trình Helmholtz** được Helmholtz nghiên cứu vào năm 1860

$$-\Delta u = \lambda u.$$

3. Phương trình chuyển dịch tuyến tính

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0.$$

4. **Phương trình Liouville** được nghiên cứu vào khoảng 1851
$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (b_i u)_{x_i} = 0.$$

5. **Phương trình truyền nhiệt** được Fourier công bố năm 1810-1822
$$u_t = \Delta u.$$

6. **Phương trình Schrodinger** (1926)
$$iu_t + \Delta u = 0.$$

7. **Phương trình truyền sóng** được D'Alembert đưa ra năm 1752
$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$
và dạng tổng quát của nó
$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0.$$

Trên đây là một số phương trình đạo hàm riêng dạng tuyến tính, bên cạnh đó còn rất nhiều phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cũng như hệ phương trình tiêu biểu mà trong khuôn khổ một giáo trình 30 tiết ta sẽ không đề cập đến. Mục tiếp sau đây sẽ cho ta thấy một số cách xây dựng nên phương trình đạo hàm riêng từ thực tiễn.

1.3 Một số ví dụ dẫn tới các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng

1.3.1 Phương trình dao động của dây

Xét sợi dây căng thẳng theo trục Ox. Tác động làm sợi dây dao động. Ta sẽ nghiên cứu quy luật dao động của sợi dây. Ta có các giả thiết:

- Sợi dây rất mảnh và không cưỡng lại sự uốn.
- Có lực căng T tương đối lớn so với trọng lượng của dây, tức là bỏ qua được trong lượng của sợi dây.
- Ta chỉ xét những dao động ngang của sợi dây, tức là khi dao động, các phần tử của dây chỉ chuyển động theo phương vuông góc với trục Ox, không xét các dao động của dây nằm ngoài mặt phẳng $0ux$.

Xét tại vị trí điểm M trên sợi dây, ký hiệu độ lệch của M so với vị trí cân bằng là u, khi đó $u = u(x,t)$, với x là toạ độ của M trên dây và t là thời gian. Tại thời điểm $t = t_0$ cho trước ta có

$$u = u(x, t_0) = f(x), \tag{1.4}$$

tức là tại điểm $t = t_0$, ta nhận được hình dáng của dây rung $u = f(x)$. Giả thiết thêm rằng độ lệch của dây $u(x,t)$ và đạo hàm riêng $\partial_x u$ là rất nhỏ và có thể bỏ qua đại lượng $(\partial_x u)^2$. Xét đoạn dây giới hạn bởi hai điểm M_1, M_2 với hoành độ tương ứng x_1 và x_2. Vì ta có thể bỏ qua đại lượng u_x^2 nên độ dài của đoạn dây M_1M_2 bằng:

$$l' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2}dx \approx x_2 - x_1 = l, \tag{1.5}$$

tức là bằng độ dài của đoạn M_1M_2 ở trạng thái cân bằng, hay độ dài của sợi dây không đổi khi nó dao động. Vậy, theo định luật Hooke, lực căng của sợi dây cũng không thay đổi $T = T_0$. Ta sẽ thiết lập phương trình dao động của dây dựa vào nguyên lý D'Alembert: "Trong chuyển động của đoạn dây, tổng các lực tác động vào đoạn dây, kể cả lực quán tính bằng không; do đó tổng các hình chiếu của các lực trên một trục bất kỳ là bằng không." Ta có hình chiếu lên trục u của tổng các lực tác dụng lên đoạn dây M_1M_2, bao gồm lực căng của dây, ngoại lực tác dụng và lực quán tính bằng không. Khi đó ta có lực căng của dây hướng theo phương tiếp tuyến tại M_1 và M_2, bằng T_0. Như vậy tổng hình chiếu các lực căng tại M_1 và M_2 lên trục u bằng

$$Y = T_0[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)], \tag{1.6}$$

với $\alpha(x)$ là góc hợp với trục Ox của véctơ tiếp tuyến tại điểm x. Thay

$$\sin\alpha(x) = \frac{\tan\alpha(x)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.7}$$

vào (**??**), ta được

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx. \tag{1.8}$$

Giả sử $p(x,t)$ là ngoại lực tác động vào sợi dây, song song với trục u và phân phối trên một đơn vị chiều dài. Khi đó hình chiếu trên trục u của ngoại lực tác động lên đoạn dây đang xét là

$$P = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx. \tag{1.9}$$

Gọi tỷ trọng dài của sợi dây là $\rho(x)$ (tức là mật độ phân bố vật chất theo chiều dài). Khi đó lực quán tính của đoạn dây đang xét là

$$Z = -\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx. \tag{1.10}$$

Từ (??), (??), (??), áp dụng nguyên lý D'Alembert ở trên ta được

$$Y + P + Z = \int_{x_1}^{x_2} \left(T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) \right) dx. \tag{1.11}$$

Chú ý rằng x_1 và x_2 là những vị trí bất kỳ, ta suy ra biểu thức dưới dấu tích phân của (??) phải triệt tiêu, tức là

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t). \tag{1.12}$$

Phương trình (??) được gọi là phương trình dao động của dây. Trong trường hợp dây đồng chất, ngoại lực tác động bằng không, phương trình (??) trở thành

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad \text{với} \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho(x)}}. \tag{1.13}$$

Lẽ dĩ nhiên, phương trình (??) có vô số nghiệm. Để xác định được nghiệm ta cần ấn định thêm một số điều kiện phụ nào đấy, từ đó thiết lập nên các bài toán biên và bài toán giá trị ban đầu cho phương trình (??). Việc nghiên cứu các bài toán biên và bài toán giá trị ban đầu đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu phương trình vi phân đạo hàm riêng. Khi số chiều của không gian tăng lên, ta có các bài toán truyền sóng trên màng rung ($u = u(x,y,t)$) và bài toán truyền âm trong không gian ($u = u(x,y,z,t)$). Việc thiết lập các phương trình đó được tiến hành tương tự như cách ở trên.

1.3.2 Phương trình truyền nhiệt trong môi trường đẳng hướng

Xét một vật thể rắn V giới hạn bởi mặt kín trơn S, mà nhiệt độ của nó tại điểm (x,y,z) tại thời điểm t là một hàm $u(x,y,z,t)$. Khi nhiệt độ tại các phần của vật thể khác nhau thì trong vật thể đó có sự trao đổi nhiệt lượng từ phần nóng hơn sang phần lạnh hơn. Xét một diện tích ΔS trong vật thể. Khi đó nhiệt lượng ΔQ truyền qua diện tích đó trong khoảng thời gian Δt sẽ tỷ lệ với tích $\Delta S \Delta t$ và với $\frac{\partial u}{\partial n}$, trong đó vectơ $\vec{n}$ là vectơ pháp tại phần mặt ΔS hướng theo chiều truyền nhiệt, tức là

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t, \tag{1.14}$$

k được gọi là hệ số truyền nhiệt. Vì môi trường đang xét là đẳng hướng nên hệ số k không phụ thuộc vào phương của mảnh ΔS mà chỉ phụ thuộc vào (x,y,z). Ta thiết lập sự thay đổi nhiệt lượng trong V trong khoảng thời gian t_1 đến t_2 bất kỳ, từ đó thiết lập được phương trình truyền nhiệt. Gọi $\gamma(x,y,z)$ là nhiệt dung và $\rho(x,y,z)$ là tỷ khối của V tại điểm (x,y,z), phần thể tích ΔV sẽ hấp thụ được một nhiệt lượng ΔQ_1 là

$$\Delta Q_1 = [u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\gamma(x,y,z)\rho(x,y,z)\Delta V. \tag{1.15}$$

Từ đó suy ra thể tích V sẽ hấp thụ một lượng nhiệt là

$$Q_1 = \iiint\limits_V [u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\gamma(x,y,z)\rho(x,y,z)dV \tag{1.16}$$

hay

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV. \tag{1.17}$$

Mặt khác, nhiệt lượng Q_1 bằng tổng nhiệt lượng Q_2 truyền từ ngoài vào qua biên S và lượng nhiệt Q_3 tự sinh trong V do các nguồn nhiệt khác nhau trong V. Ta có

$$Q_2 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (\vec{n} \text{ là pháp tuyến trong của } S). \tag{1.18}$$

Gọi F là mật độ nguồn nhiệt trong vật thể tại từng điểm. Khi đó

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t) dV. \tag{1.19}$$

Kết hợp (**??**), (**??**), (**??**) và hệ thức $Q_1 = Q_2 + Q_3$, ta được

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t) dV. \tag{1.20}$$

Áp dụng công thức Oxtrogradski, chú ý rằng $\vec{n}$ là pháp tuyến trong của S, ta được

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \left(\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\overrightarrow{\text{grad}} u) - F(x,y,z,t) \right) dV = 0. \tag{1.21}$$

Vì thể tích V được lấy bất kỳ, ta có

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\overrightarrow{\text{grad}} u) + F(x,y,z,t). \tag{1.22}$$

Phương trình này gọi là *phương trình truyền nhiệt trong vật thể đẳng hướng không thuần nhất*. Trong trường hợp thuần nhất, các hệ số γ, ρ và k đều là hằng số, phương trình truyền nhiệt ở trên trở thành

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t) := \Delta u + f(x,y,z,t), \tag{1.23}$$

với

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \quad f(x,y,z,t) := \frac{F(x,y,z,t)}{\gamma\rho}.$$

Khi số chiều giảm, ta sẽ được các phương trình truyền nhiệt trên bản mỏng ($u = u(x,y,t)$) và trên thanh ($u = u(x,t)$). Tương tự phương trình truyền sóng, ta cũng thiết lập các điều kiện ban đầu và điều kiện biên để xác định nghiệm của phương trình truyền nhiệt, ta dẫn đến bài toán giá trị biên-ban đầu của phương trình truyền nhiệt hoặc bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt.

1.3.3 Phương trình Laplace

Xét phương trình (**??**). Giả sử sau một thời gian nào đó, nhiệt độ trong môi trường ổn định, không có sự thay đổi nhiệt độ theo thời gian. Khi đó ta dẫn đến phương trình

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1.24}$$

gọi là phương trình Laplace. Đối với phương trình loại này, ta thiết lập các bài toán biên, với các giá trị trên biên được cho dưới dạng trực tiếp ($u|_S = \varphi(P)$) hoặc gián tiếp ($\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \varphi(P)$). Bài toán tìm phân bố dừng của nhiệt độ bên trong vật thể theo nhiệt độ đã cho trên biên được gọi là *Bài toán Dirichlet*, theo tên nhà toán học L.Dirichlet là người đầu tiên nghiên chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán này. Bài toán tìm nghiệm của phương trình dừng khi biết giá trị trên biên của đạo hàm theo hướng pháp tuyến của ẩn hàm được gọi là *Bài toán Neumann*. Bài toán tìm nghiệm của phương trình khi biết giá trị trên biên của tổng giữa ẩn hàm cần tìm và đạo hàm theo hướng pháp tuyến của ẩn hàm gọi là *Bài toán hỗn hợp*. Khi vế phải của phương trình là một hàm khác không thì ta gọi là *Phương trình Poisson*. Việc nghiên cứu các phương trình ở trên cũng như các bài toán tương ứng không chỉ có ý nghĩa về mặt định tính mà còn có ứng dụng rất thực tiễn trong các bài toán vật lý, hoá học, sinh thái học, ... Có thể nêu một ví dụ đơn giản nhất là mô tả chuyển động không xoáy của chất lỏng lý tưởng (thuần nhất, không nén được), tức là vect ơ vận tốc v của chất lỏng lý tưởng sẽ là vector thế, tức là tồn tại hàm thế $\varphi(x, y, z)$ sao cho $\vec{v}(x, y, z) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi$. Khi đó phương trình chuyển động liên tục cho ta

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0,$$

hay

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = 0,$$

tức là

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

1.4 Phân loại phương trình vi phân cấp hai trong trường hợp hai biến

Chúng ta đi phân loại phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp hai trong trường hợp hai biến. Xét phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính với các hệ số thực

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1.25}$$

và điểm (x_0, y_0) cố định. Phương trình (**??**) tại điểm (x_0, y_0) được gọi là

a) thuộc loại *ellip* (hay phương trình elliptic) nếu tại điểm đó $b^2 - ac < 0$,

b) thuộc loại *hyperbol* (hay phương trình hyperbolic) nếu tại điểm đó $b^2 - ac > 0$,

c) thuộc loại *parabol* (hay phương trình parabolic) nếu tại điểm đó $b^2 - ac = 0$.

Nếu phương trình (**??**) thuộc một loại nào đó tại mọi điểm thuộc miền G thì nói rằng phương trình thuộc loại đó trong miền G. Người ta chứng minh được rằng qua phép đổi biến bất kỳ

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y), \\ \eta &= \eta(x,y), \end{aligned}$$

với $\xi(x,y), \eta(x,y) \in C^2(G)$ và

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0, \tag{1.26}$$

loại của phương trình sẽ không thay đổi. Từ đó, thông qua phép đổi biến $(x,y) \to (\xi,\eta)$, ta sẽ đưa phương trình được xét về một phương trình có dạng chính tắc. Thật vậy, với phép đổi biến ở trên, ta có

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{aligned}$$

Thay các đại lượng trên vào phương trình (**??**) ta được

$$a_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} + F_1(\xi,\eta,u,u_\eta,u_\xi) = 0, \tag{1.27}$$

với

$$\begin{aligned} a_1 &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ b_1 &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \\ c_1 &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Tính toán đơn giản ta được

$$b_1^2 - a_1c_1 = (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2. \tag{1.29}$$

Nếu chọn ξ, η là các hàm thoả mãn phương trình

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = 0, \tag{1.30}$$

thì trong (**??**) ta có $a_1 = c_1 = 0$, tức là phương trình ban đầu trở nên đơn giản hơn, từ đó đưa phương trình được xét về phương trình dạng chính tắc. Bổ đề dưới đây thể hiện mối liên quan giữa nghiệm của phương trình (**??**) với việc đưa phương trình (**??**) về dạng đơn giản hơn.

Bổ đề 1.1. *Nếu $z = \varphi(x, y)$ là một nghiệm của phương trình (**??**) thì hệ thức*

$$\varphi(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.31}$$

xác định nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thường

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0. \tag{1.32}$$

*Ngược lại, nếu $\varphi(x, y) = C$ là nghiệm tổng quát của phương trình (**??**) thì hàm $z = \varphi(x, y)$ là nghiệm riêng của phương trình (**??**).*

Chứng minh.
($\Rightarrow$) Theo giả thiết, vì $z = \varphi(x, y)$ là nghiệm của (**??**) nên ta có

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0, \tag{1.33}$$

hay

$$a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0. \tag{1.34}$$

Theo định lý hàm ẩn, hàm $y = y(x)$ được xác định từ hệ thức (**??**) có đạo hàm bằng

$$y'(x) = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}. \tag{1.35}$$

Từ đó suy ra (**??**).
($\Leftarrow$) Ngược lại, nói rằng biểu thức (**??**) là nghiệm của (**??**) có nghĩa là ẩn hàm $y(x)$ xác định từ hệ thức (**??**) thoả mãn (**??**) với mọi giá trị nào đó của hằng số C.

Để chứng minh hàm $z = \varphi(x, y)$ là nghiệm của (**??**) ta hãy chứng minh rằng (**??**) được thoả mãn tại mọi điểm (x_0, y_0) bất kỳ trong miền xác định của $\varphi(x, y)$. Thật vậy, xét điểm (x_0, y_0), đặt $C_0 = \varphi(x_0, y_0)$ và xét ẩn hàm $y(x)$ xác định từ hệ thức

$$\varphi(x, y) = C_0.$$

Theo giả thiết, hàm y như trên sẽ thoả mãn (**??**), tức là thoả mãn (**??**) tại điểm (x_0, y_0). Theo (**??**), ta có

$$y'(x_0) = -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}. \tag{1.36}$$

Thay vào (**??**) ta được (**??**) tại điểm (x_0, y_0) và do đó có (**??**) tại (x_0, y_0). Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Phương trình (**??**) được gọi là *Phương trình các đường đặc trưng* của (**??**), đường cong tích phân $\varphi(x, y) = C$ được gọi là *đường cong đặc trưng* của (**??**). Nếu từ hệ thức (**??**)

ta không suy ra được ẩn hàm y theo x thì ta tráo đổi vai trò của y và x, tìm ẩn hàm $x = x(y)$ thoả mãn phương trình

$$a - 2bx' + cx'^2 = 0.$$

Trong những trường hợp cụ thể ta có thể đưa các phương trình về dạng chính tắc như sau:

Trường hợp phương trình hyperbolic Ta có $\delta = b^2 - ac > 0$.

1. Trường hợp $a \neq 0$. Khi đó phương trình (**??**) có hai nghiệm thực đối với y' là

$$y'_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

từ đó suy ra hai nghiệm

$$y = f_1(x, C_1),$$
$$y = f_2(x, C_2),$$

hay viết dưới dạng tích phân tổng quát

$$\varphi_1(x, y) = C_1,$$
$$\varphi_2(x, y) = C_2,$$

áp dụng bổ đề ta có thể xét phép đặt

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$
$$\eta = \varphi_2(x, y),$$

và thay vào phương trình (**??**) thì $a_1 = c_1 = 0$, và phương trình ban đầu sẽ có dạng chính tắc

$$\boxed{u_{\xi\eta} = F_1^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).} \tag{1.37}$$

2. Trường hợp $a = 0$. Khi đó phương trình các đường đặc trưng của (**??**) có dạng $a - 2bx' + cx'^2 = 0$, ta có ngay dạng chính tắc

$$\boxed{u_{xy} = F^*(x, y, u, u_x, u_y).} \tag{1.38}$$

3. Nếu thực hiện phép đổi biến

$$\xi = \alpha - \beta, \quad \eta = \alpha + \beta,$$

thì dạng chính tắc của phương trình (**??**) có dạng

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).} \tag{1.39}$$

Ví dụ 1.

$$u_{xx} - 7u_{xy} + 12u_{yy} + u_x - 2u_y - 3u = 0. \tag{1.40}$$

Phương trình đường đặc trưng $y'^2 + 7y' + 12 = 0$ có biệt thức $\Delta = 1 > 0$. Từ đó, áp dụng bổ đề **??** ở trên ta được nghiệm của phương trình đường đặc trưng là $y' = -3$ và $y' = -4$. Từ đó ta có hai đường cong tích phân tổng quát tương ứng

$$y + 3x = C_1, \tag{1.41}$$
$$y + 4x = C_2. \tag{1.42}$$

Đặt $\xi = y + 3x$, $\eta = y + 4x$. Từ đó phương trình chính tắc là

$$u''_{\xi\eta} + u_\xi + 2u_\eta + 3u = 0. \tag{1.43}$$

Trường hợp phương trình elliptic Ta có $\delta = b^2 - ac < 0$. Giả thiết rằng a, b, c là những hàm giải tích đối với x và y. Phương trình đường đặc trưng của (**??**) có hai nghiệm phức liên hợp. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình đường đặc trưng có dạng $\varphi(x,y) = C$ và $\varphi^*(x,y) = C$. Đặt

$$\xi = \varphi(x,y),$$
$$\eta = \varphi^*(x,y),$$

ta được

$$a_1 = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0, \tag{1.44}$$
$$c_1 = a\varphi_x^{*2} + 2b\varphi_x^*\varphi_y^* + c\varphi_y^{*2} = 0. \tag{1.45}$$

Ký hiệu $\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, với α, β là các đại lượng thực. Tách phần thực và phần ảo trong (**??**) ta được

$$a\alpha_x^2 + 2b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2 = a\beta_x^2 + 2b\beta_x\beta_y + c\beta_y^2, \tag{1.46}$$
$$a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + c\alpha_y\beta_y = 0. \tag{1.47}$$

Bây giờ xét phép đổi biến

$$\alpha = \alpha(x,y),$$
$$\beta = \beta(x,y),$$

ta có

$$\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)} \neq 0,$$

(Thực chất ở đây ta đặt

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi^*(x,y)), \quad \beta = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) - \varphi^*(x,y))$$

mà thôi!). Từ các tính toán ở trên, phương trình (**??**) sẽ trở thành

$$a_2u_{\alpha\alpha} + 2bu_{\alpha\beta} + c_2u_{\beta\beta} + F_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0, \tag{1.48}$$

với $a_2 = c_2$, $b_2 = 0$, và $a_2c_2 - b_2^2 > 0$. Phương trình chính tắc của phương trình (**??**) sẽ có dạng

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).} \tag{1.49}$$

Ví dụ 2.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 0. \tag{1.50}$$

Phương trình đường đặc trưng: $y'^2 - 2y' + 5 = 0$ có biệt thức $\Delta = -4 < 0$. Từ đó phương trình có nghiệm phức $y' = 1 + 2i$, kéo theo đường cong tích phân tương ứng $y - x - 2ix = C_1$. Đặt

$$\alpha = y - x, \tag{1.51}$$

$$\beta = -2x. \tag{1.52}$$

Từ đó phương trình chính tắc tương ứng là

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{25}(u_\alpha + 4u_\beta) = 0. \tag{1.53}$$

Trường hợp phương trình parabolic Tương ứng với trường hợp $\delta = b^2 - ac = 0$. Khi đó phương trình đường đặc trưng có nghiệm kép

$$\varphi(x, y) = C. \tag{1.54}$$

Ta dùng phép thế biến

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{1.55}$$

với $\psi(x, y)$ tùy ý thoả mãn

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0. \tag{1.56}$$

Tính toán tương tự trường hợp hyperbolic, các hệ số a_1, b_1 triệt tiêu, còn c_1 không triệt tiêu. Khi đó phương trình chính tắc của phương trình (**??**) trong trường hợp này có dạng

$$\boxed{u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\eta, u_\xi).} \tag{1.57}$$

Chú ý rằng trong trường hợp $b = 0$ thì phương trình (**??**) có sẵn dạng (**??**).

Ví dụ 3.

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x + u_y + 12u = 0. \tag{1.58}$$

Ta có phương trình đường đặc trưng là $y'^2 + 4y' + 4 = 0$ có biệt thức $\Delta = 0$, vậy đây là phương trình parabolic. Phương trình đặc trưng có nghiệm $y' = -2$, suy ra $y + 2x = C$. Xét phép đổi biến

$$\xi = y + 2x, \tag{1.59}$$

$$\psi = y. \tag{1.60}$$

Rõ ràng ξ và ψ trực giao với nhau. Theo phần lý thuyết, các hệ số a_1 và b_1 triệt tiêu, còn $c_1 = 4$. Vậy ta có dạng chính tắc của phương trình đã cho là

$$4u_{\eta\eta} + 5(2u_\xi) + u_\xi + u_\eta + 12u = 0 \tag{1.61}$$

$$\iff u_{\eta\eta} + \frac{11}{4}u_\xi + \frac{1}{4}u_\eta + 3u = 0. \tag{1.62}$$

1.5 Tính đặt chỉnh của bài toán phương trình đạo hàm riêng. Phản ví dụ của Hadamard. Định lý Cauchy - Kovalevskaia

Trong các bài toán vật lý dẫn đến các bài toán của phương trình đạo hàm riêng, một vấn đề thực tiễn đặt ra là các sai số do thực nghiệm, đo đạc các số liệu thực tiễn sẽ ảnh hưởng đến sai số của nghiệm. Do đó việc mô hình hóa toán học các quá trình vật lý cần thỏa mãn các đòi hỏi sau:

- Nghiệm của bài toán phải **tồn tại** trong một lớp hàm X nào đó.
- Nghiệm đó là **duy nhất** trong một lớp hàm Y nào đó.
- Nghiệm của bài toán **phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện đã cho** của bải toán (điều kiện ban đầu, điều kiện cho trên biên, số hạng tự do, các hệ số của phương trình.

J.S.Hadamard (186-1963) đã đưa ra khái niệm về tính **đặt chỉnh (đặt đúng đắn, đặt tốt – well-posed)** của một bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng: Một bài toán được gọi là đặt đúng đắn nếu thỏa mãn cả ba điều kiện trên. Nếu không thỏa mãn một trong ba điều kiện trên thì bài toán được gọi là bài toán **đặt không đúng đắn (đặt không chỉnh – ill-posed problem)**.

Ví dụ 4. 1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Người ta chứng minh được rằng với f thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo y và liên tục theo (x, y) trong một miền nào đó chứa (x_0, y_0) thì bài toán là đặt đúng đắn.

2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình Laplace đối với hàm $u(x,t)$:

$$u_{tt} = -u_{xx} \quad \text{trong } \Omega, \tag{1.63}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \frac{1}{k}\sin kx, \tag{1.64}$$

$$0 < t < \delta,\ x \in \mathbb{R},$$

k là một số nguyên dương nào đó tùy ý, ở đây coi $X = Y = C^2(\Omega)$, với $\Omega = (0,\delta)\times\mathbb{R}$. Nghiệm của bài toán (**??**)- (**??**) là hàm

$$u_k(x,t) = \frac{\text{sh}(kt)}{k^2}\sin kx. \tag{1.65}$$

Nếu $k \to \infty$ thì $\frac{1}{k}\sin kx$ hội tụ đều theo x đến không. Tuy nhiên, với $x \neq j\pi, j = 1,2,\dots$ thì dãy hàm $u_k(x,t) = \frac{\text{sh}(kt)}{k^2}\sin kx$ không hội tụ đều về không khi $k\to\infty$. Vậy bài toán Cauchy (**??**)- (**??**) không đặt chỉnh trong lớp hàm $C^2(\Omega)$.

Xét $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Ta xét bài toán Cauchy tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai tổng quát

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), \tag{1.66}$$

ở đây a_{ij}, a_i, a, f là các hàm đủ trơn. Ta nhắc lại rằng bài toán tìm nghiệm của phương trình thỏa mãn các điều kiện ban đầu tại $t = t_0$ là bài toán Cauchy. Trong phương trình vi phân thường, ứng với trường hợp $n = 2$, ta đã có định lý Cauchy khẳng định rằng bài toán Cauchy có nghiệm giải tích duy nhất trong một lận cận nào đó của t^0, nếu các hệ số và số hạng tự do của phương trình là các hàm giải tích trong khoảng $(a,b) \ni t^0$. Một cách tự nhiên, ta tìm cách mở rộng kết quả trên cho trường hợp phương trình đạo hàm riêng. Giả sử biến của phương trình là $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ được tách thành $x = (x', x_n) = (x', t)$, trong đó $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $t = x_n$, ở đây t đóng vai trò biến thời gian còn x' đóng vai trò biến không gian. Bài toán Cauchy của phương trình đạo hàm riêng (**??**) là tìm nghiệm của phương trình biết rằng trên mặt phẳng $t = t^0$ và trong một lân cận của x'_0 có các điều kiện ban đầu

$$u\big|_{t=t^0} = u_0(x'), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t^0} = u_1(x'). \tag{1.67}$$

Định lý sau, mang tên nhà nữ toán học Nga **S. V. Kovalevskaia** (1850 - 1891), sẽ chỉ ra các điều kiện (cần và đủ) để bài toán Cauchy có nghiệm giải tích duy nhất. Giả sử viết phương trình (**??**) dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{in}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u + h(x), \tag{1.68}$$

Định lý 1.1. *Giả sử b_{ij}, b_{in}, b_i, b, h là các hàm giải tích trong một lân cận nào đó của điểm x^0 còn u_0, u_1, là các hàm giải tích trong một lận cận nào đó của điểm x'_0. Khi đó bài toán Cauchy* (**??**)- (**??**) *có nghiệm giải tích*[b] *trong một lân cận nào đó của điểm x^0 và là nghiệm duy nhất trong lớp các hàm giải tích.*

[b]Còn gọi là nghiệm cổ điển của phương trình đạo hàm riêng

Việc chứng minh định lý này có ở phần phụ lục cuối giáo trình. Cũng có thể tham khảo các sách trong phần tham khảo. Một chú ý cuối cùng của chương này là định lý Cauchy - Kovalevskaia cũng đúng trong trường hợp phương trình cấp cao hơn 2, khi đó ta sẽ có những phát biểu tương tự định lý vừa nêu.

Bài tập chương 1

0. (Mô hình hoá) Quan sát một đoạn đường dài 50m không có điểm đỗ trong một thời gian 50 phút trong nhiều ngày, bạn thu được các kết quả sau. (Coi tất cả các loại phương tiện giao thông là như nhau).

1. Trong ngày đầu tiên, ta thấy rằng trong suốt thời gian quan sát, tất cả các phương tiện giao thông đều di chuyển với vận tốc hữu hạn và không gặp rắc rối gì.

2. Trong ngày thứ hai, ta vẫn quan sát được hiện tượng trên, đồng thời nhận thấy rằng: Trong thời gian nói trên đã xuất hiện các vụ tai nạn giao thông và làm những phương tiện trực tiếp liên quan đến tai nạn không lưu thông được nữa và không ảnh hưởng đến các phương tiện giao thông khác. Trên đoạn đường nói trên, tại mỗi điểm tỷ lệ xuất hiện tai nạn giao thông là một hằng số $\lambda > 0$ phụ thuộc vào mật độ phương tiện giao thông tại đó.

3. Trong ngày thứ ba, các phương tiện giao thông không gặp tai nạn di chuyển theo một trường vận tốc thay đổi, và không phụ thuộc vào mật độ phương tiện giao thông.

4. Trong ngày thứ tư, ta nhận ra rằng có một mật độ xe cộ cực đại $\rho_{\max} \in \mathbb{R}$ tại mỗi điểm trên đường, sao cho khi khi mật độ xe cộ vượt qua $\rho_{\max}$ thì tỷ lệ tai nạn giao thông sẽ gia tăng tại điểm đó.

Hãy mô tả các quá trình trên thành các phương trình đạo hàm riêng tương ứng.

I. Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc và phân loại chúng

1. $u_{xx} - 7u_{xy} + 12u_{yy} + u_x - 2u_y - 3u = 0,$

2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 0,$

3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + u_y + u = 0,$

4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0,$

5. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_x = 0,$

6. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0,$

7. $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0,$

8. $\tan^2 x u_{xx} - 2y \tan x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \tan^3 x u_x = 0.$

II.1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau:

1. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0,$

2. $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0,$

3. $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$, (gợi ý: đặt $v = (x-y)u$),

4. $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$, (gợi ý: đặt $u = e^{-(x^2+y^2)/2}v$),

II.2. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

1. $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0$,

2. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$,

3. $u_{xy} + au_x = 0$,

4. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y - 2 = 0$,

5. $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$, $a, b = \text{const}$,

6. $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{xy}$.

III. Tìm các miền elliptic, hyperbolic, parabolic của phương trình

$$(\lambda + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0,$$

theo λ.

IV. Đưa về dạng chính tắc trong miền mà loại phương trình vẫn giữ nguyên.

1. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0$,

2. $y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$,

3. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$,

4. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$,

5. $\sin^2 x u_{xx} + u_{yy} = 0$.

V. Đặt $u = ve^{\lambda x + \mu y}$ và chọn các tham số λ, μ thích hợp, hãy đơn giản hoá các phương trình sau.

1. $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$,

2. $u_{xx} = \frac{1}{a^2}u_y + \beta u_x + \alpha u$,

3. $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$.

VI (*). Phép biến đổi Fourier $\mathcal{F}$ của một hàm khả tích $u(x,y)$ được cho bởi công thức

$$\mathcal{F}[u](\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} u(x,y)e^{-i(x\xi + y\eta)}dxdy, \quad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.69}$$

Xét phương trình

$$au_{xx} + bu_{yy} = f(x,y). \tag{1.70}$$

1. Biến đổi phương trình trên bằng phép biến đổi Fourier $(x, y) \to (\xi, \eta)$.

2. Tìm nghiệm của phương trình trên từ việc giải phương trình đã được biến đổi Fourier với giả thiết rằng u có giá compact, tức là tập

$$\operatorname{supp} u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ u(x, y) \neq 0\}$$

   là một tập compact.

3. Xét trường hợp $a = b = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $a = 1$, $b = -1$.

CHƯƠNG 2

Phương trình hyperbolic. Phương trình truyền sóng trên dây

2.1 Đặt bài toán

Chúng ta nghiên cứu phương trình truyền sóng trên dây rung, từ đó nghiên cứu tính chất của các phương trình hyperbolic

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u = u(x,t),\ (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty), \tag{2.1}$$

hoặc phương trình truyền sóng không thuần nhất

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad u = u(x,t),\ (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty), \tag{2.2}$$

Đối với phương trình hyperbolic, người ta đặt vấn đề nghiên cứu bài toán Cauchy tương ứng của chúng. Ta xét bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng (**??**) sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty), \tag{2.3}$$

$$u(t_0, x) = g(x), \quad x \in [0,l], \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) = h(x), \quad x \in [0,l]. \tag{2.5}$$

Chú ý rằng đoạn $[0,l]$ có thể được thay bằng cả trục thực $\mathbb{R}$. Từ chương **??**, ta đã nêu ra cách thiết lập để dẫn đến phương trình truyền sóng trên dây căng thẳng. Cũng như các phương trình đạo hàm riêng khác, ta đi chứng minh các Định lý tồn tại, duy nhất nghiệm và Định lý về sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ kiện ban đầu. Ta có các Định lý sau.

Định lý 2.2 (Định lý duy nhất). *Tồn tại không nhiều hơn một nghiệm $u \in C^2(\Omega)$ của bài toán Cauchy* (**??**), (**??**), (**??**).

Chú ý.

- Bằng cách co giãn hệ toạ độ, đặt $t' = at$, ta có thể giả sử hệ số $a = 1$.
- Bằng cách tịnh tiến hệ toạ độ, ta có thể coi $t_0 = 0$.

- Để chứng minh Định lý, ta chứng minh rằng hiệu của hai nghiệm bất kỳ của bài toán đồng nhất bằng 0. Giả sử u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán trên, khi đó hiệu $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ thoả mãn

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty), \tag{2.6}$$

$$v(0,x) = 0, \quad x \in [0,l], \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{2.8}$$

  Khi đó nghiệm $u(x,t)$ của bài toán trên sẽ đồng nhất bằng không.

- Ta sẽ sử dụng ký hiệu u_t và u_x thay cho các ký hiệu truyền thống $\frac{\partial u}{\partial t}$ và $\frac{\partial u}{\partial x}$ tương ứng.

Chứng minh. Giả sử $u(x,t)$ là nghiệm của bài toán Cauchy ở trên, sao cho u khả vi liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp hai trong Ω. Xét nón K có mặt đáy là $t = t_0 = 0$, các mặt bên là các đường đặc trưng. Khi đó

$$u_t\left(u_{tt} - u_{xx}\right) = 0,$$

suy ra

$$I = \iint_K u_t\left(u_{tt} - u_{xx}\right) dxdt = 0,$$

Lại có

$$u_t \cdot u_{tt} = \frac{1}{2}\partial_t(u_t^2), \tag{2.9}$$

$$u_t \cdot u_{xx} = \partial_x(u_t \cdot u_x) - \frac{1}{2}\partial_t(u_t^2). \tag{2.10}$$

Từ đó suy ra

$$I = -\frac{1}{2}\iint_K \left(\partial_t(u_x^2 + u_t^2) - \partial_x(2u_x u_t)\right) dxdt = 0.$$

Theo công thức Green,

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int_{\partial K} 2u_t u_x dt + (u_x^2 + u_t^2)dx = 0.$$

Trong đó ∂K được tạo bởi các đường đặc trưng của phương trình (tức là các đường $x \pm t = 0$) và đường $t = t_0 = 0$, chú ý rằng trên đường nằm ngang $t = t_0 = 0$ ta có

$u_0 = 0$, tức là tích phân được lấy trên các đường đặc trưng mà thôi. Từ công thức của đường đặc trưng ta suy ra hệ thức

$$u_t = \pm u_x$$

(vì hệ số góc của đường đặc trưng là ± 1). Gọi m là phương của đường đặc trưng l nào đó của phương trình. Khi đó trên đường đặc trưng l ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial m} &= u_x \cos(\vec{m}, \vec{x}) + u_t \cos(\vec{m}, \vec{t}) \\ &= u_t(\cos(\vec{m}, \vec{x}) \pm \cos(\vec{m}, \vec{t})) = 0.\end{aligned}$$

vì vectơ $\vec{m}$ vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của đường đặc trưng. Vậy ta có $u(x,t) = \mathrm{const} = u(x,0) = 0$, với mọi $(x,t) \in K$. Vì K được chọn bất kỳ nên ta suy ra $u(x,t) \equiv 0$. Điều phải chứng minh. $\square$

Như ta sẽ thấy từ công thức D'Alembert trong phần sau, nghiệm của bài toán Cauchy sẽ phụ thuộc vào các dữ kiện ban đầu là các hàm dưới dấu tích phân: Khi thay đổi một lượng nhỏ ở các dữ kiện ban đầu g và h thì nghiệm của bài toán Cauchy sẽ thay đổi một lượng nhỏ tương ứng. Vì vậy ta có khẳng định.

Định lý 2.3 (Tính ổn định của nghiệm). *Nghiệm của bài toán Cauchy* (**??**)-(**??**) *phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện ban đầu h và g.*

2.2 Phương trình chuyển dịch

Phần này nhằm bổ trợ cho việc tìm nghiệm của phương trình truyền sóng bằng công thức D'Alembert. Xét phương trình

$$u_t + bu_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty). \tag{2.11}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình trong lớp các hàm số có đạo hàm riêng liên tục. Chú ý rằng khi xem vế trái của phương trình (**??**) là một hàm theo $(x, t; b)$ thì đạo hàm theo hướng $(b, 1)$ triệt tiêu. Khi đó, với mỗi điểm cố định $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ta đặt

$$z(s) = u(x + sb, t + s).$$

Thế thì

$$\dot{z}(s) = bu_x(x + sb, t + s) + u_t(x + sb, t + s) = 0,$$

tức là $z(s) = \mathrm{const}$. Từ đó suy ra nếu biết giá trị của u trên các đường thẳng có vectơ chỉ phương là $(b, 1)$ thì có thể xác định được giá trị của u trên toàn miền $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Xét bài toán Cauchy

$$u_t + bu_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \tag{2.12}$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Đường thẳng đi qua điểm (x,t) có hướng là $(b,1)$ được tham số hóa là $(x+sb, t+s)$. Vì u là hằng số trên đường thẳng đó và $u(x-tb,0)=g(x-tb)$ nên suy ra nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = g(x-tb), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty).$$

Khi vế phải của phương trình (**??**) là một hàm $f(x,t)$ không đồng nhất bằng không, thực hiện tương tự trên ta suy ra được nghiệm của bài toán Cauchy tương ứng là

$$u(x,t) = g(x-tb) + \int_0^t f(x+(s-t)b, s)ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty). \tag{2.14}$$

Chú ý. Phương pháp mà ta sử dụng ở mục này dựa trên cơ sở đưa một phương trình đạo hàm riêng về phương trình vi phân thường tương ứng. Người ta gọi phương pháp này là *phương pháp đặc trưng*.

2.3 Nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng. Công thức D'Alembert

Xét bài toán Cauchy thuần nhất

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty), \tag{2.15}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

ở đây các hàm g và h được giả thiết là đã biết. Ta cần tìm nghiệm của bài toán được biểu diễn qua g và h. Chú ý rằng phương trình (**??**) có thể viết được dưới dạng

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{2.18}$$

Đặt $v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$. Khi đó phương trình (**??**) trở thành

$$v_t(x,t) + av_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{2.19}$$

Áp dụng nghiệm của phương trình chuyển dịch ở trên (phương trình (**??**)) với $b = a$ ta tìm nghiệm bài toán (**??**)- (**??**) dưới dạng $v(x,t) = \alpha(x-at)$, trong đó $\alpha(x) := v(x,0)$. Kết hợp với (**??**) ta được

$$u_t(x,t) - au_x(x,t) = \alpha(x-at), \quad \text{trong} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty). \tag{2.20}$$

Áp dụng công thức nghiệm (**??**) của phương trình chuyển dịch không thuần nhất với $b = -a$, $f(x,t) = \alpha(x-at)$ ta suy ra nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \beta(x+at) + \int_0^t \alpha(x + a(t-s) - as)ds$$

đổi biến $y := x + at - 2as$ ta được

$$= \beta(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \alpha(y)dy, \quad (b(x) = u(x,0)).$$

Ở đây α và β là các hàm cần tìm thỏa mãn bài toán Cauchy đang xét. Thay nghiệm vừa tìm được vào bài toán ta được

$$\begin{aligned}
&\beta(x) = u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},\\
&\alpha(x) = v(x,0) = u_t(x,0) - au_x(x,0) = h(x) - g'(x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm cần tìm là

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+at) + g(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(y)dy, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0.} \tag{2.21}$$

Công thức (**??**) được gọi là **công thức D'Alembert**. Vậy ta chứng minh được Định lý về sự tồn tại nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng.

Định lý 2.4 (Định lý tồn tại nghiệm). *Giả sử $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, cho trước và hàm u được xác định bằng công thức (**??**). Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng*

1. *$u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$,*
2. *$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ trong $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$,*
3. *với mọi $x^0 \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u(x,t) = g(x^0), \quad \lim_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u_t(x,t) = h(x^0).$$

Chứng minh. Các bước ở trên đã chứng minh các khẳng định 1. và 2. Để chứng tỏ 3., ta kiểm tra trực tiếp giới hạn trong khẳng định. Điều này hoàn toàn dễ dàng đối với các bạn. □

Bên cạnh việc xác định nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng theo Định lý **??** ta có thể xác định nghiệm của bài toán trên bằng phương pháp tách biến. Ta có phương trình các đường đặc trưng của phương trình hyperbolic có dạng

$$dx^2 - a^2dt^2 = 0, \tag{2.22}$$

hay

$$dx - adt = 0, \quad dx + adt = 0. \tag{2.23}$$

Nghiệm của nó có dạng

$$x - at = C_1, \tag{2.24}$$

$$x + at = C_2. \tag{2.25}$$

Thực hiện phép đổi biến

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \tag{2.26}$$

ta được

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{2.27}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f^*(\eta). \tag{2.28}$$

Tích phân (**??**) theo η ta được

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \tag{2.29}$$

Rõ ràng với mọi hàm $f(\xi)$ và $g(\eta)$ khả vi trong (**??**), bằng cách đạo hàm ta có kết luận chúng đều là nghiệm của phương trình được xét. Như vậy biểu thức (**??**) đúng là nghiệm của phương trình truyền sóng đang xét, ta được nghiệm tổng quát của phương trình (**??**) có dạng

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \tag{2.30}$$

Giả sử bài toán Cauchy (**??**)-(**??**)-(**??**) có nghiệm, khi đó nghiệm được biểu diễn bằng công thức (**??**). Sử dụng các dữ kiện ban đầu ta tìm được dạng của các hàm f_i. Ta có

$$u(0, x) = f_1(x) + f_2(x) = g(x). \tag{2.31}$$

Đạo hàm hai vế của (**??**) và cho $t = 0$, ta được

$$af_1'(x) - af_2'(x) = h(x), \tag{2.32}$$

suy ra

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} h(\xi) d\xi + C. \tag{2.33}$$

Từ các tính toán trên ta suy ra

$$f_1(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} h(\xi) d\xi + \frac{C}{2}, \tag{2.34}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} h(\xi) d\xi - \frac{C}{2}. \tag{2.35}$$

Thay vào (**??**) ta được nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\boxed{u(x, t) = \frac{g(x + at) + g(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} h(\xi) d\xi.} \tag{2.36}$$

Vậy, từ các Định lý **??**, **??**, **??**, ta có khẳng định

Định lý 2.5. *Bài toán Cauchy* (**??**)-(**??**)-(**??**) *của phương trình truyền sóng được đặt đúng đắn.*

2.4 Nghiệm của bài toán biên-ban đầu. Phương pháp tách biến

Xét bài toán biên-ban đầu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega \tag{2.37}$$
$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{2.38}$$
$$u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0,l], \tag{2.39}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{2.40}$$

Ta sẽ đi tìm nghiệm không tầm thường của bài toán biên-ban đầu trên có dạng tách biến $u(x,t) = X(x)T(t)$. Thay biểu thức nghiệm vào phương trình (**??**) ta được

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{2.41}$$

ở đó λ là một hằng số. Từ phương trình trên ta suy ra một hệ phương trình vi phân thường

$$\begin{cases} T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, & \text{(a)} \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. & \text{(b)} \end{cases} \tag{2.42}$$

Giải (**??**)(b), sử dụng điều kiện ở biên để tìm giá trị λ thích hợp. Ta có các trường hợp sau:

- $\lambda < 0$: Phương trình vi phân thường có nghiệm

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Thay các điều kiện biên

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$
$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0,$$

suy ra

$$C_1 = C_2 = 0.$$

- $\lambda = 0$: Dễ dàng suy ra $C_1 = C_2 = 0$.

- $\lambda > 0$: Phương trình vi phân có nghiệm

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Thay các điều kiện biên

$$X(0) = C_1 = 0,$$
$$X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

Chú ý rằng nghiệm cần tìm không tầm thường ta suy ra $C_2 \neq 0$. Vậy

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Longleftrightarrow \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2},\ k = \pm1, \pm2, \ldots$$

Thay λ vừa tìm được vào (**??**)(a) ta có

$$T''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0. \tag{2.43}$$

Phương trình có nghiệm

$$T_k(t) = B_k \cos\frac{k\pi}{l}at + A_k \sin\frac{k\pi}{l}at. \tag{2.44}$$

Từ những lập luận trên suy ra phương trình truyền sóng đang xét có nghiệm dạng

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{2.45}$$

Ta xây dựng chuỗi hình thức

$$u(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{2.46}$$

và xác định hệ số A_k và B_k sao cho chuỗi trên thoả mãn các điều kiện ban đầu của bài toán. Giả sử chuỗi có thể đạo hàm hình thức từng từ theo t, ta có các hệ thức

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi_0(x),$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l}B_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi_1(x).$$

Giả sử φ_0 và φ_1 có thể khai triển thành chuỗi Fourier theo $\{\sin k\pi/l\}$ trong đoạn $[0,l]$. Khi đó ta xác định được hệ số A_k và B_k theo các công thức

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx, \tag{2.47}$$
$$B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx. \tag{2.48}$$

Cuối cùng ta đi tìm các điều kiện của φ_0 và φ_1 để chuỗi (**??**) với các hệ số được xác định ở (**??**) và (**??**) thực sự là nghiệm của bài toán biên-ban đầu đang xét. Cụ thể là ta cần tìm điều kiện để chuỗi (**??**) hội tụ đều. Sử dụng các kết quả của giải tích Fourier ta có

- Hàm φ_0 trong $[0,l]$ có các đạo hàm liên tục cho tới cấp hai, có đạo hàm cấp ba liên tục từng khúc và

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0.$$

- Hàm φ_1 trong $[0,l]$ khả vi liên tục, có đạo hàm cấp hai liên tục từng khúc và

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0.$$

(Chi tiết chứng minh có thể xem ở [**?**, **?**].)

2.5 Trường hợp ngoại lực khác không

Bài toán Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}, \tag{2.49}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.51}$$

có nghiệm duy nhất phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu và được xác định theo công thức D'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \frac{g(x+at)+g(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\xi,\tau)d\xi.} \tag{2.52}$$

2.6 Giải bài toán biên-ban đầu với vế phải khác không

Ta cũng sử dụng phương pháp Fourier để xác định nghiệm của bài toán biên-ban đầu với vế phải khác không. Xét bài toán với các điều kiện Cauchy và điều kiện biên thuần nhất:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{2.53}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,l], \tag{2.54}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{2.55}$$

Ta sẽ đi tìm nghiệm không tầm thường của bài toán biên-ban đầu trên có dạng tách biến

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

và giả sử hàm $f(x,t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier trong $[0,l]$ theo $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l} f(x,t)dx.$$

Thay biểu thức nghiệm vào phương trình (**??**) ta được

$$\sum_{k=1}^{\infty}(T_k'' + \omega_k^2 T_k)\sin\frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.56}$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được hệ phương trình vi phân

$$T_k'' + \omega_k^2 T_k = f_k,$$

với điều kiện có nghiệm của phương trình là $T_k(0) = T'_k(0) = 0$. Áp dụng lý thuyết phương trình vi phân thường ta có ngay công thức nghiệm của phương trình là

$$\begin{aligned} T_k(t) &= \frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-\tau)d\tau\frac{2}{l}\int_0^l f(x\tau)\sin\frac{k\pi}{l}xdx \\ &= \frac{2}{l\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-\tau)d\tau\int_0^l f(x\tau)\sin\frac{k\pi}{l}xdx, \end{aligned}$$

với điều kiện hàm $f(x,t)$ liên tục, có đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai đối với biến x và cấp một đối với biến t, thoả mãn

$$f(0,t) = f(l,t) = 0.$$

Cuối cùng ta đi đến bài toán biên-ban đầu tổng quát. Xét bài toán

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega \tag{2.57}$$
$$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x\in[0,l], \tag{2.58}$$
$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t), \quad t\geq 0. \tag{2.59}$$

Xét hàm $u^*(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}(\nu(t)-\mu(t))$, đặt

$$u = v + \omega + u^*, \tag{2.60}$$

trong đó v là nghiệm của bài toán

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad (x,t)\in\Omega \tag{2.61}$$
$$u(x,0) = \phi^*(x),\ u_t(x,0) = \psi^*(x), \quad x\in[0,l], \tag{2.62}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t\geq 0, \tag{2.63}$$

với $\phi^*(x) = \phi(x) - u^*(x,0)$, $\psi^*(x) = \psi(x) - u^*_t(x,0)$, còn ω thoả mãn bài toán

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f^*(x,t), \quad (x,t)\in\Omega \tag{2.64}$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x\in[0,l], \tag{2.65}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{2.66}$$

với $f^*(x,t) = f(x,t) - (u^*_{tt} - a^2u^*_{xx})$. Các bài toán xác định v, ω đều đã được xét ở trên, vì vậy ta có nghiệm của bài toán cần tìm là (**??**).

2.7 Ý nghĩa vật lý

Phương trình truyền sóng mô tả hiện tượng truyền sóng trong môi trường thực tế, như các hiện tượng truyền sóng âm trong không gian (ứng với trường hợp hàm

$u = u(x, y, z, t)$), ở đó hàm sóng mô tả sóng âm được truyền trong không gian theo các mặt cầu có bán kính phụ thuộc vào thời gian t; hiện tượng truyền sóng trên mặt phẳng (như sóng trên mặt nước, $u = u(x, y, t)$); hiện tượng truyền sóng dọc trên dây (ứng với trường hợp hàm $u = u(x, t)$). Bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng trên dây thể hiện quá trình quan sát sợi dây dao động khi biết trước trạng thái ban đầu của toàn bộ sợi dây. Nói chung ta luôn có thể biểu diễn nghiệm dưới dạng một chuỗi Fourier với các giả thiết thích hợp. Khi nghiên cứu bài toán biên - ban đầu của phương trình truyền sóng, ở chương này ta hạn chế ở trường hợp không gian một chiều nên hiện tượng không rõ ràng, khi nghiên cứu dao động trên mặt phẳng ($n = 2$) thì tức là ta đi nghiên cứu một màng rung khi biết được các trạng thái ban đầu của màng và điều kiện cho trên biên của màng đang xét. Một cách tổng quát, khi nghiên cứu nghiệm của phương trình hyperbolic, người ta đi nghiên cứu nghiệm trong trường hợp $n = 3$ và $n = 2$, từ đó tổng quát hoá lên trường hợp n chẵn và lẻ, các tính chất của nghiệm của phương trình trong hai trường hợp trên là đặc trưng cho các trường hợp số chiều không gian tương ứng là chẵn hoặc lẻ. Ngoài các nghiệm giải tích (theo định lý Cauchy - Kovalevskaia) khi các hàm cho trước là đủ trơn, trong trường hợp các hàm cho trước không đủ trơn, thậm chí chỉ khả tích (trong thực tiễn là như vậy, đôi khi các hàm đó chỉ là một tập hợp các số liệu đo đạc được, rất rời rạc và không liên tục) thì người ta cần phải mô tả nghiệm của phương trình trong một lớp hàm khác, ví dụ như lớp hàm khả tích, hay trong các không gian hàm thích hợp, ở đây là các không gian Sobolev thích hợp. Đây là một lĩnh vực rất rộng lớn, phức tạp và cũng không kém phần lý thú: Nghiên cứu định tính các phương trình đạo hàm riêng.

Bài tập chương 2

I. Chứng minh rằng nếu $f(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ là các hàm điều hoà trong $\mathbb{R}^n$, $g(t) \in C^1([0,+\infty))$ thì nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + g(t)f(x), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{2.67}$$

được tính qua công thức

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.68}$$

II. Giải các bài toán dưới đây, với $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$a. \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x. \end{cases} \qquad b. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x + \cos x. \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

III. Giải các bài toán sau:

1. $\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 3x^2,\ u_y(x,0) = 0, \end{cases}$ $\quad |x| < +\infty.$

2. $\begin{cases} u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = 8x - 4x^2,\ u_x|_\Gamma = 5 + 4x, \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y = 3x$.

3. $\begin{cases} 4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_y(x,0) = h(x), \end{cases}$ $\quad |x| < +\infty.$

4. $\begin{cases} u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u(x,y)|_\Gamma = g(x),\ u_y(x,y)|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ $\quad |x| < +\infty$, $\Gamma = \{y = \sin x\}$.

IV. Tìm điều kiện cần và đủ để các bài toán sau có nghiệm, với $-\infty < x < +\infty$.

1. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,t)|_{x-t=0} = g(x),\ u_t(x,t)|_{x-t=0} = h(x), \end{cases}$ $\quad |x| < +\infty.$

2. $\begin{cases} u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y + x = 0$.

3. $\begin{cases} 2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $x - 2y = 0$.

4. $\begin{cases} 3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y - 3x = 0$.

V. Tìm nghiệm của bài toán.

1. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = -2\sin x + 8\sin 2x, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin^3 x,\ u_t(x,0) = 3\sin x + 4\sin 2x, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = -2\sin\frac{\pi x}{2\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell},\ u_t(x,0) = \frac{3\pi a}{\ell}\sin\frac{3\pi x}{2\ell}, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\ell,t) = 0, \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 1 + 3\cos x,\ u_t(x,0) = -4\cos^2 x - \cos x, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bx(x-\ell),\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\ell,t) = 0, \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x(\pi - x)\cos t,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = x + 1,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = t + 1,\ u(\ell,t) = t^3 + 2, \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t\cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = \pi x, \\ u(0,t) = 2t,\ u(\frac{\pi}{2},t) = 0, \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x^2 - x,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t - u,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \pi x - x^2,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

CHƯƠNG 3

Phương trình elliptic. Bài toán biên của phương trình Laplace

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu phương trình elliptic thường gặp nhất, đó là phương trình Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x,y),\ (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

(trong trường hợp vế phải khác không, ta có phương trình Poisson

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad u = u(x,y),\ (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2), \tag{3.2}$$

ở đây giả thiết Ω là một miền giới nội trong $\mathbb{R}^2$ với biên $\partial\Omega$. Trong chương này, chúng ta sẽ đề cập trước hết đến hàm điều hoà và một số tính chất cơ bản của hàm điều hoà. Tiếp đó chúng ta sẽ nghiên cứu nghiệm của (**??**) hoặc (**??**) đối với hai bài toán biên của phương trình là bài toán biên Dirichlet và bài toán biên Neumann, nguyên lý cực đại cực tiểu, các Định lý tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình, sự phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu và dữ kiện trên biên. Cuối cùng, sử dụng phương pháp tách biến ta cũng có thể xây dựng nghiệm của bài toán biên Dirichlet.

3.1 Hàm điều hoà. Các tính chất cơ bản

3.1.1 Hàm điều hoà

Định nghĩa 3.2. Hàm $u(x,y)$ được gọi là *điều hoà tại điểm* (x_0, y_0) nếu nó có đạo hàm cấp hai liên tục tại điểm đó và thoả mãn phương trình (**??**). Hàm $u(x,y)$ điều hoà tại mọi điểm $(x,y) \in \Omega$ được gọi là điều hoà trong miền giới nội Ω. Trường hợp Ω không giới nội, hàm $u(x,y)$ được gọi là điều hoà trong Ω nếu nó điều hoà trong mọi miền con giới nội Ω_1 của Ω và thoả mãn đánh giá tại vô cùng

$$|u(x,y)| \leqslant C \quad \text{khi } |(x,y)| \to \infty,\ C \text{ là hằng số.} \tag{3.3}$$

Ví dụ 5.

- Hàm $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ là hàm điều hoà trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

- Hàm $u(x,y) = x^2 - y^2$ là hàm điều hoà trong mọi miền giới nội của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$.
- Hàm $u(x,y) = \sin(xy)$ không là hàm điều hoà trong $\mathbb{R}^2$.

Chú ý. Đôi khi ta cần nghiên cứu phương trình Laplace trong hệ tọa độ cực. Sử dụng phép đổi biến sang hệ toạ độ cực

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

ta đưa phương trình (**??**) về dạng toạ độ cực

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{3.4}$$

3.1.2 Nghiệm cơ bản của phương trình Laplace

Trong không gian hai chiều $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ta tìm nghiệm $V(P,Q)$ của phương trình (**??**) đối với biến $P(x,y)$ và tham biến $Q(\xi,\zeta)$ sao cho nghiệm chỉ phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai điểm, tức là vào đại lượng $r = \overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2}$. Lấy Q làm gốc tọa độ, ta có

$$V(P,Q) = V(r).$$

Thay vào phương trình (**??**) với chú ý rằng V không phụ thuộc θ, ta được

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0.$$
$$\Longleftrightarrow\ V(r) = C\ln r + C_1.$$

Kết hợp với điều kiện giới nội ở vô cùng (**??**) ta suy ra

$$V(r) = \ln\frac{1}{r}. \tag{3.5}$$

Hàm $V(P,Q) = \ln\frac{1}{r}$, được gọi là *nghiệm cơ bản* của phương trình (**??**) trong trường hợp $n = 2$. Hàm V điều hòa trên mặt phẳng tọa độ tại mọi điểm $P \neq Q$, vì khi $P \to Q$ thì $V(P,Q) \to +\infty$. Chú ý thêm rằng nghiệm cơ bản (**??**) không điều hoà ở vô cùng vì khi $r \to \infty$ thì $V(r) \to -\infty$.

Chú ý.

1. Trong trường hợp $n > 2$, nghiệm cơ bản của phương trình Laplace được cho bởi công thức
$$V(P,Q) = \frac{1}{r^{n-2}}.$$

2. Giả sử $u(x, y)$ là hàm điều hoà. Khi đó ta có công thức biểu diễn tích phân của hàm điều hoà

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left\{ u \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\ln \frac{1}{r_{PQ}} \right) - \ln \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial u}{\partial\nu} \right\} ds, \tag{3.6}$$

ở đây đạo hàm $\partial/\partial\nu$ được lấy theo pháp tuyến trong. Công thức (**??**) được gọi là biểu diễn Green của hàm điều hoà thuộc lớp C^2 tại điểm $P \in \Omega$ bất kỳ thông qua giá trị $u(Q)$ trên biên $\partial\Omega$ và giá trị của đạo hàm theo pháp tuyến $\partial u/\partial\nu$ trên $\partial\Omega$.

3.1.3 Công thức Green đối với toán tử Laplace

Với các giả thiết về miền Ω và các hàm điều hoà $u(x, y), v(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ở trên, ta có (sử dụng công thức tích phân từng phần)

$$\iint_\Omega v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdy = -\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} \nu_x ds \tag{3.7}$$

Làm tương tự cho đạo hàm riêng theo biến y, rồi lấy tổng hai biểu thức vừa nhận được ta có *Công thức Green thứ nhất*

$$\iint_\Omega v \Delta u dxdy = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial\nu} ds. \tag{3.8}$$

Đổi vai trò của u và v trong công thức (**??**) rồi lấy (**??**) trừ đi biểu thức mới nhận được ta có *Công thức Green thứ hai*

$$\iint_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \frac{\partial v}{\partial\nu} \right) ds. \tag{3.9}$$

3.1.4 Các tính chất cơ bản của hàm điều hoà

Ta nêu ra đây một số tính chất đơn giản của hàm điều hoà.

1. Hàm điều hòa trong $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ có đạo hàm mọi cấp trong miền đó.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $u(x, y)$ là hàm điều hòa trong Ω và $P_0(x_0, y_0)$ là một điểm bất kỳ trong Ω. Lấy $\Omega' \subset\subset \Omega$, tức là Ω' nằm gọn trong Ω, chứa P_0. Khi đó u khả vi liên tục đến cấp hai trong $\bar{\Omega}'$. Xét hình cầu $V_\varepsilon := V(P_0, \varepsilon)$ tâm P_0 bán kính ε đủ nhỏ sao cho $\bar{V} \subset \Omega'$. Theo công thức biểu diễn tích phân của hàm điều hòa trong miền Ω' với điểm $P(x, y) \in V_\varepsilon$ ta có

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega'} \left\{ u \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\ln \frac{1}{r} \right) - \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial\nu} \right\} ds_Q, \tag{3.10}$$

trong đó $Q(\xi, \eta) \in \partial\Omega'$ là một điểm bất kì, $r = r_{PQ}$. Điều này có nghĩa là đối với mọi điểm $P \in V_\varepsilon$ và với mọi $Q \in \partial\Omega'$, hàm dưới dấu tích phân của (**??**) là hàm liên tục và có đạo hàm mọi cấp đối với biến P. (Chú ý rằng tích phân trong (**??**) là tích phân đường loại 1, lấy theo biên của miền Ω'). Vậy theo Định lý về tích phân phụ thuộc tham biến, hàm $u(x, y)$ có đạo hàm mọi cấp trong miền V_ε, các đạo hàm ấy được tính bằng cách lấy đạo hàm dưới dấu tích phân theo (x, y). Vì P_0 được chọn tùy ý nên điều đó suy ra chứng minh của tính chất này. □

2. Giả sử $u(x, y)$ là hàm điều hoà trong miền kín $\Omega + \Gamma$. Khi đó ta có

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Ở đây đạo hàm theo hướng được lấy theo hướng pháp tuyến trong của miền.

Chứng minh. Áp dụng công thức Green thứ hai, với hàm $v \equiv 1$. □

3. **(Định lý giá trị trung bình)**

Định lý 3.6. *Giả sử $u(x, y)$ là hàm điều hoà trong hình tròn kín bán kính R $\Omega_R + \Gamma_R$ nào đó. Khi đó giá trị của $u(x, y)$ tại tâm $P_0(x_0, y_0)$ của hình tròn sẽ bằng giá trị trung bình của $u(x, y)$ trên đường tròn Γ_R, tức là*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} u(x, y) ds. \tag{3.11}$$

Định lý vẫn đúng khi hàm $u(x, y)$ điều hoà trong hình tròn Ω_R và liên tục trong hình tròn kín $\Omega_R + \Gamma_R$ bằng cách áp dụng Định lý cho hình tròn kín tâm $r < R$ rồi cho $r \to R$. Ta đi đến một kết luận: *Giá trị của hàm điều hoà tại tâm hình tròn bằng giá trị trung bình của hàm điều hoà trong hình tròn.*

Chứng minh. Áp dụng công thức (**??**) cho tâm P_0 của đường tròn Γ_R và chú ý rằng

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{d}{dr},$$

khi đó ta có

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left\{ u \cdot \frac{1}{r} - \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\}_{r=R} ds \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} u(x, y) ds - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} u(x, y) ds. \quad \text{(theo tính chất 1.)} \end{aligned}$$

□

4. **(Nguyên lý cực đại cực tiểu)** Để đơn giản, ta có thể viết $u(P)$ thay vì viết $u(x,y)$, với $P = P(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Định lý 3.7 (Nguyên lý cực đại cực tiểu). *Nếu một hàm điều hoà trong $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ đạt cực trị tại một điểm trong của Ω thì hàm đó chỉ có thể là hằng số. Nói một cách khác, hàm điều hoà liên tục trong Ω và khác hằng số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm ở trên biên của miền Ω.*

Chứng minh. Giả sử hàm $u(P)$ đạt giá trị cực đại của nó tại một điểm trong của $P_0 \in \Omega$. Ta chứng minh rằng hàm đó đồng nhất hằng số. Trước hết, xét hình tròn $B(P_0, r)$ tâm P_0 bán kính r bất kỳ, sao cho hình tròn đó và kể cả biên S_r của nó nằm gọn trong Ω. Ta có, với mọi $P \in \Omega \cap S_r$, $u(P) \leqslant u(P_0)$. Giả sử có một điểm $P' \in S_r$ sao cho $u(P') < u(P_0)$. Vì hàm u liên tục trên S_r nên tồn tại một lân cận $\sigma(P')$ sao cho $u(P) < u(P_0)$, $P \in \sigma$. Theo công thức trung bình tích phân ở tính chất 2, ta có

$$
\begin{aligned}
u(P_0) &= \frac{1}{2\pi r}\int_{S_r} u(P)ds \\
&= \frac{1}{2\pi r}\int_{S_r-\sigma} u(P)ds + \frac{1}{2\pi r}\int_{\sigma} u(P)ds \\
&< \frac{1}{2\pi r}\int_{S_r-\sigma} u(P_0)ds + \frac{1}{2\pi r}\int_{\sigma} u(P_0)ds \\
&= \frac{1}{2\pi r}u(P_0)(|S_r| - |\sigma| + |\sigma|) = \frac{1}{2\pi r}u(P_0)|S_r| = u(P_0).
\end{aligned}
$$

ở đây $|S_r|$ là chu vi đường tròn $S_r = S_r(P_0)$. Điều này là vô lý. Vậy không tồn tại $P' \in S_r$ sao cho $u(P') < u(P_0)$, tức là trên S_r ta có $u(P) \equiv u(P_0)$. Vì đường tròn S_r được lấy bất kỳ nên ta suy ngay ra $u(P) = \text{const}$ trên toàn hình tròn $B(P_0, r)$. Xét $Q \in \Omega$ bất kỳ. Ta nối Q và P_0 bởi một đường gẫy khúc ℓ nào đó sao cho mọi hình cầu tâm nằm trên đường đó với bán kính δ đủ bé đều nằm trọn trong Ω. Khi đó mọi điểm thuộc hình tròn $B(P_0, \delta/2)$ đều thoả mãn quá trình ở trên, gọi giao điểm của đường tròn $S_r(P_0)$ với ℓ là điểm P_1. Ta có $u(P_1) = u(P_0)$. Lặp lại quá trình trên ta suy ra sau hữu hạn bước,

$$u(P_0) = u(P_1) = \cdots = u(P_m) = u(Q).$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý. Ta có cách phát biểu tương tự đối với Định lý **??** như sau:

Định lý 3.8. *Giả thiết rằng $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω là một miền bị chặn và u là hàm điều hoà trong Ω. Khi đó*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Hơn nữa, nếu Ω liên thông và tồn tại $x_0 \in U$ sao cho $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$, thì $u = \text{const}$ trong Ω.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 \in \Omega$ với $u(x_0) = M := \max_{\bar{\Omega}} u$. Khi đó, với $0 < r < \mathrm{dist}(x_0, \partial U)$, sử dụng công thức giá trị chính cho phương trình Laplace[a] ta có

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u dy \leqslant M. \tag{3.12}$$

Vì đẳng thức chỉ xảy ra khi $u \equiv M$ trong $B(x_0, r)$, ta thấy rằng $u(y) = M$ với mọi $y \in B(x, r)$. Vậy tập $\{x \in \Omega, u(x) = M\}$ vừa mở vừa đóng tương đối trong Ω, vậy nó trùng với Ω. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Ta có các hệ quả của Định lý **??** sau.

Hệ quả 3.1. *Hàm điều hoà $u(P)$ liên tục trong miền kín $\Omega + S$, và $u(P) \geqslant 0$ (tương ứng, $u(P) \leqslant 0$) trên biên S, thì $u(P) \geqslant 0$ (tương ứng, $u(P) \leqslant 0$) trong toàn miền Ω.*

Hệ quả 3.2. *Nếu $u_1(P)$ và $u_2(P)$ là hai hàm điều hoà trong Ω, liên tục trong miền kín $\Omega + S$ và $u_2(P) \geqslant u_1(P)$ (tương ứng, $u_2(P) \leqslant u_1(P)$) trên biên S thì $u_2(P) \geqslant u_1(P)$ (tương ứng, $u_2(P) \leqslant u_1(P)$) trong toàn miền Ω.*

Hệ quả 3.3. *Nếu $u_1(P)$ và $u_2(P)$ là hai hàm điều hoà trong Ω, liên tục trong miền kín $\Omega + S$ và $|u_1(P)| \leqslant u_2(P)$ trên biên S thì $|u_1(P)| \leqslant u_2(P)$ trong toàn miền Ω. Đặc biệt, nếu A là một hằng số và $|u_1(P)| \leqslant A$ trên biên S thì $|u_1(P)| \leqslant A$ trong toàn miền Ω.*

Hệ quả 3.4. *Hàm điều hoà $u(P)$ liên tục trong miền kín $\Omega + S$ và $u(P) = 0$ trên biên S thì bằng 0 trong toàn miền Ω.*

Định lý 3.9 (Bất đẳng thức Harnack). *Giả sử u là một hàm điều hoà không âm trong Ω. Khi đó với mọi miền con bị chặn bất kỳ $\Omega' \subset\subset \Omega$, tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho*

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega'} u.$$

5. **(Định lý trung bình đảo)**

Định lý 3.10. *Giả sử Ω là một miền giưới nội và $u(x, y)$ là một hàm liên tục trong Ω. Nếu đối với bất kì hình cầu V_R tâm $P_0(x_0, y_0)$ bán kính R nằm hoàn toàn trong Ω, hàm $u(x, y)$ đều thỏa mãn đẳng thức về giá trị trung bình (**??**) thì $u(x, y)$ là hàm điều hòa trong Ω.*

[a]Công thức giá trị chính cho phương trình Laplace: Nếu $u \in C^2(\Omega)$ là hàm điều hoà, thì

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} udS = \fint_{B(x,r)} udy,$$

với từng hình cầu $B(x, r) \subset \Omega$.

Chứng minh. Giả sử trong Ω, $u(x,y)$ thoả mãn đẳng thức (**??**). Xét một hình cầu V_R bất kì tâm P_0 bán kính R chứa hoàn toàn trong Ω. Xét hàm điều hoà $v(x,y)$ trong V_R sao cho trên biên ∂V_R ta có

$$v(x,y)|_{\partial V_R} = u(x,y)|_{\partial V_R}.$$

Hàm điều hoà này tồn tại, theo công thức Poisson và nó thoả mãn (**??**). Vậy biểu thức

$$w(x,y) = v(x,y) - u(x,y)$$

cũng thoả mãn (**??**). Trên biên ∂V_R ta có $w(x,y) \equiv 0$, vì vậy, theo hệ quả của nguyên lý cực đại cực tiểu, $w(x,y) \equiv 0$ trong V_R, suy ra u trùng với một hàm điều hoà trong V_R, tức là nó cũng là một hàm điều hoà trong V_R. Vì V_R lấy bất kỳ trong Ω nên $u(x,y)$ là hàm điều hoà trong Ω. $\square$

6. **Định lý Harcnack.** Các chứng minh của hai Định lý Harcnack dưới đây có thể xem trong [**?**].

   Định lý 3.11 (Định lý Harcnack 1). *Giả sử $\{u_n(x,y)\}$ là dãy hàm điều hòa trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ giới nội, có biên Γ trơn từng khúc, liên tục trong miền kín $\Omega + \Gamma$. Nếu dãy $\{u_n(x,y)\}$ hội tụ đều trên biên Γ thì*

   (a) Dãy $\{u_n(x,y)\}$ hội tụ đều trong miền kín $\Omega + \Gamma$.

   (b) Hàm giới hạn $u(x,y)$ của dãy là một hàm điều hòa trong miền Ω.

   (c) Trong mị miền con kín $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, dãy các đạo hàm cấp tùy ý của $\{u_n(x,y)\}$ hội tụ đều đến đạo hàm tương ứng của hàm giới hạn $u(x,y)$.

   Định lý 3.12 (Định lý Harcnack 2). *Nếu dãy đơn điệu $\{u_n(x,y)\}$ cac hàm điều hòa trng miền Ω, hội tụ tại một điểm $P_0(x_0,y_0)$ nào đó thì dãy đó hội tụ trong toàn Ω đến một hàm điều hòa $u(x,y)$ và sự hội tụ đó là đều trong mọi miền con kín $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.*

3.2 Bài toán Dirichlet trong (Bài toán biên thứ nhất)

3.2.1 Đặt bài toán

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ là một miền giới nội với biên S trơn từng khúc và $\varphi(P)$ là một hàm cho trước liên tục trên S. Tìm hàm $u(P)$ điều hoà trong Ω, liên tục trong miền kín $\Omega + S$, sao cho tại biên S giá trị hàm trùng với hàm $\varphi(P)$ ở trên, tức là thoả mãn bài toán

$$\Delta u = 0 \quad \textit{trong } \Omega, \tag{3.13}$$

$$u|_S = \varphi(P). \tag{3.14}$$

Ta có các Định lý sau.

Định lý 3.13. *Nghiệm của bài toán* (**??**)-(**??**)*, nếu tồn tại, là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử bài toán (**??**)-(**??**) có hai nghiệm $u_1(P)$ và $u_2(P)$. Khi đó hai hàm $u_1(P)$ và $u_2(P)$ đều thoả mãn bài toán (**??**)-(**??**) và hiệu của chúng $u(P) = u_1(P) - u_2(P)$ thoả mãn bài toán

$$\Delta u = 0, \tag{3.15}$$

$$u|_S = 0. \tag{3.16}$$

Ta có $u(P)$ là hàm điều hoà, liên tục trong miền kín $\Omega + S$ và triệt tiêu trên S, vậy theo hệ quả **??** ta có $u(P) \equiv 0$ trong miền Ω. Từ đó suy ra $u_1(P) = u_2(P)$. □

Định lý 3.14. *Nghiệm của bài toán* (**??**)-(**??**)*, nếu tồn tại, sẽ phụ thuộc liên tục vào điều kiện biên.*

Chứng minh. Giả sử trên biên S, hai nghiệm $u_1(P)$ và $u_2(P)$ thoả mãn $|u_1(P) - u_2(P)| \leqslant \varepsilon$, thì theo hệ quả **??** ta có $|u_1(P) - u_2(P)| \leqslant \varepsilon$ trong Ω. □

3.2.2 Hàm Green. Định lý tồn tại nghiệm

Xét bài toán (**??**)-(**??**). Hàm Green của bài toán (**??**)-(**??**) là hàm $G(P, Q)$ phụ thuộc biến P và tham biến Q, sao cho:

- Nếu $P \in \Omega + S, Q \in \Omega$, thì hàm $G(P, Q)$ biểu diễn được dưới dạng

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PQ}} + g(P, Q), \tag{3.17}$$

  trong đó r_{PQ} là khoảng cách giữa hai điểm, $g(P, Q)$ là hàm điều hoà theo biến $P \in \Omega$, liên tục và có đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\Omega + S$.

- Trên biên S, hàm $G(P, Q)$ thoả mãn điều kiện

$$G(P, Q)|_{P \in S} = 0, \quad \forall Q \in \Omega.$$

Dễ kiểm tra rằng hàm $G(P, Q)$ là hàm điều hoà khi $P \neq Q$ (vì hàm $\ln \frac{1}{r}$ là hàm điều hoà khi $r \neq 0$,) đồng thời hàm g thoả mãn điều kiện biên

$$g(P, Q)|_{P \in S} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}.$$

Khi $P \to Q$ thì $G \to \infty$, ta gọi điểm Q là cực điểm của hàm Green. Nếu giả thiết có nghiệm và hàm Green G của bài toán (**??**)- (**??**) trong miền Ω thì nghiệm sẽ được biểu diễn qua hàm Green và dữ kiện biên φ theo công thức

$$u(Q) = \int_S \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \nu_P} \varphi(P) ds. \tag{3.18}$$

Như vậy, nếu trong miền Ω ta biết được hàm Green và nghiệm khả vi liên tục trong miền kín $\Omega + S$ của bài toán (**??**)-(**??**) tồn tại thì nghiệm đó được biểu diễn bằng công thức (**??**). Hàm Green G có các tính chất:

1. Đạt giá trị dương tại mọi điểm của miền Ω. Thật vậy, xét miền Ω_ε giới hạn bởi mặt S vào mặt cầu S_ε có tâm là cực điểm Q, bán kính ε khá nhỏ sao cho $S_\varepsilon \subset \Omega$. Vì $G(P,Q) \to +\infty$ khi $P \to Q$ nên với $\varepsilon \ll 1$, $G(P,Q)|_{P\in S_\varepsilon} > 0$, trên mặt S hàm G triệt tiêu. Vậy $G(P,Q)|_{P\in S+S_\varepsilon} \geqslant 0$. Theo nguyên lý cực đại cực tiểu thì trong Ω_ε, $G \geqslant 0$. Dấu bằng không thể xảy ra vì khi đó G đạt cực tiểu trong Ω_ε, trái nguyên lý cực đại cực tiểu. Vậy $G > 0$ trong Ω_ε, với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra $G > 0$ trong $\Omega \backslash \{Q\}$.

2. Tính đối xứng, $G(P,Q) = G(Q,P)$. Việc chứng minh tính chất này xem [**?**].

Chú ý rằng nói chung ta không xây dựng được công thức tường minh cho hàm Green mà chỉ làm được điều này trong một số trường hợp đặc biệt. Người ta đã thiết lập được công thức Green đối với các trường hợp:

- Miền Ω là hình tròn. Ta có

$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}\right), \tag{3.19}$$

  với $\rho = OQ$, $r = PQ$, $r' = PQ'$, Q' là điểm nghịch đảo của Q đối với đường tròn, tức là thoả mãn hệ thức $\overline{OQ}.\overline{OQ'} = R^2$, R là bán kính đường tròn. Từ công thức Green (**??**), ta xây dựng được nghiệm tường minh của bài toán Dirichlet (**??**)-(**??**). Từ công thức (**??**), tính $\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}$ ta được

$$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_P} = \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}\right). \tag{3.20}$$

  Đặt toạ độ P và Q là (ξ,η) và (x,y), chú ý rằng $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, và

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cos\widehat{n\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\sin\widehat{n\xi}, \tag{3.21}$$

  ta có

$$\frac{\partial\left(\ln\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\xi - x}{r} = \frac{1}{r}\cdot\cos\alpha, \quad \text{với } \alpha = \widehat{r\xi}, \text{ (dấu } - \text{ vì } r \text{ hướng vào trong).} \tag{3.22}$$

  Tính toán tương tự đối với các đại lượng còn lại của biểu thức (**??**) rồi thay vào công thức nghiệm (**??**), ta dẫn đến công thức nghiệm cơ bản của bài toán Dirichlet cần tìm

$$u(P) = u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \psi)}\varphi(\psi)d\psi. \tag{3.23}$$

Công thức (**??**) được gọi là công thức Poisson, biểu thức

$$\frac{R^2-\rho^2}{2\pi(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi))}$$

được gọi là nhân Poisson. Ta có một số tính chất của nhân Poisson như sau.

– Nhân Poisson không âm. Điều này hiển nhiên vì $\rho \leqslant R$.

– Nhân Poisson là một hàm điều hòa đối với tham biến.

– Nhân Poisson thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)}ds=1.$$

Công việc của ta là kiểm tra rằng (**??**) đúng là nghiệm của bài toán Dirichlet, tức là kiểm tra nó thoả mãn phương trình và các giá trị trên biên.

- Ta cũng có thể định nghĩa hàm Green đối với miền Ω là nửa không gian, miền Ω là một nón trong không gian.

3.2.3 Bài toán Dirichlet ngoài

Giả sử đối với miền ngoài Ω của mặt tròn, xét bài toán

$$\Delta u = 0, \tag{3.24}$$
$$u|_{S_R} = \varphi(x,y), \tag{3.25}$$
$$|u| \leqslant C,\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{3.26}$$

Sử dụng phép biến đổi Kenvin

$$\rho\rho' = R^2,\ v(\rho',\theta)=u(\rho,\theta)=u(\frac{R^2}{\rho'},\theta), \tag{3.27}$$

ta đưa về bài toán Dirichlet trong

$$\Delta v = 0, \tag{3.28}$$
$$v|_{S_R} = \varphi(x,y). \tag{3.29}$$

Khi đó ta cũng có các Định lý tương tự bài toán Dirichlet trong, đó là

Định lý 3.15. *Bài toán Dirichlet ngoài chỉ có nghiệm duy nhất.*

Định lý 3.16. *Nghiệm của bài toán Dirichlet ngoài phụ thuộc liên tục vào dữ kiện biên.*

Và ta có công thức Poisson tương ứng trong trường hợp này là

$$u(P)=u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R^2}{R(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi))}\varphi(\psi)d\psi. \tag{3.30}$$

Đối với bài toán Dirichlet ngoài, ta có thể mô tả dáng điệu nghiệm của các đạo hàm tại vô cùng nhờ công thức Poisson. Ta có Định lý

Định lý 3.17. *Giả sử $u(P)$ là hàm điều hoà trong miền vô hạn Ω với biên S giới nội. Ký hiệu $D^k u$ là đạo hàm cấp k của u. Khi đó ta có đánh giá khi $P \to \infty$*

$$|D^k u| \leqslant \frac{C_k}{\rho^{k+1}}, \quad (C_k > 0). \tag{3.31}$$

Chú ý. Trong trường hợp $n \geqslant 3$, lập luận tương tự trên ta có bài toán Dirichlet ngoài cần xác định là

$$\Delta u = 0, \tag{3.32}$$

$$u|_{S_R} = \varphi(x, y), \tag{3.33}$$

$$|u| \leqslant \frac{C}{\rho^{n-2}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.34}$$

Tương tự các Định lý trên, ta có đánh giá ở vô cùng giống như Định lý **??**

$$|D^k u| \leqslant \frac{C_k}{\rho^{n-2+k}}, \quad (C_k > 0). \tag{3.35}$$

3.3 Bài toán Neumann

Mục này chỉ nhằm mục đích giới thiệu một số khái niệm về bài toán Neumann. Các chứng minh có thể tìm trong [**?**, Chương 8, Phần C].

Định nghĩa 3.3. Giả sử $u(P)$ là hàm xác định trong miền $\Omega + S$, ν là pháp tuyến trong của mặt S tại điểm $Q \in S$, P nằm trên pháp tuyến ν đi qua điểm Q. nếu giới hạn

$$\lim_{P \to Q} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu}, \quad \forall Q \in S, \tag{3.36}$$

tồn tại, đều theo Q và là một hàm liên tục của điểm Q trên S thì ta nói u có *đạo hàm đều theo pháp tuyến trên biên S*.

Mặt biên S được gọi là mặt đều nếu tại mọi điểm Q đều tồn tại pháp tuyến xác định, và tại mọi điểm Q đều có thể xây dựng được một hệ toạ độ địa phương (x, y) sao cho trục y trùng với phương pháp tuyến, và trong lân cận trên S của Q ta có biểu diễn $y = f(x)$, với $f \in C^2$.

Bài toán Neumann được đặt như sau: *Tìm hàm điều hoà u liên tục trên miền kín $\Omega + S$ sao cho đạo hàm đều theo pháp tuyến trên biên S trùng với một hàm $\psi(Q)$ liên tục cho trước trên biên Q. Tức là thoả mãn bài toán*

$$\Delta u = 0, \tag{3.37}$$

$$\lim_{P \to Q} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu} = \psi(Q), \quad \forall Q \in S. \tag{3.38}$$

Nếu Ω là miền giới nội thì ta có bài toán Neumann trong, nếu Ω không giới nội và có biên giới nội thì ta có bài toán Neumann ngoài, khi đó ta có thêm ràng buộc ở vô cùng đối với nghiệm của bài toán. Bài toán Neumann còn được gọi là bài toán biên thứ hai của phương trình Laplace. Định lý về tính duy nhất nghiệm của bài toán Neumann được phát biểu như sau.

Định lý 3.18. *Trong trường hợp mặt phẳng, nghiệm của bài toán Neumann trong và ngoài là duy nhất. Trong trường hợp không gian có số chiều lớn hơn 2, hai nghiệm của bài toán Neumann trong sẽ sai khác nhau một hằng số cộng, và nghiệm của bài toán Neumann ngoài là duy nhất.*

3.4 Giải bài toán Dirichlet trong trên mặt tròn bằng phương pháp tách biến

Bên cạnh việc xác định nghiệm của bài toán Dirichlet trong cho phương trình Laplace (**??**), ta có thể xác định nghiệm của bài toán trên bằng phương pháp tách biến. Xét bài toán

$$\Delta u = 0, \quad \text{trong mặt tròn bán kính } R, \tag{3.39}$$

$$u|_\Gamma = f(s), \tag{3.40}$$

trong đó Γ là biên của mặt tròn, $f(s)$ là hàm liên tục cho trước trên Γ. Đưa phương trình (**??**) về toạ độ cực, ta được

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{3.41}$$

và tìm nghiệm riêng của phương trình dưới dạng tách biến $u(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta)$. Thay vào phương trình (**??**) và tính toán ta được

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\theta^2}}{\Phi} = \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{3.42}$$

Ta có hệ phương trình tương ứng

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{3.43}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0. \tag{3.44}$$

Vì hàm $u(r,\theta)$ là hàm tuần hoàn nên $u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$, từ đó suy ra $\Phi(\theta+2\pi) = \Phi(\theta)$, tức là Φ là một hàm tuần hoàn. Nếu $\lambda < 0$ thì từ (**??**) ta có

$$\Phi(\theta) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}, \tag{3.45}$$

không là một hàm tuần hoàn, vậy $\lambda = n^2 \geqslant 0$ thoả mãn điều kiện hàm u tuần hoàn chu kỳ 2π. Vậy biểu thức nghiệm của Φ có dạng

$$\Phi_n(\theta) = A\cos n\theta + B\cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.46}$$

Đồng thời, với giá trị $\lambda = n^2$, phương trình (**??**) có dạng

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0. \tag{3.47}$$

Phương trình (**??**) có nghiệm tổng quát

$$R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r, \tag{3.48}$$

và

$$R_n(r) = C_3 r^n + C_4 r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.49}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình (**??**) có dạng

$$u_n(r,\theta) = R_n(r)\Phi_n(\theta) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln r, & n = 0, \\ (C_2 r^n + C_4 r^{-n})(A\cos n\theta + B\sin n\theta) & n \neq 0. \end{cases} \tag{3.50}$$

Vì u là hàm điều hoà trong mặt tròn nên liên tục tại $r = 0$. Do đó trong biểu thức nghiệm (**??**), hệ số của $\ln r$ và r^{-n} triệt tiêu.Vậy ta tìm được dạng nghiệm riêng của phương trình (**??**) là

$$u_n(r,\theta) = R_n(r)\Phi_n(\theta) = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.51}$$

Vì phương trình Laplace có tính tuyến tính, nên tổng hữu hạn

$$S_N(r,\theta) = \sum_{n=0}^{N} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{3.52}$$

cũng là hàm điều hòa, cho $N \to \infty$, ta được chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{3.53}$$

Ta cần xác định A_n, B_n sao cho chuỗi trên hội tụ và tổng của nó là một hàm điều hòa liên tục trong mặt tròn kín $r \leqslant 1$, từ đó suy ra nghiệm tổng quát cần tìm có dạng

$$u(r,\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{3.54}$$

Cho $r \to 1$ để sử dụng điều kiện trên biên Γ, ta tìm được các hệ số tương ứng của chuỗi Fourier

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta, \tag{3.55}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta, \tag{3.56}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.57}$$

Sử dụng các kiến thức của Giải tích III, ta có thể chứng minh rằng biểu thức (**??**) với các hệ số A_i, B_i xác định trong (**??**), (**??**), (**??**) chính là nghiệm của bài toán biên

Dirichlet trong của phương trình Laplace cần tìm. Thật vậy, trước tiên ta xét $f(\theta) \in C^2$. Khi đó f có thể khai triển được thành chuỗi Fourier và các hệ số Fourier của $f(\theta)$ thỏa mãn đánh giá

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta = -\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)\sin n\theta d\theta \tag{3.58}$$

$$= -\frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f''(\theta)\cos n\theta d\theta = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{3.59}$$

tương tự

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta = \frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)\cos n\theta d\theta \tag{3.60}$$

$$= -\frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f''(\theta)\sin n\theta d\theta = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3.61}$$

Trong mặt tròn $r \leqslant 1$, ta có đánh giá $|r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)| \leqslant |A_n| + |B_n|$. Do đó chuỗi (**??**) thừa nhận chuỗi làm trội

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|A_n| + |B_n|). \tag{3.62}$$

Theo đánh giá (**??**), chuỗi trên hội tụ, vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi (**??**) hội tụ đều theo (r, θ) trong mặt tròn đơn vị, tổng của chuỗi, $u(r, \theta)$ có thể được viết là

$$u(r,\theta) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) = \lim_{N\to+\infty} S_N(r,\theta). \tag{3.63}$$

Điều này có nghĩa là u là giới hạn của một dãy hàm điều hòa hội tụ đều trong mặt tròn đơn vị, vậy theo Định lý Harnack 1, hàm $u(r, \theta)$ cũng là một hàm điều hòa trong mặt tròn $r < 1$. Do tính hội tụ đều trong mặt tròn $r \leqslant 1$ và các hạng thức của chuỗi đều liên tục trong mặt tròn, ta suy ra tính điều hòa của hàm u trong mặt tròn $r \leqslant 1$.

Để chứng minh công thức trên trong trường hợp hàm $f(\theta)$ không thuộc C^2, mà chỉ giả thiết là liên tục, người ta xây dựng một dãy hàm $f_m(\theta) \in C^2$, hội tụ đều đến $f(\theta)$ trên đường tròn $r = 1$. Khi đó ta tìm được nghiệm $u_m(r, \theta)$ của bài toán Dirichlet tương ứng với f_m. Theo chứng minh trên, dãy $\{u_m\}$ là các hàm điều hòa trong mặt tròn $r < 1$, liên tục trong mặt tròn kín $r \leqslant 1$ và giá trị biên $f_m(\theta)$ hội tụ đều đến $f(\theta)$. Khi đó, theo Định lý Harnack 1, giới hạn của dãy $\{u_m\}$ cũng là một hàm điều hòa trong mặt tròn $r < 1$ và liên tục trong mặt tròn $r \leqslant 1$. Công việc còn lại của ta là kiểm tra xem u có được biểu diễn bởi công thức (**??**). Gọi hệ số của khai triển Fourier của $f_m(\theta)$ là A_n^m và B_n^m. Ta có đối với mọi n,

$$|A_n - A_n^m| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[f(\theta) - f_m(\theta)]\cos n\theta d\theta\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[f(\theta) - f_m(\theta)]d\theta\right| \leqslant \varepsilon \tag{3.64}$$

với m đủ lớn và ε đủ bé. Tương tự $|B_n - B_n^m| \leqslant \varepsilon$. Với khai triển

$$u_m(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n^m \cos n\theta + B_n^m \sin n\theta)$$

ta có

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) - u_m(r,\theta) \right| \\
&\qquad = \left| \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[(A_n - A_n^m) \cos n\theta + (B_n - B_n^m) \sin n\theta \right] \right| \\
&\qquad \leqslant 2\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 2\varepsilon \frac{1}{1-r}.
\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là biểu thức

$$\boxed{u(r,\theta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)} \quad (3.65)$$

chính là nghiệm của bài toán Dirichlet trong trên mặt tròn đơn vị. Vậy, kết hợp các Định lý **??**, **??** và công thức nghiệm (**??**) ta có khẳng định

Định lý 3.19. *Bài toán Dirichlet trong của phương trình Laplace được đặt đúng đắn.*

Chú ý. Trong trường hợp mặt tròn được xét có bán kính R thì bằng cách đặt $\rho = r/R$, ta đưa được về bài toán Dirichlet trong mặt tròn đơn vị $\rho \leqslant 1$. Nghiệm của bài toán tương ứng khi đó sẽ là

$$\boxed{u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).} \quad (3.66)$$

Bài tập chương 3

I. Hãy

1. Thử trực tiếp rằng hàm $u(x, y) = -\ln r$, $r \neq 0$ là nghiệm phương trình Laplace $\Delta u = 0$.

2. Tìm biểu thức của toán tử Laplace trong

   (a) hệ toạ độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, (trường hợp trên mặt phẳng),

   (b) hệ toạ độ trụ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, (trường hợp trong không gian),

   (c) hệ toạ độ cầu $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, (trường hợp trong không gian),

II. Chứng minh rằng nghiệm phương trình

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu = 0, \quad c < 0, \tag{3.67}$$

không đạt cực đại dương hoặc cực tiểu âm tại một điểm trong của miền. Từ đó suy ra tính duy nhất nghiệm của bài toán Dirichlet trong miền giới nội Ω với biên $\partial\Omega$

$$\begin{cases} \Delta u + au_x + bu_y + cu = 0, \quad c < 0, \\ u|_{\partial\Omega} = f(x, y). \end{cases} \tag{3.68}$$

III. Tìm phép thế hàm $v(x, y) = \phi(x, y)u(x, y)$, đưa phương trình (**??**) về phương trình $\Delta v + \lambda v = 0$.

IV. Ký hiệu $H(\Omega)$ là tập hợp các hàm điều hoà trong $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Chứng minh rằng

1. $H(\Omega)$ là một không gian vectơ, mọi tổ hợp tuyến tính của hàm điều hoà cũng là hàm điều hoà.

2. $H(\Omega)$ ổn định với phép lấy đạo hàm: đạo hàm riêng u_x và u_y của hàm điều hoà u cũng là các hàm điều hoà.

3. Nếu $u, v \in H(\Omega)$ thì $uv \in H(\Omega) \iff \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0$.

V. Giả sử $u(x, y)$ là hàm điều hoà. Chứng minh rằng các hàm sau cũng là hàm điều hoà.

1. $u(x + h)$, $h = (h_1, h_2)$ là một vectơ bất kỳ.

2. $u(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

3. $u(Cx)$, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ là một ma trận trực giao bất kỳ.

VI. Giải các bài toán Dirichlet:

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = 3 - 4y^2 - 4xy^2, \end{cases}$ với Ω là mặt tròn tâm O bán kính 2, Γ là biên của Ω.

2. $\begin{cases} \Delta u = 2x, & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = x - x^3 + 2xy^2, \end{cases}$ với Ω là mặt tròn đơn vị, Γ là biên của Ω.

3. $\begin{cases} \Delta u = 12(x^2 - y^2), & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = xy, \end{cases}$ với Ω là mặt tròn đơn vị, Γ là biên của Ω.

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = 2 - y + y^3 - x^2y + x^2, \end{cases}$ với Ω là phần ngoài của mặt tròn tâm O bán kính 2, Γ là biên của Ω.

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_{r=1} = x - y, \\ u|_{r=2} = \ln 2 - \frac{1}{4}y + x, \end{cases}$ với Ω là hình vành khăn $1 < r < 2$.

VII (*). Dùng công thức Poisson tính trực tiếp nghiệm của bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \cos\theta, \end{cases}$$

với mặt tròn Ω bán kính R.

VIII. Cho $B_R(0)$ là hình tròn tâm 0 bán kính R. Chuyển phương trình Laplace sang toạ độ cực (ρ, φ). Tìm nghiệm của bài toán Dirichlet với các điều kiện biên được cho như sau:

1. $u|_{\rho=R} = 2$,

2. $u|_{\rho=R} = a\cos\varphi$,

3. $u|_{\rho=R} = 1 + 2\sin\varphi$,

4. $u|_{\rho=R} = a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi, a, b = const.$

IX. Giải bài toán Dirichlet trong hình chữ nhật.

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1) = \sin\frac{5\pi x}{2}, \\ u(0,y) = u(2,y) = 0. \end{cases}$

2. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a},\ u(x,b) = 0, \\ u(0,y) = A\sin\frac{\pi y}{b},\ u(a,y) = 0. \end{cases}$$

X (*). Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \quad \text{trong } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.69}$$

Nếu tồn tại số λ sao cho bài toán trên có nghiệm không tầm thường $u \neq 0$, thì ta gọi λ là *giá trị riêng*, nghiệm u tương ứng được gọi là *hàm riêng* của toán tử Laplace trong Ω. Hãy tìm giá trị riêng và hàm riêng của toán tử Laplace trong các trường hợp sau.

1. $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$,
2. $\Omega = \{(x.y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

CHƯƠNG 4

Phương trình parabolic. Phương trình truyền nhiệt

4.1 Mở đầu. Định lý cực đại cực tiểu

Trong chương này ta nghiên cứu phương trình truyền nhiệt trên thanh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad u = u(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \tag{4.1}$$

Đối với nghiệm của phương trình truyền nhiệt, ta có một nguyên lý cực đại cực tiểu tương tự phương trình Laplace. Ta xét trường hợp đơn giản với $f \equiv 0$ và miền xác định của u là $V_T = [a,b] \times [0,T]$. Giả sử hàm $u \in C^{2,1}(V_T)$, tức là u khả vi liên tục hai lần theo biến x và khả vi liên tục theo biến t trong miền trong của V_T. Ta có định lý.

Định lý 4.20. *Giả sử $u(x,t)$ là nghiệm của phương trình (**??**) trong miền V_T, liên tục trong miền kín $\overline{V_T}$. Khi đó nghiệm $u(x,t)$ đạt giá trị cực đại hoặc cực tiểu của nó trên biên ∂V_T.*

Việc chứng minh định lý này là tương tự chứng minh định lý cực đại cực tiểu của phương trình Laplace. Trong trường hợp miền V_T là vô hạn, ta có định lý cực đại cực tiểu tương ứng.

Định lý 4.21. *Giả sử $u(x,t)$ là nghiệm của phương trình (**??**) liên tục và giới nội trong miền $V_T = \mathbb{R} \times [0,T]$. Khi đó nếu M và m là cận trên và cận dưới của nghiệm $u(x,t)$ tại $t = 0$, tức là*

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}} u(x,0), \quad m = \inf_{x\in\mathbb{R}} u(x,0).$$

Khi đó trong miền V_T, ta có

$$m \leqslant u(x,t) \leqslant M.$$

Phương trình (**??**) là một phương trình đạo hàm riêng, vì vậy để có thể xác định duy nhất nghiệm ta cần đưa vào các điều kiện ban đầu, tức là phân bố nhiệt độ trên thanh ở trạng thái ban đầu, và điều kiện biên, tức là nhiệt ở hai đầu của thanh được xét. Bài toán có dữ kiện ban đầu được gọi là bài toán Cauchy, bài toán còn lại là bài toán hỗn hợp, hay bài toán biên - ban đầu.

4.2 Định lý duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu của bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt: *Tìm hàm u liên tục và giới nội khi $t \geqslant 0$, thoả mãn phương trình truyền nhiệt*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \tag{4.2}$$

và khi $t = 0$ trùng với một hàm liên tục và giới nội $g(x)$ cho trước

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Ta có định lý.

Định lý 4.22. *Nghiệm giới nội của bài toán* (**??**)-(**??**) *là duy nhất, phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu được cho khi $t = 0$.*

Chứng minh. Từ nguyên lý cực đại cực tiểu trong miền vô hạn (định lý **??**) ta có: Nếu có hai nghiệm $u(x, t)$ và $v(x, t)$ sao cho

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, 0) - v(x, 0)| < \varepsilon, \tag{4.4}$$

thì trong miền $S = \mathbb{R} \times [0, T]$, $T < \infty$, ta đều có

$$|u(x, t) - v(x, t)| < \varepsilon, \quad \forall (x, t) \in S. \tag{4.5}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

4.3 Giải bài toán Cauchy bằng phương pháp tách biến

Xét bài toán Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{4.6}$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

trong đó g là hàm liên tục và giới nội cho trước. Trước tiên ta tìm nghiệm riêng giới nội của (**??**) dưới dạng

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{4.8}$$

Thay vào (**??**) ta được

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu \, (= \text{const}\,.) \tag{4.9}$$

Từ đó ta có hệ phương trình vi phân thường

$$T'(t) + a^2\mu T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \mu X(x) = 0.$$

Vì nghiệm giới nội nên $\mu > 0$, ta đặt $\mu = \lambda^2$. Thay vào hệ phương trình ta được

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \tag{4.10}$$
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{4.11}$$

Từ đó

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t},$$
$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \quad (A,\ B \text{ là các hằng số, có thể phụ thuộc } \lambda.)$$

Vậy nghiệm của phương trình $u_\lambda(x,t)$ sẽ có dạng

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]. \tag{4.12}$$

Tích phân (**??**) theo λ được

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda, \tag{4.13}$$

Hàm này cũng là nghiệm của phương trình (**??**) nếu tích phân hội tụ đều và có thể đạo hàm dưới dấu tích phân hai lần theo x và một lần theo t. Để tìm nghiệm của bài toán Cauchy (**??**)-(**??**), ta đi tìm các hàm $A(\lambda)$ và $B(\lambda)$ thoả mãn điều kiện ban đầu (**??**).

Ta giả sử có thể biểu diễn $u(x,0) = g(x)$ dưới dạng tích phân Fourier

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\cos\lambda x \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\Big] d\lambda. \end{aligned}$$

Trong (**??**) cho $t = 0$ và đồng nhất với biểu diễn dưới dạng tích phân Fourier của hàm g ở trên ta tìm được $A(\lambda)$ và $B(\lambda)$ có dạng

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos\lambda\xi d\xi, \tag{4.14}$$
$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\sin\lambda\xi d\xi, \tag{4.15}$$

thay vào (**??**) ta được

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi. \end{aligned}$$

Thay đổi thứ tự lấy tích phân và sử dụng công thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}, \tag{4.16}$$

ta được

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}g(\xi)d\xi. \tag{4.17}$$

Công thức (**??**) được gọi là *công thức Poisson đối với bài toán Cauchy* (**??**)-(**??**). Đặt

$$F(\xi,\tau;x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}, & \text{với} \quad \tau < t, \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases} \tag{4.18}$$

Khi đó công thức Poisson (**??**) có dạng

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,0;x,t)g(\xi)d\xi. \tag{4.19}$$

Hàm $F(\xi,\tau;x,t)$ được gọi là *nghiệm cơ bản của phương trình truyền nhiệt*. Chú ý rằng khi $(\xi,\tau) \neq (x,t)$, đối với biến (x,t) hàm F thoả mãn phương trình (**??**), còn đối với biến (ξ,τ) hàm F thoả mãn phương trình liên hợp với phương trình (**??**)

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{4.20}$$

Ta có khẳng định

Định lý 4.23. *Giả sử hàm $g(x)$ liên tục và giới nội. Khi đó bài toán Cauchy* (**??**)-(**??**) *có nghiệm $u(x,t)$ được xác định bằng công thức* (**??**).

Chứng minh. Để chứng minh định lý này, trước hết ta kiểm tra rằng công thức (**??**) thoả mãn phương trình (**??**) với $t > 0$. Chú ý rằng nghiệm cơ bản (**??**) thoả mãn phương trình (**??**), vì vậy ta chỉ cần chứng minh rằng có thể đạo hàm dưới dấu tích phân hai lần theo biến x và một lần theo biến t, tức là chứng minh rằng tích phân nhận được bằng cách đạo hàm hình thức biểu thức dưới dấu tích phân theo x hoặc t là hội tụ trong miền chữ nhật $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$, $|x| \leqslant N$, với mọi t_0, T, N tuỳ ý dương. Điều này đúng vì hàm g giới nội, còn hàm $x^m e^{-ax^2}$ giảm về 0 khi $x \to \infty$ nhanh hơn mọi hàm đa thức, và khi đó hàm dưới dấu tích phân không lớn hơn $C/(1+\xi^2)$. Sử dụng tính hội tụ của tích phân $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C}{1+\xi^2}d\xi$ và tiêu chuẩn Weierstrass suy ra tích phân đang xét hội tụ đều, tức là điều ta cần chứng minh.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng hàm cho bởi công thức (**??**) giới nội trong miền $t > 0$. Điều này dễ dàng suy ra từ tính giới nội của hàm g, tức là ta có

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}|g(\xi)|d\xi \\ &\leqslant \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi = M. \quad \text{(áp dụng (??))}. \end{aligned}$$

Cuối cùng ta chứng minh hàm cho bởi công thức (**??**) thoả mãn điều kiện ban đầu, tức là

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x). \tag{4.21}$$

□

Vậy, từ định lý **??** và **??** ta suy ra

Định lý 4.24. *Nếu nghiệm tìm trong lớp hàm giới nội với dữ kiện ban đầu giới nội thì bài toán Cauchy* (**??**)-(**??**) *của phương trình truyền nhiệt trong miền $t > 0$ được đặt đúng đắn.*

Chú ý. Nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt sẽ khả vi mọi cấp trong miền $t > 0$, và mọi $x \in \mathbb{R}$, không phụ thuộc vào việc hàm g có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ không. Tính chất này phân biệt phương trình truyền nhiệt với phương trình truyền sóng.

4.4 Bài toán biên ban đầu thứ nhất

Xét bài toán biên ban đầu thứ nhất không có vế phải

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in V_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{IBVP}$$

Trong đó hàm $\varphi(x)$ được giả thiết liên tục, khả vi từng khúc, và $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Ta sẽ sử dụng phương pháp tách biến Fourier để giải bài toán. Giả sử nghiệm giới nội của bài toán là $u(x,t) = X(x)T(t)$. Thay vào phương trình ta được

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Từ đó suy ra một hệ phương trình vi phân thường sau

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{4.22}$$

$$T'(t) = \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{4.23}$$

Làm tương tự bài toán hỗn hợp hyperbolic ta được

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Từ đó suy ra dạng nghiệm của phương trình là

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad T(t) = B_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t},$$

$$u_k(x,t) = C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Lấy chuỗi hình thức

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t),$$

là nghiệm của phương trình. Với

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi$$

thì u là nghiệm của bài toán. Ta có thể chứng minh được rằng với các giả thiết trên của hàm φ thì ta có nghiệm thực sự của bài toán.

Xét bài toán biên ban đầu thứ nhất với vế phải khác 0

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in V_T, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{IBVP-f}$$

Ta tìm nghiệm giới nội của bài toán dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Thay vào phương trình ta được

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t)\right)\sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

trong đó

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi.$$

Vì $\{\sin\frac{k\pi}{l}x\}$ là hệ trực giao nên đẳng thức trên xảy ra tương đương với hệ phương trình vi phân thường

$$T_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = f_k(t), \quad T(0) = 0.$$

Giải phương trình trên ta được

$$T_k(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau.$$

4.5 Ý nghĩa vật lý

Nghiệm của bài toán Cauchy, xét về phương diện vật lý, mô tả nhiệt độ phân bố trên một thanh dài vô hạn cách nhiệt với môi trường xung quanh khi cho trước phân bố nhiệt độ ở thời điểm ban đầu. Một cách lý tưởng, từ công thức nghiệm của bài toán Cauchy ta có thể thấy chỉ sau một khoảng thời gian t rất nhỏ, nhiệt độ ở mọi điểm của thanh đều thay đổi so với trạng thái ban đầu. Trong thực tế điều này là vô lý nhưng khi xét tại những điểm ở rất xa gốc quan sát và tại những thời điểm t rất nhỏ, điều này không khác mấy so với thực tế. Vì vậy công thức Poisson có thể coi là biểu diễn khá tốt quy luật truyền nhiệt trên thanh.

Bài tập chương 4

I. Giải bài toán

1. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \cos 3x. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \sin 2x \cos 4x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_t = 16u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \cos^2 4x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2+2x+2}. \end{cases}$

II. Tìm nghiệm không giới nội của bài toán

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x^2 - 2x + 3. \end{cases}$$

III. Giải bài toán biên ban đầu

1. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(x,0) = \sin x(1 - 4\cos x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant l/2, \\ 1 - x & l/2 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$

GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP

Chương ??

I.4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$**.**

Ta có $\delta = 1 + 3 = 4 > 0$. Vậy phương trình này thuộc loại hyperbolic. Ta đưa phương trình về dạng chính tắc. Xét phương trình đường đặc trưng

$$y'^2 - 2y' - 3 = 0 \iff \begin{cases} y' = -1 \iff y + x = C_1, \\ y' = 3 \iff y - 3x = C_2. \end{cases}$$

Đặt

$$\xi = y + x, \quad \eta = y - 3x.$$

Khi đó vì phương trình thuộc loại hyperbolic nên $a_1 = c_1 = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} b_1 &= \xi_x\xi_y + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) - 3\eta_x\eta_y \\ &= 1 + (1-3) + 9 = 8. \\ u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi - 3u_\eta, \\ u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi + u_\eta. \end{aligned}$$

Vậy phương trình chính tắc là

$$u_{\xi\eta} - u_\xi = 0.$$

I.5. $u''_{xx} - 2\cos x u''_{xy} - (3 + \sin^2 x)u''_{yy} - yu'_x = 0,$**.**

Ta có $\delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$. Vậy phương trình này thuộc loại hyperbolic. Ta đưa phương trình về dạng chính tắc. Xét phương trình đường đặc trưng

$$y'^2 + 2\cos x y' - (3 + \sin^2 x) = 0 \iff \begin{cases} y' = -\cos x + 2 \iff y + \sin x - 2x = C_1, \\ y' = -\cos x - 2 \iff y + \sin x + 2x = C_2. \end{cases}$$

Đặt

$$\xi = y + \sin x - 2x, \quad \eta = y + \sin x + 2x.$$

Suy ra

$$x = \frac{\eta - \xi}{4}, \quad y = \frac{\xi + \eta}{2} - \sin\frac{\eta - \xi}{4}.$$

Khi đó vì phương trình thuộc loại hyperbolic nên $a_1 = c_1 = 0$. Ta tính trực tiếp các đạo hàm riêng của u theo x, y qua các đạo hàm riêng ξ, η.

$$u_x = \left(\cos\frac{\eta - \xi}{4} - 2\right)u_\xi + \left(\cos\frac{\eta - \xi}{4} + 2\right)u_\eta,$$

$$\begin{aligned}
u_y &= u_\xi + u_\eta,\\
u_{xy} = (u_y)_x &= \left(\cos\frac{\eta-\xi}{4} - 2\right)u_{\xi\xi} + 2\cos\frac{\eta-\xi}{4}u_{\xi\eta} + \left(\cos\frac{\eta-\xi}{4} + 2\right)u_{\eta\eta},\\
u_{xx} = (u_x)_x &= \left(\cos\frac{\eta-\xi}{4} - 2\right)^2 u_{\xi\xi} - 2\left(4 - \cos^2\frac{\eta-\xi}{4}\right)u_{\xi\eta}\\
&\qquad + \left(\cos\frac{\eta-\xi}{4} + 2\right)^2 u_{\eta\eta} - \sin\frac{\eta-\xi}{4}u_\xi - \sin\frac{\eta-\xi}{4}u_\eta,\\
u_{yy} = (u_y)_y &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình chính tắc là

$$16u_{\xi\eta} + \left(\frac{\xi+\eta}{2} - \sin\frac{\eta-\xi}{4}\right)\left(\cos\frac{\eta-\xi}{4}(u_\xi + u_\eta) + 2(u_\xi - u_\eta)\right) = 0.$$

II.2. $u_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0, \quad x, y > 0$**.**

Ta có $\delta = xy > 0$, vậy phương trình thuộc loại hyperbolic. Phương trình đường đặc trưng có dạng

$$xy'^2 - y = 0 \iff y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x}} \iff \sqrt{y} = \pm\sqrt{x} + C.$$

Đặt

$$\xi = \sqrt{y} + \sqrt{x}, \quad \eta = \sqrt{y} - \sqrt{x}.$$

Tính toán các đạo hàm riêng tương ứng ta được

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2(\xi-\eta)}u_\xi - \frac{1}{2(\xi-\eta)}u_\eta,\\
u_y &= \frac{1}{2(\xi+\eta)}u_\xi + \frac{1}{2(\xi+\eta)}u_\eta,\\
u_{xx} = (u_x)_x &= \frac{1}{4(\xi-\eta)^2}\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi-\eta}(u_\xi - u_\eta)\right)\\
u_{yy} = (u_y)_y &= \frac{1}{4(\xi+\eta)^2}\left(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + \frac{2}{\xi+\eta}(u_\xi + u_\eta)\right).
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được dạng chính tắc $-u_{\xi\eta} = 0$. Vậy phương trình có nghiệm là

$$u(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) \iff u(x, y) = g(\sqrt{y} + \sqrt{x}) + h(\sqrt{y} - \sqrt{x}),$$

với mọi hàm g và h. (Chú ý rằng ở đây ta vẫn sử dụng hàm u đối với biến số ξ và η.)

Chương ??

II.a.
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x. \end{cases}$$

Vì các dữ kiện Cauchy không được cho trên đường đặc trưng nên bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất. Áp dụng công thức nghiệm cho ở câu I. ta được công thức nghiệm của bài toán Cauchy là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x) + tu_1(x) + f(x)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= tx + x\int_0^t (t-\tau)\tau d\tau = tx + \frac{t^3x}{6}. \end{aligned}$$

IV.a.
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

($\Rightarrow$) Ta có công thức nghiệm tổng quát của phương trình là

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t),$$

với mọi hàm f, g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục. Ta sẽ tìm điều kiện ràng buộc giữa các giá trị ban đầu. Đạo hàm nghiệm theo t ta được

$$u_t = f'(x+t) - g'(x-t).$$

Thay các điều kiện ban đầu vào nghiệm và biểu thức vừa nhận được

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{x+y=0} &= f(2x) + g(0) = \phi(x), \\ u_t(x,y)|_{x+y=0} &= f'(2x) - g'(0) = \psi(x). \end{aligned}$$

Đạo hàm phương trình thứ nhất hai lần, thứ hai một lần rồi khử $f''(2x)$ ta được

$$\phi''(x) = 2\psi'(x). \tag{4.24}$$

Đây chính là điều kiện để bài toán có nghiệm. Từ biểu thức nghiệm ở trên ta suy ra nghiệm, nếu có, là vô số.

($\Leftarrow$) bây giờ ta chứng tỏ rằng có thể xác định nghiệm của bài toán từ các điều kiện ban đầu được xác định từ (**??**). Tích phân hai vế của (**??**) ta được

$$\phi'(x) = 2\psi(x) + 2\lambda. \tag{4.25}$$

Ta có

$$f(2x) = \phi(x) - g(0), \tag{4.26}$$

$$f'(2x) = \psi(x) + g'(0), \tag{4.27}$$

đạo hàm phương trình thứ nhất,

$$f'(2x) = \phi'(x). \tag{4.28}$$

Từ (**??**), đặt $\xi = 2x$ ta được

$$f(\xi) = \phi\left(\frac{\xi}{2}\right) - g(0). \tag{4.29}$$

Cho $g(0) = \alpha$ bất kỳ ta sẽ suy ra hàm $f(\xi)$. Đồng nhất (**??**) và (**??**) và sử dụng (**??**) ta được

$$\frac{1}{2}\phi'(x) = \psi(x) + g'(0),$$

suy ra

$$g'(0) = \frac{1}{2}\phi'(x) - \psi(x) = \lambda.$$

Vậy, với các dữ kiện ban đầu $\phi(x)$ và $\psi(x)$ ràng buộc với nhau theo (**??**), ta tìm được hàm $g \in C^2$ sao cho $g(0) = \alpha$ tuỳ ý, $g'(0) = \lambda$, và hàm $f \in C^2$ được xác định từ (**??**). Hiển nhiên nghiệm của bài toán, được xây dựng từ hai hàm g và h, là vô số.

V.a.
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = -2\sin x + 8\sin 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Hiển nhiên các hàm cho ở dữ kiện Cauchy thoả mãn điều kiện để bài toán có nghiệm. Ta sử dụng phương pháp Fourier để tìm nghiệm bài toán dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos 2kt + B_k \sin 2kt) \sin kx, \tag{4.30}$$

trong đó

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin kx dx, \tag{4.31}$$

$$B_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi (-2\sin x + 8\sin 2x)\sin kx dx. \tag{4.32}$$

Sử dụng tính chất

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \tag{4.33}$$

Ta suy ra các hệ số cần tìm là

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x dx = 1,\\
&A_k = 0, \quad \forall k = 2, 3, \dots ,\\
&B_1 = -\frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \sin^2 x dx = -\frac{1}{2},\\
&B_2 = \frac{16}{4\pi}\int_0^\pi \sin^2 2x dx = 2,\\
&B_k = 0, \quad \forall k = 3, 4, \dots .
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm cần tìm là

$$u(x,t) = \cos 2t \sin x - \frac{1}{2}\sin 2t \sin x + 2\sin 4t \sin 2x.$$

Chương ??

IV.1. Giải bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} (a) \quad \Delta u = 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ (b) \quad u|_\Gamma = 3 - 4y^2 - 4xy^2, \end{cases} \tag{4.34}$$

với Ω là mặt trong tâm 0 bán kính 2, Γ là biên của Ω.

Trong hệ toạ độ cực $r0\theta$, phương trình (**??**)(a) có dạng

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

còn điều kiện biên (**??**)(b) trở thành

$$u|_\Gamma = 3 - 4r^2\sin^2\theta - 4r^3\cos\theta\sin^2\theta.$$

Sử dụng phương pháp tách biến tìm nghiệm của bài toán biên Dirichlet trong trên mặt tròn, ta có công thức nghiệm của bài toán biên có dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta).$$

Từ điều kiện biên ta có

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= 3 - 4r^2\sin^2\theta - 4r^3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= 3 - 16\sin^2\theta - 32\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 3 - 8(1-\cos 2\theta) - 16\cos\theta(1-\cos 2\theta) \\ &= -5 + 8\cos 2\theta - 16\cos\theta + 16\cos\theta\cos 2\theta \\ &= -5 + 8\cos 2\theta - 16\cos\theta + 8(\cos\theta + \cos 3\theta) \\ &= 8\cos 3\theta + 8\cos 2\theta - 8\cos\theta - 5. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức xác định hệ số của khai triển Fourier của nghiệm bài toán (D) và kết quả

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n, \end{cases}$$

ta có

$$A_0 = -5,\ A_1 = -8,\ A_2 = 8,\ A_3 = 8,\ A_n = 0, \quad \forall n > 3.$$

Vậy nghiệm cần tìm của bài toán là

$$u(r,\theta) = 8r^3\cos 3\theta + 8r^2\cos 2\theta - 8r\cos\theta - 5$$

$$= 8r^3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 8r^2(2\cos^2\theta - 1) - 8r\cos\theta - 5$$
$$= 32r^3\cos^3\theta + 16r^2\cos^2\theta - 24r^3\cos\theta - 8r\cos\theta - 8r^2 - 5.$$

Thay (r, θ) bởi (x, y) ta được nghiệm của phương trình

$$u(x, y) = 8x^3 + 8x^2 - 8y^2 - 8x(3x^2 + 3y^2 + 1) - 5.$$

IV.2. Đặt $v = u - x^3/3$. Khi đó bài toán (D) với u sẽ trở thành

$$\begin{cases} (a) \quad \Delta v = 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ (b) \quad v|_\Gamma = x - \frac{4}{3}x^3 + 2xy^2. \end{cases} \tag{4.35}$$

IV.3. Đưa bài toán đang xét về hệ toạ độ cực rồi chuyển về bài toán Dirichlet trong bằng cách đặt $u(r, \theta) = r'v(r', \theta)$, với $rr' = 4$. Khi đó bài toán (D) với u sẽ trở thành

$$\begin{cases} (a) \quad \Delta v = 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ (b) \quad v|_\Gamma = 1 + \frac{1}{2}(y^3 - x^2y + x^2 - y). \end{cases} \tag{4.36}$$

IV.4. Sử dụng phương pháp Fourier để tìm nghiệm của phương trình Laplace dưới dạng

$$u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\theta.$$

Thay các điều kiện biên tương ứng ta được

$$\mathcal{C}_1 = 0, \ \mathcal{C}_2 = 1,$$
$$a_1 = 1, \ a_n = 0, \ n = 2, 3, \ldots, \ b_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots,$$
$$d_1 = -1, \ d_n = 0, \ n = 2, 3, \ldots, \ c_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Vậy ta được nghiệm của bài toán là

$$u(r, \theta) = \ln r + r\cos\theta - \frac{1}{r}\sin\theta,$$

hay biểu diễn theo (x, y)

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + x - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

V., VI. Sử dụng các công thức đã biết và phương pháp Fourier nêu trong bài trên.

Chương ??

I.1. Sử dụng công thức Poisson để xác định nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \cos 3x. \end{cases}$$

Ta có nghiệm của bài toán có dạng

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}\right\} \cos 3x dx.$$

Thực hiện phép đổi biến $z = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}$, sử dụng đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2} \cos \beta z dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

và chú ý rằng tích phân $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2} \sin \beta z dz = 0$, ta suy ra nghiệm của bài toán là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cos(3x + 6\sqrt{t}z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} (\cos 3x \cos(6\sqrt{t}z) - \sin 3x \sin(6\sqrt{t}z)) dz \\ &= \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cos(6\sqrt{t}z) dz \\ &= \cos 3x e^{-9t}. \end{aligned}$$

Thử lại thấy đây chính là nghiệm của bài toán cần tìm.

Đáp số:

1. $u(x,t) = \cos 3x e^{-9t}$.
2. $u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-81t} \cos 3x - e^{-324t} \cos 6x)$.
3. $u(x,t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1024t} \cos 8x)$.
4. $u(x,t) = (1 + 16t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{1+16t}\right\}$.
5. $u(x,t) = (1 + 36t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{-x^2+2x+2+108t}{1+36t}\right\}$.

II. Ta cần xây dựng nghiệm không giới nội của bài toán

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

(Trong bài này, $a = 1$, $n = 1$, và hàm $f(x) = x^2 - 2x + 3$.)

Ta chứng minh rằng nghiệm của bài toán trên có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{ka^2}}{k!} \Delta^k f(x),$$

trong đó $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$, $\Delta f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Điều chứng minh này không khó chút nào, chỉ cần thử trực tiếp vào phương trình đầu, còn khi cho $t \to 0$ thì ta có điều kiện đầu ngay. Khi đó nghiệm của bài toán của chúng ta sẽ là

$$u(x,t) = x^2 - 2x + 3 + 2t.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

A. Tiếng Việt

[1] Nguyễn Minh Chương (cb), *Phương trình đạo hàm riêng*, NXB GD, 2000.

[2] Nguyễn Thừa Hợp, *Giáo trình phương trình đạo hàm riêng*, Tập 1, NXB ĐH và THCN, 1975, TB: NXB ĐHQG HN, 2002.

[3] Nguyễn Mạnh Hùng, *Phương trình đạo hàm riêng*, Phần 1, NXB GD, 2002.

B. Tiếng Anh

[4] M. Taylor, *Partial Differential Equations*, Vol I. Basic theory, Springer-Verlag, 1997.

[5] , *Partial Differential Equations*, Vol II. Qualitative Studies of Linear Equations, Springer-Verlag, 1997.

[6] M. Taylor, *Partial Differential Equations*, Vol III. Nonlinear Equations, Springer-Verlag, 1997.