Mục lục

Chương 1

Không gian tuyến tính định chuẩn

§ 1 KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 1.1. [6] Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường số thực hoặc phức. Tập hợp $X \neq \emptyset$ cùng với hai phép toán cộng và nhân vô hướng thoả mãn các tiên đề sau:

1) $(X, +)$ là một nhóm Abel;

2) X cùng với phép nhân vô hướng thoả mãn:

   a) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ với mọi $x, y \in X$ và với mọi $\alpha \in \mathbb{K}$,

   b) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ với mọi $x \in X$ và với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

c) $\alpha(\beta)x = (\alpha\beta)x = \alpha\beta x$ với mọi $x \in X$ và với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

d) $1x = x$ với mọi $x \in X$,

thì X được gọi là không gian tuyến tính (hay còn gọi là không gian vectơ) trên trường $\mathbb{K}$.

Ví dụ

1) $X = \mathbb{R}^n$ và $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ với hai phép toán cộng là cộng các thành phần và nhân vô hướng. Khi đó $\mathbb{R}^n$ là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

2) $X = \ell^2 = \{x = (\xi_n) : \xi_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty\}$ với hai phép toán cộng là cộng hai dãy và nhân vô hướng. Khi đó ℓ^2 là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{C}$.

3) $X = C_{[a,b]} = \{x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ liên tục } \}$ với phép toán cộng là cộng các hàm và nhân vô hướng với một hàm. Khi đó X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{C}$.

§ 2 KHÔNG GIAN CON

Định nghĩa 2.1. (Hệ sinh) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các phần tử trong không gian tuyến tính X trên trường $\mathbb{K}$ và n số $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(1 \le i \le n)$. Khi đó phần tử $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Giả sử $S \subset X, S \neq \emptyset$ được gọi là hệ sinh của X nếu với mọi $x \in X$ đều là một tổ hợp tuyến tính của một số hữu hạn các phần tử của S.

Định nghĩa 2.2. (Hệ độc lập tuyến tính) Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các phần tử trong không gian tuyến tính X ta nói các phần tử này là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các số α_i, $i = 1, \ldots, n$ không đồng thời bằng không sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Nếu ngược lại ta nói các phần tử này độc lập tuyến tính. Giả sử $S \subset X, S \neq \emptyset$ được gọi là hệ độc lập tuyến tính nếu với mọi hệ con hữu hạn của S đều độc lập tuyến tính.

Nhận xét: Một hệ các phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ là độc lập tuyến tính nếu từ

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ kéo theo $\alpha_i = 0$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Định nghĩa 2.3. (Cơ sở Hamel của không gian tuyến tính) Một hệ S trong không gian tuyến tính X vừa là hệ sinh vừa là hệ độc lập tuyến tính thì S được gọi là cơ sở của không gian tuyến tính X.

Định nghĩa 2.4. Cho X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ và $M \subset X$ khác rỗng. M được gọi là một không gian con của X nếu với hai phép toán cộng và nhân vô hướng trên X hạn chế về M thoả mãn các tiên đề của không gian tuyến tính.

Định lý 2.5. Cho X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ và $M \subset X$ khác rỗng. Khi đó điều kiện cần và đủ để M là không gian con là với mọi $x, y \in M$ và với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ kéo theo $\alpha x + \beta y \in M$.

Ví dụ

1) Tập hợp các hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ là một không gian tuyến tính con của không gian $C_{[a,b]}$.

2) Không gian ℓ^2 (Ví dụ 2 mục 1) là không gian con của không gian ℓ^∞ tập hợp tất cả các dãy số bị chặn.

Định lý 2.6. Giao của một họ tuỳ ý các không gian con của X là một không gian con của X.

Chứng minh. Giả sử $(M_i)_{i\in I}$ là một họ các không gian con của X. Đặt $M = \cap_{i\in I} M_i$, khi đó $0 \in M \neq \emptyset$. Giả sử $x, y \in M$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ lúc đó $\alpha x + \beta y \in M_i$ với mọi $i \in I$. Suy ra $\alpha x + \beta y \in M$. Vậy M là một không gian con của X.

Định nghĩa 2.7. Cho A là một tập con khác rỗng của không gian tuyến tính X. Bao giờ cũng tồn tại không gian con của X chứa A. Theo Định lý 2.6 giao của họ tất cả cac không gian con của X chứa A cũng là một không gian con chứa A. Không gian này được gọi là không gian con sinh bởi A hay còn gọi là bao tuyến tính của A. Kí hiệu $\langle A\rangle$ hay $\mathrm{Lin}A$.

Để mô tả cụ thể không gian con sinh bởi tập hợp A, ta có định lý sau

Định lý 2.8. Bao tuyến tính của tập hợp A là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các phần tử của A.

Chứng minh. Đặt $M = \{\sum_{i=n}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in A, n \in \mathbb{N}^*\}$. Theo Định lý 2.5 M là một không gian con của X. Theo giả thiết $A \subset X$ suy ra $\langle A \rangle \subset M$. Ngược lại, với mỗi $x \in M$ có dạng $\sum_{i=n}^{n} \alpha_i x_i \in \langle A \rangle$. Vậy $M = \langle A \rangle$.

Định nghĩa 2.9. Giả sử M, N là hai không gian con của X. Ta kí hiệu $Y = M + N = \{x = y + z | y \in M, z \in N\}$. Khi đó Y là một không gian con của X, Y được gọi là tổng của M và N. Nếu $M \cap N = \{0\}$ thì Y được gọi là tổng trực tiếp của M và N. Kí hiệu $Y = M \bigoplus N$.

Nhận xét: Ta có $M + N = \langle M \cup N \rangle$.

Định lý 2.10. Giả sử M, N là hai không gian con của X và $Y = M + N$. Điều kiện cần và đủ để $Y = M \bigoplus N$ là mọi $x \in Y$ có biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = y + z$ với $y \in M$ và $z \in N$.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử $Y = M \bigoplus N$ và $x = y + z = y' + z'$. Suy ra $y - y' = z' - z \in M \cap N = \{0\}$. Vậy $y = y'$ và $z = z'$.

Điều kiện đủ. Giả sử $x \in M \cap N$. Lúc đó $x = x + 0 = 0 + x$. Do tính duy nhất của biểu diễn, suy ra $x = 0$. Vậy $M \cap N = \{0\}$. Vậy $Y = M \bigoplus N$.

§ 3 KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

Định nghĩa 3.1. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ (thực hoặc phức). Ánh xạ $p : X \to \mathbb{R}$ được gọi là một sơ chuẩn trên X nếu p thoả mãn các điều kiện sau

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ với mọi $x, y \in X$,

ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ với mọi $x \in X$ và $\alpha \geq 0$.

Từ định nghĩa ta suy ra $p(0) = 0$.

Định nghĩa 3.2. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ (thực hoặc phức). Ánh xạ $p : X \to \mathbb{R}$ được gọi là một nửa chuẩn trên X nếu p thoả mãn các điều kiện sau

i) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ với mọi $x, y \in X$,

ii) $p(\alpha x)=|\alpha| p(x)$ với mọi $x \in X$ và $\alpha \in \mathbb{K}$.

Từ định nghĩa ta suy ra $p(x) \geq 0$ với mọi $x \in X$. Thật vậy, với mọi $x \in X$ ta có

$$0=p(0)=p(x+(-x)) \leq p(x)+p(-x)=2p(x).$$

Định nghĩa 3.3. Nửa chuẩn trên X được gọi là chuẩn nếu từ $p(x)=0$ suy ra $x=0$. Người ta thường kí hiệu chuẩn bởi $\| \ \|$. Như vậy, một chuẩn trên không gian tuyến tính X là một ánh xạ

$$\| \ \|: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

thoả mãn các tiên đề sau

i) $\|x\| \geq 0$ với mọi $x \in X$; và $\|x\|=0$ khi và chỉ khi $x=0$,

ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ với mọi $x \in X$ và $\alpha \in \mathbb{K}$,

iii) $\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$ với mọi $x, y \in X$.

Khi đó $(X,\| \ \|)$ được gọi là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Giả sử $(X, \| \|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} d : & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

là một mêtric. Ta gọi d là mêtric được sinh ra từ chuẩn hay chuẩn cảm sinh mêtric d trên X. Như vậy không gian tuyến tính định chuẩn là một không gian mêtric.

Không gian tuyến tính định chuẩn $(X, \| \|)$ nếu nó đầy đủ với mêtric được sinh từ chuẩn thì X được gọi là không gian Banach.

Định lý 3.4. Trong một không gian tuyến tính định chuẩn các phép toán cộng và nhân vô hướng là liên tục.

Chứng minh. Giả sử $(x_n), (y_n)$ là hai dãy trong X và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Khi đó

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \to 0, \text{ khi } n \to \infty.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$. Vậy phép toán cộng liên tục.

Giả sử (α_n) là dãy hội tụ về α_0 trong $\mathbb{K}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha_0 x_0\| &= \|\alpha_n(x_n - x_0) + (\alpha_n - \alpha_0)x_0\| \\ &\le |\alpha_n|\|x_n - x_0\| + |\alpha_n - \alpha_0|\|x_0\| \to 0, \text{ khi } n \to \infty.\end{aligned}$$

Vậy phép toán nhân vô hướng liên tục.

Nhận xét: Chuẩn là một hàm liên tục trên X.

Ví dụ

1) $\mathbb{R}^n$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{với } x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Thật vậy, hai tiên đề i) và ii) ta dễ dàng kiểm tra.

Bây giờ ta kiểm tra tiên đề iii). Với $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta phải chứng minh bất đẳng thức

$$(\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n} y_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ta có

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2+2x_ky_k+y_k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{k=1}^{n}2x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}y_k^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiakovski ta được

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2\le\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}y_k^2$$
$$=\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Vậy $(\mathbb{R}^n,\|\ \|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn. Hơn nữa, ta đã biết mỗi dãy (x_α) hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi các dãy $(x_k^{(\alpha)})$ $(k=1,\dots,n)$ hội tụ trong $\mathbb{R}$, và (x_α) là dãy cơ bản trong $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi các dãy $(x_k^{(\alpha)})$ $(k=1,\dots,n)$ là dãy cơ bản trong $\mathbb{R}$, nên $\mathbb{R}^n$ là một không gian Banach.

2) Tập hợp $C_{[a,b]}$ gồm các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ với phép cộng là cộng hàm số và nhân vô hướng với hàm số tạo thành một không gian tuyến tính. Hàm xác định bởi

$$\begin{aligned} \|\ \| : C_{[a,b]} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \end{aligned}$$

xác định một chuẩn trên $C_{[a,b]}$. Hơn nữa, $C_{[a,b]}$ là không gian Banach.

Thật vậy, giả sử (x_n) là dãy cơ bản trong không gian $C_{[a,b]}$. Khi đó, $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$, nghĩa là với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ với mọi $m, n \geq n_0$. Suy ra

$$\max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \text{ với mọi } m, n \geq n_0. \tag{1.1}$$

Với mỗi $t \in [a,b]$ cố định, từ bất đẳng thức trên ta có $|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ với mọi $m, n \geq n_0$. Vậy $(x_n(t))$ là dãy cơ bản trong $\mathbb{K}$. Vì $\mathbb{K}$ là không gian đầy đủ nên dãy $(x_n(t))$ hội tụ trong $\mathbb{K}$. Đặt $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$, với $t \in [a,b]$, ta được một hàm x xác định trên $[a,b]$.

Cố định $m \geq n_0$ và cho $n \to \infty$, từ (1.1) ta suy ra

$$\max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x(t)| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Điều này chứng tỏ sự hội tụ của dãy $(x_m(t))$ về $x(t)$ là hội tụ đều. Vậy $x \in C_{[a,b]}$. Từ (1.2) ta được $\|x_m - x\| < \varepsilon$ với mọi $m \geq n_0$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

§ 4 CHUỖI TRONG KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

Định nghĩa 4.1. Cho (x_n) là một dãy trong không gian tuyến tính định chuẩn X. Ta lập một dãy mới xác định bởi

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ &\ldots\ldots \\ s_n &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \end{aligned}$$

Khi đó dãy (s_n) được gọi là một chuỗi, s_n gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi và người ta thường kí hiệu chuỗi này là $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Nếu dãy (s_n) hội tụ đến một phần tử $s \in X$ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ và có tổng là s. Ngược lại, ta nói chuỗi phân kỳ.

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ tuyệt đối.

Tương tự như các chuỗi số thực, chuỗi trong không gian tuyến tính định chuẩn cũng có những tính chất sau.

Định lý 4.2. Tổng, hiệu của hai chuỗi hội tụ là một chuỗi hội tụ. Tích của một chuỗi hội tụ với một số là một chuỗi hội tụ.

Định lý 4.3. (Tiêu chuẩn Cauchy) Cho X là một không gian Banach. Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ đều tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| < \varepsilon$$

với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbb{N}$.

Ngược lại, nếu một chuỗi thoả mãn điều kiện này thì nó hội tụ.

Chứng minh. Theo giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ, điều này có nghĩa là dãy tổng riêng (s_n) hội tụ. Do đó dãy (s_n) là dãy cơ bản, nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon$với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| < \varepsilon$$

với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbb{N}$.

Ngược lại, giả sử với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} x_k\| < \varepsilon$, với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbb{N}$. Suy ra dãy (s_n) là dãy cơ bản. Theo giả thiết X là không gian Banach, nên dãy (s_n) hội tụ. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

Định lý 4.4. Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn.

a) Nếu X là không gian Banach thì mọi chuỗi trong nó hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

b) Nếu mọi chuỗi trong X hội tụ tuyệt đối đều hội tụ thì X là một không gian Banach.

Chứng minh. a) Theo giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ nên với mỗi $\varepsilon > 0$ đều tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon$$

với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbb{N}$.

Từ định nghĩa của chuẩn ta luôn có

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|.$$

Suy ra rằng với mỗi $\varepsilon > 0$ đều tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| < \varepsilon$$

với mọi $n \geq n_0$ và mọi $p \in \mathbb{N}$. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

b) Giả sử (x_n) là một dãy cơ bản trong X. Khi đó với mỗi số tự nhiên k , tồn tại một số tự nhiên n_k sao cho với mọi $m \geq n_k$ và mọi $p \geq n_k$ ta có

$$\|x_m - x_p\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ta chọn $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Khi đó, dãy con (x_{n_k}) của (x_n) hội tụ. Thật vậy, từ bất đẳng thức trên ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

nghĩa là chuỗi

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \ldots + (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) + \ldots$$

hội tụ tuyệt đối. Theo giả thiết, chuỗi này hội tụ về $x \in X$. Vậy

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x.$$

Dãy cơ bản (x_n) có một dãy con (x_{n_k}) hội tụ nên nó là một dãy hội tụ. Vậy X là một không gian Banach.

§ 5 KHÔNG GIAN CON VÀ KHÔNG GIAN THƯƠNG CỦA KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

Định nghĩa 5.1. Giả sử $(X, \| \|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn và M là một không gian con tuyến tính của X. Khi đó, hàm số

$$\| \|_M = \| \|_{|M} : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

là một chuẩn trên M. Không gian tuyến tính định chuẩn $(M, \| \|_M)$ được gọi là không gian con của không gian tuyến tính định chuẩn $(X, \| \|)$.

Định lý 5.2. a) Giả sử X là một không gian tuyến tính định chuẩn và M là một không gian con của X. Khi đó $\overline{M}$ là một không gian con đóng của X.

b) Nếu X là một không gian Banach thì không gian con đóng M của X cũng là một không gian Banach.

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh định lý này.

Bổ đề 5.3. (Riez) Giả sử M là một không gian con đóng thực sự của không gian tuyến tính định chuẩn X. Khi đó với mỗi $x_0 \in X \setminus M$ và mỗi $0 < \varepsilon < 1$ tồn tại một phần tử $z \in \mathrm{Lin}\{M, x_0\}$ sao cho $\|z\| = 1$ và $\|z - y\| > \varepsilon$ với mọi $y \in M$.

Chứng minh. Theo giả thiết $x_0 \in X \setminus M$. Vì M đóng nên

$$d = d(x_0, M) = \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0.$$

Với $0 < \varepsilon < 1$ và theo định nghĩa của infimum tồn tại phần tử $y_0 \in M$ sao cho

$$\|x_0 - y_0\| < \frac{d}{\varepsilon}.$$

Đặt $z = \dfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Rõ ràng $\|z\| = 1$ và $z \in \mathrm{Lin}\{M, x_0\}$. Với mỗi $y \in M$ ta có

$$\begin{aligned} \|y - z\| &= \|y - \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}\| \\ &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|(\|x_0 - y_0\|y + y_0) - x_0\|. \end{aligned}$$

Vì $\|x_0 - y_0\|y + y_0 \in M$ nên $\|(\|x_0 - y_0\|y + y_0) - x_0\| \geq d$. Vậy ta suy ra $\|y - z\| > \varepsilon$.

Từ Định lý Riez ta suy ra hệ quả sau

Hệ quả 5.4. Giả sử M là một không gian con đóng của không gian tuyến tính định chuẩn X và $M \neq X$. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $x_0 \notin M$ sao cho $\|x_0\| = 1$ và $\|x_0 - y\| > 1 - \varepsilon$ với mọi $y \in M$.

Định nghĩa 5.5. (Không gian thương) Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn và M là một không gian con đóng của X. Khi đó X/M là một không gian tuyến tính, được gọi là không gian tuyến tính thương. Trên X/M ta xác định chuẩn như sau

Giả sử $\bar{x} \in X/M$ khi đó $\bar{x} = x + M$ trong đó $x \in X$. Đặt

$$\|\bar{x}\| = \inf_{y \in \bar{x}} \|y\| = \inf_{u \in M} \|x + u\|, \ x \in \bar{x}.$$

Khi đó $\| \ \|$ là một chuẩn trên X/M. Thật vậy, ta có

1) $\|\bar{x}\| \geq 0$ với mọi $\bar{x} \in X/M$;

$\|\bar{x}\| = 0$ khi và chỉ khi $\inf_{y \in \bar{x}} \|y\| = 0$. Do đó tồn tại một dãy $y_n \in \bar{x}$ và $y_n \to 0$. Vì $\bar{x}$ đóng trong X nên $0 \in \bar{x}$. Vậy $\bar{x} = M$ (đây là phần tử 0 trong X/M).

2) Với mỗi $\bar{x} \in X/M$ và $\alpha \in \mathbb{K}$ ta có

$$\|\alpha\bar{x}\| = \inf_{y \in \alpha\bar{x}} \|y\| = \inf_{u \in \bar{x}} \|\alpha u\| = |\alpha|\|\bar{x}\|.$$

3) Với mọi $\bar{x}, \bar{y} \in X/M$ ta có

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|x + u + y + v\| \leq \|x + u\| + \|y + v\|$$

với mọi $u, v \in M$. Do đó

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \inf_{u \in M} \|x + u\| + \inf_{v \in M} \|y + v\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|.$$

Vậy $(X/M, \|\ \|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn và được gọi là không gian tuyến tính định chuẩn thương của X theo không gian con đóng M.

Định lý 5.6. Giả sử X là một không gian Banach và M là một không gian con đóng của X. Khi đó không gian tuyến tính thương cũng là một không gian Banach.

Chứng minh. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n$ hội tụ tuyệt đối trong X/M. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $u_n \in M$ sao cho

$$\|x_n + u_n\| < \|\bar{x}_n\| + \frac{1}{2^n}.$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + u_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{x}_n\| + 1,$$

nghĩa là chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + u_n)$ hội tụ tuyệt đối trong không gian Banach X, nên nó hội tụ. Đặt $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + u_n)$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n}(x_k + u_k) - x_0\| = 0.$$

Vì $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k + u_k) - x_0 \in \sum\limits_{k=1}^{n}\bar{x}_n - \bar{x}_0$ nên

$$\|\sum_{k=1}^{n}(x_k + u_k) - x_0\| \geq \|\sum_{k=1}^{n}\bar{x}_n - \bar{x}_0\|.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\bar{x}_n = \bar{x}_0.$$

Vậy X/M là một không gian Banach (theo Định lý 4.4).

§ 6 TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC

Định nghĩa 6.1. [6] Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn trên cùng trường $\mathbb{K}$. Ánh xạ $A : X \longrightarrow Y$ gọi là *liên tục* tại $x_0 \in X$ nếu với mọi dãy $(x_n) \subset X$ mà $x_n \to x_0$ thì $Ax_n \to Ax_0$. A được gọi là liên tục trên X nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Định lý 6.2. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và A là toán tử tuyến tính từ X vào Y. Khi đó các mệnh đề sau tương đương.

a) A liên tục trên X.

b) A liên tục tại điểm $x_0 \in X$.

c) A liên tục tại 0.

d) Tồn tại một số M dương sao cho với mọi $x \in X$ ta có $\|Ax\| \leq M\|x\|$ (nghĩa là A bị chặn).

Chứng minh. a) $\Rightarrow$ b) hiển nhiên.

b) $\Rightarrow$ c) Giả sử dãy $x_n \to 0$. Khi đó, dãy $x_n + x_0 \to x_0$. Theo b) ta có $A(x_n + x_0) \to Ax_0$. Vì A tuyến tính nên $Ax_n = A(x_n+x_0-x_0) = A(x_n+x_0)-A(x_0) \to 0 = A(0)$. Vậy A liên tục tại 0.

c) $\Rightarrow$ d) Từ giả thiết A liên tục tại 0 nên với $\varepsilon = 1$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn $\|x\| < \delta$ thì $\|Ax\| < 1$. Nếu $x \neq 0$ ta đặt $y = \dfrac{\delta}{2\|x\|}x$ thì $\|\dfrac{\delta x}{2\|x\|}\| < \delta$, do đó $\|A(\dfrac{\delta x}{2\|x\|})\| < 1$. Vì vậy $\|Ax\| \leq \dfrac{2}{\delta}\|x\|$. Nếu $x = 0$ thì $\|A(0)\| \leq M$. Vậy A bị chặn.

d) $\Rightarrow$ a) Giả sử $x_n \to x$. Khi đó

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\|.$$

Vậy A liên tục tại $x \in X$. Vì x chọn bất kỳ nên A liên tục trên X.

Định nghĩa 6.3. Cho A là một toán tử tuyến tính liên tục từ không gian tuyến tính định chuẩn X vào Y. Theo Định lý 6.2 luôn tồn tại số $M > 0$ sao cho $\|Ax\| \leq M\|x\|$ với mọi $x \in X$, nên ta có thể xác định chuẩn của A như sau

$$\|A\| = \inf\{M > 0 : \ \forall x \in X, \|Ax\| \leq M\|x\|\ \} \tag{1.3}$$

gọi là *chuẩn của toán tử.*

Định lý 6.4. Cho A là một toán tử tuyến tính liên tục từ không gian tuyến tính định chuẩn X vào Y. Khi đó

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Đặt $a = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $b = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ và $c = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Theo trên ta có $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq a$, do đó $\|Ax\| \leq a\|x\|$ với mọi $x \in X$. Từ định nghĩa của $\|A\|$ ta suy ra $\|A\| \leq a$.

Với mọi $x \in X$ khác 0 ta đặt $u = \dfrac{x}{\|x\|}$. Khi đó $\|u\| = 1$. Vì A tuyến tính nên

$$a = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\|A(\frac{x}{\|x\|})\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| \leq \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\|.$$

Vậy

$$\|A\| \leq a \leq c \leq b. \tag{1.5}$$

Mặt khác, với mọi $\|x\| \leq 1$, ta có $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \leq \|A\|$.

Suy ra

$$b = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \|A\|. \tag{1.6}$$

Từ (1.5) và (1.6) ta được (1.4).

§ 7 KHÔNG GIAN CÁC TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC

Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn trên cùng một trường $\mathbb{K}$. Kí hiệu $\mathcal{L}(X, Y)$ là tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Dễ dàng kiểm tra $\mathcal{L}(X, Y)$ là một không gian tuyến tính với hai phép toán: cộng hai ánh xạ và nhân ánh xạ với vô hướng. Định lý sau sẽ chứng tỏ $\mathcal{L}(X, Y)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Định lý 7.1. $\mathcal{L}(X, Y)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn xác định bởi (1.3). Nếu Y là một không gian Banach thì $\mathcal{L}(X, Y)$ cũng là một không gian Banach.

Chứng minh. Với mỗi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ theo (1.3) ta có $\|A\| \geq 0$; giả sử $\|A\| = 0$, khi đó $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = 0$ với mọi $x \in X$. Vậy $Ax = 0$ với mọi $x \in X$, nghĩa là $A = 0$. Giả sử $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ và $\alpha \in \mathbb{K}$, ta có

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha|\|A\|.$$

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

Vậy $\mathcal{L}(X, Y)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Giả sử $\{A_n\}$ là dãy cơ bản trong $\mathcal{L}(X, Y)$. Với mỗi $x \in X$ cố định ta có

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\| \tag{1.7}$$

Vì $\{A_n\}$ là dãy cơ bản nên khi $n, m \to \infty$ vế phải của (1.7) dần về không. Do đó dãy $\{A_n(x)\}$ là dãy cơ bản trong Y. Theo giả thiết Y Banach nên $\{A_n(x)\}$ là dãy hội tụ trong Y. Đặt $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ với mỗi $x \in X$. Khi đó A xác định một ánh xạ từ X vào Y và dễ dàng kiểm tra được A là tuyến tính.

Hơn nữa, A là giới nội vì $\{A_n\}$ là dãy cơ bản trong $\mathcal{L}(X, Y)$. Khi đó tồn tại một số $M > 0$ sao cho $\|A_n\| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì vậy với mọi $x \in X$ ta có

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M\|x\|.$$

Vì $\{A_n\}$ là dãy cơ bản nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n > n_0$ ta có $\|A_m - A_n\| < \varepsilon$.

§ 8 KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN HỮU HẠN CHIỀU

Trong mục 1 ta đã biết các không gian $\mathbb{K}^n$ là những không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$. Bây giờ ta sẽ xét các không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều trên $\mathbb{K}$.

Định lý 8.1. Mọi không gian tuyến tính định chuẩn n chiều trên trường $\mathbb{K}$ đều đồng phôi tuyến tính với không gian $\mathbb{K}^n$.

Chứng minh. Giả sử X là một không gian tuyến tính định chuẩn n chiều trên trường $\mathbb{K}$. Gọi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của X. Khi đó với mỗi $x \in X$ đều biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k,$$

trong đó $\xi_k \in \mathbb{K}, k = 1, 2, \ldots, n$. Xét ánh xạ

$$A : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

xác định bởi $Ax = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \bar{x}$. Khi đó A là một song ánh tuyến tính.

Bây giờ ta chứng minh A là một phép đồng phôi. Trước hết, ta chứng minh A^{-1} liên tục. Thật vậy, với mỗi $x \in X$ ta có

$$\|x\| = \|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \|e_k\|.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Bunhiakovski ta được

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \|e_k\| \leq (\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} = M\|\bar{x}\| = M\|Ax\|,$$

với $M = (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}$. Suy ra

$$\|A^{-1}\bar{x}\| \leq M\|\bar{x}\|, \quad \text{với mọi } \bar{x} \in \mathbb{K}^n.$$

Vậy A^{-1} bị chặn. Do đó A^{-1} liên tục.

Để chứng minh A liên tục ta đặt

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^n \ : \|\bar{x}\| = 1\}.$$

Khi đó S là tập hợp compact trong $\mathbb{K}^n$. Xét hàm số $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định như sau

$$f(\bar{x}) = \|x\|, \bar{x} \in S$$

Vì $f(\bar{x}) = \|A^{-1}\bar{x}\|$ và A^{-1} liên tục nên f liên tục trên S. Vì S compact nên hàm f đạt giá trị nhỏ nhất α trên S, nghĩa là tồn tại một phần tử $\bar{y} \in S$ sao cho $f(\bar{y}) = \alpha = \|y\| > 0$. Vì vậy, ta có

$$\|x\| = f(\bar{x}) \geq \alpha, \text{ với mọi } \bar{x} \text{ sao cho} \|\bar{x}\| = 1.$$

Với $x \in X$ bất kỳ ta đặt $z = \dfrac{x}{\|\bar{x}\|}$. Khi đó $\|\bar{z}\| = 1$ nên $\|z\| \geq \alpha$. Suy ra $\dfrac{\|x\|}{\|\bar{x}\|} \geq \alpha$.

Vậy $\|Ax\| \leq \dfrac{1}{\alpha}\|x\|$, với mọi $x \in X$. Điều này chứng tỏ A bị chặn, nên A liên tục.

Hệ quả 8.2. Mọi chuẩn trong không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều đều tương đương với nhau.

Chứng minh. Giả sử X là không gian tuyến tính định chuẩn n chiều và $\| \|_1, \| \|_2$ là hai chuẩn trên X. Gọi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của X và $X_1 = (X, \| \|_1), X_2 = (X, \| \|_2)$. Với mỗi $x \in X$ biểu diễn dưới dạng $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$,
ta xét ánh xạ $A : X_1 \longrightarrow \mathbb{K}^n$, và $A^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow X_2$

$$x \longmapsto (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad \longmapsto x.$$

Khi đó A là song ánh tuyến tính. Hơn nữa theo định lý trên A là phép đồng phôi tuyến tính không phụ thuộc vào chuẩn trên X. Do đó ánh xạ đồng nhất $id : A^{-1}oA$ là phép đồng phôi từ X_1 vào X_2. Vậy hai chuẩn $\| \|_1$ và $\| \|_2$ là tương đương.

Định lý 8.3. Mọi toán tử tuyến tính từ một không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều vào một không gian tuyến tính định chuẩn bất kỳ đều liên tục.

Chứng minh. Giả sử X là một không gian tuyến tính định chuẩn n chiều và A là một toán tử tuyến tính từ X vào không gian tuyến tính định chuẩn Y. Gọi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở trong X. Khi đó với mỗi $x \in X$ được biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

Hơn nữa, mọi chuẩn trong không gian hữu hạn chiều là tương đương nên ta có thể chọn chuẩn xác định

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Vì A tuyến tính nên ta có

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \|A(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k)\| \\
&\leq \|\sum_{k=1}^{n} \xi_k A(e_k)\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \|Ae_k\| \\
&\leq (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq M\|x\|,
\end{aligned}$$

trong đó $M = (\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Vậy A bị chặn. Do đó A liên tục.

Định lý 8.4. Điều kiện cần và đủ để không gian tuyến tính định chuẩn X có số chiều hữu hạn là hình cầu đóng đơn vị $B'(0;1)$ trong X là một tập compact.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử X là không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều, có số chiều là n, khi đó X đồng phôi với $\mathbb{K}^n$. Vì vậy $B'(0;1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ là ảnh liên tục của một tập compact trong $\mathbb{K}^n$ nên nó compact.

Điều kiện đủ. Bằng phản chứng, giả sử X là không gian vô hạn chiều. Chọn $x_1 \in X$ sao cho $\|x_1\| = 1$, khi đó X không thể trùng với không gian con đóng một chiều sinh bởi x_1, theo Hệ quả 5.4 tồn tại $x_2 \in X$, sao cho $\|x_2\| = 1$ và $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$. Do X vô hạn chiều nên X không trùng với Lin$\{x_1, x_2\}$. Áp dụng Hệ quả 5.4 lần nữa sẽ tồn tại $x_3 \in X$ với $\|x_3\| = 1$ và $\|x_3 - x_k\| > \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$. Bằng qui nạp ta xây dựng được một dãy $\{x_n\}$ sao cho $\|x_n\| = 1$ và $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ với $m \neq n$. Vì vậy mọi dãy con của dãy $\{x_n\} \subset B'(0;1)$ không hội tụ. Suy ra $B'(0;1)$ không compact. Điều này trái với giả thiết. Vậy X là không gian hữu hạn chiều.

Chương 2

Ba nguyên lý cơ bản của giải tích hàm

§ 1 NGUYÊN LÝ BỊ CHẶN ĐỀU - ĐỊNH LÝ BANACH-STEIHAUS

Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và $(A_i)_{i\in I}$ là họ các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Khi đó nếu $\{A_i| \in I\}$ là tập hợp bị chặn trong $\mathcal{L}(X, Y)$ thì với mỗi $x \in X$ tập hợp $\{A_i x|i \in I\}$ là tập hợp bị chặn trong Y. Vấn đề đặt ra là điều ngược lại có còn đúng không? Định lý sau sẽ trả lời câu hỏi này.

Định lý 1.1. (Banach-Steinhaus)[6] Cho X là không gian Banach và Y là không gian tuyến tính định chuẩn. Giả sử $\{A_i|i \in I\}$ là họ toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y sao cho với mỗi $x \in X$ tập hợp $\{A_i x | i \in I\}$ bị chặn trong Y. Khi đó $\{A_i | i \in I\}$ là tập hợp bị chặn trong $\mathcal{L}(X, Y)$; nghĩa là tồn tại một số M dương sao cho

$$\|A_i\| \leq M, \text{ với mọi } i \in I.$$

Chứng minh. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và $i \in I$, ta đặt

$$B_{n,i} = \{x \in X \ : \ \|A_i x\| \leq n \}$$

vì A_i liên tục nên $B_{n,i}$ đóng. Đặt $B_n = \bigcap_{i \in I} B_{n,i}$. Khi đó B_n đóng trong X.

Mặt khác, với mỗi $x \in X$ tập hợp $\{A_i x \mid i \in I \}$ bị chặn trong Y, nên tồn tại số M_x dương sao cho $\|A_i x\| \leq M_x$ với mọi $i \in I$. Chọn $n > M_x$ khi đó $x \in B_n$. Vậy $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Vì X là không gian Banach nên nó thuộc phạm trù thứ 2, do đó tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $\overset{o}{\overline{B}}_{n_0} \neq \emptyset$. Theo cách xây dựng tập hợp B_{n_0} là tập hợp đóng nên $\overset{o}{B}_{n_0} \neq \emptyset$. Do đó tồn tại hình cầu mở $B(x_0, r)$ chứa trong B_{n_0}.

Với mỗi $x \in X$ khác không, ta có

$$x_0 + \frac{rx}{2\|x\|} \in B(x_0, r) \subset B_{n_0}.$$

Như vậy với mỗi $i \in I$, ta đều có

$$\|A_i(x_0 + \frac{rx}{2\|x\|})\| \le n_0.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\|A_i(\frac{rx}{2\|x\|})\| &\le \|A_i(x_0 + \frac{rx}{2\|x\|})\| + \|A_i(x_0)\| \\ &\le n_0 + \|A_i(x_0)\|\end{aligned}$$

Vì A_i tuyến tính nên, ta được

$$\|\frac{r}{2\|x\|}A_i(x)\| \le n_0 + \|A_i(x_0)\| \le 2n_0,$$

hay

$$\|A_i(x)\| \le \frac{4n_0}{r}\|x\| \text{ với mọi } x \in X.$$

Vậy $\|A_i\| \le \dfrac{4n_0}{r}$, với mọi $i \in I$.

Định nghĩa 1.2. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và (A_i) là họ các toán tử tuyến tính từ X vào Y. Nếu với mỗi $x \in X$ tồn tại một số dương M_x sao cho $\|A_n(x)\| \leq M_x$ với mọi $i \in I$ thì ta nói họ (A_i) bị chặn điểm. Nếu họ $(A_i) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ và tập $\{A_i : \ i \in I\}$ bị chặn trong $\mathcal{L}(X, Y)$ thì ta nói họ (A_i) bị chặn đều.

Nhận xét. Từ định lý trên ta suy ra rằng nếu X là không gian Banach và họ $(A_i) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ bị chặn điểm thì bị chặn đều.

Định lý 1.3. Cho X là một không gian Banach, Y là một không gian tuyến tính định chuẩn và (A_n) là dãy các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Nếu với mỗi $x \in X$ sao cho $A_n x \to Ax$, khi $n \to \infty$ thì A là toán tử tuyến tính liên tục và

$$\|A\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

Chứng minh. Theo giả thiết với mỗi $x \in X$, $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ nghĩa là dãy $(A_n x)$ hội tụ trong Y, do đó tập hợp $\{A_n x | \ n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn trong Y. Theo định lý Banach-Steinhaus tồn tại số M dương sao cho $\|A_n\| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác, ta có

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \|x\|$$

nên

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\|$$

hay

$$\|Ax\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\| \|x\|$$

Suy ra

$$\|Ax\| \le M \|x\|$$

Vậy A liên tục và ta có

$$\|A\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

Định nghĩa 1.4. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ các toán tử tuyến tính từ X vào Y được gọi là họ đồng liên tục đều nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn $\|x\| < \delta$ thì $\|A_\alpha x\| < \varepsilon$ với mọi $\alpha \in I$

Định lý 1.5. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ các toán tử tuyến tính từ X vào Y. Họ $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ đồng liên tục đều khi và chỉ khi $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ bị chặn đều.

§ 2 NGUYÊN LÝ ÁNH XẠ MỞ

Định nghĩa 2.1. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn. Ánh xạ A từ X vào Y được gọi là ánh xạ mở nếu với mọi G mở trong X thì $A(G)$ mở trong Y.

Định lý 2.2. (Nguyên lý ánh xạ mở)[6] Cho X, Y là hai không gian Banach và A toàn ánh liên tục từ X vào Y. Khi đó A là ánh xạ mở.

Chứng minh. Ta chứng minh định lý này theo 3 bước

1) Ta chứng minh tồn tại số $r > 0$ sao cho

$$B_Y(0; 2r) \subset \overline{A(B_X(0;1))}.$$

Thật vậy, ta có thể biểu diễn

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_X(0;1)$$

Vì A toàn ánh nên

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(B_X(0;1)).$$

Theo giả thiết Y là không gian Banach nên nó thuộc phạm trù thứ 2, theo Định lý Baire tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\overset{o}{\overline{n_0A(B_X(0;1))}} \neq \emptyset$. Suy ra $\overset{o}{\overline{A(B_X(0;1))}} \neq \emptyset$. Do đó tồn tại số $r > 0$ và $y_0 \in Y$ sao cho $B_Y(y_0;4r) \subset \overline{A(B_X(0;1))}$. Vì $y_0 \in \overline{A(B_X(0;1))}$ nên $-y_0 \in \overline{A(B_X(0;1))}$. Từ đó suy ra

$$B_Y(0;4r) \subset 2\overline{A(B_X(0;1))}.$$

Vậy

$$B_Y(0;2r) \subset \overline{A(B_X(0;1))}.$$

2) Bây giờ ta chứng minh $B_Y(0;r) \subset A(B_X(0;1))$. Điều này nghĩa là với mỗi $y \in Y$ thoả mãn $\|y\| < r$ ta chứng minh tồn tại $x \in B_X(0;1)$ sao cho $y = Ax$.

Theo 1) ta có với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $x \in X$ sao cho $\|x\| < \frac{1}{2}$ và thoả $\|y - Ax\| < \varepsilon$. Với $\varepsilon = \frac{r}{2}$ khi đó tồn tại $x_1 \in X$ sao cho $\|x_1\| < \frac{1}{2}$ và thoả $\|y - Ax_1\| < \frac{r}{2}$. Lại theo 1) với $\|y - Ax_1\| < \frac{r}{2}$ tồn tại $x_2 \in X$ sao cho $\|x_2\| < \frac{1}{2^2}$ và thoả $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{r}{2^2}$. Tiếp tục quá trình khi đó tồn tại dãy (x_n) trong X thoả $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$ và $\|y - Ax_1 - \cdots - Ax_n\| < \frac{r}{2^n}$.

Ta thấy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ, vì X là không gian Banach nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ về $x \in X$. Theo giả thiết A tuyến tính liên tục nên ta có

$$Ax = A(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Ax_k = y.$$

3) Giả sử G mở trong X. Lấy y_0 điểm bất kỳ trong $A(G)$, khi đó tồn tại $x_0 \in G$ sao cho $y_0 = Ax_0$. Vì G mở nên tồn tại $B_X(x_0; \varepsilon) \subset G$ hay $x_0 + B_X(0; \varepsilon) \subset G$. Khi đó ta có $y_0 + A(B_X(0; \varepsilon)) \subset A(G)$. Theo 2) tồn tại số $r > 0$ sao cho

$$B_Y(0; r\varepsilon) \subset A(B_X(0; \varepsilon)).$$

Suy ra $y_0 + B_Y(0; r\varepsilon) \subset A(G)$, hay $B_Y(y_0; r\varepsilon) \subset A(G)$. Vậy $A(G)$ là tập mở.

Hệ quả 2.3. Cho X, Y là hai không gian Banach và A là song ánh tuyến tính liên tục từ X vào Y. Khi đó A là phép đồng phôi.

Định nghĩa 2.4. Giả sử X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn. Ánh xạ A từ X vào Y được gọi là toán tử đóng nếu đồ thị $Gr(A) = \{(x, Ax) | \; x \in X\}$ của A là tập đóng.

Nhận xét: Nếu A là ánh xạ liên tục từ X vào Y thì A là toán tử đóng.

Định lý 2.5. (Nguyên lý đồ thị đóng) Giả sử X, Y là hai không gian Banach và ánh xạ A từ X vào Y là toán tử đóng. Khi đó A liên tục.

Chứng minh. Vì X, Y là hai không gian Banach nên không gian tích $X \times Y$ là không gian Banach. Theo giả thiết $Gr(A)$ đóng trong không gian Banach nên $Gr(A)$ cũng là không gian Banach.

Xét các ánh xạ chiếu

$$p_X : X \times Y \longrightarrow X$$

$$p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$$

đó là các toán tử liên tục.

Đặt $p = p_X|_{Gr(A)}$ khi đó ánh xạ này xác định bởi hệ thức $p(x, Ax) = x$ là một toàn ánh liên tục, do đó theo nguyên lý ánh xạ mở p là phép đồng phôi. Vì vậy $A = p_Y \circ p^{-1}$ là ánh xạ liên tục.

§ 3 ĐỊNH LÝ HAHN-BANACH

Định lý 3.1. (Định lý Hahn-Banach về sự thác triển phiếm hàm tuyến tính trong không gian thực)[4] Cho X là một không gian tuyến tính thực, p là một sơ chuẩn trên X, M là một không gian con của X và f là một phiếm hàm tuyến tính trên M sao cho

$$f(x) \leq p(x), \text{ với mọi } x \in M.$$

Khi đó tồn tại một phiếm hàm F trên X saocho $F(x) = f(x)$ với mọi $x \in M$ và

$$F(x) \leq p(x), \text{ với mọi } x \in X.$$

Chứng minh. Chia chứng minh ra làm hai bước

1) Lấy $x_0 \in X \setminus M$ và đặt $M_1 = \text{Lin}\{M, x_0\}$. Ta chứng minh rằng f có thể thác triển thành f_1 trên M_1 và thoả mãn điều kiện $f_1(x) \leq p(x)$ với mọi $x \in M_1$.

Thật vậy, với mọi $x, y \in M$ ta có:

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \leq p(x - y) \leq p(x + x_0) + p(-y - x_0).$$

Suy ra

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq p(x + x_0) - f(x), \text{ với mọi } x, y \in M.$$

Đặt $\alpha = \sup\{-p(y - x_0) - f(y) : \ y \in M\}$ (2) và $\beta = \inf\{p(x + x_0) - f(x) : x \in M\}$.

Chọn λ sao cho $\alpha \leq \lambda \leq \beta$. Khi đó, ta xác định phiếm hàm f_1 trên M_1 như sau $f_1(x_1) = f_1(x + \xi x_0) = f(x) + \xi\lambda$ trong đó $x \in M$ và $\xi \in \mathbb{R}$. Dễ dàng kiểm tra f_1 là một phiếm hàm tuyến tính trên M_1 và $f_1(x) = f(x)$ với mọi $x \in M$.

Ta còn phải chứng minh $f_1(x_1) \leq p(x_1)$ với mọi $x_1 \in M_1$. Giả sử $\xi \neq 0$, do đó $\frac{x}{\xi} \in M$. Từ (2) ta suy ra

$$-p(-\frac{x}{\xi} - x_0) - f(\frac{x}{\xi}) \leq \lambda \leq p(\frac{x}{\xi} + x_0) - f(\frac{x}{\xi})(3)$$

nếu $\xi > 0$ thì từ (3) ta được

$$f_1(x_1) = f(x) + \xi\lambda \leq p(x + \xi x_0) = p(x_1), \text{ với mọi } x_1 \in M_1$$

nếu $\xi < 0$ tương tự ta cũng có $f_1(x_1) \leq p(x_1)$.

2) Kí hiệu $\mathcal{P}$ là họ gồm các phần tử (M_α, f_α) trong đó M_α là một không gian con của X chứa M và f_α là một phiếm hàm tuyến tính từ M_α vào $\mathbb{R}$ sao cho $f_\alpha(x) = f(x)$ với mọi $x \in M$ và $f_\alpha(x) \leq p(x)$ với mọi $x \in M_\alpha$. Trên $\mathcal{P}$ ta trang bị một quan hệ thứ tự như sau $f_\alpha \leq f_\beta$ khi và chỉ khi $M_\alpha \subset M_\beta$ và $f_\beta(x) = f_\alpha(x)$, với mọi $x \in M_\alpha$. Khi đó $\mathcal{P}$ là tập sắp thứ tự. Giả sử $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ là một bộ phận sắp thẳng. Ta đặt $Z = \bigcup\limits_{(M_\alpha, f_\alpha) \in \mathcal{P}_1} M_\alpha$. Với mỗi $x \in Z$ tồn tại $(M_\alpha, f_\alpha) \in \mathcal{P}_1$ sao cho $x \in M_\alpha$, đặt $h(x) = f_\alpha(x)$. Do tính sắp thẳng của $\mathcal{P}_1$ nên Z là một không gian con của X chứa M và (Z, h) là một cận trên của $\mathcal{P}_1$. Theo bổ đề Zorn tồn tại phần tử tối đại (Y, F) trong $\mathcal{P}$. Khi đó $Y = X$. Thật vậy, nếu $Y \neq X$ thì theo cách xây dựng trên sẽ tồn tại một phần tử (Y_1, F_1) lớn hơn (Y, F). Điều này mâu thuẩn với (Y, F) là phần tử tối đại. Vậy F là hàm cần tìm.

Định lý 3.2. (Định lý Hahn-Banach về sự thác triển phiếm hàm tuyến tính trong không gian phức) Cho X là một không gian tuyến tính phức, p là một nửa chuẩn trên X, M là một không gian con của X và f là một phiếm hàm tuyến tính trên

M sao cho

$$|f(x)| \leq p(x), \text{ với mọi } x \in M.$$

Khi đó tồn tại một phiếm hàm F trên X saocho $F(x) = f(x)$ với mọi $x \in M$ và

$$|F(x)| \leq p(x), \text{ với mọi } x \in X.$$

Chứng minh. Trước hết, ta có nhận xét sau: Cho f là một phiếm hàm tuyến tính phức thì có thể biểu diễn $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ trong đó f_1, f_2 là hai hàm tuyến tính thực. Khi đó, ta có $f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) = if_1(x) - f_2(x)$.

Suy ra

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix) \ (3).$$

Hơn nữa, ta lại có $f_1(x) \leq |f(x)| \leq p(x), \text{ với mọi } x \in M$.

Bây giờ ta áp dụng Định lý Hahn-Banach thực cho hàm f_1 xét trên không gian thực M. Khi đó tồn tại một phiếm hàm F_1 trên X sao cho $F_1(x) = f_1(x)$ trên M và thoả mãn điều kiện $F_1(x) \leq p(x)$ trên X. Mặt khác, ta có

$$-F_1(x) = F_1(-x) \leq p(-x) = p(x), \ \forall x \in X.$$

Suy ra $|F_1(x)| \leq p(x)$, với mọi $x \in X$.

Đặt $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$. Khi đó F là một phiếm hàm tuyến tính phức trên X và $F(x) = f(x)$, với mọi $x \in X$.

Mặt khác, ta có $|F(x)| = F(x)e^{-i\theta}$ trong đó θ là argument của $F(x)$. Suy ra

$$|F(x)| = F(x)e^{-i\theta} = F(e^{-i\theta}x) = F_1(e^{-i\theta}x)$$

vì phần ảo của $F(e^{-i\theta}x) = 0$.

Vì vậy, $|F_1(e^{-i\theta}x)| \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$. Vậy $|F(x)| \leq p(x)$ với mọi $x \in X$.

Định lý 3.3. (Định lý Hahn-Banach về sự thác triển phiếm hàm tuyến tính trong không gian tuyến tính định chuẩn) Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn, M là một không gian con của X và f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên M. Khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên X saocho $F(x) = f(x)$ với mọi $x \in M$ và $\|F\| = \|f\|$.

Chứng minh. Đặt $p(x) = \|f\|\|x\|$ với mọi $x \in X$. Khi đó p là nửa chuẩn Theo Định lý 3.2 tồn tại phiếm hàm F thác triển của f lên X sao cho $|F(x)| \leq p(x) = \|f\|\|x\|$ với mọi $x \in X$. Do đó F liên tục và $\|F\| \leq \|f\|$. Mặt khác, ta luôn luôn có $\|f\| \leq \|F\|$. Vậy $\|F\| = \|f\|$.

Hệ quả 3.4. Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn, $x_0 \in X$ khác 0. Khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X sao cho $\|f\| = 1$và $f(x_0) = \|x_0\|$.

Chứng minh. Đặt $M = \text{Lin}\{x_0\} = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{C}\}$ và $f_1(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. Khi đó f_1 là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên M. Theo Định lý 3.3 tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục f là thác triển của f_1 lên X sao cho $\|f\| = \|f_1\| = 1$ và $f(x_0) = f_1(x_0) = \|x_0\|$.

Hệ quả 3.5. Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn, M là một không gian con của X, $x_0 \in X$ sao cho d=dist$(x_0, M) > 0$. Khi đó tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X sao cho $f(x_0) = 1$ $f(x) = 0$ với mọi $x \in M$ và $\|f\| = \dfrac{1}{d}$.

Chứng minh. Đặt $M_1 = \text{Lin}\{x_0, M\} = \{x + \alpha x_0 : x \in M, \alpha \in \mathbb{C}\}$ và $f_1(x+\alpha x_0) = \alpha$. Khi đó f_1 là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên M_1 với $f(x_0) = 1$, $f(x) = 0$ với mọi $x \in M$. Ngoài ra, ta có

$$\|f_1\| = \sup_{x+\alpha x_0 \neq 0} \frac{|f(x+\alpha x_0)|}{\|x+\alpha x_0\|} = \sup_{\alpha\neq 0, x\in M} \frac{|\alpha|}{|\alpha|\|\frac{x}{\alpha} + x_0\|}$$

$$\sup_{\alpha\neq 0, x\in M} \frac{1}{\|\frac{x}{\alpha}+x_0\|} = \frac{1}{\inf\limits_{\alpha\neq 0, x\in M}\|\frac{x}{\alpha}+x_0\|} = \frac{1}{d}.$$

Theo Định lý 3.3 tồn tại f là thác triển của f_1 lên X sao cho $\|f\| = \|f_1\| = \dfrac{1}{d}$.

§ 4 KHÔNG GIAN LIÊN HIỆP

Định nghĩa 4.1. Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn trên trường $\mathbb{K}$. Khi đó $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X là một không gian định chuẩn và nó được gọi là không gian liên hiệp của X. Kí hiệu $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$

Nhận xét:

1) Với mỗi phần tử $x^* \in X^*$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X và có chuẩn là

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|.$$

2) Không gian liên hiệp X^* của một không gian tuyến tính định chuẩn là một

không gian Banach.

3) Với mỗi $x \in X$, ta có

$$\|x\| = \sup_{x^* \in X^*, \|x^*\|=1} |x^*(x)|.$$

Thật vậy, theo định nghĩa của chuẩn toán tử tuyến tính ta có $|x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\|$. Suy ra $\sup\limits_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \leq \|x\|$ với mọi $x^* \in X^*$. Ngược lại, nếu $x = 0$ đẳng thức trên luôn đúng; nếu $x \neq 0$ thì theo Hệ quả của định lý Hahn-Banach tồn tại $x^* \in X^*$ sao cho $x^*(x) = \|x\|$ và $\|x^*\| = 1$. Vậy

$$\|x\| = |x^*(x)| \leq \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|.$$

Định lý 4.2. Với mỗi $f \in (\mathbb{K}^n)^*$ tồn tại phần tử $a \in \mathbb{K}^n$ sao cho

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

Ngược lại, với mỗi $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục f_a trên $\mathbb{K}^n$ sao cho

$$f_a(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

và $\|f_a\| = \|a\|$ với

$$\|a\| = (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

.

Chứng minh. Đặt $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ k = 1, \ldots, n$. Khi đó, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}^n$. Với mỗi $x \in \mathbb{K}^n$ ta có

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Vì $f \in (\mathbb{K}^n)^*$ nên $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$. Đặt $a_k = f(e_k), \ k = 1, \ldots, n$, ta được $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ và

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Ngược lại, với mỗi $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, ta đặt

$$f_a(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

Khi đó f_a tuyến tính, liên tục và

$$|f_a(x)| \le (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \|a\| \|x\|.$$

Suy ra $\|f_a\| \le \|a\|$.

Nếu $a = 0$ ta chọn $f = 0$, nếu $a \neq 0$ ta chọn $x_0 = (y_1, \dots, y_n)$ với $y_k = \frac{\overline{a}_k}{\|a\|}$. Khi đó, $\|x_0\| = 1$ và

$$f_a(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \overline{a}_k}{\|a\|} = \|a\| \le \|f_a\|.$$

Vậy $\|f_a\| = \|a\|$.

Định nghĩa 4.3. (Không gian liên hiệp thứ 2) Cho$X$ là một không gian định chuẩn. Khi đó ta có X^* là không gian liên hiệp của X. Ta gọi không gian liên hiệp của không gian X^* là không gian liên hiệp thứ 2 của không gian định chuẩn X. Kí hiệu X^{**}.

Nhận xét : Ta nhận thấy mối liên hệ giữa không gian X và không gian X^* không được rõ ràng. Tuy nhiên giữa không gian X và không gian X^{**} có mối quan hệ khá rõ ràng. Điều này thể hiện qua định lý sau.

Định lý 4.4. Cho X là một không gian định chuẩn. Khi đó tồn tại một đơn ánh tuyến tính φ từ X vào X^{**} sao cho $\|\varphi(x)\| = \|x\|$, với mọi $x \in X$.

Chứng minh. Với mỗi $x \in X$ ta xét ánh xạ $\tilde{x}$ xác định trên X^* như sau: $\tilde{(}x^*) = x^*(x), \forall x^* \in X^*$.

Khi đó, $\tilde{x}$ tuyến tính. Thật vậy, với mọi $x^*, y^* \in X^*, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ta có

$$\tilde{(}\alpha x^* + \beta y^*) = (\alpha x^* + \beta y^*)(x) = \alpha x^*(x) + \beta y^*(x) = \alpha\tilde{x}(x^*) + \beta\tilde{x}(y^*).$$

Hơn nữa, ta có

$$\sup_{x^*, \|x^*\|=1} |\tilde{x}(x^*)| = \sup_{x^*, \|x^*\|=1} |x^*(x)| = \|x\|.$$

Suy ra $\tilde{x}$ liên tục và có chuẩn $\|\tilde{x}\| = \|x\|$. Điều này chứng tỏ có một đơn ánh tuyến tính $\varphi : X \longrightarrow X^{**}$ và bảo toàn chuẩn.

Ngoài ra φ là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, với mọi $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ta có

$$(\varphi(\alpha x + \beta y))(x^*) = x^*(\alpha x + \beta y) = \alpha x^*(x) + \beta x^*(y) = (\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y))(x^*),$$

với mọi $x^* \in X^*$. Suy ra $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$. Từ tính tuyến tính và bảo toàn chuẩn của φ suy ra φ liên tục.

Như vậy với kết quả của định lý trên ta thấy không gian định chuẩn X là đẳng cự tuyến tính với một không gian con của không gian X^{**}, nên ta có thể xem X là một không gian con của X^{**}.

§ 5 HỘI TỤ YẾU

Định nghĩa 5.1. Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn trên trường $\mathbb{K}$. Kí hiệu $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ là tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X. Dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là hội tụ yếu đến x trong X nếu với mọi $x^* \in X^*$ dãy $x^*(x_n)$ hội tụ đến $x^*(x)$ trong $\mathbb{K}$. Kí hiệu $x_n \xrightarrow{w} x$.

Chú ý Sự hội tụ theo chuẩn trong không gian tuyến tính định chuẩn được gọi là hội tụ mạnh.

Định lý 5.2. Mọi dãy hội tụ mạnh trong không gian tuyến tính định chuẩn X đều hội tụ yếu.

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy trong X hội tụ đến $x \in X$. Với mỗi $x^* \in X^*$ ta có $x^*(x_n)$ hội tụ đến $x^*(x)$ (vì x^* liên tục). Vậy x_n hội tụ yếu đến x.

Định lý 5.3. Mọi dãy hội tụ yếu trong không gian tuyến tính định chuẩn X đều bị chặn trong X.

Chứng minh. Giả sử dãy x_n hội tụ yếu trong X. Khi đó, với mỗi $x^* \in X^*$ dãy $x^*(x_n) = x_n(x^*)$ hội tụ trong $\mathbb{K}$ nên nó bị chặn; nghĩa là họ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn điểm. Theo nguyên lý Banach-Steinhaus dãy (x_n) bị chặn đều, nghĩa là $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$.

Chương 3

Các không gian L^p

§ 1 KHÔNG GIAN L^P, $1 \leq P < +\infty$

Giả sử $(X, \mathcal{B}, \mu)$ là một không gian độ đo. Hàm số phức $f(x) = u(x) + iv(x)$ xác định trên tập hợp $A \in \mathcal{B}$ gọi là đo được trên A nếu u, v là hai hàm số thực đo được trên A. Rõ ràng nếu f là một hàm số phức đo được trên A thì $|f|$ là một hàm số thực đo được trên A.

Cho $1 \leq p < \infty$, gọi $L^p(X, \mu)$ là tập hợp tất cả các hàm đo được trên X sao cho

$$\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty,$$

trong đó hai hàm phức tương đương trên X được xem là đồng nhất. Nếu $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập hợp đo được theo Lebesgue và μ là độ đo Lebesgue thì ta ký hiệu $L^p(X)$.

Định lý 1.1. Tập hợp $L^p(X,\mu)$ với hai phép toán cộng là tổng của hai hàm và nhân là nhân một hàm với một số (thường gọi là nhân vô hướng) tạo thành một không gian vectơ.

Chứng minh. Giả sử $f, g \in L^p(X,\mu)$, ta có

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)| &\leq |f(x)|+|g(x)| \\ &\leq 2\max(|f(x)|,|g(x)|), \text{ với mọi } x \in X. \end{aligned}$$

Suy ra

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p), \text{ với mọi } x \in X.$$

Vậy $f+g \in L^p(X,\mu)$.

Ngoài ra, với mọi $\alpha \in \mathbb{C}$ ta có $\alpha f \in L^p(X,\mu)$.

Vậy $L^p(X,\mu)$ là một không gian vectơ.

Bổ đề 1.2. Giả sử a, b là hai số dương. Nếu $1 < p < \infty$ và q thoả mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

thì

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{3.1}$$

Chứng minh. Đặt $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t$, $(t \geq 0)$. Hàm $\varphi(t)$ xác định trên $[0, +\infty)$ và có đạo hàm tại mọi $t \in [0, +\infty)$ là $\varphi'(t) = t^{p-1} - 1$. Khi đó,

$$\varphi'(t) < 0,\ \forall t \in (0, 1) \text{ và } \varphi'(t) > 0,\ \forall t \in (1, +\infty).$$

Do đó hàm $\varphi(t)$ đạt cực tiểu tại $t = 1$ và $\varphi(1) = 0$. Suy ra $\varphi(t) \geq \varphi(1), \forall t \in [0, +\infty)$.

Vậy

$$\frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t \geq 0,\ \forall t \in [0, +\infty). \tag{3.2}$$

Chọn $t = ab^{-\frac{q}{p}}$, ta thay vào (3.2) ta được

$$\frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} - ab^{-\frac{q}{p}} \geq 0.$$

Vì vậy ta có

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Định lý 1.3. (Bất đẳng thức Holder) Giả sử $1 < p < \infty$ và q thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nếu $f \in L^p(X, \mu)$ và $g \in L^q(X, \mu)$ thì $fg \in L^1(X, \mu)$ và

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq (\int_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_X |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.3}$$

Chứng minh. Nếu $\int_X |f(x)|^p d\mu = 0$ hoặc $\int_X |g(x)|^q d\mu = 0$ thì bất đẳng thức (3.3) đúng.

Giả sử $\int_X |f(x)|^p d\mu > 0$ và $\int_X |g(x)|^q d\mu > 0$.

$$\text{Chọn } a = \frac{|f(x)|}{(\int_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}} \text{ và } b = \frac{|g(x)|}{(\int_X |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (3.1) ta được

$$\frac{|f(x)g(x)|}{(\int_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_X |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{(\int_X |f(x)|^p d\mu)} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{(\int_X |g(x)|^q d\mu)}.$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\frac{1}{(\int_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_X |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}} \int_X |f(x)g(x)| d\mu$$
$$\leq \frac{1}{p}\frac{\int_X |f(x)|^p d\mu}{(\int_X |f(x)|^p d\mu)} + \frac{1}{q}\frac{\int_X |g(x)|^q d\mu}{(\int_X |g(x)|^q d\mu)}$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Vậy

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq (\int_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_X |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

Chú ý rằng với tổng hữu hạn hoặc vô hạn ta cũng có bất đẳng thức tương tự

$$\sum_k |a_k b_k| \leq (\sum_k |a_k|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_k |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Định lý 1.4. (Bất đẳng thức Minkovski) Giả sử $1 \leq p < +\infty$ và $f, g \in L^p(X, \mu)$. Khi đó $f + g \in L^p(X, \mu)$ và

$$(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X |g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Chứng minh. Với mọi $f, g \in L^p(X,\mu)$, ta có

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu \le \int_X |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}d\mu + \int_X |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}d\mu.$$

Vì $|f+g|^{p-1} \in L^q(X,\mu)$ nên áp dụng bất đẳng thức Holder ta được

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu &\le \|f\|_p\Big(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \|g\|_p\Big(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\Big(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\Big(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int_X |f(x)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X |g(x)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{3.4}$$

Định lý 1.5. Cho $(X, \mathcal{B}, \mu)$ là không gian độ đo, $1 \le p < +\infty$. Khi đó, hàm

$$\|f\| = \Big(\int_X |f(x)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$$

xác định một chuẩn trên $L^p(X,\mu)$ và $L^p(X,\mu)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Chứng minh. Với mỗi $f \in L^p(X, \mu)$ theo định nghĩa

$$\|f\| = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

và $f = 0$ hầu khắp nơi khi và chỉ khi $\int_X |f(x)|^p d\mu = 0$, nghĩa là $\|f\| = 0$.

Với $\alpha \in \mathbb{K}$ ta có

$$\|\alpha f\| = \left(\int_X |\alpha f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\|.$$

Với $f, g \in L^p(X, \mu)$ áp dụng bất đẳng thức Minkovski ta được

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Vậy $\| \; \|$ là một chuẩn trên $L^p(X, \mu)$ và $L^p(X, \mu)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Định lý 1.6. Không gian $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$ là một không gian Banach.

Chứng minh. Giả sử $\{f_n\}$ là dãy cơ bản trong không gian $L^p(X, \mu)$. Khi đó, tồn tại dãy con $\{f_{n_k}\}$ của dãy $\{f_n\}$ sao cho

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \; k = 1, 2, \ldots$$

Đặt

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, \text{ với mọi } x \in X.$$

Khi đó, (g_m) là một dãy hàm đo được không âm trên X và

$$\|g_m\| \le \sum_{k=1}^{m} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} < 1, \ \forall m = 1, 2, \ldots.$$

Với mỗi $x \in X$, đặt $g(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$, hàm $g(x)$ có thể nhận giá trị vô cùng tại một số điểm x. Theo bổ đề Fatou ta có

$$\int_X |g(x)|^p d\mu = \int_X \lim_{m\to\infty} |g_m(x)|^p d\mu \le \varliminf_{m\to\infty} \int_X |g_m(x)|^p d\mu \le 1.$$

Suy ra g khả tích trên X. Vậy $g(x)$ hữu hạn hầu khắp nơi trên X và chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \text{ hội tụ hầu khắp nơi trên } X.$$

Vì $\mathbb{K}$ là không gian Banach nên chuỗi

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \tag{3.5}$$

hội tụ hầu khắp nơi về hàm $f(x)$ trên X. Ta giả sử $f(x) = 0$ nếu chuỗi (3.5) không hội tụ. Từ (3.5) ta suy ra $\lim\limits_{n_k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ hầu khắp nơi trên X. Vì $\{f_n\}$ là dãy cơ bản nên với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$, sao cho $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, với mọi $m, n \ge n_0$. Áp dụng bổ đề Fatou ta được

$$\int_X |f(x) - f_n(x)|^p d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p d\mu$$
$$\le \varliminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p, \quad \text{với mọi } n \ge n_0.$$

Do đó $\|f - f_n\| < \varepsilon$, với mọi $n \ge n_0$. Vậy $f = (f - f_n) + f_n \in L^p(x, \mu)$, và $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$.

Hệ quả 1.7. Cho $1 \le p < \infty$. Nếu $\{f_n\} \subset L^p(X, \mu)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ thì tồn tại một dãy con $\{f_{n_k}\}$ của dãy $\{f_n\}$, hội tụ hầu khắp nơi về f trên X.

Định lý 1.8. Cho dãy $\{f_n\} \subset L^p(X, \mu)$, $1 \le p < \infty$. Nếu dãy $\{f_n\}$ đơn điệu tăng và hội tụ hầu khắp nơi về f trên X thì $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$.

Chứng minh. Ta có $|f(x) - f_n(x)|^p \le |f(x) - f_1(x)|^p$ hầu khắp nơi trên X và $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$ hầu khắp nơi. Theo định lý Lebesgue về sự hội tụ bị chặn, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f(x) - f_n(x)|^p d\mu = 0.$$

Vậy $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$

§ 2 KHÔNG GIAN $L^\infty(X, \mu)$

Định nghĩa 2.1. [8] Giả sử $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ là đo được. Gọi S là tập tất cả các số thực α sao cho

$$\mu(g^{-1}((\alpha, +\infty])) = 0.$$

Nếu $S = \emptyset$, thì đặt $\beta = +\infty$. Nếu $S \neq \emptyset$, thì đặt $\beta = \inf S$. Vì

$$g^{-1}((\beta, +\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}((\beta + \frac{1}{n}, +\infty])$$

và hợp của một họ đếm được các tập có độ đo 0 là một tập có độ đo 0 nên $\beta \in S$. Ta gọi β là ess.sup của g

Định nghĩa 2.2. Cho$(X, \mathcal{B}, \mu)$ là không gian độ đo. Hàm phức f đo được trên X

gọi là chủ yếu giới nội nếu $ess.sup|f| \leq K$. Đặt

$$\|f\|_\infty = \text{ess.sup}|f|$$

gọi là chuẩn vô cùng của f.

Chú ý: Ta có thể thấy rằng

$$\|f\|_\infty = \text{ess.sup}|f| = \inf_{A \subset X, \mu A = 0}\{\sup|f(x)| < +\infty,\ x \in X \setminus A\}$$

Định lý 2.3. $L^\infty(X, \mu)$ với chuẩn được định nghĩa như trên là một không gian tuyến tính định chuẩn.

Chú ý. Bất đẳng thức Holder vẫn còn đúng khi $p = 1$ và $q = \infty$.

Định lý 2.4. $L^\infty(X, \mu)$ là một không gian Banach.

Chứng minh. Xét dãy $\{f_n\}$ là dãy cơ bản trong $L^\infty(X, \mu)$. Đặt

$$E_{m,n} = \{x \in X \ :\ |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\},$$

và

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{m,n}.$$

Khi đó $E_{m,n}$ đo được và $\mu(E_{m,n}) = 0$. Suy ra $\mu(E) = 0$.

Vì $\{f_n\}$ là dãy cơ bản nên với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ với mọi $m, n \geq n_0$. Vì $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$ với mọi $x \in X \setminus E$. Suy ra $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in X \setminus E$ và với mọi $m, n \geq n_0$.

Với mỗi $x \in X \setminus E$ dãy $\{f_n(x)\}$ là dãy cơ bản trong $\mathbb{K}$ nên tồn tại giới hạn. Ta đặt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ Khi đó hàm f xác định trên $X \setminus E$. Giả sử trên E ta đặt $f(x) = 0$.

Cố định $m \geq n_0$ và cho $n \to \infty$ từ bất đẳng thức trên ta được

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in X \setminus E.$$

Vì $\mu(E) = 0$ nên $f - f_m \in L^\infty(X, \mu)$. Vậy $f \in L^\infty(X, \mu)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Vậy $L^\infty(X, \mu)$ là một không gian Banach.

Định lý 2.5. Cho $G \subset \mathbb{R}^n$ và $\mu(G) < +\infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Nếu $f \in L^q(G)$ thì $f \in L^p(G)$ và

$$\|f\|_p \leq \mu(G)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q. \tag{3.6}$$

Nếu $f \in L^\infty(G)$ thì

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Nếu $f \in L^p(G)$, $1 \le p < \infty$ và nếu tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho $\|f\|_p \le K$ với mọi p thì $f \in L^\infty(G)$ và $\|f\|_\infty \le K$.

Chứng minh. Nếu $p = q$ thì (3.6) đúng.

Nếu $1 \le p < q \le \infty$ và $f \in L^q(G)$ thì theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\int_G |f(x)|^p d\mu \le \Big(\int_G |f(x)|^q d\mu\Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int_G 1 d\mu\Big)^{1-\frac{p}{q}}.$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\|f\|_p \le \mu(G)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Nếu $f \in L^\infty(G)$ thì từ (3.6) chuyển qua giới hạn ta được

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_p \le \|f\|_\infty. \tag{3.7}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của chuẩn vô cùng khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại tập đo được $A \subset G$ sao cho $\mu(A) > 0$ và $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$ với $x \in A$. Vậy

$$\int_G |f(x)|^p d\mu \geq \int_A |f(x)|^p d\mu \geq \mu(A)(\|f\|_\infty - \varepsilon)^p.$$

Suy ra

$$\|f\|_p \geq (\mu(A))^{\frac{1}{p}}(\|f\|_\infty - \varepsilon).$$

Vì $\varepsilon > 0$ tuỳ ý nên ta được

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty. \tag{3.8}$$

Từ (3.7) và (3.8) ta có

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Ta chứng minh mệnh đề thứ ba của định lý bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $f \in L^p(G)$ thoả $\|f\|_p \leq K$ sao cho $f \notin L^\infty(G)$. Khi đó tồn tại số $K_1 > K$ và tập hợp $A \subset G$ đo được với $\mu(A) > 0$ sao cho $|f(x)| \geq K_1$ với mọi $x \in A$. Lập luận như trong chứng minh (3.8) ta được

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq K_1.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $f \in L^\infty(G)$ và $\|f\|_\infty \leq K$.

§ 3 XẤP XỈ BỞI LỚP HÀM LIÊN TỤC. TÍNH KHẢ LY

Định nghĩa 3.1. (Hàm đơn giản) Giả sử $(X, \mathcal{B}, \mu)$ là một không gian độ đo. Hàm phức s xác định trên X được gọi là hàm đơn giản đo được nếu nó là một hàm đo được trên X và chỉ lấy một số hữu hạn giá trị khác nhau.

Giả sử s lấy các giá trị $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Khi đó s được biểu diễn dưới dạng

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k},$$

trong đó χ_{A_k} là các hàm đặc trưng của các tập hợp

$$A_k = \{x \in X \ : \ s(x) = c_k\}, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Mệnh đề *Cho s là hàm đơn giản đo được trên X. s khả tích trên X khi và chỉ khi độ đo của tập hợp $\{x \in X \ : s(x) \neq 0\}$ là hữu hạn.*

Định lý 3.2. Tập hợp S gồm tất cả các hàm đơn giản khả tích trên X là trù mật trong $L^p(X, \mu)$, với $1 \leq p < \infty$.

Chứng minh. Hiển nhiên $S \subset L^p(X,\mu)$, với $1 \le p < \infty$.

Giả sử $f \in L^p(X,\mu)$. Ta đã biết một hàm phức đo được luôn biểu diễn dưới dạng $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ trong đó $f_k, k = 1,2,3,4$ là các hàm thực không âm đo được trên X. Vì vậy ta chỉ cần xét hàm $f \ge 0$ đo được trên X. Theo cấu trúc của hàm đo được khi đó tồn tại một dãy hàm $\{s_n\}$ đơn giản, đo được, không âm, đơn điệu tăng sao cho

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x),\ \forall x \in X.$$

Vì $0 \le s_n(x) \le f(x), \forall x \in X$ nên $s_n \in L^p(X,\mu)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta có $(f(x) - s_n(x))^p \le (f(x))^p$ và

$$\lim_{n\to\infty} (f(x) - s_n(x))^p = 0$$

Theo giả thiết $f \in L^p(X,\mu)$ nên $f^p \in L^1(X,\mu)$. Áp dụng định lý Lebesgue về hội tụ bị chặn ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_p = 0.$$

Vì vậy với mỗi$f_k, k = 1,2,3,4$ và mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một hàm đơn giản khả tích

s_k saocho $\|f_k - s_k\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$. Đặt $s = s_1 - s_2 + i(s_3 - s_4)$ ta được

$$\|f - s\|_p = \|(f_1 - s_1) - (f_2 - s_2) + i[(f_3 - s_3) - (f_4 - s_4)]\|_p < \varepsilon.$$

Vậy định lý được chứng minh.

Định lý 3.3. Tập hợp các hàm liên tục trên $G \subset \mathbb{R}^n$ có giá compact (được ký hiệu $C_0(G)$) trù mật khắp nơi trong $L^p(G), 1 \leq p < \infty$.

Chứng minh. Theo Định lý 3.2, tập hợp các hàm đơn giản khả tích trù mật trong $L^p(G)$. Vì vậy với mỗi $f \in L^p(G)$ và mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một hàm đơn giản s sao cho $\|f - s\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Do đó ta chỉ cần chứng minh với s là hàm đơn giản tồn tại hàm $g \in C_0(G)$ sao cho $\|g - s\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$ là đủ. Vì s là hàm đơn giản khả tích nên giá của s hữu hạn. Ta có thể giả thiết $s(x) = 0$ với mọi $x \in G^C$. Theo định lý Lusin tồn tại hàm $g \in C_0(G)$ sao cho

$$|g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |s(x)|, \quad \forall x \in G$$

và

$$\mu(\{x \in G : \; s(x) \neq g(x)\}) < \left(\frac{\varepsilon}{4 \sup_x |s(x)|}\right)^p.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta được

$$\int_G |s(x) - g(x)|^p d\mu \leq \left(\int_G |s(x) - g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_G 1 d\mu\right)^{1-\frac{p}{q}}, \ (1 \leq p < q \leq \infty).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|s - g\|_p &\leq \|s - g\|_\infty (\mu(\{x \in G : \ s(x) \neq g(x)\}))^{\frac{1}{p}} \\ &< 2\|s\|_\infty \left(\frac{\varepsilon}{4\|s\|_\infty}\right) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\|f - g\|_p \leq \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < \varepsilon$.

Định lý 3.4. Cho $G \subset \mathbb{R}^n$ và $1 \leq p < \infty$. Khi đó, không gian $L^p(G)$ là không gian khả ly.

Chứng minh. Với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ta đặt

$$\overline{G}_m = \{x \in G : \ d(x, \partial G) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Khi đó, $\overline{G}_m$ là tập compact. Gọi P là tập hợp tất cả các đa thức trên $\mathbb{R}^n$ có hệ số phức hữu tỷ. Đặt

$$P_m = \{\chi_{\overline{G}_m} f \ : f \in P\}.$$

Theo định lý Weierstrass P_m trù mật trong $C(\overline{G}_m)$. Khi đó, tập hợp $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} P_m$ là tập đếm được.

Mặt khác, với mỗi $f \in L^p(G)$ và với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $g \in C_0(G)$ sao cho $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nếu $\frac{1}{m} < d(\text{supp} g, \partial G)$ thì tồn tại $h \in P_m$ sao cho

$$\|g - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}(\mu(\overline{G}_m))^{-\frac{1}{p}}.$$

Suy ra

$$\|g - h\|_p \leq \|g - h\|_\infty (\mu(\overline{G}_m))^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy $\|f - h\| < \varepsilon$.

Vì $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} P_m$ là tập đếm được nên $L^p(G)$ khả ly.

§ 4 KHÔNG GIAN LIÊN HIỆP

Định nghĩa 4.1. Cho $G \subset \mathbb{R}^n$ và $1 \le p \le \infty$. Kí hiệu $(L^p(G))^*$ là tập hợp tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $L^p(G)$ và được gọi là không gian liên hợp của không gian $L^p(G)$. Định lý sau nói lên mối quan hệ giữa không gian $(L^p(G))^*$ và không gian $L^q(G)$, với q là số mũ liên hiệp của p.

Định lý 4.2. Cho $G \subset \mathbb{R}^n$ và $1 \le p \le \infty$. Khi đó với mỗi $g \in L^q(G)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $L^p(G)$ xác định bởi

$$f_g(f) = \int_G f(x)g(x)d\mu, \ f \in L^p(G) \tag{3.9}$$

và $\|f_g\| = \|g\|_q$.

Chứng minh. Theo tính chất của tích phân, phiếm hàm f_g là tuyến tính trên $L^p(G)$. Hơn nữa, theo bất đẳng thức Holder ta có

$$|f_g(f)| \le \int_G |f(x)g(x)|d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Suy ra f_g bị chặn. Vậy f_g liên tục và ta có

$$\|f_g\| \le \|g\|_q. \tag{3.10}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ngược lại. Giả sử $\|g\|_q \neq 0$.

Nếu $p > 1$ thì ta đặt

$$f_0(x) = \begin{cases} |g(x)|^{q-2}\overline{g(x)} & \text{nếu } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } g(x) = 0, \end{cases}$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \int_G |f_0(x)|^p d\mu &= \int_G |g(x)|^{(q-1)p} d\mu \\ &= \int_G |g(x)|^q d\mu = \|g\|_q^q. \end{aligned}$$

Suy ra $f_0 \in L^p(G)$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} f_g(f_0) &= \int_G f_0(x) g(x) d\mu \\ &= \int_G |g(x)|^q d\mu \\ &\leq \|f_g\| \|f_0\|_p. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\int_G |g(x)|^q d\mu \leq \|f_g\| (\int_G |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Chia hai vế cho $(\int_G |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{p}}$ ta được

$$\|g\|_q \leq \|f_g\|. \tag{3.11}$$

Từ (3.10) và (3.11) ta suy ra $\|f_g\| = \|g\|_q$.

Nếu $p = 1$ thì $q = \infty$. Với $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$. Khi đó tồn tại tập $A \subset G$ đo được sao cho $\mu(A) > 0$ và $|g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon$, với mọi $x \in A$. Đặt

$$f_0(x) = \begin{cases} |g(x)|^{-1}\overline{g(x)} \text{ nếu } x \in A \\ 0 \qquad \text{ nếu } x \notin A. \end{cases}$$

Suy ra $f_0 \in L^1(G)$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} f_g(f_0) &= \int_G f_0(x)g(x)d\mu \\ &= \int_G |g(x)|d\mu \\ &\geq \int_G (\|g\|_\infty - \varepsilon)d\mu \\ &= \|f_0\|_1(\|g\|_\infty - \varepsilon). \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\|g\|_\infty - \varepsilon \leq \|f_g\|. \tag{3.12}$$

Từ (3.10) và (3.12) ta suy ra $\|f_g\| = \|g\|_\infty$.

Định lý 4.3. Giả sử $f^* \in (L^p(G))^*$, $1 \leq p \leq \infty$. Khi đó tồn tại hàm $g \in L^q(G)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ sao cho

$$f^*(f) = \int_G f(x)g(x)d\mu, \ \forall f \in L^p(G)$$

Chứng minh. Giả sử $\mu(G) < \infty$. Với $E \subset G$ đo được, ta biểu diễn $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ với E_k là các tập đo được phân biệt đôi một. Khi đó dãy hàm

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}(x), \ k = 1, 2, \ldots$$

là dãy hàm đo được không âm đơn điệu tăng hội tụ về $\chi_E(x)$. Theo Định lý 1.8 dãy $\{\sum_{i=1}^k \chi_{E_i}\}$ hội tụ về hàm χ_E trong $L^p(G)$ và

$$f^*(\chi_E) = \lim_{k\to\infty} f^*(\sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}) = \sum_{k=1}^{\infty} f^*(\chi_{E_k}).$$

Ta đặt $\lambda(E) = f^*(\chi_E)$, trong đó $E \subset G$. Khi đó, λ là hàm tập và σ-cộng tính xác định trên σ-đại số $\mathcal{B}$ các tập con đo được của G. Rõ ràng nếu $E \subset G$ đo được và $\mu(E) = 0$ thì $\lambda(E) = 0$. Vậy λ là hàm tập σ-cộng tính và liên tục tuyệt đối đối với μ. Theo Định lý Radon-Nikodym tồn tại hàm g đo được khả tích trên G sao cho

$$\lambda(E) = \int_E g(x)d\mu, \ \forall E \in \mathcal{B},$$

g được xác định duy nhất trên G. Suy ra

$$f^*(\chi_E) = \int_G \chi_E(x)g(x)d\mu, \ \forall E \in \mathcal{B}.$$

Từ tính tuyến tính của f^* ta có

$$f^*(s) = \int_G s(x)g(x)d\mu,$$

trong đó s là hàm đơn giản khả tích, và vì vậy cũng đúng cho mọi $f \in L^\infty(G)$ vì mọi hàm $f \in L^\infty(G)$ là giới hạn đều của dãy hàm đơn giản $\{f_k\}$. Từ sự hội tụ đều của $\{f_k\}$ về f suy ra $\|f - f_k\|_p \longrightarrow 0$. Vì vậy $f^*(f_k) \longrightarrow f^*(f)$, khi $k \longrightarrow \infty$.

Để chứng minh $g \in L^q(G)$, ta chia hai trường hợp

Với $p = 1$ ta có

$$|\int_E g(x)d\mu| \le \|f^*\| \|\chi_E\|_1 = \|f^*\|\mu(E)$$

với mọi $E \in \mathcal{B}$. Suy ra $|g(x)| \le \|f^*\|$ hầu khắp nơi. Vậy $\|g\|_\infty \le \|f^*\|$.

Với $1 < p < \infty$. Theo một kết quả đã biết trong lý thuyết độ đo khi đó $|g| = g\mathrm{sign}(g)$. Gọi $E_n = \{x \in G : \ |g(x)| \le n\}$ và đặt $f = \chi_{E_n}|g|^{q-1}\mathrm{sign}(g)$. Khi đó

$|f|^p = |g|^q$ trên E_n và $f \in L^\infty(G)$, hơn nữa theo phần chứng minh trên ta được

$$\int_{E_n} |g(x)|^q d\mu = \int_G f(x)g(x)d\mu = f^*(f) \leq \|f^*\|(\int_{E_n} |g(x)|^q)^{\frac{1}{p}}.$$

Vì vậy

$$\int_G \chi_{E_n}(x)|g(x)|^q d\mu \leq \|f^*\|^q, \ n = 1, 2, \ldots$$

Nếu ta chọn dãy $\{E_n\}$ thoả điều kiện $E_1 \subset E_2 \subset \ldots E_n \subset \ldots$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ thì theo định lý về sự đơn điệu hội tụ ta được $\|g\|_q \leq \|f^*\|$. Vậy $g \in L^q(G)$.

Nếu $\mu(G) = \infty$ thì ta biểu diễn $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ trong đó các tập G_n đôi một phân biệt và $\mu(G_n) < \infty$. Đặt $E_k = G_1 \cup \ldots \cup G_k$. Hơn nữa với mọi tập $E \subset G$ đo được ta luôn có $\|\chi_E f\|_p \leq \|f\|_p$. Vì vậy ánh xạ $f \longmapsto f^*(\chi_E f)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên $L^p(G)$. Theo chứng minh trên tồn tại các hàm g_n trên G_n sao cho

$$f^*(\chi_{G_n} f) = \int_G f(x)g_n(x)d\mu, \ f \in L^p(G).$$

Giả sử $g_n(x) = 0$ nếu $x \notin G_n$ và đặt $g = g_1 + g_2 + \cdots$. Vì

$$f^*(\chi_{E_n} f) = \int_{E_n} f(x)(g_1(x) + \cdots + g_n(x))d\mu, \; f \in L^p(G)$$

vì $\mu(E_n) < \infty$ nên ta có

$$\|g_1 + g_2 + \ldots + g_n\|_q \leq \|f^*\|, \; n = 1, 2, \ldots$$

Áp dụng bổ đề Fatou ta suy ra $\|g\|_q \leq \|f^*\|$. Vậy $g \in L^q(G)$.

Chương 4

Không gian Hilbert

§ 1 KHÁI NIỆM VỀ KHÔNG GIAN HILBERT

Định nghĩa 1.1. Cho H là một không gian trên trường $\mathbb{K}$. Tích vô hướng xác định trên H là một ánh xạ xác định như sau

$$\langle .,. \rangle \ : H \times H \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

thoả mãn các tiên đề sau

i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ với mọi $x, y \in H$.

ii) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ với mọi $x,y,z \in H$.

iii) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ với mọi $x,y \in H$ và $\lambda \in K$.

iv) $\langle x,x\rangle \geq 0$ với mọi $x \in H$ và $\langle x,x\rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

$\langle x,y\rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x và y.

Cặp $(H, \langle .,.\rangle)$ được gọi là không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Unita).

Từ định nghĩa ta nhận thấy rằng khi $\mathbb{K}$ là trường thực thì tích vô hướng là một dạng song tuyến tính xác định dương trên H.

Ví dụ

1) Lấy $H = \mathbb{R}^n$, với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in H$ và biểu thức

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

xác định một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$.

2) Lấy $H = C_{[0,1]}$ không gian gồm các hàm liên tục trên $[0, 1]$ nhận giá trị phức, với $x, y \in H$ biểu thức

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt,$$

xác định một tích vô hướng trên $C_{[0,1]}$. Khi đó không gian này là một không gian tiền Hilbert và thường kí hiệu $C^L_{[0,1]}$.

Định lý 1.2. Cho H là không gian tiền Hilbert, với mọi $x, y \in H$ ta luôn có bất đẳng thức sau

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle,$$

bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Chứng minh. Với $y = 0$ bất đẳng thức đúng.

Giả sử $y \neq 0$, với mọi $\lambda \in K$ ta có

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \ge 0$$

suy ra

$$\langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle xy, y\rangle \ge 0.$$

Vì λ tuỳ ý và $y \neq 0$ nên ta có thể chọn $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$. Thay vào bất đẳng thức trên ta được

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức Schwarz được chứng minh.

Nhận xét 1. Trong bất đẳng thức Schwarz dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 1.3. Cho H là không gian tiền Hilbert. Khi đó,

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}, \quad x \in H$$

xác định một chuẩn trên H.

Chứng minh. Từ định nghĩa của tích vô hướng ta suy ra

i) $\|x\| \geq 0$, với mọi $x \in H$; và $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

ii) Với mọi $x \in H$ và $\alpha \in \mathbb{C}$ ta có $\|\alpha x\| = \langle \alpha x, x\alpha\rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|x\|$.

iii) Với mọi $x, y \in H$ ta có

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta có

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Vậy $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Định nghĩa 1.4. Cho không gian tiền Hilbert H, theo Định lý 1.3 thì H là một không gian tuyến tính định chuẩn. Nếu H là không gian đầy đủ thì ta gọi H là không gian Hilbert.

Ví dụ

1) Lấy $H = \mathbb{C}^n$ với tích vô hướng xác định bởi hệ thức

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i,$$

trong đó $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Khi đó H là một không gian Hilbert.

2) Cho $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ là một không gian độ đo. Ký hiệu

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : \int_\Omega |f(x)|^2 d\mu < \infty\}.$$

Với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} d\mu,$$

$L^2(\Omega)$ là một không gian Hilbert.

§ 2 MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Định lý 2.1. Cho H là một không gian Hilbert. Khi đó

$$\langle\, ,\, \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C},$$

là một hàm liên tục.

Chứng minh. Cho $(x_n), (y_n)$ là hai dãy trong không gian tiền Hilbert H lần lượt hội tụ về x_0 và y_0. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &\le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_0\rangle| + |\langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \\ &\le \|x_n\|\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\|y_0\|.\end{aligned}$$

Theo giả thiết (x_n) hội tụ trong H nên nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số $M > 0$ sao cho $\|x_n\| \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì vậy, ta có

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \le M\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\|y_0\|.$$

Chuyển qua giới hạn ta được

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| = 0.$$

Định lý 2.2. (Đẳng thức hình bình hành) Với mọi x, y trong một không gian tiền Hilbert H ta có

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Chứng minh. Với $x, y \in H$, ta có

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Cộng hai vế của hai đẳng thức trên ta được đẳng thức hình bình hành.

Định lý 2.3. (Tích vô hướng sinh bởi chuẩn) Cho $(X, \|\ \|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn trên trường $\mathbb{K}$. Giả sử với mọi x, y thuộc X thoả mãn

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{4.1}$$

Khi đó trên X có một tích vô hướng sao cho $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Chứng minh. Trước hết, ta xét X là một không gian tuyến tính thực.
Đặt

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]. \tag{4.2}$$

Từ (4.2) ta có

i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ với mọi $x \in X$.

ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ với mọi $x, y \in X$.

iii) Theo (4.1) và (4.2) ta có thể viết $\langle x, y\rangle$ dưới dạng

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] \tag{4.3}$$

hay

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2]. \tag{4.4}$$

Từ (4.3) và (4.4) ta có

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle &= \frac{1}{4}[\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2]\\
&= \frac{1}{4}[\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x-y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2]\\
&= \frac{1}{2}[\|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2 - \|y-z\|^2] + \frac{1}{2}[\|y\|^2 + \|z\|^2 - \|y-z\|^2]\\
&= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.
\end{aligned}$$

iv) Bây giờ ta chứng minh $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ với mọi $x, y \in H$ và $\lambda \in \mathbb{K}$. Trước hết với mỗi $x, y \in X$ cố định, ta xét hàm $g(\lambda) = \|\lambda x + y\|$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
|g(\lambda) - g(\lambda')| &= |\|\lambda x + y\| - \|\lambda' x + y\||\\
&\leq \|(\lambda - \lambda')x\| = |\lambda - \lambda'|\|x\|.
\end{aligned}$$

nên g là một hàm của biến thực liên tục. Vì vậy, ta suy ra hàm

$$f(\lambda) = \langle \lambda x, y \rangle = \frac{1}{4}[\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2]$$

liên tục theo biến thực λ.

Theo một tính chất đã biết f cộng tính (theo chứng minh iii)) và liên tục nên f là hàm tuyến tính, nghĩa là $f(\lambda)$ có dạng $f(\lambda) = C\lambda$ trong đó C là một hằng số. Hơn nữa theo định nghĩa của f ta có $f(1) = C = \langle x, y \rangle$. Vậy $f(\lambda) = \langle x, y \rangle \lambda$, hay $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Với X là không gian tuyến tính phức. Đặt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2]. \tag{4.5}$$

Từ (4.5) ta có

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in X$.

ii) Với mọi $x, y \in X$ ta có

$$\begin{aligned}
\langle y, x\rangle &= \frac{1}{4}[\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|y+\|^2 - i\|y-\|^2] \\
&= \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|i(x-iy)\|^2 - i\|-i(x+iy)\|^2] \\
&= \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2] \\
&= \overline{\langle x, y\rangle}.
\end{aligned}$$

iii) Chứng minh tương tự như trong trường hợp thực.

iv) Với $x, y \in X$ cố định ta xét hàm $f(\lambda) = (\lambda x, y)$ tương tự trên ta chứng minh f là hàm biến phức cộng tính liên tục nên f có dạng $f(\lambda) = C\lambda$ hoặc $f(\lambda) = C\overline{\lambda}$, trong đó C là hằng số và $C = \langle x, y\rangle$. Vì vậy ta suy ra

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C},$$

hoặc

$$\langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Mặt khác theo (4.5) ta có $\langle ix, y\rangle = i\langle x, y\rangle$, nên chỉ xảy ra

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Vậy trên X có một tích vô hướng và $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Định lý 2.4. Cho M là một tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert H. Khi đó với mỗi $x \in H$ tồn tại duy nhất một phần tử $y \in M$ sao cho $\|x - y\| = d(x, M)$.

Chứng minh. Nếu $x \in M$ thì ta chọn $y = x$. Nếu $x \notin M$, khi đó vì M đóng nên $d = d(x, M) > 0$ và tồn tại một dãy (y_n) trong M sao cho $\lim \|x - y_n\| = d$. Ta chứng minh (y_n) là dãy Cauchy. Thật vậy, theo đẳng thức hình bình hành ta có

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 \\
&= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\
&= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \\
&\leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2
\end{aligned}$$

(vì M lồi nên $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$). Cho $m, n \to \infty$ từ bất đẳng thức trên ta có

$$\lim_{m,n\to\infty} \|y_n - y_m\| = 0.$$

Vậy (y_n) là dãy Cauchy. Do H là không gian đầy đủ nên $\lim y_n = y \in H$. Vì M đóng nên $y \in M$. Từ đó ta có

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - y\| = d.$$

Bây giờ ta chứng minh y là phần tử duy nhất. Giả sử tồn tại phần tử $z \in M$ sao cho $\|x - z\| = d$. Khi đó, từ đẳng thức hình bình hành ta có

$$0 \leq \|y - z\|^2 \leq 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\|x - \frac{y+z}{2}\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

Vậy $y = z$, nghĩa là y là phần tử duy nhất.

§ 3 HÌNH CHIẾU TRỰC GIAO. CƠ SỞ TRỰC CHUẨN

Định nghĩa 3.1. Hai phần tử x, y trong không gian tiền Hilbert H được gọi là trực giao nếu $\langle x, y\rangle = 0$, kí hiệu $x \perp y$.

Hai tập hợp M, N trong H được gọi là trực giao với nhau nếu $\langle x, y\rangle = 0$ với mọi $x \in M$ và mọi $y \in N$, kí hiệu $M \perp N$.

Cho $M \subset H$, tập hợp tất cả những phần tử trong H trực giao với M kí hiệu là

$M^\perp$ và gọi là phần bù trực giao của M.

Nhận xét. $M^\perp$ phần bù trực giao của M là một không gian con đóng của H.

Định lý 3.2. Giả sử M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H. Khi đó với mỗi phần tử $x \in H$ được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = y + z$ trong đó $y \in M$ và $z \in M^\perp$. y được gọi là hình chiếu trực giao của x lên M.

cm Nếu $x \in M$ thì đặt $y = x, z = 0$. Nếu $x \notin M$ thì M là lồi đóng nên tồn tại duy nhất $y \in M$ sao cho $\|x - y\| = d(x, M)$.

Đặt $z = x - y$, ta có $x = y + z$. Ta phải chứng minh $z \in M^\perp$. Thật vậy, với mọi $\alpha \in K, u \in M$ ta có

$$\begin{aligned} \|z\| = \|x - y\| &\le \|x - (y + \alpha u)\| \\ &= \|z - \alpha u\|. \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\le \langle z - \alpha u, z - \alpha u\rangle \\ &= \|z\|^2 - \alpha\langle u, z\rangle - \bar{\alpha}\langle z, u\rangle + \alpha^2\|u\|^2. \end{aligned}$$

Chọn $\alpha = \langle z, u\rangle$ và $\|u\| = 1$, ta được $0 \leq -|\langle z, u\rangle|^2$. Suy ra $\langle z, u\rangle = 0$ với mọi $u \in M, \|u\| = 1$. Vậy $z \in M^\perp$.

Bây giờ ta chứng minh sự biểu diễn là duy nhất; giả sử $x = y_1 + z_1$ với $y_1 \in M$ và $z_1 \in M^\perp$. Khi đó $y - y_1 = z_1 - z$ nên $y - y_1 \in M$ và $y - y_1 \in M^\perp$, suy ra $\langle y - y_1, y - y_1\rangle = 0$. Vậy $y = y_1$, do đó $z = z_1$. Từ tính duy nhất của biểu diễn ta có thể viết $X = M \oplus M^\perp$.

Định nghĩa 3.3. Ánh xạ $P : H \longrightarrow M$ xác định bởi $P(x) = y$ trong biểu diễn của định lý trên được gọi là phép chiếu trực giao từ H lên M.

Định lý 3.4. Phép chiếu trực giao P của không gian Hilbert H lên không gian con đóng $M \neq \{0\}$ là một toán tử tuyến tính liên tục và có $\|P\| = 1$.

Chứng minh. Với mọi $x_1, x_2 \in H$ và $\alpha \in K$, theo định lý trên ta có

$$x_1 = Px_1 + z_1,\ x_2 = Px_2 + z_2,$$

trong đó $z_1, z_2 \in M^\perp$. Vì vậy

$$x_1 + x_2 = Px_1 + Px_2 + z_1 + z_2,$$

trong đó $Px_1 + Px_2 \in M$ và $z_1 + z_2 \in M^\perp$.

Từ tính duy nhất của sự biểu diễn trong định lý trên ta suy ra

$$P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2.$$

Tương tự $P(\alpha x_1) = \alpha P(x_1)$. Vậy P tuyến tính.

Mặt khác, với $x \in H$ ta có

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|z\|^2 \geq \|Px\|^2.$$

Suy ra P bị chặn. Vậy P liên tục và $\|P\| \leq 1$. Hơn nữa, với $x \in M$ ta có $\|Px\| = \|x\|$. Vì vậy $\|P\| = 1$.

Định nghĩa 3.5. Một tập hợp $S = \{x_i\}_{i \in T}$ trong không gian tiền Hilbert H được gọi là hệ trực giao nếu các phần tử thuộc S trực giao với nhau từng đôi một. Nếu mọi phần tử của S có chuẩn bằng 1 thì S được gọi là hệ trực chuẩn.

Định lý 3.6. Nếu S là một hệ các phần tử trực giao trong không gian tiền Hilbert H thì S là hệ độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ và $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ với $\alpha_i \in K$. Khi đó với mỗi $j \in \{1, \dots, n\}$ ta có

$$\begin{aligned}\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_j \rangle &= \langle 0, x_j \rangle = 0 \\ &= \langle \alpha_j x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2.\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $\alpha_i = 0$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Vậy S là hệ độc lập trong H.

Định lý 3.7. (Đẳng thức Pythagore) Nếu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là một hệ tực giao trong H thì

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Chứng minh. Ta có

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle$$
$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Định lý 3.8. Giả sử $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một hệ gồm n phần tử trực chuẩn trong H. Khi đó, mỗi phần tử $x \in H$ có hình chiếu trực giao lên không gian con M sinh bởi hệ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Chứng minh. Vì M là không gian con hữu hạn chiều nên M đóng trong H. Theo định lý hình chiếu trực giao, với mỗi $x \in H$ được biểu diễn dưới dạng $x = y + z$, trong đó $y \in M, z \in M^{\perp}$. Do $y \in M$, ta có $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Với mỗi $j = 1, \ldots, n$ ta có

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle = \langle y + z, e_j \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \rangle \\ &= \alpha_j \|e_j\|^2 = \alpha_j. \end{aligned}$$

Vậy $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Định lý 3.9. (Định lý trực giao hoá Schmidt) Giả sử $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong không gian tiền Hilbert H. Khi đó tồn tại một hệ trực chuẩn

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho $\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Đặt $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$. Rõ ràng $\{e_1\}$ là hệ trực chuẩn và $\mathrm{Lin}\{e_1,\} = \mathrm{Lin}\{x_1\}$.

Ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp. Giả sử có $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là hệ trực chuẩn và $\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ta tìm y_{n+1} dưới dạng

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

sao cho y_{n+1} trực giao với $e_j,\ j = 1, \ldots, n$. Ta có

$$\langle y_{n+1}, e_j\rangle = \langle x_{n+1}, e_j\rangle + \alpha_j.$$

Suy ra $\alpha_j = -\langle x_{n+1}, e_j\rangle$. Vậy y_{n+1} hoàn toàn xác định bởi biểu thức

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_i\rangle e_i.$$

Vì $y_{n+1} \neq 0$, do đó ta đặt $e_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$. Khi đó hệ $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ là hệ trực chuẩn và $\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\} = \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Định lý chứng minh xong.

Định lý 3.10. Giả sử $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hệ trực giao trong không gian Hilbert H. Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ và

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Đặc biệt, nếu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn, ta có

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

Chứng minh. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ và } T_n = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2.$$

Khi đó với $n, p \in \mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned}
\|S_{n+p} - S_n\|^2 &= \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\|^2 \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|^2 \\
&= |T_{n+p} - T_n|.
\end{aligned}$$

Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ suy ra dãy (S_n) hội tụ nên (S_n) là dãy cơ bản. Đẳng thức trên chứng tỏ (T_n) là dãy cơ bản trong $\mathbb{R}$ nên nó hội tụ. Suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ. Ngược lại, nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ, tương tự ta có (S_n) là dãy cơ bản trong H. Vì H là không gian đầy đủ nên (S_n) hội tụ, nghĩa là chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

Hơn nữa, từ đẳng thức

$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

cho $n \to \infty$ ta được

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Định lý 3.11. Giả sử $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H. Khi đó, với mọi $x \in H$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \ (*),$$

chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ được gọi là chuỗi Fourier của x đối với hệ $\{e_n\}$ và bất đẳng thức (*) được gọi là bất đẳng thức Bessel.

Chứng minh. Theo Định lý 3.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2$ hội tụ. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta đặt $M_n = \mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}$. Khi đó M_n là không gian con đóng của H, theo định lý hình chiếu trực giao với $x \in H$ có biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = y_n + z_n$ trong đó $y_n \in M$ và $z_n \in M^{\perp}$. Hơn nữa, ta có

$$y_n = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \|z_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|z_n\|^2.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Định nghĩa 3.12. Hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là một cơ sở trực chuẩn nếu không gian con sinh bởi hệ này trù mật trong H.

Định lý 3.13. Giả sử $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương

a) Hệ $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là cơ sở trực chuẩn.

b) Với mỗi $x \in H$ ta có $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

c) Với mọi $x, y \in H$, ta có $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}$.

d) Với mọi $x \in H$ ta có $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

Đẳng thức d) được gọi là đẳng thức Parseval.

Chứng minh. a) $\Rightarrow$ b) Theo Định lý 3.11 ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ hội tụ. Đặt $y = x - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$, ta chứng minh $y = 0$. Với mỗi $j \in \mathbb{N}$ ta có

$$\langle y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0.$$

Điều này chứng tỏ $y \perp M = \mathrm{Lin}\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Do tích vô hướng là hàm liên tục nên $y \perp \overline{M} = H$. Vì vậy $\langle y, y\rangle = 0$ suy ra $y = 0$. Vậy $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

b) $\Rightarrow$ c) Với mọi $x, y \in H$ theo b) ta có

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle e_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_j\rangle} \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}.
\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ d) Với mỗi $x \in H$, từ c) ta được

$$\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

d) $\Rightarrow$ a) Ta chứng minh $\overline{M}^{\perp} = \{0\}$. Với mọi $z \in \overline{M}^{\perp}$ ta suy ra $\langle z, e_n\rangle = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ (**). Theo d) ta có

$$\|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_n\rangle|^2.$$

Kết hợp với (**) ta được $\|z\| = 0$. Suy ra $z = 0$. Vì vậy $\overline{M}^{\perp} = \{0\}$. Theo định lý hình chiếu trực giao ta có

$$H = \overline{M} \oplus \overline{M}^{\perp} = \overline{M}.$$

Ví dụ : 1) Không gian

$$\ell^2 = \{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} | \xi_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty\}.$$

Hệ đếm được $\{e_n\}$ trong đó $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ và $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ là cơ sở trực chuẩn của ℓ^2. Thật vậy, với mỗi $x \in \ell^2$ ta có $\langle x, e_n\rangle = \xi_n$. Đặt $x_n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$, khi đó $x_n \in \ell^2$ và $\|x - x_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0$, khi $n \to \infty$.

Mặt khác, ta có

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

Suy ra $x_n \longrightarrow x$ khi $n \longrightarrow \infty$. Vậy $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. Theo Định lý 3.13 $\{e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của ℓ^2.

2) Hệ các hàm lượng giác

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ n = 1, 2, \ldots$$

là một cơ sở trực chuẩn trong $L^2[0, 2\pi]$.

Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \int_{[0,2\pi]} \frac{1}{2\pi} dx = 1,$$

$$\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \rangle = \int_{[0,2\pi]} \frac{1}{\pi} \cos^2 nx dx = 1,$$

$$\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \rangle = \int_{[0,2\pi]} \frac{1}{\pi} \sin^2 nx dx = 1,$$

nên hệ này là hệ trực chuẩn.

Với mỗi $f \in L^2[0, 2\pi]$ và với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một hàm $g \in C_{[0,2\pi]}$ sao cho $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mặt khác theo Định lý Weierstrass tồn tại hàm

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

sao cho

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |g(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Suy ra

$$\|g - h\| = \Big(\int_{[0,2\pi]} |g(x) - h(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy $\|f - h\| < \varepsilon$.

Do đó hệ trên là cơ sở trực chuẩn của $L^2[0, 2\pi]$. Và từ đó ta có: với mọi $f \in L^2[0, 2\pi]$ khai triển được thành chuỗi Fourier như sau

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}})$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,2\pi]} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,2\pi]} f(x) \cos kx dx, \ k = 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,2\pi]} f(x) \sin kx dx, \ k = 1, 2, \ldots .$$

Định lý 3.14. (Định lý Riesz) Giả sử $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert H. Nếu dãy số (ξ_n) thoả mãn điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$ thì sẽ tồn tại duy nhất $x \in H$ nhận ξ_n làm hệ số Fourier $\xi_n = \langle x, e_n\rangle$ và

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, \ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2.$$

Chứng minh. Theo Định lý 3.10 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ hội tụ kéo theo chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ hội tụ. Đặt $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$. Với mỗi $m \in \mathbb{N}$, ta có

$$\langle x, e_m\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, e_m\rangle = \xi_m.$$

Điều này có nghĩa x nhận các số ξ_n làm hệ số Fourier.

Giả sử có $y \in H$ sao cho $\xi_n = \langle y, e_n \rangle$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$$\xi_n = \langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle.$$

Do vậy $\langle x - y, e_n \rangle = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra $x - y$ trực giao với M là không gian con sinh bởi hệ $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Vì tích vô hướng liên tục nên $x - y \perp \overline{M}$, mà $\overline{M} = H$. Vậy $x = y$.

Định lý 3.15. Mọi không gian Hilbert khả ly H đều có một cơ sở trực chuẩn đếm được hoặc hữu hạn.

Chứng minh. Theo giả thiết tồn tại tập hợp không quá đếm được S trù mật trong H. Trong S ta loại các phần tử phụ thuộc tuyến tính đối với các phần tử trước nó. Khi đó ta được một hệ $\{x_n\}$ các phần tử độc lập tuyến tính mà $\mathrm{Lin}\{x_n\} = \mathrm{Lin}S$. Theo định lý trực giao hoá Schmidt ta tìm được hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ không quá đếm được và $\mathrm{Lin}\{e_n\} = \mathrm{Lin}\{x_n\}$. Khi đó ta có $\overline{\mathrm{Lin}\{e_n\}} = \overline{\mathrm{Lin}S} = H$.

Vậy $\{e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của H.

Định lý 3.16. Hai không gian Hilbert có cùng số chiều hữu hạn hoặc cùng vô hạn và khả ly thì đều đẳng cấu với nhau. Đặc biệt, mọi không gian Hilbert vô hạn khả ly đều đẳng cấu với không gian ℓ^2.

§ 4 KHÔNG GIAN LIÊN HỢP

Định nghĩa 4.1. Cho H là một không gian Hilbert. Kí hiệu $H^* = \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ là không gian gồm tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên H và nó được gọi là không gian liên hợp của H.

Định lý 4.2. (Định lý F. Riesz) Cho H là một không gian Hilbert. Với mỗi phần tử $a \in H$ tồn tại một phiêm hàm tuyến tính liên tục f_a trên H xác định bởi

$$f_a(x) = \langle x, a \rangle,$$

và $\|f_a\| = \|a\|$.

Ngược lại, với mỗi $x^* \in H^*$ tồn tại duy nhất một phần tử $a \in H$ sao cho $x^*(x) = \langle x, a \rangle$ và $\|a\| = \|x^*\|$.

Chứng minh. Theo định nghĩa của tích vô hướng ta suy ra f_a tuyến tính và từ bất đẳng thức Schwartz ta được

$$|f_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\|\|a\|, \text{ với mọi } x \in H.$$

Vậy f_a liên tục và ta có $\|f_a\| \leq \|a\|$.

Chọn $x = a$ ta được $|f_a(a)| = \|a\|^2$. Vậy $\|f_a\| = \|a\|$.

Ngược lại, giả sử $x^* \in H^*$. Nếu $x^* = 0$ ta chọn $a = 0$. Nếu $x^* \neq 0$ thì ta đặt

$$M = \{x \in H \mid x^*(x) = 0\}$$

Khi đó M là không gian con đóng trong H và $H \setminus M \neq \emptyset$. Theo định lý hình chiếu trực giao ta có $H = M \oplus M^\perp$. Suy ra $M^\perp \neq \{0\}$. Chọn $e \in M^\perp$ sao cho $\|e\| = 1$.

Với mỗi $z \in M^\perp$, ta xét phần tử $u = x^*(e)z - x^*(z)e$. Khi đó $u \in M^\perp$. Hơn nữa, vì $x^*(u) = 0$ nên $u \in M$. Vậy $u = 0$. Hay $z = \frac{x^*(z)}{x^*(e)}e$.

Với mọi $x \in H$ có sự biểu diễn $x = y + z$ trong đó $y \in M$ và $z \in M^\perp$. Suy ra

$$x = y + \frac{x^*(z)}{x^*(e)}e.$$

Theo tính chất của tích vô hướng ta có

$$\langle x, e\rangle = \langle y, e\rangle + \frac{x^*(z)}{x^*(e)} = \frac{x^*(z)}{x^*(e)}.$$

Vậy $x^*(z) = x^*(e)\langle x, e\rangle = \langle x, \overline{x^*(e)}e\rangle$. Vì $x^*(y) = 0$ nên $x^*(x) = x^*(z) = \langle x, \overline{x^*(e)}e\rangle$.

Đặt $a = \overline{x^*(e)}e$, khi đó $a \in H$. Vậy $x^*(x) = \langle x, a\rangle$.

Giả sử có $b \in H$ sao cho $x^*(x) = \langle x, b\rangle$. Từ đó ta suy ra $\langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$ hay $\langle x, a - b\rangle = 0$ với mọi $x \in H$. Vì vậy $\langle a - b, a - b\rangle = 0$. Suy ra $a - b = 0$ hay $a = b$.

Nhận xét Từ định lý trên ta có thể thiết lập một song ánh từ H vào H^* như sau

$$\begin{aligned} \varphi : H &\longrightarrow H^* \\ x &\longmapsto \varphi(x) = f_x \end{aligned}$$

Khi đó φ là cộng tính. Thật vậy, với mọi $x, y, z \in H$ và $\alpha \in \mathbb{K}$ ta có

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y)(z) &= f_{x+y}(z) = \langle x+y, z\rangle \\
&= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \\
&= f_x(z) + f_y(z) = \varphi(x)(z) + \varphi(y)(z). \\
\varphi(\alpha x)(z) &= f_{\alpha x}(z) = \langle \alpha x, z\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle x, z\rangle = \overline{\alpha}\varphi(x)(z).
\end{aligned}$$

Vậy $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ và $\varphi(\alpha x) = \overline{\alpha}\varphi(x)$. Và ngoài ra ta còn có $\|\varphi(x)\| = \|f_x\| = \|x\|$. Như vậy ta có thể xem H^* là H theo nghĩa không gian tuyến tính định chuẩn.

§ 5 SỰ HỘI TỤ YẾU TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Định nghĩa 5.1. Cho H là một không gian Hilbert. Dãy (x_n) trong H được gọi là hội tụ yếu đến phần tử x trong H nếu với mọi $y \in H$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Kí hiệu $x_n \xrightarrow{w} x$.

Định lý 5.2. Giả sử H là một không gian Hilbert.

a) Nếu dãy (x_n) hội tụ yếu đến $x \in H$ và dãy (y_n) hội tụ mạnh đến $y \in H$ thì dãy số $(\langle x_n, y_n\rangle)$ hội tụ đến $\langle x, y\rangle$.

b) Nếu dãy (x_n) hội tụ yếu đến $x \in H$ và dãy $(\|x_n\|)$ hội tụ đến $\|x\|$ thì dãy (x_n) hội tụ mạnh đến $x \in H$.

Chứng minh. a) Theo giả thiết dãy (x_n) hội tụ yếu đến $x \in H$ nên (x_n) bị chặn, do đó tồn tại $M > 0$ sao cho $\|x_n\| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &\leq |\langle x_n, y_n\rangle| - |\langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle| - |\langle x, y\rangle| \\
&\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&\leq M\|y_n - y\| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|.
\end{aligned}$$

Theo giả thiết a) nên khi cho $n \to \infty$, từ bất đẳng thức trên ta được

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x\rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \|x\|^2.\end{aligned}$$

Từ giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle x, x_n\rangle$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, nên chuyển qua giới hạn đẳng thức trên ta được $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

§ 6 TOÁN TỬ LIÊN HỢP TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Định nghĩa 6.1. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính định chuẩn và $A : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính liên tục. Toán tử tuyến tính $A^* : Y^* \to X^*$ xác định như sau:

Với mỗi $y^* \in Y^*$ ta xác định A^*y^* như sau $A^*y^*(x) = y^* \circ A(x)$ với mọi $x \in X$. Khi đó A^*y^* là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X và

$$\|A^*y^*\| \leq \|y^*\|\|A\|.$$

Dễ dàng kiểm tra A^* là toán tử tuyến tính trên Y^* và $\|A^*\| \leq \|A\|$. Suy ra A^* liên tục. Toán tử A^* được gọi là *toán tử liên hợp* của A.

Định lý 6.2. Giả sử X, Y, Z là các không gian tuyến tính định chuẩn trên trường $\mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $C \in \mathcal{L}(Y, Z)$ và $\lambda \in \mathbb{K}$. Khi đó ta có:

a) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

b) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$.

c) $(C \circ A)^* = A^* \circ C^*$.

Bây giờ cho X, Y là các không gian Hilbert. Khi đó theo nhận xét trong phần biểu diễn phiếm hàm tuyến tính trên không gian Hilbert, ta có thể đồng nhất X với X^* và Y với Y^*. Vì vậy, ta có thể xem $A^* : Y \longrightarrow X$ và khi đó A^* được xác định bởi công thức

$$\langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle$$

với mọi $x \in X, y \in Y$.

Trong trường hợp này b) được thay bởi $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

Ví dụ

1) Cho $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ là toán tử tuyến tính liên tục. Khi đó với cơ sở chính tắc $\{e_1, \ldots, e_n\}$ với $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ toán tử A có ma trận tương ứng là $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$. Gọi A^* là toán tử liên hợp của A với ma trận tương ứng là $(b_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$. Khi đó với mỗi $j, i \in \{1, \ldots, n\}$ ta có

$$\begin{aligned}
\langle e_i, A^* e_j \rangle &= \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} b_{kj} e_k \rangle \\
&= \langle e_i, b_{ij} e_i \rangle = \overline{b}_{ij} \\
&= \langle A e_i, e_j \rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j \rangle = a_{ji}.
\end{aligned}$$

Vậy $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ với mọi $i, j = 1, \ldots, n$. Vì vậy $(b_{ij}) = (\overline{a}_{ji})$.

2) Cho $A : L^2_{[0,1]} \longrightarrow L^2_{[0,1]}$ xác định như sau

$$Ax(t) = \int_0^t t x(s) ds, \; t \in [0, 1].$$

Ta có thể kiểm tra A là một toán tử tuyến tính liên tục. Khi đó toán tử A^* liên hợp của A được xác định như sau: Với mọi $x, y \in L^2_{[0,1]}$, ta có

$$\begin{aligned}
\langle x, A^*y\rangle &= \langle Ax, y\rangle \\
&= \int_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t tx(s)ds\overline{y(t)}dt \\
&= \int_0^1 \int_s^1 t\overline{y(t)}dtx(s)ds \\
&= \int_0^1 x(s)(\overline{\int_s^1 ty(t)dt})ds.
\end{aligned}$$

Vậy $A^*y(s) = \int_s^1 ty(t)dt$.

Nhận xét Nếu X, Y là hai không gian Hilbert và $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ thì toán tử liên hợp của toán tử A^* là $A^{**} : X \longrightarrow Y$ và $A^{**} = A$.

Thật vậy, với mọi $x \in X$ và $y \in Y$, theo định nghĩa của toán tử liên hợp trong không gian Hilbert ta có

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle A^{**}x, y\rangle.$$

Định nghĩa 6.3. Cho X, Y là hai không gian tuyến tính liên tục và $A : X \longrightarrow Y$ tuyến tính liên tục ta gọi nhân và ảnh của A lần lượt là các tập hợp sau và được kí hiệu là:

$$KerA = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \ : \ Ax = 0\}$$

$$ImA = A(X) = \{y \in Y \ : \ y = Ax, x \in X\}.$$

Nhận xét $KerA$ là một không gian con đóng của X và ImA là không gian con của Y.

Định lý 6.4. Cho X, Y là hai không gian Hilbert và $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Khi đó ta có

$$X = KerA \oplus \overline{ImA^*}, \ Y = KerA^* \oplus \overline{ImA}.$$

Chứng minh. Vì $KerA$ là không gian con đóng của không gian Hilbert X nên theo định lý hình chiếu trực giao ta có $X = KerA \oplus (KerA)^{\perp}$. Do vậy ta chỉ cần chứng minh $(KerA)^{\perp} = \overline{ImA^*}$.

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} x \in KerA &\Leftrightarrow Ax = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, y\rangle = 0, \text{ với mọi } y \in Y \\ &\Leftrightarrow \langle x, A^*y\rangle = 0, \text{ với mọi } y \in Y \\ &\Leftrightarrow x \perp ImA^* \\ &\Leftrightarrow x \in (ImA^*)^{\perp}. \end{aligned}$$

Vậy $KerA = (ImA^*)^{\perp}$.

Mặt khác, từ $ImA^* \subset \overline{ImA^*}$ suy ra $(\overline{ImA^*})^{\perp} \subset (ImA^*)^{\perp}$. Hơn nữa, với $x \perp ImA^*$ kéo theo $x \perp \overline{ImA^*}$, do đó $(ImA^*)^{\perp} \subset (\overline{ImA^*})^{\perp}$. Vậy $(ImA^*)^{\perp} = (\overline{ImA^*})^{\perp}$.

Do vậy ta suy ra $KerA = (\overline{ImA^*})^{\perp}$. Từ đó ta được $(KerA)^{\perp} = \overline{ImA^*}$.

Bằng cách thay A bởi A^* trong chứng minh trên với chú ý $A^{**} = A$, ta được đẳng thức thứ hai trong định lý.

Định nghĩa 6.5. Cho H là một không gian Hilbert và $A \in \mathcal{L}(H)$. Gọi A^* là toán tử liên hợp của A. Nếu $A^* = A$ thì A được gọi là toán tử tự liên hợp.

Nhận xét. Toán tử A là toán tử tự liên hợp khi và chỉ khi

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \text{ với mọi } x, y \in H.$$

Định lý 6.6. Giả sử H là một không gian Hilbert và A là toán tử tự liên hợp trong H. Khi đó

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| \ : \ \|x\| \le 1\} = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| \ : \ \|x\| = 1\}.$$

Chứng minh. Đặt $M = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| \ : \ \|x\| \le 1\}$.
Ta có

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \|A\|\|x\|^2, \text{ với mọi } x \in H.$$

Suy ra

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \|A\|, \text{ với mọi } x \in H \text{ với } \|x\| \le 1.$$

Vì vậy

$$M \le \|A\| \tag{4.6}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của supremum ta có

$$M \ge |\langle Ax, x\rangle| \text{ với mọi } x \in H \text{với } \|x\| \le 1.$$

Do đó ta có

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq M\|x\|^2 \text{ với mọi } x \in H.$$

Hơn nữa, với $x, y \in H$ ta có

$$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle = 2(\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
|2\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle| &= |\langle Ax, y\rangle + \overline{\langle Ax, y\rangle}| \\
&= |\langle Ax, y\rangle + \langle y, Ax\rangle| \\
&= |\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle| \\
&= \frac{1}{2}\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\
&\leq \frac{M}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\
&= M(\|x\|^2 + \|y\|^2).
\end{aligned}$$

Với $\|x\| = 1$ nếu $Ax \neq 0$ đặt $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ thì $\|y\| = 1$. Khi đó thay y vào bất đẳng thức trên ta được $\|Ax\| \le M$. Vì $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ nên

$$\|Ax\| \le M \tag{4.7}$$

Từ (4.6) và (4.7) ta suy ra $\|A\| = M$.

Vậy

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| \ : \ \|x\| \le 1\}.$$

Định lý 6.7. Giả sử H là một không gian Hilbert phức và A là toán tử tuyến tính liên tục từ H vào H. Toán tử A tự liên hợp khi và chỉ khi $\langle Ax, x\rangle$ là số thực với mọi $x \in H$.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử $A = A^*$, khi đó với mọi $x, y \in H$ ta có

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

Vậy $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Điều kiện đủ. Giả sử $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in H$. Với mỗi $x, y \in H$ ta đặt $\langle Ax, x\rangle = a$, $\langle Ay, y\rangle = b$, $\langle A(x+y), x+y\rangle = c$, $\langle A(x+iy), x+iy\rangle = d$. Khi đó $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và ta có

$$\begin{aligned} c =& \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle \\ =& a + b + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle \\ d =& a + b - i\langle Ax, y\rangle + i\langle Ay, x\rangle. \end{aligned}$$

Vì vậy ta suy ra

$$\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = c - (a + b) = \alpha \in \mathbb{R}$$

và

$$-i\langle Ax, y\rangle + i\langle Ay, x\rangle = d - (a + b) = \beta \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$\alpha + i\beta = 2\langle Ax, y\rangle \text{ và } \alpha - i\beta = 2\langle Ay, x\rangle.$$

Vậy

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle}.$$

Bài tập

1) Kí hiệu $\ell^2 = \{x = (\xi_n) \mid \xi_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty\}$. Với mọi $x = (\xi_n), y = (\eta_n) \in \ell^2$, đặt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta}_n.$$

Chứng minh rằng ℓ^2 là một không gian Hilbert.

2) Kí hiệu $\ell^1 = \{x = (\xi_n) \mid \xi_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < +\infty\}$. Với mọi $x = (\xi_n), y = (\eta_n) \in \ell^1$, đặt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta}_n.$$

Chứng minh rằng ℓ^1 là một không gian tiền Hilbert nhưng không phải là không gian Hilbert.

3) Cho H là một không gian Hilbert và $A : H \mapsto H$ là một toán tử tuyến tính thoả mãn điều kiện:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle. \text{ với mọi } x, y \in H.$$

Chứng minh rằng A liên tục.

4) Cho H là một không gian Hilbert và $A : H \mapsto H$ là một toán tử tuyến tính. Chứng minh rằng nếu với mỗi $u \in H$, phiếm hàm

$$x \mapsto \langle Ax, u\rangle, x \in H$$

đều liên tục thì A liên tục.

5) Giả sử (x_n) và (y_n) là hai dãy phần tử trong hình cầu đóng đơn vị trong không gian Hilbert H thoả mãn điều kiện

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1, \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1,$$
$$\text{b)} \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

6) Cho M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H và (λ_n) là một dãy số. Chứng minh rằng nếu mỗi $x \in H$, chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

đều hội tụ thì (λ_n) là một dãy bị chặn.

7) Cho $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert H và $\{\lambda_n\}$ là một dãy số bị chặn. Chứng minh rằng

a) Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

hội tụ với mọi $x \in H$.

b) Toán tử

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, x \in H$$

tuyến tính liên tục và tính chuẩn của A.

Tài liệu tham khảo

[1] Haim Brezis, (1998) *Giải tích hàm: Lý thuyết và các ứng dụng* (Bản dịch tiếng Việt của Nguyễn Hội Nghĩa - Nguyễn Thành Long), Tủ sách ĐHKHTN-TP.HCM.

[2] Phan Đức Chính, (1978) *Giải tích hàm T.1*,NXB ĐHTHCN, Hà nội.

[3] Nguyễn Định - Nguyễn Hoàng, (1999) *Hàm số biến số thực*, NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Hoàng - Lê Văn Hạp, (1998) *Giáo trình Giải tích hàm*, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Văn Khuê - Lê Mậu Hải, (1999) *Bài tập giải tích hàm* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[6] Nguyễn Xuân Liêm, (1994) *Giải tích hàm*, NXB Giáo dục.

[7] Nguyễn Xuân Liêm, (2000) *Bài tập giải tích hàm*, NXB Giáo dục.

[8] W. Rudin, (1966) *Function Analysis* , Mc Graw-Hill.