Lời giới thiệu

Do ảnh hưởng của cuộc cách mạng thông tin và do sự phát triển nội tại của toán học, việc giảng dạy toán bậc đại học và cao học có nhiều thay đổi. Xu hướng chung là nhanh chóng cho học viên nắm bắt được các kiến thức cơ bản về toán học và khả năng ứng dụng, đồng thời sử dụng được các chương trình tính toán thực hành một cách thuần thục.

Để đáp ứng nhu cầu đó, trên cơ sở đề tài khoa học Phần mềm Cơ sở Toán học của Trung tâm Khoa học tự nhiên và Công nghệ Quốc gia do Viện Toán học chủ trì thực hiện từ năm 1996 đến năm 1998, chúng tôi biên soạn bộ giáo trình Cơ sở Toán học Cao cấp giành cho sinh viên đại học và cao học.

Bộ giáo trình này được biên soạn dựa theo nội dung chương trình toán cao cấp của các khoa cơ bản trong các trường đại học do Bộ Giáo dục và Đào tạo qui định, kết hợp với các giáo trình toán hiện đang được giảng dạy trong các trường đại học ở Hà Nội và một số nước tiên tiến trên thế giới. Mục đích của giáo trình là:

1. *Trình bày những khái niệm, những nguyên lý cơ bản và cần thiết nhất của toán học, với những chứng minh chặt chẽ, lô gic;*
2. *Rèn luyện kỹ năng tính toán thực hành trên máy tính và khả năng áp dụng công cụ toán học trong việc giải quyết các bài toán thực tiễn;*
3. *Giới thiệu một số hướng phát triển mới trong toán học hiện đại đang được quan tâm trên thế giới.*

Để đáp yêu cầu thứ nhất, chúng tôi chủ trương tránh đưa vào giáo trình những phần lý thuyết nặng nề và ít sử dụng đến sau này. Phần bài tập được biên soạn với mục đích giúp học viên củng cố kiến thức lý thuyết, không sa vào những kỹ sảo tính toán phức tạp.

Mục đích thứ hai được thể hiện trong giáo trình bởi phần bài tập và tính toán thực hành biên soạn rất công phu cho từng chương. Nó giúp cho học viên tiếp cận một cách nhẹ nhàng và thoải mái với công việc tính toán cụ thể, lĩnh vực luôn bị xem là đáng ngại nhất đối với các học viên bậc đại học ở nước ta xưa *nay. Người học không chỉ có thể thử sức với những bài toán thách đố (để rèn luyện tư duy), mà còn biết sử dụng máy tính để giải một cách dễ dàng những bài toán hóc búa mà họ tưởng chừng không thể nào giải nổi. Hi vọng rằng khi ra trường họ sẽ không còn phải ngại ngùng trong việc đưa các công cụ toán học vào công việc của mình. Thực tế cho thấy, ở đâu toán học phát huy được tác dụng thì ở đó thường thu được những kết quả bất ngờ.*

Công cụ tính toán thực hành giới thiệu trong giáo trình này là bộ chương trình Maple V. Đây là bộ chương trình tổng hợp, khá đồ sộ, nhưng hiện nay đã có thể cài đặt trên máy tính cá nhân với cấu hình bình thường (bộ nhớ tối thiểu là 8MB). Với khả năng biểu diễn và tính toán cực mạnh (kể cả trên các ký hiệu hình thức), nó hiện đang được xem một trong những chương trình phổ biến nhất sử dụng trong công tác đào tạo ở các trường đại học trên thế giới. Nếu sử dụng được Maple một cách thuần thục thì học viên cũng dễ dàng tiếp cận với các chương trình tính toán phổ biến khác như: Matematica, Matlab, Mathcad,.. Bằng các hướng dẫn cụ thể cho từng chương, giáo trình giúp người đọc tự mình từng bước tiến hành công việc tính toán một cách nhẹ nhàng như bấm máy tính bỏ túi, không cần chuẩn bị gì đặc biệt về kiến thức lập trình.

Để đạt được mục đích thứ ba, chúng tôi đưa vào giáo trình một số chương mục không kinh điển (không bắt buộc đối với học viên bậc đại học), giúp người đọc làm quen với những ý tưởng mới trong toán học hiện đại, khích lệ sự tìm tòi phát triển những cái mà lâu nay được xem như là bất di bất dịch trong toán học cổ điển. Phần này chắc chắn sẽ đem lại hứng thú và những gợi ý về mặt định hướng cho những người có nguyện vọng được đào tạo cao hơn về toán học, nhất là những học viên cao học.

Giáo trình này cũng được thiết lập dưới dạng siêu văn bản, rất thuận tiện cho việc đọc và tra cứu trên máy tính. Phần tính toán thực hành được thực hiện dễ dàng và thuận tiện ngay trong khuôn khổ của giáo trình (học đến đâu thực hành đến đó), nhằm xoá nhoà ranh giới giữa học toán và làm toán. Bạn đọc có nhu cầu về giáo trình dưới dạng siêu văn bản và thực hành tính toán trên Maple V xin liên hệ với các tác giả theo địa chỉ của Viện Toán học (Đường Hoàng Quốc Việt, Quận Cầu Giấy, Hà Nội).

Trong phần này chúng tôi giới thiệu với bạn đọc cuốn Giải tích I của các tác giả : Ts. Đinh Thế Lục (chủ biên), Ts. Phạm Huy Điển, Ts. Nguyễn Xuân Tấn, Pts. Tạ Duy Phượng. Nội dung quyển sách bao gồm những kiến thức đòi hỏi học viên phải nắm được về bộ môn Giải tích trong năm thứ nhất bậc đại học.

Trong Chương 1 chúng tôi không trình bầy chi tiết về xây dựng trường số thực (để không làm lại phần việc của những người biên soạn giáo trình Số học), mà chỉ sử dụng *lát cắt* để chứng minh *sự tồn tại biên* của tập bị chặn, một tính chất quan trọng được dùng nhiều lần trong chương trình Giải tích, đồng thời làm quen sinh viên với môn học Tô pô đại cương thông qua các khái niệm trên đường thẳng thực. Ngoài việc sử dụng trong giáo trình này, nó giúp học viên hiểu rõ bản chất của những khái niệm trừu tượng trong lý thuyết Tô pô tổng quát. Bên cạnh những khái niệm kinh điển như: đạo hàm, vi phân, tích phân, chuỗi hàm,... chúng tôi giới thiệu (trong Chương 7) một số một khái niệm mới của *Giải tích không trơn*, một lĩnh vực đang được quan tâm và ứng dụng. Chương phương trình vi phân (Chương 11) được đưa vào nhằm củng cố những kiến thức về đạo hàm, tích phân và phục vụ nhu cầu tìm hiểu các bài toán đặt ra trong cơ học, vật lý, hóa học, sinh học,... Chúng tôi không đi sâu vào lĩnh vực này (để tránh gây chồng tréo với những người biên soạn giáo trình phương trình vi phân) mà chỉ đặt mục đích giới thiệu khái niệm làm cơ sở cho việc thực hành tính toán.

Để người đọc dễ tiếp thu, chúng tôi cố gắng trình bày giáo trình một cách gọn gàng, đơn giản nhưng đầy đủ. Ngoại trừ những phần giành lại cho bộ môn khác, các vấn đề nêu ra trong khuôn khổ giáo trình giải tích đều được chứng minh chặt chẽ và khúc triết. Phần bài tập và tính toán thực hành được biên soạn công phu, có nội dung bao quát tất cả những chủ đề cơ bản. Chúng tôi hy vọng rằng giáo trình sẽ là một cẩm nang tốt cho sinh viên các trường kỹ thuật và tổng hợp.

CHƯƠNG 1

Tập hợp và Số thực

1.1. Khái niệm tập hợp

1.1.1. Tập hợp

Tập hợp, trong Toán học, được xem là một khái niệm "khởi đầu" không định nghĩa. Nó đồng nghĩa với các từ họ, hệ, lớp,... và được dùng để mô tả một quần thể của những đối tượng *phân biệt được* mà chúng ta tư duy như *một thể trọn vẹn*.

Thí dụ Khi ta nói: Họ các đường tròn đồng tâm, hệ các phương trình tuyến tính, lớp các hàm đa thức, cũng có nghĩa là tập hợp của các đối tượng nói trên. Tập hợp xe cơ giới của thành phố Hà Nội, tập hợp các sinh viên Việt Nam, tập hợp những đường phố xuất phát từ Hồ Gươm, v.v... là những ví dụ điển hình về khái niệm tập hợp không chỉ trong Toán học, mà cả trong ngôn ngữ thông thường.

Những thành viên của tập hợp gọi là *phần tử* (hay *điểm*). Cho A là một tập, ta viết $x \in A$ (đọc: x thuộc A) có nghĩa x là một phần tử của A, và viết $x \notin A$ (đọc: x không thuộc A) có nghĩa x không phải là phần tử của A.

1.1.2. Diễn tả tập hợp

Để *diễn tả tập hợp* người ta dùng dấu móc $\{...\}$. Trong dấu móc ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp $\{x_1,...,x_n\}$, hoặc nêu thuộc tính chung (P) của các phần tử tập hợp bằng cách viết $\{x : x$ thỏa mãn $(P)\}$.

Thí dụ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
hoặc $A = \{1, 2,...,5\}$
hoặc $A = \{x : x$ là số tự nhiên sao cho $1 \le x \le 5\}$.

1.1.3. Tập rỗng

Ta quy ước *Tập rỗng* (hay tập trống) là tập hợp không có một phần tử nào cả. Người ta thường ký hiệu tập rỗng là $\varnothing$.

Thí dụ Tập hợp các cầu thủ bóng đá Việt Nam đã đoạt giải Olympic năm 1996 là tập rỗng; tập hợp các số lẻ chia hết cho 4 là tập rỗng.

1.1.4. Tập trùng nhau

Ta nói tập A và tập B *trùng nhau* (hay bằng nhau) và viết $A = B$ (đọc: A bằng B) nếu chúng có cùng những phần tử, tức là $x \in A$ khi và chỉ khi $x \in B$. Khi chúng không trùng nhau ta viết $A \neq B$.

Thí dụ A là tập gồm số 2 và số 4, còn B là tập các số chẵn dương bé hơn 5. Ta có $A = B$.

1.1.5. Tập hợp con

Ta nói A là *tập con* của tập B nếu mọi phần tử của A là phần tử của B. Khi đó ta viết $A \subseteq B$ (đọc: A nằm trong B), hoặc $B \supseteq A$ (đọc: B chứa A). Nếu $A \subseteq B$ và $A \neq B$ ta nói A là *tập con thật sự* của B. Quy ước: Tập rỗng là tập con của mọi tập.

Chú ý Mỗi phần tử x của A tạo thành tập con $\{x\}$ của A. Cần phân biệt phần tử x của tập hợp A (viết là $x \in A$) với tập con $\{x\}$ của tập hợp A (viết là $\{x\} \subset A$).

1.2. Các phép toán

1.2.1. Hợp của hai tập

Hợp của hai tập A và B được ký hiệu $A \cup B$ (đọc: A hợp B) là tập gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B. Nghĩa là, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

Thí dụ $A = \{1,2,10,\{a,b\}\}$, $B = \{a,2,\{a,b\}\}$, $A \cup B = \{1,2,10,\{a,b\},a\}$.

Chú ý $\{a,b\}$ là một tập nhưng nó lại là một phần tử của A và của B.

1.2.2. Giao của hai tập

Giao của hai tập A và B được ký hiệu $A \cap B$ (đọc: A giao B) là tập gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A lại vừa thuộc B. Vậy $A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\}$.

Thí dụ Với $A = \{a,b,c\}$, $B = \{\{a\},b,d\}$, thì $A \cap B = \{b\}$.

1.2.3. Phần bù

Phần bù của A trong B được ký hiệu $B \setminus A$ là tập gồm tất cả các phần tử thuộc B nhưng không thuộc A. Đôi khi người ta gọi $B \setminus A$ là hiệu của B và A.
Vậy $B \setminus A = \{x : x \in B \text{ và } x \notin A\}$.

Thí dụ $A = \{1,5,10,b\}$, $B = \{5,b\}$. Khi đó $B \setminus A = \varnothing$.

Minh họa hình học:

1.2.4. Tính chất của các phép tính

Cho A, B và C là ba tập hợp bất kỳ. Khi đó ta có:

Tính kết hợp

(1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

(1') $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Tính giao hoán

(2) $A \cup B = B \cup A$,

(2') $A \cap B = B \cap A$.

Tính phân phối

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

(3') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(4') $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

<u>Chứng minh</u> Để chứng minh đẳng thức $X = Y$ giữa hai tập X và Y ta chỉ ra rằng với $x \in X$ thì suy ra $x \in Y$ tức là $X \subseteq Y$, và ngược lại với $y \in Y$ thì suy ra $y \in X$, tức là $Y \subseteq X$.

Trước hết ta chứng minh (3). Cho x là phần tử bất kỳ của $A \cup (B \cap C)$. Khi đó $x \in A$ hoặc $x \in (B \cap C)$. Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$, có nghĩa là $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nếu $x \in (B \cap C)$ thì $x \in B$ và $x \in C$. Lúc đó $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$, có nghĩa là $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ngược lại, cho y là phần tử bất kỳ của $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Khi đó $y \in A \cup B$ và $y \in A \cup C$. Vậy hoặc $y \in A$ tức là $y \in A \cup (B \cap C)$, hoặc $y \notin A$. Nhưng $y \notin A$ thì $y \in B$ và $y \in C$, có nghĩa là $y \in B \cap C$. Rút cuộc $y \in A \cup (B \cap C)$ và (3) là đúng.

Những đẳng thức khác chứng minh tương tự.

Chú ý 1) Dùng cách diễn tả, chứng minh trên có thể viết ngắn gọn như sau:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in (B \cap C)\} \\ &= \{x : x \in A \text{ hoặc } \{x \in B \text{ và } x \in C\}\} \\ &= \{x : \{x \in A \text{ hoặc } x \in B\} \text{ và } \{x \in A \text{ hoặc } x \in C\}\} \\ &= \{A \cup B\} \cap \{A \cup C\}. \end{aligned}$$

2) Do tính kết hợp, với ba tập A, B, C cho trước ta có thể lấy hợp hai tập bất kỳ sau đó mới hợp với tập còn lại và kết quả đều cho ta một tập, đó là hợp $A \cup B \cup C$. Tương tự như thế đối với phép giao, cũng như phép hợp và phép giao của nhiều tập hơn.

1.2.4. Tích của các tập hợp

Cho 2 tập hợp A và B. Tập hợp tất cả các cặp điểm (a,b), với $a \in A$ và $b \in B$, lập thành một tập hợp mới gọi là *tích của hai tập* A và B, và được ký hiệu là $A \times B$. Như vậy, mỗi phần tử z của tập tích $A \times B$ luôn biểu diễn dưới dạng $z=(a,b)$, với $a \in A$, $b \in B$, và người ta gọi a,b là các *thành phần* (hay *toạ độ*) của z.

1.3. Phép ứng và lực lượng

1.3.1. Phép ứng

Cho A và B là hai tập khác rỗng. *Phép ứng* từ A tới B là một quy tắc cho phép với mỗi phần tử $x \in A$ chỉ ra được một phần tử $y \in B$ ứng với nó. Thông thường người ta ký hiệu $f : A \to B$ có nghĩa f là phép ứng từ A tới B, và viết $y = f(x)$ có nghĩa y được ứng với x, hoặc x ứng với y (đôi lúc ta viết $x \mapsto y$). Tập A được gọi là *miền xác định* của phép ứng và tập B được gọi là *miền giá trị* của phép ứng. Khi B là một tập hợp số nào đó người ta còn gọi f là *hàm số*.

Chú ý Có thể nhiều phần tử của B được ứng với một phần tử của A và có thể một phần tử của B được ứng với nhiều phần tử của A.

Đơn ứng là một phép ứng cho phép với mỗi phần tử của A chỉ ra được *một và chỉ một* phần tử của B ứng với nó. (Điều này không loại trừ khả năng nhiều phần tử của A cùng được ứng với 1 phần tử của B).

Phép ứng từ A tới B được gọi là *phép ứng 1-1* (hay *phép tiêm*) nếu 2 phần tử khác nhau trong A thì được ứng với 2 phần tử khác nhau trong B.

Toàn ứng là một phép ứng mà mỗi phần tử của tập B đều được ứng với (ít nhất) một phần tử trong A.

Song ứng từ A tới B là một phép ứng mà mỗi $x \in A$ chỉ ứng với một $y \in B$ và mỗi $y \in B$ chỉ được ứng với một $x \in A$. Như vậy, *song ứng* vừa là *toàn ứng*, vừa là *phép ứng 1-1*.

Thí dụ a) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$.

Phép ứng $a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 1$ v¡ $d \mapsto 2$ không phải song ứng từ A tới B.

b) $A = \{1,2,...,n,...\}$, $B = \{2,4,...,2n,...\}$.

Phép ứng $n \mapsto 2n$ là một song ứng từ A tới B.

Chú ý Nếu có một *song ứng* f từ A tới B thì ta có thể xây dựng một song ứng từ B tới A bằng cách với mỗi $y \in B$ ta cho ứng với $x \in A$ mà $f(x) = y$. Song ứng này có tên gọi là *song ứng ngược* của f và thường được ký hiệu là f^{-1}.

1.3.2. Tương đương

Hai tập A và B gọi là *tương đương* nếu có thể xây dựng được một *song ứng* giữa A và B. Khi đó ta viết $A \sim B$.

Thí dụ a) Với A là tập hợp các số thực dương, B là tập hợp các số thực âm, thì $A \sim B$ vì phép ứng $a \mapsto -a$ là một song ứng.

b) $A=\{1,2,...\}, B=\{\pm 1, \pm 2, ...\}$.

Khi đó $A \sim B$ vì phép ứng $2n \mapsto -n$ và $2n-1 \mapsto n$ là song ứng.

Chú ý Nếu A và B *hữu hạn* thì $A \sim B$ khi và chỉ khi số phần tử của A bằng số phần tử của B.

1.3.3. Lực lượng

Những tập *tương đương* thì được gọi là *cùng lực lượng*.

Khi A có *hữu hạn* phần tử thì người ta thường xem lực lượng của A là *số phần tử* của nó và ký hiệu là card(A) (đọc là cac-đi-nal của A).

Thí dụ *a)* Tập A rỗng thì card(A) = 0.

b) $A = \{1, a, \{10, b\}\}$ thì $card\ (A) = 3$;

Khi A có *vô hạn* phần tử thì ta nói lực lượng của A là *vô hạn* (hay *siêu hạn*), và viết $\text{card}(A) = \infty$.

1.3.4. Tập đếm được

Ký hiệu tập số tự nhiên là $\mathbb{N}$. Đây là tập vô hạn.

Tập A gọi là *đếm được* nếu nó *hữu hạn* hoặc *tương đương với* $\mathbb{N}$.

Định lý *Tập con của tập đếm được là tập đếm được.*

Chứng minh Dùng phép *song ứng* ta chỉ cần chứng tỏ tập con của $\mathbb{N}$ là tập đếm được. Cho $A \subseteq \mathbb{N}$. Ký hiệu a_1 là phần tử đầu của A, a_2 là phần tử đầu của $A \setminus \{a_1\}$, v.v... a_n là phần tử đầu của $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$. Nếu như đến số n nào đó $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$ không có phần tử nào thì A hữu hạn (nó chỉ chứa (n-1) phần tử) và, theo định nghĩa, nó là đếm được. Nếu với mọi n tập $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\} \neq \varnothing$ thì ta thiết lập được phép ứng $f(n) = a_n$ với mọi n = 1,2,... Nó là một song ứng từ $\mathbb{N}$ tới A. Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ là phần tử đầu của $A \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$ nên số này là duy nhất. Ngược lại với mỗi $a \in A$, ta biết được số các phần tử đứng trước nó, thí dụ là k, vậy $f(k+1) = a$. Song ứng f chỉ ra rằng $A \sim \mathbb{N}$ khi A không hữu hạn.

Chú ý Không phải tập vô hạn nào cũng đếm được.

Thí dụ a) Họ các cặp số tự nhiên $\{(m,n)\}: m,n \in \mathbb{N}\}$ là tập *đếm được*.

Thật vậy, xếp các phần tử của họ trên theo hàng và cột như sau :

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \ldots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \ldots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \ldots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Xây dựng phép ứng tới $\mathbb{N}$ theo quy tắc "đi theo đường xiên" :

$(1,1) \mapsto 1$

$(2,1) \mapsto 2$; $(1,2) \mapsto 3$;

$(1,3) \mapsto 4$; $(2,2) \mapsto 5$; $(3,1) \mapsto 6$....

Dễ kiểm tra đây là một song ứng. Do đó họ cặp các số tự nhiên là đếm được.

b) Họ $\aleph$ gồm tất cả các tập con của $\mathbb{N}$ là tập *không đếm được*. Giả sử trái lại nó là đếm được thì có một song ứng f từ $\aleph$ vào $\mathbb{N}$. Ký hiệu $x_n \in \aleph$ là phần tử ứng với n, nghĩa là $f(x_n) = n$. Khi ấy ta xây dựng được tập X gồm các số tự nhiên không nằm trong tập ứng với nó, nghĩa là $X{:=}\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin x_n\}$. Ta sẽ chỉ ra rằng nó không được ứng với số tự nhiên nào. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng X được ứng với số tự nhiên k nào đó, tức là $X = X_k$. Khi ấy chỉ có 2 khả năng: hoặc là k nằm trong X_k hoặc là k nằm ngoài X_k. Trong trường hợp thứ nhất thì k không thể là phần tử của X và điều này mâu thuẫn với việc $X = X_k$. Trong trường hợp thứ 2 thì k sẽ là phần tử của X và điều này cũng lại dẫn đến mâu thuẫn trên. Tất cả các mâu thuẫn này chứng tỏ rằng giả thiết $\aleph$ đếm được là không thể xảy ra.

Nhận xét Phương pháp chứng minh trên cũng cho phép ta đi đến một khẳng định tổng quát là: tập *tất cả các tập con* của một tập khác rỗng A (thường được ký hiệu là 2^A) là *không cùng lực lượng* với A.

1.4. Số thực

Để tập trung trình bày các phương pháp cơ bản của Giải tích toán học, chúng ta không đi sâu vào việc xây dựng khái niệm số thực, một việc đòi hỏi nhiều công phu và thời gian. Trong phần này chúng ta chỉ nhắc lại một số tính chất quan trọng của số thực cần thiết cho việc thiết lập các nguyên lý cơ bản của Giải tích và các ứng dụng của chúng.

1.4.1. Số hữu tỷ và số vô tỷ

Như trên, ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số *tự nhiên* và $\mathbb{Z}$ là tập các *số nguyên*. Theo định nghĩa số hữu tỷ là số có dạng $\frac{m}{n}$ trong đó $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ và $(m, n) = 1$ (ước số chung lớn nhất của m và n là 1, hay m và n là hai số nguyên tố cùng nhau). Ta ký hiệu $\mathbb{Q}$ là tập các số *hữu tỷ*. Những số không biểu diễn được dạng trên gọi là số *vô tỷ*. Như vậy, tập các *số thực* bao gồm tất cả số vô tỷ và hữu tỷ, và sẽ được ký hiệu là $\mathbb{R}$.

Thí dụ 0,5 là số hữu tỷ vì $0,5 = \frac{1}{2}$.

$q = \sqrt{2}$ là số vô tỷ vì không thể biểu diễn dưới dạng $\frac{m}{n}$ nêu ở trên. Thật vậy nếu $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ thì $m^2 = 2n^2$. Chứng tỏ m^2 là số chẵn, do đó m là số chẵn: $m = 2m'$. Khi ấy $n^2 = 2(m')^2$ và có nghĩa n cũng là số chẵn. Điều này phi lý vì $(m,n) = 1$.

1.4.2. Biểu diễn số thực

Để dễ hình dung người ta hay biểu diễn số thực trên trục số Ox. Mỗi điểm trên trục này sẽ biểu diễn một số thực. Điểm O là gốc và là biểu diễn của *số không*. Số *1* được biểu diễn bởi điểm bên phải gốc sao cho đoạn [*0,1*] có độ dài bằng đơn vị. Khi đó số hữu tỷ $q = \frac{m}{n}$ với $m > 0$ sẽ là điểm nằm phía bên phải gốc sao cho đoạn [0, q] có độ dài $\frac{m}{n}$ lần đơn vị. Số hữu tỷ $q = \frac{m}{n}$ với $m < 0$ sẽ là điểm đối xứng với $\frac{-m}{n}$ qua gốc. Những điểm khác trên trục số biểu diễn những số vô tỷ.

Thí dụ $\sqrt{2}$ là điểm bên phải gốc tọa độ và cách gốc tọa độ một đoạn bằng độ dài đường chéo của hình vuông với cạnh đơn vị. Ta biết rằng khoảng cách này không thể biểu diễn được dưới dạng tỷ số của hai số nguyên, cho nên nó biểu diễn một số vô tỷ.

1.4.3. Các phép tính

Trong $\mathbb{R}$ cũng như trong $\mathbb{Q}$ có bốn phép tính số học cơ bản: cộng, trừ, nhân và chia. Các phép tính này có tính chất sau:

Giao hoán : $a + b = b + a$ và $ab = ba$.

Kết hợp : $(a + b) + c = a + (b + c)$ và $ab(c)=a(bc)$.

Phân phối : $a(b + c) = ab + ac$.

1.4.4. Thứ tự

Bất cứ hai phần tử a, b (thuộc $\mathbb{Q}$ hoặc $\mathbb{R}$) đều có thể so sánh $a > b$ (a lớn hơn b), $a = b$ hoặc $a < b$ (a nhỏ hơn b). Thứ tự (>) có tính chất sau:

Bắc cầu : $a > b, b > c$ thì $a > c$,

Trù mật : $a > b$ thì có c để $a > c > b$.

Tiên đề (Archimedes): *Với mọi số* $c > 0$ *tồn tại số tự nhiên* $n > c$.

Ngoài ra số hữu tỷ còn có tính chất trù mật mạnh hơn sau đây: Cho a, b thuộc $\mathbb{R}$. Nếu $a > b$ thì có q thuộc $\mathbb{Q}$ để $a > q > b$.

1.5. Biên trên và biên dưới

1.5.1. Tập giới nội và cận

Ta nói $A \subseteq \mathbb{R}$ bị chặn trên nếu có số α để $a \le \alpha$ với mọi $a \in A$; số α này gọi là cận trên của A. Tương tự A bị chặn dưới nếu có số β (gọi là cận dưới) để $a \ge \beta$ với mọi $a \in A$. Một tập vừa bị chặn dưới vừa bị chặn trên gọi là bị chặn hay giới nội.

Biên trên của A, ký hiệu $\sup A$, là cận trên nhỏ nhất của A. Nếu $\sup A \in A$ thì viết $\max A$ thay cho $\sup A$. Đây là số lớn nhất trong A.

Biên dưới của A, ký hiệu $\inf A$, là cận dưới lớn nhất của A. Nếu $\inf A \in A$ thì viết $\min A$ thay cho $\inf A$. Đây là số nhỏ nhất trong A.

Thí dụ $A=\{x: 0 < x < 1\}$ thì mọi $\alpha \ge 1$ đều là cận trên của A, còn biên trên của A: $\sup A = 1$. Trong thí dụ này $\max A$ không tồn tại.

1.5.2. Lát cắt trong $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}$.

Chia $\mathbb{Q}$ làm hai lớp khác rỗng A và B sao cho $A \cup B = \mathbb{Q}$ và $a < b$ với mọi $a \in A, b \in B$. Phép chia trên gọi là lát cắt và ký hiệu $A|B$. Dễ thấy chỉ có ba dạng lát cắt:

a) Trong A có số hữu tỷ lớn nhất và trong B không có số nhỏ nhất.

b) Trong A không có số lớn nhất và trong B có số nhỏ nhất.

c) Trong A không có số lớn nhất và trong B không có số nhỏ nhất.

Trong 2 trường hợp đầu lát cắt $A|B$ xác định số hữu tỷ, và trong trường hợp còn lại lát cắt $A|B$ xác định số *vô tỷ* α thỏa mãn:

$$a < \alpha < b, \forall a \in A, b \in B.$$

Tương tự, ta nói $A|B$ là lát cắt trong $\mathbb{R}$ nếu $A \ne \emptyset, B \ne \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}$, $a < b$ với mọi $a \in A, b \in B$.

Bổ đề (Dedekind): *Với lát cắt $A|B$ bất kỳ trong $\mathbb{R}$, luôn luôn tồn tại số thực α lớn nhất trong A hoặc α nhỏ nhất trong B.*

Chứng minh Xét $A_Q = A \cap \mathbb{Q}$, $B_Q = B \cap \mathbb{Q}$. Khi đó $A_Q | B_Q$ là lát cắt trong $\mathbb{Q}$. Nó xác định số thực α. Khi đó $\alpha \in A$ hoặc $\alpha \in B$, do $A \cup B = \mathbb{R}$. Nếu $\alpha \in A$ thì đó là số lớn nhất trong A vì nếu không sẽ có số $\beta \in A$ để $\alpha < \beta$ và theo tính trù mật sẽ tìm được số hữu tỷ $r \in A$ để $\alpha < r < \beta$. Vậy $r \in A_Q$ và trái với điều $a \le \alpha \le b$, với mọi $a \in A_Q, b \in B_Q$. Tương tự, nếu $\alpha \in B$ thì nó là số nhỏ nhất trong B.

1.5.3. Tồn tại biên

Định lý *Mọi tập khác rỗng bị chặn trên (dưới) đều có biên trên (dưới).*

Chứng minh Giả sử $M \subseteq \mathbb{R}$ bị chặn trên. Nếu M có điểm lớn nhất $x_o \in M$ (tức là $a \le x_o$ với mọi $a \in M$), thì $x_o = \sup M$ vì mọi cận trên của M đều lớn hơn hoặc bằng x_o.

Nếu M không có điểm lớn nhất, ta xây dựng lát cắt $A|B$ như sau:

$$B = \{x : x \text{ là cận trên của } M\} \text{ và } A = \mathbb{R} \setminus B.$$

Do $M \ne \varnothing$ và bị chặn trên, nên $A \ne \varnothing$, $B \ne \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{R}$. Rõ ràng $a < b$ với mọi $a \in A, b \in B$. Nói cách khác A và B xác định lát cắt của $\mathbb{R}$. Theo Bổ đề *Dedekind* ta có thể tìm được α lớn nhất trong A hoặc bé nhất trong B, ký hiệu là α. Dễ thấy $\alpha \notin A$ và vì thế $\alpha \in B$. Ta có $\alpha = \sup M$ theo định nghĩa.

Đối với tập bị chặn dưới, việc chứng minh hoàn toàn tương tự.

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 1

1. Câu hỏi củng cố lý thuyết

1.1. Tập hợp

Bài 1 Giả sử A là tập tất cả các ước số của 60. Các khẳng định sau đây đúng hay sai:

a) $9 \in A$; *b*) $15 \in A$; *c*) $30 \notin A$.

Liệt kê tất cả các phần tử của A.

Bài 2 Giả sử A là tập tất cả các nghiệm của phương trình

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

a) $3 \notin A$; *b*) $5 \in A$; *c*) $4 \in A$; *d*) $7 \notin A$.

Liệt kê tất cả các phần tử của A.

Bài 3 Giả sử A là tập tất cả các đa thức một biến với hệ số nguyên, các kết luận sau đây đúng hay sai:

a) $x^3 - 3x + 1 \in A$; *b*) $15 \notin A$; *c*) $x^2 + y^2 + 3 \in A$;

d) $x^4 + 12x + \frac{1}{3} \notin A$; *e*) $x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1 \in A$.

Bài 4 Trong các tập hợp dưới đây, các phần tử, trừ một phần tử, đều có chung một tính chất nhất định. Hãy tìm phần tử không mang tính chất ấy:

a) {6, 15, 84, 1670}, {2, 7, 13, 25, 29}, {1, 9, 25, 79, 121};

b) {tam giác, hình vuông, hình tròn, hình thang, lục giác đều}.

Bài 5 Mô tả tính chất của các tập hợp vô hạn sau và viết công thức số hạng tổng quát của các tập hợp:

a) $\{\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, ...\}$; *b*) $\{\frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{11}, \frac{8}{14}, ...\}$;

c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, ...\}$; *d*) $\{2, 12, 36, 80, 150, ...\}$.

Bài 6 Xét xem các số sau đây: $\frac{2}{5}, \frac{17}{20}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}$ số nào thuộc tập hợp A: $A = \{x : x = \frac{n^2+1}{n^2+4}, n \notin N\}$.

Bài 7 Trong số các tập sau đây, tập nào là rỗng:

a) Tập hợp các chữ nhật có các đường chéo không bằng nhau.

b) Tập hợp các tam giác có các đường trung trực không đồng quy.

c) Tập nghiệm *hữu tỷ* của phương trình $x^2 - 2 = 0$.

d) Tập nghiệm *thực* của bất phương trình $x^2 + x + 1 < 0$.

e) Tập nghiệm nguyên của phương trình $4x^2 - 1 = 0$.

f) Tập nghiệm tự nhiên của phương trình $2x^2 - 3x - 9 = 0$.

Bài 8 Mô tả tập hợp các điểm *M(x, y)* của mặt phẳng thoả mãn:

a) $3x + 1 \le y$

b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

c) $y \le x^2 - 2x - 3$

d) $|y| \le |x-2|$.

1.2. Phép ứng và tương đương

Bài 1 Hỏi các tập sau đây có tương đương nhau không:

a) Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ và các tập số nguyên $\mathbb{Z}$.

b) Tập các số tự nhiên và các số hữu tỷ.

c) Tập các nghiệm phức của hai đa thức có cùng bậc *n*.

d) Tập các nghiệm thực của hai đa thức cùng bậc *n*.

e) Tập các điểm của một cạnh hình vuông và các tập điểm trên một đường chéo của nó.

f) Tập xác định của một hàm số và đồ thị của nó.

Bài 2 Bằng cách thiết lập các phép song ứng, hãy chứng minh rằng các tập sau đây là tương đương:

a) Tập các số thực $\mathbb{R}$ và khoảng (0,1).

b) Tập hợp các điểm của hai đoạn thẳng [*a*,*b*] và [*c*,*d*].

c) Tập các điểm của hình tròn mở và tập các điểm của mặt phẳng.

2. Các phép toán trên tập hợp

Bài 1 Cho *A, B, C* là các tập tùy ý. Hãy chứng minh các mệnh đề sau:

1) $A \cap A = A = A \cup A$.

2) $A \cap B \subseteq A,\ A \subseteq A \cup B,\ A \cap B \subseteq B,\ B \subseteq A \cup B$.

3) Nếu $A \subseteq B$ thì $A \cap B = A$.

4) Nếu $A \subseteq B$ thì $A \cup B = B$.

5) Nếu $A \subseteq B$ thì $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$.

6) Nếu $A \subseteq C$ và $B \subseteq C$ thì $A \cup B \subseteq C$.

7) Nếu $C \subseteq A$ và $C \subseteq B$ thì $C \subseteq A \cap B$.

Bài 2 Cho A và B là hai tập con của X. Ký hiệu CA là phần bù của A trong X, tức là $CA=X\backslash A$. Hãy chứng minh các tính chất sau đây:

1) $A \cap X = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup X = X$.

2) $A \cap CA = \varnothing$, $A \cup CA = X$.

3) $CCA = A$.

4) $C(A \setminus B) = B \cup CA$.

5) Nếu $A \subseteq B$ thì $CB \subseteq CA$.

6) Luật Moorgan

$$C(A \cap B) = CA \cup CB, \; C(A \cup B) = CA \cap CB.$$

Bài 3 Chứng minh:

1) Tính kết hợp của hợp và giao các tập hợp

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2) Tính giao hoán của phép hợp và giao các tập hợp

a) $A \cup B = B \cup A$;

b) $A \cap B = B \cap A$.

3) Tính phân phối của giao đối với hợp (hoặc của hợp đối với giao) các tập hợp

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4) Tính phân phối của hiệu đối với hợp (hoặc giao) các tập hợp

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Bài 4 Chứng minh

a) $A \setminus [\cup\{A_i, i = 1..n\}] = \cap\{A \setminus A_i, i = 1..n\}$.

b) $A \setminus [\cap\{A_a, a \in I\} = \cup\{(A \setminus A_a), a \in I\}$, I là tập chỉ số bất kỳ.

Bài 5 Ký hiệu $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ là hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B. Chứng minh rằng

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

3. Phép ứng và sự tương đương của hai tập hợp

Bài 1 Cho <u>*phép ứng*</u> $f : X \to Y$ và A, B là hai <u>*tập con*</u> của X. Chứng minh:

1) Nếu $A \subseteq B$ thì $f(A) \subseteq f(B)$;

2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Bài 2 Cho phép ứng $f: X \to Y$ và A, B là hai tập con của Y. Hãy chứng minh:

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

3) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Bài 3 Cho $g: X \to Y, f: Y \to Z$ và $h: X \to Z$, $h(x) = f(g(x))$. Chứng minh rằng:

1) $h(A) = f[g(A)] \forall A \subset X$;

2) $h^{-1}(B) = g^{-1}[f^{-1}(B)] \forall B \subset Z$.

Bài 4 Gọi $\mathbb{R}$ là tập <u>*số thực*</u>. Xét <u>*phép ứng*</u> f từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ được cho bởi công thức sau:

$$x \to y = \frac{x+1}{x-2} \text{ với } x \neq 2 \text{ và } y(2) = 1.$$

Chứng minh rằng f là <u>*song ứng*</u>. Tìm phép ứng ngược.

Bài 5 Cho phép ứng $x \to y,\ y = x + 1 - 2\sqrt{x}$ với $0 \le x$. Chứng minh:

1) f không phải là một song ứng.

2) Xác định hai khoảng mà trong mỗi khoảng ấy f là song ứng. Tìm phép ứng ngược trong mỗi trường hợp.

Bài 6 Chứng minh định lý Cantor-Bernstein: Cho hai tập hợp bất kỳ A và B. Nếu tồn tại một song ứng f từ A lên một tập con B_1 của B và một song ứng g từ B lên một tập con A_1 của A thì các tập hợp A và B tương đương .

4. Tập hợp đếm được

Bài 1 Chứng minh các tính chất sau đây của tập đếm được:

- <u>*Tính chất 1:*</u> Điều kiện cần và đủ để một tập A đếm được là ta có thể đánh số nó, tức là có thể biểu diễn nó dưới dạng một dãy:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

- <u>*Tính chất 2*</u>: Trong mọi tập vô hạn đều có một tập con đếm được.

- <u>*Tính chất 3*</u>: Nếu lấy một tập hữu hạn M ra khỏi tập đếm được A thì tập còn lại $A \setminus M$ (phần bù của M trong A) là đếm được.

- <u>*Tính chất 4:*</u> Hợp của một tập đếm được những tập đếm được là đếm được.

Bài 2 Chứng minh rằng mọi tập vô hạn đều có chứa một tập con thực sự tương đương với nó.

5. Số thực

Bài 1 Chứng minh rằng các số sau là các số <u>*vô tỷ*</u>

$a)\ \sqrt{5}$; $\qquad b)\ \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\qquad c)\ \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

Bài 2 Số nào lớn hơn $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}-2$ hay 0 ?

Bài 3 Chứng minh rằng nếu a, b, c thuộc $\mathbb{Q}$ thoả mãn đẳng thức $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$ thì $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ cũng thuộc $\mathbb{Q}$.

Bài 4 Chứng minh rằng tập các số *hữu tỷ* là *đếm được.*

Bài 5 Chứng minh rằng tập các số *vô tỷ* có cùng *lực lượng* với $\mathbb{R}$.

Bài 6 Chứng minh định lý Kantor: Tập tất cả các số thực nằm giữa 0 và 1 là không đếm được.

6. Tập hợp nghiệm của phương trình và bất phương trình

Nhiều tập hợp số trong Toán học thường được cho bởi một hệ phương trình và bất phương trình. Giải phương trình cũng chính là tìm tập tất cả các nghiệm của phương trình đã cho. Trong chương trình phổ thông, chúng ta đã biết giải thành thạo khá nhiều loại phương trình và bất phương trình. Tuy nhiên, ở đây chúng tôi muốn cung cấp một số bài tập giải phương trình và bất phương trình có cách giải hay hoặc tương đối khó, nhằm giúp các bạn thử sức, so sánh và vận dụng khả năng của máy tính (nếu là bài tập khó, bạn có thể nhờ máy tính giải ra đáp số, từ đó bạn có những gợi ý tích cực để tìm ra lời giải; nếu là bài dễ, bạn có thể dùng máy để kiểm tra đáp số). Ngoài ra, bạn có thể tìm ra những cách giải hay hơn máy, do đó đáp số gọn hơn. Cũng cần nói thêm rằng, có những bài bạn giải được (nhờ mẹo đặt ẩn phụ, v.v...) mà máy không giải nổi. Cuối cùng, việc giải thành thạo phương trình và bất phương trình (tự lực và bằng máy) ở chương này giúp bạn dễ dàng giải bài tập (tự lực và bằng máy) ở các chương tiếp theo.

6.1. Tập hợp nghiệm của phương trình

Tìm tập hợp nghiệm của các phương trình sau:

Bài 1 $x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0$.

Bài 2 $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{5}$.

Bài 3 $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

Bài 4 $x+x^{\log_2 3}=x^{\log_2 5}$.

Bài 5 $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x-2}$.

Bài 6 $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}}=2$.

6.2. Tập hợp nghiệm của bất phương trình

Giải các bất phương trình sau:

Bài 1 $\frac{x-1}{x} < \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}}$.

Bài 2 $2\sqrt{x^2-4x+5} \le x^2-4x+2$.

Bài 3 $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \le x$.

Bài 4 $1-x \le \sqrt{x^4-2x^2+1}$.

Bài 5 $0 < \dfrac{\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)+2x+3}{\sqrt{4-x^2}-x}$.

Bài 6 $50 \le 25^{-x} + 5^{-x+1}$.

Bài 7 $\dfrac{2x^2-11x+15}{2^x-6} < 0$.

Bài 8 $0 < \dfrac{3^x-2}{5x^2+22x-15}$.

Bài 9 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|x^3-1\right|} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(-\frac{2(x-1)}{2}\right)}$.

Bài 10 $\dfrac{\log_{3+x^2}(x^2-6)^2}{2} < 2 + \dfrac{\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{64}\right)}{12}$.

6.3. Tập hợp nghiệm của hệ phương trình

Tìm tập hợp nghiệm của các hệ phương trình sau:

Bài 1 $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=5 \\ x+y=5 \end{cases}$

Bài 2 $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2} \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{y}=\sqrt{2} \end{cases}$

6.4. Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình

Tìm tập hợp nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

Bài1 $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x \\ 4 < \sqrt{x+5}+\sqrt{x-5} \end{cases}$

Bài 2 $\begin{cases} -3 \le x^2+2xy-7y^2 \\ 3x^2+10xy-5y^2 \le -2 \end{cases}$

7. Thực hành tính toán trên máy

Trong giáo trình này chúng ta sẽ sử dụng máy tính để giải quyết các bài toán khó trong chuyên ngành giải tích. Hiện nay có nhiều bộ chương trình được thiết lập cho mục đích này. Mỗi chương trình có một thế mạnh riêng. Chỉ cần sử dụng thành thạo một chương trình là sẽ dễ dàng sử dụng các chương trình khác. Trong khuôn khổ giáo trình này chúng tôi giới thiệu bộ chương trình Maple V, hiện đang được sử dụng rộng rãi trong các trường học ở nước ngoài.

7.0. Sơ lược về Maple V

Maple V là bộ chương trình tính toán đa năng khá đồ sộ, nhưng có thể cài được trên các máy cá nhân với cấu hình bình thường (bộ nhớ tối thiểu là 8MB). Cài đặt chương trình trên máy là phần việc của các nhà cung cấp phần mềm, chúng ta chỉ cần quan tâm tới việc sử dụng chương trình để tính toán. Việc khởi động chương trình cũng dễ dàng như bất kỳ chương trình ứng dụng nào khác (như Word, Excel,...).

Các lệnh của Maple rất gần với các ngôn ngữ toán học, cho nên người sử dụng chỉ cần nắm vững các khái niệm toán học cơ bản và những qui ước thông thường về thứ tự thực hiện các phép tính, mà không cần phải biết trước một ngôn ngữ lập trình nào. Việc viết tên các khái niệm toán học bằng tiếng Anh không phải là điều phiền hà, vì các khái niệm này vốn không nhiều, và ta cũng không cần phải biết trước vì sẽ được giới thiệu trong quá trình *thực hành tính toán*. Các biểu thức toán học được viết trực tiếp vào dòng lệnh và được thực hiện theo thủ tục thông thường. Chỉ cần lưu ý rằng *phép nhân* được biểu diễn bằng *dấu sao* (thí dụ, *ab* được viết là `a*b`), phép *luỹ thừa* bằng *dấu mũ* (thí dụ, a^2 được viết là `a^2`), *phép chia* biểu thị bằng *gạch chéo* (thí dụ *a* chia cho *b* được viết là `a/b`), căn bậc 2 của số *a* được viết là `sqrt(a)`, v.v... *Kết thúc dòng lệnh* phải là dấu chấm phẩy (`;`), trừ phi ta không muốn cho kết quả của lệnh hiện ra màn hình (để không phải xem các kết quả tính toán trung gian) thì ta kết thúc lệnh bằng dấu 2 chấm (`:`). *Thực hiện lệnh* bằng cách nhấn phím "Enter", khi con trỏ đang ở trên dòng lệnh.

Các tính toán đối với từng chuyên mục cụ thể sẽ được hướng dẫn song song với các phần lý thuyết. Người học sẽ thấy công việc tính toán cũng nhẹ nhàng và hấp dẫn, chứ không đáng ngại như tra bản số và rút thước logarit.

Ta bắt đầu việc tính toán thực hành (cho chuyên mục này cũng như cho bất cứ chuyên mục nào sau này) với việc đưa vào một *cụm xử lý* bằng cách ấn chuột vào nút có biểu tượng "[>" (hoặc bằng chức năng **Insert/Execution Group/After Cursor** có sẵn trên thanh lệnh của giao diện làm việc). Một dấu nhắc lệnh "[>" sẽ hiện ra chờ đợi ta đưa lệnh vào thực hiện.

7.1. Các phép toán trên tập hợp

Việc cho một tập hợp cũng đồng nghĩa với việc *định nghĩa* tập hợp đó và được thực hiện bằng lệnh có cú pháp như sau

```
[> A:={ các phần tử của tập hợp};
```

trong đó *A* là tên của tập hợp và ":=" là *dấu định nghĩa* (gồm dấu 2 chấm đi liền với dấu bằng). Thí dụ, ta cho tập *A* gồm 4 phần tử *a,b,c,d* bằng dòng lệnh sau:

```
[> A:={a,b,c,d};
```

Sau khi ấn phím "Enter" để thực hiện lệnh, máy sẽ cho hiện kết quả là

$$A := \{a, b, c, d\}$$

và một dấu nhắc lệnh "[>" tự động xuất hiện cho ta đưa lệnh khác vào thực hiện. Thí dụ, ta có thể định nghĩa tiếp một tập hợp *B* gồm có 6 phần tử *c,d,e,f,g,h* như sau

```
[> B:={c,d,e,f,g,h};
```

$$B := \{c, d, e, f, g, h\} .$$

Bây giờ ta có thể tiến hành các phép toán trên tập hợp như đã học trong phần lý thuyết, chỉ xin lưu ý mấy từ tiếng anh: *hợp* là **union**, *giao* là **intersect**, *phần bù* (trừ) là **minus**.

Thí dụ

```
[> A union B ;
```

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

```
[> A intersect B ;
```

$$\{c, d\}$$

```
[> B minus A ;
```

$$\{e, f, g, h\} .$$

Muốn biết *phần tử* này có thuộc *tập hợp* kia hay không ta dùng lệnh **member**. Nếu "có" thì máy cho trả lời *true* (đúng), còn nếu "không" thì nó cho trả lời *false* (sai).

Thí dụ

```
[> member(a,A);
```

true

```
[> member(c,A);
```

true

```
[> member(a,B);
```

false .

7.2. Tính toán trên tập số thực

Mọi biểu thức số học đều có thể thực hiện được trên Maple một cách đơn giản. Chỉ việc viết biểu thức cần tính vào sau dấu nhắc lệnh theo qui tắc đã nói ở trên (đừng quên dấu chấm phẩy ở cuối dòng lệnh) và nhấn phím "Enter".

Thí dụ

```
[> (2^64+19!)/(31!-3^15+123456789);
```

$$\frac{9284194587059191808}{41114193270889614088627814945539 41}$$

Maple có khả năng tính toán *chính xác* trên mọi số thực, và vì vậy không cần phải đưa dữ kiện *vô tỷ* dưới dạng các số *thập phân xấp xỉ* . Thí dụ, các số vô tỷ như $\pi, \sqrt{3}, \sqrt{\pi + \sqrt{2}}, \ldots$ được đưa vào tính toán trực tiếp mà không cần qua công đoạn "xấp xỉ bằng các số thập phân gần đúng". Ta có thể xem xấp xỉ thập phân của bất kỳ *số vô tỷ* nào với *độ chính xác tuỳ thích* (tới hàng ngàn chữ số thập phân). Để thực hiện điều này ta dùng lệnh *đánh giá dưới dạng thập phân* có cú pháp như sau:

[> **evalf(a,n);**

Trong đó **a** là số vô tỷ, còn **n** là số chữ số thập phân (tức độ chính xác của phép xấp xỉ).

Thí dụ [> **evalf(Pi,50);**

$$3.1415926535897932384626433832795028841971693993751$$

Nếu không cho giá trị **n** thì máy tự động lấy độ chính xác là *10* chữ số thập phân.Trong thực tế, có những *số vô tỷ* được biểu diễn bằng những công thức cồng kềnh và phức tạp, khiến ta rất khó hình dung giá trị của nó. Thí dụ như:

$$\sqrt{\sqrt{\pi+3\sqrt{\pi+1}}-\sqrt{\pi+5}}$$

Khi ấy việc biết được giá trị thập phân xấp xỉ của nó là rất có ý nghĩa.

Thí dụ [> **evalf(sqrt(sqrt(Pi+3*sqrt(Pi+1))-sqrt(Pi+5)));**

$$.4330334698$$

Rõ ràng, đây là một công cụ hữu hiệu để so sánh các số vô tỷ phức tạp (chỉ cần đánh giá hiệu của chúng là ta biết được số nào lớn hơn).

Trong quá trình tính toán, nhất là khi *giải phương trình*, lấy *giới hạn*, tính *vi phân* và *tích phân*,... ta có thể gặp phải những số *vô tỷ* chưa từng được biết đến bao giờ (nên cũng chưa từng đặt *tên* hoặc có ký hiệu biểu diễn cho nó). Khi ấy máy cũng không có cách nào biểu thị cho ta xem được. Với những số như vậy thì chỉ còn cách là xem *xấp xỉ thập phân* của nó.

7.3. Tìm tập nghiệm của phương trình và bất phương trình

1. Tìm tập nghiệm của phương trình f(x)=0.

Ta biết rằng phương trình bậc 2 có thể giải dễ dàng bằng căn thức, và do đó có thể không cần nhờ tới máy. Phương trình bậc 3 và bậc 4 cũng giải được bằng căn thức, nhưng không mấy ai nhớ được công thức giải chúng (vì quá cồng kềnh phức tạp). Với phương trình bậc 5 trở lên (và các phương trình vô tỷ) thì chẳng có công thức nào để nhớ, dù muốn. Nói chung, với các phương trình từ bậc 3 trở lên ta thường chỉ quen giải bằng "mẹo" hoặc "mò nghiệm", và chỉ có thể giải được vài phương trình đặc biệt do con người tự "thiết kế" ra. Trước các phương trình nảy sinh từ các bài toán thực tiễn (không được tạo ra theo ý muốn) thì ta thường phải bó tay. Với Maple, tình trạng này sẽ không còn nữa. Nó sẽ giúp ta vượt qua những bài toán khó thực sự (chứ phải là "khó giả tạo" do ai đó dựng lên).

Để tiến hành giải phương trình, ta đưa vào *cụm xử lý* với dấu nhắc lệnh "[>" rồi tiến hành khai báo phương trình cần giải $f(x) = 0$ (và đặt tên cho nó là **eqn**) với dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> eqn:=f(x)=0;
```

Sau khi ấn phím "Enter" sẽ xuất hiện ra công thức biểu diễn phương trình.

Sau dấu nhắc "[>" (tự động sinh ra sau lệnh trước) ta đánh tiếp lệnh giải phương trình vừa nhập, có cú pháp như sau:

```
[> solve(eqn,{x});
```

Sau khi ấn phím "Enter" máy sẽ thực hiện việc tính toán và cho ta *tập nghiệm* của phương trình cần giải.

Với những phương trình ngắn gọn (không sợ nhầm lẫn), ta có thể gói gọn cả 2 bước trên trong 1 câu lệnh

```
[> solve(f(x)=0,{x});
```

Thí dụ Giải phương trình

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0$$

Nhập phương trình

```
[> eqn:= x^4+5*x^3+6*x^2-4*x-16 = 0;
```

Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" máy hiện phương trình cần giải, tức là

$$eqn := x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0\,;$$

Giải phương trình

```
[> solve(eqn,{x});
```

Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" máy sẽ hiện tập nghiệm của phương trình gồm hai nghiệm thực và hai nghiệm phức như sau

$$\{x=\sqrt{5}-1\},\qquad \{x=-1-\sqrt{5}\},$$

$$\{x=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{7}\},\qquad \{x=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{7}\},$$

trong đó I là ký kiệu *đơn vị ảo* (chứ không phải là i như ta vẫn quen dùng).

Lưu ý Khi phương trình có nhiều nghiệm với biểu diễn cồng kềnh thì máy có thể chỉ cho ta một trong số các nghiệm. Nếu muốn biết tất cả, ta dùng lệnh *xem tất cả các giá trị* tập nghiệm với cú pháp

```
[> allvalues(");
```

và khi nghiệm là một số vô tỷ *chưa từng thấy bao giờ* thì máy đưa ra nghiệm tượng trưng dưới dạng $RootOf\{...\}$. Ta có thể biết giá trị xấp xỉ thập phân của nó (với độ chính xác tuỳ ý) bằng lệnh *đánh giá xấp xỉ thập phân* (đã giới thiệu ở trên).

Thí dụ Ta giải phương trình $x^4-x^3+6x^2-x+3=0$ bằng lệnh

[> **solve(x^4-x^3+6*x^2-x+3=0,{x});**

$$RootOf\{Z^4 - Z^3 + 6Z^2 - Z + 3\}$$

và để biết nó là gì ta dùng tiếp lệnh *xem xấp xỉ thập phân của tất cả các thành phần trong tập hợp trên*

[> **evalf(allvalues("));**

{*x* = *.4541395393-2.269448485*I*}, {*x* = *.4541395381+2.269448485*I*},

{*x* = *.4586046318e-1+.7469601590*I*}, {*x* = *.4586045942e-1-.7469601584*I*}

Nhận xét Rõ ràng trên đây là những phương trình mà không thể giải được bằng "mẹo" hay bằng "mò nghiệm", mà chỉ có thể giải bằng các phương pháp cơ bản với sự hỗ trợ của máy tính.

a. Thực hành

1) Kiểm tra các lệnh giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{5}$ dưới đây rồi thực hiện

[> **eqn:=sqrt(x)+sqrt(x-5)=sqrt(5);**
[> **solve(eqn,{x});**

hoặc dùng 1 lệnh sau

[>**solve(sqrt(x)+sqrt(x-5)=sqrt(5),{x});**

2) Kiểm tra các lệnh giải phương trình $2x + \sqrt{x-3} = 16$ dưới đây rồi thực hiện

[> **eqn:=2*x+sqrt(x-3)=16;**
[> **solve(eqn,{x});**

hoặc dùng 1 lệnh sau

[>**solve(2*x+sqrt(x-3)=16,{x});**

b. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Hãy giải các phương trình sau bằng cả 2 cách (dùng máy và không dùng máy)

1) $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$; 2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}$;

3) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x+3}{2}$; 4) $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$;

5) $1 + \sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}) = 2 + \sqrt{1-x^2}$. 6) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{x}} = \dfrac{x}{1-x}$.

2. Tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình f(*x*)< 0.

Sau đưa vào dấu nhắc " [> " thì nhập dòng lệnh khai báo và đặt tên cho bất phương trình $f(x) < 0$ cần giải

[> `ineq:=f(x)<0;`

Sau khi ấn phím "Enter" sẽ xuất hiện bất phương trình cần giải và dấu nhắc mới. Ta vào tiếp lệnh giải

[> `solve(ineq, {x});`

Sau khi ấn phím "Enter" máy sẽ hiện tập nghiệm của bất phương trình cần giải.

Lưu ý rằng dấu $\le$ được biểu thị trong câu lệnh bằng 2 dấu "<" và "=" đi liền nhau.

Thí dụ Ta giải bất phương trình $2\sqrt{x^2-4x+5} \le x^2-4x+2$ như sau

[> `ineq:=2*sqrt(x^2-4*x+5) <= x^2-4*x+2;`

$$ineq := 2\sqrt{x^2-4x+5} \le x^2-4x+2$$

[> `solve(ineq,{x});`

$$\{x \le 2-2\sqrt{2}\},\quad \{2+2\sqrt{2} \le x\}$$

a. Thực hành

1) Giải bất phương trình $\frac{x-1}{x} < \sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}}$ bằng các lệnh sau:

[> `ineq:=sqrt(x+1/x)-sqrt(x-1/x)>(x-1)/x;`
[> `solve(ineq,{x});`

3) Giải bất phương trình $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \le x$ bằng các lệnh

[> `ineq:=sqrt(1+x)-sqrt(1-x) <= x;`
[> `solve(ineq,{x});`

4) Giải bất phương trình $1-x \le \sqrt{x^4-2x^2+1}$ bằng các lệnh

[> `ineq:= 1-x <= sqrt(x^4-2*x^2+1);`
[> `solve(ineq,{x});`

b. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Giải các bất phương trình sau bằng cả 2 cách (dùng máy và không dùng máy)

1) $\sqrt{2x-1} < 2x-3$;

2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}$;

3) $\frac{1}{2} < \sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$;

4) $5-\sqrt{2x+4} < \sqrt{x+9}$;

5) $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x+\frac{1}{2x}+4$

3. Tìm tập hợp nghiệm của hệ phương trình và bất phương trình

Trước hết cần từng nhập phương trình của hệ, thí dụ:

[> `eqn1:=f[1](x,y)=0;`

[> **eqn2:=f[2](x,y);**

Sau đó ta ra lệnh giải có cú pháp như sau:

[> **solve({eqn1,eqn2},{x,y});**

Sau khi ấn phím "Enter" máy sẽ hiện tập nghiệm của hệ phương trình cần giải.

Với hệ có nhiều phương trình và nhiều ẩn ta cũng làm tương tự.

Thí dụ Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=5 \\ x+y=5 \end{cases}$$

bằng các lệnh như sau đây:

[> **eqn1 := sqrt(x)+sqrt(y)+sqrt(x*y)=5;**

$$eqnl := \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=5$$

[> **eqn2:=x+y=5;**

$$eqn2 := x+y=5$$

[> **solve({eqn1,eqn2},{x,y});**

$$\{y=4, x=1\}, \{x=4, y=1\} \quad .$$

Thí dụ Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{4x-7}<x \\ 4<\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x} \end{cases} \quad .$$

bằng các lệnh sau:

[> **ineq1:=sqrt(4*x-7)<x;**

$$ineq1 := \sqrt{4x-7}<x$$

[> **ineq2:=sqrt(x+5)+sqrt(5-x)>4;**

$$ineq2 := 4<\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}$$

[> **solve({ineq1,ineq2},{x});**

$$\{-4<x, x<4\} \quad , \quad \{4<x\} \quad .$$

Thực hành

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2} \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{y}=\sqrt{2} \end{cases}$$

bằng các lệnh:

[> **eqn1:=sqrt(x)+sqrt(2-y)=sqrt(2);**

[> **eqn2:=sqrt(2-x)+sqrt(y)=sqrt(2);**

[> **solve({eqn1,eqn2},{x,y});**

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$$

bằng các lệnh:

[> **qn1:=sqrt(x^2+y^2)+sqrt(2*x*y)=8*sqrt(2);**

[> **eqn2:=sqrt(x)+sqrt(y)=4;**

[> **solve({eqn1,eqn2},{x,y});**

CHƯƠNG 2

Dãy số và Chuỗi số

2.1. Giới hạn của dãy số

2.1.1. Dãy số

Dãy số là một tập vô hạn các số thực được đánh số và xếp thứ tự đánh số tăng dần.

Dãy số thường được ký hiệu là

$$\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$$

hay $\{ a_n \}_{n \geq 1}$ hoặc đơn giản hơn $\{ a_n \}$.

Cũng có thể xem dãy số là tập giá trị của hàm với biến số tự nhiên, được xếp theo thứ tự biến tăng dần: $a_n = f(n)$. Ta gọi a_n là *số hạng tổng quát* cũa dãy số, *n* là *chỉ số*.

Thí dụ Với hàm $f(n) = n$, ta có $a_n = n$, tức là có dãy $\{1,2,...,n,...\}$.

Với $a_n = 1$ khi n chẵn và $a_n = 0$ khi n lẻ ta có dãy $\{0,1,0,1,0,...\}$.

2.1.2. Giới hạn

Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{ a_n \}$ nếu với mỗi số dương ε bất kỳ ta có thể tìm được chỉ số n_o (phụ thuộc ε) sao cho $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (tức là $|a_n - a| < \varepsilon$) với mọi $n \geq n_o$.

Khi đó ta viết $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ và nói rằng dãy số $\{ a_n \}$ là *hội tụ* (tới *a*).

Thí dụ Với $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ta có $\lim a_n = 0$ vì với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, lấy n_o đủ lớn để $n_o > \dfrac{1}{\varepsilon}$ thì $|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ khi $n \geq n_o$.

Dễ dàng kiểm chứng rằng với $a_n = (-1)^n$ thì $\{ a_n \}$ không hội tụ.

Mệnh đề Nếu $\{ a_n \}$ hội tụ thì giới hạn của nó duy nhất.

<u>Chứng minh</u> Giả sử a và b là hai giới hạn của $\{a_n\}$ với $a > b$. Khi đó với $\varepsilon = \frac{1}{4}(a-b) > 0$ ta sẽ tìm được n_o sao cho $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ và với mọi $n \geq n_o$. Điều này vô lý vì $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (a-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$.

2.2. Tính chất của các dãy hội tụ

2.2.1. Tính giới nội

Dãy số $\{a_n\}$ gọi là <u>bị chặn trên</u> (<u>bị chặn dưới</u>) nếu tồn tại số c sao cho $a_n < c$ ($c < a_n$) với mọi n. Khi dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới ta nói nó <u>giới nội</u>.

Mệnh đề *Mọi dãy hội tụ đều giới nội.*

<u>Chứng minh</u> Giả sử $a = \lim a_n$. Lấy $\varepsilon = 1$, theo định nghĩa của giới hạn, tồn tại n_o sao cho $|a_n - a| < 1$ với mọi $n \geq n_o$. Đặt $c = \max\{|a_1|, ..., |a_{n_o}|, |a| + 1\}$ ta có $|a_n| < c$ với mọi n=1,2,... Vậy $\{a_n\}$ giới nội.

Chú ý Không phải dãy giới nội nào cũng hội tụ, như dãy $\{(-1)^n\}$ chẳng hạn.

2.2.2. Tính bảo toàn thứ tự

Mệnh đề *Giả sử $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ và $a_n \geq b_n$ với mọi $n \geq n_o$ nào đó. Khi ấy $a \geq b$.*

<u>Chứng minh</u> Giả sử ngược lại là $a < b$. Lấy $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Theo định nghĩa, tồn tại $n_1 > n_o$ đủ lớn để $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ và $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ với mọi $n \geq n_1$. Dĩ nhiên $a+\varepsilon < b-\varepsilon$. Do vậy $a_n < b_n$ với $n \geq n_1$, mâu thuẫn với giả thiết, như vậy $a \geq b$.

2.3. Dãy nhỏ vô cùng và dãy lớn vô cùng

2.3.1. Dãy nhỏ vô cùng

Ta nói $\{a_n\}$ là dãy <u>nhỏ vô cùng</u> nếu nó hội tụ tới 0.

Giả sử $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy bất kỳ. Khi đó các dãy $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{a_n / b_n\}$ (khi $b_n \neq 0$) gọi là dãy tổng, hiệu, tích và thương của hai dãy trên.

Nhận xét $\{a_n\}$ hội tụ tới a khi và chỉ khi dãy $\{a_n - a\}$ nhỏ vô cùng.

Mệnh đề *Giả sử $\{a_n\}$ là dãy nhỏ vô cùng. Khi đó:*

i. Nếu $\{b_n\}$ là dãy nhỏ vô cùng thì $\{a_n + b_n\}$ cũng là nhỏ vô cùng;

ii. Nếu $\{b_n\}$ giới nội thì $\{a_n b_n\}$ là dãy nhỏ vô cùng.

Chứng minh Giả sử { a_n } và { b_n } nhỏ vô cùng, khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, ta tìm được N_1 để $a_n \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ khi $n \geq N_1$ và tìm được N_2 để $b_n \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ khi $n \geq N_2$. Do đó $a_n + b_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ khi $n \geq \max(N_1, N_2)$, chứng tỏ $\lim(a_n + b_n) = 0$, tức là { $a_n + b_n$ } nhỏ vô cùng.

Bây giờ giả sử { a_n } nhỏ vô cùng, còn { b_n } giới nội, tức là có số *c* để $|b_n| \leq c$ với mọi *n*. Cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ ta tìm được N_1 để $a_n \in [-\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}]$ khi $n \geq N_1$. Vậy $a_n b_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ khi $n \geq N_1$, chứng tỏ $\lim a_n b_n = 0$ và { $a_n b_n$ } là nhỏ vô cùng.

Hệ quả *Nếu { a_n } nhỏ vô cùng và { b_n } hội tụ thì tích { $a_n b_n$ } nhỏ vô cùng.*

Chứng minh Ta có { a_n } *nhỏ vô cùng và* { b_n } giới nội. Theo mệnh đề trên { $a_n b_n$ } nhỏ vô cùng.

2.3.2. Dãy lớn vô cùng

Ta gọi { a_n } là dãy lớn vô cùng nếu với mọi số dương α ta có thể tìm được N để $|a_n| > \alpha$ với mọi $n \geq N$.

Dãy dương (dãy âm) lớn vô cùng nếu đó là dãy lớn vô cùng và với *n* đủ lớn $a_n > 0$ $(a_n < 0)$. Khi đó ta viết $\lim a_n = +\infty$ $(\lim a_n = -\infty)$.

Nhận xét 1) { a_n } là dãy lớn vô cùng khi và chỉ khi { $\frac{1}{a_n}$ } là dãy nhỏ vô cùng.

2) { a_n } và { b_n } là những dãy lớn vô cùng đồng dấu (dương hoặc âm), thì { $a_n + b_n$ } là dãy lớn vô cùng.

3) { a_n } là dãy lớn vô cùng, { b_n } hội tụ với giới hạn khác không thì { $a_n b_n$ } lớn vô cùng.

2.4. Một số quy tắc tính giới hạn

2.4.1. Các phép tính

Mệnh đề *Cho* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. *Khi đó:*

$$\lim(a_n + b_n) = a + b, \ \lim(a_n - b_n) = a - b \ ;$$

$$\lim(a_n b_n) = ab, \ \lim(a_n / b_n) = a / b \ (\text{khi } b \neq 0).$$

Chứng minh Ta có { $(a_n - a)$ } và { $(b_n - b)$ } là những dãy nhỏ vô cùng. Cho nên

$$\{ (a_n + b_n) - (a + b) \}, \ \{ (a_n - b_n) - (a - b) \},$$

$$\{ (a_n b_n - ab) \}, \{ (a_n - b_n) - (a - b) \}, \ \{ (a_n b_n - ab) \}$$

là những dãy nhỏ vô cùng. Do đó:

$$\lim(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim(a_n - b_n) = a - b, \quad \lim(a_n b_n) = ab\ .$$

Khi $b \neq 0$ ta tìm được $\alpha > 0$ để $|b_n| > \alpha$ với mọi n đủ lớn. Do đó

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b.b_n}(ba_n - b_n a) = \frac{1}{b.b_n}(b(a_n - a) - a(b_n - b))$$

và $\left\{\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ là dãy nhỏ vô cùng, vì $\left|\dfrac{1}{b.b_n}\right|$ bị chặn bởi $\left|\dfrac{1}{b\alpha}\right|$ và các dãy $\{\,(a_n - a)\,\}$, $\{\,(b_n - b)\,\}$ là nhỏ vô cùng. Chứng tỏ $\lim\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

2.4.2. Hai nguyên lý cơ bản về giới hạn

Ta gọi $\{\,a_n\,\}$ là dãy không giảm (không tăng) nếu $a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n)$. Nếu bất đẳng thức luôn luôn chặt ta sẽ có dãy đơn điệu tăng (đơn điệu giảm).

Định lý (Weierstrass): *Mọi dãy không giảm và bị chặn trên (không tăng và bị chặn dưới) đều hội tụ.*

Chứng minh Ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp dãy *không giảm và bị chặn trên* (trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Khi tập $A = \{a_n : n = 1,2,...\}$ bị chặn trên thì $\alpha = \sup A$ tồn tại (hữu hạn). Ta có $\alpha \geq a_n$ với mọi n, và với bất kỳ $\varepsilon > 0$, tìm được N để $a_N \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$. Nhưng $\{\,a_n\,\}$ không giảm nên $a_n \geq a_N$ tức là $a_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$ với mọi $n \geq N$. Điều này chứng tỏ $\lim a_n = \alpha$.

Định lý đã được chứng minh xong.

Chú ý Nếu $\{a_n\}$ không giảm (không tăng) và không bị chặn trên (dưới) thì $\lim a_n = +\infty$ $(\lim a_n = -\infty)$.

Định lý *Giả sử $\lim a_n = \lim b_n = a$ và tồn tại chỉ số n_o để sao cho khi $n > n_o$ thì c_n bị kẹp giữa a_n và b_n (tức là $a_n \leq c_n \leq b_n$). Khi đó $\{\,c_n\,\}$ hội tụ và $\lim c_n = a$.*

Chứng minh Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N_1, N_2 sao cho $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ khi $n \geq N_1$ và $b_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ khi $n \geq N_2$. Lấy $N_0 = \max(N_1, N_2)$ ta có $a_n, b_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ với mọi $n \geq N_0$. Thế nhưng $a_n \leq c_n \leq b_n$ khi $n \geq n_0$, nên $c_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, với mọi $n \geq \max(N_0, n_0)$. Chứng tỏ a là giới hạn của $\{c_n\}$.

Định lý đã được chứng minh xong.

Lưu ý Hai nguyên lý trên tuy đơn giản nhưng có ý nghĩa vô cùng quan trọng. Nó chính là "chìa khoa" cho ta tính giới hạn của hầu hết các dãy (và sau này là các hàm) không tầm thường mà chúng ta sẽ gặp trong suốt giáo trình giải tích.

2.4.3. Một số ví dụ về tính giới hạn của dãy số

Thí dụ 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{c}{n^2}\right)^n = 1, \qquad \forall c \in \mathbb{R},$

Thật vậy, bất đẳng thức Bernoulli (dễ dàng chứng minh bằng quy nạp) nói rằng

$$(1+a)^n \geq 1+a.n\,, \qquad \forall a \in [-1,1]\,, \quad \forall n \in N\,.$$

Cho nên khi n đủ lớn ta có $|c| \leq n^2$, và

$$\left(1+\frac{c}{n^2}\right)^n \geq \left(1-\frac{|c|}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{|c|}{n^2}.n = 1-\frac{|c|}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,,$$

$$\left(1+\frac{c}{n^2}\right)^n \leq \left(1+\frac{|c|}{n^2}\right)^n = \frac{1}{\left(\dfrac{n^2}{n^2+|c|}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{|c|}{n^2+|c|}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\dfrac{n.|c|}{n^2+|c|}} \to 1\cdot$$

Từ tính chất của *dãy số bị kẹp giữa 2 dãy số có cùng giới hạn* ta suy ra điều cần chứng minh.

Thí dụ 2 Xét dãy số $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Bằng cách khai triển theo nhị thức Newton

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}n^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

và so sánh trực tiếp ta thấy ngay $u_n < u_{n+1}$ và

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 2+\sum_{k=1}^{n=1}\frac{1}{k.(k+1)} = 2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k.}-\frac{1}{k+1}\right) = 3-\frac{1}{n} < 3\,,$$

với mọi số n. Như vậy dãy số *tăng và bị chặn trên*, cho nên giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ tồn tại. Người ta ký hiệu giới hạn này là **e**. Đây là một số khá đặc biệt mà chúng ta sẽ gặp thường xuyên trong chương trình giải tích.

Thí dụ 3 Với mỗi số dương x ta xét dãy số $v_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Tương tự như trên, ta thấy ngay dãy là đơn điệu tăng. Mặt khác, nó cũng bị chặn trên. Thực vậy, lấy số nguyên dương $N>x$, ta có

$$v_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{N}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{N}{n}\right)^{\frac{n}{N}}\right]^N,$$

và sẽ có $v_n < 3^N$ với mọi n đủ lớn, nếu như với mọi số hữu tỷ q đủ lớn bất đẳng thức sau luôn xảy ra

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^q < 3 \quad .$$

Điều này được suy ra từ nhận xét rằng luôn tìm được số tự nhiên n sao cho $n \le q \le n+1$ và

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^q < \left(1+\frac{1}{n}\right)^q < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) < e\left(1+\frac{1}{n}\right) = e+\frac{e}{n} < 3\,,$$

khi n đủ lớn.

Như vậy dãy v_n là *tăng và bị chặn trên*, cho nên nó có giới hạn.

Thí dụ 4 Với số dương x ta xét dãy số $b_n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$.

Chú ý rằng

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

cho nên từ sự tồn tại của các giới hạn trong các Thí dụ 1,3 và công thức tính giới hạn của thương ta suy ra tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^{-1} .$$

Mệnh đề *Giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *tồn tại với mọi số thực x.*

<u>Chứng minh</u> Mệnh đề trên là sự tổng hợp các kết quả của các Thí dụ 3,4.

Mệnh đề *Với mọi số thực a,b ta có đẳng thức sau*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n .$$

<u>Chứng minh</u> Chú ý rằng phương pháp chứng minh trong Thí dụ 1 cho thấy kết quả vẫn đúng với c không phải là hằng số mà là một đại lượng bị chặn khi n tiến ra vô cùng, cho nên với $c=\dfrac{bn}{n+a}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}.\frac{bn}{a+n}\right)^n = 1 \quad .$$

Từ đây ta có ngay điều cần chứng minh.

Hệ quả $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n . \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$.

Chứng minh Sử dụng mệnh đề trên với $a=x+y$, $b=x.y$ ta sẽ có

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n . \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n .$$

2.5. Các khái niệm liên quan và tiêu chuẩn Cauchy

2.5.1. Dãy con

Giả sử $\{ a_n \}$ là dãy số và $n_1 < n_2 < ...$ là những số tự nhiên. Khi đó $\{ a_{n_i} \}$ được gọi là *dãy con* của $\{ a_n \}$.

Mệnh đề $\lim a_n = a$ *khi và chỉ khi mọi dãy con* $\{ a_{n_i} \}$ *đều hội tụ tới a.*

Chứng minh Giả sử $\{ a_n \}$ hội tụ tới a và $\{ a_{n_i} \}$ là một dãy con. Cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta tìm được n_0 để $a_i \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ khi $i > n_0$. Hiển nhiên là $n_i \geq i \geq n_0$, do vậy $a_{n_i} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, với mọi $n_i \geq n_0$. Chứng tỏ $\lim a_{n_i} = a$.

Trái lại, giả sử mọi dãy con hội tụ tới a, vì $\{ a_n \}$ cũng là dãy con của chính nó nên $\lim a_n = a$.

2.5.2. Điểm tụ

Ta nói a là điểm tụ của dãy số $\{ a_n \}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $k > 0$ ta tìm được $n > k$ để $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Chú ý Nếu a là giới hạn của $\{ a_n \}$ thì a là điểm tụ của dãy này nhưng trái lại không đúng, thí dụ với $a_n = (-1)^n$ thì cả điểm 1 và -1 đều là những điểm tụ của $\{ a_n \}$ nhưng rõ ràng dãy này không có giới hạn.

Mệnh đề *Điểm a là điểm tụ của* $\{ a_n \}$ *khi và chỉ khi có dãy con của* $\{ a_n \}$ *hội tụ tới a.*

Chứng minh Giả sử a là điểm tụ của $\{a_n\}$.

Lấy $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ta tìm được $a_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$. Dễ thấy $\{a_{n_k}\}$ hội tụ tới a. Ngược lại nếu có dãy con $\{a_{n_i}\}$ hội tụ tới a thì với mọi $\varepsilon > 0$, ta tìm được n_0 để $a_{n_i} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

khi $n_i \geq n_0$. Với $\varepsilon > 0$ và k cho trước chỉ cần lấy $n_i \geq \max(n_0, k)$ là ta có $a_{n_i} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Chứng tỏ a là điểm tụ.

Định lý (Bolzano-Weierstrass): *Mọi dãy giới nội đều có điểm tụ.*

Chứng minh Giả sử $a_n \in [\alpha, \beta]$ với mọi n. Đặt $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta$. Chia đôi $[\alpha_1, \beta_1]$. Ký hiệu $[\alpha_2, \beta_2]$ là nửa chứa vô số a_n. Lại chia đôi $[\alpha_2, \beta_2]$ và ký hiệu $[\alpha_3, \beta_3]$ là nửa chứa vô số phần tử của { a_n },...

Ta có $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{2^n}(\alpha - \beta); \{\alpha_n\}$ là dãy số không giảm, { β_n } là dãy số không tăng.

Chúng bị chặn nên tồn tại giới hạn $a = \lim \alpha_n, b = \lim \beta_n$. Do $\lim(\beta_n - \alpha_n) = 0$ ta có $a = b$. Rõ ràng a là điểm tụ.

2.5.3. Tiêu chuẩn hội tụ (Cauchy)

Định nghĩa *Dãy { a_n } gọi là dãy cơ bản (dãy Cauchy) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại n_0 sao cho $|a_n - a_m| < \varepsilon$ với mọi $n, m \geq n_0$.*

Định lý *Dãy { a_n } hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản.*

Chứng minh Giả sử $\lim a_n = a$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta có thể tìm được số n_0 để $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $m, n > n_0$. Do vậy $|a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Trái lại, khi { a_n } là *dãy cơ bản* thì nó giới nội. Thật vậy, lấy $\varepsilon = 1$ ta tìm được số N sao cho $|a_n - a_N| < 1$ với mọi $n > N$. Đặt

$$c = \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a_N| + 1\},$$

ta có $|a_n| \leq c$ với mọi n. Theo Định lý Bolzano-Weierstrass sẽ tồn tại một dãy con của dãy { a_n } là { $a_{n(i)}$ } hội tụ tới a chẳng hạn. Ta sẽ chứng minh rằng chính dãy { a_n }cũng hội tụ tới a. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được số i_o để $a_{n(i)} \in (a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$ khi $i \geq i_0$. Cũng với $\varepsilon > 0$ trên, do { a_n } là dãy cơ bản, ta lại tìm được M để $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, với mọi $n, m \geq M$. Lấy $n_1 = \max(M, n(i_0))$, với $n \geq n_1$ ta có

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n(i)}| + |a_{n(i)} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim a_n = a$.

2.5.4. Giới hạn trên và giới hạn dưới

Điểm a gọi là giới hạn trên (giới hạn dưới) của $\{a_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi k ta tìm được $n_0 > 0$ và $n_k > k$ để $a_n \le a + \varepsilon, (a_n \ge a - \varepsilon)$, với mọi $n \ge n_0$ và $a_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Ký hiệu giới hạn trên là $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ hay $\overline{\lim} a_n$, giới hạn dưới là $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ hay $\underline{\lim} a_n$.

Định lý *Dãy số $\{a_n\}$ là hội tụ khi và chỉ khi*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n .$$

<u>Chứng minh</u> Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ tới a. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta tìm được N để $a_n \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ với mọi $n > N$. Do vậy $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ và $a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Trái lại, nếu $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, thì cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ ta sẽ tìm được các số N_1, N_2 sao cho

$$a_n \le a + \varepsilon \text{ với mọi } n \ge N_1 \text{ và } a_n \ge a - \varepsilon \text{ với mọi } n \ge N_2 .$$

Lấy N là số lớn hơn cả hai số N_1, N_2, ta thấy $a_n \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ mỗi khi $n > N$. Điều này chứng tỏ $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Thí dụ Sử dụng định lý trên ta thấy rằng dãy $\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ không hội tụ, vì

$$\lim_{n\to\infty}\sup(-1)^n(1+\frac{1}{n}) = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty}\inf(-1)^n(1+\frac{1}{n}) = -1 .$$

2.6. Chuỗi số

2.6.1. Khái niệm

Cho $\{a_n\}$ là một dãy. Ta gọi $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ là *<u>tổng riêng</u>*. Nếu dãy $\{S_n\}$ *<u>hội tu</u>* tới S (hữu hạn) thì ta nói chuỗi số $a_1 + a_2 + ...,$ là *<u>hội tu</u>* và gọi S là *tổng* của <u>chuỗi số</u>.
Ký hiệu

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Nếu dãy $\{S_n\}$ không hội tụ, ta nói chuỗi *<u>phân kỳ</u>*.

Thí dụ a) $a_n = \frac{1}{2^n}, S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n .$

Dễ dàng chứng minh rằng

$$\lim S_n = \lim(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) = 1 ,$$

cho nên chuỗi hội tụ và $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

b) $a_n=1, S_n=n$ tiến tới ∞ . Vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ là phân kỳ.

2.6.2. Một số tính chất

Mệnh đề *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *hội tụ thì chuỗi tổng* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *là hội tụ và*

$$\sum_{n-1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n .$$

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *thì với mọi số* α, *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\ \ a_n$ *cũng hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\ \ a_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n .$$

<u>Chứng minh</u> Gọi $S_n^a, S_n^b, S_n^{a+b}, S_n^{\alpha\ \ a}$ là tổng riêng của các chuỗi nêu trong định lý.

Khi ấy: $S_n^{a+b}=S_n^a+S_n^b$,

$S_n^{\alpha\ \ a}=\alpha\ \ S_n^a$.

Dùng các tính chất của dãy hội tụ ta sẽ có

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{a+b}=\lim_{n\to\infty}S_n^a+\lim_{n\to\infty}S_n^b \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty}S_n^{\alpha\ \ a}=\alpha\lim_{n\to\infty}S_n^a .$$

Từ đây rút ra kết luận của mệnh đề.

Mệnh đề *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

<u>Chứng minh</u> Nếu chuỗi trên hội tụ thì các dãy tổng riêng { S_n } và { S_{n+1} } đều hội tụ tới một giới hạn $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Do vậy:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim(S_{n+1}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0 .$$

Chú ý Từ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ chưa thể suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ. Thí dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ, mặc dù $a_n=\frac{1}{n}$ là hội tụ đến 0. Thật vậy:

$$e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ suy ra } 1>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ hay } \frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln(n) .$$

Từ đây ta có $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > \ln(n+1)$

Do đó $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, nghĩa là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

2.7. So sánh chuỗi

2.7.1. So sánh trực tiếp

Mệnh đề *Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và $|b_n| \le a_n$ với mọi n, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.*

Chứng minh Ta chứng minh dãy tổng riêng $\{ \sum_{i=1}^{n} b_i \}$ hội tụ. Thật vậy, với n và m bất kỳ:

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n+m} b_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} b_{n+i} \right| \le \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} .$$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, từ tiêu chuẩn Cauchy ta suy ra ngay điều cần chứng minh.

Thí dụ Chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^{2n}}$ hội tụ.

Ta biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ tới 1. So sánh hai chuỗi ta có:

$$\left| \frac{(-1)^n n^3}{3^{2n}} \right| = \frac{1}{3^n} \frac{n^3}{3^n} \le \frac{1}{2^n} .$$

Theo định lý $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^{2n}}$ hội tụ.

2.7.2. So sánh tỷ số

Mệnh đề *Cho hai chuỗi bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ với $b_n > 0$.*

(i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} < \infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ;

(ii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ và $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} > 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Chứng minh Giả thiết $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \alpha$. Khi ấy tồn tại số $\beta > \alpha$ để $|a_n| \le \beta b_n$ với mọi *n*. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, và theo định lý so sánh trực tiếp $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

Trong trường hợp sau, do $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} > 0$ ta tìm được số $n_0 \ge 1$ và $\varepsilon > 0$ để $\frac{1}{\varepsilon} a_n \ge b_n$ với mọi $n \ge n_0$. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ. Theo định lý so sánh trực tiếp, $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ hội tụ, và do đó $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, trái với giả thiết $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ. Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Thí dụ Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{2n}}$.

Ta biết rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ. Hơn nữa $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3/3^{2n}}{1/2^n} = 0$. Do vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{2n}}$ hội tụ.

2.7.3. Chuỗi đan dấu

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *gọi là chuỗi đan dấu nếu* $a_{2n} < 0, a_{2n+1} > 0$ *(hoặc* $a_{2n} > 0, a_{2n+1} < 0$ *) với mọi n.*

Để tiện lợi nhiều khi người ta viết chuỗi đan dấu dưới dạng $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ với $a_n > 0$.

Mệnh đề *Giả sử chuỗi đan dấu* $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ *với* $a_n > 0$ *thỏa mãn các tính chất sau:*

i) *Dãy* $\{a_n\}$ *là dãy giảm;*

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Khi đó chuỗi hội tụ.

Chứng minh Xét các tổng riêng S_{2n} và S_{2n+1} ta có:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

Nhận xét rằng $\{S_{2n}\}$ là một dãy tăng, bị chặn trên bởi a_1. Do đó $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ tồn tại.

Hơn nữa $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, nên

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Do dãy { S_{2n} } và dãy { S_{2n+1} } vét hết dãy { S_n }, chúng lại cùng có giới hạn S, nên ta kết luận $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ và chứng tỏ chuỗi cho trước hội tụ.

Thí dụ Xét hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Đây là chuỗi đan dấu, thỏa mãn mọi yêu cầu của định lý, nên chuỗi hội tụ.

2.7.4. Chuỗi hội tụ tuyệt đối

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *gọi là <u>hội tụ tuyệt đối</u> nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *hội tụ.*

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ mà chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *phân kỳ thì ta nói chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ không tuyệt đối.*

Thí dụ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ hội tụ tuyệt đối vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ không tuyệt đối vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Mệnh đề *Mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.*

<u>Chứng minh</u> Xét dãy tổng riêng { S_n } của chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và dãy tổng riêng { $\bar{S}_n$ } của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ta có $|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + ... + a_{n+m}| \le \left|\bar{S}_{n+m} - \bar{S}_n\right|$. Vì dãy { $\bar{S}_n$ } hội tụ, nên đó là dãy cơ bản. Do vậy { S_n } cũng là dãy cơ bản và suy ra dãy { S_n } hội tụ. Chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 2

1. Dãy số

1.1. Câu hỏi củng cố lý thuyết

Bài 1 Viết bốn số hạng đầu của dãy có số hạng tổng quát sau:

1) $1+(-1)^n$; 2) $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$; 3) $e^{\sin\frac{n\pi}{2}}$; 4) $\dfrac{2^n}{n!}$.

Bài 2 Trong những mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, giải thích:

1. Một dãy hội tụ thì giới nội.
2. Một dãy giới nội thì hội tụ.
3. Một dãy dần ra vô cùng thì không bị chặn.
4. Một dãy không bị chặn thì dần ra vô cùng.
5. Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ là $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+k} = a$ với k là một số tự nhiên cố định nào đó.
6. Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ là $\lim\limits_{n_k\to\infty} u_{n_k} = a$ với $\{n_1\}$ là một dãy con của dãy số tự nhiên.
7. Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ (a hữu hạn hoặc vô hạn) là

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = a \text{ và } \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = a .$$

Bài 3 Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ, dãy $\{y_n\}$ phân kỳ. Có thể nói gì về sự hội tụ của các dãy $\{u_n\}$ với:

1) $u_n = x_n + y_n$; 2) $u_n = x_n y_n$.

Bài 4 Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, a \neq 0$. Hãy chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Với $a = 0$ hãy chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tồn tại thì $-1 \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$. Với mỗi $|q| \le 1$ hãy tìm ví dụ chỉ ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Tuy nhiên, hãy lấy ví dụ chứng tỏ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ có thể không tồn tại.

Bài 5 Tồn tại hay không giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$.

Bài 6 Chứng minh các dãy sau đây là nhỏ vô cùng:

1) $u_n = \frac{1}{n}$; 2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 3) $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$;

4) $u_n = \sin\frac{\pi}{n}$; 5) $u_n = nq^n$ với $|q| < 1$.

Bài 7 Chứng minh các dãy sau là lớn vô cùng:

1) $u_n = (-1)^n n$; 2) $u_n = 2^n$; 3) $u_n = \ln\ln n$;

4) $u_n = n^\alpha$ với $\alpha > 0$; 5) $u_n = q^n$ với $|q| > 1$.

Bài 8 Gọi u_n là số hạng tổng quát của cấp số cộng. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. Điều đó còn đúng với cấp số nhân không?

Bài 9 Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = |a|$. Ngược lại có đúng không?

1.2. Tính giới hạn của dãy

Bài 1 Tính các giới hạn sau:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-7}{7n^2-2n+6}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-2^n}{5+2^{n+1}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)})$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n.\sin n!}{n^2+1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{n^2})$.

Bài 2 Tìm các số thực b,c,d sao cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi công thức

$$a_n = \frac{n+b}{cn+d} \quad (n=1,2,3...)$$

thoả mãn điều kiện:

$$a_1 = \frac{3}{8} \text{ và } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Bài 3 Chứng minh

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

1.3. Dãy đơn điệu và dãy bị chặn

Bài 1 Chứng minh dãy $u_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2+2}$ là dãy đơn điệu tăng. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 2 Cho a và b là hai số dương $(a < b)$. Hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được xác định như sau:

$$u_0 = a, v_0 = b, u_{n+1} = u_n v_n, v_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2}.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{a+b}{2}.$$

Bài 3 Tìm giới hạn của các dãy sau:

1) 0,3; 0,33; 0,333;...;

2) $\sqrt{2}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$;...

Bài 4 Tìm tất cả những a_0 thuộc $\mathbb{R}$ sao cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi công thức

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n, \ n \text{ là số tự nhiên},$$

là dãy số tăng.

Bài 5 Chứng minh rằng dãy $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $n = 1,2,...$ đơn điệu tăng và bị chặn trên, còn dãy $x_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $n = 1,2,...$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

Bài 6 Chứng minh rằng một dãy đơn điệu sẽ hội tụ nếu nó có một dãy con hội tụ.

1.4. Tiêu chuẩn Cauchy

Bài 1 Chứng minh sự hội tụ của các dãy sau bằng tiêu chuẩn Cauchy:

1) $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + ... + \dfrac{\sin n}{2^n}$; 2) $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1.2} + \dfrac{\cos 2!}{2.3} + ... + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$;

3) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

Bài 2 Dùng tiêu chuẩn Cauchy, hãy chứng minh sự phân kỳ của các dãy sau:

1) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + ... + \dfrac{1}{\ln n}$.

1.5. Giới hạn trên, giới hạn dưới

Bài 1 Chứng minh rằng

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

Hãy chỉ ra các ví dụ chứng tỏ có các dấu bất đẳng thức thật sự.

Bài 2 Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tồn tại thì với mọi dãy $\{y_n\}$ ta luôn có

1) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

2) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n . y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n . \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$.

Ngược lại, cho trước dãy $\{x_n\}$, nếu với mỗi dãy $\{y_n\}$ ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau được thoả mãn

1') $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

2') $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n . y_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \quad (x_n \ge 0)$

thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài 3 Chứng minh rằng nếu $x_n > 0$ và $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1$ thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài 4 Tìm giới hạn trên và giới hạn dưới của các dãy sau:

1) $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = (-1)^n (2 + \dfrac{3}{n})$; 3) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos\dfrac{n\pi}{2}$.

1.6. Bài tập nâng cao

Bài 1 Chứng minh rằng với mỗi số n nguyên dương cho trước phương trình

$$x^{(2n+1)} = x + 1$$

có đúng một nghiệm thực x_n. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bài 2 Cho dãy số được xác định bởi $x_1 = 1, x_{n+1} = \dfrac{x_n{}^2}{1997} + x_n$ với mọi $n > 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i+1}}$.

Bài 3 Dãy số bị chặn thoả mãn điều kiện: $2x_{n+2} \le x_n + x_{n+1}$ với mọi $n > 1$ có nhất thiết hội tụ không?

Bài 4 Trong dãy số dương, a_n hoặc bằng $\dfrac{a_{n-1}}{2}$ hoặc bằng $\sqrt{a_{n-1}}$. Dãy số này có thể có giới hạn thuộc khoảng (0,1) không?

Bài 5 Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$ và $a_n = \dfrac{\prod_{i=n}^{n} f(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n} f(2i)}$. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} na_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 6 Cho số tự nhiên $3 \le c$. Dãy số tự nhiên $\{a_n\}$ được xây dựng như sau:

$a_1 = c,\ a_n = a_{n-1} - \left[\dfrac{a_{n-1}}{2}\right] + 1,\ n = 2,3...$ ($[x]$ là ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Bài 7 Cho số thực a thuộc khoảng (0,1). Dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức

$$x_0 = a, x_n = \frac{4\left(\arccos x_{n-1} + \dfrac{\pi}{2}\right) + \arcsin x_{n-1}}{\pi^2}, n = 1,2,...$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Bài 8 Cho số thực a. Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức:

$$x_0 = a, x_{n+1} = \left|x_n - 2^{(-n)}\right| \text{ với mọi } n=0,1,...$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và hãy tìm giới hạn ấy.

Bài 9 Cho dãy $x_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right), x_{n+1} = 3x_n - 1$. Tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Bài 10 Cho dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn $1 < x_n < 2$ và $x_{n+1} = 1 + x_n = \dfrac{x_n^2}{2}$ với mọi $1 \le n$.

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Tính giới hạn của dãy.

Bài 11 Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}}.$$

Chứng minh rằng tồn tại $\lim_{n\to\infty} x_n$. Hãy tìm giới hạn đó.

2. Chuỗi và tổng của chuỗi

2.1. Chứng minh trực tiếp sự hội tụ của các chuỗi sau và tính tổng

Bài 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+2)}$.

Bài 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3}$.

Bài 3 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2.2. Chứng minh sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi bằng dấu hiệu so sánh và tính tổng các chuỗi hội tụ

Bài1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$.

Bài 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)n}$.

Bài 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Bài 4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Bài 5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$.

Bài 6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n}{3^n}$.

Bài 7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

2.3. Chứng minh sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi bằng tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, giả sử $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=C$.

1) Nếu C < 1 thì chuỗi hội tụ;

2) Nếu C > 1 thì chuỗi phân kỳ;

3) Nếu C = 1 thì chưa có kết luận về sự hội tụ của chuỗi.

Hãy chứng minh sự hội tụ của các chuỗi sau theo tiêu chuẩn Cauchy:

Bài 1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$.

Bài 2 $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{n+1}{n-1})^{n(n+1)}$.

Bài 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{\ln^n n}}$.

2.4. Chứng minh sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi bằng tiêu chuẩn D'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, giả sử $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D$.

1) Nếu D < 1 thì chuỗi hội tụ;

2) Nếu D > 1 thì chuỗi phân kỳ;

3) Nếu D = 1 thì chưa có kết luận về sự hội tụ của chuỗi.

Dùng tiêu chuẩn D'Alembert hãy xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

Bài 1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$.

Bài 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{3i+1}{4i-2}\right)$.

Bài 3 $\sum_{n=1}^{\infty}nx\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 ka}{1+x^2+\cos^2 ka}\right)$.

2.5. Bài tập nâng cao

Tính các tổng sau:

Bài 1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

Bài 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{(n+p)}}$.

Bài 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{\prod_{i=1}^{n}(2+\sqrt{i})}$.

Bài 4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}(p+i-1)\right)$.

Bài 5 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n}2i}\right)^p\frac{1}{n^p}$.

Bài 6 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{2^{n^2}}.$$

Bài 7 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}.$$

Bài 8 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}.$$

Bài 9 Tìm x để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ là hội tụ.

Bài 10 Tìm x để chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\cos nx$ là hội tụ.

Bài 11 Dãy $\{b_n\}$ có tính chất: $0 < b_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Hãy xây dựng dãy $\{a_n\}, 0 < a_n$, với $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = +\infty$.

3. Thực hành tính toán trên máy

3.1. Tính giới hạn của dãy

Sau khi đưa vào cụm xử lý (như đã nói ở phần thực hành tính toán trong Chương 1) tại dấu nhắc " [> " ta đưa vào dòng lệnh có cú pháp dưới đây (trong đó a[n] là số hạng tổng quát của dãy)

```
[> limit(a[n],n=infinity);
```

Chú ý đừng quên dấu chấm phẩy (;) ở cuối dòng lệnh. Sau dấu này ấn phím "Enter" thì việc tính giới hạn của dãy sẽ được thực hiện và ta sẽ có ngay đáp số.

Thí dụ Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

```
[> limit(sqrt(n)*(sqrt(n+1)-sqrt(n)),n=infinity);
```

$$\frac{1}{2}$$

Muốn có được biểu thức hiển về giới hạn của dãy, ta vào lệnh sau:

```
[> Limit(a[n],n=infinity);
```

Chú ý Chỉ việc thay chữ cái "L" vào "l" trong từ "limit".

Thí dụ

```
[>Limit(sqrt(n)*(sqrt(n+1)-sqrt(n)),n=infinity);
```

Ấn phím "Enter" sau dấu chấm phẩy (;) ở cuối dòng lệnh,máy sẽ hiện biểu thức cần tính giới hạn:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

Sau đó đánh lệnh

```
[> value("):
```

máy sẽ hiện đáp số: $\frac{1}{2}$

Để cho công việc được mô tả một cách tường minh hơn (và sẽ tránh được nhầm lẫn đối với các bài toán cồng kềnh) ta hãy tiến hành qua các bước sau:

Bước 1: Gán tên cho số hạng tổng quát của dãy bằng lệnh:

```
[> a[n]:=sqrt(n)*(sqrt(n+1)- sqrt(n));
```

Ấn phím "Enter" sau dấu chấm phẩy (;) ở cuối dòng lệnh,máy hiện số hạng tổng quát của dãy số:

$$a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

Bước 2: Đánh lệnh:

```
[> limit(a[n],n=infinity);
```

Ấn phím "Enter" sau dấu chấm phẩy (;) ở cuối dòng lệnh,máy hiện đáp số:

$$\frac{1}{2}$$

3.2. Tính tổng của chuỗi

Để thực hành việc tính tổng của k số hạng đầu của một chuỗi số, hãy vào dòng lệnh có cú pháp dưới đây:

```
[> sum(a[n], n=1..k);
```

(trong đó $a[n]$ là số hạng tổng quát của tổng).

Muốn tính giá trị của chuỗi có số hạng tổng quát là a[n] thì ta cũng làm tương tự như trên, chỉ khác ở chỗ ta thay k bằng infinity, tức là đưa vào dòng lệnh sau:

```
[> sum(a[n], n=1..infinity) ;
```

Sau dấu chấm phẩy (;) ta ấn phím "Enter" thì việc tính tổng sẽ được thực hiện và ta sẽ có đáp số .

Thí dụ

```
[> sum(1/(n^2),n=1..10);
```

$$\frac{1968329}{1270080}$$

```
[> sum(1/(n^2),n=1..infinity);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

Muốn có biểu thức tường minh của chuỗi, hãy thao tác như trong phần giới hạn của dãy.

CHƯƠNG 3

Tôpô trên trục số thực

3.1. Tập đóng, tập mở

3.1.1. Tập đóng

Cho $A \subseteq \mathbb{R}$. Ta nói A là <u>*tập đóng*</u> nếu mọi dãy hội tụ trong A có giới hạn thuộc A.

Thí dụ Với $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ thì <u>*đoạn*</u> $[a,b] := \{ x : a \le x \le b \}$ là tập đóng vì nếu $a_n \in [a,b]$ và $\lim a_n = z$, ta có $a \le a_n \le b$, do đó $a \le z \le b$;

Trong khi đó <u>*khoảng*</u> $(a,b) := \{ x : a < x < b \}$ không phải là tập đóng vì dãy $a_n = a + \dfrac{b-a}{n+1} \in (a,b)$, nhưng $a = \lim a_n \notin (a,b)$.

3.1.2. Tập mở

Ta nói $A \subseteq \mathbb{R}$ là <u>*tập mở*</u> nếu $\mathbb{R} \setminus A$ là tập đóng.

Thí dụ Với $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ thì *khoảng* (a,b) là tập mở vì $\mathbb{R} \setminus (a,b) = \{ x : x \le a$ hoặc $x \ge b \}$ là tập đóng.

Chú ý Có những tập vừa đóng, vừa mở như tập $\mathbb{R}$ và tập rỗng. Có những tập không mở và không đóng như *nửa đoạn* $(a,b] := \{x : a < x \le b\}$ hoặc $[a,b) := \{x : a \le x < b\}$.

Bổ đề *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ là mở khi và chỉ khi cho điểm $x \in A$ bất kỳ ta có thể tìm thấy số tự nhiên n sao cho khoảng $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ nằm gọn trong A.*

<u>Chứng minh</u> $(\Rightarrow)$ Dùng phản chứng. Giả sử A mở, nhưng có $x_0 \in A$ để với mọi n, đoạn $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ không nằm trọn trong A, tức là tìm được $a_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ và $a_n \notin A$. Vậy $a_n \in \mathbb{R} \setminus A$. Hơn nữa $x_0 = \lim a_n$ mà $x_0 \notin \mathbb{R} \setminus A$. Điều này chứng tỏ $\mathbb{R} \setminus A$ không đóng, trái với giả thiết A mở.

$(\Leftarrow)$ Ta sẽ chứng minh $\mathbb{R} \setminus A$ đóng nếu như điều kiện nêu ra ở bổ đề thỏa mãn. Thực vậy, cho $\{ a_n \}$ là dãy trong $\mathbb{R} \setminus A$ hội tụ tới x_0. Khi đó theo định nghĩa giới hạn với mọi n sẽ tìm được m_0 để $a_m \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ khi $m \ge m_0$.

Điều này chứng tỏ $x_0 \notin A$ và do đó $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$, vậy $\mathbb{R} \setminus A$ đóng.

3.1.3. Tính chất

Mệnh đề *Giao hữu hạn tập mở là mở và hợp của họ bất kỳ tập mở là mở.*

Chứng minh Cho $A_1,..., A_k$ là những tập mở trong ℝ. Nếu $A = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ là rỗng thì dĩ nhiên A mở. Nếu A khác rỗng, lấy $x \in A$ bất kỳ. Theo bổ đề, tồn tại $n_1,..., n_k$ sao cho $(x - \frac{1}{n_i}, x + \frac{1}{n_i}) \subseteq A_i$, $i = 1,..., k$. Chọn $n_0 = \max\{ n_1,..n_k \}$. Khi ấy $(x - \frac{1}{n_i}, x + \frac{1}{n_i}) \subseteq A$. Theo bổ đề, A mở. Bây giờ cho $\{ A_\alpha : \alpha \in I \}$ họ tập mở trong ℝ (ở đây tập chỉ số I có thể hữu hạn hoặc vô hạn). Ký hiệu $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. Lấy $x \in A$ bất kỳ. Khi ấy tồn tại $\alpha \in I$ để $x \in A_\alpha$. Vì A_α mở, theo bổ đề ta tìm được n để $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subseteq A_\alpha$. Do vậy $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subseteq A$, và lại theo bổ đề, A mở.

Mệnh đề *Hợp hữu hạn tập đóng là đóng và giao của họ bất kỳ tập đóng là đóng.*

Chứng minh Cho $A_1,..., A_k$ là những tập đóng trong ℝ. Khi ấy

$$\mathbb{R} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \bigcap_{i=1}^{k} (\mathbb{R} \setminus A_i).$$

Ta có $\mathbb{R} \setminus A_i$ mở. Theo mệnh đề trên, $\bigcap_{i=1}^{k} (\mathbb{R} \setminus A_i)$ mở, do vậy $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ đóng. Tương tự, cho $\{ B_\alpha : \alpha \in I \}$ là họ tập đóng. Ta có $\mathbb{R} \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} (\mathbb{R} \setminus B_\alpha)$. Vì $\mathbb{R} \setminus B_\alpha$ mở, theo mệnh đề trên, $\bigcup_{\alpha\in I} (\mathbb{R} \setminus B_\alpha)$ mở, và do đó $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ đóng.

Chú ý a) Giao vô hạn tập mở không nhất thiết là mở.

Thí dụ với $A_n = (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$ là tập đóng.

b) Hợp vô hạn tập đóng không nhất thiết là đóng.

Thí dụ với $A_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ thì $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = (0,1)$ là tập mở.

3.2. Tôpô

3.2.1. Tôpô trên ℝ

Tôpô trên ℝ là họ $\mathcal{A}$ của các tập trong ℝ thỏa mãn những tính chất sau:

i) Giao của hai phần tử của $\mathcal{A}$ thuộc $\mathcal{A}$.

ii) Hợp của họ bất kỳ các phần tử của $\mathcal{A}$ thuộc $\mathcal{A}$.

iii) $\mathcal{A}$ chứa ℝ và $\varnothing$.

Các phần tử của $\mathcal{A}$ thường được gọi là tập $\mathcal{A}$ - mở.

Thí dụ a) $\mathcal{A} = \{A : A$ là tập mở trong $\mathbb{R}\}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$ (Theo Mệnh đề 2).

b) $\mathcal{A} = \{$ *$\mathbb{R}$ và* $\varnothing$ $\}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$. Đây là tôpô tầm thường.

c) $\mathcal{A} = \{A : A$ là tập con của $\mathbb{R}\}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$. Đây là tôpô rời rạc.

d) $\mathcal{A} = \{A : A$ là tập đóng trong $\mathbb{R}\}$ không phải là tôpô trên $\mathbb{R}$ vì (ii) không thỏa mãn.

Tôpô thông dụng nhất trên $\mathbb{R}$ là tôpô trong Thí dụ a) và trong giáo trình ta chỉ nói đến tôpô này.

3.2.2. Lân cận

Định nghĩa *Tập $U \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là lân cận của x nếu trong U có một tập mở chứa x.*

Thí dụ $U = \{x : -1 \le x \le 1\}$ là lân cận của điểm *O* nhưng không phải là lân cận của điểm -1.

Mệnh đề *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ mở khi và chỉ khi mọi điểm của A đều có lân cận nằm trọn trong A.*

Chứng minh Giả thiết *A* mở. Theo bổ đề , với mọi $x \in A$ ta tìm được $n \ge 1$ sao cho $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subseteq A$. Tập $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ là một lân cận của *x* nằm trọn trong *A*.

Ngược lại, lấy $x \in A$ bất kỳ. Khi đó có lân cận *U* của *x* nằm trọn trong *A*. Theo định nghĩa *U* chứa tập mở *V* để $x \in V$. Theo bổ đề, tồn tại *n* để

$$(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subseteq V \subseteq U \subseteq A .$$

Cũng theo bổ đề trên ta kết luận *A* mở.

3.2.3. Điểm tụ

Điểm $x \in \mathbb{R}$ gọi là điểm tụ của tập $A \subseteq \mathbb{R}$ nếu mỗi lân cận của x đều chứa điểm của A khác với x.

Thí dụ a) $A = \{ x : x = \frac{1}{n}, n = 1,2... \}$ thì điểm *0* là điểm tụ của *A*.

b) $A = (1, 2)$ thì mọi điểm *x* với $1 \le x \le 2$ là điểm tụ của *A*.

Mệnh đề *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ đóng khi và chỉ khi A chứa mọi điểm tụ của nó.*

Chứng minh Giả thiết *A* đóng và *x* là điểm tụ của *A*. Khi ấy với mỗi $n \ge 1$, ta có $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A \ne \varnothing$. Chọn a_n bất kỳ trong tập giao này. Dãy $\{a_n\}$ hội tụ tới *x*.

Vì *A* đóng nên $x \in A$. Ngược lại, cho $\{ a_n \} \subseteq A$ là dãy bất kỳ hội tụ tới *x*. Khi ấy, hoặc là *x* trùng với một trong các phần tử của dãy và suy ra $x \in A$, hoặc là *x* khác mọi a_n . Trong trường hợp sau mọi lân cận của *x* đều chứa vô số phần tử của dãy khác *x*, do đó *x* là điểm tụ của *A*. Theo giả thiết $x \in A$ và ta kết luận *A* đóng.

3.2.4. Cơ sở lân cận

Họ $\mathcal{U}$ các tập mở trong ℝ được gọi là <u>cơ sở lân cận</u> trong ℝ nếu với mỗi $x \in \mathbb{R}$ và mỗi lân cận V của x ta có thể tìm được $U \in \mathcal{U}$ sao cho $x \in U \subseteq V$.

Thí dụ a) $\mathcal{U} := \{ (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) , x \in \mathbb{R}, n=1,2,3,... \}$ là cơ sở lân cận trong ℝ. Thật vậy, giả sử $x \in \mathbb{R}$ và V là một lân cận của x trong ℝ. Theo định nghĩa sẽ tìm được tập mở $U \subseteq V$ chứa x. Theo bổ đề tồn tại n sao cho khoảng $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right) \subseteq U \subseteq V$. Chứng tỏ $\mathcal{U}$ là cơ sở lân cận trong ℝ.

b) $\mathcal{U} := \{ (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) , x \in \mathbb{Q} , n=1,2,3,... \}$ cũng là cơ sở lân cận trong ℝ. Thật vậy, tương tự như trong thí dụ trên, cho $x \in \mathbb{R}$ và V là một lân cận của x trong ℝ. Theo định nghĩa sẽ tìm được tập mở $U \subseteq V$ chứa x. Theo bổ đề tồn tại n sao cho

$$\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right) \subseteq U \subseteq V .$$

Nếu $x \in \mathbb{Q}$ thì khoảng $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$ là phần tử của họ $\mathcal{U}$. Nếu $x \notin \mathbb{Q}$ theo tính trù mật và do $x < x+\frac{1}{2n}$, tìm được số $c \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < c < x+\frac{1}{2n}$. Khi đó đoạn $\left(c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}\right) \subseteq U \subseteq V$ và là phần tử của họ $\mathcal{U}$ chứa x. Như vậy $\mathcal{U}$ là cơ sở lân cận trong ℝ.

Mệnh đề *Trong ℝ tồn tại cơ sở lân cận đếm được.*

<u>Chứng minh</u> Thật vậy, trong Thí dụ b) trên đây ta thấy ℚ là tập *đếm được* nên cơ sở lân cận đó *đếm được*.

3.3. Tập Compact

3.3.1. Tập compact

Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ gọi là <u>compact</u> nếu mọi dãy trong A đều chứa dãy con hội tụ có giới hạn trong A.

Thí dụ a) Nếu A chứa hữu hạn phần tử, thì A là tập compact. Thật vậy, cho $\{ a_n \}$ là dãy trong A. Vì số phần tử A hữu hạn, sẽ có ít nhất một phần tử $a \in A$ sao cho có vô hạn phần tử trong dãy trùng với nó. Các phần tử này lập thành một *dãy con* hội tụ tới $a \in A$.

b) $A = \{ x : x = \frac{1}{n}, n = 1,2,... \} \cup \{0\}$ là tập compact. Thật vậy, A chứa một *dãy hội tụ* và *điểm giới hạn* của dãy (là $\{0\}$). Cho nên, mọi dãy trong A hoặc là chỉ chứa hữu hạn phần tử của A, hoặc là chứa một *dãy con* của *dãy hội tụ*. Dễ thấy rằng trong cả 2 trường hợp nó đều chứa một dãy con hội tụ đến một phần tử nào đó trong A.

c) $A=\{ x : 0 < x \leq 1 \}$ không compact vì dãy $\{ \frac{1}{n} \}$ hội tụ tới $0 \notin A$.

d) $A=\{ x : x \geq 0 \}$ không compact vì dãy $\{n\}$ không có một dãy con nào hội tụ cả.

3.3.2. Tính chất

Định lý *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ là compact khi và chỉ khi A đóng và giới nội.*

Chứng minh Giả thiết A compact. A phải giới nội vì nếu không sẽ có dãy $\{a_n\} \subseteq A$ với $\lim a_n = \infty$ hoặc $\lim a_n = -\infty$. Trong cả hai trường hợp $\{a_n\}$ không chứa dãy con hội tụ. Tập A đóng vì mọi dãy hội tụ sẽ có giới hạn trong A.

Ngược lại, nếu A giới nội thì mọi dãy trong A đều giới nội và do đó, theo Định lý Bolzano-Weierstrass, sẽ có điểm tụ, tức là có dãy con hội tụ. Nếu A đóng thì giới hạn thuộc A. Do vậy A compact.

Mệnh đề *Hợp hữu hạn các tập compact là compact; và giao của họ bất kỳ các tập compact là compact.*

Chứng minh Vì hợp hữu hạn các tập *đóng* là đóng và hợp hữu hạn các tập *giới nội* là giới nội, nên áp dụng Định lý 1 ta có ngay kết quả. Đối với giao của họ bất kỳ các tập compact phép chứng minh hòan toàn tương tự.

3.3.3. Phủ

Cho $\mathcal{U}$ là họ bất kỳ các *tập mở* trong $\mathbb{R}$.

Ta nói $\mathcal{U}$ là phủ của tập $A \subseteq \mathbb{R}$ nếu mỗi điểm của A đều nằm trong một phần tử nào đó của $\mathcal{U}$.

Cho $\mathcal{U}$ và $\mathcal{U}'$ là các phủ của A. Nếu $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, ta nói $\mathcal{U}'$ là *phủ con* của $\mathcal{U}$.

Thí dụ a) Với $A=[0,1]$, họ $\mathcal{U}_1 = \{(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) : n = 1,2,...\}$ là một phủ của A. Họ $\mathcal{U}_2 = \{(-\frac{1}{2n}, 1+\frac{1}{2n}) : n = 1,2,...\}$ cũng là phủ của A, đồng thời là phủ con của $\mathcal{U}_1$.

b) Với $A=\mathbb{R}$, họ $\mathcal{U}_1 = \{(-n, n) : n = 1,2,...\}$ là phủ của A. Nhưng họ $\mathcal{U}_2 = \{(n, n+1) : n = \pm 1, \pm 2,...\}$ không phải là phủ của A.

Bổ đề *Nếu $\mathcal{U}$ là phủ bất kỳ của tập $A \subseteq \mathbb{R}$ thì $\mathcal{U}$ có một phủ con đếm được (của A).*

Chứng minh Nếu $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ *hữu hạn* thì đó là phủ đếm được của A. Giả thiết $\mathcal{U}$ vô hạn. Lấy một *cơ sở lân cận* đếm được bất kỳ $\{ V_n : n = 1,2,... \}$ trong $\mathbb{R}$. Với mỗi n, lấy $\alpha = \alpha(n) \in I$ sao cho $V_n \subseteq U_{\alpha(n)}$ (nếu có) và ký hiệu I_0 là tập các chỉ số $\alpha(n)$ này. Khi ấy I_0 đếm được và ta chứng minh $\{U_\alpha : \alpha \in I_0\}$ phủ A. Thực vậy, cho $x \in A$, do định nghĩa của phủ ta tìm được $\alpha \in I$ sao cho $x \in U_\alpha$. Theo định nghĩa của cơ sở lân cận thì tồn tại n để $x \in V_n \subseteq U_\alpha$. Điều này có nghĩa là có $\alpha = \alpha(n) \in I_0$ để $V_n \subseteq U_{\alpha(n)}$, do đó $x \in U_{\alpha(n)}$.

Định lý *Tập $A \subseteq \mathbb{R}$ là <u>compact</u> khi và chỉ khi mọi phủ của A đều chứa một phủ con hữu hạn.*

<u>Chứng minh</u> Giả thiết *A* compact và $\mathcal{U}$ là phủ của *A*. Nếu $\mathcal{U}$ hữu hạn thì đó là phủ con hữu hạn cần tìm. Nếu $\mathcal{U}$ vô hạn, theo bổ đề ta có thể giả thiết $\mathcal{U}$ đếm được, tức là ta có $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1,2,...\}$. Nếu với mọi *k*, họ $\{U_1,...,U_k\}$ không phủ *A* thì ta tìm được $x_k \in A \setminus \{\bigcup_{i=1}^{k} U_i\}$. Vì *A* compact ta trích được <u>dãy con</u> $\{x_{k(n)}\}$ <u>hội tụ</u> tới một phần tử $x_o \in A$. Giả sử U_m chứa x_o. Khi ấy sẽ có *N* đủ lớn để $x_{k(n)} \in U_m, \forall n > N$. Ngoài ra, do tập điểm $\{x_{k(1)}, x_{k(2)},...x_{k(n)}\}$ là hữu hạn ta tìm được số *L* đủ lớn để $\{x_{k(1)},...,x_{k(n)}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{L} U_i$. Lấy $M = \max\{L,m\}$ ta sẽ có $\{x_{k(n)}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} U_i$. Điều này mâu thuẫn với việc lựa chọn $x_{k(n)}$. Do vậy phải tìm được số *k* để $\{U_1,...,U_k\}$ phủ *A*.

Ngược lại, giả thiết điều kiện về phủ của định lý đúng. Ta chứng minh *A* compact. Trước hết ta chỉ ra rằng *A* giới nội. Muốn thế, lấy $\{a_n\}$ là dãy tất cả các số hữu tỷ. Khi đó họ $\{U_n = (a_n - 1, a_n + 1) : n = 1,2,...\}$ phủ $\mathbb{R}$, do đó phủ *A*. Theo điều kiện, sẽ tìm được *k* để $\{U_1,...,U_k\}$ phủ *A*. Khi đó *A* sẽ bị giới nội bởi số $\max\{|a_n| + 1 : n = 1,2,...,k\}$. Theo định lý ở phần trên, ta chỉ còn phải chứng minh *A* đóng. Bằng phản chứng giả sử *A* không đóng ta sẽ tìm được dãy $\{x_n\} \subseteq A$ hội tụ tới $x_o \notin A$. Có thể xem như các phần tử của dãy là khác nhau.

Xét họ $\{U_k : k = 1,2,...\}$ trong đó

$$U_k = R \setminus (\{x_n : n = k+1, k+2,...\} \cup \{x_o\}).$$

Đây là họ các tập mở trong $\mathbb{R}$. Họ này là phủ của *A*. Thật vậy, với $x \in A$ bất kỳ, ta có hoặc $x \notin \{x_n\}$ khi ấy $x \in U_k$ với mọi *k*, hoặc $x = x_m$ nào đó, khi ấy $x \in U_m$.

Dễ thấy với mọi *k*, họ $\{U_1,...,U_k\}$ không thể nào phủ *A* được. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy *A* đóng. Theo định lý trên, *A* compact.

3.4. Nguyên lý giao của họ các tập compact

3.4.1. Nguyên lý

Cho $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ là họ bất kỳ các tập khác rỗng trong $\mathbb{R}$.

Ta nói họ này có tính chất giao hữu hạn nếu với mọi bộ hữu hạn chỉ số $\alpha_1,...,\alpha_n \in I$, ta có $\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \neq \varnothing$.

Định lý *Cho $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ là họ các tập compact khác rỗng có tính chất giao hữu hạn. Khi đó*

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing.$$

Chứng minh Cố định $\alpha_0 \in I$ và đặt $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus A_\alpha$. Giả sử $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \varnothing$, khi đó $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ là phủ của $\mathbb{R}$ vì U_α mở và

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (\mathbb{R} \setminus A_\alpha) = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \mathbb{R}.$$

Do vậy $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ phủ A_{α_0}. Theo định lý phủ tập compact, ta có thể trích được hữu hạn phần tử $U_{\alpha 1}, ..., U_{\alpha k}$ để tạo thành phủ A_{α_0}. Như vậy

$$A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} = \bigcup_{\alpha=1}^{k} (\mathbb{R} \setminus A_{\alpha_i}) = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{i=1}^{k} A_{\alpha_i}).$$

Nghĩa là $A_{\alpha_0} \cap A_{\alpha_1} \cap ... \cap A_{\alpha_k} = \varnothing$. Điều này là mâu thuẫn với tính chất giao hữu hạn của họ $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$. Vậy $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \varnothing$.

3.4.2. Ứng dụng

Hệ quả *Cho trước họ vô hạn các đoạn $\{[a_n, b_n] : n = 1,2,...\}$ lồng nhau (nghĩa là $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n = 2,3,...$). Khi ấy ta có*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Chứng minh Nhận xét rằng họ trên là họ các tập compact. Họ này có tính chất giao hữu hạn vì giao của mọi họ hữu hạn các đoạn này sẽ là đoạn có chỉ số cao nhất (trong họ) và do đó là khác rỗng. Theo nguyên lý giao của họ tập compact suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập
Chương 3

1. Tập mở, tập đóng

Bài 1 Cho $E_n = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}], n = 1,2,\ldots$ Chứng minh rằng $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ là một tập không đóng.

Bài 2 Bao đóng của A là tập gồm các điểm thuộc A và các điểm tụ của nó. Ký hiệu bao đóng của A là $[A]$. Hãy chứng minh:

1) Bao đóng của A là tập đóng nhỏ nhất chứa A.

2) Bao đóng của bao đóng của A là bao đóng của A: $[[A]] = [A]$.

3) Nếu $A \subset B$ thì $[A] \subset [B]$.

4) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$.

Bài 3 Giả sử A là tập mở trong $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi B thuộc $\mathbb{R}$ ta đều có bao hàm thức $A \cap [B] \subset [A \cap B]$.

Bài 4 Tìm những ví dụ về hai tập A, B trong $\mathbb{R}$ sao cho cả bốn tập $A \cap [B]$, $[A] \cap B$, $[A] \cap [B]$ và $[A \cap B]$ đều khác nhau.

Bài 5 Tìm ví dụ hai tập A, B trên $\mathbb{R}$, sao cho $A \cap [B]$ không chứa trong $[A \cap B]$.

2. Điểm tụ

Bài 1 Tìm tất cả các điểm tụ của tập $E = \left\{-\frac{1}{n}, n = 1,2,\ldots\right\} \cup (1,2] \cup \{3\}$.

Bài 2 Chứng minh rằng tập $X = \{\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}; \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}\}$, $n \in N$ chỉ có hai điểm tụ là 0 và 1.

Bài 3 Dãy $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_1 = a$ là một điểm bất kỳ trong đoạn $[0,1]$ và $x_n = \frac{x_n - 1}{2}$ khi n chẵn và $x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{2}$ khi n lẻ. Hỏi dãy $\{x_n\}$ có bao nhiêu điểm tụ ?

Bài 4 Một dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện: $\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = 0$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ hoặc có không nhiều hơn 2, hoặc có vô hạn điểm tụ.

Bài 5 Hãy xây dựng một dãy các phần tử khác nhau mà mỗi số hạng của dãy là một điểm tụ. Tập phần tử của một dãy như trên có thể là tập đóng hay không?

Bài 6 Hãy chứng minh tập bao gồm các phần tử của một dãy bất kỳ và các điểm tụ của nó không thể là tập mở.

Bài 7 Khảo sát tính hội tụ của một dãy chỉ có một điểm tụ (xét trường hợp dãy giới nội và trường hợp không giới nội).

Bài 8 Một điểm của một tập được gọi là cô lập nếu tồn tại một lân cận mà trong đó không có điểm nào khác của tập ngoài điểm đã cho. Hãy chứng minh rằng một dãy có vô hạn điểm tụ cô lập không thể giới nội.

3. Tập compact

Bài 1 Cho a và b là hai số dương ($a < b$). Hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được xác định như sau:

$$u_o = a, v_o = b, u_{n+1} = u_n v_n, v_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2}.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Bài 2 Hãy tìm tất cả các tập compact trong $\mathbb{R}$ khi trang bị cho $\mathbb{R}$ một trong những tôpô sau:

i) Tôpô tầm thường (chỉ có $\mathbb{R}$ và $\varnothing$ là những tập mở);

ii) Tôpô rời rạc (mỗi điểm của $\mathbb{R}$ là tập mở);

iii) Tôpô thông thường (tôpô với cơ sở lân cận là các khoảng).

Bài 3 Nếu hợp vô hạn của các tập compact là tập đóng (hay giới nội) thì tập hợp này có compact không? Giải thích vì sao.

Bài 4 Cho $\{A_n : n = 1,2,\ldots\}$ là họ các tập compact trong $\mathbb{R}$. Giả sử tìm được số $k \geq 3$ để với mọi bộ k số $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ta có $\bigcap_{i=1}^{n} A_{n_i} \neq \phi$. Hỏi rằng họ này có điểm chung hay không? Vì sao?

Bài 5 Tìm thí dụ một tập đóng, không giới nội có phủ vô hạn nhưng từ đó không thể trích ra được một phủ con hữu hạn.

Tìm thí dụ một tập không đóng, giới nội có phủ vô hạn nhưng từ đó không thể trích ra được một phủ con hữu hạn.

Bài 6 Hãy chỉ ra vì sao trục số $\mathbb{R}$ (với tôpô thông thường) lại không compact. Nếu như ta mở rộng $\mathbb{R}$ một cách hình thức bằng việc thêm hai điểm, ký hiệu là $-\infty$ và $+\infty$ có tính chất sau: $-\infty < r < +\infty$ với mọi $r \in \mathbb{R}$. Sau đó ta trang bị trên tập mở rộng $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ một tôpô sau đây: cơ sở lân cận của mỗi điểm $r \in \mathbb{R}$ là cơ sở lân cận trong tôpô bình thường; cơ sở lân cận của điểm $-\infty$ gồm các tập con dạng

$$\{r \in \mathbb{R} : r < -n\};$$

Cơ sở lân cận của $+\infty$ gồm các tập con có dạng

$$\{r \in \mathbb{R} : r > -n\}.$$

Hãy chứng minh rằng $\mathbb{R}$ với tôpô vừa nêu trên là tập compact.

CHƯƠNG 4

Hàm số

4.1. Khái niệm hàm số

Cho X và Y là hai tập con khác rỗng của tập số thực $\mathbb{R}$.

Phép ứng f từ X vào Y được gọi là hàm số trên X.

Ta viết $y = f(x)$ có nghĩa y là giá trị (trong Y) ứng với x (trong X).

Người ta gọi x là *biến độc lập* (hay *đối số*) và y là *biến phụ thuộc* hay *giá trị* của hàm số f tại x.

Tập X được gọi là *miền xác định* của hàm số f.

Tập $R_f := \{y \in Y / \exists x \in X : f(x) = y\}$ được gọi là *miền giá trị* (hay *tập ảnh*) của hàm f. Miền giá trị không nhất thiết bằng toàn bộ Y.

Với mỗi $x \in X$ có thể có nhiều giá trị y của Y sao cho $y = f(x)$, khi ấy ta nói f là một *hàm đa trị*. Nếu với mỗi $x \in X$ chỉ có duy nhất một giá trị của $y \in Y$ sao cho $y = f(x)$ thì ta nói f là một *hàm đơn trị*. Trong giáo trình này, nếu không nói gì thêm, ta chỉ xét f là một hàm đơn trị.

4.2. Các phương pháp biểu diễn hàm số

Muốn xác định hàm số ta phải chỉ ra miền xác định $X \subseteq \mathbb{R}$ và quy tắc (phép ứng) f. Hàm số thường được xác định theo một trong ba phương pháp sau đây:

4.2.1. Phương pháp giải tích

Nếu f được cho bởi một biểu thức giải tích thì ta nói hàm số được cho bằng *phương pháp giải tích*. Trong trường hợp này, miền xác định của hàm số là tập tất cả những giá trị của đối số sao cho biểu thức có nghĩa.

Thí dụ Hàm số $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ có miền xác định là

$$\{ x \in \mathbb{R} : x \geq 1,\ x \neq 2\}.$$

Bài toán tìm *miền xác định* của hàm số thường được đưa về việc giải một hay nhiều hệ phương trình và bất phương trình.

Chú ý Đôi khi miền xác định của hàm số được ghép thành từ nhiều khúc, và trên mỗi khúc hàm số được cho bởi một biểu thức giải tích riêng. Những hàm như vậy còn được gọi là hàm xác định từng khúc, hay đơn giản là *hàm từng khúc*.

Thí dụ Hàm dấu $y = sign(x)$ (đôi khi viết là $sgn(x)$, đọc là: signum của x) là một hàm từng khúc, xác định như sau:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

4.2.2. Phương pháp bảng

Trong tự nhiên cũng như trong kỹ thuật, nhiều khi quan hệ hàm giữa hai đại lượng được thiết lập qua thực nghiệm hoặc quan sát tại những thời điểm (hoặc vị trí) nào đó. Thí dụ, số đo nhiệt độ tại một điểm xác định nào đó là một đại lượng phụ thuộc vào thời gian. Những giá trị đo đạc (quan sát) tại những thời điểm (vị trí) khác nhau có thể được xem là hàm phụ thuộc vào thời điểm (vị trí) đo đạc. Ta có thể xác định giá trị của hàm tại bất kỳ thời điểm (vị trí nào) bằng các thiết bị đo đạc sẵn có, nhưng nói chung ta không thể tìm được *biểu thức giải tích* biểu diễn được kết quả đo đạc theo thời gian (vị trí) một cách chính xác, mà thường biểu thị chúng dưới dạng *bảng ghi số liệu*. Khi ấy ta nói *hàm được cho dưới dạng bảng*. Cách cho hàm như vậy, mặc dù thường cho thông tin về hàm không đầy đủ (không tại mọi điểm), nhưng lại rất phổ biến trong thực tiễn. Một trong những lĩnh vực quan trọng của giải tích toán học là nghiên cứu phương pháp "khôi phục" thông tin (tại những điểm không được cho) để biến những hàm loại này thành một hàm mà các công cụ giải tích có thể xử lý được như mọi hàm thông thường khác.

4.2.3. Phương pháp đồ thị

Phương pháp này thực chất là một biến thể của phương pháp bảng. Thay vì cho một bảng số liệu, người ta cho một tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ vuông góc (tức là mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes (đọc là Đề-các)), và hàm số f được xác định bởi phép cho tương ứng *hoành độ* của mỗi điểm (trong tập điểm đã cho) với *tung độ* của nó. Trong trường hợp có *nhiều điểm khác nhau* cùng có chung một *hoành độ* thì phép ứng sẽ là xác định không duy nhất, và khi ấy ta có thể thiết lập hàm *đa trị*, cho tương ứng một hoành độ với *tập các tung độ* của các điểm có chung hoành độ này. Trong khuôn khổ giáo trình này ta thường chỉ xét các hàm đơn trị, và khi ấy phải giả thiết là tập hợp được cho phải thỏa mãn điều kiện là: không có 2 điểm phân biệt nào có cùng hoành độ.

Tập hợp đã cho còn có tên gọi là *đồ thị* của hàm f, và thường được ký hiệu là G_f. Rõ ràng hình chiếu của tập G_f lên trục hoành chính là *miền xác định* của hàm f, và hình chiếu của G_f lên trục tung chính là *miền giá trị* của hàm f. Dễ thấy rằng một hàm số được cho bởi phương pháp bảng hay phương pháp giải tích thì cũng có thể cho được bằng phương pháp đồ thị, khi ta lấy G_f là tập những điểm (x,y), với $x \in X$ và $y=f(x)$.

Việc biểu diễn tập G_f trong mặt phẳng tọa độ Descartes (đối với hàm số f cho bằng phương pháp giải tích) cũng chính là việc *vẽ đồ thị* của hàm số đó.

Trong thực tế, ta thường kết hợp cả ba phương pháp trên để mô tả hàm số. Biểu thức giải tích cho phép ta nghiên cứu các tính chất định tính, đồ thị cho ta một hình ảnh trực quan và bảng cho ta một định lượng cụ thể của hàm số. Cũng cần chú ý thêm là không phải hàm số nào cũng có thể mô tả chính xác được bằng đồ thị, đồng thời cũng có những hàm số mô tả được bằng đồ thị hoặc bằng bảng mà không mô tả được bằng biểu thức giải tích.

4.2.4. Vẽ đồ thị của hàm số

Như đã nói ở trên, vẽ đồ thị của một hàm số *f* (được cho bằng *phương pháp giải tích*) có nghĩa là biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Descartes tập điểm sau đây

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x \in D_f, y = f(x)\};$$

trong đó D_f là ký hiệu miền xác định của hàm số *f*. Về lý thuyết, để làm được điều đó ta phải biết được giá trị của hàm số tại mọi điểm và biểu diễn tất cả các điểm của đồ thị, nhưng trên thực tế điều đó không thể thực hiện được. Người ta chỉ có thể cho được những biểu diễn xấp xỉ của đồ thị. Có 2 cách để thực hiện điều này:

Phương pháp 1: ***Vẽ trực tiếp***

Dựa trên nhận xét rằng một đường cong bình thường luôn có thể xấp xỉ được bằng đường gấp khúc với các khúc nhỏ. Đường gấp khúc này hoàn toàn được xác định bởi các điểm đỉnh, cho nên nếu ta biết được các điểm đỉnh này thì cũng có được biểu diễn xấp xỉ của đồ thị. Độ xấp xỉ càng chính xác nếu các khúc càng nhỏ (các đỉnh càng nhiều). Phương pháp này nếu thực hiện một cách thủ công sẽ rất vất vả (vì để có một xấp xỉ tốt phải biết được rất nhiều đỉnh), nhưng đối với máy tính thì điều này trở nên rất dễ dàng, và trên thực tế với sự trợ giúp của máy tính người ta vẽ được các đồ thị với độ chính xác cao tùy ý (bằng mắt thường không thể biết được đó là chỉ một hình ảnh xấp xỉ). Tất cả các đồ thị minh họa trong giáo trình đều được vẽ bằng phương pháp này. Phần thực hành tính toán vẽ đồ thị trên máy tính (cuối chương) sẽ thêm một lần giúp chúng ta kiểm nghiệm.

Phương pháp 2: ***Vẽ thông qua khảo sát***

Người ta khảo sát các tính chất cơ bản của hàm số để dự đoán dáng điệu của nó trước khi vẽ. Bằng cách này người ta không cần phải biết thông tin về hàm tại quá nhiều điểm như phương pháp trên, mà chỉ cần quan tâm đến một số điểm đặc biệt, phân chia đồ thị thành những vùng với những dáng điệu cơ bản dễ thể hiện. Phương pháp này giúp cho việc vẽ đồ thị thủ công một cách dễ dàng hơn so với phương pháp thứ nhất. Tuy nhiên, lớp hàm mà người ta có thể vẽ được đồ thị theo phương pháp 2 không phải là rộng, và để tiến hành được phương pháp này, người vẽ phải nắm được những kiến thức cơ bản về khảo sát hàm số. Khi việc tính toán trên máy tính trở nên phổ biến thì phương pháp 2 chỉ còn là phương tiện để củng cố kiến thức lý thuyết về khảo sát hàm số.

4.3. Các phép toán trên các hàm số

4.3.1. So sánh hai hàm số

Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên tập X. Ta nói f và g bằng nhau ($f = g$) trên X nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$, f và g khác nhau ($f \neq g$) nếu tồn tại một giá trị $x_0 \in X$ mà $f(x_0) \neq g(x_0)$. Ta nói hàm f lớn hơn hay bằng g (hay g nhỏ hơn hay bằng f) trên X nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in X$. Khi không tồn tại x để dấu bằng xảy ra thì ta nói f lớn hơn g (hay g nhỏ hơn f).

4.3.2. Các phép toán số học

Cho f và g là hai hàm số có cùng tập xác định là X. Khi ấy các hàm số định nghĩa như sau

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$;

$(f - g)(x) := f(x) - g(x)$;

$(f.g)(x) := f(x).\, g(x)$;

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (khi $g(x) \neq 0$)

được gọi lần lượt là *tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số f và g trên X.*

4.3.3. Hàm hợp

Cho hàm số $u = f(x)$ xác định trên $X \subseteq \mathbb{R}$ và hàm số $y = g(u)$ xác định trên $U \subseteq \mathbb{R}$ sao cho *miền giá trị* của f nằm trong *miền xác định* của g.

Hàm hợp của f và g (ký hiệu: $g \circ f$) là một hàm xác định bởi công thức $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ với mọi $x \in X$.

Thí dụ $y = \sin(x^2)$ là hàm hợp của hai hàm $y = \sin(u)$ và $u = x^2$.

Cũng cần lưu ý rằng nói chung $g \circ f \neq f \circ g$.

4.3.4. Hàm ngược

Cho hàm $f : X \to Y$, ta xác định một hàm mới $f^{-1} : Y \to X$ theo quy tắc: với mỗi $y \in Y$ ta cho ứng với x sao cho $f(x) = y$, tức là: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

f^{-1} được gọi là *hàm ngược* của f. Như vậy, miền xác định của f^{-1} là miền giá trị của f.

Ta thấy, *đồ thị* của các hàm f và f^{-1} là trùng nhau (trên cùng một hệ trục tọa độ). Khi ta dùng x để chỉ biến độc lập và y là biến phụ thuộc của hàm ngược f^{-1}, thì đồ thị của nó sẽ chuyển sang vị trí đối xứng với vị trí cũ qua đường phân giác thứ nhất (do điểm (x, y) đối xứng với điểm (y, x) qua phân giác thứ nhất). Như vậy đồ thị của hàm số $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = f(x)$ qua phân giác thứ nhất.

Để tìm hàm ngược của f, coi y là cho trước và ta giải phương trình $y = f(x)$ tìm x theo y. Do phương trình này có thể có nhiều nghiệm (ngay cả khi f là đơn trị), cho nên hàm ngược của nó nói chung là đa trị. Nếu với mỗi y ta chỉ chọn một nghiệm x của phương trình trên thì ta được một hàm đơn trị, gọi là *nhánh đơn trị* của hàm ngược đa trị f^{-1}.

Rõ ràng khi f là một *phép ứng 1-1* thì f^{-1} là một hàm đơn trị.

Nhận xét Các phép toán trên hàm số thực chất là những công cụ "làm giàu" lớp các hàm đã biết. Thí dụ, chỉ từ các đơn thức, bằng 4 phép toán số học trên hàm số, người ta xây dựng được lớp các hàm *đa thức* và *phân thức* vô cùng phong phú; toàn bộ lớp hàm *lượng giác* và *lượng giác ngược* được xây dựng từ 2 hàm lượng giác cơ bản sin(x) và cos(x).

4.4. Các lớp hàm có cấu trúc đặc biệt

Khi nghiên cứu hàm số, ta cố gắng phát hiện những tính chất đặc biệt của nó. Điều này cho phép ta hình dung dáng điệu toàn cục của hàm số (trên toàn miền xác định) dựa trên các thông tin trên miền hẹp hơn. Sau đây là một số cấu trúc cơ bản cần được lưu ý.

4.4.1. Hàm đơn điệu

Hàm f xác định trên tập X được gọi là không giảm (không tăng) trên X nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_1) \le f(x_2) \qquad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2))$$

thì f được gọi là tăng chặt (giảm chặt) trên X.

Hàm không tăng (không giảm) được gọi chung là đơn điệu.

Hàm đơn điệu tăng (giảm) còn được gọi là hàm *đồng biến (nghịch biến)*.

Tính chất đơn điệu cho ta hình dung dáng điệu đồ thị của hàm trên X: Đồ thị của hàm đơn điệu tăng (giảm) đi lên (đi xuống) từ trái sang phải.

Thí dụ 1) $y = [\,x\,]$ (Hàm phần nguyên của x) là một hàm tăng (không chặt) trên toàn trục số.

Có những hàm chỉ đơn điệu trên từng khoảng chứ không đơn điệu trên toàn tập xác định.

2) Hàm $y = x - [\,x\,]$ là một hàm tăng trên từng khoảng[n ; n-1) với mọi số nguyên n.

Một hàm có thể tăng trên khoảng này và giảm trên khoảng khác.

3) Hàm $y = |x|$ tăng trên $[0; +\infty)$ và giảm trên $(-\infty; 0]$.

Cũng cần lưu ý rằng có những hàm không đơn điệu trên bất kỳ một khoảng nào.

4) Hàm *Dirichlet* $\chi(.)$ xác định như sau:

$\chi(x) = 1$, nếu x hữu tỉ,

$\chi(x) = 0$, nếu x vô tỉ ,

là hàm không đơn điệu trên bất kỳ khoảng nào.

4.4.2. Hàm tuần hoàn

Hàm số f được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số $T > 0$ sao cho $f(x+T) = f(x)$ với mọi x thuộc miền xác định của hàm số.

Khi ấy T được gọi là chu kỳ của hàm số.

Từ định nghĩa ta thấy ngay rằng nếu f là hàm tuần hoàn với chu kỳ T thì nó cũng tuần hoàn với chu kỳ nT (với mọi số tự nhiên n), chứng tỏ tập xác định của hàm tuần hoàn là không bị chặn.

Số $T_0 > 0$ bé nhất (nếu có) trong số các chu kỳ T được gọi là chu kỳ cơ bản của f.

Từ nay về sau, để ngắn gọn, nếu không nói gì thêm, thuật ngữ "chu kỳ của f" được dùng để chỉ *chu kỳ cơ bản* của nó.

Các hàm tuần hoàn thường gặp khi ta nghiên cứu hiện tượng dao động trong các hệ cơ học, vật lý, hoặc sinh vật...

Khi f là hàm tuần hoàn với chu kỳ T thì để nghiên cứu f trên toàn trục số, ta chỉ cần nghiên cứu nó trên một khoảng bằng chu kỳ của nó là đủ.

Thí dụ 1) Hàm $y = x - [x]$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 1$.

2) Hàm *Dirichlet* là một hàm tuần hoàn không có chu kỳ cơ bản, nhưng có chu kỳ T là số hữu tỉ bất kỳ.

3) Hàm hằng $y = c$ cũng là một hàm tuần hoàn không có chu kỳ cơ bản, nhưng có chu kỳ T là một số bất kỳ.

4.4.3. Hàm bị chặn

Trước đây ta đã có khái niệm *tập bị chặn*. Đối với hàm số, ta cũng có các định nghĩa về tính bị chặn sau đây:

Ta nói f bị chặn trên (bị chặn dưới) trong miền X nếu tồn tại số M (m) sao cho $f(x) \le M$ ($f(x) \ge m$) với mọi $x \in X$.

Nếu f vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới trong miền X thì ta nói rằng f *bị chặn* (*giới nội*) trên X.

Dễ dàng nhận thấy rằng f *giới nội* khi và chỉ khi tồn tại số dương M sao cho

$$|f(x)| \le M \quad \text{với mọi } x \in X .$$

Nếu f bị chặn trên thì đồ thị của nó nằm *ở phía dưới* đường thẳng $y = M$; nếu f bị chặn dưới thì đồ thị của nó nằm *ở phía trên* đường thẳng $y = m$; nếu f bị chặn thì đồ thị của nó bị "kÂp" trong dải tạo bởi hai đường thẳng $y = m$ và $y = M$.

4.4.4. Hàm chẵn, hàm lẻ

Ta nói $X \subseteq \mathbb{R}$ là một <u>*tập đối xứng*</u> (qua gốc tọa độ) nếu $x \in X$ kéo theo $-x \in X$.

Giả sử hàm f xác định trên tập đối xứng X. Ta nói f là <u>hàm chẵn</u> trên X nếu f(-x)= f(x) với mọi $x \in X$, và ta nói f là <u>hàm lẻ</u> trên X nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in X$.

Thí dụ Các hàm $y = \cos(x)$; $y = |x|$; $y = x^2$ là những hàm chẵn trên $\mathbb{R}$. Các hàm $y = \sin(x)$; $y = x^3$ là những hàm lẻ trên $\mathbb{R}$.

Tính chất 1) *Hàm chẵn có đồ thị đối xứng qua trục tung*;

2) *Hàm lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.*

<u>Chứng minh</u> Thật vậy, gọi $M(x,y)$ là một điểm trên đồ thị của hàm chẵn $y = f(x)$. Khi ấy $y = f(x) = f(-x)$, suy ra điểm $M'(-x,y)$ đối xứng với $M(x,y)$ qua trục tung cũng nằm trên đồ thị.

Tương tự nếu $M(x,y)$ là một điểm nằm trên đồ thị của hàm lÀ $y= f(x)$ thì do $-y = -f(x) = f(-x)$, nên điểm $M(-x,-y)$, đối xứng với $M(x,y)$ qua gốc tọa độ, cũng nằm trên đồ thị.

4.4.5. Hàm lồi

Hàm f xác định trên một khoảng X được gọi là <u>lồi</u> trên X nếu bất đẳng thức

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \qquad (4.1)$$

được nghiệm đúng với mọi $x_1, x_2 \in X$ và mọi $\alpha \in [0,1]$.

Hàm f được gọi là <u>lõm</u> trên X nếu -f là <u>lồi</u> trên X.

Thí dụ $y = x^2$, $y = |x|$ là những hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Hàm $y = x^3$ lồi trên $(0,+\infty)$ và lõm trên $(-\infty,0)$.

<u>*Hàm lồi*</u> có đặc trưng hình học đơn giản như sau:

Xét đồ thị của hàm f và một cung nối hai điểm $M_1(x_1,y_1)$ và $M_2(x_2,y_2)$, trong đó $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Khi ấy vế phải của (4.1) là điểm nằm trên đoạn thẳng nối hai điểm M_1, M_2, còn vế trái của (4.1) là điểm nằm trên cung M_1M_2 với cùng một hoành độ $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$.

Hình 4.1

Như vậy, hàm lồi được đặc trưng bởi tính chất: Mọi điểm trên một cung bất kỳ của đồ thị nằm ở phía dưới dây cung hoặc ở ngay trên dây cung ấy.

Tính chất 1) *Tổng của hai hàm lồi trên X là một hàm lồi trên X.*

2) *Nếu $y = g(u)$ là một hàm lồi và đơn điệu tăng, còn $u = f(x)$ là hàm lồi, thì $g \circ f$ cũng là một hàm lồi.*

Các tính chất và các đặc trưng khác của hàm lồi sẽ được đề cập sâu hơn khi ta nghiên cứu các ứng dụng của đạo hàm.

4.5. Các hàm sơ cấp

4.5.1. Hàm đa thức

Hàm $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ với n là số nguyên dương, $a_i \in R$, $i = 1,...,n$; $a_0 \neq 0$ được gọi là *đa thức* bậc n của x.

Khi n=1 ta có hàm *affine* (nhưng đôi khi vẫn quen gọi là *hàm tuyến tính*).

Thí dụ *Hàm* y= 2x+1 là một hàm affine và có đồ thị là một đường thẳng (như Hình 4.2)

Hình 4.2

Hàm $y = x^3$-3x+1 là một hàm đa thức bậc 3 và có đồ thị như Hình 4.3.

4.5.2. Hàm phân thức

Hàm phân thức

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{n-1}x + b_m}$$

Hình 4.3

là thương của hai hàm đa thức.

Thí dụ Hàm phân thức

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

có đồ thị như Hình 4.4.

4.5.3. Hàm lũy thừa

$$y = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Hình 4.4

Khi α *là số nguyên dương* thì lũy thừa bậc α của một số được định nghĩa như phép nhân của số ấy với chính nó (α lần), khi α là số *nguyên âm* thì lũy thừa bậc α được định nghĩa như nghịch đảo của luỹ thừa bậc -α. Phép *khai căn bậc nguyên dương* của một số được định nghĩa như phép tính ngược của phép nâng lên luỹ thừa. Khi α là một số *hữu tỷ* (nghĩa là $\alpha = \frac{p}{q}$, với p là số nguyên và q là số tự nhiên) thì lũy thừa bậc α của một số được định nghĩa như là hợp của 2 phép toán: *nâng lên luỹ thừa* (với bậc p) và *khai căn* (với bậc q). Một cách tự nhiên, người ta có thể hình dung *luỹ thừa bậc vô tỷ* như là giới hạn của dãy các luỹ thừa bậc hữu tỷ, nhưng để có được một định nghĩa chặt chẽ về mặt toán học thì hoàn toàn không đơn giản. Một cách định nghĩa hàm luỹ thừa (với số mũ bất kỳ) là thông qua hàm số mũ và hàm số logarit sẽ được đưa trong phần sau. Trước mắt, ta tạm thời làm việc với hàm luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

Tập xác định của *hàm lũy thừa* phụ thuộc vào giá trị của số mũ α. Thí dụ, Hàm $y = x^n$ (*n* nguyên dương) xác định với mọi *x;* hàm $y = x^{-n}$ xác định với $x \neq 0$. Hàm $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ xác định với $x \geq 0$.

Hình 4.5

Thí dụ 1) *Hàm lũy thừa 1/3 (hay còn gọi là căn bậc 3)* $y = \sqrt[3]{x}$ xác định với mọi x và có đồ thị như Hình 4.5.

2) *Hàm* $y = x^{-1/3}$ xác định với $x \neq 0$, và có đồ thị như Hình 4.6.

Hình 4.6

4.5.4. Hàm mũ

Với hàm số mũ ta cũng gặp phải tình huống tương tự như với hàm luỹ thừa, nghĩa là chưa biết định nghĩa giá trị của nó tại các điểm vô tỷ như thế nào. Tuy nhiên, với những kiến thức đã biết về *dãy số* ta cũng có một phương pháp định nghĩa hàm mũ. Trước hết ta định nghĩa một hàm số điển hình sau đây:

Phép cho tương ứng mỗi số thực x *với giới hạn của của dãy số*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

khi n tiến ra vô cùng, được gọi là hàm số $\exp(.)$.

Trong khi nghiên cứu về giới hạn dãy số ta đã biết rằng giới hạn trên là tồn tại với mọi *x*, cho nên hàm số $\exp(.)$ có *miền xác định* là toàn bộ trục số. Dễ thấy rằng *miền giá trị* của hàm chỉ là nửa trục số dương.

Ta biết rằng $\exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, và cũng đã chứng minh được rằng khi x là một số hữu tỷ, tức là có dạng $x = \frac{p}{q}$, thì

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} = e^x.$$

Cho nên hàm exp(.) là một mở rộng tự nhiên của hàm mũ (cơ số **e**) từ miền *hữu tỷ* ra miền *vô tỷ*.

Cũng dễ dàng chứng minh được rằng nó là một hàm *đơn điệu tăng*, có các tính chất tương tự như luỹ thừa bậc hữu tỷ. Bằng cách vẽ trực tiếp, ta biết đồ thị của hàm exp(.) được mô tả trong Hình 4.7.

Hàm mũ $y = a^x$ với cơ số a bất kỳ ($a \geq 0, a \neq 1$) sẽ được định nghĩa sau khi ta có hàm logarit tự nhiên (hàm ngược của exp(.)).

Hình 4.7

Nhận xét Cách định nghĩa hàm mũ (exp(.)) như trên không cho được phương pháp đơn giản để tính giá trị của hàm, trừ ở những điểm hữu tỷ (mà ta có thể tính được, một cách không lấy gì làm dễ dàng, qua các phép luỹ thừa và khai căn của số **e**). Tuy nhiên, cách định nghĩa trên cũng cho một cách tính xấp xỉ khá đơn giản (với 3 phép tính: cộng, chia và nâng lên lũy thừa bậc nguyên dương), dù không có được công thức đánh giá độ lệch. Một cách định nghĩa hàm exp(.) khác, thuận tiện hơn cho việc đánh giá độ lệch khi tính toán xấp xỉ sẽ được đưa ra dựa trên các nghiên cứu về chuỗi hàm sau này.

4.5.5. Hàm lôgarit

$$y = \ln(x)$$

Hàm $\ln(x)$ là <u>*hàm ngược*</u> của hàm mũ

$$y = \exp(x).$$

Dễ thấy rằng nó có miền xác định là $(0;+\infty)$, miền giá trị là toàn bộ trục số, và là một hàm *đơn điệu tăng*. Đồ thị hàm luôn đi qua điểm (1; 0) và được mô tả trong Hình 4.8.

Hình 4.8

Hàm này còn có tên gọi là *logarit tự nhiên*.

Hàm số logarit với cơ số a bất kỳ ($a \geq 0, a \neq 1$) được định nghĩa theo công thức

$$\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Thí dụ *Hàm* $y = \log_{10} x$ có đồ thị được mô tả trong Hình 4.9.

Hàm số mũ với cơ số a bất kỳ ($a \geq 0, a \neq 1$) được định nghĩa theo công thức sau

$$a^x := \exp(x.\ln(a)) = e^{x\ln(a)}.$$

Rõ ràng nó là hàm xác định trên toàn trục số và đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $a < 1$.

Hình 4.9

Hàm số luỹ thừa với số mũ bất kỳ có thể được định nghĩa theo công thức sau:

$$x^a =: \exp(a\ln(x)) = e^{a.\ln(x)}.$$

Rõ ràng nó chỉ xác định trên nửa trục số dương và trùng với hàm luỹ thừa theo nghĩa thông thường khi a là số hữu tỷ.

4.5.6. Các hàm lượng giác

1) *Hàm* $y = \sin(x)$ có tập xác định là toàn bộ trục số, miền giá trị là [-1, 1]. Hàm $y = \sin(x)$ là hàm lÀ và tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Hình 4.10

2) *Hàm* $y = \cos(x)$ có tập xác định là toàn bộ trục số, miền giá trị là [-1, 1].
Hàm $y = \cos(x)$ là một hàm chẵn và tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Hình 4.11

3) *Hàm* $y = \tan(x)$ (có sách viết là tg(x)) được xác định bởi công thức

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ .$$

Nó có miền xác định là mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, và có tập giá trị là toàn bộ trục số. Đồ thị của nó được thể hiện trong Hình 4.12.

Hình 4.12

4) *Hàm cotang:* $y = \cot(x)$ (có sách viết là cotg(x)) xác định bởi công thức

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \ .$$

Nó có miền xác định là mọi $x \neq k\pi$, $k \in Z$, và có tập giá trị là toàn bộ trục số. Đồ thị của hàm $\cot(x)$ được thể hiện trong Hình 4.13.

Hình 4.13

Các hàm $y = \tan(x)$ và $y = \cot(x)$ đều là những hàm lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π.

Lưu ý Trong các sách giáo khoa ở nước ta các hàm $\tan(x)$ và $\cot(x)$ thường được viết là tg(x) và ctg(x). Để học sinh không bị bỡ ngỡ khi tiếp xúc với các tài liệu của nước ngoài, chúng tôi mạnh dạn đưa vào giáo trình này tên gọi của chúng theo thông lệ chung, được nhiều nước quen dùng, nhất là trong các chương trình tính toán thực hành trên máy. Một điều đáng lưu ý nữa là các chương trình tính toán trên máy luôn đòi hỏi phải viết hàm số theo đúng "cú pháp" là: biến số phải luôn luôn ở trong dấu ngoặc đơn. Chúng tôi khuyên các bạn học trẻ nên tuân thủ nguyên tắc này (để tránh mắc lỗi khi thực hành tính toán), nhưng chúng tôi cũng không có ý định bài trừ thói quen của các thế hệ trước thường bỏ qua dấu ngoặc, nhất là đối với các hàm lượng giác và lượng giác ngược

4.5.7. Các hàm lượng giác ngược

1) *Hàm Arcsin*: $y = \text{Arcsin}(x)$.

Với mỗi $x \in [-1,1]$ phương trình $x = \sin(y)$ có vô số nghiệm y. Ta ký hiệu tập tất cả các nghiệm đó là $y = \text{Arcsin}(x)$. Để có một nhánh đơn trị ta xét một khoảng, trong đó phương trình $x = \sin(y)$ chỉ có một nghiệm duy nhất, thí dụ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Trên đoạn này, ta có hàm ngược đơn trị, ký hiệu là $\arcsin(x)$ và gọi là *nhánh chính*.

Từ tính chất của các hàm lượng giác ta có biểu diễn sau :

Hình 4.14

$$\text{Arc}\sin(x) = (-1)^k \arcsin(x) + k\pi \ , \ k \in Z$$

Chú ý Vì $\sin(x)=0$ nên $\text{arsin}(0)=0$, tương tự ta có $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Mặc dù $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ nhưng ta không có $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{5\pi}{6}$ vì hàm $\arcsin(x)$ có miền giá trị là $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) *Hàm Arccos:* $y = \text{Arccos}(x)$ là hàm ngược của $y = \cos(x)$.

$$\text{Arc}\cos(x) = 2k\pi \pm \arccos(x) \ , \ k \in Z$$

trong đó, $\arccos(x)$ là nhánh chính, $0 \le \arccos(x) \le \pi$, $x \in [-1,1]$, có đồ thị như Hình 4.15.

Hình 4.15

3) *Hàm Arctang*: $y = \text{Arctan}(x)$ là hàm ngược của $\tan(x)$.

$$\text{Arc}\tan(x) = \arctan(x) + k\pi \ , \ k \in Z$$

trong đó, $\arctan(x)$ là nhánh chính,

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty; +\infty)$$

có đồ thị như Hình 4.16.

4) *Hàm Arccotang:* $y = \text{Arccot}(x)$

là hàm ngược của $y = \cot(x)$.

Hình 4.16

$$\text{Arc}\cot(x) = \text{arc}\cot(x) + k\pi$$

trong đó, $k \in Z$, $\text{arccot}(x)$ là nhánh chính,

$$0 < \text{arccot}(x) < \pi, \ x \in (-\infty; +\infty)$$

và có đồ thị như Hình 4.17.

Ta có thể tính giá trị của các hàm $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ và $\text{arccot}(x)$ một cách tương tự như đã làm cho hàm $\arcsin(x)$.

Hình 4.17

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 4

1. Câu hỏi củng cố lý thuyết

Bài 1 Cho $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là chẵn. Có thể nói gì về tính chẵn, lẻ của các hàm sau đây:

1) $y= f(x)+g(x)$, $y= f(x)$-$g(x)$;
2) $y=f(x)g(x)$;
3) $y=f(x)+c$, trong đó c là hằng số bất kỳ.

Bài 2 Cho $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là lẻ. Có thể nói gì về tính chẵn,lẻ của các hàm sau đây:

1) $y= f(x)+g(x)$, $y= f(x)$-$g(x)$;
2) $y=f(x)g(x)$;
3) $y=f(x)+c$, trong đó c là hằng số bất kỳ.

Bài 3 Tích của hai hàm lõm có luôn là lõm không?

Bài 4 Chứng minh rằng

1) Nếu $f(x)$ tăng thì $-f(x)$ giảm;

2) Nếu $f(x)$ tăng và $f(x) > 0$ với mọi x trên (a,b) thì $\dfrac{1}{f(x)}$ giảm trên (a,b).

Bài 5 Có kết luận gì về:

1) Tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ;

2) Tích của một hàm chẵn và một hàm lẻ.

Bài 6 1) Tổng của hai hàm tuần hoàn có là một hàm tuần hoàn không?

2) Tích của hai hàm tuần hoàn có là một hàm tuần hoàn không?

Tìm khoảng xác định của hàm số

2. Bài tập

2.1. Tìm khoảng xác định cúa hàm số

1) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$; 2) $y = \ln(2x^3 + 5x^2 - x + 5)$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{11-x}{2-x} - 3} + \log_2\left(\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{1 + x}\right)$.

2.2. Xem xét cấu trúc của hàm số

1. Tính chẵn, lẻ

Bài 1 Chứng minh rằng các hàm sau đây là chẵn:

1) $y = 5x^4 + 2x^2 + 1997$; 2) $y = \sin^2 x + \cos(2x)$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 3}$.

Bài 2 Chứng minh rằng các hàm sau là lẻ:

1) $y = x^3 + 7x$; 2) $y = \sin^3 x + 5x^5$.

Bài 3 Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

1) $y = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$; 2) $y = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$;

3) $y = \lg(x + \sqrt{1 + x^2}\,)$; 4) $y = x + \lg\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)$.

2. Tính đơn điệu và sự tồn tại hàm ngược

Bài 1 Tìm hàm ngược của các hàm sau đây:

1) $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$; 2) $y = \dfrac{ax - b}{cx - d}$;

3) $y = \sqrt{1 - x^2}$ nếu a) $X = [-1,0]$, b) $X = [0,1]$.

Bài 2 Cho y là hàm ẩn của x theo công thức: $y^2 + \sin^3 x + 2 - y = 0$. Tìm hàm ngược của nó.

3. Tính tuần hoàn

Bài 1 Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của các hàm số sau:

1) $y = [x]$, trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

2) $y = x - [x]$; 3) $y = \tan(x) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Bài 2 Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

1) $y = \dfrac{\cos(x\sqrt{2})}{1 + [\sin(x\sqrt{2})]^2}$; 2) $y = \dfrac{\sin(x)}{1 + \sin(x\sqrt{2})^2}$

Bài 3 Cho hàm số xác định như sau:

$$f(x) = 0, \text{ nếu } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ , và } f(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}, \text{ nếu } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi .$$

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) + f(ax)$ là tuần hoàn khi và chỉ khi a là số hữu tỷ.

4. Tính lồi và chứng minh bất đẳng thức

Bài 1 Chứng minh bất đẳng thức Jensen:

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[a,b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các điểm thuộc đoạn $[a,b]$ và $0 < a_1$, $i = 1 \ldots n$ thoả mãn điều kiện: $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Khi ấy:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \quad .$$

Bài 2 Với a,b, x, y là những số dương, hãy chứng minh bất đẳng thức:

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right) \quad .$$

Bài 3 Cho a,b,c là những số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3(a+b+c)} \le a^{\left(\frac{a}{a+b+c}\right)} b^{\left(\frac{b}{a+b+c}\right)} c^{\left(\frac{c}{a+b+c}\right)} \quad .$$

2.3. Vẽ đồ thị

Bài 1 Hãy vẽ đồ thị của các hàm số 1 biến sau:

1) $y = \dfrac{1}{x-2}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2-2}$; 3) $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$;

4) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; 5) $y = \sqrt{4-x^2}$.

Bài 2 Vẽ đồ thị của các hàm ẩn sau:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $x^2y + y^2x = 4$.

Bài 3 Vẽ đồ thị các hàm (2 biến) sau đây:

1) $z = \sin(x+y)$; 2) $z = \sin(x)\cos(y)$;

3) $z = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$; 4) $z = (x+y)^2\sin(x) + (x+y)^2\cos(y)$;

5) $z = x^2\cos(y) + y^2\sin(x)$ 6) $z = e^{(x+y)}(\sin(x) + \cos(y))$

3. Thực hành tính toán trên máy

Việc vào chương trình và thiết lập cụm xử lý được tiến hành như đã giới thiệu trong phần tính toán thực hành ở Chương 1.

3.1. Thực hành tìm tập xác định của hàm số

Bài toán tìm tập xác định của hàm số thực chất là bài toán giải phương trình, bất phương trình, hoặc giải hệ phương trình và hệ bất phương trình. Vì vậy để tìm tập xác định của hàm số ta có thể thực hiện các thao tác trên máy như các thao tác với bài toán giải phương trình và bất phương trình. Thí dụ, ta tìm tập xác định của hàm số

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

bằng các bước sau:

Bước 1: Vào lệnh xác định bất phương trình

```
[> ineq :=x^2-1>=0;
```

Sau dấu ";" đánh lệnh "Enter", máy sẽ hiện phương trình hoặc bất phương trình mô tả điều kiện để hàm số có nghĩa. Trong trường hợp này sẽ là

$$ineq := 0 \le x^2 - 1$$

Bước 2: Ra lệnh giải bất phương trình

```
[> solve(ineq,{x});
```

Sau dấu ";", đánh lệnh "Enter", máy sẽ hiện nghiệm của bất phương trình trên, đó cũng chính là tập xác định của hàm số đã cho, tức là

$$\{x \le -1\};\{1 \le x\}$$

3.2. Thực hành xác định một hàm số:

Việc xác định (hay định nghĩa) một hàm số (cho bằng biểu thức giải tích) thực hiện được nhờ dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> f:=x-> Bieu thuc cua x;
```

Thí dụ Ta khai báo (định nghĩa) hàm số $f(x) := \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}$ bằng dòng lệnh:

```
[> f:=x->sum(sin(k*x)/k,k=1..100);
```

Sau khi nhấn phím Enter để thực hiện lệnh sẽ xuất hiện công thức biểu diễn hàm số

$$f := x \to \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k},$$

và khi ấy ta có thể tính giá trị của hàm tại mỗi điểm bất kỳ (với độ chính xác tùy chọn) bằng các câu lệnh đơn giản như sau:

```
[> evalf(f(1));
                         1.060428939
[> evalf(f(Pi/5));
                         1.241256676
[> evalf(f(Pi/2));
                         .7803986631.
```

Ta có vẽ đồ thị của hàm này như mọi hàm thông thường khác (như sẽ hướng dẫn trong phần tiếp theo).

Lưu ý rằng "**biểu thức của x**" ở đây có thể là một biểu thức giải tích nói chung, và có thể chứa cả phép tính *giới hạn*, thí dụ hàm số exp(x) cũng là hàm được định nghĩa theo phương pháp này, bằng dòng lệnh

```
[> f:=x->limit((1+x/n)^n,n=infinity);
```

3.3. Thực hành vẽ đồ thị của hàm 1 biến

Sau dấu nhắc " [> " ta đưa vào dòng lệnh khởi động chương trình vẽ đồ thị có cú pháp như sau:

```
[> restart;
[> with(plots);
```

Sau đó ta vẽ đồ thị của hàm $y = f(x)$ bằng dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> plot(f(x),x=a..b,y=c..d,title=`y=f(x)`);
```

Trong đó các tham biến biểu thị rằng ta vẽ phần đồ thị của hàm $f(x)$ nằm trong hình chữ nhật là tích Descartes của miền xác định $[a,b]$ và miền giá trị $[c,d]$, với tiêu đề "$y = f(x)$". Nếu không cho giá trị của tham số c,d thì chương trình sẽ tự động xác định miền giá trị của hàm (ảnh của miền xác định đã cho) và gán giá trị biên của miền này vào cho các tham số c,d.

Thí dụ, để vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan(x)$, trong hình chữ nhật với x từ -2π đến 2π, và y từ -4 đến 4, ta làm như sau:

```
[> plot(tan(x),  x=-2*Pi..2*Pi,
y=-4..4, title = `y=tan(x)`);
```

Có thể vẽ đồ thị của nhiều hàm (trên cùng một miền xác định và miền giá trị), và cho mỗi đồ thị một mầu khác nhau.

Thí dụ Vẽ đồ thị của 2 hàm $y = x^2$ (màu đỏ) và $y = \sin(x)$ (màu xanh) trong miền xác định là đoạn $[-2, 2]$:

```
[>plot([x^2,sin(x)],x=-2..2,
       color=[red,blue]);
```

Khi hàm không liên tục (gián đoạn) thì chương trình tự động nối các điểm gián đoạn lại thành một đường liền.

Thí dụ Vẽ đồ thị hàm $y = \dfrac{x-1}{|x-1|}$

Hình 4.19

```
[> plot((x-1)/abs(x-1),x=-2..2,
        y=-2..2);
```

Muốn loại bỏ chức năng sinh đường tự nối liền trong đồ thị (khi hàm gián đoạn) ta đưa vào tham số "`discont = true`", cụ thể là

```
[>plot((x-1)/abs(x-1),x=-2..2,
        y=-2..2,discont=true);
```

3.4. Hàm xác định từng khúc

Hình 4.20

Hàm xác định từng khúc (gọi tắt là hàm từng khúc) là hàm được thiết lập từ một số hàm khác đã biết trước $f_1, f_2, ... f_n, f_{n+1}$ theo phương thức sau đây:

$f = f_1$ nếu x thoả mãn điều kiện dk-1

$f = f_2$ nếu x thoả mãn điều kiện dk-2 và không thoả dk-1

. . . .

$f = f_n$ nếu x thoả mãn điều kiện dk-n và không thoả các điều kiện dk-i, với $i < n$

$f = f_{n+1}$ trong trường hợp còn lại (tức là trong trường hợp tất cả các điều kiện dk-1, dk-2,... dk-n đều không được thoả mãn).

Các hàm dạng này rất hay gặp trong thực tiễn. Chúng rất phong phú và đa dạng. Việc xây dựng một hàm như vậy được thực hiện nhờ thủ tục có cú pháp như sau:

[> **f := piecewise**$(\text{dk}-1, f_1, \text{dk}-2, f_2, ..., \text{dk}-n, f_n, f_{n+1})$ **;**

Các điều kiện dk-i có thể là một quan hệ hoặc một tổ hợp Boolean của một số bất đẳng thức (nhưng không thể có đẳng thức). Trong thực tế, người ta thường chia trục số ra thành $n+1$ đoạn bởi các điểm : $a_1, a_2, ..., a_n$ và trên mỗi đoạn cho hàm nhận giá trị của một trong số các hàm cho trước. Khi ấy hàm f được xác định như sau:

[> **f := piecewise**$(x \le a_1, f_1, x \le a_2, f_2, ..., x \le a_n, f_n, f_{n+1})$ **;**

Đồ thị của hàm này cũng được vẽ như mọi hàm thông thường.

Thí dụ

```
[> f:=piecewise(x<=-1,
     x^2-1,x<=1,-abs(x)+1,
     sin(x-1)/x);
```

$$f := \begin{cases} x^2 - 1 & x \le -1 \\ 1 - |x| & x \le 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x} & \textit{otherwise} \end{cases}$$

```
[> plot(f,x=-2..5);
```

Hình 4.21

3.5. Vẽ đồ thị hàm ẩn

Một lớp hàm thú vị là lớp các hàm ẩn, được cho bởi một phương trình 2 ẩn: $f(x,y) = 0$. Dưới một số điều kiện nhất định, phương trình này xác định một hàm số $y = h(x)$. Trong trường hợp chung, các điểm (x,y) thỏa mãn phương trình này tạo thành một đường cong cho dưới dạng tham số. Ta có thể vẽ đồ thị của hàm này bằng lệnh **implicitplot** sau khi khởi động chương trình bằng lệnh with(plots) với cú pháp như sau:

```
[> with(plots):
[> implicitplot(f(x,y)=0,x=a..b,y=c..d);
```

Thí dụ 1) Ta vẽ Ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ bằng một lệnh:

Hình 4.22

```
[> implicitplot(x^2/9+y^2/4=1,  x=-4..4,y=-2..2);
```

2) Vẽ đường cong $y^2 + x^4 - x^2 = 0$

```
[> implicitplot(x^2-y^2-x^4=0,x=-1..1, y=-1..1);
```

Cần lưu ý khi vẽ đồ thị, nên thay đổi các khoảng [*a,b*] và [*c,d*] để được một đồ thị gần với thực tế hơn. Tuy nhiên, đồ thị chỉ cho ta một hình ảnh gần đúng với thực tế thôi.

Hình 4.23

3) Vẽ đồ thị của hàm ẩn $x^2 - y^2 = 1$ và hàm hiển $y = e^x$ trên cùng một miền

```
[> implicitplot({x^2-y^2=1,y=exp(x)},
              x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
```

3.6. Thực hành vẽ đồ thị hàm 2 biến

Hình 4.24

Các hàm 2 biến có đồ thị là một mặt (cong) trong không gian 3 chiều. Tương tự như trong trường hợp hàm 1 biến, ta chỉ có thể vẽ mặt này trong một miền giới hạn bởi một hình hộp. Tham số về miền xác định (hình chữ nhật) cần phải cho trước, còn miền giá trị sẽ được tính một cách tự động. Một điểm khác cơ bản là lệnh vẽ đồ thị sẽ là `plot3d`, thay vì `plot` như trong trường hợp 1 chiều.

Thí dụ Ta vẽ đồ thị hàm hai biến $z = e^{-x^2-y^2}$ bằng các dòng lệnh sau:

```
[> plot3d(x*exp(-x^2-y^2),
       x=-2..2,y=-2..2);
```

Tương tự như đối với hàm 1 biến, ta có thể vẽ đồ thị của nhiều hàm (trên cùng 1 miền xác định).

Hình 4.25

CHƯƠNG 5

Giới hạn và Tính liên tục của hàm số

5.1. Giới hạn của hàm số

5.1.1. Khái niệm giới hạn

Giả sử f là một hàm số xác định trên tập X và a là một điểm tụ của tập X.

Định nghĩa *Số L được gọi là giới hạn của hàm f khi x dần tới a* (hay: giới hạn của hàm f tại a) *nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ bất kỳ, có thể tìm được số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn $0 < |x - a| < \delta$ thì ta có*

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to a$.

Về mặt hình học, ta có thể hình dung như sau: nếu L là giới hạn của f tại a thì với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có thể tìm được một số $\delta > 0$ sao cho đồ thị của hàm f trên khoảng $(a-\delta, a+\delta)$ nằm trọn trong hình chữ nhật tâm (a, L) kích thước là $2\delta \times 2\varepsilon$.

Hình 5.1

Thí dụ $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. Thật vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta tìm được số $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, và từ bất đẳng thức $|x - 0| < \sqrt{\varepsilon}$ ta có ngay $|x^2 - 0| < \varepsilon$.

Chú ý Tại điểm $x = a$ hàm số f có thể không xác định, nhưng giới hạn của hàm số tại đó có thể vẫn tồn tại.

Thí dụ Hàm số $y = x\sin\frac{1}{x}$ không xác định tại 0, nhưng vẫn tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (Hình 5.2).

Hình 5.2.

Thật vậy, với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, chọn $\delta = \varepsilon$. Do $|\sin\alpha| \le 1$, nên với mọi $x \neq 0$, $|x - 0| < \delta$, ta có

$$\left|x\sin\frac{1}{x} - 0 = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \delta = \varepsilon .\right.$$

Chú ý Không nhất thiết bao giờ cũng có $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Thí dụ Hàm số $y = f(x) = [1 - |x|]$ có giới hạn bằng 0 khi x tiến tới 0, tuy nhiên $f(0) = 1$.

Từ các ví dụ trên, ta thấy rằng số δ được chọn nói chung phụ thuộc vào ba yếu tố: số ε, điểm a và hàm f.

Trong Chương 2, chúng ta đã biết khái niệm *dãy số* và *giới hạn của dãy số*. Để thấy được mối liên quan giữa các khái niệm *giới hạn của hàm số* và giới hạn của dãy số, chúng ta có

Định lý $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *khi và chỉ khi, với mọi dãy số* $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ *tiến dần đến* a, *dãy số* $\{f(x_n)\}$ *hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Chứng minh 1) Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Lấy dãy số bất kỳ $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ *tiến dần đến* a, ta chỉ ra rằng *dãy số* $\{f(x_n)\}$ *hội tụ tới* L. Thật vậy, với số dương ε nhỏ bao nhiêu tùy ý, từ định nghĩa giới hạn của hàm f ta tìm được số $\delta > 0$ sao cho với $|x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$. Vì a là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ nên, theo định nghĩa, tồn tại số N sao cho với $n > N$ thì $|x_n - a| < \delta$. Kết hợp lại ta thấy rằng nếu $n > N$ thì $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Theo định nghĩa về *giới hạn của dãy số* chúng ta có *dãy số* $\{f(x_n)\}$ *hội tụ tới* L.

2) Ngược lại, giả sử hàm f không có giới hạn tại a bằng L, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại dãy số $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ *tiến dần đến* a, mà dãy các giá trị tương ứng của nó $\{f(x_n)\}$ không hội tụ tới L. Thật vậy, khi hàm f không có giới hạn tại a bằng L thì có nghĩa là tồn tại số dương α sao cho với mọi $\delta > 0$ luôn tìm được điểm x cách a không quá δ, mà $|f(x) - L| > \alpha$. Lần lượt cho δ nhận các giá trị bằng $1/n$ (với n=1,2,3,....), ta sẽ tìm được dãy các điểm $\{x_n\}$ thỏa mãn $|x_n - a| < 1/n$ và $|f(x_n) - L| > \alpha$. Dễ dàng thấy rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến a và $\{f(x_n)\}$ không hội tụ tới L.

Định lý đã được chứng minh đầy đủ.

Nhận xét Định lý trên không chỉ cho phép ta hình dung *giới hạn của hàm số* thông qua ngôn ngữ *giới hạn của dãy số*, mà nó còn đặc biệt tiện lợi khi ta cần chứng minh sự không tồn tại của giới hạn. Muốn vậy, ta chỉ cần xây dựng hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{x'_n\}$ cùng tiến tới a, sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$.

Thí dụ 1) Hàm y = sgn(x) không có giới hạn tại 0. Thật vậy, chọn $\{x_n\} \to 0, x_n > 0$ và $\{x'_n\} \to 0, x'_n < 0$. Khi ấy ta có

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n) = 1 \neq \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n') = -1 .$$

2) Hàm $y = \sin\dfrac{1}{x}$ không có giới hạn tại 0. Thật vậy, chọn $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ và $x'_n = 1/(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi)$, $n \in N$. Khi ấy, các dãy $\{ x_n \}$ và $\{ x'_n \}$ cùng tiến tới 0, nhưng

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin x'_n .$$

3) Hàm Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi x là số hữu tỷ} \\ 0 & \text{khi x là số vô tỷ} \end{cases}$$

là hàm không có giới hạn tại bất kỳ điểm nào. Thật vậy, với mỗi điểm a bất kỳ, do tính trù mật của $\mathbb{Q}$ và tính trù mật của $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ chúng ta luôn tìm được dãy số hữu tỷ $\{x_n\}$ và dãy số vô tỷ $\{x'_n\}$ *cùng tiến tới* điểm a. Rõ ràng

$$\lim_{n\to\infty} \chi(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \chi(x'_n)$$

cho nên hàm không có giới hạn tại a.

5.1.2. Một số khái niệm liên quan

1. Giới hạn một phía

Số L được gọi là <u>giới hạn phải</u> (<u>giới hạn trái</u>) của hàm f khi x tiến tới a từ bên phải (từ bên trái) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ *tồn tại số* $\delta > 0$ *sao cho* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *với mọi* $x \in X$, $0 < x - a < \delta$ ($0 < a - x < \delta$).

Ký hiệu Giới hạn phải: $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a+)$;

Giới hạn trái: $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a-)$.

Trong Thí dụ 5 ta có:

$$\text{sgn}(0+) = \lim_{x\to 0+} \text{sgn}(x) = 1 , \qquad \text{sgn}(0-) = \lim_{x\to 0-} \text{sgn}(x) = -1$$

Thí dụ 1) Hàm phần nguyên: $y = [\,x\,]$ có giới hạn trái và phải tại 0 như sau:

$$\lim_{x\to 0+} [x] = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0-} [x] = -1 .$$

2) Hàm $y = \sqrt{x-1}$ chỉ có giới hạn phải tại $x = 1$ bằng 0, không có giới hạn trái vì với $x < 1$ hàm số không xác định.

Mệnh đề *Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *là tồn tại giới hạn trái, giới hạn phải tại a và*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L .$$

<u>Chứng minh.</u> *Điều kiện cần.* Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Từ định nghĩa ta suy ra ngay $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = L$.

Điều kiện đủ. Với mọi số dương ε, từ điều kiện $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$ suy ra tìm được số dương δ_1 sao cho $|f(x)-L| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$, $0 < x - a < \delta_1$, và từ điều kiện $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = L$ suy ra tìm được số dương δ_2 sao cho $|f(x)-L| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$, $0 < a - x < \delta_2$. Lấy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ta sẽ có $|f(x)-L| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$, $0 < x - a < \delta$ và $0 < a - x < \delta$, hay $0 < |a - x| < \delta$. Chứng tỏ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Mệnh đề đã được chứng minh xong.

2. Giới hạn bằng vô cùng và giới hạn ở vô cùng

Nếu với mỗi số $E > 0$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $f(x) > E$ ($f(x) < -E$) với mọi x thoả mãn bất đẳng thức $0 < |x-a| < \delta$ thì ta nói f có giới hạn bằng $+\infty$ $(-\infty)$ khi x tiến tới a và ký hiệu:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ \ (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\ ).$$

Thí dụ 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Bây giờ ta giả thiết rằng hàm f xác định trên tập không bị chặn.

Số L được gọi là giới hạn của f khi x tiến ra $+\infty$ $(-\infty)$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $M > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn bất đẳng thức $x > M$ ($x < -M$) ta có: $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$).

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

Nếu với mỗi số $E > 0$ tồn tại số $M > 0$ sao cho $f(x) > E$ ($f(x) < -E$) với mọi $x \in X$ thoả mãn $x > M$ thì ta nói hàm f có giới hạn $+\infty$ $(-\infty)$ khi x tiến ra $+\infty$ và ký hiệu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\ )$$

Tương tự cho $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3) Xét hàm mũ $y = a^x$

Với $a > 1$ ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Với $0 < a < 1$ ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Ta cũng có thể mở rộng khái niệm giới hạn về một phía cho giới hạn vô tận. Như trong Thí dụ 2 ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$.

4) $y = \tan(x)$.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan(x) = -\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan(x) = +\infty.$$

5) $y = \log_a(x)$

Với $a > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$,

Với $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$

Cũng cần lưu ý rằng $\lim\limits_{x\to 0^-} \log_a(x)$ không tồn tại vì hàm logarit không xác định bên trái trục số thực.

3. Giới hạn trên và giới hạn dưới

Cho $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ (trong X) hội tụ tới *a*. Ta gọi giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ (nếu có) là *giới hạn riêng* của *f*. Trong tập tất cả những giới hạn riêng ta có *biên trên* (gọi là giới hạn trên) và *biên dưới* (gọi là giới hạn dưới) ký hiệu

$$\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) \quad \text{và} \quad \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) \quad \text{hay} \quad \limsup\limits_{x\to a} f(x) \quad \text{và} \quad \liminf\limits_{x\to a} f(x).$$

Mệnh đề *Tồn tại* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *khi và chỉ khi* $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$.

Chứng minh *Điều kiện cần* Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Khi ấy với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to a$ ta đều có $\lim\limits_{x_x\to a} f(x_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Điều này chứng tỏ giới hạn trên và giới hạn dưới đều tồn tại và bằng nhau, tức là

$$\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x).$$

Điều kiện đủ Giả sử $A = \overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$. Khi ấy với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to a$ giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x_n)$ tồn tại và bằng *A*. Vậy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại.

5.1.3. Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

Định lý *Tồn tại giới hạn hữu hạn của* f *tại* a *(tại* ∞*) khi và chỉ khi với mỗi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại số* $\delta > 0$ $(\Delta > 0)$ *sao cho* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ *với mọi* $x_1, x_2 \in X$, $0 < |x_1 - a| < \delta$, $0 < |x_2 - a| < \delta$ $(x_1, x_2 > \Delta)$.

Chứng minh *Điều kiện cần* Xét trường hợp *a* hữu hạn. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Theo định nghĩa giới hạn với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ với mọi $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$. Chứng tỏ với $x_1, x_2 \in X$, $0 < |x_1 - a| < \delta$, $0 < |x_2 - a| < \delta$, ta có:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - L) + (L - f(x_2))| \le |f(x_1) - L| + |f(x_2) - L| < \varepsilon.$$

Điều kiện đủ Cho $\varepsilon > 0$. Theo giả thiết tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi cặp $x_1, x_2 \in X$ thỏa mãn $0 < |x_1 - a| < \delta$, $0 < |x_2 - a| < \delta$ thì $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Lấy dãy $\{x_n\}, x_n \in X, x_n \ne a$ bất kỳ, mà $x_n \to a$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x_n\to a} f(x_n)$ tồn tại.

Thật vậy, vì $x_n \to a$ nên tồn tại số N sao cho với mọi $m, n > N$ thì $0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_m - a| < \delta$ và theo giả thiết ta có $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Từ tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của dãy số suy ra tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Với mọi dãy $\{ x_n' \}$ khác, mà $x_n' \to a$, ta cũng có: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = L$. Thật vậy, giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = L' \neq L$. Khi ấy với $\varepsilon = |L - L'|$ tồn tại số N sao cho với mọi $n > N$ ta có:

$$|f(x_n) - L| < \frac{\varepsilon}{3}, |f(x_n') - L'| < \frac{\varepsilon}{3}, |f(x_n) - f(x_n')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Từ đây suy ra sai khác giữa L và L' là nhỏ hơn hẳn ε. Mâu thuẫn này chứng tỏ $L = L'$.

Theo định lý về quan hệ giữa giới hạn của hàm số và giới hạn của dãy số ta suy ra $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Trường hợp a vô hạn được chứng minh tương tự, và định lý được chứng minh đầy đủ.

5.2. Tính chất và các phép toán của giới hạn

5.2.1. Các tính chất cơ bản

Mệnh đề (Tính duy nhất của giới hạn) *Giới hạn của f khi x tiến tới a, nếu có, là duy nhất.*

Chứng minh Suy từ tính duy nhất của giới hạn dãy số và định lý về quan hệ giữa giới hạn hàm số và giới hạn dãy số trong phần trên.

Mệnh đề (Tính bị chặn) *Nếu có 2 số A và B thoả mãn $A < f(x) < B$ với mọi x trong lân cận nào đó của điểm a và nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ thì $L_1 \le L \le L_2$.*

Đảo lại, nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ và $A < L < B$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $A < f(x) < B$ với mọi $x \in X, |x - a| < \delta$.

Chứng minh Phần thuận dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

Để chứng minh phần ngược lại, chọn $\varepsilon = \min\{L - A, B - L\} > 0$. Do $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ với mọi $x \in X$ thoả mãn $0 < |x - a| < \delta$. Chứng tỏ:

$$A = L - (L - A) \le L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \le L + (B - L) = B.$$

Mệnh đề đã được chứng minh xong.

Mệnh đề (Tính bảo toàn thứ tự) *Nếu $f(x) \ge g(x)$ với mọi x trong lân cận nào đó của điểm a và nếu tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ge \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*

Đảo lại, nếu tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $f(x) < g(x)$ với mọi $x \in X, |x - a| < \delta$.

Chứng minh *Phần thuận*. Giả sử ngược lại, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 < \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Chọn L sao cho $L_1 < L < L_2$. Theo mệnh đề trên tồn tại các số $\delta_1, \delta_2 > 0$ sao cho

$$f(x) < L \text{ với mọi } x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta_1$$

và

$$g(x) > L \text{ với mọi } x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta_2.$$

Đặt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, ta có

$$f(x) < L < g(x) \text{ với mọi } x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(x) \ge g(x)$, cho nên ta phải có $L_1 \ge L_2$.

Phần đảo Suy ra từ phần đảo của mệnh đề trước.

Mệnh đề đã được chứng minh xong.

Mệnh đề *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Chứng minh Cho $\varepsilon > 0$, vì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nên tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta.$$

Do $\big||A| - |B|\big| \le |A - B|$ ta suy ra $\big||f(x)| - |L|\big| \le |f(x) - L| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Chú ý Đảo lại không đúng, thí dụ $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, tuy nhiên $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ không tồn tại.

5.2.2. Các phép toán số học của giới hạn

Định lý *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *thì*

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$).

(Các đẳng thức trên được hiểu theo nghĩa các giới hạn ở vế trái tồn tại và bằng vế phải).

Chứng minh Dễ dàng suy ra từ các quy tắc tính giới hạn của dãy số và định lý về quan hệ giữa giới hạn hàm số và giới hạn của dãy số.

Chú ý *1)* Các công thức trên vẫn còn đúng nếu thay a bởi *vô cùng*. Nó cũng đúng cho giới hạn một phía.

2) Dễ dàng tìm các ví dụ chỉ ra rằng các giới hạn của vế trái trong các công thức trên tồn tại, mà từng giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ không tồn tại (tức là vế phải không có).

Hệ quả 1) $\lim_{x\to a} c.f(x) = c.\lim_{x\to a} f(x)$;

2) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$.

Chú ý Định lý trên cho phép dễ dàng tính giới hạn của các hàm số phức tạp thông qua các hàm đơn giản hơn, tuy nhiên nó đòi hỏi các giới hạn của f và g phải là hữu hạn. Khi chúng không phải là hữu hạn thì định lý không áp dụng được và ta phải tìm các phương pháp xử lý đặc biệt đối với từng trường hợp cụ thể. Các trường hợp như vậy thường được gọi là các *dạng vô định*, hay dạng *không xác định*, bao gồm:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0}.$$

5.2.3. Giới hạn của hàm hợp

Định lý *Cho f và g là hai hàm số sao cho miền giá trị của f nằm trong miền xác định của g. Ngoài ra, $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{y\to A} g(y) = L$. Khi ấy*

$$\lim_{x\to a} g[f(x)] = L.$$

Chứng minh Do $\lim_{y\to a} g(y) = L$ nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\beta > 0$ sao cho $|g(y) - L| < \varepsilon$ với mọi y thỏa mãn $0 < |y - A| < \beta$. Với $\beta > 0$ tìm được ở trên, do $\lim_{x\to a} f(x) = A$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - A| < \beta$ với mọi x thỏa mãn. Kết hợp cả hai điều trên ta thấy: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sao cho $|g[f(x)] - L| < \varepsilon$ với mọi x thỏa mãn $0 < |x - a| < \delta$. Chứng tỏ $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = L$.

5.2.4. Hai nguyên lý cơ bản về giới hạn hàm số

Nguyên lý sau đây thường được gọi là nguyên lý về *giới hạn của hàm đơn điệu bị chặn*.

Định lý *Giả sử f là một hàm đơn điệu trên khoảng (a,b) và c là một điểm nằm trong khoảng đó. Nếu f bị chặn thì tồn tại các giới hạn từng phía (hữu hạn) $\lim_{x\to c^-} f(x)$ và $\lim_{x\to c^+} f(x)$.*

Chứng minh Không làm giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng hàm f là *đơn điệu tăng*, và ta chỉ cần chứng minh sự tồn tại của giới hạn trái (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Lấy một dãy số tăng dần $\{x_n\}$ hội tụ đến điểm c. Do tính đơn điệu tăng và bị chặn của hàm f, dãy số $\{f(x_n)\}$ là tăng và bị chặn trên, cho nên nó có giới hạn là L. Ta sẽ chỉ ra rằng $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Thật vậy, với số dương ε nhỏ bao nhiêu tùy ý, ta tìm được số N đủ lớn sao cho với mọi $n \ge N$ ta có $0 \le L - f(x_n) \le \varepsilon$. Lấy $\delta = c - x_N > 0$, dễ thấy rằng với mỗi x nằm trong lân cận δ của điểm c về phía trái (tức là thỏa mãn $c - \delta < x < c$) ta luôn tìm được $n > N$ sao cho điểm x_n nằm giữa x và c, và khi ấy (do tính đơn điệu của f)

$$f(x_N) = f(c-\delta) \le f(x) \le f(x_n) \le L,$$

nghĩa là $0 \le L - f(x) \le L - f(x_N) \le \varepsilon$, hay $|L - f(x)| \le \varepsilon$. Từ định nghĩa về giới hạn trái ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét Từ cách chứng minh trên ta dễ dàng thấy rằng nếu hàm đơn điệu mà không bị chặn trong mọi lân cận của điểm nào đó thì nó có giới hạn bằng vô cùng tại điểm ấy.

Nguyên lý sau đây thường được gọi là nguyên lý về *giới hạn của hàm bị kẹp giữa 2 hàm có cùng giới hạn*.

Định lý *Giả sử tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn $0 < |x - a| < \delta$ hàm $f(x)$ bị "kẹp" giữa hai hàm $g(x)$, $h(x)$ (tức là $g(x) \le f(x) \le h(x)$) và tồn tại*

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L .$$

Khi ấy tồn tại giới hạn của f khi x tiến tới a và $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

<u>Chứng minh</u> Cho $\varepsilon > 0$, vì $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ nên tồn tại $\delta_1, \delta_2 > 0$ để

$$L - \varepsilon \le g(x) \le L + \varepsilon \quad \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta_1,$$
$$L - \varepsilon \le h(x) \le L + \varepsilon \quad \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Đặt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Do tính bị kẹp của f, với $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$, ta có

$$L - \varepsilon \le g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \varepsilon ,$$

hay $|L - f(x)| \le \varepsilon$. Điều này chứng tỏ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ và định lý được chứng minh xong.

Lưu ý Hai nguyên lý nêu trên tuy đơn giản nhưng không tầm thường chút nào, vì chúng sẽ là công cụ chủ yếu cho ta tính giới hạn của hầu hết các hàm cơ bản thường gặp trong chương trình giải tích (như sẽ thấy trong phần sau).

5.2.5. Giới hạn của một số hàm cơ bản

1. Giới hạn của các hàm đa thức và phân thức

Từ phép lấy giới hạn của tổng, tích, thương ta có ngay cách tính giới hạn của các đa thức và phân thức. Cụ thể, nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức thì

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a) \quad ;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad khi\ Q(a) \ne 0 \ .$$

2. Giới hạn của các hàm lượng giác

Chú ý rằng $0 < |\sin(x)| < |x|$, cho nên

$$|\sin(x) - \sin(a)| = |2.\cos(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2})| \le 2.1.|\frac{x-a}{2}| = |x - a|,$$

Từ nguyên lý về giới hạn của *hàm bị kẹp giữa 2 hàm có cùng giới hạn* ta suy ra $\lim_{x\to a}[\sin(x) - \sin(a)] = 0$, hay

$$\boxed{\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a).}$$

Trong trường hợp riêng ta có $\lim_{x\to 0}\sin(x)=\sin(0)=0$.

Tương tự như vậy ta tính được

$$\boxed{\lim_{x\to a}\cos(x)=\cos(a)}$$

và trong trường hợp riêng ta có $\lim_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1$.

Từ các kết quả trên và dựa vào phép lấy giới hạn của thương ta có

$$\boxed{\lim_{x\to a}\tan(x)=\tan(a)}$$

và

$$\boxed{\lim_{x\to a}\cot(x)=\cot(a)\ .}$$

Một trong những kết quả hay về giới hạn của hàm lượng giác là

Mệnh đề $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

<u>Chứng minh</u> Nhận xét rằng tam giác vuông *OBH* nằm gọn trong hình quạt *OBA*, và hình quạt này lại nằm gọn trong tam giác vuông *OAC*, cho nên từ công thức tính diện tích các hình này ta suy ra đoạn thẳng *BH* nhỏ hơn độ dài cung *AB*, và độ dài cung này nhỏ hơn đoạn *AC*. Gọi x là độ dài cung *AB*, ta có

$$\sin(x)<x<\tan(x)\ ,$$

và suy ra

$$\cos(x)<\frac{\sin(x)}{x}<1\,.$$

Như đã thấy $\lim_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1$, cho nên từ nguyên lý về *giới hạn của hàm bị kẹp giữa 2 hàm có cùng giới hạn* ta suy ra điều cần chứng minh.

Hình 5.3

3. Giới hạn của hàm số mũ

Ta đã định nghĩa hàm số mũ e^x (còn được gọi là $\exp(x)$) như phép cho tương ứng mỗi số x với *giới hạn* của dãy số $\{(1+x/n)^n\}$, nghĩa là $e^x:=\exp(x):=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Ta biết rằng nó là hàm *đơn điệu tăng* và có đầy đủ các tính chất tương tự như lũy thừa bậc hữu tỷ, thí dụ như $e^{x+y}=e^x.e^y$, $e^{-x}=1/e^x$. Bây giờ ta hãy tính giới hạn của hàm này (tại mỗi điểm bất kỳ).

Để ý rằng với $x_k=e^{1/k}-1$ thì x_k là số dương và

$$e=(1+x_k)^k=1+kx_k+\ldots+x_k^k>1+kx_k\ .$$

Cho nên $0<x_k<(e-1)/k$, và từ tính chất của dãy *bị kẹp giữa 2dãy có cùng giới hạn* ta suy ra $\lim_{k\to\infty}x_k=0$, hay là

$$\lim_{k\to\infty}e^{1/k}=1\,.$$

Từ đây ta cũng có $\lim\limits_{k\to\infty} e^{-1/k} = 1/[\lim\limits_{k\to\infty} e^{1/k}] = 1 = \lim\limits_{k\to\infty} e^{1/k}$.

Vì e^x là hàm *đơn điệu tăng* nên nó có *giới hạn trái* và *giới hạn phải* tại mọi điểm (theo nguyên lý về *giới hạn của hàm đơn điệu bị chặn*). Từ mối quan hệ giữa *giới hạn hàm số* và *giới hạn dãy số* ta suy ra

$$\lim_{x\to a+} e^x = \lim_{k\to\infty} e^{a+1/k} = \lim_{k\to\infty}[e^a.e^{1/k}] = e^a \lim_{k\to\infty} e^{1/k} = e^a.1 = e^a ,$$
$$\lim_{x\to a-} e^x = \lim_{k\to\infty} e^{a-1/k} = \lim_{k\to\infty}[e^a.e^{-1/k}] = e^a \lim_{k\to\infty} e^{-1/k} = e^a.1 = e^a .$$

Tức là tồn tại giới hạn

$$\boxed{\lim_{x\to a} e^x = e^a.}$$

Một trong những tính chất quan trọng về giới hạn hàm mũ thể hiện ở mệnh đề sau.

Mệnh đề $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

<u>Chứng minh</u> Chú ý rằng

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x , \quad \forall x \geq -1, \quad \forall n \geq 1$$

Qua giới hạn khi cho n tiến ra vô cùng ta suy ra $e^x \geq 1+x$. Thay x bởi $-x$ ta có $e^{-x} > 1-x$, suy ra khi $|x| < 1$ thì $1-x > 0$ và $e^x < \dfrac{1}{1-x} = 1+\dfrac{x}{1-x}$.

Tổng hợp lại ta có $x < e^x - 1 < \dfrac{x}{1-x}$. Như vậy khi x dương thì

$$1 < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-x}$$

và trong trường hợp x âm thì các bất đẳng thức cùng đổi chiều. Từ mệnh đề về giới hạn của hàm bị kẹp giữa 2 hàm có giới hạn ta suy ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

5.3. Tính liên tục của hàm số

5.3.1. Khái niệm liên tục

Giả sử hàm f xác định trên một đoạn chứa x_0.

<u>Định nghĩa</u> *Hàm f được gọi là <u>liên tục</u> tại điểm x_0 nếu:*

1) *Tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

2) $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Định nghĩa trên có nghĩa là: khi biến số x dần tới x_0 thì giá trị của hàm số tại x cũng tiến dần tới giá trị của hàm số tại điểm x_0.

Ký hiệu số gia của biến số là

$$\Delta x := x - x_0$$

và số gia của hàm số (tương ứng với số gia Δx của biến số) là

$$\Delta y := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \ .$$

Khi ấy định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau đây:
Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Vì tính liên tục của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn nên ta còn có những định nghĩa tương đương sau:

Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ tiến tới x_0 ta đều có $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$.

Theo *ngôn ngữ* $\varepsilon - \delta$ thì

Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi x: $|x - a| < \delta$ ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ta có thể sử dụng một trong bốn định nghĩa trên vào từng hoàn cảnh thích hợp.

Nếu f liên tục *tại mọi điểm* của X thì ta nói nó *liên tục trên X.*

Tương tự như trong khái niệm giới hạn, ta có thể đưa ra khái niệm *liên tục trái* và *liên tục phải.*

Hàm f được gọi là liên tục phải (liên tục trái) tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)) \ .$$

Thí dụ 1) Từ phép tính giới hạn của các hàm cơ bản (mục trên) ta suy ra các hàm *đa thức, phân thức, lượng giác* và *hàm mũ* là liên tục.
2) Những hàm $y = [x]$, $y = x - [x]$ là *liên tục phải*, nhưng không *liên tục trái* tại các điểm nguyên.

3) Các hàm $y = \mathrm{sgn}(x)$, $y = \dfrac{1}{x}$ không liên tục cả trái và phải tại điểm 0 .

4) Hàm Dirichlet không liên tục tại bất cứ điểm nào.

Mệnh đề *Hàm f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại đó. Khi ấy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x) \ .$$

Chứng minh Suy ra từ định lý về quan hệ giữa giới hạn và giới hạn từng phía.

5.3.2. Điểm gián đoạn

Những điểm mà tại đó hàm số không liên tục (tức là giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc giới hạn đó tồn tại nhưng không bằng $f(x_0)$) được gọi là điểm gián đoạn của f .

Tương tự ta có thể định nghĩa điểm gián đoạn trái và gián đoạn phải.

Ta có thể phân loại các điểm gián đoạn theo *nguyên nhân* gây ra sự gián đoạn đó.

Giả sử x_0 là điểm gián đoạn trái. Khi ấy có ba khả năng xảy ra:

a) Tồn tại giới hạn trái (hữu hạn) nhưng $f(x_0^-) \neq f(x_0)$;

b) $f(x_0^-) = \pm\infty$;

c) Không tồn tại giới hạn trái.

Nếu f gián đoạn tại x_0 do *a)* thì ta nói x_0 là <u>*điểm gián đoạn loại 1*</u>.

Nếu f gián đoạn tại x_0 do *b)* hoặc *c)* thì ta nói x_0 là <u>*điểm gián đoạn loại 2*</u>.

Nếu f gián đoạn tại x_0 nhưng $f(x_o^-) = f(x_0^+)$ và khác $f(x_0)$ thì ta nói f có <u>*gián đoạn khử được*</u> tại x_0. Nếu f có *gián đoạn khử được* tại x_0 thì thay giá trị của f tại x_0 bằng $f(x_0^-)$ ta được một hàm liên tục tại x_0.

5.3.3. Các định lý cơ bản về hàm liên tục

Định lý (Bolzano-Cauchy 1) *Nếu f liên tục trên $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì có ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

<u>Chứng minh</u> Không hạn chế tổng quát, ta có thể coi $f(a) > 0, f(b) < 0$. Chia $[a,b]$ thành hai đoạn bởi điểm chia $\frac{a+b}{2}$. Nếu $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ thì $c = \frac{a+b}{2}$ chính là điểm cần tìm. Nếu $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ thì ta chọn $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, nếu $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ thì ta chọn $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Như vậy, có thể xảy ra khả năng sau hữu hạn n bước ta đi đến điểm $c = \frac{a_n + b_n}{2}$ với $f(c) = 0$, còn trong trường hợp ngược lại thì ta được một dãy vô hạn các đoạn lồng nhau $[a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a_n, b_n]$ sao cho $f(a_k) > 0$, $f(b_k) < 0$. Hơn nữa, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Theo tính chất của họ các đoạn lồng nhau ta tìm được điểm $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in N$. Vì $|a_n - c|$ và $|b_n - c|$ đều không vượt quá $|b_n - a_n| = (b-a)/2^n$ cho nên cùng tiến tới 0 khi n tiến ra vô cùng, nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Vì $f(a_n) > 0$ và $f(b_n) < 0, \forall n$, nên theo tính chất liên tục của hàm f ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \geq 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \leq 0$. Chứng tỏ $f(c) = 0$. Mà $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$. Vậy $c \in (a,b)$.

Định lý đã được chứng minh xong.

Định lý (Bolzano - Cauchy 2) *Giả sử f liên tục trên $[a,b]$ và $f(a) = A \neq B = f(b)$. Khi ấy f nhận mọi giá trị trung gian giữa A và B. (Ta nói : f lấp đầy khoảng $[A,B]$).*

Chứng minh Coi $A < B$. Giả sử C là một số bất kỳ giữa A và B, $A < C < B$. Xét hàm số $g(x) = f(x) - C$. Rõ ràng g liên tục và $g(a).g(b) < 0$. Theo định lý trên tồn tại số $c \in (a,b)$ sao cho $g(c) = 0$, tức là $f(c) = C$.

Mệnh đề *Hàm đơn điệu tăng (hoặc giảm) chỉ có thể có điểm gián đoạn loại I.*

Chứng minh Suy từ sự tồn tại giới hạn từng phía của hàm đơn điệu.

Hệ quả *Nếu f đơn điệu tăng (giảm) trên đoạn X, nhận giá trị trong đoạn Y và lấp đầy đoạn ấy thì nó liên tục trên X.*

Chứng minh Suy ra từ định lý trên như một bài tập vận dụng.

Các tính chất khác của hàm liên tục sẽ được thiết lập cùng với tính liên tục đều của hàm trên đoạn (trong phần sau).

5.3.4. Các phép toán với hàm liên tục

1. Các phép toán số học

Mệnh đề *Cho f, g là hai hàm liên tục tại x_0. Khi ấy:*

a) $f \pm g, f.g$ cũng là những hàm liên tục tại x_0.

b) $\dfrac{f}{g}$ với $g(x_0) \neq 0$ là hàm liên tục tại x_0.

Chứng minh Dễ dàng suy ra từ định nghĩa và các tính chất của giới hạn.

2. Tính liên tục của hàm hợp

Mệnh đề *Nếu f liên tục tại điểm x_0 và g liên tục tại điểm $y_0 = f(x_0)$ thì $g \circ f$ cũng liên tục tại điểm x_0.*

Chứng minh Dễ dàng suy ra từ định lý về giới hạn của hàm hợp.

3. Tính liên tục của hàm ngược

Mệnh đề *Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng X, đơn điệu tăng (giảm) chặt trên X. Khi ấy tồn tại hàm ngược đơn trị $x = f^{-1}(y)$ liên tục và đơn điệu tăng (giảm) trên $Y = f(X)$.*

Chứng minh Từ định lý Bolzano-Cauchy ta suy ra f lấp đầy Y, do đó với mỗi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Do tính chất đơn điệu chặt của f phần tử x ứng với y là duy nhất. Chứng tỏ tồn tại hàm ngược đơn trị f^{-1}. Hơn nữa, f^{-1} là hàm tăng. Thật vậy, giả sử $y_1 < y_2$, tức là $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$. Từ tính chất đơn điệu tăng của f suy ra $x_1 < x_2$, hay $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Theo hệ quả về tính liên tục của hàm đơn điệu, suy ra f^{-1} cũng liên tục trên Y.

Thí dụ (*Phương trình Kepler)* Hàm số $y = x - \varepsilon \sin(x), 0 < \varepsilon < 1$ là đơn điệu tăng ngặt và do đó x được xác định duy nhất theo y, hơn nữa x là hàm đơn điệu tăng ngặt và liên tục theo y. (Phương trình Kepler xuất hiện trong cơ học thiên thể).

5.3.5. Liên tục đều

Hàm số được goi là <u>liên tục đều</u> trên tập $X \subset R$ nếu như với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý), ta tìm được số dương δ sao cho

$$\forall x, y \in X, \quad |x-y| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| \le \varepsilon \quad .$$

Nhận xét Nếu hàm là *liên tục đều* trên tập X thì nó *liên tục* tại mọi điểm trên tập đó (vì trong định nghĩa trên ta cố định điểm x thì sẽ suy ra ngay hàm liên tục tại điểm này).

Điều ngược lại nói chung là không đúng. Thí dụ: Hàm $y=1/x$ là liên tục trên khoảng (0,1), nhưng nó không liên tục đều trên khoảng này. Thật vậy, tồn tại $\varepsilon = 1$ sao cho với mọi số dương δ luôn có 2 số x,y cách nhau không quá δ mà giá trị hàm trên 2 điểm này lệch nhau một khoảng lớn hơn ε, cụ thể với $x=\alpha$ và $y=\alpha/2$, trong đó $0<\alpha<\min(1/2,\delta)$, ta có $|x-y| = \alpha/2 < \delta$ và $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha}\right| = \frac{1}{2\alpha} > 1$.

Để trả lời cho câu hỏi khi nào điều ngược lại là đúng, ta có kết quả sau.

Định lý (Cantor) *Hàm <u>liên tục</u> trên đoạn thì cũng <u>liên tục đều</u> trên đoạn đó.*

<u>Chứng minh</u> Bằng phản chứng, giả sử rằng hàm f liên tục, nhưng không liên tục đều trên đoạn $[a,b]$. Khi ấy tồn tại *số dương* ε sao cho với mọi số $\delta > 0$ luôn tìm được 2 số $x, y \in [a,b]$ thỏa mãn $|x-y| < \delta$ và $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$. Như vậy, với mỗi số trong dãy $\delta_n = 1/n$, ta sẽ tìm được cặp số $x_n, y_n \in [a,b]$ thỏa mãn

$$|x_n - y_n| < 1/n \qquad (1)$$

và

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon . \qquad (2)$$

Do $\{x_n\}$ nằm trong tập compact $[a,b]$ ta tìm được dãy $\{x'_n\}$ (là tập con của dãy $\{x_n\}$) hội tụ đến một điểm c trong đoạn $[a,b]$. Song song với nó ta có dãy $\{y'_n\}$ cùng cặp thỏa mãn các điều kiện (1) và (2). Từ điều kiện (1) ta suy ra rằng $\lim_{n\to\infty} x'_n = c = \lim_{n\to\infty} y'_n$

và từ đây kết hợp với điều kiện (2) ta có

$$\varepsilon \le \lim_{n\to\infty} |f(x'_n) - f(y'_n)| = |f(c) - f(c)| = 0 .$$

Điều này là mâu thuẫn vì ε phải là một số dương.
Định lý đã được chứng minh xong.

Ký hiệu dao động của f trên tập X là

$$\omega = \sup_{x,x' \in X} \left\{ f(x) - f(x') \right\}.$$

Hệ quả *Nếu f là liên tục trên $[a,b]$ thì với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho trên mỗi đoạn của $[a,b]$ có độ dài δ dao động của f không vượt quá ε.*

<u>Chứng minh</u> Suy ra từ Định lý Cantor.

Hệ quả (Weierstrass 1) *Hàm liên tục trong đoạn* $[a,b]$ *thì bị chặn trong đoạn đó.*

Chứng minh Theo Định lý Cantor, hàm là *liên tục đều*, cho nên tìm được số dương δ sao cho

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |x-y| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| \le 1. \qquad (1)$$

Phân đoạn $[a,b]$ ra thành hữu hạn các đoạn nhỏ có độ dài không vượt quá δ và gọi M, m (theo thứ tự) là giá trị *lớn nhất* và *nhỏ nhất* của hàm số trên tập (hữu hạn) các điểm đầu mút của các đoạn nhỏ vừa phân. Lấy điểm x bất kỳ trên đoạn $[a,b]$, ta tìm được điểm x' là đầu mút của một trong các đoạn nhỏ nói trên và cách điểm x không quá δ. Từ (1) ta có

$$-1 \le f(x) - f(x') \le 1,$$

cho nên

$$m-1 \le f(x') - 1 \le f(x) \le f(x') + 1 \le M+1 \ ,$$

nghĩa là $f(x)$ luôn bị *chặn dưới* bởi số m-1 và bị *chặn trên* bởi số M+1. Đây chính là điều cần chứng minh.

Hệ quả (Weierstrass 2) *Hàm liên tục trên đoạn thì đạt được các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (tại những điểm nằm trên đoạn đó).*

Chứng minh Ta chỉ cần chứng minh rằng *hàm đạt giá trị lớn nhất* (đối với *giá trị nhỏ nhất* việc chứng minh hoàn toàn tương tự). Nếu hàm là *liên tục* trên đoạn $[a,b]$ thì nó bị chặn, và suy ra nó có cận trên hữu hạn trên đoạn này, ký hiệu là M. Theo định nghĩa về cận trên, với mỗi số tự nhiên n, tồn tại điểm $x_n \in [a,b]$ sao cho $f(x_n) \ge M - \dfrac{1}{n}$. Vì dãy số $\{x_n\}$ nằm gọn trong tập compact $[a,b]$ cho nên nó có một dãy con hội tụ $\{x_{n(k)}\}$ với giới hạn là một điểm nằm trong $[a,b]$, ký hiệu là x_0. Từ bất đẳng thức $f(x_{n(k)}) \ge M - \dfrac{1}{n(k)}, \quad \forall n(k)$, và do tính liên tục của f, sau khi cho $n(k)$ tiến ra vô cùng ta được $f(x_0) \ge M$. Do M là cận trên nên điều này có nghĩa là $f(x_0) = M$, hay x_0 chính là điểm đạt giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a,b]$.

Định lý đã được chứng minh.

Chú ý Các định lý trên sẽ không còn đúng nếu ta thay *đoạn* $[a,b]$ bằng *khoảng* (a,b). Thật vậy, hàm $y = \dfrac{1}{x}$ liên tục trên khoảng (0,1) nhưng nó không bị chặn và không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng này.

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 5

1. Câu hỏi củng cố lý thuyết

Bài 1 Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục tại x_0, thì $|f(x)|$ cũng liên tục tại x_0. Ngược lại có đúng không?

Bài 2 1) Chứng minh rằng hàm $y = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ khi $x \to 0$ không phải là vô cùng lớn (VCL), nhưng cũng không giới nội.

2) Hàm $y = (1+\sin x)\tan x$ có phải là VCL không khi $x \to 0$? Khi $x \to \infty$?

2. Tính giới hạn

Tính giới hạn của các hàm số sau:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^{\left(\frac{1}{3}\right)}-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+1997}$;

7) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)}\frac{\sin(\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cos(3x)\cos(4x)}{x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)^2-\sin(x)\sin(4x)}{x^4}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)^2}$.

3. Khảo sát tính liên tục của hàm số

Bài 1 Cho hàm số $y = x + 1$, nếu $x \le 1$ và $y = 3-ax^2$ nếu $x > 1$. Tìm giá trị của a để hàm số liên tục.

Bài 2 Tìm điểm gián đoạn của hàm số và cho biết điểm gián đoạn thuộc loại nào:

1) $y = \dfrac{x}{\sin x}$; 2) $y = e^{1+\frac{1}{|x|}}$; 3) $y = x - E(x)$.

Bài 3 Cho f là một hàm liên tục bất kỳ trên $\mathbb{R}$. Tồn tại hay không những hàm liên tục $g(x)$ và $h(x)$ sao cho

$$f(x) = g(x)\sin(x) + h(x)\cos(x).$$

Bài 4 Khảo sát tính liên tục của các hàm số $f(g(x))$ và $g(f(x))$, trong đó

$$f(x) = sign(x), g(x) = 1 + x - [x] .$$

4. Thực hành tính giới hạn

Để thực hành tính giới hạn, hãy đưa vào dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> limit(f(x),x = a);
```

Trong đó $f(x)$ là biểu thức cần tìm giới hạn và a là điểm tại đó cần tính giới hạn (nếu a là ∞ thì ta viết x = infinity). Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" thì việc tìm giới hạn sẽ được thực hiện và có ngay đáp số.

Thí dụ

```
[> limit(((sin(2*x))^2-sin(x)*sin(4*x))/x^4,x=0);
```

$$\{6\}$$

5. Tìm điểm gián đoạn của hàm số

Việc khảo sát tính liên tục của một hàm số tương đương với việc tìm các điểm gián đoạn của nó. Muốn tìm điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ ta hãy gọi chương trình này ra bằng lệnh

```
[> readlib(discont):
```

rồi sử dụng dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> discont(f(x), x);
```

Thí dụ

```
[> readlib(discont):
[> discont(1/(x-1),x);
```

$$\{1\}$$

CHƯƠNG 6

Đạo hàm

6.1. Một số bài toán dẫn tới khái niệm đạo hàm

6.1.1. Bài toán về vận tốc tức thời của chuyển động

Ta biết rằng khi một vật rơi tự do thì khoảng cách h giữa nó và điểm ban đầu tăng tỷ lệ với bình phương của thời gian rơi t, cụ thể là $h{:}=h(t) = g.t^2$ (trong đó $g \approx 9{,}8 m/s^2$). Như vậy vật rơi *không chuyển động đều* (trong giây đầu tiên nó rơi được *9,8m*, trong giây thứ 2 nó rơi được $h(2)-h(1)=9{,}8.3=29{,}4$(m), trong giây thứ 3 nó rơi được $h(3)-h(2)=9{,}8.5=49$ (m),...). Trong trường hợp này, *vận tốc trung bình* không thể phản ánh đúng *vận tốc rơi thực sự* của vật ở các thời điểm khác nhau. Để xác định chính xác hơn *vận tốc thực sự* của vật tại một thời điểm t_0 nào đó, người ta tính *vận tốc trung bình* của nó trong một *khoảng thời gian cực nhỏ* Δt (xung quanh thời điểm t_0), vận tốc trung bình này là

$$v_{tb} = \frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t} = \frac{g.(t_0+\Delta t)^2 - g.t_0^2}{\Delta t} = g\frac{t_0^2+2t_0.\Delta t+(\Delta t)^2-t_0^2}{\Delta t} = g.(2t_0+\Delta t).$$

Khi khoảng thời gian Δt càng nhỏ thì vận tốc trung bình nêu trên càng phản ánh trung thành vận tốc của vật rơi tại thời điểm t_0, cho nên người ta định nghĩa *vận tốc thực sự* (hay *vận tốc tức thời*) của vật rơi tại thời điểm t_0 (ký hiệu là $v(t_0)$) bằng *giới hạn* của *vận tốc trung bình* khi khoảng thời gian Δt tiến tới 0, nghĩa là

$$v(t_0) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}.$$

Và từ đẳng thức trên ta dễ dàng tính được *vận tốc tức thời của vật rơi* tại thời điểm t_0 là

$$v(t_0) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} g.(2t_0+\Delta t) = 2gt_0.$$

Phương pháp xác định *vận tốc tức thời* nêu trên hoàn toàn có thể được mở rộng ra cho một chuyển động *bất kỳ*, nếu như ta biết được hàm $S(t)$ biểu diễn quãng đường đi của chuyển động theo thời gian, và nếu như *giới hạn* sau đây là tồn tại

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}.$$

6.1.2. Bài toán về tiếp tuyến của một đường cong

Cho đường cong được xác định như là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định, còn điểm $M(x, y)$ di động dọc theo đường cong. Đường thẳng MM_0 được gọi là cát tuyến của đường cong (C).

Vị trí giới hạn (nếu có) của cát tuyến MM_0 khi M tiến tới M_0 dọc theo đường cong (từ cả hai phía) được gọi là tiếp tuyến của đường cong tại M_0.

Gọi α và α_0, theo thứ tự, là góc giữa cát tuyến và tiếp tuyến với chiều dương trục hoành. Từ định nghĩa tiếp tuyến, do $x \to x_0$ khi $M \to M_0$ và $\tan(\alpha)$ là hàm liên tục, ta có công thức tính hệ số góc của đường tiếp tuyến như sau:

$$\tan(\alpha_0) = \lim_{M \to M_0} \tan(\alpha) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nếu ký hiệu $\Delta x = x - x_0$ thì công thức trên có thể viết lại thành

Hình 6.1

$$\tan(\alpha_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Hai bài toán trên (và nhiều bài toán thực tế khác) có chung một bản chất là tìm giới hạn dạng $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Việc xét *giới hạn* này đưa tới một khái niệm mới trong toán học là *đạo hàm* của hàm số.

6.2. Đạo hàm của hàm số

6.2.1. Đạo hàm

Cho hàm số f xác định trên lân cận của điểm x_0.

Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm f tại điểm x_0.

Khi ấy ta cũng nói f có đạo hàm tại x_0 và giới hạn nêu trên được ký hiệu là $f'(x_0)$.

Nếu f có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$, ta nói rằng f có đạo hàm trên (a,b).

Theo thông lệ người ta hay ký hiệu $h = \Delta x$ và gọi nó là *số gia của biến số*. Như vậy, ta có thể viết lại định nghĩa đạo hàm như sau:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Biểu thức $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ còn có tên gọi là *số gia hàm số* (ứng với số gia biến số Δx). Như vậy:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý Đôi khi *đạo hàm* của f cũng được ký hiệu là Df. Nếu $y = f(x)$ thì đạo hàm cũng được ký hiệu là Dy.

6.2.2. Đạo hàm bậc cao

Cho $y = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại mọi điểm x. Khi ấy *phép ứng* mỗi điểm x với giá trị *đạo hàm của* f tại x (tức là $f'(x)$) cũng là một hàm số. Hàm này được ký hiệu là f' (hoặc là $f'(.)$).

Nếu hàm số f' *có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là* *<u>đạo hàm cấp hai</u>* *của hàm số* $y = f(x)$, ký hiệu là f'', hay $f''(x)$ hoặc D^2f.

Đạo hàm của *đạo hàm cấp hai* (nếu tồn tại) được gọi là *<u>đạo hàm cấp ba</u>* của hàm số và được ký hiệu là f''', hay $f'''(x)$ hoặc D^3f.

Tổng quát, ta định nghĩa: *Đạo hàm* của *đạo hàm cấp* $n-1$ của hàm số $y = f(x)$ được gọi là *<u>đạo hàm cấp n</u>* của hàm số y, và được ký hiệu bằng một trong các biểu thức

$$D^n y,\ y^{(n)},\ D^n f,\ f^{(n)}\ .$$

6.2.3. Thí dụ tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Thí dụ tính đạo hàm của đa thức

Cho $f(x) = x^3 + 3$. Ta tính $f'(x)$ tại điểm x bất kỳ.

Cho h nhỏ tùy ý. Xét đại lượng

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 + 3 - (x^3+3)}{h} = \frac{h((x+h)^2 + (x+h)x + x^2)}{h}$$

Cho $h \to 0$, ta được

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + 3 - (x^3+3)}{h} = \lim_{h \to 0}((x+h)^2 + (x+h)x + x^2) = 3x^2.$$

Vậy hàm số f là có *đạo hàm* và đạo hàm của nó tại điểm x là $f'(x) = 3x^2$.

Tương tự như trên ta cũng chứng minh được rằng hàm số $3x^2$ có đạo hàm (tại mọi điểm) và đạo hàm của nó bằng $6x$. Như vậy có nghĩa là hàm f có *đạo hàm bậc 2* và $f''(x) = 6x$.

2. Thí dụ tính đạo hàm của hàm căn thức

Cho $f(x) = \sqrt{x}$. Tính đạo hàm của f tại điểm $x > 0$ bất kỳ.

Theo định nghĩa

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vậy $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Đạo hàm của hàm lượng giác

Cho $f(x) = \sin(x)$. Tính $f'(x)$ tại điểm $x = a$.

Chú ý rằng $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ và $\lim_{x\to a}\cos(x) = \cos(a)$, ta có:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(a+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos(a+\frac{h}{2}).\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = [\cos(a)].1 = \cos(a)$$

4. Đạo hàm của hàm số mũ

Trong khi xem xét về giới hạn của các hàm số mũ ta đã chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Từ đây ta suy ra

$$[e^x]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x.1 = e^x.$$

6.2.4. Ý nghĩa của đạo hàm

Từ hai bài toán trên ta thấy: Về mặt Hình học, đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 chính là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong (đồ thị) $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$.

Về mặt Vật lý, *đạo hàm* của hàm biểu diễn *quãng đường đi* theo thời gian chính là *vận tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm x_0.

6.2.5. Đạo hàm một phía

Nếu tồn tại $\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *thì giới hạn đó được gọi là <u>đạo hàm phải</u> của hàm tại* x_0 *và ký hiệu*

$$f'(x_0^+) := \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Tương tự cho <u>*đạo hàm trái*</u>.

Minh họa hình học: Đạo hàm phải (trái) chính là hệ số góc của"tiếp tuyến phải" (trái), tức là hệ số góc của vị trí giới hạn của cát tuyến dọc theo đường cong từ bên phải (từ bên trái).

Thí dụ 1) Hàm $y = |x|$ có $f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-)$.

2) Hàm $y = |x^2 - 1|$ có đạo hàm trái và phải tại điểm $x_0 = 1$ là

Hình 6.2

$$f'(1^-) = -2 \neq 2 = f'(1^+).$$

Nhận xét Từ định lý về giới hạn trái và phải ta suy ra: f có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi tại đó nó có đạo hàm trái và đạo hàm phải bằng nhau.

3) $y = \max\{x + 2, x^2\}$ có đạo hàm trái và phải tại -1 và 2 là

$$f'(-1^-) = -2 \neq 1 = f'(-1^+),\ f'(2^-) = 1 \neq f'(2^+) = 4.$$

Do đó nó không có đạo hàm tại $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$.

4) Hàm số $y = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

không có đạo hàm trái và phải tại $x = 0$, vì $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \sin\dfrac{1}{\Delta x}$ không có giới hạn khi $\Delta x \to 0$.

6.2.6. Đạo hàm bằng vô cùng

Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty\ (-\infty)$ thì, một cách quy ước, ta nói f có đạo hàm tại x_0 *bằng vô cùng*.

Thí dụ 1) $y = \sqrt[3]{x}$ có $y'(0^+) = y'(0^-) = +\infty$.

2) $y = \sqrt{x}$ có $y'(0^+) = +\infty$ còn $y'(0^-)$ không tồn tại.

Lưu ý Trong khuôn khổ giáo trình này đạo hàm *bằng vô cùng* được xét đến như một trường hợp ngoại lệ, cho nên, nếu không nói gì thêm, thành ngữ "có đạo hàm" luôn được hiểu là "có đạo hàm hữu hạn".

6.2.7. Liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Mệnh đề sau cho ta biết quan hệ giữa sự tồn tại đạo hàm và tính liên tục của hàm số.

Mệnh đề *Nếu f có <u>đạo hàm</u> tại điểm x_0 thì nó <u>liên tục</u> tại x_0.*

Chứng minh Nếu f có đạo hàm thì $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ (vì ngược lại thì f không thể có đạo hàm hữu hạn). Điều này có nghĩa là $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, hay f liên tục tại x_0.

Chú ý Điều khẳng định ngược lại của định lý trên không đúng. Ví dụ hàm số $f(x) = |x|$ *liên tục* tại 0 nhưng *không có đạo hàm* tại 0 (Thí dụ 4).

6.3. Các phép toán cơ bản trên đạo hàm

Trong mục này ta xét một số tính chất quan trọng của đạo hàm. Nhờ chúng mà ta tính được đạo hàm của những hàm số phức tạp thông qua đạo hàm của các hàm cơ bản. Ví dụ muốn tính đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^5 (x^2+7x+8)^9}{x^2+7x+1},$$

ta không cần phải dựa vào định nghĩa của đạo hàm và tìm giới hạn của biểu thức

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

mà chỉ cần tính được đạo hàm của *đơn thức* và cách lấy đạo hàm của *tổng*, của *thương*,... Đồng thời ta cũng tính được đạo hàm của các hàm *lôgarit*, hàm *lũy thừa* tổng quát, hàm *lượng giác*, hàm *lượng giác ngược*,... thông qua việc tính đạo hàm của hàm số exp(.), hàm số sin(.) và các quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp, hàm ngược,... Trước hết ta lưu ý

Nhận xét *Đạo hàm của hàm hằng* (*f*(*x*) = *c với mọi x*) *đồng nhất bằng không.*

Chứng minh có ngay từ định nghĩa của đạo hàm.

6.3.1. Các phép toán số học

Mệnh đề *Nếu f và g là có đạo hàm tại* x_0*, thì* $f \pm g, f.g$ *cũng có đạo hàm tại đó và*

(i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

(ii) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(iii) *Nếu* $g(x_0) \neq 0$ *thì* $\frac{f}{g}$ *cũng có đạo hàm tại* x_0 *và*

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Chứng minh

(i) Suy ra ngay từ tính chất của phép lấy giới hạn của tổng (hiệu).

(ii) Ta có nhận xét sau đây

$$f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) = [f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)].$$

Chia cả 2 vế cho h rồi cho h tiến dần tới 0, lưu ý rằng do tính liên tục của hàm g mà $g(x+h)$ tiến tới $g(x)$, từ đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

(iii) Chứng minh bằng những lập luận tương tự.

Mệnh đề đã được chứng minh đầy đủ.

Hệ quả 1) *Nếu f có đạo hàm tại x_0 và c là hằng số, thì cf có đạo hàm tại x_0 và*

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

(Đây là hệ quả của (ii) trong trường hợp g là hàm hằng).

2) *Nếu g có đạo hàm tại x_0 và $g(x_0) \neq 0$, thì $\frac{1}{g}$ cũng có đạo hàm tại x_0 và*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(Đây là hệ quả của (iii) khi f bằng 1).

6.3.2. Đạo hàm của hàm hợp

Cho $f : X \to U$ có đạo hàm tại x_0, $g : U \to Z$ có đạo hàm tại $u_0 = f(x_o)$. Dưới đây là cách tính đạo hàm của hàm hợp $g[f(x)]$ (hay còn được ký hiệu là $g \circ f$) thông qua đạo hàm f' và g'.

Mệnh đề *Nếu $u = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $y = g(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = f(x_0)$, thì $g \circ f$ cũng có đạo hàm tại x_0 và*

$$(g \circ f)'(x_0) := \{g[f(x_0)]\}' = g'(u_0).f'(x_0).$$

(Vế phải là: đạo hàm của y theo u nhân với đạo hàm của u theo x).

<u>Chứng minh</u> Ta chú ý rằng

$$g[f(x+h)] - g[f(x)] = \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)}.[f(x+h) - f(x)]$$

Đặt $y_0 = f(x_0)$ và $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, từ biểu thức trên ta có

$$g[f(x_0+h)] - g[f(x_0)] = \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y}.[f(x_0+h) - f(x_0)]$$

Chú ý rằng khi h tiến tới 0 thì Δy cũng tiến tới 0, cho nên sau khi chia 2 vế của biểu thức trên cho h rồi cho h tiến tới 0, từ định nghĩa của đạo hàm ta suy ra điều phải chứng minh.

6.3.3. Đạo hàm của hàm ngược

Mệnh đề *Giả sử* $x = f(y)$ *có đạo hàm tại* $y_0 \in (a,b)$ *và* $f'(y_0) \neq 0$ *. Nếu tồn tại* *hàm ngược* $y = g(x)$ *liên tục tại* $x_0 = f(y_0)$ *thì tồn tại đạo hàm* $g'(x_0)$ *và*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Chứng minh Theo định nghĩa hàm ngược chúng ta có

$$x = f[g(x)],$$

cho nên lấy đạo hàm cả 2 vế và áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp cho vế phải ta được

$$1 = f'[g(x_0)].g'(x_0)$$

Để ý rằng $y_0 = g(x_0)$ ta có ngay điều cần chứng minh.

Thí dụ Cho $x = f(y) = y^2$, $y \in (0,\infty)$. Dễ dàng thấy rằng f có hàm ngược $y = g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Ta áp dụng định lý trên và có ngay kết quả

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

đúng như đã biết trước đây bằng cách tính trực tiếp theo định nghĩa.

6.3.4. Đạo hàm các hàm sơ cấp

Dựa vào các kết quả tính đạo hàm (bằng định nghĩa) đối với các hàm *đơn thức*, hàm số *sin*, hàm số *mũ*, kết hợp với các quy tắc đã thiết lập trong phần này, chúng ta dễ dàng suy ra các công thức tính đạo hàm (còn gọi là gọi là *bảng đạo hàm*) dưới đây:

1. $y = c = const$ $\qquad y' = 0 \forall x.$

2. $y = x$ $\qquad y' = 1 \forall x.$

3. $y = x^n$ (n nguyên dương) $\qquad y' = n.x^{n-1},.$

4. $y = \frac{1}{x}$ $\qquad y' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$

5. $y = \sqrt{x}$ $\qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$

6. $y = e^x$ $\qquad y' = e^x \, \forall x.$

   $y = a^x, a > 0$ $\qquad y' = a^x \ln a \, \forall x.$

7. $y = \ln(x)$ $\qquad y' = \frac{1}{x}, x > 0.$

$y = \log_a(x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x\ln(a)}, \quad x > 0.$

8. $y = \sin(x)$ $\qquad y' = \cos(x) \quad \forall x.$

9. $y = \cos(x)$ $\qquad y' = -\sin(x) \quad \forall x.$

10. $y = \tan(x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (k nguyên).

11. $y = \cot(x)$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \neq k\pi$ (k nguyên).

12. $y = \arcsin(x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$

13. $y = \arccos(x)$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$

14. $y = \arctan(x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x.$

15. $y = \text{arccot}(x)$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2} \forall x.$

6.4. Các định lý cơ bản

6.4.1. Định lý Fermat *(về điều kiện cực trị)*

Trước hết ta trình bày định lý về giá trị cực tiểu, cực đại của hàm số mà ta gọi chung là cực trị. Cho hàm số f xác định trên khoảng (a,b). Ta nói rằng f đạt *cực tiểu* (*cực đại*) tại $c \in (a,b)$ nếu $f(c) \le f(x)$ $(f(c) \ge f(x))$ đúng với mọi $x \in (a,b)$.

Định lý sau cho ta *điều kiện cần* của cực trị.

Định lý (Fermat) *Cho f xác định trên khoảng (a,b). Nếu f đạt cực trị tại điểm $c \in (a,b)$ và $f'(c)$ tồn tại, thì $f'(c) = 0$*

Chứng minh Ta chứng minh định lý này cho trường hợp cực đại, trường hợp cực tiểu chứng minh hoàn toàn tương tự.

Giả sử rằng $f(c)$ là giá trị cực đại của hàm f trên (a,b), và $f'(c)$ tồn tại.

Xét đại lượng

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x},$$

trong đó Δx lấy đủ nhỏ để $c + \Delta x \in (a,b)$. Vì $f(c)$ là cực đại nên

$$f(c+\Delta x) \le f(c) \quad \text{hay} \quad f(c+\Delta x) - f(c) \le 0.$$

Cho nên khi $\Delta x > 0$ thì

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad .$$

Khi $\Delta x \to 0$ thì đại lượng này tiến tới $f'(c)$. Vậy

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0 .$$

Khi $\Delta x < 0$ thì

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0 .$$

Qua giới hạn ta được

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0 .$$

Từ hai điều trên ta suy ra $f'(c) = 0$. Định lý đã được chứng minh.

6.4.2. Định lý Rolle

Xét hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[a,b]$. Đoạn đồ thị nối hai điểm $(a,f(a))$ và $(b,f(b))$ được gọi là cung. Ta giả sử $f(a)=f(b)$ và hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a,b). Khi ấy chắc chắn sẽ có điểm $c \in (a,b)$ để tiếp tuyến đi qua điểm $(c,f(c))$ của đồ thị sẽ song song với trục Ox . Cụ thể ta có

Định lý (Rolle): *Cho f là hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm tại mọi $x \in (a,b)$. Nếu $f(a)=f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ để $f'(c)= 0$.*

<u>Chứng minh</u> Từ giả thiết liên tục của f trên đoạn đóng $[a,b]$, theo Định lý Weierstrass, hàm f phải đạt giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trên $[a,b]$, tức là tồn tại các điểm $x_1, x_2 \in [a,b]$ sao cho

$$f(x_1) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = m \quad \text{và} \quad f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = M \ .$$

Có hai khả năng:

a) $m = M$. Khi ấy $f(x) = const$ trên [a,b], do đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a,b)$.

b) $m < M$. Khi ấy vì $f(a)=f(b)$ nên ít nhất một trong 2 điểm x_1, x_2 sẽ không trùng với các đầu mút a và b. Theo Định lý Fermat thì đạo hàm bằng 0 tại điểm này.

Định lý Rolle đã được chứng minh xong.

Thí dụ Ta áp dụng Định lý Rolle cho hàm $f(x)=\cos(x)$ trên đoạn $(\pi,5\pi)$.

Do $f(\pi) = -1 = f(5\pi)$ và hàm cos có đạo hàm $[\cos(x)]' = -\sin(x)$ trên toàn đoạn $(\pi,5\pi)$ nên ta lấy $a=\pi, b=5\pi$ thì mọi điều kiện của định lý trên đều được thỏa mãn. Theo định lý này ta suy ra tồn tại điểm $c \in (\pi,5\pi)$ để $[\cos(x)]' = 0$. Đó chính là các điểm $x = 2\pi, 3\pi, 4\pi$.

6.4.3. Định lý Lagrange về giá trị trung bình

Đây là sự tổng quát hóa Định lý Rolle. Ta biết rằng hệ số góc của đường thẳng qua hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$ trên đồ thị của hàm f chính là đại lượng $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Vì hệ số góc của tiếp tuyến đối với đồ thị tại điểm $(c, f(c))$ chính bằng $f'(c)$, cho nên, nếu đường tiếp tuyến tại $(c, f(c))$ song song với dây cung nối $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$ thì phải có

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Định lý (Lagrange): *Cho hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm của khoảng (a,b). Khi ấy tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ để*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

<u>Chứng minh</u> Đặt

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Ta có $g(a) = g(b)$. Hàm số g thỏa mãn mọi điều kiện của Định lý Rolle. Theo định lý này ta suy ra tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ để $g'(c) = 0$. Chú ý rằng

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Nên từ đẳng thức trên ta có ngay điều cần chứng minh.

Thí dụ Một ô tô chuyển động trên đường thẳng theo công thức $y = s(t)$.

Ta biết rằng đại lượng

$$\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$$

là *vận tốc trung bình* của ô tô trong khoảng từ a đến b. Theo định lý giá trị trung bình tồn tại ít nhất tại một thời điểm c nào đó giữa (a,b) sao cho *vận tốc tức thời* của ô tô đúng bằng *vận tốc trung bình* này.

6.4.4. Các hệ quả

Định lý (Cauchy): *Cho các hàm f, g liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm của khoảng (a,b), ngoài ra $g'(x) \neq 0$ trên (a,b). Khi ấy tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ để*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

<u>Chứng minh</u> Từ Định lý Lagrange và điều kiện $g'(x) \neq 0$ *trên* (a,b) ta suy ra rằng $g(b)-g(a) \neq 0$. Xét hàm số

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

ta thấy rằng nó thoả mãn mọi điều kiện của Định lý Rolle. Cho nên tìm được $c \in (a,b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Bằng tính toán trực tiếp ta suy ra ngay đây chính là điểm cần tìm.

Hệ quả *Nếu đạo hàm của hàm số bằng* 0 *trên một đoạn nào đó thì hàm số đó là hằng trên đoạn ấy.*

Chứng minh Thật vậy, cho *a, b* là hai điểm khác nhau (bất kỳ) thuộc đoạn cho trước. Theo định lý giá trị trung bình ta tìm được điểm $c \in (a,b)$ để

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0 .$$

Từ đây suy ra $f(b) = f(a)$. Cho nên f là hàm hằng.

Hệ quả *Nếu hai hàm số có cùng một đạo hàm trên đoạn cho trước thì chúng chỉ sai khác nhau một hằng số.*

Chứng minh Suy ra từ hệ quả trên bằng cách xét hiệu của hai hàm.

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 6

1. Câu hỏi củng cố lý thuyết

Bài 1 Tìm chỗ sai trong tính toán sau rồi sửa lại cho đúng:

1) $[\sin(2x)]' = \cos(2x)$;

2) $\frac{d}{dx}[e^{(2x)}] = 2xe^{(2x-1)}$;

3) $[x\sin(x)]' = 1 + \cos(x)$.

Bài 2 Cho $f(x)$ là một hàm chẵn (lẻ), khả vi trên $(-\infty, \infty)$.

a) Chứng minh rằng $f'(x)$ là một hàm lẻ (chẵn).

b) Điều ngược lại có đúng không ?

2. Tính đạo hàm của hàm số thông thường

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = 5x^3 - 3x^2 - \frac{2}{x^3}$;

2) $y = e^{\sin^2\frac{1}{x}}$;

3) $y = x^2\sqrt{x^2+1}$;

4) $y = -x + 2\sqrt{x^4+4}$;

5) $y = \cos^3(2x)$;

6) $y = \frac{\cos^2(x)}{\sin(2x)}$;

7) $y = \ln[\sin(x^2+1)]$;

3. Tính đạo hàm của hàm ẩn

Tính đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ của các hàm ẩn sau:

1) $x^2 - y^2 = 3$ tại $(2,1)$;

2) $x^2y + xy^2 = 12$ tại $(3,1)$;

3) $2y^3 + 4xy + x^2 = 7$ tại $(1,1)$;

4) $x^5 + y^3x + yx^2 + y^5 = 4$ tại $(1,1)$;

5) $\dfrac{2xy}{\pi} + \sin(y) = 2$ tại $(1,\dfrac{\pi}{2})$.

4. Các định lý giá trị trung bình và ứng dụng

Bài 1 Chứng minh rằng với mọi $-1 \le x \le 1$ ta luôn có

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Bài 2 Chứng minh rằng phương trình $2x\arctan(x) = \ln(1+x^2)$ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài 3 Cho $m > 0$ còn a,b,c là ba số bất kỳ thoả mãn điều kiện $\dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0,1).

Bài 4 Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{a-b}{a} < \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) < \dfrac{a-b}{b}$.

Bài 5 Cho a, b, c, d là các số bất kỳ. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \le \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}} \,.$$

Bài 6 Chứng minh rằng biểu thức

$$2\arctan(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

nhận giá trị π nếu $1 \le x$ và nhận giá trị $-\pi$ nếu $x \le -1$.

Bài 7 Chứng minh rằng với hai số *a, b* bất kỳ

a) $|\sin a - \sin b| \le |a - b|$;

b) $|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$.

Bài 8 Cho hàm số liên tục $f : [0,1] \to [0,1]$ có đạo hàm trên $(0,1)$ thoả mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại a,b trên (0,1) sao cho $a \ne b$ và $f'(a).f'(b) = 1$.

Bài 9 Chứng minh rằng $x^n\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{2ne}}$ với mọi x thuộc $(0,1)$.

5. Bài tập nâng cao

Bài 1 Cho $f(x) = \sin(x) + \dfrac{\sin(3x)}{3} + \dfrac{\sin(5x)}{5} + \dfrac{\sin(7x)}{7}$. Chứng minh rằng:

$$f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Bài 2 Cho hàm

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)\right\}.$$

Chứng minh rằng $\chi(x)$ là hàm Dirichlet, tức là $\chi(x)=0$ khi x là số vô tỷ và $\chi(x)=1$ khi x là số hữu tỷ.

Suy ra $\chi(x)$ gián đoạn tại mọi điểm x.

6. Thực hành tính toán đạo hàm

Để thực hành tính đạo hàm , hãy đưa vào dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> diff(f(x),x);
```

Trong đó $f(x)$ là hàm số và x là biến số mà ta cần tính đạo hàm. Sau dấu (;), ấn phím "Enter" thì việc tính đạo hàm sẽ được thực hiện và sẽ có ngay đáp số.

Thí dụ

```
[> diff(x^2*sqrt(x^2+1),x);
```

$$2x\sqrt{x^2+1}+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$$

Muốn biểu diễn quá trình này một cách tường minh (qua các công thức quen biết) ta dùng các thủ tục sau đây:

Xác định hàm số bằng dòng lệnh có cú pháp như sau:

[> **f:=x -> Biểu thức của x**

Thiết lập công thức đạo hàm của $f(x)$ theo biến x bằng dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> Diff(f(x),x);
```

Tìm giá trị thực tế của biểu thức trên bằng dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> f_prim:=value(");
```

Muốn rút gọn biểu thức này ta dùng lệnh:

```
[> simplify(");
```

Thí dụ

```
[> f:=x->5*x^3-3*x^2-2*x^(-3);
```

$$f := x \to 5x^3-3x^2-\frac{2}{x^3}$$

```
[> Diff(f(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(5x^3-3x^2-\frac{2}{x^3}\right)$$

```
[> f_prim:=value(");
```

$$f\_\mathrm{prim} := 15x^2 - 6x + \frac{6}{x^4}$$

Thí dụ [> `f:=x -> ((cos(x))^2/sin(2*x));`

$$f := x \to \frac{\cos(x)^2}{\sin(2x)}$$

[> `Diff(f(x),x);`

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos(x)^2}{\sin(2x)}$$

[> `f_prim:=value(");`

$$f\mathrm{prim} := -2\frac{\cos(x)\sin(x)}{\sin(2x)} - 2\frac{\cos(x)^2\cos(2x)}{\sin(2x)^2}$$

[> `simplify(");`

$$2\frac{\cos(x)^2}{-1+\cos(2x)^2}\ .$$

(Lưu ý rằng máy không viết $\cos^2(x)$, như chúng ta hay viết, mà viết là $\cos(x)^2$).

CHƯƠNG 7

Ứng dụng của đạo hàm

7.1. Vi phân

7.1.1. Khái niệm

Vi phân là một khái niệm độc lập nhưng có quan hệ mật thiết với khái niệm *đạo hàm*. Để trình bày khái niệm này ta đưa ra

Định nghĩa *Hàm số $r(x)$ được gọi là một đại lượng vô cùng bé bậc cao tại lân cận điểm a nếu như nó thỏa mãn điều kiện sau*

$$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a}=0.$$

Khi ấy, với $\Delta x = x - a$, người ta nói rằng $r(x)$ là *vô cùng bé* bậc cao hơn Δx (tại lân cận điểm a) và ký hiệu nó là $o(\Delta x)$. Nếu $a = 0$ thì $\Delta x = x$ và trong trường hợp này một đại lượng vô cùng bé (bậc cao hơn x tại lân cận *điểm gốc*) sẽ được ký hiệu là $o(x)$. Như vậy, theo định nghĩa ta có

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0 \;.$$

Nhớ lại rằng số gia của hàm số $y = f(x)$ (tương ứng với số gia Δx của biến số) thường được ký hiệu là Δy, chúng ta đưa ra

Định nghĩa *Hàm f được gọi là khả vi tại điểm $x_0 \in (a,b)$ nếu tồn tại một số K sao cho $\Delta y - K.\Delta x$ là một đại lượng vô cùng bé bậc cao tại lân cận điểm x_0, nghĩa là*

$$\Delta y := f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = K.\Delta x + o(\Delta x)\,.$$

Biểu thức $K.\Delta x$ được gọi là vi phân cấp 1 của hàm f tại điểm x_0 (ứng với số gia biến số là Δx) và được ký hiệu là dy.

Nhận xét Từ định nghĩa ta có ngay vi phân của biến số độc lập đúng bằng số gia của biến số, nghĩa là : $dx = \Delta x$. Và vì vậy người ta còn viết vi phân của hàm số là $dy = K.dx$

Thí dụ Hàm $y = x^2$ là hàm khả vi tại điểm $x = 1$ và có vi phân tại đó là $dy = 2dx$, bởi vì $(1+\Delta x)^2 - 1^2 = 2.\Delta x + (\Delta x)^2$ mà đại lượng $(\Delta x)^2$ rõ ràng là một vô cùng bé bậc cao (dễ dàng kiểm tra bằng định nghĩa).

7.1.2. Quan hệ giữa đạo hàm và vi phân

Định lý *f khả vi tại x khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại x.*

Chứng minh Giả sử f khả vi tại x, khi đó ta có

$$\Delta y = K.\Delta x + o(\Delta x)$$

Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = K + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$, và khi cho $\Delta x \to 0$ ta thấy rằng giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ là tồn tại. Như vậy, theo định nghĩa, hàm f là *có đạo hàm* tại *x*, và ngoài ra

$$f'(x) = K .$$

Đảo lại, giả sử f có đạo hàm tại x. Khi ấy tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, hay đại lượng

$$u(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \qquad (*)$$

sẽ tiến tới *0* khi Δx tiến tới *0*. Như vậy đại lượng $r(\Delta x) := \Delta x.u(\Delta x)$ sẽ là vô cùng bé bậc cao khi Δx tiến tới *0*. Biểu thức (*) có thể viết lại thành

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + r(\Delta x) = f'(x).\Delta x + o(\Delta x)$$

Điều này có nghĩa rằng f là hàm *khả vi* tại *x*, và ngoài ra

$$dy = f'(x).dx \; .$$

Nhận xét Từ định lý trên và các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược,... của các hàm số ta dễ dàng tính được vi phân của một hàm phức tạp thông qua vi phân của các hàm đơn giản

Thí dụ $d(u \pm v) = du \pm dv$,

$d(uv) = udv + vdu$.

Nhận xét Chính mối quan hệ mật thiết nêu trên giữa *đạo hàm* và *vi phân* đã dẫn đến một cách ký hiệu đạo hàm nữa, thông qua khái niệm vi phân, đó là $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{d}{dx}f$, $\dfrac{dy}{dx}$,... . Xin lưu ý rằng đây là những ký hiệu mang tính hình thức (mà không có nghĩa là thương của 2 đại lượng).

7.1.3. Vi phân và phép tính xấp xỉ

Định nghĩa của vi phân cho thấy rằng nó là một xấp xỉ tốt của *số gia hàm số* tại lân cận điểm đang xét. Độ lệch giữa nó và số gia hàm số là không đáng kể so với độ lệch của biến số so với điểm đang xét, cho nên đại lượng $f(x_0) + dy$ sẽ là một xấp xỉ tốt của $f(x_0 + \Delta x)$. Nghĩa là

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)dx = f(x_0) + f'(x_0).\Delta x .$$

Như vậy, để có một xấp xỉ tốt của giá trị hàm số tại các điểm lân cận x_0 ta chỉ cần biết được *giá trị* và *đạo hàm* của hàm số tại đúng điểm x_0. Chúng ta hãy minh họa điều này qua các ví dụ dưới đây.

Thí dụ Hãy tính $\sqrt[3]{29}$.

Ta biết rằng không thể tính chính xác được giá trị này, cho nên ta phải tính xấp xỉ của nó. Đặt $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Khi $x = 27$ ta tính được chính xác $\sqrt[3]{27} = 3$. Ngoài ra ta còn biết rằng

$f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{-2/3} = \frac{1}{3(27)^{2/3}}$.

Lấy $\Delta x = 2$ và áp dụng công thức $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$ ta được

$$\sqrt[3]{29} \approx f(27) + f'(27)2 = 3 + \frac{2}{27} = 3 + 0,0741 = 3,0741.$$

Vậy $\sqrt[3]{29} \approx 3,0741$.

Tổng quát Muốn tính giá trị hàm số f tại một điểm b nào đó thì:

1) Chọn điểm a gần điểm b mà $f(a), f'(a)$ là tính được.
2) Lấy $\Delta x = b - a$ (Δx có thể dương hoặc âm tùy theo vị trí của b).
3) Tính $f(a) + f'(a)\Delta x$. Đó chính là xấp xỉ của $f(b)$. Ta viết

$$f(b) \approx f(a) + (b - a)f'(a).$$

Thí dụ Tính giá trị *xấp xỉ* của hàm $y = \tan(x)$ tại các điểm gần $\frac{\pi}{4}$.

Ta có $f(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$,

$$f'(x) = \sec^2(x), \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \sec^2(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Vậy tại các điểm gần $\frac{\pi}{4}$ hàm $\tan(x)$ được tính một cách xấp xỉ bằng

$$p(x) = f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}).$$

7.2. Công thức Taylor

7.2.1. Đặt vấn đề

Phần trên ta đã thấy rằng hàm affine

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

là một xấp xỉ khá tốt của hàm f trong lân cận của điểm x_0. Đây là cách xấp xỉ đơn giản, dễ tính toán, tuy nhiên độ chính xác không thật cao (chỉ là vô cùng bé bậc cao hơn 1 mà thôi). Khi có nhu cầu tìm một xấp xỉ với độ chính xác cao hơn, ta phải tìm ở ngoài lớp hàm affine, và lớp hàm tự nhiên được để ý tới sẽ là lớp các *hàm đa thức*, tức là hàm số có dạng

$$P(x) = a_o + a_1 x + ... + a_n x^n.$$

Lớp hàm này tuy là phi tuyến, nhưng dễ tính toán, cho nên cũng rất phổ biến. Mở rộng trực tiếp phương pháp xấp xỉ một hàm bằng *vi phân* đã đưa đến phương pháp dùng đa thức Taylor mô tả dưới đây.

7.2.2. Đa thức Taylor

Cho hàm số f có đạo hàm cấp cao hơn n tại x_0. Khi ấy đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

được gọi là đa thức Taylor bậc n tương ứng với hàm f tại x_0.

Thí dụ Tìm đa thức Taylor bậc 5 của hàm $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = 0$.

Ta có bảng tính đạo hàm cấp cao của hàm số $\sin x$ tại điểm $x = 0$ như sau:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f(0) = \sin(0) = 0, \\
f'(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f'(0) = \cos(0) = 1, \\
f''(x) = -\sin(x) & \Rightarrow & f''(0) = -\sin(0) = 0, \\
f'''(x) = -\cos(x) & \Rightarrow & f'''(0) = -\cos(0) = -1, \\
f^{(4)}(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0, \\
f^{(5)}(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1.
\end{array}$$

Vậy

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = x$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^5$$

$$= x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Hình 7.1

Để thấy được tính năng xấp xỉ của đa thức Taylor đối với hàm phi tuyến nói chung, và đối với hàm $\sin(x)$ nói riêng, ta hãy quan sát các đồ thị của chúng (như trong Hình vẽ 7.1)

7.2.3. Phần dư và dạng Lagrange của phần dư

Cho hàm số f và đa thức Taylor $P_n(x;a)$ bậc n tương ứng với f tại a. Để làm rõ khả năng xấp xỉ của đa thức Taylor, ta xem xét biểu thức

$$R_n(x;a) = f(x) - P_n(x;a),$$

còn được gọi là phần dư hoặc sai số *của hàm f khi dùng xấp xỉ là đa thức Taylor.*

Biểu thức $P_n(x;a) + R_n(x;a)$ thường được gọi là khai triển Taylor (bậc n) của hàm $f(x)$.

Mệnh đề *Nếu f có đạo hàm liên tục tới cấp $(n+1)$ trên $[a,b]$, thì tồn tại số $c \in (a,b)$ sao cho*

$$R_n(a,b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Chứng minh Ký hiệu α là số thỏa mãn

$$f(b)-f(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(n+1)}(b-a)^k+\frac{\alpha}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Xét hàm số $h(x)=f(b)-f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{\alpha}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$.

Hàm $h(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ và $h(a) = h(b) = 0$. Theo định lý giá trị trung bình ta tìm được $c\in(a,b)$ sao cho $h'(c)=0$, tức là

$$0=h'(c)=-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(b-c)^n+\frac{\alpha}{n!}(b-c)^n.$$

Suy ra $\alpha=f^{(n+1)}(c)$ và mệnh đề đã được chứng minh xong.

Nhận xét Định lý trên cho thấy rằng khi đạo hàm cấp $n+1$ của f là bị chặn thì sự sai khác giữa hàm số f và đa thức Taylor của nó là một vô cùng bé bậc cao cấp $n+1$, và vì vậy đa thức Taylor là một xấp xỉ lý tưởng khi n đủ lớn.

7.3. Tìm giới hạn

7.3.1. Giới hạn dạng không xác định $\frac{0}{0}$

Định lý (l'Hôpital 1): *Giả sử f,g là các hàm khả vi liên tục trong lân cận điểm a thỏa mãn điều kiện $f(a) = g(a) = 0$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ thì cũng tồn tại giới hạn* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Chứng minh Sử dụng Định lý Rolle cho hàm

$$F(y)=[g(x)-g(a)]f(y)+[f(a)-f(x)]g(y)$$

ta tìm được điểm ζ nằm giữa a và x sao cho

$$[f(x)-f(a)]g'(\zeta)=[g(x)-g(a)]f'(\zeta)\ .$$

Để ý rằng $f(a)=g(a)=0$ ta có $f(x)g'(\zeta)=g(x)f'(\zeta)$. Do sự tồn tại của giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ ta suy ra rằng $g'(x)\neq 0$ tại những điểm khác a trong lân cận đủ nhỏ của điểm a và theo định lý giá trị trung bình $g(x)\neq 0$ tại những điểm $x\neq a$ trong một lân cận đủ bé của a. Như vậy từ đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\ .$$

Để ý rằng khi x tiến dần tới a thì ζ cũng tiến dần tới a (do bị kẹp giữa x và a), cho nên từ đây ta có ngay điều cần chứng minh.

7.3.2. Giới hạn dạng không xác định $\frac{\infty}{\infty}$

Định lý (l'Hôpital 2) *Giả sử f,g là các hàm khả vi liên tục trong lân cận điểm a và thỏa mãn điều kiện* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. *Khi đó nếu tồn tại giới hạn* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ *thì cũng tồn tại giới hạn* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

<u>Chứng minh</u> Từ điều kiện $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, ta tìm được số dương M và, với mỗi số dương (đủ nhỏ) ε, tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| < M$ khi $|x-a| < \delta_1$.

Chú ý rằng với mỗi x_0 thoả mãn $|x_0 - a| < \delta_1$ ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}.\frac{f(x)[g(x)-g(x_0)]}{g(x)[f(x)-f(x_0)]} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}.\frac{1-g(x_0)/g(x)}{1-f(x_0)/f(x)}$$

Đặt $I(x,x_0) = \frac{1-g(x_0)/g(x)}{1-f(x_0)/f(x)}$ ta thấy $\lim_{x-a} I(x,x_0) = 1$ cho nên tồn tại số dương $\delta \le \delta_1$ sao cho $|I(x,x_0)-1| \le \varepsilon/(2M)$. Mặt khác, do Định lý Cauchy ta tìm được điểm c nằm giữa x và x_o thoả mãn $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Tổng hợp lại, với mỗi số dương ε ta đã tìm được số dương δ > 0 sao cho với $|x-a| < \delta$ thì

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} I(x,x_0) - L\right| \le \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}[I(x,x_0)-1+1] - L.\right| \le$$

$$\le \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| + \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}[I(x,x_0)-1]\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + M.\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

nghĩa là ta có điều cần chứng minh.

7.4. Nguyên lý cực trị của hàm số

7.4.1. Điều kiện cần bậc nhất

Cho hàm f xác định trên khoảng (a,b). Ta nói rằng f đạt *cực trị địa phương* tại $c \in (a,b)$ nếu tìm được *lân cận* của c (trong khoảng (a,b)) để f đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trên lân cận này tại điểm c. Dĩ nhiên, nếu f đạt cực trị trên (a,b) tại $c \in (a,b)$ thì nó cũng đạt cực trị địa phương tại c, nhưng điều ngược lại không đúng. Thí dụ hàm $f(x) = |x^2 - 1|$ đạt cực đại địa phương tại $x = 0$, nhưng không đạt cực đại trên khoảng (-2,2) tại điểm đó.

Định lý *Cho hàm f xác định trên (a,b) và đạt cực trị địa phương tại $c \in (a,b)$. Nếu f khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.*

Chứng minh Đây chính là Định lý Fermat đã được chứng minh trong chương trước.

Chú ý Mệnh đề ngược lại của định lý trên là không đúng. Từ tính suy thoái của đạo hàm (bằng 0) tại điểm x_0 chưa thể suy ra x_0 là cực trị của hàm số. Thí dụ, hàm số $y = x^3$ có đạo hàm suy thoái tại $x = 0$, nhưng không đạt cực trị tại 0.

7.4.2. Điều kiện đủ bậc nhất

Mệnh đề *Cho hàm f liên tục trong lân cận $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ của điểm x_0 và giả sử rằng f có đạo hàm tại mọi điểm trong lân cận ấy.*

i. Nếu khi x đi qua x_0 mà đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.

ii. Nếu khi x đi qua x_0 mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm thì hàm số đạt cực đại tại x_0

iii. Nếu khi x đi qua x_0 mà đạo hàm không đổi dấu thì x_0 không phải là cực trị.

Chứng minh Giả thiết điều kiện đầu tiên của định lýthoả mãn. Nếu x_0 không phải là điểm cực tiểu, ta sẽ tìm được điểm x trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sao cho $f(x) < f(x_0)$. Theo định lýgiá trị trung bình, tồn tại điểm c trong khoảng giữa x và x_0 sao cho $f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x)$. Vậy, nếu $x < x_0$ thì $f'(c) > 0$, và nếu $x > x_0$ thì $f'(c) < 0$. Chứng tỏ $f'(x)$ không thể đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0, điều này trái với giả thiết.

Các điều kiện khác chứng minh tương tự.

7.4.3. Điều kiện cực trị bậc 2

Mệnh đề *Cho hàm f khả vi liên tục trên (a,b) và có đạo hàm bậc hai liên tục tại điểm $c \in (a,b)$:*

i. Nếu f đạt cực tiểu địa phương tại c thì $f'(c) = 0$ và $f''(c) \ge 0$. Ngược lại, nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) > 0$ thì f có cực tiểu địa phương tại c.

ii. Nếu f đạt cực đại địa phương tại c thì $f'(c) = 0$ và $f''(c) \le 0$. Ngược lại, nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) < 0$ thì f có cực đại địa phương tại c.

Chứng minh Ta chỉ cần chứng minh phần (i), phần còn lại chứng minh tương tự.

Điều kiện cần: Tính suy biến của đạo hàm bậc nhất tại điểm c đã được chỉ ra trong Định lý Fermat. Ta chỉ cần chứng minh tính không âm của đạo hàm bậc 2 tại điểm c. Từ khai triển Taylor ta có

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\varsigma)}{2!}(x-c)^2$$

trong đó ς là điểm nằm trong khoảng (x,c). Do $f'(c) = 0$ nên với $x \ne c$ ta có

$$f''(\varsigma) = 2(x-c)^{-2}[f(x) - f(c)].$$

Khi cho x tiến dần đến c thì vế phải luôn luôn không âm (vì c là điểm cực tiểu) và vế trái tiến dần tới $f''(c)$ (vì $f''(.)$ là hàm liên tục và ζ luôn nằm giữa x và c). Điều này có nghĩa rằng $f''(c)$ là không âm và điều kiện cần đã được chứng minh xong.

Điều kiện đủ: Giả sử $f'(c) = 0$ và $f''(c) > 0$. Vì

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c+\Delta x) - f'(c)}{\Delta x} = f''(c) > 0$$

nên khi Δx đủ nhỏ, $f'(c+\Delta x)$ cùng dấu với Δx. Chứng tỏ đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua c, và vì vậy hàm số đạt cực tiểu tại c.
Mệnh đề đã được chứng minh xong.

7.5. Khảo sát các tính chất của hàm số

7.5.1. Tính đơn điệu

Mệnh đề *Hàm khả vi là đơn điệu tăng (giảm) khi và chỉ khi đạo hàm của nó không âm (không dương).*

Chứng minh (⇒) Nếu f là hàm khả vi và đơn điệu tăng thì ta có

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{với mọi } \Delta x > 0 .$$

Suy ra

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 .$$

Tương tự, nếu f là đơn điệu giảm ta có $f'(x) \leq 0$.

(⇐) Cho $x_2 > x_1$ bất kỳ. Theo *định lý giá trị trung bình* ta có

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

với c là một điểm nào đó trên khoảng (x_1, x_2). Từ đây ta suy ra rằng $[f(x_2) - f(x_1)]$ là cùng dấu với $f'(c)$, và do đó f sẽ là đơn điệu tăng khi f' là không âm, và là đơn điệu giảm khi f' là không dương. Mệnh đề đã được chứng minh.

7.5.2. Tính lồi

Mệnh đề *Hàm khả vi là lồi khi và chỉ khi đạo hàm của nó là một hàm đơn điệu tăng.*

Chứng minh (⇒) Nếu f là hàm lồi thì với mọi $x_1, x_2 \in R$, $t \in (0,1)$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) \geq \frac{f[tx_1 + (1-t)x_2] - f(x_2)}{t} = \frac{f[tx_1 + (1-t)x_2] - f(x_2)}{t(x_1 - x_2)}(x_1 - x_2)$$

Cho t giảm dần về 0 ta có

$$f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) .$$

Tương tự ta cũng có

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Bằng cách cộng 2 bất đẳng thức trên theo vế ta thu được

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2) = [f'(x_1) - f'(x_2)](x_2 - x_1).$$

Điều này suy ra f là hàm đơn điệu tăng.

($\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử $f'(.)$ là hàm đơn điệu tăng, ta sẽ chỉ ra rằng f là hàm lồi. Bằng phản chứng, giả sử rằng f không lồi, khi đó tìm được các điểm $a < b$ và số $\alpha \in (0,1)$ sao cho

$$f[\alpha a + (1-\alpha)b] > \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b).$$

Đặt $c = \alpha a + (1-\alpha)b$, ta có $a < c < b$ và $\alpha = (b-c)/(b-a)$. Như vậy,

$$f(c) > \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) .$$

Từ đây suy ra

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a} > \frac{f(b) - f(c)}{b-c} .$$

Theo định lý giá trị trung bình ta tìm được các điểm $\zeta_1 \in (a,c), \zeta_2 \in (c,b)$ sao cho

$$f'(\zeta_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a} > \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\zeta_2) .$$

Điều này mâu thuẫn với tính đơn điệu tăng của hàm $f'(.)$, vì rõ ràng là $\zeta_1 < \zeta_2$.

Mệnh đề đã được chứng minh đầy đủ.

Hệ quả *Hàm khả vi bậc 2 là lồi khi và chỉ khi đạo hàm bậc 2 của nó không âm.*

Chứng minh Suy ra từ 2 định lý trên.

7.5.3. Điểm uốn

Cho đường cong $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b). Với $c \in (a,b)$, ta nói điểm $M(c, f(c))$ là ***điểm uốn*** của đồ thị nếu tìm được một số $\delta > 0$ sao cho hàm số lồi trên khoảng $(c-\delta, c)$ và lõm trên khoảng $(c, c+\delta)$, hoặc ngược lại, hàm số lõm trên khoảng $(c-\delta, c)$ và lồi trên khoảng $(c, c+\delta)$.

Nhận xét Có thể nói một cách ngắn gọn như sau: Điểm uốn là điểm mà tại đó đồ thị hàm số chuyển từ lõm sang lồi hoặc ngược lại.

Từ mệnh đề ở phần trên, ta dễ dàng suy ra:

Mệnh đề *Giả sử tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm bậc hai trên khoảng $(c-\delta, c+\delta)$. Khi ấy*

i. Nếu f'' đổi dấu khi x đi qua c thì $M(c, f(c))$ là điểm uốn của đồ thị.

ii. Nếu f'' không đổi dấu khi x đi qua c thì $M(c, f(c))$ không phải là điểm uốn của đồ thị hàm số.

Chứng minh Từ (i) suy ra: khi đối số x đi qua c thì đồ thị hàm số đổi miền lồi sang lõm hoặc ngược lại. Chứng tỏ M(c, f(c)) là điểm uốn của đồ thị hàm số.

Trong trường hợp (ii) tính lồi (lõm) của đồ thị hàm số vẫn giữ nguyên. Do đó điểm M(c, f(c)) không là điểm uốn.

Thí dụ Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 3$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2$; $y'' = 12x^2 - 24x$; $y'' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$. Vì y'' là tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt nên qua điểm nghiệm $x = 0$ và $x = 2$ nó đổi dấu. Chứng tỏ hàm số đổi miền lồi sang lõm hoặc lõm sang lồi. Đồ thị hàm số có hai điểm uốn $M_1(0,3)$ và $M_2(2,-13)$.

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 7

1. Đạo hàm bậc cao

Bài 1 Tính đạo hàm bậc hai của các hàm số sau:

1) $y = \dfrac{x}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; 3) $y = 2x - \dfrac{1}{x}$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$; 6) $y = \tan(x^2)$;

7) $y = \dfrac{\tan(3x)}{1+2x}$.

Bài 2 Tìm đạo hàm bậc 10 tại $x = 0$ của hàm số $y = x^2\cos(2x)$

Bài 3 Chứng minh rằng biểu thức $z = \dfrac{y'''}{y'} - \dfrac{3}{2}(\dfrac{y'''}{y'})^2$ không đổi khi thay y bởi $\dfrac{1}{y}$.

Bài 4 Giả sử $f(x)$ là một hàm chẵn, hai lần khả vi liên tục và $f''(0)$ khác 0. Chứng minh rằng $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số.

Bài 5 Cho $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}$ khi $x > 0$ và $f(x) = 0$ khi $x \le 0$. Chứng minh rằng $f(x)$ khả vi vô hạn lần.

2. Khai triển Taylor của hàm số

Bài 1 Tìm khai triển Taylor bậc 5 của các hàm số sau tại điểm $x = 0$

1) $y = \sin(x) + \cos(x)$; 2) $y = x\sin(x)$; 3) $y = e^x\sin(x)$;

4) $y = \tan(x) + \cot(x)$; 5) $y = e^{(-x^2)}$; 6) $y = \arcsin(x) + \sin(x)$.

Bài 2 Tìm khai triển Taylor bậc 6 của các hàm số sau đây tại điểm $x = 1$

1) $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$; 2) $y = \sin(x)\cos(x)$; 3) $y = x^{10} + 3x^7 + 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + x + 13$

4) $y=\sin(x)+\dfrac{1}{x}$; 5) $y=\dfrac{e^x}{\sin(x)}+\dfrac{\sin(x)}{e^x}$; 6) $y=xe^{(x+2)}+\arcsin(x-1)$.

3. Khảo sát hàm số và ứng dụng

3.1. Tính đơn điệu

Bài 1 Tính đạo hàm bậc nhất và khảo sát tính đơn điệu của các hàm số sau:

1) $y=x^2e^x$; 2) $y=x\ln(x^2+1)$;

3) $y=\arctan(x)e^{-x^2}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Bài 2 Chứng minh rằng $f'(x)+af(x)$ không giảm khi và chỉ khi $f'(x)e^{ax}$ không giảm.

3.2. Sử dụng tính đơn điệu để giải phương trình và bất phương trình

Bài 1 Tìm các nghiệm âm của phương trình $x^6-2x^5-3=0$.

Bài 2 Giải bất phương trình $6(4-x^2)<x(x^8+x^2+16)$.

Bài 3 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3x-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3x-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}$$

Bài 4 Cho biết $2b+3c=0$. Chứng minh rằng phương trình $a\cos(2x)+b\cos(x)+c=0$ luôn luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0,\dfrac{\pi}{2})$.

3.3. Sử dụng tính đơn điệu để chứng minh bất đẳng thức

Bài 1 Chứng minh rằng $1-\dfrac{1}{x}\le\ln(x)$ với mọi $x\in(0,1)$.

Bài 2 Tìm tất cả các giá trị của a sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x\ge 0$:

$$x-ax^2\le\ln(1+x)$$

Bài 3 Chứng minh rằng với mọi x dương thì $1-\dfrac{x^2}{2}<\cos(x)$.

Bài 4 Cho $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $2[\cos(b)-\cos(a)]<a\sin(a)-b\sin(b)$.

Bài 5 Chứng minh rằng $(x-y)(2-(x+y))<2\ln\dfrac{1+x}{1+y}$ với mọi $x>y>0$.

3.4. Khảo sát tính lồi, lõm của hàm số

Tính đạo hàm bậc hai và xét tính lồi, lõm của các hàm số sau:

Bài 1 1) $y = 3x^5 - 5x^4$; 2) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

Bài 2 1) $y = xe^{-x^2}$; 3) $y = \tan(x) + e^x$.

3.5. Khảo sát các điểm đặc biệt của hàm số

Tìm các điểm đặc biệt (điểm cực trị,điểm uốn) của các hàm số sau:

Bài 1 1) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2$; 2) $y = x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 2$.

Bài 2 1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$; 2) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

3.6. Tìmgiá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Bài 1 Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số: $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$.

Bài 2 Chứng minh rằng với mọi $a \neq 0$, hàm số $y = \dfrac{x^2 + (a+1)x + 2}{x^2 + x + 1}$ luôn có cực trị.

Bài 3 Dùng đạo hàm cấp hai để tìm cực trị của các hàm số sau:

1) $y = x^2(a - x)^2$

2) $y = x^2 e^{(-x)}$

Bài 4 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^p x \sin^q x$ $(0 \le x, x \le \dfrac{\pi}{2})$, trong đó p và q là những số tự nhiên lớn hơn 1.

4. Tính giới hạn dạng không xác định

Bài 1 Sử dụng quy tắc l'Hôpital để tính các giới hạn sau

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\cos(x) - 1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

Bài 2 Giải thích tại sao các giới hạn sau không dùng được quy tắc l'Hôpital, và tính các giới hạn đó bằng cách khác:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin(x)}{\cot(x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + \cos(x)}{x}$;

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; 4) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$.

Bài 3 Tính $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{\cot(x)}$.

5. Thực hành tính toán trên máy

5.1. Tính đạo hàm bậc cao trên máy

Ta tính đạo hàm cấp 2 bằng cách tính 2 lần đạo hàm bậc nhất. Nghĩa là ta sẽ làm những bước sau:
1. Tính đạo hàm bậc nhất của hàm $f(x)$ và thu được hàm $g(x) = f'(x)$;
2. Tính đạo hàm bậc nhất của hàm $g(x)$ để có được hàm $g'(x) = f''(x)$:

Bước 1: Vào lệnh

```
[> diff(f(x),x);
```

Trong đó, $f(x)$ là hàm mà ta cần tính đạo hàm, x là biến. Sau dấu chấm phẩy (;) ấn phím "Enter", trên màn hình sẽ hiện ra công thức đạo hàm bậc nhất của $f(x)$.

Bước 2: Vào tiếp lệnh tính đạo hàm của biểu thức trên

```
[> diff(",x);
```

Sau dấu chấm phẩy (;) ấn phím "Enter" , ta sẽ được đạo hàm bậc hai của $f(x)$.

Thí dụ

```
[> diff(x^3-3*x^2+2*cos(x) ,x);
```

$$3x^2-6x-2\sin(x).$$

```
[> diff(",x);
```

$$6x-6-2\cos(x).$$

Muốn có công thức tường minh biểu diễn quá trình tính đạo hàm bậc 2 của một hàm số, ta có thể thực hiện các thủ tục tương tự như đối với hàm $f(x)=\frac{x}{x+1}$ dưới dây:

```
[> f:=x->x/(x+1);
[> Diff(f(x),x);
[> f_prime:=value(");
[> simplify(");
[> Diff(",x);
[> f_prime:=value(");
```

(Các bạn hãy tự thực hiện trên máy và xem kết quả).

5.2. Tìm khai triển Taylor của hàm số

Muốn tìm khai triển Taylor bậc n của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = a$ ta sử dụng câu lệnh có cú pháp như sau:

```
[> taylor(f(x),x=a,n);
```

Thí dụ

```
[> taylor(x*sin(x),x=0,10);
```

$$x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{5040}x^8 + O(x^{10})$$

```
[> taylor(sin(x)+cos(x),x=1,7);
```

$$(\sin(1)+\cos(1)) + (\cos(1)-\sin(1))(x-1) + \left(-\frac{1}{2}\sin(1) - \frac{1}{2}\cos(10)\right)(x-1)^2 +$$

$$+\left(-\frac{1}{6}\cos(1) + \frac{1}{6}\sin(1)\right)(x-1)^3 + \left(\frac{1}{24}\sin(1) + \frac{1}{24}\cos(1)\right)(x-1)^4 +$$

$$+\left(\frac{1}{120}\cos(1) - \frac{1}{120}\sin(1)\right)(x-1)^5 + \left(-\frac{1}{720}\sin - \frac{1}{720}\cos(1)\right)(x-1)^6 + O((x-1)^7)$$

Khi không chỉ rõ bậc của đa thức khai triển thì chương trình luôn ngầm định $n = 6$.

Thí dụ

```
[> taylor(exp(x)+1/x,x=1);
```

$$(e+1) + (e-1)(x-1) + \left(\frac{1}{2}e+1\right)(x-1)^2 + \left(-1+\frac{1}{6}e\right)(x-1)^3 + \left(\frac{1}{24}e+1\right)(x-1)^4 +$$

$$+\left(\frac{1}{120}e-1\right)(x-1)^5 + O((x-1)^6)$$

5.3. Tìm khoảng đơn điệu, miền lồi, cực trị và điểm uốn của hàm số

Việc thực hành tính toán của phần này thực chất là tính đạo hàm và tìm giới hạn của hàm số (đã được tiến hành trong các chương trước). Sau khi đã tính được đạo hàm của hàm số thì việc giải các bài tập ở phần này trở nên rất dễ dàng.

1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

Để tìm khoảng đơn điệu của hàm số ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số: đánh các lệnh (xem phần Thực hành tính toán đạo hàm Chương 6).

```
[> diff(f(x),x);
```

Trong đó $f(x)$ là hàm số và x là biến số mà ta cần tính đạo hàm.

Bước 2: Để tìm khoảng đồng biến của hàm số, (tức là tìm những khoảng mà đạo hàm của hàm số không âm) đưa vào dòng lệnh xác định bất phương trình với cú pháp như sau:

```
[> ineq := bieuthuc f'(x)>=0;
```

Bước 3: Giải phương trình bằng lệnh

[> `solve(ineq,{x});`

Máy sẽ cho biết nghiệm của bất phương trình $0 \le f'(x)$, và đó cũng chính là khoảng đồng biến của hàm số đã cho.

Thí dụ Tìm khoảng đơn điệu của hàm số: $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 8$

Bước 1: Tính đạo hàm bằng lệnh:

[> `diff(x^3-6*x^2+4*x-8,x);`

$$3x^2 - 12x + 4$$

Bước 2: Thiết lập bất phương trình

[> `ineq:=(3*x^2-12*x+4>=0);`

$$ineq := 0 \le 3x^2 - 12x + 4$$

Bước 3: Giải bất phương trình

[> `solve(ineq,{x});`

$$\{x \le 2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}\}, \{2 + \frac{2}{3}\sqrt{6} \le x\}$$

2. Tìm miền lồi, miền lõm của hàm số

Để tìm miền lồi, lõm của hàm số ta phải làm các bước sau:

Bước 1: Tính đạo hàm bậc nhất: đánh các lệnh (xem phần Thực hành tính toán đạo hàm Chương 6).

[> `diff(f(x),x);`

Bước 2: Tính đạo hàm bậc hai: đánh lệnh tính đạo hàm của biểu thức trên

[> `diff(",x);`

Bước 3: Giải bất phương trình $f''(x) \ge 0$ để tìm miền lồi của hàm số, bằng lệnh

[> `solve(">=0);`

Máy sẽ cho biết nghiệm của bất phương trình $f''(x) \ge 0$, đó cũng chính là miền lồi của hàm số đã cho.

Thí dụ Tìm khoảng lồi, lõm của hàm số $y = x^4 - 2x^2$

Bước 1: Tìm đạo hàm bậc nhất

[> `diff(x^4-x^2,x);`

$$4x^3 - 2x$$

Bước 2: Tìm đạo hàm bậc 2

[> `diff(",x);`

$$12x^2 - 2$$

Bước 3: Giải phương trình tìm miền dương của đạo hàm bậc 2 (miền lồi của hàm số)

```
[> solve(">=0);
```

$$(-\infty,-\frac{1}{6}\sqrt{6}),(\frac{1}{6}\sqrt{6},\infty)$$

3. Tìm cực đại, cực tiểu

Có hai phương pháp tìm cực trị của hàm số. Phương pháp 1: dùng đạo hàm bậc nhất và tính đơn điệu của hàm số, Phương pháp 2: dùng đạo hàm bậc hai.

Phương pháp 1 ***Tìm cực trị bằng đạo hàm bậc nhất***

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số

```
[> diff(f(x),x);
```

Bước 2: Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm các điểm nghi ngờ là cực trị

```
[> solve(f'(x)=0,x);
```

Bước 3: Tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số

```
[> solve(f'(x)>=,x);
```

Bước 4: Xét xem tại x_0 :

1) Nếu đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm thì x_0 là điểm cực đại;

2) Nếu đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương thì x_0 là điểm cực tiểu;

3) Nếu qua x_0 đạo hàm không đổi dấu thì x_0 không phải là điểm cực trị .

Thí dụ Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 8$

Bước 1: `[> diff(y=x^3-6*x^2+4*x-8,x);`

$$3x^2 - 12x + 4$$

Bước 2: `[> solve(3*x^2-12*x+4=0,x);`

$$0 = 3x^2 - 12x + 4$$

Bước 3: `[> solve(3*x^2-12*x+4[>=0,x);`

$$(-\infty,2-\frac{2}{3}\sqrt{6}),(2+\frac{2}{3}\sqrt{6},\infty)$$

Bước 3b: `[> solve(3*x^2-12*x+4<=0,x);`

$$(2-\frac{2}{3}\sqrt{6},2+\frac{2}{3}\sqrt{6})$$

Qua $x_1 = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm nên $x_1 = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ là điểm cực đại, còn qua $x_2 = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ đạo hàm bậc nhất đổi dấu từ âm sang dương nên là $x_2 = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 8$.

Phương pháp 2 ***Tìm cực trị bằng đạo hàm bậc hai***

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số

```
[> diff(f(x),x);
```

Bước 2: Giải phương trình $f'(x) = 0$ (để tìm các điểm nghi ngờ là cực trị)

```
[> solve("=0,x);
```

Bước 3: Tìm đạo hàm bậc hai

```
[> diff(f"(x),x);
```

Bước 4: Tính giá trị của đạo hàm bậc hai tại những điểm mà tại đó đạo hàm bậc nhất bằng không.

Bước 5: So sánh giá trị của đạo hàm bậc hai với số 0 và kết luận

Thí dụ Tìm cực trị của $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 8$

Bước 1: Tìm đạo hàm bậc nhất:

```
[> diff(y=x^3-6*x^2+4*x-8,x);
```

$$3x^2 - 12x + 4$$

Bước 2: Tìm những điểm mà đạo hàm bậc nhất bằng 0:

```
[> solve(3*x^2-12*x+4=0,x);
```

$$(2 + \frac{2}{3}\sqrt{6}, 2 - \frac{2}{3}\sqrt{6})$$

Bước 3: Tìm đạo hàm bậc hai:

```
[> diff(3*x^2-12*x+4,x);
```

$$6x - 12$$

Bước 4: Tính giá trị của đạo hàm bậc hai tại những điểm mà tại đó đạo hàm bậc nhất bằng không, bằng lệnh

```
[> subs(x=2+2/3*sqrt(6),6*x-12);
```

$$4\sqrt{16}$$

```
[> subs(x=2-2/3*sqrt(6),6*x-12);
```

$$-4\sqrt{16}$$

Bước 5: So sánh giá trị của đạo hàm bậc hai với số 0 và kết luận.

Trong ví dụ này ta thấy:

Vì $y''(2+\frac{2\sqrt{6}}{3})=4\sqrt{6}>0$ nên $x_2=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$ là điểm cực tiểu;

Còn $y''(2-\frac{2\sqrt{6}}{3})=4\sqrt{6}<0$ nên $x_1=2-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ là điểm cực đại của hàm số.

4. Tìm điểm uốn

Điểm uốn là điểm mà tại đó đồ thị hàm số đổi miền lồi sang lõm hoặc lõm sang lồi, tức là điểm mà tại đó đạo hàm bậc hai đổi dấu. Vì vậy, muốn tìm điểm uốn ta phải thực hiện các thao tác sau:

Bước 1: Tính đạo hàm bậc nhất

```
[> diff(f(x),x);
```

Bước 2: Tính đạo hàm bậc hai

```
[> diff(",x);
```

Bước 3: Giải các bất phương trình $f''(x)\geq 0$, $f''(x)\leq 0$

```
[> solve(">=0);
[> solve("<=0);
```

Nếu x_o là nghiệm của cả hai bất phương trình trên thì nó chính là điểm uốn.

Thí dụ Tìm điểm uốn của hàm số $y=x^4-2x^2$

Bước 1: Tính đạo hàm bậc nhất

```
[> diff(x^4-x^2,x);
```

$$4x^3-2x$$

Bước 2: Tính đạo hàm bậc hai

```
[> diff(",x);
```

$$12x^2-2$$

Bước 3: Giải các bất phương trình:

```
[>solve(">=0);
```

$$(-\infty,-\frac{1}{6}\sqrt{6}];[\frac{1}{6}\sqrt{6},\infty)$$

```
[> solve(12*x^2-2<=0);
```

$$[-\frac{1}{6}\sqrt{6},\frac{1}{6}\sqrt{6}]$$

Kết luận $x = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$ và $x = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ là hai điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho.

5.4. Thực hành tính giới hạn dạng không xác định

Muốn tính giới hạn dạng không xác định, ta sử dụng các lệnh tính giới hạn thông thường đã thực hiện trong Chương 5. Chú ý rằng phương pháp l'Hôpital (sử dụng đạo hàm) là một phương pháp mạnh để tính giới hạn dạng không xác định, nhưng khi giải trên máy ta sẽ không thấy có gì khác biệt với các lệnh tính giới hạn ở Chương 5, vì rằng máy đã tự động xử lý các trường hợp không xác định (bằng phương pháp l'Hôpital).

Bài 1 Tìm $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

```
[> limit(ln(x-a)/ln(e^x-e^a),x = a);
```

$$1$$

Rõ ràng đây là dạng không xác định, nhưng máy đã tự động xử lý bằng phương pháp l'Hôpital và không yêu cầu ta phải có giải pháp gì đặc biệt.

Tuy nhiên, có những tình huống không xác định khá lắt léo, đôi khi khiến cho máy không xử lý nổi, và khi ấy ta phải ra tay can thiệp mới xong.

Bài 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sin(x)-5x}{5x^2+x^3}$

```
[> limit((e^(2*x)*sin (x)-5*x)/(5*x^2+x^3),x=0);
```

undefined (không xác định)

Rõ ràng là máy "bó tay".

Muốn tính giới hạn này, ta phải áp dụng hai lần quy tắc l'Hôpital để được đáp số

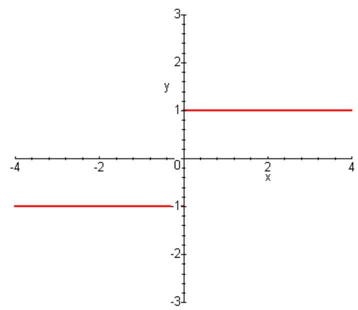
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sin(x)-5x}{5x^2+x^3} = \frac{2}{5}.$$

CHƯƠNG 8

Đạo hàm suy rộng

8.1. Hàm không khả vi

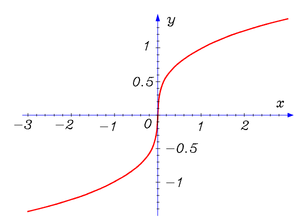
Trong chương trước chúng ta đã thấy vai trò quan trọng của <u>*đạo hàm*</u> trong việc khảo sát hàm số. Nó là công cụ hữu hiệu giúp ta xác định dáng điệu và cấu trúc của hàm, cũng như tìm các điểm đặc biệt (cực trị, điểm uốn,...). Tuy nhiên, trong thực tế không phải lúc nào ta cũng gặp những hàm <u>*khả vi*</u> (có đạo hàm), mà ngược lại, nhiều khi ta gặp phải những hàm không khả vi (nhất là trong các bài toán xuất phát từ kỹ thuật và kinh tế). Thí dụ về những hàm này có thể tìm thấy một cách dễ dàng.



Hình 8.1

Thí dụ 1) $f_1(x) = \operatorname{sgn}(x)$ là hàm không khả vi tại điểm x=0, (*Hình 8.1*).

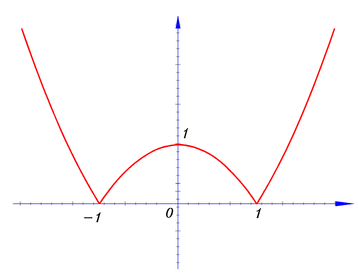
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là hàm không khả vi tại điểm $x = 0$, (*Hình 8.2*).



Hình 8.2

3) $f(x) = |x^2 - 1|$ là hàm không khả vi tại điểm $x = 1$ và $x = -1$, (*Hình 8.3*).

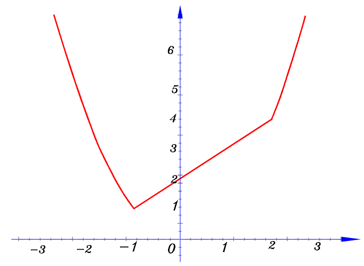
4) $f(x) = \max\{x + 2, x^2\}$ là hàm không khả vi tại các điểm $x = -1$ và $x = 2$, (*Hình 8.4*).



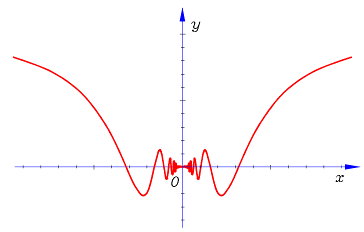
Hình 8.3

5) $f(x)=\begin{cases} x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$

là hàm không khả vi tại điểm $x = 0$, (*Hình 8.5*).



Hình 8.4



Hình 8.5

Nhận xét Trong Thí dụ 1 ta có hàm số không *liên tục* tại điểm $x = 0$, cho nên nó đương nhiên không thể khả vi tại điểm đó (vì nếu nó *khả vi* thì phải liên tục). Trong các thí dụ còn lại ta đều thấy các hàm liên tục tại mọi điểm, nhưng có thể không khả vi tại một số điểm. Lý do là tại những điểm đó không tồn tại *giới hạn*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (*)$$

(như trong định nghĩa *đạo hàm*). Điều đáng lưu tâm là tại những điểm không khả vi này mỗi hàm có một bản sắc riêng. Trong các Thí dụ 3, 4 ta thấy những hàm *liên tục* nhưng bị "gãy khúc" tại một số điểm. Tại những điểm gãy khúc này giới hạn (*) theo hướng âm hoặc dương riêng rẽ (giới hạn phải hoặc trái) thì tồn tại, nhưng không bằng nhau, cho nên giới hạn chung (*) cũng không tồn tại và vì vậy hàm không khả vi. Thí dụ 2 cho ta thấy một hàm liên tục trơn tru (không gãy khúc) tại gốc tọa độ, nhưng quá dốc nên giới hạn (*) bằng vô cùng (không hữu hạn !), và cũng không được xem là hàm *khả vi*. Trong Thí dụ 5 ta thấy một hàm liên tục tại gốc tọa độ, nhưng lại "dao động mạnh" khi ở gần điểm này khiến cho giới hạn (*) không thể tồn tại và vì thế hàm không khả vi tại đây.

Như vậy dáng điệu của những hàm không khả vi là rất đa dạng. Có những hàm "gần" khả vi (liên tục và có đạo hàm theo hướng, như trong các Thí dụ 3, 4), và có những hàm khác xa với hàm khả vi (không liên tục hoặc giới hạn (*) không thể tồn tại theo cả hai hướng, như trong các Thí dụ 1, 5). Vì trong thực tiễn thường hay gặp phải những hàm không khả vi, cho nên người ta thấy cần phải có được một kiểu "đạo hàm" nào đó (trước hết là cho những hàm "gần khả vi"), để mong có được một số thông tin "khả dĩ" thay thế cho những thông tin về đạo hàm theo nghĩa cổ điển (không tồn tại). Người ta gọi những kiểu đạo hàm (không kinh điển) này là "đạo hàm suy rộng". Chúng là đối tượng nghiên cứu của một lĩnh vực mới trong Toán học hiện đại là "Giải tích không trơn". Trong khuôn khổ của giáo trình Toán học cơ sở, chúng ta không có điều kiện đi sâu mà chỉ có thể bước đầu làm quen với một số khái niệm trong lĩnh vực mới mẻ này.

8.2. Đạo hàm theo hướng

8.2.1. Định nghĩa

*Hàm số được gọi là *khả vi theo hướng* $u \in \mathbb{R}$ tại điểm x_o nếu như tồn tại giới hạn*

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_o+tu)-f(x_o)}{t}.$$

(Giới hạn đó sẽ được gọi là *đạo hàm theo hướng* của hàm số f theo hướng $u \in \mathbb{R}$ tại điểm x_o và được ký hiệu là $f'(x_o;u)$).

Dễ thấy $f'(x_0;1)$ là *đạo hàm phải* và $f'(x_0;-1)$ là *đạo hàm trái* của f tại x_o.
Nếu hàm số là khả vi theo mọi hướng (tại một điểm) thì được gọi là *khả vi theo hướng* (tại điểm đó). Rõ ràng nếu hàm f là *khả vi* tại điểm x_o (theo nghĩa thông thường) thì nó cũng là *khả vi theo hướng* tại đó, và ta có công thức liên hệ giữa *đạo hàm* với *đạo hàm theo hướng* như sau

$$f'(x_o;u) = \lim_{t\to 0+}\frac{f(x_o+tu)-f(x_o)}{t} = \lim_{t\to 0+} u.\frac{f(x_o+tu)-f(x_o)}{tu} =$$
$$= u.\lim_{tu\to 0+}\frac{f(x_o+tu)-f(x_o)}{tu} \overset{tu=\Delta x}{=} f'(x_0).u$$

Như vậy đạo hàm theo hướng của một hàm khả vi là một hàm tuyến tính (theo biến hướng u).

Có thể kiểm chứng thấy rằng những hàm trong các Thí dụ 2, 3 là khả vi theo hướng, nhưng không khả vi (theo nghĩa thông thường) tại những điểm "gãy khúc". Những hàm số nêu trong các Thí dụ 1, 4, 5 là không khả vi theo bất cứ hướng nào tại điểm gốc ($x_o = 0$). Dễ dàng tìm được ví dụ những hàm khả vi theo hướng này mà không khả vi theo hướng khác (tại một điểm đã cho).

8.2.2. Nhận xét

Trong những hàm không khả vi (theo nghĩa thông thường) thì lớp hàm *khả vi theo hướng* đáng được quan tâm đầu tiên, vì nó khá gần với hàm khả vi. Vấn đề đặt ra trước hết là liệu có thể kết hợp các thông tin về đạo hàm theo các hướng khác nhau (tại một điểm) để đưa ra được một thông tin chung về hàm (tại điểm đó), tương tự như thông tin về đạo hàm. Những nghiên cứu sâu hơn cho thấy rằng công việc này không phải lúc nào cũng mang lại kết quả mong muốn, vì trong trường hợp tổng quát các đạo hàm theo hướng liên hệ với nhau khá "lỏng lẻo". Kết quả chỉ có thể đạt được khi *đạo hàm theo hướng* có một số tính chất đủ tốt (điều này cũng có nghĩa là hàm f phải có một cấu trúc "đủ đẹp"). Như ta dễ thấy, nếu đạo hàm theo hướng là *tuyến tính* (theo hướng) thì hàm là *khả vi*. Trường hợp không khả vi gần gũi nhất là khi *đạo hàm theo hướng* là *dưới tuyến tính* (theo hướng), cho nên trước hết ta hãy xem xét cụ thể trường hợp này. Để thấy rằng lớp hàm này đủ rộng, ta chỉ ra một lớp hàm khá thông dụng có tính chất như vậy.

8.2.3. Đạo hàm theo hướng của hàm lồi

Mệnh đề *Hàm lồi là khả vi theo hướng (tại mọi điểm).*

Chứng minh Khi f là hàm lồi thì với hướng $u \neq 0$ và các số dương $\alpha < \beta$ ta luôn có

$$f(x+\alpha u) = f[(1-\frac{\alpha}{\beta})x + \frac{\alpha}{\beta}(x+\beta u)] \le (1-\frac{\alpha}{\beta})f(x) + \frac{\alpha}{\beta}f(x+\beta u),$$

tức là

$$\frac{f(x+\alpha u)-f(x)}{\alpha} \le \frac{f(x+\beta u)-f(x)}{\beta}.$$

Như vậy hàm số $\phi(t) := \dfrac{f(x+tu)-f(x)}{t}$ là đơn điệu tăng theo *t*, cũng tức là nó *giảm dần khi t tiến dần về* 0 (từ bên phải). Mặt khác

$$f(x) = f[\frac{1}{t+1}(x+tu)+\frac{t}{t+1}(x-u)] \le \frac{1}{t+1}f(x+tu)+\frac{t}{t+1}f(x-u)$$

cho nên $f(x)-f(x-u) \le \dfrac{f(x+tu)-f(x)}{t}$. Có nghĩa là hàm $\phi(t)$ *bị chặn dưới*. Từ đây suy ra sự tồn tại của giới hạn

$$\lim_{t\to 0+}\phi(t) = \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t} = f'(x;u) .$$

Mệnh đề đã được chứng minh.

Mệnh đề *Đạo hàm theo hướng của hàm lồi (tại mỗi điểm) là dưới tuyến tính và liên tục (theo biến hướng).*

Chứng minh Trước hết ta nhận thấy, với mọi số $\lambda > 0$,

$$f'(x;\lambda u) = \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t\lambda u)-f(x)}{t} = \lambda\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t\lambda u)-f(x)}{t\lambda} =$$

$$= \lambda\lim_{\lambda t\to 0+}\frac{f(x+t\lambda u)-f(x)}{t\lambda} = \lambda f'(x;u)$$

cho nên hàm $f'(x;.)$ là thuần nhất dương.

Mặt khác do hàm f là lồi, với các hướng bất kỳ $u,v \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x;u+v) = \lim_{t\to 0+}\frac{f[x+t(u+v)]-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0+}\frac{f[\frac{1}{2}(x+2tu)+\frac{1}{2}(x+2tv)]-f(x)}{t} \le$$

$$\le \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}f(x+2tu)+\frac{1}{2}f(x+2tv)-f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+2tu)-f(x)}{2t} + \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+2tv)-f(x)}{2t} = f'(x;u)+f'(x;v)$$

cho nên hàm $f'(x;.)$ là *dưới cộng tính*. Tổng hợp lại ta có $f'(x;.)$ là *dưới tuyến tính*.
Vì mọi hàm dưới tuyến tính là *hàm lồi*, cho nên nó cũng *liên tuc* tại mọi điểm.
Mệnh đề đã được chứng minh xong.

8.3. Dưới vi phân

8.3.1. Đặt vấn đề

Khi một hàm số là khả vi theo (mọi) hướng, và đạo hàm theo hướng có một số tính chất đủ tốt, người ta có thể tìm cách tổng hợp các thông tin về đạo hàm theo từng hướng, để có được một thông tin tổng thể về dáng điệu của hàm tại lân cận điểm đó. Khi đạo hàm theo hướng không phải là hàm tuyến tính theo hướng (cũng tức là khi hàm không khả vi, như đã xét ở phần trên), thì thông tin này không thể "mạch lạc" như đạo hàm; tuy nhiên, nó cũng rất hữu ích trong việc khảo sát các tính chất của hàm và người ta xem nó như là một dạng mở rộng của đạo hàm và gọi là "dưới vi phân". Nó được định nghĩa trước hết cho những hàm *khả vi theo hướng*, với *đạo hàm theo hướng* là hàm *dưới tuyến tính*.

Mệnh đề *Khi $f'(x;.)$ là dưới tuyến tính thì tồn tại 2 số thực a, b (phụ thuộc vào x) sao cho với mọi $\varsigma \in [a,b]$ ta có*

$$f'(x;u) \geq \varsigma.u \quad \text{với mọi } u \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh Do $f'(x;.)$ là *dưới tuyến tính* nên

$$0 = f'(x;0) = f'(x;1-1) \leq f'(x;1) + f'(x;-1),$$

tức là

$$-f'(x;-1) \leq f'(x;1),$$

Đặt

$$a = -f'(x;-1), \quad b = f'(x;1) \qquad (1)$$

ta có

$$f'(x;u) = u.f'(x;1) = ub \geq u\varsigma, \qquad \forall u \geq 0, \forall \varsigma \in [a,b],$$

và

$$f'(x;u) = -u.f'(x;-1) = ua \geq u\varsigma, \qquad \forall u \leq 0, \forall \varsigma \in [a,b].$$

Tổng hợp lại, với mỗi $\varsigma \in [a,b]$, chúng ta có

$$f'(x;u) \geq \varsigma.u \quad , \text{ với mọi } u \in \mathbb{R}$$

Mệnh đề đã được chứng minh.

Nhận xét Nếu có đoạn số thực $[a',b']$ sao cho

$$\varsigma \in [a',b'] \quad \Rightarrow \quad f'(x;u) \geq \varsigma.u \,, \ \forall u \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

thì ta có $a'.1 \leq f'(x;1)$ và $b' \geq -f'(x;-1)$, tức là $[a',b'] \subset [a,b]$, với a,b được định nghĩa bởi (1). Như vậy$[a,b]$ là đoạn số thực lớn nhất trong số các đoạn $[a',b']$ thỏa mãn (2).

Định nghĩa *Dưới vi phân của một hàm số f khả vi theo hướng tại điểm x và có đạo hàm theo hướng $f'(x;.)$ dưới tuyến tính là tập hợp tất cả các số thực, ký hiệu là $\partial f(x)$, sao cho với mỗi $\varsigma \in \partial f(x)$ ta có*

$$f'(x;u) \geq \varsigma.u \,, \quad \forall u \in \mathbb{R} \,.$$

8.3.2. Nhận xét

Như vậy khái niệm *dưới vi phân* ở đây mới chỉ được định nghĩa cho những hàm *khả vi theo hướng* và có đạo hàm theo hướng là *dưới tuyến tính*. Cho nên, trong phạm vi giáo trình này nếu ta nói một hàm có dưới vi phân thì ta luôn tự hiểu rằng hàm đó có các tính chất trên.

8.4. Tính chất của dưới vi phân và ứng dụng

8.4.1. Các tính chất chung

Nhận xét 1) $\partial f(x)$ tồn tại (duy nhất) và là <u>đoạn</u> số thực $[a,b]$, với a, b được định nghĩa theo công thức (1).

2) Dễ dàng kiểm chứng rằng hàm f là <u>khả vi</u> (theo nghĩa thông thường) tại điểm x khi và chỉ khi dưới vi phân $\partial f(x)$ của nó tại x chỉ gồm một phần tử duy nhất. Khi ấy

$$\partial f(x) = [-f(x;-1), f'(x;1)] = \{f'(x;1)\} = \{f'(x).1\} = \{f'(x)\}.$$

3) <u>Hàm lồi</u> luôn có dưới vi phân tại mọi điểm.

Nhận xét Cho $[a,b]$, $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$. Ta định nghĩa

$$\lambda[a,b] = \{\lambda x : x \in [a,b]\},$$
$$[a,b] + [c,d] = \{x + y : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$$

Dễ kiểm tra rằng: $\lambda[a,b] = [\lambda a, \lambda b]$, $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$

Mệnh đề *Giả sử f là hàm có <u>dưới vi phân</u> tại điểm x. Khi ấy*

i. $\partial[\lambda f(x)] = \lambda \partial f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. $\partial[f(x) + g(x)] = \partial f(x) + \partial g(x)$, *với mọi hàm g có dưới vi phân tại x.*

iii. $\partial\{g[f(x)]\} = g'[f(x)].\partial f(x)$, *với mọi hàm g <u>khả vi</u> tại điểm f(x).*

<u>Chứng minh</u> Phần (i) suy ngay từ định nghĩa dưới vi phân. Phần (ii) dễ dàng chứng minh từ các nhận xét sau đây

$$[f+g](x;1) = f(x;1) + g(x;1),$$
$$[f+g](x;-1) = f(x;-1) + g(x;-1).$$

Phần (iii) được suy từ phép tính đạo hàm của hàm số kép, cụ thể là

$$[g \circ f]'(x;1) = g'[f(x)].f(x;1),$$
$$[g \circ f]'(x;-1) = g'[f(x)].f(x;-1).$$

Mệnh đề đã được chứng minh đầy đủ.

8.4.2. Dưới vi phân của hàm lồi

Mệnh đề *Khi f là <u>hàm lồi</u> thì*

$$\varsigma \in \partial f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x') - f(x) \geq \varsigma.(x'-x), \quad \forall x' \in X.$$

<u>Chứng minh</u> Đặt $u = x' - x$. Như đã chỉ ra trong chứng minh mệnh đề về đạo hàm theo hướng của hàm lồi, hàm số $\phi(t)=\dfrac{f(x+tu) - f(x)}{t}$ là <u>đơn điệu</u> theo *t*, tức là nó giảm dần khi *t* tiến dần về 0 từ phía bên phải. Suy ra với mọi $\varsigma \in \partial f(x)$ ta có

$$f(x') - f(x) = \frac{f(x+u) - f(x)}{1} \geq \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = f'(x;u) \geq \varsigma.u = \varsigma(x'-x).$$

Ngược lại, nếu $f(x') - f(x) \geq \varsigma.(x'-x), \quad \forall x' \in X$, thì với mọi hướng u và mọi số $t>0$ ta có $f(x+tu) - f(x) \geq t\varsigma.u$. Sau khi chia cả 2 vế cho t và qua giới hạn với t tiến đến 0 ta có $f'(x;u) \geq \varsigma.u$. Như vậy $\varsigma \in \partial f(x)$, và mệnh đề được chứng minh.

8.4.3. Khảo sát hàm số bằng dưới vi phân

Mệnh đề *Giả sử hàm f liên tục trong đoạn $[a,b]$ và có dưới vi phân tại mọi điểm trong khoảng (a,b). Khi đó:*

i. Nếu f có cực tiểu tại điểm $c \in (a,b)$ thì $0 \in \partial f(c)$.

ii. $\exists c \in (a,b), \exists \varsigma \in \partial f(c), \quad f(b) - f(a) = \varsigma(b-a)$.

iii. Nếu $0 \notin \partial f(x)$ với mọi $x \in (a,b)$, thì f là đơn điệu trên khoảng (a,b).

Chứng minh (i) Khi f có cực tiểu tại c thì với mọi $u \in \mathbb{R}$ và mọi t đủ bé ta có $f(c+tu) - f(c) \geq 0$, suy ra $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(c+tu) - f(c)}{t} \geq 0$, tức là $f'(c;u) \geq 0.u$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Theo định nghĩa của *dưới vi phân* chúng ta có $0 \in \partial f(c)$.

Phần (i) được chứng minh.

(ii) Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}x$, ta có $g(a) = \dfrac{af(b) - bf(a)}{b-a} = g(b)$. Vì hàm g liên tục cho nên nó đạt cực tiểu tại điểm c nào đó trong đoạn $[a,b]$. Vì giá trị tại 2 đầu mút a,b là trùng nhau, nên suy ra có điểm cực tiểu ở trong khoảng (a,b). Từ phần (i) và áp dụng công thức tính dưới vi phân của tổng, ta có $0 \in \partial g(c) = \partial f(c) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}.1$,

tức là tìm được $\varsigma \in \partial f(c)$ sao cho $0 = \varsigma - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.Từ đây suy ra (ii).

(iii) Giả sử f không đơn điệu trên $[a,b]$, ta tìm được $x, y, z \in (a,b)$ sao cho $x < y < z$ và $f(z) \notin [f(x), f(y)]$. Nếu $f(z) > \max\{f(x), f(y)\}$ thì do tính liên tục f phải đạt cực đại tại $c \in [a,b]$. Theo (i) ta có $0 \in \partial f(c)$. Điều này trái với giả thiết, cho nên phần (iii) được chứng minh. Mệnh đề đã được chứng minh đầy đủ.

Nhận xét 1) Phần (i) là *điều kiện cần* của cực trị.

2) Phần (ii) chính là định lý *giá trị trung bình* quen biết.

3) Phần (iii) có thể được *cụ thể hóa* như sau:

Nếu $0 \notin \partial f(a,b) := \{\partial f(x) \;/\; x \in (a,b)\}$ thì

a) Hoặc $\varsigma > 0, \quad \forall \varsigma \in \partial f(a,b)$, và khi ấy f là đơn điệu tăng trên khoảng (a,b);

b) Hoặc $\varsigma < 0, \quad \forall \varsigma \in \partial f(a,b)$, và khi ấy f là đơn điệu giảm trên khoảng (a,b).

(Cách chứng minh hoàn toàn tương tự).

8.5. Thí dụ minh họa

Thí dụ 1) $f(x) = \text{sgn}(x)$ là hàm không khả vi theo hướng tại điểm $x = 0$, vì nó không liên tục tại đó. Tại những điểm còn lại hàm khả vi liên tục và có đạo hàm là 0, và do đó $\partial f_1(x)=\{0\}$, $\forall x \neq 0$.

2) Hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là liên tục tại mọi điểm, nhưng không khả vi theo hướng tại điểm $x = 0$, vì tại điểm này ta có

$$\frac{f(0+t.1)-f(0)}{t} = \frac{\sqrt[3]{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \to +\infty \quad khi \quad t \to 0+ \ ,$$

tức là không tồn tại $f'(0;1)$. Tương tự ta cũng thấy rằng $f'(0;-1)$ không tồn tại. Tại những điểm còn lại có thể chứng minh được rằng hàm là khả vi và do đó

$$\partial f(x) = \{f'(x)\} = \{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\}, \quad \forall x \neq 0 \ .$$

3) $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ là hàm không khả vi tại các điểm $x = 1$ và $x = -1$, nhưng là khả vi theo hướng tại những điểm này. Bằng tính toán trực tiếp, ta dễ dàng thấy rằng

$$f'(1;1) = \lim_{t\to 0+} \frac{\left|(1+t.1)^2 - 1\right| - 0}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{2t+t^2}{t} = \lim_{t\to 0+}(2+t)=2 \ ,$$

$$f'(1;-1) = \lim_{t\to 0+} \frac{\left|[(1-t.1)^2 - 1\right| - 0}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{2t-t^2}{t} = \lim_{t\to 0+}(2-t)=2 \ ,$$

và do đó ta có $\partial f(1) = [-f'(1;-1), f'(1;1)] = [-2{,}2]$.

Tương tự ta có $\partial f(-1) = [-f'(-1;-1), f'(-1;1)] = [-2{,}2]$.

Tại những điểm còn lại hàm là khả vi, và ta có dưới vi phân của nó trùng với đạo hàm. Cụ thể là:

$$\partial f(x)=\begin{cases} 2x & khi\ x \notin (-1{,}1) \\ -2x & khi\ x \in (-1{,}1) \end{cases}$$

4) $f(x) = \max\{x+2, x^2\}$. Có thể chứng minh rằng f là một <u>*hàm lồi*</u>, cho nên nó <u>*khả vi theo hướng*</u> tại mọi điểm. Tuy nhiên nó không khả vi tại $x = -1$ và tại x=2. Tại đây chúng ta có:

$$f'(-1;-1) = 2,\ f'(-1;1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \partial f(-1) = [-2{,}1] \ ;$$

$$f'(2;-1) = -1,\ f'(2;1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \partial f(2) = [1{,}2] \ .$$

Tại những điểm còn lại hàm f là khả vi, cho nên dưới vi phân của nó trùng với đạo hàm. Cụ thể là

$$\partial f(x)=\begin{cases} 2x & khi\ \ x \notin (-1{,}2) \\ 1 & khi\ \ x \in (-1{,}2) \end{cases} \ .$$

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 8

1. Khảo sát tính không khả vi

1. Chứng minh rằng hàm số sau đây không khả vi theo hướng tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

2. Tìm cực trị của các hàm trong các thí dụ trên.
3. Xét tính đơn điệu của các hàm nêu trong các thí dụ trên.

Tính đạo hàm theo hướng và tính dưới vi phân suy rộng:

1) $y = |x| + |x^2 - 1|$; 2) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$; 3) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$;

4) $y = \max\{\sin x, \cos x\}$; 5) $y = x^2\ \mathrm{signum}(x)$; 6) $y = |ax^2 + bx + c|$;

7) $y = \max\{x^2 + x + 1, -x^2 + 3x + 5\}$; 8) $y = \ln|x|$.

2. Bài tập kiểm tra kiến thức

Bài 1 Thế nào là hàm không khả vi tại điểm $x=a$?

(a) Là hàm không liên tục tại điểm $x=a$.

(b) Là hàm gẫy khúc tại điểm a .

(c) Là hàm không có giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Bài 2 Trong các hàm sau thì hàm nào là không khả vi tại 0 :

(a) $f(x) = |x|$; (b) $f(x) = |x(x-1)|$; (c) $f(x) = \begin{cases} x^2.\sin\dfrac{1}{x} & khi\ \ x \neq 0 \\ 0 & khi\ \ x = 0 \end{cases}$.

Bài 3 Hàm khả vi theo hướng u tại điểm x , nếu như

(a) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(x + u) - f(x)}{u}$,

(b) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x + tu) - f(x)}{tu}$,

(c) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(x+tu)-f(x)}{t}$.

Bài 4 Tìm những Mệnh đề đúng trong số sau đây:

(a) Hàm f là khả vi tại a thì nó có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm đó,

(b) Hàm f có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm a thì nó khả vi tại điểm đó,

(c) Hàm f khả vi khi và chỉ khi nó có dưới vi phân gồm một phần tử duy nhất,

(d) Hàm f khả vi tại điểm a khi và chỉ khi tồn tại đạo hàm theo 2 hướng $u = 1$ và $u = -1$, với $f'(a;1) = -f'(a;-1)$.

(e) Hàm f khả vi tại điểm a khi nó có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm đó và đạo hàm theo hướng là một hàm tuyến tính theo hướng.

Bài 5 Hàm lồi có những tính chất sau:

(a) Liên tục tại mọi điểm ,

(b) Khả vi tại mọi điểm ,

(c) Có đạo hàm theo hướng tại mọi điểm.

Bài 6 Đạo hàm theo hướng của hàm lồi có những tính chất sau:

(a) Lồi theo hướng ,

(b) Tuyến tính theo hướng ,

(c) Liên tục theo hướng ,

(d) Thuần nhất dương theo hướng.

Bài 7 Hàm số có dưới vi phân, nếu như:

(a) Nó khả vi theo mọi hướng ,

(b) Đạo hàm theo hướng của nó là liên tục ,

(c) Đạo hàm theo hướng là dưới tuyến tính ,

(d) Đạo hàm theo hướng là tuyến tính .

Bài 8 Dưới vi phân của hàm $f(x)=|x|$ tại điểm $x = 0$ là gì ?

(a) $\partial f(0)=\{0\}$, (b) $\partial f(0)=\{-1,1\}$, (c) $\partial f(0)=[-1,1]$.

3. Tính toán thực hành

Hiện nay, thuật toán tính dưới vi phân suy rộng cho các hàm không trơn nói chung còn là một vấn đề đang được quan tâm nghiên cứu. Trong khuôn khổ của giáo trình này ta chỉ xem xét những hàm không trơn đơn giản nhất, cho nên việc tính toán dưới vi phân suy rộng của chúng không phải là phức tạp lắm. Trong các ví dụ và bài tập nêu trên ta thấy các hàm được xét đều là trơn từng khúc. Vì vậy, trừ một số hữu hạn điểm, dưới vi phân suy rộng của các hàm này trùng với đạo hàm của chúng và vì vậy có thể tính dễ dàng bằng các lệnh tính đạo hàm thông thường đã học ở phần đạo hàm và vi phân (Chương 6). Tại những điểm không trơn, dưới vi phân suy rộng của hàm là một tập lồi compact (một đoạn) có 2 đầu mút là giới hạn của đạo hàm từ 2 phía, cho nên cũng có thể tính dễ dàng bằng các lệnh tính giới hạn đã được biết trong phần tính giới hạn của hàm số (Chương 5). Việc áp dụng các chương trình đã biết trong tính toán thực hành ở Chương 5 và Chương 6 để tính cho các bài tập ở chương này là một việc đơn giản và không cần phải hướng dẫn gì thêm.

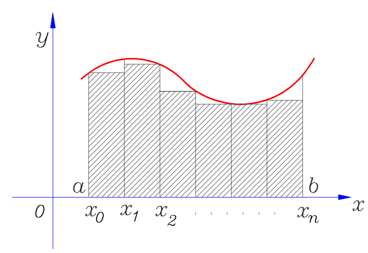
CHƯƠNG 9

Tích phân xác định

9.1. Khái niệm và các thí dụ

9.1.1. Định nghĩa

Phép tính tích phân (xác định) có cội nguồn từ thời xa xưa, khi người ta tìm diện tích của một hình có dạng phức tạp bằng cách phân chúng thành tổng những hình nhỏ có dạng đơn giản hơn. Ta dễ dàng hình dung rằng một miền phẳng có biên cong (tứ phía) luôn có thể chia thành một số "hình thang cong" (tức là hình thang vuông có một cạnh bên là cong). Cho nên, việc tính diện tích của một hình bất kỳ thường được quy về việc tìm diện tích của một hình thang cong. Về mặt toán học, một hình thang cong có thể được biểu diễn như phần mặt phẳng được giới hạn bởi đồ thị của một hàm số $y=f(x)$ và 3 đường thẳng có phương trình đơn giản là: $x=a$, $x=b$, $y=0$.



Hình 9.1

Muốn xác định diện tích một hình thang cong như vậy người ta phân nó thành những hình thang cong nhỏ hơn (với phần cạnh cong rất ngắn) và xấp xỉ mỗi hình thang cong bé nhỏ này bằng một *hình chữ nhật* (bằng cách đơn giản là thay cạnh cong bởi một đoạn thẳng). Tổng hợp tất cả diện tích các hình chữ nhật bé nhỏ ta có được diện tích xấp xỉ của hình thang cong ban đầu. Cách làm thông minh này đã được đưa ra từ thời Archimedes (thế kỷ thứ 3 trước Công nguyên). Tuy nhiên, khi ấy người ta chưa thể lý giải được cách làm đó hợp lý đến đâu (Diện tích xác định như vậy chính xác đến mức nào? Cách tính diện tích như vậy có phụ thuộc vào phương pháp phân nhỏ các hình hay không? Cách xấp xỉ cạnh cong bằng cạnh thẳng như thế nào là thoả đáng? Những hình như thế nào thì có thể tính được diện tích chính xác theo phương pháp đó và công thức tính như thế nào ?...). Phép tính tích phân ra đời đã làm sáng tỏ những câu hỏi đó. Trước hết ta đưa ra một khái niệm bổ trợ:

Phân hoạch của đoạn $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *là một dãy hữu hạn số* $x_o, x_1,..,x_N$ *thoả mãn*

$$a = x_o < x_1 <...< x_N = b .$$

Bề rộng của phân hoạch là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm kế tiếp nhau, tức là bằng $\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1,2,...N\}$.

Nếu f là hàm số xác định trên $[a,b]$ và P là một phân hoạch của $[a,b]$ thì, với mỗi bộ số $c_i \in [x_{i-1}, x_i], \forall i = 1,2,..., N$, *tổng Riemann* của f ứng với phân hoạch P được xác định như sau

$$S = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

Như vậy, tùy theo việc chọn các điểm c_i mà ta có các tổng Riemann khác nhau (ứng với một phân hoạch cho trước).

Định nghĩa *Hàm số f được gọi là khả tích Riemann trên $[a,b]$ nếu tồn tại số $A \in \mathbb{R}$ sao cho với mỗi số $\varepsilon > 0$ tìm được số $\delta > 0$ để mọi tổng Riemann của f ứng với phân hoạch bất kỳ có bề rộng nhỏ hơn δ đều nằm trong lân cận của điểm A với bán kính ε (nghĩa là $|S - A| < \varepsilon$, hay S nằm trong ε-lân cận của A).*

Khi ấy, số *A* được gọi là *tích phân* Riemann của hàm f trên đoạn $[a,b]$, và được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Nhận xét Tích phân Riemann của hàm f trên $[a,b]$ là duy nhất. Thật vậy, nếu có 2 số A_1, A_2 cùng là tích phân của f trên $[a,b]$ và $A_1 < A_2$ thì lấy số dương $\varepsilon < (A_2 - A_1)/4$ ta sẽ có $(A_1 - \varepsilon, A_1 + \varepsilon) \cap (A_2 - \varepsilon, A_2 + \varepsilon)$ là tập rỗng. Nhưng theo định nghĩa tích phân Riemann thì lại tìm được một tổng Riemann (với phân hoạch đủ mịn) nằm trong cả 2 lân cận trên và dẫn tới mâu thuẫn.

Ngoài khái niệm tích phân Riemann nêu trên, người ta còn đưa ra một số khái niệm tích phân khác. Đáng chú ý hơn cả là tích phân Lebesgue. Các khái niệm sau này chủ yếu phục vụ cho các lớp hàm "thô hơn". Nếu một hàm đã khả tích theo nghĩa Riemann thì nó khả tích theo mọi nghĩa khác và khi ấy các tích phân là trùng nhau. Mục đích của chúng ta là trình bày những khái niệm chung nhất cho nên ta chỉ đề cập đến tích phân Riemann và, trong giáo trình này, thuật ngữ tích phân được mặc định hiểu là tích phân Riemann.

Từ định nghĩa ta thấy tích phân xác định có thể được hình dung như là *giới hạn của tổng Riemann* khi phân hoạch được làm *vụn vô cùng* (tức là bề rộng của nó tiến dần về 0). Rõ ràng việc tính tích phân xác định theo định nghĩa như trên là không đơn giản chút nào, vì chẳng những phải tính các tổng Riemann rất cồng kềnh mà còn phải tìm "giới hạn" của chúng nữa. Tuy nhiên, giải quyết công việc phức tạp này lại là "sở trường" của máy tính. Các chương trình tính toán thông dụng hiện nay giúp ta tính tích phân xác định một cách nhẹ nhàng đến bất ngờ (như sẽ thấy trong phần tính toán thực hành). Ngoài ra, ở cuối chương này công thức Newton-Leibniz sẽ cung cấp cho chúng ta một phương pháp lợi hại để tính tích phân xác định không thông qua tổng Riemann đối với những hàm có cấu trúc đặc biệt.

9.1.2. Một số thí dụ đơn giản

Thí dụ 1) $f(x) = c,\ \forall x \in [a,b]$. Khi ấy mọi tổng Riemann đều trùng nhau và là

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

Cho nên $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

2) $f(x)=\begin{cases}0 & khi\ x\in[-1,1]\setminus\{0\}\\ \alpha & khi\ x=0.\end{cases}$

Rõ ràng với một phân hoạch bất kỳ có bề rộng δ thì tổng Riemann của f có giá trị tuyệt đối không vượt quá $2|\alpha|\delta$. Khi các phân hoạch này có bề rộng nhỏ dần về 0 thì các tổng Riemann tương ứng cũng vậy. Suy ra

$$\int_a^b f(x)dx = 0\ .$$

3) $f(x)=\begin{cases}1 & khi\ \ x\ \ là\ số\ hữu\ tỷ,\\ 0 & khi\ \ x\ \ là\ số\ vô\ tỷ.\end{cases}$

Rõ ràng tích phân Riemann của f trên đoạn [0,1] là không tồn tại, vì với một phân hoạch bất kỳ ta đều có thể tìm được 2 tổng Riemann khác nhau có giá trị là 0 và 1, tức là không thể nằm chung trong một lân cận đủ nhỏ của bất cứ điểm nào.

9.2. Các tính chất cơ bản

9.2.1. Các phép tính trên các hàm khả tích

Mệnh đề *(1) Nếu f, g là những hàm khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì hàm $(f+g)$ là khả tích trên đoạn $[a,b]$ và*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,.$$

(2) Nếu f là hàm khả tích trên đoạn $[a,b]$ và c là một số thực thì cf là hàm khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b cf(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx\,.$$

Chứng minh (1) Lấy $A=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$, và cho $\varepsilon>0$ bất kỳ, ta tìm được số $\delta>0$ để với mọi phân hoạch có bề rộng nhỏ hơn δ và mọi tổng Riemann của f và g (ký hiệu tương ứng là S_f và S_g) ta đều có $\left|S_f-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\left|S_g-\int_a^b g(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, cho nên khi ấy mọi tổng Riemann của $(f+g)$ sẽ thỏa mãn

$$\left|S_{f+g}-A\right|=\left|S_f+S_g-A\right|\le\left|S_f-\int_a^b f(x)dx\right|+\left|S_g-\int_a^b g(x)dx\right|<\varepsilon\ .$$

Nghĩa là, $(f+g)$ là khả tích và tích phân của nó là A.

(2) Chứng minh là dễ dàng, vì

$$\left| S_{cf} - c\int_a^b f(x)dx \right| \le |c| \left| S_f - \int_a^b f(x)dx \right| .$$

9.2.2. Tính đơn điệu của tích phân

Mệnh đề (i) *Nếu* f *là hàm khả tích và không âm thì* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

(ii) *Nếu* $f(x) \ge g(x)$, *với mọi* $x \in [a,b]$ *thì* $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

<u>Chứng minh</u> (i) Rõ ràng mọi tổng Riemann của f là không âm. Với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được tổng Riemann S_f thỏa mãn $A > S_f - \varepsilon \ge -\varepsilon$. Từ đây suy ra $A \ge 0$.

(ii) $f(x) \ge g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \ge 0$

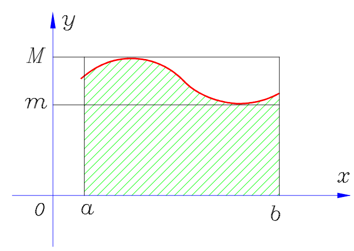
$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx .$$

9.2.3. Tính bị chặn của tích phân

Mệnh đề (Định lý trung bình)

Nếu f *là hàm khả tích trên đoạn* $[a,b]$ *và* $m \le f(x) \le M$ *với mọi* $x \in [a,b]$ *thì*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) .$$



Hình 9.2

<u>Chứng minh</u> Suy ra ngay từ phần (ii) của mệnh đề trên.

Mệnh đề này có ý nghĩa hình học đơn giản là: Diện tích hình thang cong nhỏ hơn diện tích hình chữ nhật chứa nó và lớn hơn hình chữ nhật mà nó chứa.

Nếu f *là hàm khả tích trên* $[a,b]$ *thì ta đặt*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

và

$$\int_c^c f(x)dx = 0, \forall c \in [a,b] .$$

Hệ quả *Cho* a, b, c *là các số bất kỳ,* f *là hàm số xác định trên một khoảng chứa cả 3 điểm đó. Nếu 2 trong 3 đại lượng*

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^c f(x)dx , \quad \int_b^c f(x)dx$$

tồn tại thì đại lượng thứ 3 cũng tồn tại, và đẳng thức sau thỏa mãn

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx .$$

Chứng minh Suy ra ngay từ định nghĩa.

9.3. Sự tồn tại của tích phân

9.3.1. Bổ đề cơ bản

Hàm f là khả tích trên đoạn $[a,b]$ khi và chỉ khi mọi tổng Riemann ứng với các phân hoạch có bề rộng đủ bé là sai khác nhau một lượng đủ bé, nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad d(P_1) < \delta, d(P_2) < \delta \Rightarrow \left| S_f(P_1) - S_f(P_2) \right| < \varepsilon$$

(trong đó $d(P_i)$ là ký hiệu bề rộng của phân hoạch P_i, còn $S_f(P_i)$ là tổng Riemann ứng với phân hoạch $P_i (i = 1,2)$).

Chứng minh Theo định nghĩa, nếu f là khả tích trên $[a,b]$ thì $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ sao cho với $d(P) < \delta$ thì $| S_f(P) - \int_a^b f(x)dx | < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi ấy với mọi P_1, P_2 mà $d(P_i) < \delta$, $(i = 1,2)$ ta có

$$\left| S_f(P_1) - S_f(P_2) \right| \le | S_f(P_1) - \int_a^b f(x)dx | + | S_f(P_2) - \int_a^b f(x)dx | < \varepsilon .$$

Như vậy một chiều của bổ đề đã được chứng minh.

Để chứng minh chiều ngược lại ta lấy dãy $\varepsilon_n = \frac{1}{2n}$ và dãy $\delta_n \downarrow 0$ sao cho $\left| S_f(P_1) - S_f(P_2) \right| < \frac{1}{2n}$ khi $d(P_i) < \delta_n, (i = 1,2)$.

Lấy dãy các phân hoạch P_n thỏa mãn $d(P_n) < \delta_n$. Ta có $d(P_m) < \delta_n, \forall m > n$, và các tổng Riemann $S^n = S_f(P_n)$ lập thành một dãy Cauchy, bởi vì

$$\left| S^n - S^m \right| < \frac{1}{2n}, \forall m > n .$$

Như vậy $\{S^n\}$ hội tụ tới một số A. Từ bất đẳng thức trên, sau khi qua giới hạn với m tiến ra vô cùng, ta có $\left| S^n - A \right| < \frac{1}{2n}, \forall n$. Lấy số $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta tìm được N để $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Lấy $\delta = \delta_N$. Lưu ý rằng với $d(P) < \delta$, thì

$$\left|S_f(P)-A\right| \le \left|S_f(P)-S^N\right| + \left|S^N - A\right| < \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

Theo định nghĩa ta suy ra hàm f là khả tích và bổ đề được chứng minh đầy đủ.

Nhận xét Bổ đề cho ta thấy rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại khi và chỉ khi các tổng Riemann thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy khi cho bề rộng của phân hoạch nhỏ dần về 0. Và khi đó, tồn tại giới hạn $\lim\limits_{d(P)\to 0} S_f(P) = \int_a^b f(x)dx$.

9.3.2. Tính khả tích của hàm liên tục

Định lý *Hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì khả tích trên đoạn đó.*

Chứng minh Ta biết rằng nếu f là liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó liên tục đều trên đoạn đó, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho

$$\left|x_1 - x_2\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon .$$

Như vậy cũng tồn tại số δ' sao cho

$$\left|x_1 - x_2\right| < \delta' \Rightarrow \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)} .$$

Lấy 2 phân hoạch bất kỳ P_1, P_2 với $d(P_i) < \delta' (i = 1,2)$ ta thấy ngay

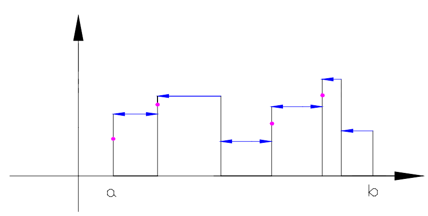
$$\left|S_f(P_1) - S_f(P_2)\right| < [\max_{\left|x_1 - x_2\right| < \delta'} \left|f(x_1) - f(x_2)\right|].(b-a) < \varepsilon$$

Và theo bổ đề cơ bản ta suy ra f là khả tích.

Nhận xét Định lý trên cho ta thấy rằng lớp hàm khả tích chứa toàn bộ lớp hàm liên tục. Tuy nhiên, có rất nhiều hàm khả tích mà không liên tục (đơn giản như là thí dụ 2 ở phần đầu của chương này). Cho nên, việc tìm ra các tiêu chuẩn khả tích tổng quát hơn (cho các hàm không nhất thiết liên tục) là rất cần thiết.

9.3.3. Hàm bậc thang

Hàm số f xác định trên đoạn $[a,b]$ được gọi là hàm bậc thang nếu như có một phân hoạch $x_o, x_1, ..., x_N$ của đoạn $[a,b]$ sao cho f nhận giá trị hằng trên mỗi khoảng (x_{i-1}, x_i) $(i = 4,..., N)$.



Hình 9.3

Bổ đề *Hàm bậc thang là khả tích. Ngoài ra, nếu c_i là giá trị của f trên mỗi khoảng (x_{i-1}, x_i) thì*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} c_i (x_i - x_{i-1}) .$$

Chứng minh Định nghĩa hàm số φ_i như sau

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} c_i \quad khi \quad x \in (c_{i-1}, x_i) \\ 0 \quad khi \quad x \in [a,b] \setminus [x_{i-1}, x_i] \\ f(x)\ khi \quad x = x_{i-1} \ \ hay \ \ x = x_i \end{cases}$$

Rõ ràng $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x)$. Từ định nghĩa ta dễ dàng thấy rằng mỗi hàm $\varphi_i(\cdot)$ là khả tích và $\int_a^b \varphi_i(x)dx = c_i(x_i - x_{i-1})$. Vì tổng của các hàm khả tích là khả tích, cho nên bổ đề trên được chứng minh xong.

Nhận xét Rõ ràng các hàm bậc thang là không liên tục và bổ đề trên cho ta một ví dụ điển hình về các hàm khả tích không nhất thiết liên tục. Nó cũng đồng thời cho thấy mối quan hệ khăng khít giữa tích phân của một hàm bậc thang không âm với diện tích của miền giới hạn bởi trục hoành và đồ thị của hàm đó. Để thấy hết tính "khuôn mẫu" của lớp hàm bậc thang trong tập hợp các hàm khả tích, chúng ta sẽ chỉ ra rằng lớp *hàm khả tích* chính là lớp những hàm có thể được xấp xỉ tốt bởi các *hàm bậc thang*.

9.3.4. Tiêu chuẩn khả tích

Định lý *Hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là khả tích khi và chỉ khi nó bị kẹp giữa hai hàm bậc thang có tích phân gần nhau bao nhiêu tuỳ ý. Nghĩa là, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại các hàm bậc thang f_1, f_2 trên $[a,b]$ sao cho*

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)\ , \forall x \in [a,b]\ ,$$

và

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx < \varepsilon\ .$$

Chứng minh $(\Rightarrow)$ Nếu f là khả tích thì với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với phân hoạch $P = \{x_o, x_1, ..., x_N\}$ ($d(P) < \delta$) và các tổng Riemann bất kỳ

$$S = \sum_{i=1}^{N} f(c_1)(x_i - x_{i-1}), \quad S' = \sum_{i=1}^{N} f(c_i')(x_i - x_{i-1}), \quad c_i, c_i' \in [x_{i-1} x_i]$$

ta luôn có

$$\left|S - S'\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} [f(c_i) - f(c_i')](x_i - x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Đặc biệt, với mỗi j, nếu chọn

$$c_i' = c_i\ , \forall i \ne j$$

thì suy ra, với mọi $c_j' \in [x_{j-1}, x_j]$, ta có

$$\left|f(c_j) - f(c_j')\right|(x_j - c_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Như vậy

$$\left|f(c_j')\right| < f(c_j) + \frac{\varepsilon}{2(x_j - x_{j-1})}, \quad \forall c_j' \in [x_{j-1}, x_j]\ .$$

Nghĩa là $f(\cdot)$ bị chặn trên mỗi đoạn $[x_{j-1}, x_j]$. Cho nên ta có thể đặt

$$m_i = \inf\{f(t),\ t \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$M_i = \sup\{f(t),\ t \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

và định nghĩa các hàm bậc thang f_1, f_2 như sau

$$f_1(x) = \begin{cases} m_i & khi \quad x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1,2,\dots,N \\ \min\{m_1,\dots,m_N\} & khi \quad x = x_i,\ i = 0,1,\dots,N \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} M_i & khi \quad x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1,2,\dots,N \\ \max\{M_1,\dots,M_N\} & khi \quad x = x_i,\ i = 0,1,\dots,N \end{cases}$$

Rõ ràng

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x),\ \forall x \in [a,b].$$

Ta sẽ chỉ ra rằng

$$\int_a^b [f_2(x) - f_2(x)]dx < \varepsilon .$$

Thật vậy, chọn các điểm $\zeta_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\dots,N$ sao cho

$$f(\zeta_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \ ,$$

$$f(\eta_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \ .$$

Suy ra $M_i - m_i \le f(\eta_i) - f(\zeta_i) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Ta có

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^N [f(\eta_i) - f(\zeta_i)](x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)$$
$$\le \left|\sum_{i=1}^N [f(\eta_i) - f(\zeta_i)](x_i - x_{i-1})\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Vì $\sum_{i=1}^N f(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$ và $\sum_{i=1}^N f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ là các tổng Riemann trên phân hoạch *P* cho nên hiệu của chúng không vượt quá $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Như vậy

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

$(\Leftarrow)$ Giả sử f có tính chất nêu trong mệnh đề, tức là với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại các hàm bậc thang f_1, f_2 sao cho

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

và

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ta chọn số $\delta > 0$ đủ bé sao cho

$$|S_{f_1}(P_1) - \int_a^b f_1(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall P_1, d(P_1) < \delta$$

và

$$|S_{f_2}(P_2) - \int_a^b f_2(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall P_2, d(P_2) < \delta .$$

Dễ dàng thấy rằng nếu $S_f(P_i)$ là tổng Riemann của f trên phân hoạch P_i thì ta có:

$$\left|S_f(P_2) - S_f(P_1)\right| \le S_{f_2}(P_2) - S_{f_1}(P_1) \le |S_{f_2}(P_2) - \int_a^b f_2(x)dx| +$$

$$+|S_{f_1}(P_1) - \int_a^b f_1(x)dx| + |\int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Từ bổ đề cơ bản ta suy ra hàm f là khả tích, và định lý được chứng minh xong.

Nhận xét Chú ý rằng phần *dưới đồ thị* của hàm bậc thang nằm trên trục hoành chính là hợp của các hình chữ nhật, cho nên mệnh đề trên cho ta một *hình ảnh hình học* rất tường minh về hàm khả tích, cụ thể là: một hàm là khả tích khi và chỉ khi phần *dưới đồ thị* của hàm này có thể được *xấp xỉ bởi các hình chữ nhật* với độ chính xác tùy ý.

9.3.5. Các hệ quả quan trọng

Hệ quả (i) *Hàm khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì cũng bị chặn trên đoạn $[a,b]$.*

(ii) *Cho f xác định trên $[a,b]$, $c \in (a,b)$. Hàm f là khả tích trên $[a,b]$ khi và chỉ khi nó khả tích trên mỗi đoạn con $[a,c], [c,b]$, và trong trường hợp đó:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

Chứng minh Suy ra từ định lý trên.

Nếu f là hàm khả tích trên $[a,b]$ thì ta đặt

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{và} \quad \int_c^c f(x)dx = 0, \forall c \in [a,b].$$

9.4. Định lý cơ bản của phép tính tích phân

Cho hàm số f liên tục trên một khoảng U. Lấy $a \in U$ và định nghĩa hàm số

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ .$$

Hàm này xác định với mọi $x\in U$ (vì f là liên tục).

9.4.1. Định lý cơ bản

Định lý *Hàm số $F(x)$ là <u>khả vi</u> trên U và*

$$F'(x)=f(x)\ .$$

<u>Chứng minh</u> Ta cần chỉ ra rằng $\forall x_o\in U$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}=f(x_o)\,.$$

Để ý rằng:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}-f(x_o)\right|=\left|\frac{\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_o} f(t)dt}{x-x_o}-f(x_o)\right|=$$

$$=\frac{1}{|x-x_o|}\left|\int_{x_o}^x f(t)dt-\int_{x_o}^x f(x_o)dt\right|=\frac{1}{|x-x_o|}\left|\int_{x_o}^x [f(t)-f(x_o)]dt\right|$$

và

$$\left|\int_{x_o}^x [f(t)-f(x_o)]dt\right|\le\left|\int_{x_o}^x \max_{\zeta\in[x_o,x]}\left|f(\zeta)-f(x_o)\right|dt\right|=|x-x_o|\max_{\zeta\in[x_o,x]}\left|f(\zeta)-f(x_o)\right|$$

Cho nên

$$\lim_{x\to x_o}\left|\frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}-f(x_o)\right|=\lim_{x\to x_o}\max_{\zeta\in[x-x_o]}\left|f(\zeta)-f(x_o)\right|=\lim_{x\to x_o}\sup\left|f(x)-f(x_o)\right|=0$$

do f là hàm liên tục.

Định lý đã được chứng minh xong.

Hệ quả *Nếu f là hàm liên tục trên một khoảng thì tồn tại hàm F xác định trên khoảng đó và có đạo hàm là f.*

<u>Chứng minh</u> Suy ra ngay từ định lý trên.

9.4.2. Công thức Newton-Leibniz

Định lý (Newton-Leibniz) *Nếu F là hàm số xác định trên khoảng $U\subset R$ và có đạo hàm là f thì*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

<u>Chứng minh</u> Ta có

$$\frac{d}{dx}(F(x)-\int_a^x f(t)dt) = f(x) - f(x) = 0.$$

nên $F(x)-\int_a^x f(t)dt = c$. Thay $x=a$ ta có $c=F(a)$ cho nên $F(x)=\int_a^x f(t)dt + F(a)$. Từ đây, ta có ngay điều cần chứng minh.

9.4.3. Công thức đổi biến

Mệnh đề *Cho U, V là các khoảng bất kỳ trong $\mathbb{R}$, $\varphi : U \to V$ là hàm khả vi liên tục, $f : V \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Khi đó, $\forall a, b \in U$,*

$$\int_a^b f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(v)dv.$$

<u>Chứng minh</u> Đặt $F(y)=\int_{\varphi(a)}^{y} f(v)dv, \forall y \in V$. Rõ ràng F là hàm khả vi và $F' = f$.

Hàm $G(x)=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(v)dv$ là hợp của 2 hàm khả vi liên tục F và φ, cho nên cũng là khả vi liên tục. Theo quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp ta có:

$$G'(x) = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x), \forall x \in U.$$

Như vậy

$$G(x) = \int_a^x f[\varphi(u)]\varphi'(u)du + c,$$

với c là một hằng số nào đó. Cho $x=a$ ta có $c=G(a)=0$, và cho $x=b$ ta có điều cần chứng minh.

9.5. Ý nghĩa hình học và ứng dụng của tích phân xác định

9.5.1. Khái niệm về diện tích của miền mặt phẳng

Ta đã từng biết về định nghĩa và cách tính diện tích của hình vuông và hình chữ nhật. Trên cơ sở đó ta tính được diện tích của một hình tam giác bất kỳ bằng cách tách nó thành 2 tam giác vuông (nửa của hình chữ nhật). Diện tích của đa giác bất kỳ lại được tính như tổng của các tam giác hợp thành. Xa hơn nữa, ta đã biết định nghĩa và tính diện tích của một hình tròn như giới hạn của diện tích các đa giác đều nội tiếp (hoặc ngoại tiếp) hình tròn đó khi số cạnh tiến ra vô cùng. Tuy nhiên, các phương pháp này không cho phép ta xác định diện tích của một miền giới hạn bởi một đường cong liên tục bất kỳ (thí dụ như mặt nước hồ Hoàn Kiếm). Bây giờ ta có thể sử dụng tích phân xác định để làm điều đó.

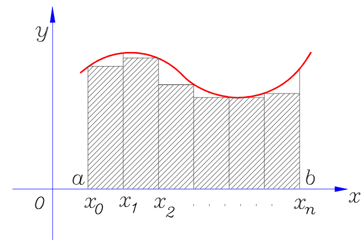
9.5.2. Ý nghĩa hình học của tích phân

Trước hết, ta xác định diện tích của một hình thang cong D giới hạn bởi đồ thị của một hàm liên tục $f(x) \geq 0$, và các đường thẳng $x = a, x = b, y = 0$.

Lấy một phân hoạch bất kỳ P: $a = x_o \leq x_1, \ldots, \leq x_N = b$ và các điểm $\zeta_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho

$$f(\zeta_i) = \min\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$f(\eta_i) = \max\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$



Hình 9.4

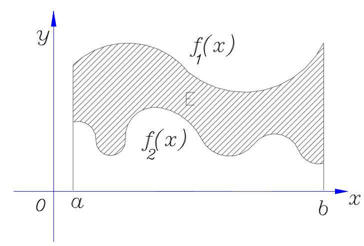
Từ mệnh đề về tính bị chặn của tích phân (*định lý trung bình*, xem hình vẽ minh họa 9.2), ta thấy rằng $S_{\min}(P) = \sum_{i=1}^{N} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ là tổng diện tích của các hình chữ nhật nằm gọn trong miền D và $S_{\max}(P) = \sum_{i=1}^{N} f(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$ là tổng diện tích các hình chữ nhật phủ kín miền D. Nghĩa là, nếu như miền D được gán một giá trị diện tích là $S(D)$ nào đó thì

$$S_{\min}(P) \leq S(D) \leq S_{\max}(P). \qquad (*)$$

Khi phân hoạch càng mịn thì $S_{\min}(P)$ càng lớn dần lên và $S_{\max}(P)$ càng nhỏ dần đi. Vì hàm số liên tục nên nó là *khả tích*, suy ra $S_{\min}(P)$ và $S_{\max}(P)$ sẽ cùng nhau tiến dần đến giá trị tích phân của hàm này (vì chúng cùng là những tổng Riemann). Từ biểu thức (*) ta suy ra giá trị tích phân của hàm phải trùng với $S(D)$. Như vậy, sẽ là hợp lý nếu ta định nghĩa *diện tích* của miền D là

$$S(D) = \int_a^b f(x)dx.$$

Đây là công thức tích diện tích của miền D có dạng hìmh thang cong như trong *Hình vẽ 9.4*. Từ đây dễ dàng tính được diện tích một miền E giới hạn bởi 2 đường cong như trong *Hình 9.5*



Hình 9.5

bằng cách lấy hiệu của 2 tích phân các hàm f_2 và f_1, tức là ta có

$$S(E) = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Với cách chia một hình thành những phần có dạng đơn giản hơn (như D hoặc E) ta có thể tính được diện tích của hầu hết các hình gặp trong thực tế.

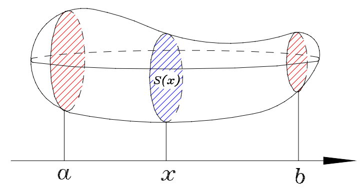
9.5.3. Tính thể tích các vật thể 3 chiều

Ta đã biết tính thể tích các hình lập phương và hình hộp chữ nhật. Sau đó, ta cũng đã tính được thể tích của một lăng trụ thông qua diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ.

Trong phần này ta sẽ xác định diện tích của những vật thể đa dạng hơn trong không gian (3 chiều).

1. Công thức tính thể tích

Giả sử vật thể (H) nằm trong không gian. Chọn trục toạ độ $0x$. Mặt mặt phẳng (P) vuông góc với $0x$ tại điểm x cắt vật thể (H) theo một thiết diện có diện tích bằng $S(x)$. Giả thiết rằng $S(x)$ là một hàm *liên tục*.



Hình 9.6

Để tính thể tích của phần vật thể (H) được giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với $0x$ tại các điểm a và b, ta lấy một phân hoạch của đoạn $[a,b]$ gồm các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ (i=0,...,n) chọn một điểm tuỳ ý với hoành độ c_i. Qua mỗi điểm c_i dựng một mặt phẳng vuông góc với $0x$ và cắt (H) theo thiết diện có diện tích là $S(c_i)$. Dựng hình trụ có chiều cao bằng $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$ và mặt đáy là thiết diện này. Ta biết rằng thể tích của hình trụ đó bằng $S(c_i)\Delta_i$. Tổng thể tích của tất cả các khối hình trụ nhỏ chính là một xấp xỉ của thể tích vật thể (H), và bằng

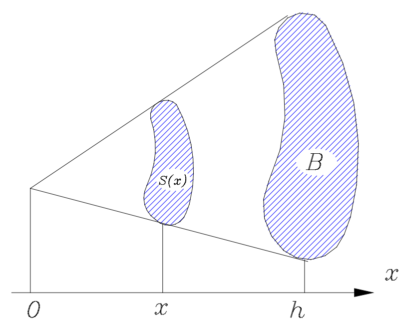
$$S(c_1)\Delta_1 + ... + S(c_n)\Delta_n.$$

Đây chính là tổng Riemann của hàm $S(x)$ ứng với phân hoạch đã biết của đoạn $[a,b]$. Với các suy luận tương tự như đối với khái niệm diện tích ở phần trên, ta đi tới định nghĩa thể tích V của hình (H) là

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2. Thể tích các hình đặc biệt

a) Thể tích hình chóp



Hình 9.6

Với một hình chóp (không nhất thiết tròn xoay) có diện tích đáy là B và chiều cao h thì *diện tích thiết diện* (vuông góc với chiều cao và cách đỉnh một khoảng bằng x) sẽ tỷ lệ với bình phương của x/h, nghĩa là $S(x) = B(x/h)^2$. Từ công thức tính thể tích ở phần trên ta có

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h B\frac{x^2}{h^2}dx = Bh^{-2}\int_0^h x^2dx = Bh^{-2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=h} = \frac{1}{3}Bh$$

b) Thể tích hình chóp cụt

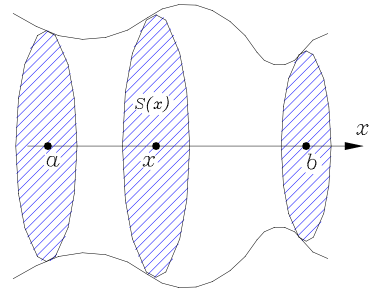
Với hình chóp cụt có đáy lớn B, đáy nhỏ B' và chiều cao h, thì bằng lập luận tương tự như trên ta tính được diện tích thiết diện đi qua điểm mỗi điểm x thông qua B,B',h rồi áp dụng công thức tích phân ta thu được công thức

$$V = \frac{1}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})h$$

c) Thể tích khối tròn xoay

Khối tròn xoay được tạo bởi một phần mặt phẳng quay xung quanh một trục nào đó. Khi phần mặt phẳng được giới hạn bởi đồ thị đường cong $y=f(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$, $y=0$, còn trục quay được chọn là $0x$, thì thiết diện của nó tại mỗi điểm x là một hình tròn có diện tích là $S(x)=\pi f^2(x)$. Cho nên, thể tích của khối tròn xoay này được tính bằng công thức

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



Hình 9.7

d) Thể tích hình cầu

Hình cầu là một dạng đặc biệt của khối tròn xoay, khi $f(x)$ có đồ thị là một nửa vòng tròn (tức là $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$), cho nên ta dễ dàng tính được thể tích của nó là

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Bài tập và Thực hành tính toán Chương 9

1. Thực hành tính tích phân xác định

Để thực hành tính tích phân xác định, hãy vào dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> int(f(x),x = a..b);
```

Trong đó $f(x)$ là biểu thức dưới dấu tích phân a, b là cận dưới và cận trên. Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" thì việc tính tích phân xác định sẽ được thực hiện và sẽ có ngay đáp số.

Thí dụ

```
[> int(1/(x^2-5*x+6),x=0..1);
```

$$2\ln(2) - \ln(3)$$

Muốn có công thức biểu diễn tích phân, ta đánh các dòng lệnh có cú pháp tương tự như trên , nhưng thay `int` bởi `Int`, tức là:

```
[> Int(1/(x^2-5*x+6),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx$$

Và để có giá trị số của biểu thức trên ta dùng lệnh

```
[> value(");
```

$$2\ln(2) - \ln(3)$$

trong đó (") ngụ ý chỉ biểu thức ngay trước đó.

Lưu ý rằng khi kết quả là một biểu thức cồng kềnh thì ta có thể tối giản bằng lệnh `simplify` (đơn giản hóa) như đã biết.

Trong nhiều trường hợp, kết quả tính toán là những số *vô tỷ*, chưa có công thức biểu thị qua các ký hiệu thông thường (tức là qua các hàm số và các số mà ta đã biết) thì máy để nguyên công thức (như sau một lệnh "trơ"). Như vậy không có nghĩa là máy không làm việc (tính toán), mà ngược lại máy vẫn làm việc bình thường, chỉ có điều nó không biểu thị được kết quả thông qua các loại ký hiệu mà ta đã biết. Trong tình huống như vậy, ta vẫn có thể nhận biết được kết quả tính toán của máy bằng cách bảo nó cho ta một ước lượng xấp xỉ (với độ chính xác tuỳ ý), bằng câu lệnh "đánh giá xấp xỉ biểu thức trên dưới dạng thập phân với độ chính xác tới n chữ số thập phân ", có cú pháp như sau:

```
[> evalf(",n);
```

Thí dụ `[>int(sin(x)/(x+sqrt(x)),x = 0 .. 1);`

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}}dx$$

`[> value(");`

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}}dx$$

`[> evalf(",10);`

$$.3615792078$$

Như vậy, mặc dù nó có cả một "kho" các hàm và ký hiệu tượng trưng rất đồ sộ (mà ta chưa từng thấy bao giờ), Maple cũng không thể vét hết các trường hợp gặp phải. Cho nên, khi thấy Maple tung ra một biểu thức với các ký hiệu "lạ hoắc" thì ta cũng không có gì phải ngạc nhiên. Chỉ việc dùng lệnh **`evalf(")`** (như ở trên) là ta có thể biết "nó là gì?".

Lưu ý rằng Maple tính tích phân xác định bằng thuật toán cơ bản, mà không phải bằng "mẹo", cho nên trong một số trường hợp nó không tính nhanh bằng ta, thí dụ

`[> Int(sin(x)/(1+x^2),x=-Pi..Pi);`

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\,dx$$

`[> value(");`

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Ci}(\pi - I)\sinh(1) + \frac{1}{2}\mathrm{Ci}(\pi + I)\sinh(1) - \frac{1}{2}\mathrm{Ci}(-\pi - I)\sinh(1) - \frac{1}{2}\mathrm{Ci}(-\pi + I)\sinh(1)$$

Như vậy máy cho ta một kết quả khá cồng kềnh, trong khi chẳng cần tính ta cũng biết rằng tích phân trên bằng 0 (vì hàm dưới dấu tích phân là lẻ và miền lấy tích phân là đối xứng qua gốc toạ độ). Tuy nhiên, ở đây không thể xem phương pháp cơ bản là "yếu thế" hơn so với mẹo vặt, bởi vì công thức "cồng kềnh" trên cho phép ta tính được tích phân trên bất cứ đoạn nào, còn "mẹo vặt" thì không thể (bạn nào không tin xin tính thử tích phân kia trên đoạn từ 0 đến 1 xem sao).

Muốn kiểm tra xem Maple có biết rằng biểu thức cồng kềnh trên là bằng 0 hay không ta dùng lệnh

`[> evalf(",100);`

$$0$$

Như vậy là nó cũng biết. Tuy nhiên, khi tính toán trong phạm vi độ chính xác thấp thì, do sai số tính toán, máy có thể không nhận ra điều này. Thí dụ, nếu ta tính toán với độ chính xác chỉ tới 50 chữ số thì máy sẽ cho kết quả là

`[> evalf(",50);`

$$3.10^{-49}\,I$$

Tuy nhiên, nhiều khi Maple cũng tỏ ra "tỉnh táo" không thua gì chúng ta, thí dụ

```
[> int(sin(x)/(1+x^2),x=-1..1);
```

$$0$$

```
[> int(sin(x)/(1+x^2),x=-2..2);
```

$$0$$

và nó dễ dàng tính được tích phân trên mọi đoạn bất kỳ, thí dụ

```
[> Int(sin(x)/(1+x^2),x=1..2);
```

$$\int_1^2 \frac{\sin(x)}{1+x^2}\,dx$$

```
[> evalf(");
```

$$.3055892508$$

2. Tính tích phân xác định của các lớp hàm cụ thể

2.1. Tính tích phân các hàm phân thức

1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx$;

4) $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3}dx$; 5) $\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}dx$; 6) $\int_0^1 \frac{1}{x^4+4x^2+3}dx$;

2.2. Tính tích phân các hàm mũ, logarit

1) $\int_0^1 xe^x dx$; 2) $\int_0^1 (x^2+2x)e^x dx$; 3) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$;

4) $\int_1^e x\ln^2 x dx$; 5) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$; 6) $\int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$;

8) $\int_0^1 (2x-1)e^{x-x^2}dx$. Với mọi $n > 0$, hãy chứng minh $\int_0^1 (2x-1)^{2n+1}e^{x-x^2}dx = 0$.

9) Cho $I_n = \int \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx \quad (n = 1,2,3...)$.

a) Tính I_1 .

b) Chứng minh rằng $I_n = \frac{e^{1-n}-1}{1-n} - I_{n-1}$.

2.3. Tính tích phân các hàm lượng giác

Bài 1 a) $\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx$; b) $\int_0^{\pi}\cos^2(3x)dx$; c) $\int_0^{\pi}\cos^4(x)dx$.

Bài 2 Tính $\int_0^{t}[4\cos^4(x)-\frac{3}{2}]dx$ và giải phương trình $f(t) = 0$.

Bài 3 Tính $\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

Bài 4 Tính

$a)\int_0^{\pi}x\sin(x)dx$; $b)\int_0^{\pi}x^3\sin(x)dx$; $c)\int_0^{\pi}x\sin^2(x)dx$;

$d)\int_0^{\pi}x\sin^3(x)dx$; $e)\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin(x)}dx$; $f)\int_0^{\pi}\frac{x\cos(x)}{[1+\sin(x)]^2}dx$;

$g)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4(x)}dx$; $h)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^4(x)}dx$; $i)\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)+3}dx$;

$k)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$; $l)\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{9+4\cos^2(x)}dx$.

Bài 5

$a)\int_0^{\pi}\tan^2(x)dx$; $b)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^6(x)dx$; $c)\int_0^{\pi}\sin^{11}(x)dx$;

$d)\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin(x)}dx$; $e)\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin(x)}dx$; $f)\int_0^{\pi}e^{2x}\sin^2(x)dx$;

$g)\int_0^{e^x}\cos(\ln(x))dx$; $h)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2(x)}{3^x+1}dx$; $i)\int_0^{1}x\arctan^2(x)dx$;

2.4. Tính tích phân các hàm vô tỷ

1) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$; 2) $\int_0^{\frac{7}{3}}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; 3) $\int_2^{7}\frac{dx}{\sqrt{2+x}+1}$.

3. Các phương pháp tính tích phân xác định

3.1. Phương pháp đổi biến

Bài 1 Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến

1) $\int_0^2 x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 2) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ 3) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ 5) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

Bài 2 Tìm a và b sao cho $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{a\cos(x)}{1-\sin(x)} + \frac{b\cos(x)}{1+\sin(x)}$. Từ đó hãy tính $I = \int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}dx$.

3.2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

1) $\int_{-1}^0 xe^x\,dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$ 3) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos(\ln(x))dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)dx$ 5) $\int_{-1}^1 x\arctan(x)dx$

6) Bằng cách viết: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}.\frac{1}{\cos^2(x)}dx$ và sử dụng công thức tích phân từng phần, hãy tính J.

4. Tính diện tích hình thang cong

Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường cong có các phương trình dưới đây:

Bài 1 $y = x^2 - 2x$ và $y = x$

Bài 2 $y = 3x - x^2,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 3$.

Bài 3 $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ và $y = 3 - x$.

Bài 4 $y^2 - 2y + x = 0,\quad y + x = 0$.

Bài 5 $y = \left|\ln(x)\right|,\quad y = 0,\quad x = \frac{1}{10},\quad x = 10$.

Bài 6 $a)\ y = \sqrt{2x},\quad y = \frac{x^2}{2}$. $b)\ ax = y^2,\quad ay = \frac{x^2}{2}$.

Bài 7 $y = \sin^2(x) + \sin(x) + 1,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = \frac{\pi}{2}$.

Bài 8 $y = \arctan(x),\quad y = \operatorname{arccot}(x),\quad x = 0$.

Bài 9 Tìm diện tích phần Ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ nằm ở phía dưới parabolla $y=\frac{9x^2}{32}$.

Bài 10 Cho đường cong (P) có phương trình $y^2=2x$.

a) Xác định đường chuẩn, tiêu điểm của (*P*) và vẽ (*P*).

b) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa (*P*) và đường cong $x-2y+6=0$ (*D*).

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (*P*), trục 0*x* và tiếp tuyến của (*P*) tại *A*(2,2).

Bài 11 Tính diện tích S_k của hình giới hạn bởi các đường

$$y=\ln(\frac{k}{x}),\quad y=0,\quad x=1,\quad x=e\ ,$$

trong đó *k* là số dương .

Hãy tìm các số nguyên dương *k* sao cho $S_k<e-2$.

Bài 12 Cho $f(x)=\frac{x^2}{8x^3+1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm $y = f(x)$ với $x\geq 0$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và đường y=0.

c) Đặt $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k)^3+n^3}$. Từ kết quả của câu b) suy ra $\lim_{n\to\infty}u_n$.

Bài 13 Chứng minh rằng hàm số

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}x\ln(x), & khi\ x>0\\ 0, & khi\ x=0\end{cases}$.

Tính diện tích hình chắn bởi ½ã thị hàm số $y = f(x)$ và đoạn [0,1] của trục 0*x*, biết đơn vị độ dài trên trục 0*x* bằng 2 cm, còn đơn vị độ dài trên trục 0*y* bằng 3 cm.

Bài 14 Cho hàm số $y=e^x-\ln(x)$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (*C*) tại *x* = 1.

c) Tính diện tích hình giới hạn bởi (*C*) , trục hoành và hai đường *x*=1, *x*= *e*.

5. Tính thể tích khối tròn xoay

Gọi (*S*) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi (*S*) khi quay quanh trục 0*x* trong các trường hợp sau đây:

1) $y=xe^x\ (0\leq x\leq 1),\quad x=1,\quad y=0.$

2) $y=\ln x,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2.$

3) $y=\sqrt{\cos^4(x)+\sin^4(x)},\quad y=0,\quad x=\frac{\pi}{2},\quad x=\pi$.

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^4(x) + \sin^4(x)}}$, $\quad y = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{4}, \quad x = \dfrac{\pi}{3}$.

5) $y = \sqrt{\cos^2(x) + x\sin^4(x)}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$.

6) $y = \sqrt{1 + \cos^4(x) + \sin^4(x)}, \quad y = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \quad x = \pi$.

7) Tính thể tích hình xuyến tạo nên khi quay hình tròn dưới đây quanh trục $0x$

a) $x^2 + (y-2)^2 \le 1$.

b) $x^2 + (y-b)^2 \le a^2 \quad (0 \le a, a \le b)$.

8) Gọi (*D*) là miền được xác định bởi các đường

$$y = 0, \quad y = 2x - x^2.$$

a) Tính diện tích miền (*D*).

b) Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (*D*) quanh

+) trục $0x$;

+) trục $0y$.

6. Sử dụng tích phân để tính tổng

Bài 1 Với mỗi $n \in N$, đặt $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \cos\dfrac{i\pi}{n}$. Tìm $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Bài 2 Tính $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n}$, trong đó $S_n = \sum_{i=1}^{n} 1/(1 + \sin\dfrac{i\pi}{2n})$

Bài 3 Tính $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$. Từ kết quả đó, chứng tỏ rằng

$$\sum \frac{(-1)^k C_n}{2k+1} = \left(\prod_{i=1}^{n} 2i\right) / \left(\prod_{i=0}^{n} (2i+1)\right),$$

trong đó $C_n = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Bài 4 Chứng minh công thức J. Wallis tính số $\dfrac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\prod_{i=1}^{n} (2i)^2\right) \dfrac{1}{2n+1}}{\prod_{i=1}^{n} (2i-1)^2}$.

7. Đẳng thức và bất đẳng thức tích phân

Bài 1 Chứng minh rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm liên tục xác định trên $[a,b]$ thì ta có

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx . \int_a^b g^2(x)dx .$$

Bài 2 Cho f là một hàm liên tục trên [0,1]. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\pi} f[\sin(x)]dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f[\sin(x)]dx .$$

Bài 3 Cho $a > 0$ và $f(x)$ là một hàm chẵn, liên tục trên trúc số thực. Chứng minh rằng với mọi x ta có

$$\int_{-x}^{x} \frac{f(t)}{a^t + 1}dt = \int_0^{x} f(t)dt .$$

Bài 4 Cho f là một hàm liên tục trên đoạn [0,1]. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\pi} xf[\sin(x)]dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f[\sin(x)]dx .$$

Bài 5 Cho $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[a,b]$ và $f(a + b - x) = f(x)$. Chứng minh rằng:

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{(a+b)}{2}\int_a^b f(x)dx .$$

Bài 6 Ta nói rằng hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là trực giao với nhau trên đoạn $[-\pi,\pi]$ nếu $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0$. Hãy chứng tỏ rằng hàm $U_m(x) = \cos(mx)$ trực giao với các hàm $U_k(x) = \cos(kx)$ $(k \neq m)$, $V_n(x) = \sin(nx)$, trong đó k, n, m là những số tự nhiên.

8. Thực hành tính diện tích và thể tích

8.1. Tính diện tích

Việc tính diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số và ba đường thẳng $y = 0$ (trục hoành), $x = a$, $x = b$ cũng chính là tính tích phân xác định của hàm đó từ a đến b.

Thí dụ Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = 3x - x^2$, trục $0x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

Bước 1:

```
[> Int((3*x-x^2),x=0..3);
```

Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" thì trên màn hình sẽ hiện công thức tính tích phân (diện tích) cần tính.

$$\int_0^3 3x - x^2\, dx$$

Bước 2: Tính diện tích cũng chính là lấy giá trị số của biểu thức trên, nghĩa là bằng dòng lệnh (ở đó *area* trong tiếng Anh có nghĩa là *diện tích*):

```
[> area:=value(");
```

Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" thì máy sẽ cho ta đáp số.

8.2. Tính thể tích khối tròn xoay

Ta đã biết công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi một hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục 0*x*, *x* = *a*, *y* = *b* được tính theo công thức

$$y = \int_a^b \pi f^2(x)dx \,.$$

Do đó việc tính thể tích khối tròn xoay được đưa về bài toán tính tích phân xác định và ta cần thực hiện các thao tác sau:

Bước 1: Thiết lập công thức tính bằng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> Int(Pi*(f(x))^2,x=a..b);
```

Trong đó *f*(*x*) là hàm biểu diễn đường cong, còn *a, b* là cận dưới và cận trên. Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" thì trên màn hình sẽ hiện công thức tích phân để tính thể tích khối tròn xoay.

Bước 2: Lấy giá trị số của biểu thức này (tức là số đo thể tích) bằng lệnh (trong đó *volume* theo tiếng Anh có nghĩa là *thể tích*):

```
[> volume:=value(");
```

Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" trên màn hình sẽ hiện giá trị thể tích khối tròn xoay.

Hãy xem xét một số thí dụ:

Thí dụ 1) Tính thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình thang cong giới hạn bởi parabolla $y^2 = 2x, x = 3$ quanh trục O*x*.

```
[> Int(Pi*2*x,x=0..3);
```

$$\int_0^3 2\pi x dx$$

```
[> volume:=value(");
```

volume := 9π

2) Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi 0*x*, đường cong $y = \sqrt{1+\cos^4(x)+\sin^4(x)}$, và các đường $x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi$.

```
[> Int(Pi*(1+(cos(x))^4+(sin(x))^4),x=Pi/2..Pi);
[> volume:=value(");
```

(Bạn đọc hãy tự cho máy chạy và xem kết quả).

CHƯƠNG 10

Nguyên hàm Tích phân bất định Tích phân suy rộng

10.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

Công thức Newton-Leibniz đã mở ra một phương pháp tính tích phân xác định vô cùng độc đáo, không cần có sự trợ giúp của máy tính. Thay vì tính các *tổng Riemann* của hàm f và *tìm giới hạn* của chúng, người ta chỉ cần tìm một hàm mà có đạo hàm bằng f. Một hàm số như vậy không chỉ giúp cho việc tính tích phân xác định trở nên dễ dàng, mà còn rất hữu ích trong việc nghiên cứu định tính. Toàn bộ phần này được dành cho việc thiết lập các công cụ tìm hàm số thú vị đó.

10.1.1. Khái niệm về nguyên hàm

Nguyên hàm của hàm số f xác định trên khoảng $U \subset \mathbb{R}$ là một hàm F khả vi trên khoảng $U \subset \mathbb{R}$ và có đạo hàm bằng f trên khoảng đó.

Nhận xét Sự tồn tại *nguyên hàm* của một *hàm liên tục* đã được bảo đảm bởi một hệ quả nêu trong chương trước. Đáng chú ý rằng nguyên hàm của một hàm số xác định không duy nhất. Bởi vì nếu F là nguyên hàm của f thì với mọi hằng số $C \in R$, ta có $(F+C)$ cũng là nguyên hàm của f. Tuy nhiên, hai nguyên hàm của cùng một hàm số cũng chỉ có thể sai khác nhau một hằng số mà thôi. Thực vậy, nếu F_1 và F_2 là các nguyên hàm của f trên khoảng $U \subset \mathbb{R}$, thì ta có:

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0,$$

và từ một hệ quả của định lý giá trị trung bình ta suy ra $(F_1 - F_2)$ là một hằng số.

10.1.2. Tích phân bất định

Việc tìm nguyên hàm của một hàm số được gọi là phép lấy tích phân bất định của hàm đó và ký hiệu là

$$\int f(x)dx \quad .$$

(Để cho ngắn gọn, người ta gọi phép lấy *tích phân bất định* đơn giản là *tích phân* và gọi <u>*nguyên hàm*</u> của hàm f là <u>*tích phân*</u> của hàm f).

Nhận xét *Thuật ngữ* và *ký hiệu* ở đây được thừa hưởng từ phép lấy *tích phân xác định* nhờ công thức Newton-Leibniz, bởi vì nó cho thấy rằng khi phép lấy *tích phân bất định* mà thực hiện được thì kéo theo luôn phép lấy *tích phân xác định* cũng thực hiện được

Việc lấy tích phân bất định, theo định nghĩa, xem ra có vẻ khá 'mò mẫm', vì nó không dựa trên một thuật toán kiến thiết nào. Nó đòi hỏi người ta phải "thuộc" bảng tính đạo hàm của hàm số trước khi lấy tích phân (tương tự như ta phải thuộc bảng cửu chương về phép nhân để mà làm phép chia). Tuy nhiên, sự "mò mẫm" này không làm cho người ta e ngại, bởi vì trong nhiều trường hợp nó đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân xác định thông qua các tổng Riemann (nhất là khi không có máy tính trợ giúp). Chính lý do này đã thôi thúc người ta thiết lập các công cụ hữu hiệu để có thể tính được các tích phân bất định. Các công cụ này thường quy việc lấy tích phân của một hàm phức tạp về việc lấy tích phân của các hàm cơ bản. Điều này cũng có nghĩa là cái "bảng cửu chương" về đạo hàm mà người ta cần thuộc lòng sẽ giảm đi rất nhiều (chỉ cô đọng trên một số hàm cơ bản).

10.1.3. Các tính chất và quy tắc cơ bản

1. Tính chất tuyến tính

Mệnh đề *Nếu f và g là các hàm số có <u>nguyên hàm</u> trên khoảng $U \subset \mathbb{R}$, thì hàm $(f+g)$ và hàm $c.f$ (với $c \in \mathbb{R}$) cũng có nguyên hàm và*

(i) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

(ii) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

<u>Chứng minh</u> Suy ra trực tiếp từ tính tuyến tính của phép lấy đạo hàm.

2. Công thức tính tích phân từng phần

Mệnh đề *Nếu f,g là các hàm khả vi liên tục thì*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx .$$

<u>Chứng minh</u> Đẳng thức trên tương đương với

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx .$$

Theo mệnh đề trên, điều này tương đương với

$$f(x)g(x) = \int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx ,$$

nghĩa là $[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$. Đây là công thức quen biết về tính đạo hàm của tích hai hàm số, cho nên mệnh đề được chứng minh xong.

Nhận xét 1) Mệnh đề trên cho phép ta tính tích phân của f thông qua các thông tin về đạo hàm của nó. Thực vậy, lấy $g(x)=x$ ta có

$$\int f(x)dx = \int f(x)(x)'dx = f(x).x - \int x.f'(x)dx .$$

Điều này rất có ích khi đạo hàm của f có cấu trúc "đơn giản bất ngờ".

Thí dụ: Với $f(x)=\ln(x)$ ta có $\int \ln(x)dx = x.\ln(x) - \int x.\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C$.

2) Mệnh đề trên cũng thường tỏ ra hữu ích khi f' có cấu trúc "không phức tạp hơn" f.

Thí dụ: $\int e^x \sin(x)dx = \int e^x[-\cos(x)]'dx = -e^x\cos(x) - \int[-\cos(x)].[e^x]'dx =$

$$= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)dx = -e^x\cos(x) + \int e^x[\sin(x)]'dx =$$

$$= -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x).dx,$$

và từ đẳng thức trên ta dễ dàng rút ra $\int e^x\sin(x).dx = e^x\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}$.

3. Công thức đổi biến

Mệnh đề *Nếu f có nguyên hàm là F và $u=g(x)$ là hàm khả vi thì*

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du = F[u(x)] + c\ .$$

Chứng minh Suy ngay từ định nghĩa tích phân bất định và công thức lấy đạo hàm của hàm hợp.

Nhận xét Các công thức trên tuy đơn giản nhưng rất quan trọng, vì hầu hết các hàm thường gặp đều được xây dựng từ các hàm cơ bản trên cơ sở phép tính thông thường và phép lấy hàm hợp. Cho nên nếu biết được tích phân của các hàm cơ bản, thì các mệnh đề trên sẽ giúp ta tìm được tích phân của những hàm rất đa dạng.

Thí dụ Tính $\int\cos^4(x)\sin(x)dx$. Chọn $u=\cos(x)$ và $f(u)=u^4$. Ta có $F(u)=\frac{u^5}{5}+c$ và do đó

$$\int\cos^4(x)\sin(x).dx = -\int\cos^4(x)[-\sin(x)].dx = -\frac{u^5}{5}+c = \frac{-\cos^5(x)}{5}+c$$

10.1.4. Tích phân các hàm cơ bản

Sau đây công thức tích phân các hàm cơ bản (suy ngay từ công thức tính đạo hàm).

Tích phân hàm lũy thừa $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, & \alpha\in R\setminus\{-1\}; \\ \ln|x|+C, & \alpha=-1 \end{cases}$.

Tích phân hàm số mũ

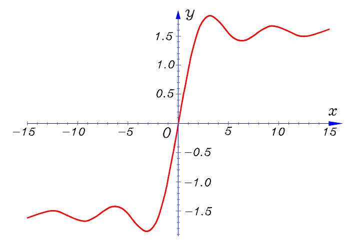
$$\int e^x dx = e^x + C\ ; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \quad a>0, \quad a\neq 1\ .$$

Tích phân các hàm lượng giác

$$\int\cos(x)dx = \sin(x)+C\ ; \qquad \int\sin(x)dx = -\cos(x)+C\ ;$$

$$\int\frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x)+C\ ; \qquad \int\frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x)+C\ .$$

Nhận xét Các công thức tích phân các hàm cơ bản tuy không nhiều, nhưng nếu biết kết hợp với các quy tắc trong phần trên thì ta có một công cụ mạnh để lấy tích phân các loại hàm khác nhau. Trong một thời gian dài, người ta đã say sưa với công việc đầy trí tuệ này. Đây là một sân chơi dành cho những bộ óc thông minh. Biết bao công cụ và kỹ thuật sắc sảo đã được đưa ra để đương đầu với những bài toán tìm nguyên hàm hóc búa. Tuy nhiên số nguyên hàm mà người ta tìm được vẫn chẳng thấm vào đâu. Về nguyên tắc thì mọi hàm liên tục đều có nguyên hàm, nhưng phần lớn các nguyên hàm là không thể biểu diễn được thông qua các hàm cơ bản mà ta biết (bằng một công thức giải tích). Xét một ví dụ đơn giản: hàm số $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ là hàm liên tục (nếu ta định nghĩa giá trị của nó tại điểm 0 là bằng 1), nhưng nguyên hàm của nó không thể biểu diễn được qua các hàm mà ta đã biết (bạn nào không tin thì hãy thử xem). Người ta đã cho nó một cái tên riêng biệt là $Si(x)$. Đối với máy tính thì những hàm kiểu này chẳng có gì là "khác thường" cả. Nó xử lý các hàm này cũng hoàn toàn như với mọi hàm khác. Thí dụ, nó dễ dàng vẽ cho ta đồ thị của hàm này như Hình 10.1 (xin hãy thử lại bằng chương trình thực hành vẽ đồ thị trên máy đã học trong chương hàm số).



Hình 10.1

10.2. Tích phân suy rộng với cận hữu hạn

10.2.1. Đặt vấn đề

Ta đã định nghĩa *tích phân xác định* cho hàm số f trên đoạn $[a,b]$ và ta biết rằng tích phân theo nghĩa này chỉ tồn tại đối với những *hàm bị chặn* và a, b là *hữu hạn*. Khi hàm f không bị chặn hoặc a, b không hữu hạn thì không thể định nghĩa được tích phân Riemann vì tổng Riemann có thể không xác định được (và do đó không thể nói gì về giới hạn của nó). Tuy nhiên, ta có thể đưa ra một khái niệm tích phân *suy rộng* của tích phân Riemann.

Thí dụ Xét hàm $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,1]$. Tích phân $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ không tồn tại vì hàm $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ không giới nội trên [0,1], nó không được xác định tại điểm 0. Ta xét tích phân $\int_\varepsilon^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$, với $\varepsilon>0$ đủ nhỏ, và thấy rằng hàm $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ xác định và giới nội trên đoạn $[\varepsilon,1]$ và tích phân xác định của nó tồn tại, cụ thể là

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \;=\; 2\sqrt{x}\;\Big|_\varepsilon^1 \;=\; 2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon} \;=\; 2(1-\sqrt{\varepsilon})\,.$$

Từ đây ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\,.$$

Điều này gợi cho ta ý tưởng mở rộng định nghĩa tích phân xác định cho hàm không giới nội trên đoạn hữu hạn.

10.2.2. Định nghĩa

Cho hàm số f liên tục trên mọi điểm của đoạn $(a,b]$. Nếu giới hạn

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

tồn tại, ta nói rằng f có tích phân suy rộng (hay tích phân hội tụ) từ a đến b.

Giá trị của giới hạn này cũng được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Nếu giới hạn $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ không tồn tại thì ta nói rằng f không có tích phân suy rộng (hay tích phân phân kỳ) từ a đến b.

Tương tự, nếu hàm f không xác định tại điểm b thì ta nói rằng f có tích phân suy rộng (hay tích phân hội tụ) từ a đến b nếu $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ tồn tại.

Tổng quát hơn, nếu hàm f không xác định trên một số điểm hữu hạn của $[a,b]$, ta cũng có thể định nghĩa được tích phân suy rộng của f từ a đến b. Ví dụ, f không xác định tại $c \in [a,b]$ thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx .$$

10.2.3. Một số thí dụ

Thí dụ 1) Xét tích phân suy rộng của hàm $f(x)=\frac{1}{x^2}$ trên đoạn [-1,1]. Ta có

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to o^-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{\beta\to o^+}\int_{\beta}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to o^-}[-\frac{1}{\varepsilon}-1] + \lim_{\beta\to o^+}[\frac{1}{\beta}-1].$$

Tổng của giới hạn này không tồn tại nên ta nói rằng tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ phân kỳ

2) Tính $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ .Ta có $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{-x}} + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-2\sqrt{\varepsilon}+2) + \lim_{\delta\to 0^+}(2-2\sqrt{\delta}) = 2+2=4.$$

10.3. Tích phân suy rộng với cận vô hạn

10.3.1. Định nghĩa và thí dụ

Bây giờ ta xét trường hợp a hoặc b không hữu hạn. Tức là, có thể $a=-\infty$, hoặc $b=+\infty$, hoặc $(a,b)=(-\infty,\infty)$. Trước hết ta xét trường hợp $a>-\infty$, $b=+\infty$. Ta định nghĩa tích phân suy rộng của hàm f từ a tới $+\infty$ như sau:

Cho hàm f liên tục với $x \ge a$. Nếu giới hạn

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

tồn tại, thì ta nói rằng f có tích phân suy rông từ a tới $+\infty$ (hay tích phân hôi tu).

Giá trị của giới hạn này được ký hiệu là $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Ta có

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ không tồn tại thỉ ta nói rằng f không có tích phân suy rộng từ a tới $+\infty$ hay f có tích phân phân kỳ từ a đến $+\infty$.

Thí dụ 1) Tính $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$. Lấy $b > 1$ bất kỳ, ta có $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b}+1$.

Vậy $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{b}+1) = 1$, tức là $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$.

2) Xét $\int_0^\infty \cos(x)dx$. Ta có $\int_0^b \cos(x)dx = \sin(x)|_0^b = \sin b$.

Khi $b = +\infty$ giới hạn $\lim_{b\to+\infty}\sin b$ không tồn tại, nên $\int_0^{+\infty}\cos(x)dx$ phân kỳ.

Tương tự ta định nghĩa tích phân hội tụ hay phân kỳ cho trường hợp $(-\propto, b)$.

Còn với trường hợp $(-\propto, +\propto)$ ta định nghĩa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ là tổng $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Tích phân này được gọi là hội tụ nếu cả hai tích phân $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ và $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ đều hội tụ. Ngược lại, ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

3) Xét $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$. Trước hết ta thấy

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}[\arctan(b)-\arctan(0)] = \frac{\pi}{2}.$$

Tương tự ta có $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$. Vậy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

Tức là hàm $\frac{1}{1+x^2}$ có tích phân suy rộng từ $-\infty$ đến $+\infty$, hay tích phân trên là hội tụ.

10.3.2. Một số tiêu chuẩn hội tụ

Mệnh đề *Cho hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a,+\infty)$. Giả thiết rằng $0 \le f(x) \le g(x)$ với mọi x và tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ. Khi ấy tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx .$$

<u>Chứng minh</u> Ta đặt $h(t) = \int_a^t f(x)dx$ với $t \ge a$. Vì $f(x) \ge 0$ nên với $t_1 > t_2$ thì $h(t_1) \ge h(t_2)$. Hơn nữa, ta có

$$h(t) = \int_a^t f(x)dx \le \int_a^t g(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx ,$$

tức là $h(t)$ không bao giờ vượt quá $B = \int_a^{+\infty} g(x)dx$. Từ đó suy ra tồn tại $\lim_{t\to+\infty} h(t)$ và giới hạn này luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng *B*. Cho nên

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx .$$

Mệnh đề được chứng minh xong.

Thí dụ Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Với $x \ge 1$ thì $x^2 \ge x$ cho nên $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Ta có $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b\to+\infty} (e^{-1} - e^{-b}) = \frac{1}{e}$. Sử dụng mệnh đề trên ta suy ra $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ hội tụ. Ngoài ra, vì $0 < e^{-x^2} \le 1$ với mọi $0 < x \le 1$ nên $\int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1$. Cho nên

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \le 1 + \frac{1}{e} .$$

Vậy tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ hội tụ.

Hệ quả *Cho f và g liên tục với $x \ge a$. Giả thiết rằng $0 \le g(x) \le f(x)$ và tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ. Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng phân kỳ.*

<u>Chứng minh</u> Dùng phương pháp phản chứng và mệnh đề trên.

Mệnh đề *Nếu f là hàm liên tục và $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ tới số L, thì $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ cũng hội tụ với giới hạn nằm giữa L và $-L$.*

Chứng minh Ta sẽ phân hàm f thành 2 hàm không đổi dấu để có thể áp dụng mệnh đề trên. Đặt

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & khi \quad f(x)>0 \\ 0 & khi \quad f(x)\le 0 \end{cases}, \qquad h(x)=\begin{cases} f(x) & khi \quad f(x)\le 0 \\ 0 & khi \quad f(x)>0. \end{cases}$$

Rõ ràng $f(x) = g(x) + h(x)$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ và $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ đều hội tụ. Thực vậy, ta có $0\le g(x)\le |f(x)|$, nên $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ hội tụ đến một số A nào đó thỏa mãn

$$0\le A\le \int_a^b |f(x)| = L.$$

Vì $\int_a^{+\infty}(-|f(x)|)dx$ hội tụ và $0\ge h(x)\ge -|f(x)|$ nên $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ cũng hội tụ tới một số B nào đó thỏa mãn

$$0\ge B\ge -\int_a^b |f(x)|dx = -L.$$

Từ đó suy ra tích phân $\int_a^{+\infty}(-|f(x)|)dx = \int_a^{+\infty}[g(x)+h(x)]dx$ hội tụ tới số $(A + B)$, và số này thuộc đoạn $[-L,L]$.

Mệnh đề được chứng minh xong.

Bài tập và Thực hành tính toán Chương 10

1. Tính tích phân bất định

Bài 1 Hãy tính các tích phân bất định sau đây:

1) $\int \frac{5x^3+3x^2+2x-1}{x^2+x}dx$;

2) $\int \frac{2x-1}{x^3+1}dx$;

3) $\int \frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2(x-2)}dx$;

4) $\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx$.

Bài 2

a) Xác định các hằng số A, B sao cho

$$\frac{3x+1}{(x+1)^3}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}.$$

b) Dựa vào kết quả trên, tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=\frac{3x+1}{(x+1)^3}.$$

Bài 3 Bằng phương pháp hệ số bất định, hãy biểu diễn x^4+x^2+1 thành tích của hai thừa số bậc hai. Sau đó tính $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$.

Bài 4 Tính

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx.$$

Bài 5 Tính các tích phân sau:

1) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$;

2) $\int (\frac{\ln x}{x})dx$;

3) $\int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$;

4) $\int (\frac{\ln x}{x^3})dx$.

Bài 6 Chứng minh rằng $F(x)=|x|-\ln(1+|x|)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

Bài 7 Tính

1) $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

2) $\displaystyle\int\frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$;

3) $\int\cos^3(x)\sin x dx$;

4) $\int(2x-3)\cos^3 4x dx$;

5) $\int x\cos\sqrt{x}dx$;

6) $\int e^x\cos x dx$;

7) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$;

8) $\int x\sin x dx$;

9) $\int x\cos x dx$.

2. Các phương pháp tính tích phân bất định

2.1. Phương pháp đổi biến

Bài 1 Bằng các biến phụ lượng giác thích hợp, hãy tính các tích phân sau:

1) $\int\sqrt{4-x^2}dx$;

2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}dx$;

3) $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$;

4) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+25}}dx$;

5) $\int(9-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$;

6) $\int x\sqrt{4+x^2}dx$;

7) $\int\sqrt{4x^2-9}dx$.

Bài 2 Tính tích phân $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x^2+1)^3}dx$ bằng hai cách đổi biến sau đây rồi so sánh 2 kết quả nhận được:

a) Đặt $x=\tan t$

b) Đặt $u=x^2+1$.

Bài 3 Tính $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x-1)^2}dx$ bằng hai cách sau đây và cho biết cách nào dễ hơn:

1) Phân tích phân thức dưới dạng tổng của các phân thức đơn giản.

2) Đặt ẩn phụ $u=x-1$.

Bài 4 Tính $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ theo hai cách:

a) Đặt $u=\sqrt{1+x}$;

b) Đặt $x=\tan^2 t$.

Bài 5 Tính $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^4}dx$ theo hai cách:

a) Đặt $u=1+x^2$;

b) Đặt $x=\tan\theta$.

Bài 6 Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$; b) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$; c) $\int \frac{1}{x^4+1}dx$.

2.2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Bài 1 Tính các tích phân sau theo phương pháp tích phân từng phần:

1) $\int \ln(x+1)dx$; 2) $\int x^2\ln x dx$;

3) $\int x^2 e^{-x}dx$; 4) $\int e^{-2x}\sin 3x dx$;

5) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Bài 2 Biết rằng tích phân bất định $\int (\frac{\sin x}{x})dx$ là tồn tại nhưng không biểu diễn được qua các hàm cơ bản (bằng một biểu thức giải tích). Hãy chỉ ra rằng $\int \ln(\cos x)dx$ cũng như vậy.

Bài 3 Biết $\int x\tan(x)dx$ không biểu diễn được qua các hàm cơ bản, hãy chứng minh rằng $\int (\frac{x}{\cos x})dx$ cũng không biểu diễn được qua các hàm cơ bản.

Bài 4 Biến đổi tích phân $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ về các tích phân khác nhau bằng các cách:

a) Tính tích phân từng phần với $dv=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Đặt $x=\tan(t)$;

c) Đặt $u=\sqrt{1+x^2}$

3. Các bài tập khác

Bài 1 Tìm chỗ sai trong suy luận sau: Theo phương pháp tích phân từng phần với

$$u=\frac{1}{\sin(x)},\quad v=\sin(x),\quad dv=\cos(x)dx,\quad du=-\frac{\cos(x)dx}{\sin^2(x)},$$

ta có:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \frac{1}{\sin(x)}\sin(x) + \int \sin(x)\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx = 1 + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx =$$
$$= 2 + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = ... = n + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$$

Suy ra: $0 = 1 = 2 = ... = n$ (!)

Bài 2 Cho $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

a) Tìm A, B sao cho $f(x) = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2}$.

b) Tính đạo hàm cấp n của $f(x)$.

c) Tìm họ các nguyên hàm của $f(x)$.

Bài 3 Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) Hãy khảo sát và vẽ đồ thị.

b) Tính $\int f(x)dx$.

c) Tính $\dfrac{d[f(\sin x)]}{dx}$.

Bài 4 Tìm công thức truy hồi để tính $\int x^n e^{-x} dx$

Bài 5 Tìm công thức truy hồi để tính:

a) $\int \sin^n(x)dx$; b) $\int \dfrac{1}{\cos^n(x)}dx$

4. Tích phân suy rộng

Bài 1 Đặt $I(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t(t+1)}dt \, (x > 1)$. Tìm $\lim_{x\to\infty} I(x)$.

Bài 2 Cho a, b là hai số thực, đặt $f(x) = \dfrac{2ax}{x^2+1} - \dfrac{b}{x+2}$.

1) Tìm a, b để $f(x) = \dfrac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)}$.

Với a, b tìm được, hãy tính $\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)dx$.

2) Xác định quan hệ giữa a và b để $\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)dx$ tồn tại hữu hạn.

Bài 3 Ký hiệu $I_n = \int_{n-1}^{n} \dfrac{x^{n-1}-1}{x^n+1}dx$. Chứng minh:

a) Dãy $\{I_n\}$ bị chặn;

b) $I_{n-1} \le I_n$ với mọi n là số tự nhiên.

Bài 4 Đặt $I(x) = \int_0^x e^{2t} - e^{-2t}\, dt$.

a) Tính $I(x)$ khi $x = \ln 2$.

b) Giải và biện luận phương trình $I(x) = m$.

Bài 5 Tính $I(t) = \int_0^t \frac{2x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Bài 6 Ký hiệu $J(t) = \int_1^t \left[\frac{\ln(x)}{x}\right]^2 dx$ với $t > 1$.

Tính $J(t)$. Từ đó suy ra rằng $J(t) < 2$ với mọi $1 < t$.

5. Thực hành tính tích phân bất định

Để thực hành tìm tích phân bất định, hãy vào dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> int(f(x),x);
```

Trong đó *f(x)* là biểu thức dưới dấu tích phân bất định. Sau dấu (;) ta ấn phím "Enter" thì việc tính nguyên hàm sẽ được thực hiện và sẽ có ngay đáp số.

Thí dụ

```
[> int((3*x^2+3*x+3)/(x^3-3*x+2),x);
```

$$\ln(2+x) - \frac{3}{-1+x} + 2\ln(-1+x)$$

Muốn có công thức biểu diễn tích phân bất định trước khi nhận đáp số, ta đánh các dòng lệnh có cú pháp tương tự như trên, nhưng thay chữ i (thường) bằng chữ I (hoa), tức là:

```
[> Int(1/(x^2-5*x+6),x);
```

và sau khi cho máy thực hiện ta sẽ nhận được biểu thức sau đây

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Để nhận giá trị của tích phân này ta dùng lệnh:

```
[> value(");
```

$$-\ln(x-2) + \ln(x-3)$$

và nếu thấy kết quả có vẻ cồng kềnh thì có thể "rút gọn" bằng câu lệnh:

```
[> simplify(");
```

Trong trường hợp nguyên hàm là một hàm "chưa từng thấy bao giờ" (nghĩa là không thể biểu diễn qua những hàm số mà ta đã biết) thì máy chỉ cho ra công thức tích phân (như kết quả của một lệnh trơ) và lệnh [> **value(")** chẳng đem lại cho ta thông tin gì. Như thế không có nghĩa là máy "bó tay", mà ngược lại, nó vẫn làm việc "không chê vào đâu được", miễn là ta biết cách bảo nó cho xem kết quả dưới dạng khác (chứ không phải là cho xem biểu thức như ta vẫn quen làm). Thí dụ, nguyên hàm của hàm số sau đây không thể biểu diễn được qua các hàm số ta biết:

```
[> int(sin(x)/(x+sqrt(x)),x);
```

$$\int \frac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}}dx$$

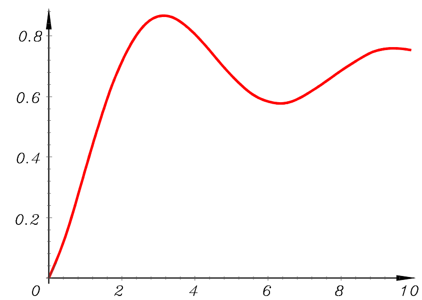
Nhưng ta biết rằng nguyên hàm này tồn tại, và theo định lý Newton-Leibniz thì nó biểu diễn được dưới dạng tích phân xác định với cận là biến số. Có nghĩa, nó là một hàm f(t) xác định như sau

```
[> f(t):= int(sin(x)/(x+sqrt(x)),x=0..t);
```

$$f(t) := \int_0^t \frac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}}dx$$

Chương trình tính toán cho ta biết mọi thông tin về hàm này, đầy đủ và phong phú như bất kỳ một hàm quen thuộc nào khác. Thí dụ ta có thể bảo máy cho xem giá trị của hàm tại bất kỳ điểm nào, hoặc hơn thế, ta có thể bảo máy vẽ cho ta đồ thị của hàm trên bất kỳ khoảng nào:

```
[>plot(f(t),t=0..10);
```



Hình 10.2

Như vậy ta đã được thấy một điều thú vị là: *tích phân xác định* chính là công cụ để tính *nguyên hàm*, chứ không phải là ngược lại (như lâu nay nhiều người nhầm tưởng và dồn mọi sức lực cho việc tính nguyên hàm thông qua các loại mẹo mực, tiểu xảo,...).

CHƯƠNG 11

Dãy hàm và Chuỗi hàm

11.1. Dãy hàm

11.1.1. Các khái niệm và thí dụ

Dãy hàm là một họ *đếm được* các hàm số cùng xác định trên một tập X nào đó được đánh số theo thứ tự tăng dần, ký hiệu là $\{f_n\}$.

Với mỗi $x \in X$ cho trước, tập giá trị của họ hàm này tại x lập thành một *dãy số* $\{f_n(x)\}$. Nếu *dãy số* này là *hội tụ* thì ta nói rằng *dãy hàm* là *hội tụ tại điểm x*.

Nếu dãy hàm $\{f_n\}$ *hội tụ tại mọi điểm* $x \in X$, thì ta nói rằng *dãy hàm* $\{f_n\}$ *là hội tụ*, hay *hội tụ điểm* (hoặc *hội tụ đơn giản*). Khi ấy, do tính duy nhất của giới hạn mỗi dãy số, ta có thể thiết lập được một hàm số f bằng cách cho tương ứng mỗi điểm $x \in X$ với giới hạn của dãy số $\{f_n(x)\}$, tức là

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall x \in X.$$

Ta nói rằng hàm f là *giới hạn của dãy hàm* $\{f_n\}$, hay dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ (điểm) đến hàm f.

Dãy hàm được gọi là *bị chặn* (hay còn gọi là *bị chặn đều*) nếu như tồn tại số dương M sao cho

$$|f_n(x)| \le M, \quad \forall x \in X, \forall n = 1,2,3,...$$

Dãy hàm được gọi là *đơn điệu tăng* (*đơn điệu giảm*) nếu với mọi n ta có

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \quad \forall x \in X \qquad (f_n(x) \ge f_{n+1}(x), \quad \forall x \in X)$$

Thí dụ Xét dãy hàm số cho bởi công thức $f_n(x) = \arctan(nx)$. Đây là dãy những hàm liên tục xác định trên toàn bộ trục số, có đồ thị như trong *Hình 11.1*. Dãy hàm này là *bị chặn đều* (bởi hằng số $\pi/2$). Dãy hàm không phải là *đơn điệu* khi X là toàn bộ trục số, nhưng lại là đơn điệu nếu X là nửa trục số.

Ta hãy tìm giới hạn của dãy hàm này.

Với $x > 0$, ta có $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \pi/2$;

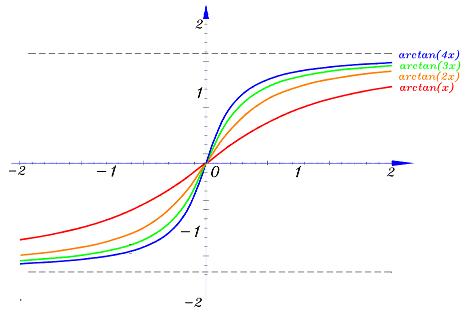
Với $x = 0$, ta có $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \arctan(0) = 0$;

Với $x < 0$, ta có $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\pi/2$;

Tóm lại, giới hạn của dãy hàm nêu trên là hàm số sau đây

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & khi \quad x > 0 \\ 0 & khi \quad x = 0 \\ -\pi/2 & khi \quad x < 0 \end{cases}$$

Rõ ràng đây là một hàm gián đoạn (tại điểm 0).



Hình 11.1

Nhận xét Như vậy, *giới hạn* của một dãy những hàm *liên tục* hội tụ điểm có thể là một hàm *không liên tục*. Ngoài ra, nếu ta định nghĩa *khoảng cách* giữa 2 hàm số h và g (cùng xác định trên tập *X*) là đại lượng $\| h - g \| := \sup\{| h(x) - g(x) |, x \in X\}$ thì còn thấy khoảng cách giữa f_n và f không tiến tới 0 khi *n* tiến ra vô cùng (mà luôn luôn bằng π/2). Nghĩa là các hàm f_n không hề "tiến gần" tới giới hạn f. Điều này cho thấy rằng khái niệm *giới hạn điểm* của dãy hàm không mang bản chất "xấp xỉ" tốt như có thể mong đợi. Vì vậy người ta đưa ra một khái niệm khác về giới hạn của dãy hàm, cụ thể là

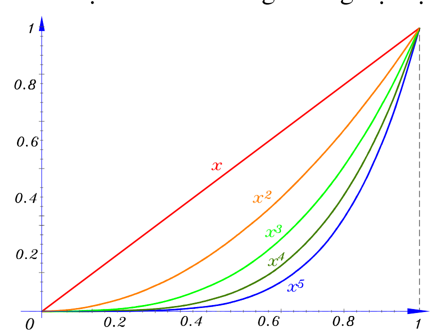
<u>Định nghĩa</u> *Dãy hàm $\{f_n\}$, xác định trên tập X, được gọi là <u>hội tụ đều</u> đến hàm số f trên tập X nếu như, với mỗi số dương* ε *(bất kỳ), có thể tìm được số tự nhiên N (đủ lớn) sao cho với mọi* $n > N$ *thì*

$$| f_n(x) - f(x) | \le \varepsilon , \quad \forall x \in X . \qquad (*)$$

Nhận xét Từ định nghĩa ta thấy nếu dãy hàm $\{f_n\}$ là *hội tụ đều* tới hàm f trên tập X thì nó cũng *hội tụ điểm* tới hàm này trên tập *X*. Điều ngược lại nói chung là không đúng. Thí dụ trên đã cho ta thấy một dãy hàm *hội tụ điểm* tới một hàm số nhưng không *hội tụ đều* tới hàm đó (vì điều kiện (*) không thể xảy ra với những số ε nhỏ hơn π/2). Sau đây ta xem xét thêm một số thí dụ khác.

Thí dụ Xét dãy hàm $\{f_n\}$ với $f_n(x) = x^n$. Nếu lấy tập *X* =[0,*q*] (với *q* < 1) thì ta dễ dàng chứng minh được rằng dãy hàm này *hội tụ đều* tới hàm đồng nhất bằng 0 trên tập *X*. Bởi vì với mỗi số dương ε bất kỳ ta luôn tìm được số tự nhiên *N* (đủ lớn) sao cho với mọi *n* > *N* thì $q^n < \varepsilon$, và khi ấy ta có

$$| x^n - 0 | \le q^n \le \varepsilon , \quad \forall x \in X .$$



Hình 11.2

Tuy nhiên, nếu lấy *X*=[0,1) thì ta lại thấy rằng dãy hàm này *không hội tụ đều* trên tập *X,* mặc dù nó *hội tụ điểm* tới hàm f đồng nhất bằng 0 trên tập này. Thậy vậy, với số tự nhiên *n* lớn bao nhiêu chăng nữa ta vẫn tìm được điểm x_0 nằm trên tập [0,1) và thỏa mãn $(x_0)^n \geq 1/2$ (chỉ việc chọn $1 > x_0 \geq 1/\sqrt[n]{2}$). Như vậy, hệ thức (*) không thể thỏa mãn với những số ε nhỏ hơn 1/2, và do đó dãy hàm $f_n(x) = x^n$ *không hội tụ đều* tới hàm f trên tập [0,1).

Nhận xét Ví dụ trên cho thấy rằng tính *hội tụ đều* không chỉ phụ thuộc vào tính chất của dãy hàm, mà còn phụ thuộc váo cấu trúc của *tập xác định*.

Tính chất *Nếu dãy hàm $\{f_n\}$ là hội tụ đều trên tập X, thì*

(i) *Với mỗi hằng số c bất kỳ, dãy hàm $\{c.f_n\}$ cũng là hội tụ đều trên tập X;*

(ii) *Với mọi dãy hàm $\{g_n\}$ hội tụ đều trên X, dãy hàm $\{f_n + g_n\}$ cũng là hội tụ đều trên X.*

Chứng minh Dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

11.1.2. Các tiêu chuẩn về hội tụ đều

Định lý (Tiêu chuẩn Cauchy). *Điều kiện cần và đủ để dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ đều trên tập X là, với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý), ta luôn tìm được số tự nhiên N (đủ lớn) để với bất kỳ 2 số tự nhiên n,m nào lớn hơn N cũng xảy ra hệ thức sau đây*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X. \qquad (**)$$

Chứng minh *Điều kiện cần*. Nếu dãy hàm $\{f_n\}$ là hội tụ đều trên tập X thì với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý), ta luôn tìm được số tự nhiên *N* (đủ lớn) sao cho với mọi số tự nhiên *n* và *m* lớn hơn N ta đều có

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2, \quad \forall x \in X,$$
$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/2, \quad \forall x \in X,$$

và từ đây suy ra

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

nghĩa là ta có (**).

Điều kiện đủ. Từ điều kiện đủ của định lý ta suy ra rằng, với mỗi điểm x cho trước, dãy số $\{f_n(x)\}$ là một dãy Cauchy, cho nên nó hội tụ đến một số nào đó. Hàm số cho tương ứng mỗi điểm $x \in X$ với giới hạn của dãy số $\{f_n(x)\}$ được ký hiệu là $f(x)$. Ta sẽ chỉ ra rằng dãy hàm $\{f_n\}$ là *hội tụ đều* đến hàm f trên tập *X*. Thật vậy, điều kiện đủ nói lên rằng với mỗi số dương ε, ta luôn tìm được số tự nhiên *N* (đủ lớn) để hệ thức

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

nghiệm đúng với bất kỳ 2 số tự nhiên *n,m* nào lớn hơn *N*. Bằng cách cho *m* tiến ra vô cùng và để ý rằng $f_m(x)$ sẽ tiến tới giới hạn là $f(x)$, ta suy ra

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

Định lý (Weierstrass) *Dãy hàm $\{f_n\}$ là <u>hội tụ đều</u> đến hàm f trên tập X nếu tồn tại dãy số dương $\{a_n\}$ hội tụ đến 0 và thỏa mãn điều kiện sau đây với mỗi n*

$$| f_n(x) - f(x) | \le a_n\ , \quad \forall x \in X\ .$$

<u>Chứng minh</u> Do dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến 0 nên, với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý), tồn tại số tự nhiên N (đủ lớn) sao cho mọi số tự nhiên *n* lớn hơn *N* thì sẽ có $a_n \le \varepsilon$. Kết hợp với điều kiện của định lý ta có

$$| f_n(x) - f(x) | \le a_n \le \varepsilon\ , \quad \forall x \in X\ .$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

11.1.3. Tính chất của dãy hàm hội tụ đều

Định lý *Nếu dãy các hàm liên tục $\{f_n\}$ là <u>hội tụ đều</u> đến hàm f trên tập X thì hàm f cũng là hàm liên tục trên tập X.*

<u>Chứng minh</u> Ta cần chỉ ra rằng với mỗi điểm a thuộc tập X thì luôn có

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ .$$

Nghĩa là với mỗi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý) ta phải tìm được số dương δ sao cho

$$| x - a | \le \delta \quad \Rightarrow \quad | f(x) - f(a) | \le \varepsilon\ .$$

Muốn tìm số δ như vậy ta dựa vào *tính hội tụ đều* của dãy để chọn số tự nhiên *N* (đủ lớn) sao cho

$$| f_N(x) - f(x) | \le \varepsilon/3\ , \quad \forall x \in X\ .$$

Tiếp theo, do tính liên tục của hàm f_N (tại điểm a) ta chọn được số dương δ sao cho

$$| x - a | \le \delta \quad \Rightarrow \quad | f_N(x) - f_N(a) | \le \varepsilon/3\ .$$

Như vậy, tổng hợp lại, với mọi x thỏa mãn $| x - a | \le \delta$ ta sẽ có

$$| f(x) - f(a) | \le | f(x) - f_N(x) | + | f_N(x) - f_N(a) | + | f_N(a) - f(a) | \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

Định lý *Nếu dãy các hàm liên tục $\{f_n\}$ là <u>hội tụ đều</u> đến hàm f trên đoạn [a,b] thì với mọi điểm c nằm trên đoạn này ta có dãy hàm $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$ là <u>hội tụ đều</u> đến hàm $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ trên đoạn [a,b]; và vì vậy*

$$\int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_c^x f_n(t)dt$$

(nghĩa là *tích phân* của *hàm giới hạn* bằng giới hạn của dãy tích phân các hàm).

<u>Chứng minh</u> Sự tồn tại của các hàm F_n và F đã được đảm bảo do tính liên tục của các hàm f_n và f trên đoạn $[a,b]$. Ta chỉ cần chứng tỏ rằng với mỗi số dương ε (bất kỳ), có thể tìm được số tự nhiên N (đủ lớn) sao cho với mọi n > N thì

$$| F_n(x) - F(x) | \le \varepsilon\,, \quad \forall x \in [a,b]\ .$$

Do tính *hội tụ đều* của dãy hàm $\{f_n\}$ và f trên đoạn $[a,b]$ nên với mỗi số dương ε, ta tìm được số tự nhiên N sao cho với mọi $n > N$ thì

$$| f_n(x) - f(x) | \le \varepsilon/(b-a)\,, \quad \forall x \in [a,b]\ .$$

Khi ấy ta có

$$| F_n(x) - F(x) | = |\int_c^x f_n(t)dt - \int_c^x f(t)dt | \le \int_a^x | f_n(t) - f(t) | dt \le | x-a | \varepsilon/(b-a) \le \varepsilon$$

và đây chính là điều cần chứng minh.

Nhận xét Định lý này cho ta khả năng chuyển phép lấy tích phân của giới hạn (của một dãy hàm) sang phép lấy giới hạn của dãy các tích phân.

Định lý *Giả sử dãy các hàm $\{f_n\}$ khả vi liên liên tục trên đoạn $[a,b]$ có dãy các đạo hàm $\{ f_n' \}$ là <u>hội tụ đều</u> trên đoạn này. Nếu có 1 điểm c trên đoạn $[a,b]$ sao cho dãy số $\{f_n(c)\}$ hội tụ, thì dãy hàm $\{f_n\}$ sẽ là <u>hội tụ đều</u> trên đoạn $[a,b]$ tới một hàm số khả vi liên tục f có tính chất như sau*

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' := f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,, \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

<u>Chứng minh</u> Lấy dãy các hàm F_n xác định như sau

$$F_n(x) = \int_c^x f_n'(t)dt\ .$$

Theo định lý đã được chứng minh ở trên, dãy hàm này là *<u>hội tu đều</u>* tới hàm số

$$F(x) = \int_c^x [\lim_{n\to\infty} f_n'(t)]dt\,.$$

Để ý rằng $f_n(x) = F_n(x) + f_n(c)$, cho nên dãy hàm $\{f_n\}$ sẽ là *<u>hội tụ đều</u>* trên đoạn $[a,b]$ tới hàm số sau đây

$$F(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(c)\,.$$

Đặt $f(x) = F(x) + \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c)$ ta có ngay điều cần chứng minh.

Nhận xét Định lý trên đã cho ta khả năng chuyển phép lấy đạo hàm của giới hạn thành phép lấy giới hạn của các đạo hàm.

11.2. Chuỗi hàm

11.2.1. Khái niệm

Cho dãy các hàm số $\{f_n\}$ xác định trên tập *X*. Với mỗi số tự nhiên k ta thiết lập *tổng riêng*

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Các tổng riêng này cũng lập thành một *dãy hàm,* xác định trên tập *X*.

- Nếu dãy các tổng riêng $\{S_k\}$ *hội tụ tại điểm* $x_0 \in X$ thì ta nói rằng *chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>*hội tụ tại điểm*</u> x_0.
- Nếu dãy các tổng riêng $\{S_k\}$ *hội tụ tại mỗi điểm* trên tập X thì ta nói rằng *chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>*hội tụ*</u> (hay <u>*hội tụ điểm*</u>) <u>*trên tập*</u> X.
- Nếu dãy các tổng riêng $\{S_k\}$ *hội tụ đều* trên tập X thì ta nói rằng *chuỗi hàm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>*hội tụ đều*</u> trên tập X.

Giới hạn của dãy tổng riêng được gọi là *tổng của chuỗi hàm*, tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{k\to\infty} S_k(x) := \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Như vậy giá trị của chuỗi hàm tại mỗi điểm là một chuỗi số. Nghĩa là, mọi tính chất về chuỗi số có thể được chuyển sang cho chuỗi hàm hội tụ điểm.

Với mỗi số tự nhiên *N*, ta xét dãy hàm $\{f_n, n = N+1, N+2, ...\}$ và có thể thiết lập chuỗi $r_N(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$ và gọi nó là *phần dư* của tổng riêng S_N. Vì tổng riêng của chuỗi này chỉ sai khác với tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ một hàm đúng bằng $S_N(x)$, cho nên dễ dàng chứng minh được rằng chuỗi hội tụ khi và chỉ khi phần dư (của một tổng riêng nào đó) là hội tụ, và khi ấy với mọi số tự nhiên *N* ta luôn có

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S_N(x) + r_N(x).$$

Nhận xét Như vậy *chuỗi hàm* cũng có bản chất tương tự như *dãy hàm*, cho nên từ các kết quả về *dãy hàm* ta dễ dàng suy ra các kết quả đối với *chuỗi hàm*. Các kết quả này sẽ được hệ thống lại trong phần tiếp theo.

11.2.2. Các tính chất và dấu hiệu hội tụ của chuỗi hàm

Định lý *Nếu các hàm f_n là liên tục trên tập X và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ là hội tụ đều trên tập X thì tổng của chuỗi cũng là hàm liên tục trên tập X.*

Chứng minh Vì tổng riêng của dãy hàm liên tục cũng là hàm liên tục, và tổng của chuỗi, theo định nghĩa, là giới hạn của dãy các tổng riêng, cho nên định lý được suy ngay từ tính liên tục của giới hạn của dãy hàm liên tục *hội tụ đều* đã được chứng minh ở trên.

Định lý *Nếu các hàm f_n là liên tục trên đoạn $[a,b]$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ là hội tụ đều trên đoạn $[a,b]$ thì, với mọi số $c \in [a,b]$, chuỗi hàm*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x f_n(t)dt$$

là hội tụ đều trên đoạn $[a,b]$ và ta có

$$\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x f_n(t)dt\ , \quad \forall x \in [a,b]$$

Chứng minh Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x f_n(t)dt := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_c^x f_k(t)dt\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_c^x \sum_{k=1}^{n} f_k(t)dt\right) = \lim_{n\to\infty}\int_c^x S_n(t)dt\ .$$

Vì dãy hàm $\{S_n(t)\}$ là *hội tụ đều* (theo định nghĩa về sự hội tụ đều của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$), cho nên từ định lý về *tích phân của dãy hàm* hội tụ đều ta suy ra *dãy hàm* $\left\{\int_c^x S_n(t)dt\right\}$ là hội tụ đều. Từ đây suy ra *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x f_n(t)dt$ là *hội tụ đều*. Từ đẳng thức trên, sau khi chuyển giới hạn vào dưới dấu tích phân (thực hiện được nhờ tính *hội tụ đều* của dãy) ta có ngay điều cần chứng minh.

Định lý *Giả sử rằng các hàm f_n là khả vi liên tục trên đoạn $[a,b]$ và chuỗi các đạo hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ là hội tụ đều trên đoạn $[a,b]$. Khi đó, nếu có một số $c \in [a,b]$ để cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ là hội tụ, thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ là hội tụ đều trên đoạn $[a,b]$, và ngoài ra*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Chứng minh Bằng phương pháp tương tự như trên, chỉ khác ở chỗ ta áp dụng định lý về đạo hàm của dãy hội tụ đều.

Định lý (Tiêu chuẩn Cauchy): *Điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều trên tập X là, với mỗi số dương* ε *(nhỏ bao nhiêu tùy ý), ta tìm được số tự nhiên N (đủ lớn) sao cho, với mọi số tự nhiên* $k > N$ *và số tự nhiên* m *bất kỳ, bất đẳng thức sau đây luôn được thỏa mãn*

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k+m} f_n(x)\right| \le \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Chứng minh Để ý rằng

$$|S_{k+p}(x) - S_k(x)| = \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x)\right|$$

cho nên định lý này được suy ra ngay từ tiêu chuẩn Cauchy cho dãy hàm hội tụ đều, khi dãy hàm được xét là dãy các tổng riêng S_k.

Hệ quả *Nếu chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều trên tập X thì dãy hàm* $\{f_n\}$ *là hội tụ đều đến 0 trên tập X.*

Chứng minh Từ tiêu chuẩn Cauchy, chọn $m = 1$ ta suy ra điều cần chứng minh.

Hệ quả *Chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều trên tập X khi và chỉ khi*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in X} |r_N(x)| = 0. \qquad (*)$$

Chứng minh Từ tiêu chuẩn Cauchy, chọn $k = N$ và cho m tiến ra vô cùng ta có (*). Ngược lại, nếu có (*) thì với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại số tự nhiên N (đủ lớn) sao cho

$$|r_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m \ge N, \quad \forall x \in X.$$

Cho nên

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x)\right| = |r_{m+p}(x) - r_m(x)| \le |r_{m+p}(x)| + |r_m(x)| \le \varepsilon, \quad \forall m \ge N, p \ge 0, x \in X.$$

Lại theo tiêu chuẩn Cauchy ta suy ra chuỗi hội tụ đều.

Hệ quả đã được chứng minh.

Định lý (Weierstrass) *Chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>*hội tụ đều*</u> *trên tập X nếu như tồn tại chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và thỏa mãn điều kiện sau*

$$| f_n(x) | \le a_n, \quad \forall x \in X, \forall n = 1,2,3,...$$

<u>Chứng minh</u> Chú ý rằng

$$| \sum_{n=k+1}^{k+m} f_n(x) | \le \sum_{n=k+1}^{k+m} | f_n(x) | \le \sum_{n=k+1}^{k+m} a_n , \quad \forall x \in X \ ,$$

cho nên sử dụng tiêu chuẩn Cauchy ta suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét 1) Với chứng minh như trên ta cũng suy ra được rằng chuỗi hàm là *hội tụ tuyệt đối* (và *đều trên tập X*).

2) Dấu hiệu trên tuy đơn giản nhưng rất hữu ích (vì rất dễ kiểm tra, cho nên dễ sử dụng).

Thí dụ Ta dễ dàng nhận ra tính *hội tụ đều* của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ (trên toàn bộ trục số), vì rằng

$$| \frac{\sin(nx)}{n^2} | \quad \le \quad \frac{1}{n^2} , \qquad \forall n = 1,2,3,...$$

và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ.

Định lý (Dấu hiệu Dirichlet). *Nếu dãy hàm* $\{a_n(x)\}$ *là* <u>*đơn điệu*</u> *và* <u>*hội tụ đều*</u> *đến* 0 *trên tập* X *và nếu dãy hàm* $\{b_n(x)\}$ *có dãy các tổng riêng (ký hiệu là* $\{B_k(x)\}$) <u>*bị chặn*</u> (đều) *trên tập* X *, thì chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

là <u>*hội tụ đều*</u> *trên tập X.*

<u>Chứng minh</u> Điều kiện thứ 2 của định lý có nghĩa là tồn tại số dương M sao cho

$$| B_k(x) | \le M, \quad \forall x \in X, \forall k = 1,2,3,...$$

Điều kiện thứ nhất cho thấy rằng với mỗi số dương ε ta luôn tìm được số tự nhiên N sao cho với mọi $n > N$ thì

$$0 \le | a_n(x) | \le \varepsilon /(3M), \quad \forall x \in X .$$

Chú ý rằng

$$\sum_{n=m}^{m+p} a_n b_n = \sum_{n=m}^{m+p} a_n [B_n - B_{n-1}] = a_{m+p} B_{n+p} + \sum_{n=m+1}^{m+p} [a_{n-1} - a_n] B_{n-1}$$

và do tính đơn điệu của dãy hàm a_n thì các đại lượng (a_{n-1}-a_n) có cùng dấu, nên

$$|\sum_{n=m+1}^{m+p}[a_{n-1}-a_n]B_{n-1}| \le \sum_{n=m+1}^{m+p}|a_{n-1}-a_n|M = \left\|\sum_{n=m+1}^{m+p}(a_{n-1}-a_n)\right\|M = \left\|a_m - a_{m+p}\right\|M .$$

Vì vậy chúng ta có

$$|\sum_{n=m}^{m+p} a_n(x)b_n(x)| \le |a_{m+p}(x)|M + |a_m(x) - a_{m+p}(x)|M \le$$

$$\le (|a_m(x)| + 2|a_{m+p}(x)|)M \le (\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3M})M = \varepsilon ,$$

với mọi $n > N$.

Theo tiêu chuẩn Cauchy ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét Dấu hiệu Dirichlet thường khó kiểm tra hơn tiêu chuẩn Weierstrass, cho nên nó chỉ được dùng khi không áp dụng được tiêu chuẩn Weierstrass, như trong trường hợp sau đây.

Thí dụ Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ không hội tụ nên ta không thể áp dụng được tiêu chuẩn Weierstrass. Đặt $a_n = \frac{1}{n}$ và $b_n(x) = \sin(nx)$, ta thấy rằng dãy a_n là *đơn điệu* và *hội tụ đều* đến 0 (vì nó không phụ thuộc vào x) và

$$B_n = |\sum_{k=1}^{n} b_k| = |\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)| \le 1/(\sin\frac{x}{2})$$

cho nên B_n bị *chặn đều* trên mọi *đoạn* không chứa các điểm là bội của 2π. Theo dấu hiệu Dirichlet ta suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ là hội tụ đều trên mọi đoạn nói trên.

Định lý (Dấu hiệu Abel). *Nếu dãy hàm $\{a_n(x)\}$ là <u>đơn điệu</u> và <u>bị chặn đều</u> trên tập X (bởi số dương M), còn chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ là <u>hội tụ đều</u> trên tập X, thì chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

là <u>hội tụ đều</u> trên tập X.

<u>Chứng minh</u> Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ là hội tụ đều nên với mỗi số dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n > N$ và mọi số tự nhiên p ta có

$$|\sum_{n=m}^{m+p} b_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3M}, \quad \forall x \in X \ .$$

Với cách lập luận tương tự như trong chứng minh định lý trên ta suy ra rằng

$$|\sum_{n=m}^{m+p} a_n(x)b_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3M}(2|a_{m+p}(x)|+|a_m(x)|) \le \varepsilon$$

và từ tiêu chuẩn Cauchy ta có điều cần chứng minh.

11.2.3. Chuỗi lũy thừa

<u>*Chuỗi lũy thừa*</u> (hay chuỗi lũy thừa tâm tại gốc) là chuỗi có *số hạng tổng* quát là *hàm lũy thừa*, tức là $u_n(x) = a_n x^n$.

Như vậy chuỗi lũy thừa (tâm gốc) có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trong đó a_n là các hằng số (gọi là các *hệ số* của chuỗi). Bằng phép dịch chuyển tọa độ $x \to x - x_0$ ta có chuỗi lũy thừa tâm tại điểm x_0 với dạng sau đây:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

1. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Dễ dàng thấy rằng chuỗi lũy thừa luôn hội tụ (điểm) tại tâm của nó. Có những chuỗi lũy thừa chỉ hội tụ tại 1 điểm đó mà thôi (thí dụ khi chọn $a_n=n^n$). Một trong những nét đặc biệt của chuỗi lũy thừa là có tính chất sau

Định lý (Abel) *Nếu chuỗi lũy thừa* (*tâm tại gốc*) *hội tụ tại một điểm* c *nào đó thì nó hội tụ tuyệt đối trên cả khoảng* (-|*c*|,|*c*|).

<u>Chứng minh</u> Do chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ hội tụ nên dãy $\{ a_n c^n \}$ tiến đến 0, và do đó bị chặn (khi *n* tiến ra vô cùng). Với $x \in (-|c|,|c|)$ thì $\frac{|x|}{|c|} = q < 1$, cho nên dễ dàng suy ra sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n . x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n c^n| \left(\frac{|x|}{|c|}\right)^n .$$

nhờ dấu hiệu Weierstrass, vì ta biết rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ là hội tụ (với mọi số *M*). Định lý đã được chứng minh xong.

Hệ quả *Nếu chuỗi lũy thừa không hội tụ tại điểm c thì nó cũng không hội tụ tại mọi điểm nằm ngoài đoạn* $[-|c|,|c|]$.

<u>Chứng minh</u> Thật vậy, nếu nó hội tụ tại một điểm b nào đó nằm ngoài đoạn $[-|c|,|c|]$, thì theo định lý trên nó sẽ hội tụ trên cả khoảng (-*b.b*), trong đó có điểm *c*, tức là suy ra mâu thuẫn.

<u>Định nghĩa</u> *Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là một số* $R \geq 0$ *xác định như sau*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

trong đó ta quy ước $R = 0$ khi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bằng *vô cùng*, và R bằng *vô cùng* khi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bằng 0.

Định lý *Khi* $R \in (0, \infty)$ *thì*

(i) *Chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối và đều trên mỗi đoạn nằm trong khoảng* $(-R, R)$.

(ii) *Chuỗi lũy thừa không hội tụ tại mọi điểm nằm ngoài đoạn* $[-R, R]$.

<u>Chứng minh</u> (i) Với mỗi đoạn $[r_1, r_2] \subset (-R, R)$ luôn tồn tại số dương a và số dương ε (đủ bé) sao cho $[r_1, r_2] \subset [-a, a] \subset [-\varepsilon - a, a + \varepsilon] \subset (-R, R)$. Như vậy ta có $|x| \leq a, \forall x \in [r_1, r_2]$, và $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{a+\varepsilon}$. Theo định nghĩa về *limsup* ta tìm được số tự nhiên N (đủ lớn) sao cho

$$|a_n| < \left(\frac{1}{a+\varepsilon}\right)^n, \quad \forall n > N.$$

Khi ấy ta có

$$|a_n x^n| < \left(\frac{|x|}{a+\varepsilon}\right)^n \leq \left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^n, \quad \forall x \in [r_1, r_2], \forall n > N.$$

Vì chuỗi số (cấp số nhân lùi vô hạn) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^n$ là hội tụ nên, theo dấu hiệu Weierstrass, ta suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ là hội tụ đều trên đoạn $[r_1, r_2]$.

(ii) Với $x \notin [-R, R]$ tồn tại số dương a thỏa mãn $R < a < |x|$, và từ định nghĩa *limsup* ta tìm được số tự nhiên N sao cho

$$|a_n x^n| > \left(\frac{|x|}{a}\right)^n > 1, \quad \forall n > N.$$

Từ đây suy ra chuỗi không hội tụ vì số hạng tổng quát của nó không tiến tới 0 khi n tiến ra vô cùng.

Định lý đã được chứng minh đầy đủ.

Nhận xét 1) Cách chứng minh trên cho thấy rằng phần (i) của định lý vẫn đúng khi R bằng *vô cùng.*

2) Do định lý trên, khoảng (-*R,R*) còn có tên gọi là <u>*vùng hội tụ*</u> (hay *miền hội tụ*). Như vậy, tính hội tụ của chuỗi lũy thừa ở trong *miền hội tụ* (-*R,R*) đã được làm rõ. Tuy nhiên, việc khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại các *điểm biên* của miền (tức là tại điểm R

và -R) là vấn đề rất tinh tế và cần được xử lý bằng các kỹ thuật tinh đặc biệt trong từng trường hợp cụ thể.

2. Các tính chất cơ bản của tổng chuỗi lũy thừa

Định lý (i) *Tổng của chuỗi lũy thừa là một hàm liên tục trong vùng hội tụ của chuỗi;*

(ii) *Tổng của chuỗi lũy thừa là hàm khả vi liên tục cấp vô hạn trong vùng hội tụ và đạo hàm của nó bằng tổng của chuỗi các đạo hàm, cụ thể là được tính bởi công thức*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ \forall x \in (-R, R). \qquad (*)$$

(iii) *Tích phân của tổng chuỗi lũ thừa bằng tổng chuỗi các tích phân các hàm lũy thừa, tức là ta có công thức*

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c.$$

Chứng minh (i) Một điểm bất kỳ trong miền hội tụ (khoảng (-R,R)) luôn có thể được chứa trong phần trong của một đoạn nào đó cũng nằm trong miền này. Theo định lý trên chuỗi hội tụ đều trên đoạn đó. Vì các hàm lũy thừa là liên tục nên do tính liên tục của tổng chuỗi hội tụ đều ta suy ra điều cần chứng minh.

(ii) Vì $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|a_n| n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|a_n|} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, cho nên bán kính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ bằng bán kính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Theo định lý trên, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ là hội tụ đều trên mọi đoạn nằm trong khoảng (-R,R), và suy ra là hội tụ đều trên lân cận (đủ nhỏ) của mỗi điểm cho trước. Từ định lý về đạo hàm của chuỗi các hàm khả vi hội tụ đều ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là hàm *khả vi* và đạo hàm của nó được tính theo công thức (*). Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ cũng là một chuỗi lũy thừa nên (theo lập luận trên) nó cũng là hàm khả vi trên vùng hội tụ của nó (tức là cũng trên khoảng (-R,R)). Tóm lại, *đạo hàm* của chuỗi lũy thừa *là một chuỗi lũy* thừa có chung vùng hội tụ với chuỗi ban đầu. Vì mọi *chuỗi lũy thừa* đều *khả vi* trong vùng hội tụ, cho nên suy ra chuỗi lũy thừa là *khả vi vô hạn lần* trên vùng hội tụ của nó. Phần 2 đã được chứng minh xong.

(iii) Chứng minh hoàn toàn tương tự nhưng sử dụng định lý về tích phân của chuỗi hàm hội tụ đều.

Định lý đã được chứng minh đầy đủ.

Hệ quả Gọi $f(x)$ là tổng của chuỗi lũy thừa. Ta có $f^{(k)}(0) = k!a_k$, và suy ra cách tính các *hệ số* của chuỗi thông qua *đạo hàm của tổng chuỗi* như sau

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Chứng minh Suy ra ngay từ phần (ii) của định lý trên.

3. Biểu diễn hàm số qua chuỗi lũy thừa - Chuỗi Taylor

Ta nói hàm số $f(x)$ được biểu diễn qua chuỗi lũy thừa trong lân cận của điểm x_0 nếu như nó bằng tổng của một chuỗi lũy thừa có tâm tại x_0 và có bán kính hội tụ khác 0.

Nhận xét Ta đã biết rằng chuỗi lũy thừa (có bán kính hội tụ khác 0) thì *khả vi vô hạn* tại vùng hội tụ của nó, cho nên một khi hàm $f(x)$ biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa thì nó cũng phải khả vi bậc vô hạn, và theo hệ quả trên thì hệ số của chuỗi biểu diễn sẽ được tính qua đạo hàm của hàm theo công thức sau

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

và suy ra chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm số trong lân cận một điểm chính là chuỗi Taylor của hàm tại điểm đó. Tuy nhiên, đây mới chỉ là *điều kiện cần* mà không phải là *điều kiện đủ* để một hàm biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa.

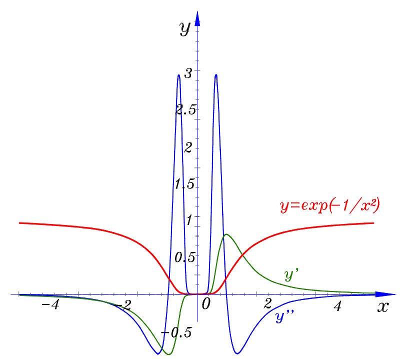
Thí dụ Hàm

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & khi \quad x \neq 0 \\ 0, & khi \quad x = 0 \end{cases}$$

là *khả vi vô hạn* tại lân cận gốc (dễ dàng kiểm tra) nhưng nó không thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa (với bán kính hội thụ khác 0). Thật vậy, nếu như nó biểu diễn được thì các hệ số của chuỗi phải thỏa mãn hệ thức

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, \quad \forall k = 1,2,3,...$$

và do đó chuỗi phải đồng nhất bằng 0. Điều này là mâu thuẫn vì $f(x)$ không đồng nhất bằng 0 trong bất kỳ lân cận đủ nhỏ nào.



Hình 11.3

Nhận xét Nếu nghiên cứu kỹ ta sẽ thấy hàm này có đặc tính là các đạo hàm bậc cao của nó, kể từ bậc 2 trở đi, có "độ dốc" rất lớn tại gần điểm gốc tọa độ (mặc dù bằng 0 tại chính điểm gốc). Đạo hàm bậc càng cao thì độ dốc càng lớn (xem hình vẽ minh họa bên cạnh, đồ thị của đạo hàm từ bậc 2 trở lên gần như cùng song song với trục tung). Có nghĩa "thủ phạm" ở đây chính là *đạo hàm cấp n* của hàm số (tại các điểm *x* khác 0) đã tăng quá nhanh theo *n* .

Cho nên để cho hàm có thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa (trong một lân cận nào đó) thì phải tránh tình trạng trên. Chính xác hơn ta có

Mệnh đề *Nếu tồn tại các số dương* a *và* δ *sao cho*

$$|f^{(n)}(x)| = 0(a^n.n!), \quad \forall x \in [-\delta, \delta]$$

thì chuỗi Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(o)}{n!} x^n$$

hội tụ tuyệt đối và đều (đến hàm f) trên mọi đoạn nằm trong khoảng $(-\alpha, \alpha)$ *, trong đó* $\alpha = \min(\delta, a^{-1})$.

Chứng minh Theo công thức khai triển Taylor với phần dư dạng Lagrange ta có

$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n , \qquad \theta \in (0,1).$$

Từ điều kiện của định lý và để ý rằng $0 < \theta < 1$, ta suy ra rằng

$$\left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \right| \quad = \quad 0(|ax|^n).$$

Với mỗi $x \in (-\alpha, \alpha)$, đại lượng $|ax|^n$ tiến đến 0, và vì vậy chuỗi lũy thừa là *hội tụ* tới $f(x)$. Tính hội tụ *đều* và *tuyệt đối* có được như các tính chất của một chuỗi lũy thừa. Mệnh đề đã được chứng minh xong.

Hệ quả *Nếu* $f^{(n)}(x)$ *bị chặn đều trên đoạn* $[-R,R]$ *(với mọi n) thì*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Chứng minh Khi ấy ta có

$$\left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \right| \le M \left| \frac{R^n}{n!} \right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

cho nên hệ quả là hiển nhiên.

Thí dụ Từ hệ quả trên ta dễ dàng suy ra các công thức sau đây

$$e^x := \exp(x) \; = \; 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \; ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad , \qquad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin(x) \quad = \quad \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \; ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \quad , \qquad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos(x) \quad = \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \; ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \quad , \qquad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ ...+\frac{x^n}{n}+... \quad , \qquad \forall x\in(-1,1)$$

Nhận xét Công thức biểu diễn hàm số exp(.) như trên cho ta thêm một phương pháp định nghĩa *hàm số mũ*. Phương pháp này có phần "cồng kềnh" hơn và đòi hỏi sử dụng các kiến thức cao hơn (so với kiến thức về giới hạn dãy số), nhưng bù lại nó cho một đánh giá tường minh về độ chính xác khi xấp xỉ nó bằng đa thức (Taylor).

11.2.4. Chuỗi lượng giác

Chuỗi lượng giác là chuỗi có các số hạng tổng quát là hàm lượng giác dạng

$$f_n(x) = a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

trong đó a_n và b_n là các hệ số không phụ thuộc vào *x*.

Như vậy, dạng tổng quát của chuỗi lượng giác là

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]\,.$$

1. Sự hội tụ của chuỗi lượng giác

Từ các dấu hiệu hội tụ của chuỗi (bất kỳ) ta suy ra các dấu hiệu hội tụ cho các chuỗi lượng giác như sau

(1) Nếu các chuỗi hệ số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ là hội tụ tuyệt đối thì chuỗi lượng giác là hội tụ tuyệt đối và đều (trên mọi đoạn bất kỳ). Điều này suy ra từ định lý Weierstrass với nhận xét rằng $|\sin(nx)|\le 1$ và $|\cos(nx)|\le 1$ với mọi *n, x*.

(2) Nếu các dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là đơn điệu giảm và tiến đến 0 thì chuỗi lượng giác là hội tụ tại mọi điểm $x\neq 2k\pi$. (Như đã chỉ ra trong phần dấu hiệu hội tụ Abel và Dirichlet).

Giả sử chuỗi lượng giác là *hội tụ đều* trên đoạn $[0,2\pi]$. Khi ấy tổng của nó

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$$

là một hàm liên tục trên đoạn $[0,2\pi]$, và với mọi số nguyên *p* thì chuỗi

$$f(x)\cos(px) = \frac{a_0}{2}\cos(px)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)\cos(px)+b_n\sin(nx)\cos(px)]$$

cũng là hội tụ đều. Từ công thức tích phân tổng của chuỗi hội tụ đều và lưu ý tính *vuông góc từng đôi một* của hệ các hàm lượng giác {sin(*x*), cos(*x*), sin(2*x*), cos(2*x*), ..., sin(*nx*), cos(*nx*),... }, nghĩa là

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(px)dx = 0 \quad \text{với mọi} \quad n,p$$

và

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(px)dx = \begin{cases} 0 & khi \quad p \neq n \\ \pi & khi \quad p = n \end{cases},$$

ta suy ra

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 1,2,3,...$$

Tương tự như vậy ta có

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1,2,3,...$$

2. Chuỗi Fourier

Giả sử f là một hàm số khả tích trên đoạn $[0,2\pi]$ và tuần hoàn với chu kỳ bằng đoạn này. Khi ấy có thể tính được các dãy số sau đây

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 0,1,2,3,... \ .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1,2,3,...$$

và thiết lập chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Chuỗi này có tên gọi là chuỗi Fourier của hàm f và các số a_n, b_n được gọi là các hệ số Fourier. Tổng riêng của chuỗi này là

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Ta sẽ nghiên cứu xem với hàm f như thế nào thì chuỗi Fourier của nó hội tụ, và khi nào chuỗi hội tụ đến chính hàm *f*. Để làm điều này ta cần bổ đề sau.

Bổ đề *Giả sử f là một hàm số khả tích và tuần hoàn với chu kỳ 2π. Nếu ký hiệu $S_n(x)$ là tổng riêng của chuỗi Fourier của hàm f, thì*

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+2t) - f(x)]\frac{\sin[(2n+1)t]}{2\sin(t)}dt \ .$$

<u>Chứng minh</u> Lưu ý rằng

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)\cos(kt)\cos(kx) + f(t)\sin(kt)\sin(kx)]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(x-t)dt ,$$

và $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$, ta suy ra

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)[\frac{1}{2} + \cos(x-t) + ... + \cos n(x-t)]dt$$

Chú ý rằng $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}$, ta có

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin[(n+1/2)(x-t)]}{2\sin(\frac{x-t}{2})}dt .$$

Đặt $u = (t-x)/2$ ta viết lại công thức trên như sau

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+2t)\frac{\sin[(2n+1)u]}{2\sin(u)}du . \qquad (*)$$

Trong trường hợp đặc biệt với $f(x) \equiv 1$ ta dễ dàng thấy rằng $S_n(x) \equiv 1$ và từ đẳng thức trên ta có hằng đẳng thức sau

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin[(2n+1)u]}{2\sin(u)}du$$

cho nên, với mọi hàm $f(x)$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin[(2n+1)u]}{2\sin(u)}du . \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra điều cần chứng minh.

Bổ đề *Hệ số Fourier của một hàm khả tích thì tiến tới* 0 *khi* n *tiến ra vô cùng.*

Chứng minh Dễ thấy rằng bổ đề là đúng với hàm *bậc thang* 1 khúc có dạng

$$f(x) = \begin{cases} l & khi \quad x \in [\alpha,\beta] \subset [0,2\pi] \\ 0 & khi \quad x \in [0,2\pi] \setminus (\alpha,\beta) \end{cases}$$

vì khi ấy hệ số Fourier của nó có dạng $a_n = l[\sin(n\alpha) - \sin(n\beta)]/n$ (và tương tự đối với b_n).

Từ đây suy ra bổ đề cũng đúng với các hàm bậc thang tổng quát (tuần hoàn với chu kỳ 2π), vì nó là tổng của hữu hạn hàm bậc thang 1 khúc.

Lưu ý rằng khi f là hàm khả tích (bất kỳ) thì với mỗi số dương ε ta luôn tìm được hàm bậc thang g sao cho $|f(t)-g(t)| < \varepsilon$ với mọi x trong đoạn $[0,2\pi]$. Cho nên với hệ số Fourier a_n của hàm f ta có đánh giá sau

$$|a_n| \le \int_0^{2\pi}|f(t)-g(t)|dt + |\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)dt| \le 2\pi\varepsilon + |\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)dt| .$$

Sau khi qua giới hạn (với n tiến ra vô cùng) ta suy ra $0 \le \limsup_{n\to\infty} |a_n| \le 2\pi\varepsilon$.

Vì điều này thỏa mãn với mọi số dương ε (nhỏ bao nhiêu tùy ý) cho nên ta suy ra $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$, và điều này cũng có nghĩa là $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Một cách tương tự ta cũng có $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, và bổ đề đã được chứng minh đầy đủ.

Mệnh đề *Nếu có số l sao cho hàm số $\varphi(t) = \dfrac{f(x+2t)+f(x-2t)-2l}{\sin(t)}$ là <u>khả tích</u> thì chuỗi Fourier của hàm f <u>hội tụ tại điểm</u> x tới số l.*

<u>Chứng minh</u> Nhận xét rằng tích phân trên đoạn $[0, 2\pi]$ của hàm f (khả tích và tuần hoàn với chu kỳ 2π) cũng bằng tích phân của nó trên bất cứ đoạn nào có độ dài bằng 2π. Cho nên ta có

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t)\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin(t)}dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x+2t)\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin(t)}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} f(x+2t)\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin(t)}dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} [f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin(t)}dt \quad .
\end{aligned}
$$

Từ đây suy ra

$$
\begin{aligned}
S_n(x) - l &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} [f(x+2t)+f(x-2t)-2l]\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin(t)}dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \varphi(t)\sin[(2n+1)t]dt .
\end{aligned}
$$

Như vậy $S_n(x)$-l đúng bằng hệ số Fourier (thứ $2n+1$) của một *hàm khả tích* nhận giá trị $\varphi(t)$ trên đoạn $[0, \pi/2]$ và nhận giá trị 0 trên miền $[-\pi/2,0)$. Theo Bổ đề 2 ta có $S_n(x)$-l hội tụ đến 0. Nghĩa là $S_n(x)$ hội tụ đến l, và ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét Vì hàm số $1/\sin(t)$ là liên tục tại mọi điểm khác 0, cho nên hàm $\varphi(t)$ là khả tích trên mọi đoạn $[a,\pi]$ cũng như $[-\pi,-a]$, với $a > 0$. Có nghĩa là sự khả tích của hàm $\varphi(t)$ chỉ còn phụ thuộc vào tính chất của hàm f trong lân cận của điểm x mà thôi. Như một trường hợp riêng của mệnh đề trên ta có

Định lý *Nếu hàm f có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại điểm x thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại điểm x tới giá trị $f(x)$.*

<u>Chứng minh</u> Trong điều kiện của định lý, với $l=f(x)$, hàm

$$\varphi(t) = \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{\sin(t)}$$

có giới hạn khi t tiến đến 0 (bằng $f'(0-)+f'(0+)$). Vì vậy nếu ta cho nó nhận giá trị tại gốc bằng giới hạn này thì nó sẽ trở thành hàm liên tục tại gốc, và do đó nó là khả tích. Từ mệnh đề trên ta có điều cần chứng minh.

Thí dụ Với hàm $f(x) = x$ trên khoảng $(-\pi,\pi)$ và bằng 0 tại các điểm đầu mút (π và $-\pi$), ta tính được chuỗi Fourier của nó là

$$2\left(\sin(x)-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}+\ldots\right).$$

Dễ dàng kiểm tra rằng các điều kiện của định lý trên nghiệm đúng, cho nên

$$x=2\left(\sin(x)-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}+\ldots\right).$$

Trong trường hợp riêng, khi $x=\pi/2$ ta có

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 11

1. Bài tập củng cố lý thuyết

Bài 1 Chứng tỏ tổng

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

của chuỗi các hàm liên tục $f_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ là một hàm gián đoạn tại $x = 0$.

Bài 2 Cho

$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}.$$

Chứng tỏ hàm giới hạn $f(x):=\lim_{m\to\infty} f_m(x)$ là hàm Dirichlet (tức là $f(x)=0$ khi x vô tỷ và $f(x)=1$ khi x hữu tỷ). Từ đó suy ra, $f(x)$ là một hàm không liên tục tại mọi điểm và không khả tích Rieman.

Bài 3 Cho

$$f_m(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

Chứng tỏ hàm giới hạn là $f(x):=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ với mọi x.

Suy ra dãy đạo hàm $\{f_n'(x)\}=\{\sqrt{n}\cos nx\}$ không hội tụ tới đạo hàm của giới hạn $f'(x)$.

Bài 4 Cho

$$f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n,\quad 0\le x\le 1, n=1,2,...$$

Chứng tỏ hàm giới hạn là $f(x):=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$, với mọi x, và

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Bài 5 Cho dãy hàm bị chặn đều

$$f_n(x)=\sin nx\quad (0\le x\le 2\pi,\ n=1,2,3,...).$$

Chứng minh rằng không tồn tại dãy con nào của dãy trên hội tụ.

Bài 6 Cho hàm

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

và $\phi(x+2) = \phi(x)$ với $x \notin [0,2]$.

Xây dựng hàm $f(x)$ như sau: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$.

Chứng minh rằng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng không khả vi tại mọi điểm.

2. Tính tổng của chuỗi hội tụ

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x) x^n$;

3. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

Bài 1 Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n x}{n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$

Bài 2 Tìm những giá trị của *x* để chuỗi hàm sau hội tụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right).$$

Bài 3 Chứng minh rằng chuỗi hàm sau phân kỳ với mọi *x*:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \cos[n(x + \ln(\ln(n)))].$$

Bài 4 Ký hiệu *M* là tập tất cả các điểm $x \in M$ mà dãy $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi x)$ hội tụ. Chứng minh rằng

a) *M* trù mật hầu khắp nơi, tức là mọi khoảng đều cắt *M*.

b) $e \in M$.

c) *M* không chứa một khoảng nào.

4. Chuỗi hội tụ đều

Bài 1 Chứng minh rằng để dãy hàm $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều trên tập X tới hàm $f(x)$, điều kiện cần và đủ là $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X} r_n(x)=0$, trong đó $r_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$.

Bài 2 Xét sự hội tụ đều của các dãy trên các khoảng tương ứng

1) $f_n(x)=x^n$, $\quad a)\ 0\le x\le \frac{1}{2}$; $\quad b)\ 0\le x\le 1$;

2) $f_n(x)=x^n-x^{n-1},\quad 0\le x\le 1$; 3) $f_n(x)=x^n-x^{2n},\quad 0\le x\le 1$;

4) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x},\quad 0\le x\le 1$; 5) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}},\quad -\infty<x<\infty$;

6) $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right),\quad 0<x<\infty$; 7) $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n},\quad -\infty<x<\infty$;

8) $f_n(x)=\sin\left(\dfrac{x}{n}\right),\quad -\infty<x<\infty$; 9) $f_n(x)=\arctan(nx),\quad 0<x<\infty$;

10) $f_n(x)=x\arctan(nx),\quad 0<x<\infty$;

Bài 3 Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ có hội tụ đều trên $(-\infty,+\infty)$ hay không ?

Bài 4 Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x\dfrac{(1-x^2)^n}{n}$ có hội tụ đều trên $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ hay không ?

Bài 5 Chứng tỏ dãy hàm

$$f_n(x)=\frac{1}{nx+1}\quad ,\qquad 0<x<1, n=1,2,3,\dots,$$

hội tụ tới $f(x)=0$ trên $(0,1)$, nhưng không hội tụ đều.

Bài 6 Cho dãy hàm

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}\quad ,\quad 0\le x\le 1, n=1,2,3,\dots\quad .$$

Chứng minh rằng $\{f_n(x)\}$ bị chặn đều trên [0,1] và

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\quad ,\ 0\le x\le 1,$$

nhưng không có một dãy con nào hội tụ đều trên [0,1].

Bài 7 Cho dãy hàm $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, n=1,2,3,..., x là số thực. Chứng minh rằng $\{f_n(x)\}$hội tụ đều tới hàm f và ta có

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

đúng với mọi x khác 0, nhưng không đúng khi $x = 0$.

5. Chuỗi lũy thừa

Bài 1 Phân tích

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$$

dưới dạng chuỗi lũy thừa.

Bài 2 Xác định bán kính, khoảng hội tụ và nghiên cứu dáng điệu tại các điểm biên của khoảng hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$.

6. Chuỗi Fourier

Bài 1 Phân tích hàm

$$y = \sin\left[\arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]$$

dưới dạng chuỗi Fourier.

7. Thực hành tính toán

7.1. Thực hành tính giới hạn của dãy hàm hoặc tổng của chuỗi hàm

Đối với một dãy hàm hoặc chuỗi hàm hội tụ, ta có thể dùng MAPLE để tính hàm giới hạn hoặc tổng của chuỗi hàm. Các thao tác giống hệt như tính giới hạn của dãy hoặc tổng của chuỗi số (xem thực hành tính toán chương 2). Kết quả là một hàm số (nói chung phụ thuộc vào biến số x).

Bài 1 Tính tổng $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

```
[> 1+sum(x^n/n!,n=1..infinity);
```

$$1 + \exp(x)\,(1 - \exp(-x))$$

```
[> simplify(");
```

$$\exp(x)\ .$$

Bài 2 Tính giới hạn $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n$.

```
[> limit((1+x/n)^n,n=infinity);
```

$$\exp(x).$$

Bài 3 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{(1+n^2x^2)}$.

```
[> limit(x*n/(1+n^2*x^2),n=infinity);
```

$$0\ .$$

Bài 4 Tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^n}$.

```
[> sum((-1)^(n-1)/(1+x^2)^n,n=1..infinity);
```

$$\frac{1}{x^2+2}\ .$$

Bài 5 Tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

```
[> sum(x^2/(1+x^2)^n,n=1..infinity);
```

$$1\ .$$

Nhận xét Tổng trên bằng 0 khi $x = 0$ và bằng 1với mọi x khác 0.

7.2. Nghiên cứu các tính chất của dãy hàm hoặc tổng của chuỗi hàm

Nhờ MAPLE, ta có thể kiểm tra tính đúng đắn của các phép toán: lấy giới hạn, lấy đạo hàm, lấy tích phân... thực hiện trên chuỗi.

Bài 1 Nghiên cứu dãy $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Tìm hàm giới hạn:

```
[> limit(sin(n*x)/sqrt(n),n=infinity);
```

$$0$$

Như vậy hàm giới hạn bằng $f(x)=0$ với mọi x.

Lấy đạo hàm của hàm giới hạn:

```
[>diff(limit(sin(n*x)/sqrt(n),n=infinity),x);
```

$$0\ .$$

Lấy đạo hàm của $f_n(x)$:

```
[> diff(sin(n*x)/sqrt(n),x);
```

$$\cos(nx)\sqrt{n}\ .$$

Tính đạo hàm của tại $x = 0$:

```
[> subs(x=0,cos(n*x)*n^(1/2));
```

$$\cos(0)\sqrt{n}\ .$$

Đơn giản:

```
[> simplify(");
```

$$\sqrt{n} \quad .$$

Như vậy, ta đi đến kết luận: Đạo hàm của giới hạn không bằng giới hạn của đạo hàm (tại điểm $x = 0$).

Chú ý Nếu tính giới hạn của đạo hàm của hàm tại điểm bất kỳ của hàm $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ thì máy trả lời ***không xác định***:

```
[>limit(diff(sin(n*x)/sqrt(n),x),n=infinity);
```

$$\text{undefined} \quad .$$

Bài 2 Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{(1-x^{2n})}$.

```
[> limit((1-x)*sum((-1)^(n-1)*x^n/(1-x^(2*n)),
        n=1..infinity),x=1,left);
```

$$1/2 \ln(2) \quad .$$

7.3. Nghiên cứu sự hội tụ của dãy hàm và chuỗi hàm

Giả sử dãy hàm $\{f_n(x)\}$hội tụ (có thể không đều) tới hàm $f(x)$. Hàm $f(x)$ nói chung không mô tả được dưới dạng biểu thức giải tích thông qua các hàm đã biết, vì vậy ta khó có thể hình dung ra dáng điệu cũng như các tính chất của nó. Tuy nhiên, ta có thể coi công thức $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ như là *định nghĩa* của hàm $f(x)$, và như vậy ta có một *phương pháp mới* để biểu diễn hàm số thông qua khái niệm *giới hạn*, và lớp hàm này thực sự rộng hơn hẳn lớp các hàm thông thường (cho bằng các biểu thức giải tích). MAPLE là một công cụ đắc lực giúp ta nghiên cứu các hàm loại này. Thí dụ, nhờ MAPLE, ta có thể trả lời các câu hỏi: Hàm $f(x)$ có xác định tại một điểm nào đó hay không (dãy $\{f_n(x)\}$có hội tụ tại điểm đó hay không); Tính giá trị của hàm $f(x)$ tại các điểm cụ thể; Vẽ đồ thị của $f(x)$ trên một đoạn bất kỳ,.... Chính chúng ta đã dùng phương pháp này để xây dựng *hàm số mũ* $\exp(x)$ trong Chương 4, nó chính là *giới hạn* của *dãy hàm đa thức* khá đơn giản là $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Với MAPLE, chúng ta có khả năng nghiên cứu những hàm phức tạp hơn rất nhiều.

Bài 1 Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

Bước 1: Khai báo (định nghĩa hàm $f(x)$):

```
[> f:=x->sum(x^n/n,n=1..infinity);
```

$$f := x \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad .$$

Bước 2: Tính giá trị của hàm số tại một số điểm (xét sự hội tụ điểm của chuỗi khi x nhận các giá trị cụ thể). Thí dụ

```
[> f(0.1);
```

$$.1053605157 \quad .$$

[> **f(0.5);**

$$.6931471806 \quad .$$

[> **f(1);**

$$\infty \text{ (vô cùng)} \quad .$$

Chứng tỏ, hàm số cho bởi công thức trên không xác định (bằng vô cùng tại $x = 1$ (tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ bằng vô cùng).

[> **f(-1);**

$$-\ln(2) \quad .$$

Để kiểm tra, ta có thể tính lại tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$:

[> **sum((-1)^n/n,n=1..infinity);**

$$-\ln(2)$$

Chú ý Nếu tính giới hạn của tổng riêng của dãy này thì máy trả lời tổng *không xác định* :

[> **limit(sum((-1)^n/n,n=1..k),k=infinity);**

$$\text{undefined} \quad .$$

Bài 2 Nghiên cứu hàm $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

<u>Bước 1:</u> Khai báo (định nghĩa hàm $f(x)$):

[> **f(x):=x->1+sum(x^n/n!,n=1..infinity);**

$$f(x) := x \to 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad .$$

<u>Bước 2:</u> Tính giá trị của hàm số tại một số điểm (xét sự hội tụ điểm của chuỗi khi x nhận các giá trị cụ thể).

[> **f(0.1);**

$$1.105170918 \quad .$$

[> **f(0.2);**

$$1.221402758 \quad .$$

[> **f(0.999999);**

$$2.718279110 \quad .$$

[> **f(1);**

$$\exp(1) \quad .$$

Để kiểm tra, ta tính

[> **Sum(1^n/n!,n=0..infinity);**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad .$$

[> **value(");**

$$\exp(1) \quad .$$

```
[> evalf(");
```

$$2.718281828\ .$$

Tính tổng $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

```
[> 1+sum(x^n/n!,n=1..infinity);
```

$$1 + \exp(x)\,(1 - \exp(-x))\ .$$

```
[> simplify(");
```

$$\exp(x)\ .$$

Bài 3 Nghiên cứu hàm $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$.

<u>**Bước 1:**</u> Khai báo (định nghĩa hàm $f(x)$):

```
[> f:=x->sum(sin(k*x)/k,k=1..infinity);
```

$$f := x \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}\ .$$

<u>**Bước 2:**</u> Tính giá trị của hàm số tại một số điểm (xét sự hội tụ điểm của chuỗi khi x nhận các giá trị cụ thể).

```
[> f(0.2*Pi);
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin .6283185308k}{k}\ .$$

```
[> evalf(");
```

$$1.527278662\ .$$

```
[> f(Pi);
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kPi}{k}\ .$$

```
[> evalf(");
```

$$0\ .$$

```
[> f(0.1*Pi);
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin .3141592654k}{k}\ .$$

```
[> evalf(");
```

$$1.692237735\ .$$

```
[> f(Pi/2);
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 1/2kPi}{k}\ .$$

```
[> evalf(");
```

$$.7853981634\ .$$

Việc tính chuỗi (vô hạn) thường mất nhiều thời gian hơn là tính tổng (hữu hạn). Cho nên, khi chỉ cần tính *gần đúng* thì nên tính tổng riêng với số số hạng đủ lớn.

Thí dụ, ta có thể tính giá trị gần đúng của tổng vô hạn tại các điểm cụ thể bằng cách tính tổng đến số hạng thứ 100 như sau:

[> **f:=x->sum(sin(k*x)/k,k=1..100);**

$$f := x \to \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin kx}{k}$$

[> **evalf(f(1));**

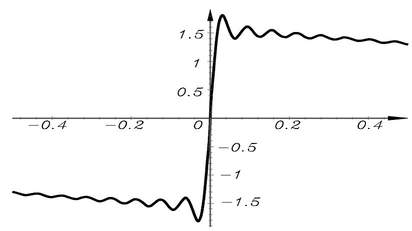
1.060428939

[> **evalf(f(Pi/5));**

1.241256676

[> **evalf(f(Pi/2));**

.7803986631



Hình 11.4

Ta có thể vẽ đồ thị của hàm tổng $f(x)$ bằng lệnh

[> **plot(f(x),x=-0.5..0.5);**

Muốn chính xác hơn, ta tính tổng đến số hạng thứ 1000:

[> **f:=x->sum(sin(k*x)/k,k=1..1000);**

$$f := x \to \sum_{k=1}^{1000} \frac{\sin kx}{k}$$

[> **evalf(f(1));**

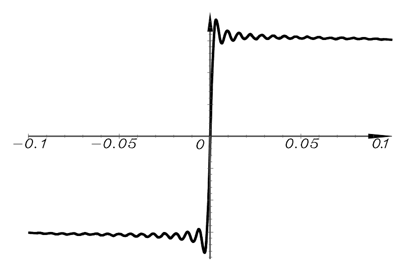
1.070694159

[> **evalf(f(Pi/5));**

1.255098227

[> **evalf(f(Pi/2));**

.7848981639



Hình 11.5

Ta có thể vẽ đồ thị của hàm tổng $f(x)$ bằng lệnh

[> **plot(f(x),x=-0.2..0.2);**

So sánh các kết quả tính toán và đồ thị, ta có thể kết luận về độ chính xác trong tính toán.

Trong các bài trên, mặc dù ta không có công thức tường minh của hàm số, nhưng ta vẫn có thể nghiên cứu nó tương đối tỉ mỉ: tính giá trị gần đúng của hàm số tại các điểm cụ thể, vẽ đồ thị hàm số (là tổng của một chuỗi hàm). Như vậy, MAPLE mở ra một khả năng mới nghiên cứu hàm số một cách trực tiếp mà không cần (và không có) công thức biểu diễn.

Bài 4 Nghiên cứu hàm $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$.

[> **f:=x->sum(sin(k*x)/k^2,k=1..infinity);**

$$f := x \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

[> **f(1);**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2} \quad .$$

[> **Sum(sin(k)/k^2,k=1..10);**

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(k)}{k^2} \quad .$$

[> **evalf(");**

$$1.019570958 \quad .$$

[> **Sum(sin(k)/k^2,k=1..100);**

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(k)}{k^2} \quad .$$

[> **evalf(");**

$$1.013856043$$

[> **Sum(sin(k)/k^2,k=1..1000);**

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{\sin(k)}{k^2} \quad .$$

[> **evalf(");**

$$1.013959029 \quad .$$

CHƯƠNG 12

Phương trình vi phân

12.1. Một vài bài toán

12.1.1. Bài toán tăng trưởng hoặc suy thoái

Có nhiều đại lượng trong thực tế như số lượng dân số hoặc động vật, nhiệt độ của vật thể nóng, lượng hóa chất tan,... thay đổi theo tốc độ tỷ lệ với đại lượng tức thời. Ta có thể biểu diễn sự thay đổi này bởi phương trình:

$$f'(t) = k f(t)\,, \tag{1}$$

trong đó $f(t)$ là đại lượng tại thời điểm t, k là hằng số tỷ lệ, còn $f'(t)$ là đạo hàm của f biểu diễn tốc độ thay đổi. Phương trình (1) là phương trình vi phân vì trong phương trình này có tham gia đạo hàm của hàm f theo t. Người ta nói đây là phương trình vi phân bậc 1 vì chỉ có đạo hàm bậc một trong đó. Nếu có sự tham gia của đạo hàm bậc k thì phương trình được gọi là phương trình vi phân bậc k. Nếu có nhiều phương trình vi phân thì ta có hệ phương trình vi phân.

Nghiệm của phương trình (1) là một hàm số $g(t)$ mà khi thay g vào f trong (1) ta có đẳng thức đúng với mọi t. Muốn tìm ra f ta viết phương trình trên dưới dạng:

$$\frac{df}{dt} = kf\,.$$

Hiển nhiên $f(t) = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho, nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường .

Ta giả thiết $f \neq 0$ và biến đổi $\dfrac{df}{f} = kdt$. Lấy tích phân hai vế ta có:

$$\int \frac{df}{f} = \int kdt$$

hay

$$\ln|f(t)| = kt + c\,.$$

Do đó:

$$f(t) = \alpha e^{kt}\,,$$

trong đó α là hằng số lấy giá trị bất kỳ. Cho trước đại lượng $f(0)$ tại thời điểm $t = 0$ ta xác định được hằng số $\alpha = f(0)$, vậy:

$$f(t) = f(0)e^{kt}\,.$$

Để xem đây có phải là nghiệm phương trình (1) hay không chỉ cần lấy đạo hàm rồi thế vào (1). Ta chứng minh rằng đây là nghiệm duy nhất. Thật vậy, giả sử $g(t)$ là một nghiệm của (1) với $g(0) = f(0)$.

Xét hàm $h(t) = e^{-kt} g(t)$. Ta có

$$h'(t) = -ke^{-kt} g(t) + e^{-kt} g'(t) \;\; = -ke^{-kt} g(t) + e^{-kt} g(t) = 0 .$$

Chứng tỏ h là một hằng số. Thực ra $h(0) = g(0) = f(0)$.

Vậy $g(t) = f(0)e^{kt} = f(t)$.

Với $f(0) > 0$ cho trước, nếu $k > 0$ ta có sự tăng trưởng và nếu $k < 0$ ta có sự suy thoái (đại lượng $f(t)$ giảm theo thời gian).

12.1.2. Vận tốc ban đầu của vệ tinh

Chúng ta cần xác định vận tốc ban đầu của vệ tinh sao cho vệ tinh này có thể vượt ra khỏi quỹ đạo trái đất. Gọi m là khối lượng vệ tinh và M là khối lượng trái đất, $x(t)$ là khoảng cách vệ tinh tới tâm trái đất tại thời điểm t. Khi đó theo định luật Newton ta có phương trình:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{m.M}{x^2}, \tag{2}$$

trong đó k là hằng số hấp dẫn. Vế trái là lực chuyển động của vệ tinh, vế phải là lực hút của trái đất ngược với hướng chuyển động. Đây là phương trình vi phân bậc hai vì có đạo hàm bậc hai của x tham gia.

Phương trình (2) có thể viết đơn giản:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{a}{x^2}, \tag{3}$$

trong đó $a = kM$. Để xác định a ta dùng công thức $mg = F = k\frac{M.m}{R^2}$, trong đó $g = \frac{9{,}81}{10^3} km/\sec^2$ là gia tốc rơi tự do, $R = 6400km$ là bán kính trái đất. Dễ nhận thấy $a = g.R = 9{,}81.8^4.10km^3/\sec^2$. Trở lại phương trình (3), dùng ký hiệu $v = \frac{dx}{dt}$ là vận tốc chuyển động của vệ tinh và sử dụng công thức biến đổi $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$,

ta thu được phương trình vi phân bậc nhất:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{a}{x^2}$$

hay

$$vdv = -\frac{a}{x^2}dx .$$

Lấy tích phân hai vế ta được: $\frac{v^2}{2} = \frac{a}{x} + c$.

Khi $x = R$, vận tốc $v = v_0$ là vận tốc ban đầu của vệ tinh nên ta xác định $c = \frac{v_0^2}{2} - \frac{a}{6400}$.

Suy ra

$$x = \frac{a}{\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} + \frac{a}{6400}}.$$

Khoảng cách x đạt cực đại khi $v = 0$ và khi đó: $x = \frac{a}{\frac{a}{6400} - \frac{v_0^2}{2}}$.

Muốn cho x tiến tới giá trị ∞ thì mẫu số của biểu thức trên phải bằng 0 và ta có

$$v_0 = \sqrt{\frac{2a}{6400}} \approx \sqrt{\frac{2.9,8.8^4.10}{6400}} \approx 11,2km/\sec$$

Đây là tốc độ ban đầu mà vệ tinh phải có để rời khỏi trái đất vào vũ trụ với khoảng cách dần tới vô cùng.

Qua hai bài toán trên chúng ta có thể hình dung được tầm quan trọng của phương trình vi phân. Nói chung không có một phương pháp vạn năng nào để giải các phương trình vi phân, và không phải phương trình vi phân nào cũng giải được. Mỗi lớp phương trình có một phương pháp giải đặc thù. Trong giáo trình này, nhằm mục đích giúp người đọc làm quen với khái niệm phương trình vi phân và sử dụng nó trong một số môn học khác (vật lý, cơ học, môi trường, sinh thái,...), về mặt lý thuyết chúng tôi chỉ giới thiệu một số dạng phương trình vi phân tương đối đơn giản, mà tập trung nhiều hơn vào việc thực hành tính toán giải phương trình vi phân trên máy tính (trong phần bài tập và tính toán thực hành). Bạn đọc muốn tìm hiểu kỹ hơn về chuyên ngành này xin xem giáo trình Phương trình vi phân.

12.2. Phương trình vi phân có biến tách

12.2.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân có biến tách là phương trình dạng:

$$y' = g(x)h(y) \tag{1}$$

Dạng tương đương là:

$$a(x)dx + b(y)dy = 0. \tag{2}$$

Thí dụ (a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$ là phương trình có biến tách. Rõ ràng $y = 0$ là nghiệm tầm thường của phương trình. Ta giả thiết $y(x) \neq 0$. Khi đó phương trình trên được viết:

$$\frac{dy}{y^2} = xdx.$$

(b) $y.y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1+y^2}}$ cũng là một phương trình có biến tách, có thể viết dưới dạng:

$$y\sqrt{1+y^2}\,dy = \cos x dx\,.$$

12.2.2. Phương pháp giải

Giả sử ta có phương trình vi phân có biến tách ở dạng (2). Khi ấy lấy tích phân ta được

$$\int b(y)dy = -\int a(x)dx + c\,,$$

trong đó hằng số c được xác định bởi giá trị của $y(x_0) = y_0$ tại một điểm x_0 cho trước, $y(x_0) = y_0$ được gọi là điều kiện khởi đầu.

Thí dụ 1) Giải phương trình vi phân:

$$(1-y)y' = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1, \quad y(0) = 1\,.$$

Để giải phương trình trên ta thực hiện những bước sau:

- Biến đổi vế phải $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = (x^2-1)(y^2-1)$ và đưa phương trình về dạng biến tách:
$$\frac{dy}{y+1} = -(x^2-1)dx\,.$$
- Lấy tích phân hai vế ta có $\ln|y+1| = -\frac{x^3}{3} + x + c$, hay
$$y = \alpha e^{-\frac{x^3}{3}+x} - 1$$
- Xác định hằng số α qua điều kiện khởi đầu: $1 = y(0) = \alpha - 1$. Vậy $\alpha = 2$.
- Kiểm tra lại nghiệm $y = 2e^{-\frac{x^3}{3}+1} - 1$ của phương trình ban đầu và kết luận đó chính là nghiệm cần tìm.

Thí dụ 2) Một chất phóng xạ phân rã với với tốc độ tỷ lệ thuận với khối lượng của nó. Hãy tính chu kỳ nửa phân rã, tức là thời gian để chất phóng xạ còn một nửa.

Để giải phương trình trên ta thực hiện những bước sau:

- Lập phương trình của bài toán phân rã (như bài toán tăng trưởng). Gọi $f(t)$ là lượng phóng xạ ở thời điểm t. Khi đó
$$f'(t) = -kf(t)\,,$$
trong đó $k > 0$ là hằng số tỷ lệ (tùy thuộc vào chất phóng xạ; đối với radium k=0,000428/ năm).
- Chuyển phương trình về dạng biến tách: $\frac{df}{f} = -kdt$.
- Tích phân hai vế ta có $\ln|f| = -kt + c$, hay
$$f(t) = \alpha\, e^{-kt}\,.$$
- Hằng số α được xác định bởi $f(0)$ lượng chất phóng xạ ở thời điểm t = 0: $\alpha = f(0)$.

- Kiểm tra lại ta thấy $f(t) = f(0)e^{-kt}$ là nghiệm phương trình ban đầu.
- Tại $t = \tau_{1/2}$ chu kỳ nửa phân rã, $f(\tau_{1/2}) = \frac{1}{2} f(0)$.

Do đó $\tau_{1/2} = \frac{1}{k} \ln(2)$.

12.3. Phương trình tuyến tính cấp một

12.3.1. Phương trình thuần nhất

Phương trình tuyến tính cấp một thuần nhất là phương trình dạng

$$y' + p(x)y = 0. \tag{1}$$

Đây là một phương trình có biến tách với $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Do đó nghiệm sẽ là $y = ce^{-\int P(x)dx}$.

Ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm, nó ứng với $c = 0$.

Thí dụ Giải $y' + y\cos(x) = 0, \quad y(0) = 1$.

Theo phương pháp trên:

$$y = ce^{-\int p(x)dx} = ce^{-\sin(x)}$$

Hằng số c được xác định bởi điều kiện $y(0) = 1$, tức là $c = 1$. Ta có $y = e^{-\sin(x)}$ và khi thử vào phương trình thì đó đúng là nghiệm cần tìm.

12.3.2. Phương trình không thuần nhất

Phương trình tuyến tính cấp 1 (không thuần nhất) là phương trình dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2}$$

trong đó $q(x) \neq 0$.

Phương pháp giải:

- Trước hết giải phương trình thuần nhất ta thu được nghiệm
  $$y = We^{-\int p(x)dx},$$
  trong đó W là hằng số bất kỳ.
- Tìm nghiệm của (2) dưới dạng $y = W(x)e^{-\int p(x)dx}$ có nghĩa là xem W như một hàm cần tìm để y thỏa mãn (2).

  Ta có $\frac{dy}{dx} = \frac{dW}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)We^{-\int p(x)dx}$.

Thay thế vào (2) ta thu được phương trình mà W phải thỏa mãn

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{dW}{dx}=q(x)\,. \tag{3}$$

- Giải phương trình có biến tách (3) ta thu được

$$W=\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx+c$$

với c là hằng số bất kỳ.

- Thay $y=\{(\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx+c\}e^{-\int p(x)dx}$ vào phương trình (2) ta kết luận đây là nghiệm cần tìm.
- Nếu cho trước điều kiện khởi đầu thì hằng số c sẽ được xác định cụ thể.

Thí dụ 1) Giải phương trình $y'+y\sin(x)=\sin(x)$, $\quad y(\frac{\pi}{2})=2$.

Trước hết giải phương thuần nhất $y'+y\sin(x)=0$ ta thu được $y=We^{\cos(x)}$.

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng $y=W(x)e^{-\int p(x)dx}$ ta thu được phương trình đối với hàm W:

$$e^{\cos(x)}\frac{dW}{dx}=\sin(x)\,.$$

Giải phương trình này ta có $W=\int\sin(x)e^{-\cos(x)}dx+c \;=e^{-\cos(x)}+c$.

Suy ra $y=1+ce^{\cos(x)}$. Thay y' và y vào phương trình ban đầu:

$$[1+ce^{\cos(x)}]'+[1+ce^{\cos(x)}]\sin(x)=-c\sin(x)e^{\cos(x)}+\sin(x)+c\sin(x)e^{\cos(x)}=\sin(x)$$

Vậy $y=1+ce^{\cos(x)}$ là nghiệm của phương trình.

Để xác định c ta sử dụng điều kiện khởi đầu $y(\frac{\pi}{2})=1+c=2$, và suy ra c = 1.

Nghiệm cần tìm là $y=1+e^{\cos(x)}$.

Thí dụ 2) Hồ Hoàn Kiếm tại thời điểm $t=0$ chứa 2.10^8 lít nước sạch. Cứ một giây nước chảy vào hồ từ cống rãnh của cư dân xung quanh là 60 lít, trong đó có 10 lít chất ô nhiễm và lượng nước thoát khỏi hồ là 60 lít. Tìm lượng chất ô nhiễm có trong hồ theo thời gian. Tính giá trị giới hạn.

Để giải bài toán trên ta gọi $y(t)$ là lượng chất ô nhiễm tính theo đơn vị lít có trong hồ tại thời điểm t. Tỷ lệ chất ô nhiễm chứa trong 1 lít nước hồ sẽ là $y(t)/2.10^8$. Tốc độ thay đổi của y bằng lượng chất ô nhiễm chảy vào hồ (10 lít/giây) bớt đi lượng ô nhiễm chảy qua ống thoát($60.y(t)/2.10^8$ lit/ giây). Vậy ta có phương trình:

$$y'=-\frac{60}{2.10^8}y+10\,. \tag{4}$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một không thuần nhất. Nghiệm của phương trình thuần nhất $y'=-\frac{60}{2.10^8}y$ là

$$y = we^{-3.10^{-7}t}.$$

Tìm nghiệm của phương trình (4) dưới dạng $w(t)e^{-3.10^{-7}t}$ ta thu được phương trình đối với w là: $w'.e^{-3.10^{-7}t} = 10$.

Suy ra $w = \frac{1}{3}10^8.e^{3.10^{-7}t} + c$, do đó $y = (\frac{1}{3}10^8 e^{3.10^{-7}t} + c)e^{-3.10^{-7}t}$. Khi $t = 0, y = 0$, do đó c xác định được từ $0 = \frac{1}{3}10^8 + c$, tức là $c = -\frac{1}{3}10^8$. Vậy $y = \frac{1}{3}10^8(1 - e^{3.10^{-7}t})$.

Khi $t \to \infty$, ta có $y \to \frac{1}{3}\cdot 10^8$. Như vậy, khi t đủ lớn, lượng chất ô nhiễm sẽ chiếm $\frac{1}{6}$ lượng nước trong hồ.

12.4. Một số phương trình đặc biệt

Dưới đây chúng ta sẽ xem xét một số phương trình không tuyến tính dạng đặc biệt thường gặp mà có thể giải được bằng cách chuyển về phương trình tuyến tính.

12.4.1. Phương trình Bernoulli

Phương trình Bernoulli là phương trình dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{1}$$

trong đó a là hằng số, $p(x)$ và $q(x)$ là những hàm liên tục. Tuy phương trình này không tuyến tính nhưng bằng phép biến đổi đơn giản ta có thể quy về phương trình tuyến tính.

Phương pháp giải.

Có thể giả thiết $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$ vì nếu không (1) sẽ là phương trình tuyến tính như trình bày ở phần trước. Khi ấy ngoài nghiệm $y = 0$, để tìm nghiệm $y \neq 0$, ta chia hai vế (1) cho y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{y}{y^{\alpha}} = q(x). \tag{2}$$

Đặt $w = y^{1-\alpha}$, ta có $w' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$. Do đó (2) tương đương với phương trình tuyến tính

$$w' + (1-\alpha)p(x)w = (1-\alpha)q(x).$$

Giải phương trình này ta thu được nghiệm w và suy ra nghiệm của phương trình Bernoulli là

$$y' = w^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ và } y=0.$$

Thí dụ 1) Giải phương trình $y' + y = y^2 e^x$

Giải Đây là phương trình Bernoulli. Đặt $w = \frac{1}{y}$ ta có $w' = -\frac{y'}{y^2}$. Phương trình trên có dạng

$$w' - w = -e^x.$$

Phương trình tuyến tính cấp 1 này có nghiệm tổng quát $w = (c - x)e^x$ với c bất kỳ. Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là

$$y = \frac{1}{c - x} e^{-x} \text{ và } y = 0.$$

2) Bài toán tăng trưởng của một quần thể (trong một hệ sinh thái) phức tạp hơn so với bài toán ở mục 12.1.1 có dạng $f'(t) = \varepsilon f - kf^2$ trong đó ε và k là những hằng số dương (thành phần $-kf^2$ xuất hiện khi có quá nhiều dân số và tỷ lệ tử vong tăng). Cho trước $f(0) = y_0$. Hãy tìm dân số $f(t)$ tại thời điểm t bất kỳ và tìm giới hạn khi $t \to \infty$.

Giải Đây là bài toán Bernoulli. Đặt $w = \frac{1}{f}$ và thay vào phương trình trên ta có

$$w' + \varepsilon w - k = 0 \text{ với } w(0) = \frac{1}{y_0}.$$

Giải phương trình tuyến tính này sẽ thu được nghiệm

$$w = \left[1 + \frac{k}{\varepsilon} y_0 \left(e^{\varepsilon t} - 1\right)\right] / \left(y_0 e^{\varepsilon t}\right).$$

Như vậy $f(t) = \dfrac{y_0 e^{\varepsilon t}}{1 + \frac{k}{\varepsilon} y_0 (e^{\varepsilon t} - 1)}$. Khi $t \to \infty$, ta có $\lim\limits_{t \to \infty} = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

12.4.2. Phương trình Riccati

Phương trình Riccati là phương trình dạng

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 \tag{1}$$

trong đó $q_1(x)$, $q_2(x)$ và $q_3(x)$ là những hàm liên tục. Đây cũng là phương trình không tuyến tính nhưng có thể đưa về dạng tuyến tính nếu biết một nghiệm riêng.

Phương pháp giải.

Giả sử biết trước nghiệm riêng $y_1(x)$. Khi ấy đặt $y = y_1(x) + \frac{1}{w}$ và thay vào (1) ta thu được phương trình tuyến tính đối với hàm $w(x)$:

$$w' + \left(q_2(x) + 2q_3 y_1\right)w - q_3 = 0$$

Giải phương trình này ta thu được nghiệm tổng quát w_c và nghiệm tổng quát của (1) sẽ là $y_c = y_1 + w_c$.

Thí dụ Giải phương trình $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$.

Giải Ta dễ dàng thấy rằng phương trình có một nghiệm riêng $y_1(x) = x$.

Đặt $y = x + \frac{1}{w}$ ta có phương trình đối với w là

$$w' + (-2x + 2)w - 1 = 0.$$

Giải phương trình tuyến tính này ta thu được nghiệm $w = c - x$ với c là hằng số bất kỳ. Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là $y = x + \frac{1}{c - x}$, $c \in R$.

12.4.3. Phương trình Clairaut

Phương trình Clairaut là phương trình dạng

$$y = xy' + f(y'), \tag{1}$$

trong đó f là một hàm khả vi. Đây cũng là một phương trình không tuyến tính và có thể đưa về phương trình tuyến tính.

Phương pháp giải.

- Đặt $w = y'$ và lấy đạo hàm 2 vế theo x ta có

$$xw' + f'(w)w' = 0.$$

Từ đây ta thu được hai phương trình

$$w' = 0, \tag{2}$$

$$x + f'(w) = 0. \tag{3}$$

- Phương trình (2) cho nghiệm $w(x) = c$, do đó $y = cx + c_1$. Thay vào phương trình (1) ta sẽ xác định $c_1 = f(c)$. Như vậy $y = cx + f(c)$ là một nghiệm của (1).
- Phương trình (3) cho ta phương trình đối với w mà từ đó có thể tìm w theo x rồi tính $y = \int w dx + c_2$.

Thí dụ Giải phương trình $y = xy' + (y')^2$.

Giải Theo phương pháp trên, nghiệm thứ nhất của bài toán là $y = cx + c^2$ với c bất kỳ. Ngoài ra phương trình (3) cho ta nghiệm $y = -\frac{1}{4}x^2$. Thay hàm số này vào phương trình đầu ta thấy đây đúng là một nghiệm của nó.

12.5. Phương trình tuyến tính cấp hai

12.5.1. Phương trình thuần nhất

Phương trình tuyến tính cấp hai thuần nhất là phương trình có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét trường hợp đặc biệt là các hàm $p(x)$, $q(x)$ là các hằng số p và q.

Để giải phương trình trên người ta tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính tức là hai nghiệm bất kỳ $f(x)$ và $g(x)$ sao cho không có số $\alpha \neq 0$ để $f(x) = \alpha g(x)$. Nghiệm tổng quát của (1) sẽ có dạng $y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ với c_1, c_2 là hai số bất kỳ.

Mệnh đề *Nếu* $y = f(x)$ và $y = g(x)$ *là nghiệm của* (1) *thì với mọi* c_1, c_2 *hàm* $y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ *cũng là nghiệm của* (1).

<u>Chứng minh</u> Ta có

$$f''(x) + pf'(x) + qf(x) = 0 \text{ và } g''(x) + pg'(x) + qg(x) = 0 .$$

Do đó

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1 f(x) + c_2 g(x))'' + p(c_1 f(x) + c_2 g(x))' + q(c_1 f(x) + c_2 g(x)) \\ &= c_1 (f''(x) + pf'(x) + qf(x)) + c_2 (g''(x) + pg'(x) + qg(x)) = 0 , \end{aligned}$$

có nghĩa là y thỏa mãn (1).

Phương pháp giải.

- Lập phương trình đặc trưng dạng

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (2)$$

và giải để tìm nghiệm λ_1, λ_2. (Thật ra, phương trình đặc trưng này thu được bằng cách tìm nghiệm của (1) dưới dạng $y = e^{\lambda x}$).

Nếu λ_1, λ_2 là những nghiệm thực khác nhau của (2) thì các nghiệm riêng $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$ là độc lập tuyến tính và nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ với c_1, c_2 là hai số bất kỳ.

- Nếu $\lambda_1 = \lambda_2$ là nghiệm của (2) thì $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ là một nghiệm riêng. Ngoài ra $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ cũng là nghiệm riêng vì

$$(xe^{\lambda_1 x})'' + p(xe^{\lambda_1 x})' + q(xe^{\lambda_1 x}) = (\lambda_1^{\ 2} + p\lambda_1 + q)xe^{\lambda_1 x} + (2\lambda_1 + p)xe^{\lambda_1 x} = 0 .$$

Khi ấy $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 xe^{\lambda_1 x}$ với c_1, c_2 là hai số bất kỳ sẽ là nghiệm tổng quát của (1).

- Nếu λ_1, λ_2 là những nghiệm phức của (2), có dạng $\lambda_1 = \beta + \gamma i, \lambda_2 = \beta - \gamma i$, thì bằng cách thay trực tiếp $y_1 = \cos(\gamma x)e^{\beta x}$ và $y_2 = \sin(\gamma x)e^{\beta x}$ vào (1) ta thấy đây là những nghiệm riêng của (1). Do y_1 và y_2 độc lập tuyến tính, nghiệm tổng quát của (1) trong trường hợp này sẽ là $y = e^{\beta x}[c_1 \cos(\gamma x) + c_2 \sin(\gamma x)]$ với c_1, c_2 là hai số bất kỳ.

Thí dụ 1) Giải phương trình vi phân

$$y'' - 4y' + 5y = 0 .$$

Giải Phương trình đặc trưng là $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ và có nghiệm $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^{2x}[c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)] .$$

2) Tìm nghiệm phương trình $y'' + 5y' - y = 0$ thỏa mãn điều kiện khởi đầu tại $x = 0$ là $y = 1$ và $y' = 1$.

Giải Phương trình đặc trưng là $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$ và có nghiệm $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$. Nghiệm tổng quát sẽ là $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$. Nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện khởi đầu kéo theo các hệ số c_1, c_2 phải thỏa mãn

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad ,$$
$$y'(0) = -2c_1 - 3c_2 = 1 .$$

Suy ra $c_1 = 8/5, c_2 = -3/5$. Vậy $y = \frac{1}{5}(8e^{-2x} - 3e^{-3x})$ là nghiệm cần tìm.

12.5.2. Phương trình không thuần nhất

Phương trình tuyến tính cấp 2 (không thuần nhất) là phương trình dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = k(x) . \tag{3}$$

Cũng như phần trước, chúng ta chỉ xét trường hợp $p(x)$ và $q(x)$ là những hằng số ($p(x) \equiv p$ và $q(x) \equiv q$).

Phương pháp giải

- Trước hết giải phương trình thuần nhất $y'' + py' + q = 0$ và thu được nghiệm tổng quát y_c.
- Tìm một nghiệm riêng y_p của phương trình (3).
- Nghiệm tổng quát của (3) sẽ có dạng $y = y_p + y_c$.

Cách tìm nghiệm riêng y_p trong một số trường hợp

<u>Trường hợp 1</u>: $k(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ với α là hằng số và $P_n(x)$ là đa thức bậc *n*.

- Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nghiệm riêng của (3) có thể tìm được dưới dạng

$$y_p = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

  với $Q_n(x)$ là một đa thức cùng bậc với $P_n(x)$. Các hệ số của $Q_n(x)$ được xác định bằng cách thay y_p vào phương trình (3) và đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của đa thức ở hai vế của phương trình sau

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) . \tag{4}$$

- Nếu *a* là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì hệ số của $Q_n(x)$ trong (4) bằng 0 còn hệ số $2\alpha + p \neq 0$. Để (4) đúng thì phải giữ nguyên số hệ số của đa thức $Q_n(x)$ và tăng bậc lên một bằng cách nhân *x* với $Q_n(x)$. Nghiệm riêng của (3) sẽ có dạng $y_p = xe^{\alpha x} Q_n(x)$. Tương tự nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì cả hai hệ số của $Q_n(x)$ và $Q'_n(x)$ bằng không cho nên phải nhân x^2 với $Q_n(x)$. Nghiệm riêng của (3) sẽ có dạng $y_p = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$.

Thí dụ 1) Giải phương trình $y'' - y = xe^x$.

Giải Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 1 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -1$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' - y = 0$ là

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y_p = xe^x(a + bx)$. Các hệ số a,b được xác định bằng cách thay y_p và

$$y''_p = \left[2(a+b) + (4b+a)x + bx^2\right]e^x$$

vào phương trình vi phân đã cho

$$\left[2(a+b) + (4b+a)x + bx^2\right]e^x - (ax + bx^2)e^x = xe^x.$$

Suy ra 2(a + b)x + (4b + a) x- ax = x, tức là

$$\begin{aligned} &2(a+b) = 0 \quad , \\ &4b = 1. \end{aligned}$$

Vậy $b = \dfrac{1}{4}, a = -\dfrac{1}{4}$ và $y_p = x\left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}x\right)e^x$. Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = x\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\right)e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

với c_1, c_2 là những số thực tùy ý.

Thí dụ 2) Tìm nghiệm phương trình

$$y'' + 2y' + y = e^x(x^2 + 1)$$

thỏa mãn điều kiện khởi đầu *y(0) = 0, y'(0) = 1.*

Giải Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm kép là λ = -1. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + y = 0$ là

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}.$$

Tìm nghiệm riêng dạng

$$y_p = e^x(a + bx + cx^2).$$

Các hệ số *a,b,c* được xác định bằng cách thay y_p, y'_p và y''_p vào phương trình đầu

$$\left[a + b + 2c + (2c+b)x + cx^2\right]e^x + 2\left[a + b + (2c+b)x + cx^2\right]e^x + (a + bx + cx^2)e^x = e^x(x^2+1)$$

Tức là $3(a+b)+2c+a+(3(2c+b)+b)x+4cx^2 = x^2+1$. Suy ra

$$3(a+b)+2c+a=1 \quad ,$$
$$3(2c+b)+b=0 \quad ,$$
$$4c=1.$$

Ta có $c=\frac{1}{4}, b=-\frac{3}{8}, a=\frac{13}{32}$ và $y_p = e^x(\frac{13}{32}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x^2)$. Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = e^x(\frac{13}{32}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x^2)+c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

Các hệ số c_1, c_2 được xác định từ điều kiện khởi đầu

$$y(0)=1+c_1 \;\; hay \;\; c_1=-1$$
$$y'(0)=\frac{1}{32}-1+c_2=1 \;\; hay \;\; c_2=\frac{61}{32}.$$

Lời giải của bài toán sẽ là $y=e^x(\frac{13}{32}-\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}x^2)-e^{-x}+\frac{61}{32}xe^{-x}$.

Trường hợp 2: $k(x)=e^{\alpha x}[P(x)\cos(\beta x)+Q(x)\sin(\beta x)]$ trong đó α, β là hằng số, $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức. Trong trường hợp này người ta có thể tìm nghiệm riêng dạng

$$y_p = e^{\alpha x}[\overline{P}(x)\cos(\beta x)+\overline{Q}(x)\sin(\beta x)]$$

trong đó $\overline{P}(x), \overline{Q}(x)$ là những đa thức có bậc bằng bậc cao nhất của $P(x)$ và $Q(x)$ nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng hoặc nghiệm riêng dạng

$$y_p = xe^{\alpha x}[\overline{P}(x)\cos(\beta x)+\overline{Q}(x)\sin(\beta x)]$$

với $\overline{P}(x), \overline{Q}(x)$ như trên, nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Thí dụ Giải phương trình $y''-6y'+13y=e^x\cos(x)$.

Giải Phương trình đặc trưng $\lambda^2-6\lambda+13=0$ có nghiệm $\lambda_1=3+2i$ và $\lambda_2=3-2i$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y''-6y'+13y=0$ là

$$y_c = e^{3x}[c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)].$$

Ta tìm nghiệm riêng dạng $y_p = e^x[a\cos(x)+b\sin(x)]$.

Để xác định các hệ số a và b, tính y'_p, y''_p:

$$y'_p = y_p + e^x[-a\sin(x)+b\cos(x)]$$
$$y''_p = y'_p + e^x[-a\sin(x)+b\cos(x)] - y_p = 2e^x[-a\sin(x)+b\cos(x)]$$

rồi thay vào phương trình đầu ta có

$$\left[(7a-4b)\cos(x)+(4a+7b)\sin(x)\right]e^{x}=e^{x}\cos(x)\,.$$

So sánh hệ số trong hai vế của phương trình cho ta hệ phương trình đối với *a* và *b*:

$$7a - 4b = 1$$
$$4a + 7b = 0.$$

Suy ra $a=\frac{7}{65}$ và $b=-\frac{4}{65}$. Như vậy nghiệm riêng cần tìm sẽ là

$$y_p=\frac{1}{65}e^{x}[7\cos(x)-4\sin(x)]$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đầu là

$$y=\frac{1}{65}e^{x}[7\cos(x)-4\sin(x)]+e^{3x}[c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)]\,.$$

Bài tập và Tính toán thực hành Chương 12

1. Giải phương trình vi phân

1.1. Phương trình vi phân có biến tách

Bài 1 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$xdx + y^2 dy = 0$$

và chọn ra đường cong tích phân đi qua điểm $(0,0)$.

Bài 2 Giải các phương trình:

1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$;

2) $(x + 2x^3)dx + (y + 2y^3)dy = 0$;

3) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$;

4) $2x\sqrt{1-y^2}\,dx + ydy = 0$;

5) $y' = \dfrac{x+1}{y^4+1}$;

6) $y' = e^{x-y}$;

7) $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$;

8) $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$;

9) $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$;

10) $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$;

11) $y' = -2xy$;

12) $x\cos(x)dx + (1-6y^5)dy = 0,\ y(\pi) = 0$;

Bài 3 Một vật có khối lượng m được ném thẳng đứng xuống dưới từ một độ cao nào đó. Tìm quy luật thay đổi vận tốc của vật, biết rằng có hai lực tác dụng lên vật: lực hút của trái đất và lực cản của không khí (tỷ lệ với vận tốc với hệ số tỷ lệ k).

Bài 4 Tốc độ phân rã của một chất phóng xạ tại mỗi thời điểm tỷ lệ thuận với khối lượng của nó tại thời điểm ấy. Hãy xác định tỷ lệ phần trăm khối lượng m_0 của chất phóng xạ bị phân rã sau 200 năm, biết rằng chu kỳ phân rã của chất phóng xạ (thời gian chất phóng xạ phân rã hết một nửa khối lượng) là 1590 năm.

Bài 5 Một tên lửa được phóng thẳng đứng với vận tốc $v_0 = 100m/s$. Sức cản của không khí làm giảm chuyển động của tên lửa bằng cách truyền cho nó một gia tốc âm bằng $-kv^2$, trong đó v là vận tốc tức thời của tên lửa, còn k là hệ số động học vũ trụ. Tính thời gian tên lửa đạt vị trí cao nhất.

1.2. Phương trình vi phân tuyến tính

Bài 1 Giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0$$

và tìm nghiệm thoả mãn điều kiện khởi đầu: $y = 2$ khi $x = 1$.

Bài 2 Giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

$$y' + \frac{1}{x} y = 3x$$

và tìm nghiệm thoả mãn điều kiện khởi đầu: $y = 1$ khi $x = 1$.

Bài 3 Giải các phương trình sau bằng cách sử dụng công thức nghiệm tổng quát:

1) $y' + y = \sin(x);\ \ y(\pi) = 1$;
2) $(1+x^2)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$;
3) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$;
4) $y' + \tan(y) = \dfrac{x}{\cos(y)}$;
5) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 6xe^{x^2}$;
6) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$;
7) $(2e^y - x)y' = 1$;
8) $x^2 y' + xy + 1 = 0$;
9) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$;
10) $2x(x^2 + y)dx = dy$;
11) $y = x(y' - x\cos(x))$;
12) $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$;
13) $(xy' - 1)\ln(x) = 2y$;
14) $y' + xy = x^2 + 1$.

Bài 4 Tìm nghiệm tổng quát sau khi đã đoán trước một nghiệm riêng:

1) $y' + y = x + 1$;
2) $y' + y = 2e^x$;
3) $y' + xy = x^2 + 1$;
4) $y' + y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$;
5) $y' - \dfrac{1+2x}{x+x^2} y = \dfrac{1+2x}{x+x^2}$;

Bài 5 Tìm nghiệm với giá trị khởi đầu x_0, y_0:

1) $y' + \dfrac{3}{x} y = \dfrac{2}{x^3}$, $\quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1$;
2) $xy' = x + \dfrac{1}{2} y$, $\quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0$;
3) $xy' = x + 2y$, $\quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0$;
4) $xy' = x - y$, $\quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0$;
5) $xy' = x + y$, $\quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0$;

Bài 6 Chứng minh rằng phương trình vi phân tuyến tính

$$y' + p(x)y = q(x)$$

có nghiệm riêng dạng $y_1 = b$ là phương trình với biến tách.

Bài 7 Áp dụng phương pháp đổi biến hoặc đạo hàm hai vế, hãy đưa phương trình sau đây về dạng phương trình vi phân tuyến tính và giải chúng:

1) $(x+1)(yy'-1)=y^2$; 2) $xdx=(x^2-2y+1)dy$;

3) $x(e^y-y')=2$; 4) $(x^2-1)y'\sin(y)+2x\cos(y)=2x-2x^3$;

5) $y(x)=\int_0^x y(t)dt+1+x$; 6) $\int_0^x (x-t)y(t)dt=2x+\int_0^x y(t)dt$;

Bài 8 Tìm quy luật biến thiên của dòng điện trong mạng điện có cuộn tự cảm nếu $I=I_0$ khi $t=0,\ U=A\sin(\omega t)$, $A=const$.

Bài 9 Tìm đường cong mà tiếp tuyến của nó cắt trục Oy một đoạn bằng $\frac{1}{n}$ tổng các toạ độ của tiếp điểm.

Bài 10 Tìm đường cong sao cho tung độ trung bình của nó trong đoạn $[0,x]$, (tức là đại lượng $\frac{1}{x}\int_0^x ydx$) tỷ lệ với tung độ của điểm ứng với cận bên phải của đoạn $[0,x]$.

Bài 11 Tìm đường cong AM sao cho hoành độ của trọng tâm của hình $OAMP$ bằng $\frac{3}{4}$ hoành độ của điểm M.

Bài 12 Chứng minh rằng nghiệm của phương trình tuyến tính $y'+p(x)y=q(x)$ với các giá trị khởi đầu x_0,y_0 có thể viết dưới dạng

$$y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\int q(\xi)e^{-\int_{\xi}^{x}p(t)dt}d\xi .$$

2. Thực hành giải phương trình vi phân trên máy

Dùng MAPLE V bạn có thể tìm nghiệm chính xác của rất nhiều phương trình vi phân thường (ODE). Hơn nữa, MAPLE cho phép tìm nghiệm xấp xỉ của bất kỳ phương trình vi phân nào. Ngoài ra, nó còn vẽ được đồ thị nghiệm của các phương trình vi phân. Điều này rất có lợi khi ta muốn biết dáng điệu thay đổi của nghiệm khi giải các bài toán cụ thể.

Để tiến hành giải phương trình vi phân, ta khởi động chương trình và nạp *gói công cụ* chuyên dụng cho chuyên mục này bằng các lệnh sau

```
[> restart;
[> with(DEtools);
```

Sau khi ấn phím [Enter] cho lệnh thực hiện, ta sẽ thấy hiện ra danh mục các công cụ chứa trong gói:

[DEnormal, DEplot, DEplot3d, Dchangevar, PDEchangecoords, PDEplot, autonomous, convertAlg, convertsys, dfieldplot, indicialeq, phaseportrait, reduceOrder, regularsp, translate, untranslate, varparam]

2.1. Giải phương trình vi phân thường

Một số ký hiệu cần nhớ:

1. Ký hiệu D(y) là đạo hàm bậc nhất của hàm y.
2. Ký hiệu D(D)(y)(x) là đạo hàm bậc hai của y theo x.
3. Ký hiệu D@@k có nghĩa là D được kết hợp với chính nó k lần.

Muốn giải phương trình vi phân thường, ta chỉ cần dùng một dòng lệnh có cú pháp như sau:

```
[> dsolve({deq, x(t0)=x0 },x(t));
```

Trong đó , `deq` là phương trình vi phân, `x(t)`là nghiệm, $x(t_0)=x_0$ là điều kiện khởi đầu. Nếu tìm nghiệm tổng quát thì ta bỏ điều kiện khởi đầu $x(t_0)=x_0$. (Khi không có điều kiện khởi đầu, MAPLE tự động sinh ra các hằng số _C1 trong kết quả).

Sau dấu "`;`", ấn phím "Enter", trên màn hình sẽ hiện đáp số.

Chú ý Dấu "`;`" biểu thị sự kết thúc của dòng lệnh. Thiếu dấu "`;`" máy hiểu là dòng lệnh chưa kết thúc, nó không giải và báo lỗi.

Có thể nói, hầu hết các phương trình vi phân giải được bằng cầu phương đều giải được nhờ MAPLE.

1. Phương trình vi phân tách biến

Dạng 1 $\dfrac{dx}{dt} = f(t)$

```
[>dsolve(D(x)(t) =f(t),{x(t)});
```

$$x(t) = \int f(t)dt + C \ .$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{t^2-1}$.

```
[>dsolve(D(x)(t) =2/(t^2-1),{x(t)});
```

$$x(t) = -2\operatorname{arctan h}(t) + C1$$

($\operatorname{arctan h}(t)$ là hàm ngược hàm tan hyperbolic).

Nhận xét Đáp số có thể viết dưới dạng $x(t) = \ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| + C$. Hai đáp số có vẻ khác nhau, để so sánh ta dùng lệnh `convert(expr,ln)`(chuyển đổi biểu thức `expr` về dạng lôgarit tự nhiên)

```
[> convert(x(t)=-2*arctanh(t)+_C1,ln);
```

$$x(t) = -\ln(t + 1) + \ln(1 - t) + \_C1.$$

Dạng 2 $\dfrac{dx}{dt} = g(x)$

```
[> dsolve(D(x)(t) =g(x),{x(t)});
```

$$-\int_0^{x(t)} \frac{dx_1}{g(x_1)} + t = C1 \ .$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2-1}{2}$.

[> `dsolve(D(x)(t) =(x^2-1)/2,{x(t)});`

$$2 \operatorname{arctanh}(x(t)) + t = \_C1 \ .$$

Nhận xét Đáp số còn có thể viết dưới dạng $x = \dfrac{1+Ce^t}{1-Ce^t}$. Để so sánh ta dùng lệnh `convert` (chuyển đổi về dạng ln(.)).

[> `convert(2*arctanh(x(t))+t=C1,ln);`

$$\ln(x(t) + 1) - \ln(1 - x(t)) + t = C1.$$

Dạng 3 $f(t)dt + g(x)dx = 0$

[> `dsolve(D(x)(t)=-(f(t)/g(x)),{x(t)});`

$$\int_0^{x(t)} g(y_1)dy_1 + \int f(t)dt = C1 \ .$$

Dạng 4 $M(t)N(x)dt + P(t)Q(x)dx = 0$

[> `dsolve(D(x)(t)=((M(t)*N(x))/(P(t)*Q(x))),{x(t)});`

$$\int_0^{x(t)} \frac{Q(y_1)}{N(y_1)}dy_1 + \int \frac{M(t)}{P(t)}dt = C1 \ .$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{t(x^2-1)}{(t^2-1)x}$.

[> `dsolve(D(x)(t) =-((t*(x^2-1))/((t^2-1)*x)),{x(t)});`

$$x^2(t) = \frac{t^2 + C1}{t^2 - 1} \ .$$

Nhận xét Đáp số còn có thể viết dưới dạng $(x^2-1)(t^2-1) = C$.

Thí dụ Giải phương trình vi phân

$$2x\sqrt{2x-x^2}\,dt - (4+t^2)dx = 0 \ .$$

[> `dsolve(D(x)(t)=(2*x*sqrt(2*x-x^2))/(4+t^2),{x(t)});`

$$\sqrt{\frac{2-x}{x}} + \arctan\left(\frac{t}{2}\right) = C1 \ .$$

Nhận xét Máy giải thiếu nghiệm đặc biệt $x = 2$.

2. Phương trình vi phân thuần nhất

Phương trình vi phân $\dot{x} = f(t,x)$ được gọi là thuần nhất nếu f là một hàm thuần nhất bậc 0, nghĩa là, $f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x)$ với mọi λ bất kỳ.

Thí dụ Giải phương trình vi phân thuần nhất $\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{t^2 - x^2}$.

```
[> dsolve(D(x)(t)=(2*t*x)/(t^2-x^2),{x(t)});
```

$$\frac{t^2}{x(t)} + x(t) = C1 \ .$$

Nhận xét Đáp số còn có thể viết dưới dạng $t^2 + x^2 = Cx$.

3. Phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{dx}{dt} + p(t) = 0$$

```
[> dsolve(D(x)(t)+p(t)*x=0,{x(t)});
```

$$x(t) = \exp\int - p(t)dt \_ C1$$

Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

$$\frac{dx}{dt} + p(t) = q(t)$$

```
[> dsolve(D(x)(t)+p(t)*x=q(t),{x(t)});
```

$$x(t) = \exp(\int - p(t)dt)(\int \exp(\int - p(t)dt)q(t)dt + C1) \ .$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân

$$y' + y = x + 2 \ .$$

Ta có thể chỉ dùng một lệnh để giải phương trình như các thí dụ trên. Tuy nhiên, có thể tuần tự thực hiện các bước sau để được công thức tường minh hơn trên màn hình:

Bước 1: Định nghĩa phương trình cần giải là `diff_eq`:

```
[> diff_eq:=D(y)(x)+y(x)=x+2;
```

Lệnh trên hiểu là `D(y)(x)+y(x)=x+2` được gán tên là `diff_eq`. Ta cũng có thể thay bằng một ký hiệu tuỳ chọn khác.

Sau dấu "`;`" ấn phím "Enter", trên màn hình hiện phương trình

$$diff\_eq := D(y)(x) + y(x) = x + 2 \ .$$

Bước 2: Giải phương trình bằng lệnh:

```
[> dsolve({diff_eq},{y(x)});
```

Sau dấu "`;`" ấn phím "Enter", trên màn hình sẽ hiện công thức nghiệm của phương trình vi phân đã cho:

$$y(x) = x + 1 + C_1 e^{-x} \ .$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân

$$xy' - y = x^3$$

với điều kiện khởi đầu $y(0) = 1$.

Đây là một phương trình tuyến tính không thuần nhất:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \quad .$$

Bước 1: Thiết lập công thức biểu diễn phương trình bằng lệnh:

```
[> diff_eq2:= x*D(y)(x)-y=x^3;
```

$$diff\_eq2 := xD(y)(x) - y = x^3$$

Bước 2: Vào điều kiện đầu bằng dòng lệnh:

```
[> init_con:= y(0)=1;
```

$$init\_con := y(0) = 1 \ .$$

Bước 3: Giải phương trình vi phân bằng lệnh:

```
[> dsolve({diff_eq2,init_con},{y(x)});
```

Máy có giải nhưng không cho trả lời vì phương trình vô nghiệm (không có nghiệm đi qua điểm (0,1)).

Ta có thể dùng ký hiệu `diff(f(t),t)` là "lấy đạo hàm của f theo x " để thay thế cho các lệnh `D(y)(x)`trong các thí dụ trên.

Thí dụ Giải phương trình $\frac{dy}{dt}t^2 + y = 0$.

Bước 1: Gán tên `deq` cho phương trình (ký hiệu `diff` thay cho `D`).

```
[> deq:=diff(y(t),t)*t^2+y(t)=0;
```

$$deq := \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t)\right) t^2 + y(t) = 0 \ .$$

Bước 2: Giải phương trình

```
[>dsolve(deq,y(t));
```

$$y(t) = e^{\frac{1}{t}} C1 \ .$$

Nếu muốn, ta có thể tìm nghiệm ứng với giá trị khởi đầu $y(1) = a$:

```
[> dsolve({deq,y(1)=a},y(t));
```

$$y(t) = \frac{e^{\frac{1}{t}} a}{e} \quad .$$

<u>Phương trình đưa về tuyến tính không thuần nhất</u>

$$f'(x)\frac{dx}{dt} + p(t) f(x) = q(t)$$

```
[> dsolve(D(f)(x)*D(x)(t)+p(t)*f(x)=q(t),{x(t)});
```

$$\int e^{\int p(t)dt} p(t) f(x(t)) - e^{\int p(t)dt} q(t) dt + f(x(t) e^{\int p(t)dt}$$
$$- f(x(t) \int e^{\int p(t)dt} p(t) dt = \_C1 - f(x(t) \int e^{\int p(t)dt} p(t) dt = \_C1$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân $x\frac{dx}{dt}+tx^2=t^2$.

```
[> dsolve(x*D(x)(t)+t*x^2=t^2,{x(t)});
```

$$x^2(t)=t+\frac{1}{2}Ie^{-t^2}\sqrt{\pi}\,erf(It)+e^{-t^2}C1 \;.$$

Hàm **erf** được định nghĩa là $erf(x)=\dfrac{2\int_0^x e^{-t^2}dt}{\sqrt{\pi}}$.

4. Phương trình Bernouli $\frac{dx}{dt}+p(t)=q(t)x^{\alpha}$

Thí dụ Giải phương trình Bernouli với $\alpha=\frac{1}{2}$, tức là $t\frac{dx}{dt}-4x=t^2\sqrt{x}$.

```
[> dsolve(t*D(x)(t)-4*x=t^2*sqrt(x),{x(t)});
```

$$t=\_C1e^{-\frac{\sqrt{x(t)}}{t^2}} \;.$$

5. Phương trình Riccati $\frac{dx}{dt}=P(t)x^2+Q(t)x+R(t)$

Phương trình Riccati giải được bằng cầu phương

Thí dụ Giải phương trình Riccati $\frac{dx}{dt}=\frac{a}{t}x^2+\frac{1}{2t}x+c$.

```
[> dsolve(D(x)(t)=(a/t)*x^2+(1/(2*t))*x+c,{x(t)});
```

$$x(t)=\frac{c\sqrt{t}(C1\sin(2\sqrt{ac}\sqrt{t})-\cos(2\sqrt{ac}\sqrt{t})}{\sqrt{ac}(C1\cos(2\sqrt{ac}\sqrt{t})+\sin(2\sqrt{ac}\sqrt{t})} \;.$$

Thí dụ Giải phương trình Riccati $\frac{dx}{dt}=ax^2+bt^{-2}$.

```
[> dsolve(D(x)(t)=a*x^2+b*t^(-2),{x(t)});
```

$$t=Ce^{2\frac{\arctan\left(\frac{2ax(t)t+1}{\sqrt{4ba-1}}\right)}{\sqrt{4ba-1}}} \;.$$

Thí dụ Giải phương trình Riccati $\frac{dx}{dt}=ax^2+\frac{b}{t}x+\frac{c}{t^2}$.

```
[> dsolve(D(x)(t)=a*x^2+b*(x/t)+c/t^2,{x(t)});
```

$$t=Ce^{2\frac{\arctan\left(\frac{2ax(t)+1+b}{\sqrt{4ac-1-2b-b^2}}\right)}{\sqrt{4ac-1-2b-b^2}}} \;.$$

Thí dụ Giải phương trình Riccati $\frac{dx}{dt}=x^2+\frac{1}{t^2}$.

```
[> dsolve(D(x)(t) =x^2+1/t^2,{x(t)});
```

$$t=Ce^{\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x(t)t+1)\sqrt{3}\right)} \;.$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + t^{-4}$.

[> `dsolve(D(x)(t)=x^2+t^(-4),{x(t)});`

$$x(t) = -\frac{Ct\sin\left(\frac{1}{t}\right) - C\cos\left(\frac{1}{t}\right) + t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)}{C\sin\left(\frac{1}{t}\right) + \cos\left(\frac{1}{t}\right)} .$$

Phương trình Riccati không giải được bằng cầu phương

Thí dụ Giải phương trình Riccati $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{t}x^2 + \dfrac{1}{t}x + c$.

[> `dsolve(D(x)(t)=(a/t)*x^2+(1/t)*x+c,{x(t)});`

$$x(t) = \frac{\sqrt{t}\sqrt{ac}(C1Bessel1Y(0,2\sqrt{ac}\sqrt{t}) + Bessel1J(0,2\sqrt{ac}\sqrt{t})}{a(C1Bessel1Y(1,2\sqrt{ac}\sqrt{t}) + Bessel1J(1,2\sqrt{ac}\sqrt{t})} .$$

Trong đó, $Bessel1Y(v,x)Bessel1J(v,x)$ là các hàm Bessel loại 1 và loại 2, tức chúng là nghiệm của phương trình vi phân

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y = 0 .$$

6. Phương trình không giải được qua đạo hàm

$$F(x,\frac{dx}{dt},t) = 0$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân $\dfrac{dx}{dt} + \left|\dfrac{dx}{dt}\right| = 0$.

[> `dsolve(D(x)(t)+abs(D(x)(t))=0,{x(t)});`

$x(t)$ = RealRange(-infinity, 0) t + _C1,

nghĩa là nghiệm của phương trình có dạng $x = at + C$ với mọi $a < 0$ và C bất kỳ. Tuy nhiên, máy giải thiếu nghiệm $x = -t^2 + C$ khi $t \le 0$.

Thí dụ Giải phương trình vi phân $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - (x+t)\dfrac{dx}{dt} + xt = 0$.

[>`dsolve((D(x)(t))^2-(x+t)*D(x)(t)+x*t,{x(t)});`

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + C \text{ và } x(t) = Ce^t .$$

Phương trình Clairaut $x = \dfrac{dx}{dt}t + g(\dfrac{dx}{dt})$

[> `dsolve(x=D(x)(t)*t+g(D(x)(t)),{x(t)});`

$$\begin{cases} t = -\dfrac{\partial}{\partial T} g(T) \\ x(t) = g(T) - T\left(\dfrac{\partial}{\partial T} g(T)\right) \end{cases} \quad \text{và } \ x(t) = g(C) + tC$$

2.2. Phương trình vi phân bậc cao

Ghi nhớ Đạo hàm bậc hai của y theo x được ký hiệu là `D(D(y)(x)`.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân bậc hai phụ thuộc vào 2 tham số tự do.

Các bước giải phương trình vi phân bậc cao giống như giải phương trình vi phân bậc nhất.

Thí dụ Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$y''+5y'+6y = 0$$

với điều kiện khởi đầu: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Bước 1: Ta gán tên diff_eq1 cho phương trình cần giải

```
[> diff_eq1:=D(D(y))(x)+5*D(y)(x)+6*y(x)= 0;
```

Sau dấu chấm phẩy (;), ấn phím "Enter", trên màn hình sẽ hiện phương trình vi phân cần giải:

$$\text{diff\_eq1} := (D^{(2)})(y)(x) + 5\,D(y)(x) + 6\,y(x) = 0\,.$$

Bước 2: Nhập điều kiện khởi đầu bằng lệnh

```
[> init_con:=y(0)=0,D(y)(0)=1;
```

Sau dấu (;) đánh lệnh [Enter] sẽ hiện ra công thức mô tả điều kiện đầu:

$$\text{init\_con} := y(0) = 0,\ D(y)(0) = 1$$

Bước 3: Giải phương trình vi phân bằng lệnh

```
[> dsolve({diff_eq1,init_con},{y(x)});
```

Sau dấu ";", đánh lệnh "Enter", trên màn hình sẽ hiện công thức nghiệm của phương trình vi phân cần giải:

$$y(x) = e^{-2x} - e^{-3x}\,.$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai:

$$y'' - 3y' - 10y = \sin(x) + 3\cos(x)$$

với điều kiện khởi đầu $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Bước 1: Nhập phương trình bằng lệnh:

```
[> diff_eq3:=D(D(y))(x)-3*D(y)(x)-10*y=sin(x)+3*cos(x);
```

$$diff\_eq3 := (D^2)(y)(x) - 3D(y)(x) - 10y = \sin(x) + 3\cos(x)\ .$$

Bước 2: Vào dữ liệu điều kiện đầu:

```
[> init_con:= y(0)=1,D(y)(0)=1;
```

$$init\_con := y(0) = 1, D(y)(0) = 1\ .$$

Bước 3: Giải phương trình:

```
[> dsolve({diff_eq3,init_con},{y(x)});
```

Sau khi thực hiện lệnh, máy cho công thức nghiệm của phương trình vi phân cần giải

$$y(x) = -\frac{3}{13}\cos(x) - \frac{2}{13}\sin(x) + \frac{47}{91}e^{5x} + \frac{5}{7}e^{-2x}.$$

Ta có thể dùng ký hiệu diff($y(x)$,x,x) "lấy đạo hàm bậc hai của y theo x" để thay thế cho lệnh D(D(y))(x) trong các thí dụ trên.

Maple có thể giải các phương trình vi phân với nghiệm mô tả qua các hàm đặc biệt.

Thí dụ Giải phương trình $x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)\right) + 5\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right) = 0$.

```
[>dsolve(x^2*diff(y(x),x,x)+5*diff(y(x),x)=0,y(x));
```

$$y = C_1 + C_2(xe^{\frac{5}{x}} + 5Ei(1, -\frac{5}{x}))$$

$Ei(n,x)$ là ký hiệu hàm tích phân mũ:

$$Ei(n,x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}dt.$$

2.3. Hệ phương trình vi phân thường

Ghi nhớ Các bước giải phương trình hệ vi phân tương tự như giải phương trình vi phân bậc nhất.

Nghiệm tổng quát của hệ 2 phương trình vi phân bậc nhất phụ thuộc vào 2 tham số tự do.

Thí dụ Giải hệ phương trình vi phân thường bậc hai (không có điều kiện khởi đầu) sau:

$$(D^2)(y)(x) = z(x) \quad ,$$
$$(D^2)(z)(x) = y(x) \quad .$$

Bước 1: Gán tên `sys` (viết tắt của chữ system - hệ) cho hệ phương trình cần giải:

```
[>sys:=(D@@2)(y)(x)=z(x),(D@@2)(z)(x)=y(x);
```

$$sys := (D^2)(y)(x) = z(x), (D^2)(z)(x) = y(x) \quad .$$

Bước 2: Giải hệ phương trình vi phân bằng lệnh

```
[> dsolve({sys},{y(x),z(x)});
```

$$\{y(x) = \frac{1}{4}\_C1e^{(-x)} + \frac{1}{4}\_C1e^{x} + \frac{1}{2}\_C1\cos(x) - \frac{1}{4}\_C2e^{-x} +$$
$$\frac{1}{4}\_C2e^{x} + \frac{1}{2}\_C2\sin(x) + \frac{1}{4}\_C3e^{-x} + \frac{1}{4}\_C3e^{x} - \frac{1}{2}\_C3\cos(x)$$
$$-\frac{1}{2}\_C4\sin(x) + \frac{1}{4}\_C4e^{x} - \frac{1}{4}\_C4e^{-x},$$

$$z(x) = \frac{1}{4}\_C1e^{-x} + \frac{1}{4}\_C1e^{x} - \frac{1}{2}\_C1\cos(x) - \frac{1}{2}\_C2\sin(x) + \frac{1}{4}\_C2e^{x} - \frac{1}{4}\_C2e^{-x}$$
$$+\frac{1}{4}\_C3e^{-x} + \frac{1}{4}\_C3e^{x} + \frac{1}{2}\_C3\cos(x) - \frac{1}{4}\_C4e^{-x} + \frac{1}{4}\_C4e^{x} + \frac{1}{2}\_C4\sin(x)\}.$$

Thí dụ Giải hệ phương trình vi phân

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = z(x), \quad \frac{\partial}{\partial x} z(x) = y(x)$$

với điều kiện khởi đầu $y(0) = 0, \quad z(0) = 2$.

Bước 1: Gán tên `sys` cho hệ:

```
[> sys:={diff(y(x),x)=z(x),diff(z(x),x)=y(x),y(0)=0,z(0)=2};
```

$$sys := \{\frac{\partial}{\partial x} y(x) = z(x), \frac{\partial}{\partial x} z(x) = y(x), y(0) = 0, z(0) = 2\}$$

Bước 2: Gán tên cho nghiệm:

```
[> fcns:={y(x),z(x)};
```

$$fcns := \{y(x), z(x)\}.$$

Bước 3: Giải hệ phương trình vi phân:

```
[> dsolve(sys,fcns);
```

$$\{y(x) = e^x - e^{-x}, z(x) = e^{-x} + e^x\}.$$

2.4. Giải và tìm nghiệm theo các phương pháp tuỳ chọn

Không phải phương trình nào cũng có nghiệm dưới dạng biểu thức giải tích thông thường, cho nên không có gì đáng ngạc nhiên khi ta thấy MAPLE "không chịu" cho ta kết quả đối với một số phương trình nào đó. Hãy xem xét

Thí dụ Giải phương trình $\frac{d}{dx} f(x) + f^5(x)x = \sin(x)$.

Để giải nó ta đưa vào dòng lệnh

```
[> dsolve(diff(f(x),x)+f(x)^5*x=sin(x),f(x);
```

Sau khi ra lệnh giải (ấn phím "Enter" sau dấu chấm phẩy "`;`"), ta thấy máy có chạy nhưng không đưa ra kết quả gì. Tuy nhiên, xin đừng thất vọng, MAPLE vẫn làm việc "không chê vào đâu được" nếu như ta biết dạy nó làm việc một cách hợp lý.

Lệnh giải phương trình vi phân có cú pháp tổng quát là:

```
[> dsolve(deqns,vars,keyword);
```

Trong đó `deqns` là các phương trình vi phân, `vars` là các biến nghiệm, phần `keyword` cho phép ta xác định phương pháp giải và dạng biểu diễn nghiệm. Cách biểu diễn mặc định là "chính xác " (exact). Nếu chọn cách biểu diễn nghiệm như vậy ta sẽ không phải cho giá trị ở phần keyword. Nếu cách biểu diễn ấy không thành (như ta thấy trong thí dụ trên đây), hoặc không phải là ý ta muốn, thì ta có thể yêu cầu máy cho ta một trong các cách biểu diễn sau đây:

- Với `keyword` được cho dưới dạng `type=series` thì máy sẽ cho ta nghiệm dưới dạng chuỗi.

- Với `keyword` được cho dưới dạng `type=numeric` thì máy sẽ cho nghiệm dưới dạng một hàm tượng trưng mà ta có thể biết được giá trị số của nó tại bất kỳ điểm nào.
- Với `keyword` được cho dưới dạng `ouput=basic` thì máy sẽ cho ta tập hàm cơ sở mà tập nghiệm được căng trên đó (như một bao tuyến tính). Nếu phương trình không phải là thuần nhất thì máy sẽ cho ta thêm một nghiệm riêng, để mọi nghiệm bất kỳ đều có thể biểu diễn qua tập nghiệm cơ sở và nghiệm riêng này.

Thông thường, nghiệm có thể được cho dưới dạng một hàm ẩn (tức là một phương trình biểu thị mối liên hệ giữa hàm số y và biến phụ thuộc x không thông qua các đạo hàm), hoặc dưới dạng các biến phụ thuộc tham số. Nếu ta muốn bắt nó phải cho ta nghiệm dưới dạng hiển (tức là một hàm số của y theo x) thì ta cho `keyword` dưới dạng `explicit=true`. (Vì khả năng này thường khó có thể thực hiện được nên người ta thường cho giá trị mặc định là `explicit=false`).

Muốn biểu diễn được nghiệm thông qua các hàm đặc biệt kiểu `Dirac(.)`, `Heaviside(.)`,... thì ta phải cho `keyword` là `method=laplace`.

Trong thí dụ nêu trên, với điều kiện đầu là $f(0)=\frac{1}{2}$, nếu ta cho máy tìm nghiệm dưới dạng *chuỗi*, nó sẽ cho kết quả ngay lập tức:

```
[>dsolve({f(0)=1/2,diff(f(x),x)+f(x)^5*x=sin(x)},f(x),
       series);
```

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{31}{64}x^2-\frac{977}{12288}x^4+O(x^6).$$

Thí dụ Giải hệ $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z-y-x\\ \dfrac{dz}{dx}=y\end{cases}$

với giá trị khởi đầu $y(0)=0, z(0)=1$.

1) Theo phương pháp mặc định:

```
[> sys:=diff(y(x),x)=z(x)-y(x)-x,diff(z(x),x)=y(x):
       fcns:={y(x),z(x)}:
[> dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns);
```

$$\left\{z(x)=\frac{1}{5}\sqrt{5}e^{\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x\right)}-\frac{1}{5}\sqrt{5}e^{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x\right)}+x+1, y(x)=\right.$$
$$\left.-\frac{1}{10}\sqrt{5}e^{\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x\right)}+\frac{1}{10}\sqrt{5}e^{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x\right)}+1-\frac{1}{2}e^{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x\right)}-\frac{1}{2}e^{\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x\right)}\right\}$$

2) Tìm nghiệm dưới dạng chuỗi (với điều kiện đầu là $y(0)=0, z(0)=1$)

```
[> dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns, type=series);
```

$$\{y(x)=x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{24}x^4+\frac{1}{15}x^5+O(x^6),$$
$$z(x)=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^5+O(x^6)\}\ .$$

3) Với điều kiện đầu như trên, tìm nghiệm bằng *phương pháp số*, và yêu cầu máy cho biết giá trị của nghiệm tại các điểm $x = 1$, $x = 1.5$, $x = 1.7$:

```
[> F:=dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns,type=numeric);
```

$F := \textbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \textbf{end}$

```
[> F(1);
```

$[x = 1, y(x) = .343731408276753914, z(x) = 1.25897207653682308]$

```
[> F(1.5);
```

$[x = 1.5, y(x) = .237649509495644756, z(x) = 1.40935827136441327]$

```
[> F(1.7);
```

$[x = 1.7, y(x) = .163416733680997378, z(x) = 1.44974926864546538]$

Thí dụ Giải phương trình vi phân bậc 2

$$y'' = 2x^3 y$$

bằng phương pháp số (với chương trình mang tên dverk78) và cho giá trị của nghiệm và đạo hàm của nó tại các điểm $x = 1, x = 1.5, x = 1.7$ dưới dạng bảng số liệu:

```
[> sys2:={(D@@2)(y)(x)=2*x^3*y(x),y(0)=1,D(y)(0)=1}:
[> s:=dsolve(sys2,{y(x)},type=numeric,method=dverk78,
            value=array([1.0,1.5,1.7]));
```

$$s := \left[\begin{array}{c}\left[x, y(x), \frac{\partial}{\partial x}y(x)\right]\\ \left[\begin{array}{ccc} 1. & 2.1701324352\ \ 5314170 & 1.9360378831\ \ 1791480 \\ 1.5000000000\ \ 0000000 & 4.2682679662\ \ 7041372 & 8.3639169165\ \ 4069902 \\ 1.6999999999\ \ 9999996 & 6.7103985466\ \ 5199442 & 17.2757972122\ \ 874470 \end{array}\right]\end{array}\right]$$

Ta có thể lấy ra từng số liệu của bảng (ma trận) này, thí dụ như:

```
[> s[1,1][3];
```

$$\frac{\partial}{\partial x}y(x)\ ,$$

```
[> s[2,1][2,3];
```

$$8.36391691654069902\ .$$

Thí dụ Giải phương trình vi phân tuyến tính bậc 2 không thuần nhất

$$2xy'' + y' + 3y = x$$

và cho biết hệ cơ sở của tập nghiệm (cùng một nghiệm riêng)

```
[> solve(2*x*diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)+3*y=x,y(x),
        output=basis);
```

$$\left[\left[\frac{x^{1/4}\cos(\sqrt{6}\sqrt{x})}{\sqrt{\sqrt{6}\sqrt{x}}},\frac{x^{1/4}\sin(\sqrt{6}\sqrt{x})}{\sqrt{\sqrt{6}\sqrt{x}}}\right],-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x\right].$$

MAPLE còn có thể biến đổi một hệ phương trình vi phân thường bậc cao về hệ phương trình vi phân bậc nhất bằng lệnh convertsys. Hơn nữa, lệnh dsolve của MAPLE còn có thể giải rất nhiều phương trình vi phân bằng phương pháp số, sử dụng các phương pháp cổ điển, ngoại suy một và nhiều bước, công cụ giải phương trình vi phân thường Livermore Stiff...

2.5. Vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân

Để vẽ đồ thị nghiệm của phương trình vi phân, ta nhập các dòng lệnh sau

```
[> with(DEtools):
[>DEplot(deqns,vars,trange,inits,eqns);
```

hoặc

```
[>DEplot(deqns,vars,trange,inits,xrange, yrange, eqns);
```

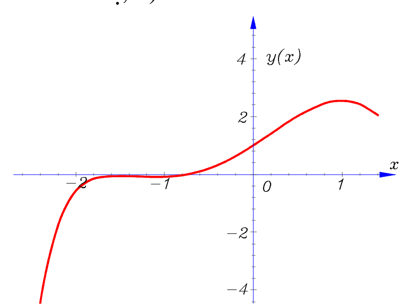
Trong đó:

`deqns` - bảng các phương trình vi phân bậc nhất hoặc một phương trình vi phân bậc cao.
`vars` - biến phụ thuộc hoặc bảng các biến phụ thuộc.
`trange` - miền thay đổi của biến độc lập.
`inits` - điều kiện khởi đầu xác định đường cong nghiệm cần vẽ.
`yrange` - miền thay đổi của biến phụ thuộc thứ nhất.
`xrange` - miền thay đổi của biến phụ thuộc thứ hai.
`eqns` - các tuỳ chọn (màu, tiêu đề, độ đậm nhạt của đồ thị,...).

Thí dụ Vẽ đồ thị của nghiệm của phương trình vi phân

$$\cos(x)\frac{d^3y}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}+\pi\frac{dy}{dx}=y-x$$

với điều kiện khởi đầu $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=1$, biến độc lập x thay đổi trong đoạn [-2.5,1.4], biến phụ thuộc y thay đổi trong đoạn [-4,5], chọn bước là 0.05.



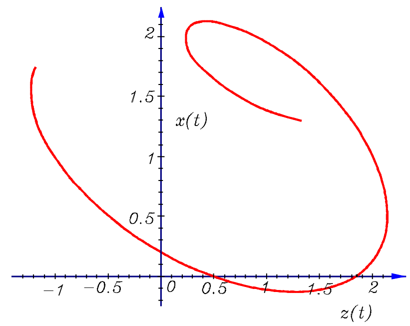
Hình 12.1

```
[>DEplot({cos(x)*diff(y(x),x$3)-
        diff(y(x),x$2)+Pi*
        diff(y(x),x)=y(x)-x},{y(x)},x=-2.5..1.4,[[y(0)=1,
        D(y)(0)=2,(D@@2)(y)(0)=1]],y=-4..5,stepsize=.05);
```

Thí dụ Vẽ đồ thị của nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y^2 \end{cases}$$

với điều kiện khởi đầu $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 2$, biến độc lập t thay đổi trong đoạn [-2,2], biến phụ thuộc y thay đổi trong đoạn [-4,5], chọn bước: 0.05, yêu cầu máy cho biểu diễn của 2 thành phần [$z(t)$, $x(t)$] của nghiệm.



Hình 12.2

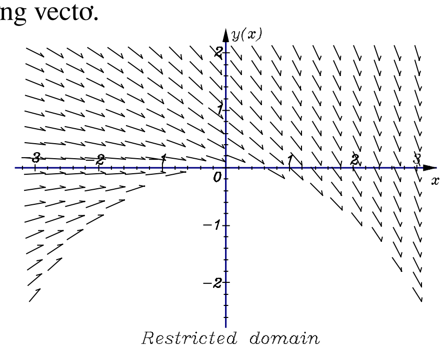
```
[> DEplot({D(x)(t)=y(t)-
    z(t),D(y)(t)=z(t)-x(t),D(z)(t)= x(t)-
    y(t)*2},{x(t),y(t),z(t)},t=-2..2,[[x(0)=1,
    y(0)=0,z(0)=2]],stepsize=.05,scene=[z(t),x(t)]);
```

Với *phương trình vi phân bậc nhất* hoặc *hệ phương trình vi phân bậc nhất 2 ẩn* thì máy không chỉ vẽ cho ta nghiệm mà vẽ cả trường vectơ.

Thí dụ Vẽ đồ thị của nghiệm của phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(-x - \sqrt{x^2 + 4y}),$$

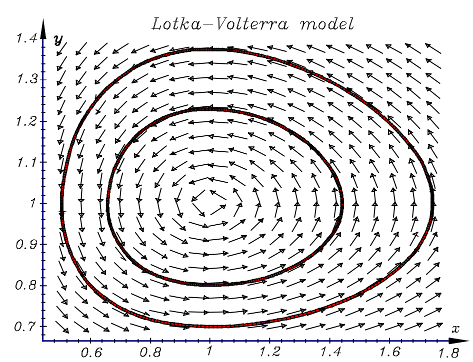
biến độc lập x thay đổi trong đoạn [-3,3], biến phụ thuộc y thay đổi trong đoạn [-3,2]. (Khi không cho điều kiện dầu thì máy không cho ra một nghiệm cụ thể nào, mà chỉ cho một trường vectơ).



Hình 12.3

```
[> DEplot(diff(y(x),x)=1/2*(-x -
    (x^2+4*y(x))^(1/2)),y(x), x=-3..3,y=-3..2,
    title=`Restricted domain`);
```

Thí dụ Vẽ đồ thị của nghiệm của hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = 0.3y(x-1) \end{cases}$, biến độc lập t thay đổi trong đoạn [-7,7]. Với các điều kiện khởi đầu là [$x(0)$=1.2, $y(0)$=1.2] và [$x(0)$=1, $y(0)$=0.7], máy sẽ cho ta từng nghiệm tương ứng.

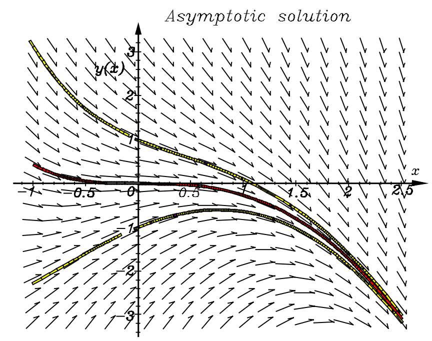


Hình 12.4

```
[> DEplot({diff(x(t),t)=x(t)*
    (1-y(t)),diff(y(t),t)=.3*
    y(t)*(x(t)-1)},[x(t),
    y(t)],t=-7..7, [[x(0)=1.2,
    y(0)=1.2],[x(0)=1,
    y(0)=.7]],stepsize=.2, title=`Lotka-Volterra model`);
```

Thí dụ Vẽ đồ thị của nghiệm của phương trình vi phân $y' = -y - x^2$, biến độc lập x thay đổi trong đoạn [-1,2.5]. Các điều kiện khởi đầu là [y(0)=0], [y(0)=1], [y(0)=-1], và tiêu đề: '***Asymptotic solution***' (Nghiệm tiệm cận).

```
[>DEplot(D(y)(x)=-y(x)-x^2,
  y(x),x=1..2.5,[[y(0)=0],
  [y(0)=1],[y(0)=-1]],
  title=`Asymptotic solution`);
```



Hình 12.5