Cơ sở lý thuyết hàm biến phức

Nguyễn Thủy Thanh

NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006, 565 Tr.

Từ khoá: Mặt phẳng phức, Hàm số phức, số phức, Hàm biến phức, Điểm tụ, Biên của tập hợp, Tập hợp compact, Hàm phức biến thực, Miền đơn liên, Đa liên, Hàm chỉnh hình, Ánh xạ bảo giác, Ánh xạ chỉnh hình, Nguyên lý thác triển giải tích, tập hợp mờ, Hàm đa trị, Diện đa liên, Lý thuyết thặng dư, Hàm đơn diệp, Phiến hàm liên tục, Diện Riemann.

NGUYỄN THUỶ THANH

CƠ SỞ LÝ THUYẾT HÀM BIẾN PHỨC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
Hà Nội – 2006

Mục lục

Lời nói đầu 8

1 Mặt phẳng phức và hàm biến phức **10**

1.1 Tập hợp số phức, mặt phẳng phức 11

1.1.1 Định nghĩa số phức 12

1.1.2 Dạng đại số của số phức 16

1.1.3 Phép trừ và phép chia số phức 18

1.1.4 Mặt phẳng phức 19

1.1.5 Môđun và acgumen của số phức 20

1.1.6 Phép khai căn số phức 28

1.1.7 Dạng mũ của số phức 29

1.1.8 Khái niệm về mặt phẳng mở rộng 30

1.1.9 Khoảng cách trên $\mathbb{C}$ 33

1.2 Các khái niệm tôpô cơ bản trên mặt phẳng phức 35

1.2.1 Tôpô trên $\mathbb{C}$ 36

1.2.2 Phần trong và phần ngoài 38

1.2.3 Điểm tụ 39

1.2.4 Biên của tập hợp 40

1.2.5 Tập hợp compắc 41

1.2.6 Tập hợp liên thông 42

1.2.7 Hàm phức biến thực. Tuyến và đường cong 46

1.2.8 Phép đồng luân 53

1.2.9 Miền đơn liên và đa liên 56

1.3 Hàm biến phức 59
1.3.1 Định nghĩa hàm biến phức 59
1.3.2 Các ví dụ về ánh xạ đơn diệp 62
1.3.3 Giới hạn của hàm 64
1.3.4 Tính liên tục và liên tục đều 67
1.4 Lý thuyết dãy và chuỗi trong miền phức 72
1.4.1 Giới hạn của dãy điểm 72
1.4.2 Chuỗi số phức và sự hội tụ của nó 75
1.4.3 Dãy và chuỗi hàm 79
1.4.4 Chuỗi lũy thừa 85
1.4.5 Sự hội tụ đều trên từng compắc 92
1.5 Hàm $\arg z$ 95
1.5.1 Tính liên tục của hàm $\arg z$ 95
1.5.2 Số gia của acgumen dọc theo đường cong 96
1.5.3 Nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$ 98
1.6 Bài tập 100

2 Hàm chỉnh hình 105

2.1 Hàm khả vi 106
2.1.1 Hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi 106
2.1.2 Đạo hàm theo phương 108
2.1.3 Hàm $\mathbb{C}$ - khả vi 110
2.1.4 Mối liên hệ giữa $\mathbb{C}$ - khả vi và $\mathbb{R}^2$ - khả vi 114
2.1.5 Hàm chỉnh hình 115
2.1.6 Không gian các hàm chỉnh hình 121
2.2 Một số hàm chỉnh hình sơ cấp 122
2.2.1 Đa thức và hàm hữu tỷ 122
2.2.2 Hàm $w = z^n$ và $z = \sqrt[n]{w}$, $n \in \mathbb{N}$ 122
2.2.3 Hàm e^z 124
2.2.4 Hàm lôgarit 126
2.2.5 Hàm lũy thừa z^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ 130
2.2.6 Các hàm sơ cấp khác 131

2.2.7 Nhánh chỉnh hình của hàm đa trị 134
2.3 Hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác 138
2.3.1 Ý nghĩa hình học của acgumen của đạo hàm 138
2.3.2 Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm 140
2.3.3 Ánh xạ bảo giác 141
2.3.4 Ánh xạ liên tục và ánh xạ chỉnh hình 143
2.4 Các đẳng cấu sơ cấp 146
2.4.1 Đẳng cấu phân tuyến tính 147
2.4.2 Ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$ 160
2.4.3 Hàm Jukovski 164
2.4.4 Các đẳng cấu sơ cấp khác 172
2.4.5 Một số ví dụ 175
2.5 Bài tập 183

3 Lý thuyết tích phân hàm chỉnh hình 188
3.1 Tích phân trong miền phức 189
3.1.1 Định nghĩa tích phân 189
3.1.2 Ước lượng tích phân 193
3.1.3 Tính tích phân bằng phương pháp qua giới hạn 194
3.1.4 Dạng vi phân đúng và dạng vi phân đóng 200
3.1.5 Tích phân đường phụ thuộc tham số 213
3.2 Lý thuyết Cauchy 217
3.2.1 Nguyên hàm địa phương của hàm chỉnh hình 217
3.2.2 Nguyên hàm của hàm chỉnh hình theo tuyến 223
3.2.3 Tính bất biến của tích phân đối với các tuyến đồng luân 227
3.2.4 Công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy . . . 231
3.2.5 Nguyên hàm trong miền đơn liên 234
3.2.6 Công thức tích phân Cauchy (công thức cơ bản thứ hai của Cauchy) 235
3.2.7 Biểu diễn tích phân đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình 241
3.2.8 Điều kiện đủ để hàm f chỉnh hình 250
3.2.9 Hàm điều hòa và mối liên hệ với hàm chỉnh hình . . . 250

3.2.10 Tích phân dạng Cauchy. Công thức Sokhotski . . . 257
3.2.11 Biểu diễn tích phân hàm điều hòa . . . 270
3.3 Bài tập . . . 277

4 Các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình 278
4.1 Các kết quả quan trọng nhất rút ra từ tích phân Cauchy . . . 279
4.1.1 Định lý giá trị trung bình . . . 279
4.1.2 Định lý Liouville . . . 280
4.1.3 Định lý Weierstrass về chuỗi hàm hội tụ đều . . . 284
4.1.4 Tính chất địa phương của hàm chỉnh hình. Chuỗi Taylor 288
4.1.5 Các quan điểm khác nhau trong việc xây dựng lý thuyết hàm chỉnh hình . . . 305
4.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình . . . 310
4.2.1 Không điểm (0-điểm) của hàm chỉnh hình . . . 310
4.2.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình . . . 313
4.2.3 Nguyên lý thác triển giải tích . . . 317
4.2.4 Nguyên lý môđun cực đại . . . 320
4.3 Điểm bất thường cô lập . . . 326
4.3.1 Chuỗi Laurent . . . 326
4.3.2 Điểm bất thường cô lập đơn trị . . . 337
4.3.3 Dáng điệu của hàm tại điểm vô cùng . . . 348
4.3.4 Phân loại hàm chỉnh hình . . . 350
4.4 Tính bất biến của tập hợp mở . . . 354
4.4.1 Nguyên lý acgumen . . . 354
4.4.2 Định lý Rouché . . . 360
4.4.3 Tính bất biến của tập hợp mở . . . 363
4.5 Bài tập . . . 365

5 Hàm đa trị và diện Riemann 369
5.1 Phương pháp thác triển của Weierstrass . . . 370
5.1.1 Phần tử chính tắc . . . 371

5.1.2 Điểm bất thường của phần tử chính tắc 372
5.1.3 Phương pháp thác triển của Weierstrass 373
5.1.4 Hàm không cho phép thác triển giải tích 378
5.2 Các phương pháp khác 380
5.2.1 Thác triển giải tích theo tuyến 380
5.2.2 Thác triển đối xứng 386
5.3 Hàm giải tích đủ 391
5.3.1 Khái niệm hàm giải tích đủ 391
5.3.2 Một vài ví dụ 393
5.3.3 Tính đơn trị và đa trị.
Định lý đơn trị (monodromie) 396
5.3.4 Nhánh và phương pháp tách nhánh chỉnh hình 399
5.3.5 Khái niệm về điểm bất thường 405
5.4 Khái niệm về diện Riemann 412
5.4.1 Một số ví dụ mở đầu 413
5.4.2 Phương pháp dựng diện Riemann 419
5.5 Bài tập 420

6 Lý thuyết thặng dư và ứng dụng 422
6.1 Cơ sở lý thuyết thặng dư 423
6.1.1 Định nghĩa thặng dư 423
6.1.2 Phương pháp tính thặng dư 425
6.1.3 Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư 436
6.1.4 Tính tích phân theo chu tuyến đóng 444
6.2 Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư 448
6.2.1 Phương pháp tính tích phân 448
6.2.2 Tính tích phân dạng $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ 451
6.2.3 Tích phân dạng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 454

6.2.4 Tích phân dạng $I = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iax} R(x)dx$ 459
6.2.5 Tích phân dạng $I = \int\limits_{\mathbb{R}^+} R(x)x^{\alpha}dx$ 463
6.2.6 Một số ví dụ khác 478
6.2.7 Tìm tổng của chuỗi 490
6.3 Hàm nguyên và hàm phân hình 495
6.3.1 Hàm phân hình. Bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức 495
6.3.2 Hàm nguyên. Bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức 503
6.4 Bài tập 513

7 Ánh xạ bảo giác 515

7.1 Các khái niệm chung 516
7.1.1 Hàm đơn diệp 517
7.1.2 Điều kiện đủ để hàm đơn diệp 522
7.1.3 Sự hội tụ của dãy hàm đơn diệp 524
7.1.4 Tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0 525
7.1.5 Tính chất chung của ánh xạ bảo giác 527
7.1.6 Đẳng cấu và tự đẳng cấu 528
7.1.7 Điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu 532
7.1.8 Điều kiện chuẩn 534
7.2 Định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác 537
7.2.1 Tập hợp bị chặn trong $\mathcal{H}(D)$ 538
7.2.2 Tập hợp liên tục đồng bậc 539
7.2.3 Nguyên lý compắc 540
7.2.4 Phiếm hàm liên tục 544
7.2.5 Đơn giản hóa cách đặt bài toán Riemann 546
7.2.6 Định lý Riemann 548
7.2.7 Định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác 553

7.2.8 Sự tương ứng giữa các biên và công thức Christoffel-Schwarz 554
7.3 Bài tập 560
Tài liệu tham khảo 563

Lời nói đầu

Cơ sở lý thuyết hàm biến phức (LTHBP) được đặt nền móng từ giữa thế kỷ XVIII bởi các công trình của L. Euler. Với tư cách một nhánh độc lập, LTHBP được hình thành vào giữa thế kỷ XIX nhờ các công trình của O. Cauchy, C. Weierstrass và B. Riemann.

Ngày nay LTHBP là một trong những phần quan trọng nhất của toán học. Đó là khoa học vừa cổ điển vừa hiện đại, vừa gắn bó mật thiết với các nhánh hiện đại nhất của toán học lý thuyết lại vừa gắn bó với nhiều bài toán vật lý và cơ học cụ thể. Tư tưởng và kết quả của nó đã thâm nhập sâu vào nhiều phần khác nhau của toán học. Các phương pháp của LTHBP đã trở thành quen thuộc cả trong nhiều ngành ứng dụng như thủy động học, và khí động học, lý thuyết đàn hồi,... Vì lý do đó mà LTHBP là môn học bắt buộc, là một phần tất yếu của giáo dục toán học đối với các hệ đào tạo: Toán, Toán - Cơ, Toán - Tin ứng dụng của trường Đại học Khoa học Tự nhiên (Đại học Quốc gia Hà Nội).

Giáo trình "*Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*" này được biên soạn theo sát chương trình Hàm biến phức được Đại học Quốc gia Hà Nội ban hành. Khối lượng và cấu trúc chung của cuốn sách là hoàn toàn tương ứng với nội dung và cấu trúc của chương trình hiện hành của Đại học Quốc gia Hà Nội. Nó được biên soạn dựa trên nội dung cuốn sách "Cơ sở lý thuyết Hàm biến phức" trước đây của tác giả và kinh nghiệm trình bày LTHBP ở trường Đại học Tổng hợp Hà Nội trước đây và Đại học Quốc gia Hà Nội ngày nay.

Nhằm mục đích giúp sinh viên hiểu thấu đáo cơ sở lý thuyết của LTHBP, khi biên soạn giáo trình này chúng tôi đã cố gắng đưa vào nhiều ví dụ minh họa được chọn lọc kỹ càng và được giải một cách chi tiết.

Chúng tôi hy vọng rằng giáo trình này cùng với giáo trình "*Hướng dẫn giải Bài tập Hàm biến phức*" (Nhà Xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003) của chúng tôi sẽ là bộ sách đáp ứng được những yêu cầu cơ bản về LTHBP của ĐHQG Hà Nội.

Chúng tôi chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Tổng hợp Hà Nội trước đây và trường Đại học Khoa học Tự nhiên ngày nay đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành bản thảo giáo trình này.

Chúng tôi chân thành cảm ơn GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu và PGS. TS Nguyễn Minh Tuấn đã có những trao đổi và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho tác giả khi chuẩn bị bản thảo giáo trình này.

Tác giả chân thành mong nhận được sự quan tâm và góp ý của bạn đọc xa gần về nội dung và hình thức để giáo trình ngày được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, Mùa thu 2005

Tác giả

Chương 1

Mặt phẳng phức và hàm biến phức

1.1 Tập hợp số phức, mặt phẳng phức 11
1.1.1 Định nghĩa số phức 12
1.1.2 Dạng đại số của số phức 16
1.1.3 Phép trừ và phép chia số phức 18
1.1.4 Mặt phẳng phức 19
1.1.5 Môđun và acgumen của số phức 20
1.1.6 Phép khai căn số phức 28
1.1.7 Dạng mũ của số phức 29
1.1.8 Khái niệm về mặt phẳng mở rộng 30
1.1.9 Khoảng cách trên $\mathbb{C}$ 33
1.2 Các khái niệm tôpô cơ bản trên mặt phẳng phức 35
1.2.1 Tôpô trên $\mathbb{C}$ 36
1.2.2 Phần trong và phần ngoài 38
1.2.3 Điểm tụ 39

1.2.4 Biên của tập hợp 40
1.2.5 Tập hợp compắc 41
1.2.6 Tập hợp liên thông 42
1.2.7 Hàm phức biến thực. Tuyến và đường cong 46
1.2.8 Phép đồng luân 53
1.2.9 Miền đơn liên và đa liên 56
1.3 Hàm biến phức 59
1.3.1 Định nghĩa hàm biến phức 59
1.3.2 Các ví dụ về ánh xạ đơn diệp 62
1.3.3 Giới hạn của hàm 64
1.3.4 Tính liên tục và liên tục đều 67
1.4 Lý thuyết dãy và chuỗi trong miền phức 72
1.4.1 Giới hạn của dãy điểm 72
1.4.2 Chuỗi số phức và sự hội tụ của nó 75
1.4.3 Dãy và chuỗi hàm 79
1.4.4 Chuỗi lũy thừa 85
1.4.5 Sự hội tụ đều trên từng compắc 92
1.5 Hàm arg z 95
1.5.1 Tính liên tục của hàm arg z 95
1.5.2 Số gia của acgumen dọc theo đường cong 96
1.5.3 Nhánh đơn trị liên tục của hàm arg z 98
1.6 Bài tập 100

1.1 Tập hợp số phức, mặt phẳng phức

Tập hợp số phức có hai cấu trúc: cấu trúc đại số của một *trường* và đồng thời nó có cấu trúc tôpô của một *không gian* (không gian Euclide hai chiều, tức là mặt phẳng). Do đó tập hợp các số phức có cả tính chất đại số lẫn tính chất tôpô. Trong mục này ta sẽ nghiên cứu các tính chất đại số của tập hợp số phức.

1.1.1 Định nghĩa số phức

Ta xét phương trình

$$x^2 + 1 = 0.$$

Rõ ràng là phương trình này không có nghiệm thuộc $\mathbb{R}$ vì $x^2+1 \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Do đó một vấn đề tự nhiên đặt ra là tìm một tập hợp (ta ký hiệu là $\mathbb{C}$) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. $\mathbb{C}$ là một trường;
2. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
3. Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong $\mathbb{C}$.

Vì tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ là một tập hợp con của $\mathbb{C}$ nên khi xác định các phép tính số học cơ bản trên các số phức ta cần đòi hỏi rằng khi áp dụng cho các số thực các phép toán đó đưa lại kết quả như kết quả thu được trong số học các số thực. Mặt khác, nếu ta mong muốn các số phức có những ứng dụng trong các vấn đề của giải tích thì ta cần đòi hỏi rằng các phép toán cơ bản được đưa vào đó phải thỏa mãn các tiên đề thông thường của số học các số thực.

Định nghĩa 1.1.1. Mỗi cặp số thực có thứ tự (a, b) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, b \in \mathbb{R}$ được gọi là một *số phức* nếu trên tập hợp các cặp đó quan hệ bằng nhau, phép cộng và phép nhân được đưa vào theo các định nghĩa (tiên đề) sau đây:

I. $$(a, b) = (c, b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$$

II. *Phép cộng:* $(a, b) + (c, d) \overset{def}{=} (a + c, b + d)$ [1] và cặp $(a + c, b + d)$ được gọi là *tổng* của các cặp (a, b) và (c, d).

[1] Def. là cách viết tắt của từ tiếng Anh definition (định nghĩa)

III. *Phép nhân:* $(a,b)(c,d) \overset{def}{=} (ac - bd, ad + bc)$ và cặp $(ac - bd, ad + bc)$ được gọi là *tích* của các cặp (a,b) và (c,d).

IV. Cặp $(a,0)$ được đồng nhất với số thực a, nghĩa là

$$(a,0) \overset{def}{\equiv} a.$$

Tập hợp các số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$.

Như vậy mọi phần của định nghĩa số phức đều được phát biểu bằng ngôn ngữ số thực và các phép toán trên chúng.

Trong định nghĩa này ba tiên đề đầu thực chất là định nghĩa các khái niệm khác nhau: định nghĩa khái niệm bằng nhau, tổng và tích các số phức. Do đó việc đối chiếu các tiên đề đó với nhau sẽ không dẫn đến bất cứ mâu thuẫn nào. Điều duy nhất có thể gây ra đôi chút lo ngại là tiên đề IV. Vấn đề là ở chỗ: vốn dĩ các khái niệm bằng nhau, tổng và tích các số thực có ý nghĩa hoàn toàn xác định và do đó nếu các khái niệm này không tương thích với những khái niệm được đề cập đến trong các tiên đề I - III khi xét các số thực với tư cách là các cặp dạng đặc biệt thì buộc phải loại trừ tiên đề IV. Do đó ta cần đối chiếu tiên đề IV với các tiên đề I, II và III.

1) I - IV. Giả sử hai số thực a và b bằng nhau như những cặp dạng đặc biệt đồng nhất với chúng: $(a,0) = (b,0)$. Khi đó theo tiên đề I ta có $(a,0) = (b,0) \Leftrightarrow a = b$, tức là nếu chúng bằng nhau theo nghĩa thông thường.

2) II - IV. Theo tiên đề II, tổng hai số thực a và c được xét như những cặp $(a,0)$ và $(c,0)$ là bằng cặp $(a+c, 0+0) = (a+c, 0)$. Nhưng theo tiên đề IV thì $(a+c,0) \equiv a+c$. Như vậy

$$(a,0) + (c,0) = (a+c, 0+0) = (a+c,0) \equiv a+c$$

tức là đồng nhất bằng tổng $a+c$ theo nghĩa thông thường.

3) III - IV. Theo tiên đề III, tích các số thực a và b được xét như những cặp $(a,0)$ và $(c,0)$ là bằng cặp

$$(ac - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot c) = (ac, 0)$$

và theo tiên đề IV ta có $(ac, 0) \equiv ac$. Như vậy

$$(a,0)(c,0) \overset{(III)}{=} (ac,0) \overset{(IV)}{=} ac$$

tức là đồng nhất bằng tích a với c theo nghĩa thông thường.

Như vậy tiên đề IV tương thích với các tiên đề I, II và III.

Ta cũng lưu ý công thức sau đây được suy trực tiếp từ III và IV:

$$m(a,b) = (ma, mb), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy từ IV và III ta có

$$\begin{aligned} m(a,b) = (m,0)(a,b) &= (ma - 0 \cdot b, mb + 0 \cdot a) \\ &= (ma, mb). \end{aligned}$$

Nếu $m \in \mathbb{N}$ thì theo II ta có

$$\begin{aligned} (a,b) + (a,b) &= (2a, 2b); \\ (2a,2b) + (a,b) &= (3a, 3b), \ldots \end{aligned}$$

tức là (ma, mb) là kết quả của phép cộng liên tiếp m số hạng bằng (a, b). Điều đó phù hợp với biểu tượng thông thường là phép nhân với số tự nhiên tương ứng với phép cộng m số hạng bằng nhau.

Dễ dàng thấy rằng các tiên đề II và III là tương thích với nhau và các quy luật thông thường của các phép tính thực hiện trên các số vẫn được bảo toàn khi chuyển sang số phức (đương nhiên phải cắt bỏ mọi quy luật có quan hệ tới dấu $>$).

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Khi đó số phức $(a, -b)$ được gọi là *số phức liên hợp* với số phức z và được ký hiệu là $\overline{z}$:

$$\overline{z} = (a, -b).$$

Ta có định lý sau đây:

Định lý 1.1.1. *Tập hợp $\mathbb{C}$ lập thành một trường thỏa mãn các điều kiện:*

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$;

2. $\mathbb{C}$ *chứa phần tử i với tính chất $i^2 = -1$; phần tử i này được gọi là đơn vị ảo.*

Chứng minh. 1. *$\mathbb{C}$ là một trường.* Hiển nhiên, phần tử đơn vị của $\mathbb{C}$ là cặp $(1, 0)$ vì rằng $(a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$; và phần tử - không của $\mathbb{C}$ là cặp $(0, 0)$ vì rằng $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$.

Để chứng tỏ $\mathbb{C}$ là một trường ta chỉ cần kiểm nghiệm sự tồn tại phần tử nghịch đảo (việc kiểm nghiệm các tiên đề còn lại đối với một trường là hiển nhiên). Giả sử $z = (a, b) \neq (0, 0)$ (tức là $a^2 + b^2 > 0$). Ta sẽ tìm $z' = (a', b')$ sao cho

$$(a, b)(a', b') = (1, 0).$$

Từ I và III suy ra

$$\left.\begin{aligned} aa' - bb' = 1, \\ ba' + ab' = 0. \end{aligned}\right\}$$

Từ đó rút ra $a' = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, $b' = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$. Như vậy

$$z' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right),$$

và rõ ràng là

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, -\frac{-ab + ab}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0). \end{aligned}$$

Về sau phần tử nghịch đảo z' của z thường được ký hiệu là z^{-1}.

2. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Xét các cặp dạng $(a, 0)$. Dễ dàng thấy rằng tập hợp $\mathbb{R}' = \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$ lập thành một trường con của $\mathbb{C}$. Ta xét ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}'$

$$a \mapsto (a, 0).$$

Hiển nhiên rằng nếu $(a,0) = (a',0)$ thì $a = a'$ và ngược lại, đồng thời

$$a + b \mapsto (a+b, 0) = (a,0) + (b,0),$$
$$ab \mapsto (ab, 0) = (a,0)(b,0).$$

Do đó ánh xạ vừa xét là một đẳng cấu giữa $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}'$ và phép đẳng cấu này cho phép ta xem $\mathbb{R}$ như là một trường con của $\mathbb{C}$.

3. Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong $\mathbb{C}$, tức là $\mathbb{C}$ chứa phần tử i mà $i^2 = -1$.

Thật vậy, giả sử $x = (a,b) \in \mathbb{C}$. Khi đó trong $\mathbb{C}$ phương trình $x^2 + 1 = 0$ có dạng:

$$(a,b)(a,b) + (1,0) = (0,0),$$

hay là

$$a^2 - b^2 + 1 = 0,$$
$$2ab = 0.$$

Từ đó rút ra $a = 0$, $b = 1$ và $a = 0$, $b = -1$. Ta ký hiệu hai nghiệm đó là $i = (0,1)$ và $-i = (0,-1)$. □

1.1.2 Dạng đại số của số phức

Ta có định lý sau đây

Định lý 1.1.2. *Mọi số phức $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ đều có thể biểu diễn dưới dạng*

$$z = (a,b) = a + ib.$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có
$z = (a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + ib.$ □

Phép biểu diễn số phức $z = (a,b)$ dưới dạng $a + ib$ được gọi là *dạng đại số* hay *dạng Descartes* của số phức. Số a được gọi là *phần thực* của số phức

z và ký hiệu là $a = \mathrm{Re}\,[z]$, số b được gọi là *phần ảo* của nó và ký hiệu là $b = \mathrm{Im}\,[z]$.[2]

Nếu $z = \mathrm{Re}\,[z]$ thì z là một số thực. Nếu $z = i\mathrm{Im}\,[z]$ thì z là một *số thuần ảo*. Với quan điểm các phép toán trong trường các số phức, số thuần ảo bi có thể hiểu như là tích của số thực b với đơn vị ảo i và mỗi số phức $a + ib$ như là tổng của số thực a với số thuần ảo ib.

Do đó trong cách xây dựng số phức này ta đã sử dụng các ký hiệu có một ý nghĩa hoàn toàn cụ thể và vì thế tránh được tính hình thức do ký hiệu đơn vị ảo i mang lại.

Hệ quả. *Giả sử $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Khi đó số phức liên hợp $\overline{z}$ có thể biểu diên dưới dạng $\overline{z} = a - ib$.*

Phép chuyển từ số phức đã cho sang số phức liên hợp với nó được gọi là *phép lấy liên hợp*.

Định lý 1.1.3. *Giả sử z, z_1 và $z_2 \in \mathbb{C}$. Khi đó*

1. $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2;$$
2. $$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2,\ \ \overline{\alpha z} = \alpha \overline{z},\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R};$$
3. $$\overline{\overline{z}} = z.$$

Chứng minh. 1. Thật vậy, giả sử $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Khi đó

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)\\ &= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2.\end{aligned}$$

2. Tương tự

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_1} &= (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)\\ &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2.\end{aligned}$$

3. Hiển nhiên. □

[2]Các ký hiệu Re và Im xuất hiện do việc viết tắt các từ tiếng Pháp Reel (thực) và Imaginaire (ảo)

Một số phức trùng với số liên hợp với nó khi và chỉ khi nó là số thực.

Dễ thấy ánh xạ từ tập hợp tất cả các số phức vào tập hợp các số phức liên hợp với chúng:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$$

là một tự đẳng cấu của $\mathbb{C}$ (Bạn đọc hãy tự kiểm tra !).

1.1.3 Phép trừ và phép chia số phức

Các phép toán trừ và chia được định nghĩa như các phép toán ngược với phép cộng và nhân. Đối với phép trừ ta có

Định lý 1.1.4. *Giả sử z_1 và $z_2 \in \mathbb{C}$. Khi đó tồn tại một và chỉ một số phức z sao cho $z_1 + z = z_2$, cụ thể là $z = (-z_1) + z_2$.*

Chứng minh. 1. Ta có $z_1 + ((-z_1) + z_2) = (z_1 + (-z_1)) + z_2 = 0 + z_2 = z_2$ và như vậy $z = (-z_1) + z_2$ thỏa mãn đòi hỏi của định lý.

2. Ngược lại, nếu $z_1 + z = z_2$ thì $(-z_1) + (z_1 + z) = (-z_1) + z_2$. Từ đó $z = (-z_1) + z_2$ và như vậy định lý được chứng minh. □

Số phức $z = (-z_1) + z_2$ được gọi là *hiệu* của các số phức z_2 và z_1. Thông thường hiệu đó được ký hiệu là

$$z = z_2 - z_1,$$

và nếu $z_1 = a_1 + ib_1$, còn $z_2 = a_2 + ib_2$ thì

$$z = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1).$$

Đối với phép chia ta có

Định lý 1.1.5. *Giả sử z_1 và $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$. Khi đó tồn tại một và chỉ một số phức z sao cho $z_2 z = z_1$, cụ thể là: $z = z_2^{-1} z_1$.*

Chứng minh. 1. Nếu $z = z_2^{-1} z_1$ thì $z_2 z = z_2(z_2^{-1} z_1) = z_1$.

2. Nếu $z_2 z = z_1 \Rightarrow z = z_2^{-1}(z_2 z) = z_2^{-1} z_1$. □

Như vậy số $z_2^{-1}z_1$ là *thương* của phép chia z_1 cho z_2.
Số thương thường được ký hiệu là $\dfrac{z_1}{z_2}$ hoặc z_1/z_2.
Giả sử $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Khi đó ta có thể viết:

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a + 2^2 + b_2^2} \cdot \end{aligned}$$

Như vậy

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot$$

Và từ đó suy ra rằng phép chia cho số phức $z \neq 0$ bất kỳ là luôn luôn thực hiện được.

1.1.4 Mặt phẳng phức

Giả sử trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ cho hệ tọa độ Descartes vuông góc xOy. Như đã biết, hai điểm được xác định bởi các tọa độ Descartes vuông góc trùng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau. Do đó ta có thể xác lập một phép tương ứng đơn trị một - một giữa các điểm của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với các số phức của $\mathbb{C}$, trong đó mỗi số phức $z = x+iy \in \mathbb{C}$ sẽ tương ứng vời điểm hoàn toàn xác định $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và ngược lại mỗi điểm $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sẽ tương ứng với số phức hoàn toàn xác định $z = x + iy \in \mathbb{R}^2$. Như vậy phép tương ứng

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$$

là đơn trị một - một. Từ đó ta thấy rằng mọi số phức đều có thể biểu diễn bởi điểm của mặt phẳng và như vậy các thuật ngữ "*số phức z*" và "*điểm z*" được dùng như những từ đồng nghĩa.

Định nghĩa 1.1.3. Mặt phẳng với phép tương ứng đơn trị một - một

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$$

như đã mô tả ở trên được gọi là *mặt phẳng phức* và cũng được ký hiệu là $\mathbb{C}$.

Có thể nói một cách khác: *mặt phẳng mà các điểm của nó được dùng để mô tả số phức gọi là mặt phẳng phức.* Các số thực được mô tả bởi các điểm trên trục Ox nên trục đó được gọi là *trục thực*. Các số thuần ảo được mô tả bởi các điểm trên trục Oy nên trục Oy được gọi là *trục ảo*.

Ta cũng có thể xác lập phép tương ứng giữa các phần thực và phần ảo của số phức với các tọa độ của vectơ với gốc, chẳng hạn, tại gốc tọa độ. Sự tương ứng giữa các số phức và các vectơ trên mặt phẳng phức với gốc tại O là một phép tương ứng đơn trị một - một. Do đó số phức z còn có thể biểu diễn bởi một vectơ với gốc tại O và đầu mút tại điểm z và ta có thể sử dụng thuật ngữ "*số phức z*" và "*vectơ z*" như những thuật ngữ đồng nghĩa.

Nhờ cách minh họa vectơ đối với các số phức, về mặt hình học ta có thể thực hiện phép cộng và trừ các số phức theo các quy tắc cộng và trừ các vectơ.

1.1.5 Môđun và acgumen của số phức

Bây giờ ta xét các tọa độ cực của điểm biểu diễn số phức z bằng cách chọn gốc tọa độ làm gốc-cực và phần dương của trục thực làm trục cực.

Như ta biết, các tọa độ cực của điểm gồm có bán kính vectơ của nó (bằng khoảng cách từ điểm z đến gốc cực) và góc cực tạo nên bởi hướng dương của trục cực và vectơ đi từ cực đến điểm z.

Định nghĩa 1.1.4. Độ dài của bán kính-vectơ của điểm biểu diễn số phức z được gọi là *môđun* của số phức và ký hiệu là $|z|$.

Rõ ràng là nếu $z = a + ib$ thì

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Đối với số phức $z \in \mathbb{C}$ bất kỳ môđun của nó xác định một cách đơn trị. Trong trường hợp khi z là số thực thì môđun của z trùng với giá trị tuyệt đối của nó.

Định lý 1.1.6. *Môđun của số phức z có các tính chất sau đây:*

1. $$|z| \geqslant 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$
2. $$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$
3. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ *(bất đẳng thức tam giác).*

Chứng minh. 1. Được suy từ định nghĩa.

2. Ta có $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z}_1 \cdot z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Do đó $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

3. Ta có

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2).$$

Do đó, để ý đến bất đẳng thức

$$-|z_1 z_2| \leqslant \mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2) \leqslant |z_1 z_2|$$

ta suy ra

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2$$

thành thử

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

□

Nhận xét. Từ định lý vừa chứng minh suy ra rằng

$$|z_1 - z_2| = d(z_1, z_2)$$

là khoảng cách giữa hai điểm z_1 và z_2 và đại lượng $|z|$ là độ dài của bán kính-vectơ z.

Hệ quả

a) $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
b) $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$;
c) $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$;
d) $|z_1 + z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$;
e) $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$.

Chứng minh. a) Thật vậy, vì $|z_2| = |-z_2|$ nên

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leqslant |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

b) Để chứng minh b) ta áp dụng a) cho

$$z_1 = (z_1 + z_2) - z_2.$$

Ta có

$$|z_1| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|.$$

c) $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \geqslant |z_1| - |-z_2| = |z_1| - |z_2|$.

d) Ta có $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$ và $|z_1 + z_2| \geqslant |z_2| - |z_1|$. Do đó

$$-|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2|.$$

e) Bất đẳng thức e) thu được từ d) sau khi thay z_2 bởi $-z_2$. □

Từ bất đẳng thức tam giác, dễ dàng suy ra rằng

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \tag{1.1}$$

Từ bất đẳng thức này và a) suy ra

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| &\geqslant |z_1| - |z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \\ &\geqslant |z_1| - |z_2| - \cdots - |z_n|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Có thể xem các bất đẳng thức (1.1) và (1.2) như những bất đẳng thức tổng quát đối với bất đẳng thức tam giác và bất đẳng thức a).

Bây giờ ta chuyển sang định nghĩa acgumen của số phức $z = a + ib \neq 0$. Ta đặt $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vì $a^2 \leqslant r^2$, $b^2 \leqslant r^2$ nên

$$\left|\frac{a}{r}\right| \leqslant 1 \quad \text{và} \quad \left|\frac{b}{r}\right| \leqslant 1.$$

Như ta biết, với mọi $x \in [0, 1]$ tồn tại một và chỉ một số $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin y = x$. Từ đó suy rằng tồn tại số α_0 sao cho

a) $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, b) $\sin \alpha_0 = \left|\dfrac{b}{r}\right|$.

Nhưng vì

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$$

nên

$$\frac{a}{r} = \pm \cos \alpha_0, \quad \frac{b}{r} = \pm \sin \alpha_0.$$

Đặt $\alpha = \alpha_0$. Nếu $a < 0$ thì thay α bằng $\pi - \alpha$. Nếu $b < 0$ thì thay α bằng $-\alpha$. Do đó ta thu được số α thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a}{r} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{r} = \sin \alpha. \tag{1.3}$$

Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.1.5. Số thực α thỏa mãn hệ (1.3) được gọi là *acgumen* của số phức z và được ký hiệu là $\operatorname{Arg} z$.

Từ định nghĩa này dễ dàng nhận thấy rằng acgumen của z là góc tạo nên giữa hướng dương của trục thực với vectơ z nhận hướng ngược chiều kim đồng hồ làm hướng biến thiên dương.

Đối với số $z = 0$ acgumen không có giá trị xác định và đó cũng là điểm duy nhất có acgumen không xác định. Thật vậy, $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$, do đó từ (1.3) suy ra $\arg 0$ không xác định.

Acgumen của số phức được xác định không đơn trị. Ta sẽ nói rõ đặc điểm của tính đa trị của acgumen.

Giả sử φ_0 là giá trị bé nhất của acgumen của z được tính theo hướng dương. Sau khi thực hiện một số vòng quay toàn phần vectơ z xung quanh cực theo hướng dương ta sẽ đi đến giá trị acgumen là $\varphi_0 + k \cdot 2\pi$, trong đó $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$ là số vòng quay vectơ z. Số đo đơn giản nhất của acgumen theo hướng âm sẽ là $-(2\pi - \varphi_0) = \varphi_0 - 2\pi$. Do đó nếu thực hiện tiếp s vòng quay vectơ z xung quanh cực theo hướng âm thì ta sẽ đi đến giá trị acgumen là $\varphi_0 - (s+1)2\pi$, $s \geqslant 0$. Do đó, tất cả các giá trị có thể có của acgumen của z sẽ được cho bởi công thức $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Như vậy, mọi số phức $z \neq 0$ đều có vô số giá trị acgumen liên hệ với nhau một cách đơn giản: hai giá trị bất kỳ của acgumen khác nhau một bội nguyên của 2π.

Ta có thể tránh được tính đa trị của acgumen nếu đặt thêm điều kiện để tách một trong các giá trị có thể có của acgumen, chẳng hạn điều kiện $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, hoặc $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Giá trị của acgumen của z thỏa mãn điều kiện vừa nêu được gọi là *giá trị chính* của acgumen và được ký hiệu là $\arg z$. Thông thường ta sẽ xét giá trị acgumen thỏa mãn điều kiện

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Trừ trường hợp $z = 0$, còn đối với số phức z bất kỳ luôn luôn tồn tại giá trị duy nhất của acgumen thỏa mãn điều kiện vừa nêu.

Từ định nghĩa giá trị chính của $\arg z$ ta có hệ thức

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{khi } a > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi\,, & \text{khi } a < 0,\ b \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi\,, & \text{khi } a < 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Thật vậy, vì giá trị chính của $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ thuộc khoảng $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ nên ta có:

a) nếu điểm z nằm trong góc phần tư thứ I và IV ($a > 0$) thì $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$;

b) nếu điểm z nằm trong góc phần tư thứ II ($a < 0, b \geqslant 0$) thì

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \leqslant 0$$

và

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi;$$

c) cuối cùng nếu z nằm trong góc phần tư thứ III thì $0 < \operatorname{arctg}\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2}$ và $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi$. □

Nhận xét. Nếu $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ và $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2}$ là những giá trị chính thì tương tự ta có

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & \text{nếu } a > 0, b > 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2\pi & \text{nếu } a > 0, b < 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Với khái niệm môđun và acgumen của số phức ta có thể biểu diễn số phức ở một dạng khác tiện lợi hơn trong việc thực hiện phép nhân và phép chia.

Định nghĩa 1.1.6. Giả sử $z \in \mathbb{C}$ và $z \neq 0$; $r = |z|$. $\alpha = \arg z$. Khi đó từ (1.3) ta có

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{1.4}$$

Hệ thức (1.4) được gọi là *dạng lượng giác* của số phức z.

Định lý 1.1.7. *Mọi số phức $z \neq 0$ đều có thể biểu diễn dưới dạng lượng giác, trong đó $r = |z|$ xác định đơn trị, còn $\operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$ xác định với sự sai khác một số hạng bội nguyên của 2π.*

Chứng minh. Giả sử $z = a + ib \neq 0$. Khi đó

$$z = a + ib = |z|\Big(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\Big) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Nếu cho hai dạng lượng giác của số z là: $r(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) = r(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ thì khi $z \neq 0$ ta có $r \neq 0$ và do đó $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ và $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$. Do đó

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Về sau, thay vì viết $\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ta sẽ viết

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 (\bmod 2\pi).$$

Điều đó có nghĩa là hiệu $\alpha_1 - \alpha_2$ chia hết cho 2π.

Định lý 1.1.8. *Giả sử* $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *và* $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Khi đó*

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ *và* $\varphi_1 \equiv \varphi_2 (mod 2\pi)$.
2. $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, $z_2 \neq 0$.

Chứng minh. Phép chứng minh được suy trực tiếp từ công thức (1.4). □

Hệ quả.

1.
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$
$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 (\bmod 2\pi).$$

2.
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\arg\frac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 (\bmod 2\pi).$$

Bằng phương pháp quy nạp, công thức 1) trong hệ quả dễ dàng được khái quát cho trường hợp một số hữu hạn n thừa số. Cụ thể ta có

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|,$$

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Bây giờ giả sử $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Khi đó dễ thấy là: $|z^n| = |z|^n$, $\arg(z^n) \equiv n\arg z(\operatorname{mod} 2\pi)$ $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Khi $\rho = 1$ ta thu được *công thức Moivre:*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Công thức Moivre vẫn còn đúng cả khi $n = 0$ và n là số nguyên âm. Với $n = 0$, đó là điều hiển nhiên vì $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$. Bây giờ đặt $k = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} &= \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} \\ &= \frac{1}{(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \frac{(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)}{(\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi)} \\ &= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = \cos k\varphi + i\sin k\varphi.\end{aligned}$$

Như vậy công thức Moivre đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét 1. Từ định lý 1.1.8 suy rằng phép nhân số phức z_1 với số phức z_2 được dẫn về phép quay vectơ z_1 xung quanh gốc tọa độ một góc bằng $\arg z_2$ và tiếp đến là phép giãn $|z_2|$ lần (nếu $|z_2| > 1$) hoặc co $|z_2|$ lần vectơ z_1 (nếu $|z_2| < 1$).

2. Phép chia z_1 cho z_2 được xem như phép nhân z_1 với $1/z_2$. Bây giờ ta nêu ra sự giải thích hình học phép toán $w = 1/z$.

Giả sử $|z| < 1$. Từ điểm z ta kẻ đường vuông góc với tia Oz cắt đường tròn đơn vị $\{|z| = 1\}$ tại điểm ζ. Từ điểm ζ ta kẻ tiếp tuyến với đường tròn đơn vị và giả sử tiếp tuyến đó cắt tia Oz tại điểm ω. Hiển nhiên rằng $\arg\omega = \arg z$, $|\omega| = \dfrac{1}{|z|}$.

Như vậy số ω liên hợp với $1/z$: $\omega = 1/\overline{z}$. Bước chuyển từ điểm z đến điểm $1/\overline{z}$ được gọi là *phép đối xứng* qua đường tròn đơn vị. Bây giờ để thu được $1/z$ ta chỉ cần xác định điểm đối xứng với ω qua trục thực.

Trong trường hợp $|z| > 1$ thì phép dựng đã mô tả cần tiến hành theo thứ tự ngược lại.

1.1.6 Phép khai căn số phức

Bây giờ ta chuyển sang xét phép khai căn các số phức. Đối với số phức $z \in \mathbb{C}$ cho trước, ta giải phương trình $z = w^n$. Tập hợp các nghiệm của phương trình này được ký hiệu là $\sqrt[n]{z}$ và gọi đó là *căn bậc n* của số phức z.

Định lý 1.1.9. *Giả sử $z \in \mathbb{C}$ và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó tồn tại đúng n giá trị của căn bậc n của số phức khác 0: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Các giá trị đó được cho bởi công thức*

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{1/n}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big), \tag{1.5}$$

trong đó giả thiết k nhận các giá trị, chẳng hạn $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Chứng minh. 1. Ta sẽ tìm w dưới dạng lượng giác $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Khi đó đẳng thức $w^n = z$ được viết dưới dạng

$$r^n[\cos n\alpha + i\sin n\alpha] = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Từ định lý 1.1.8 suy ra

$$\left.\begin{aligned} &r^n = \rho \\ &n\alpha \equiv \varphi(\operatorname{mod} 2\pi)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}\,, \\ \alpha \equiv \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\,, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Do đó các căn bận n của số z tồn tại và được tính theo công thức

$$w_k = \rho^{1/n}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big) \tag{1.6}$$

với $k \in \mathbb{Z}$ bất kỳ.

2. Bây giờ ta chứng minh rằng $w_{k_1} = w_{k_2} \Leftrightarrow k_1 \equiv k_2(\operatorname{mod} n)$. Thật vậy

$$w_{k_1} = w_{k_2} \Leftrightarrow \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Nhưng đẳng thức vừa viết lại tương đương với đẳng thức

$$\frac{k_1 - k_2}{n} = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_1 = k_2(\operatorname{mod} n).$$

Như vậy

$$w_{k_1} = w_{k_2} \Leftrightarrow k_1 = k_2 (\operatorname{mod} n).$$

3. Vì hai số nguyên khác nhau của dãy số $0, 1, \ldots, n-1$ đều có hiệu (lấy số lớn trừ cho số bé) bé hơn n và do đó không chia hết cho n. Do đó ta tìm được tất cả các giá trị khác nhau của w_k nếu $k = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Ví dụ. Ta có $1 = \cos 0 + i \sin 0$, từ đó căn bậc n của đơn vị được biểu diễn bởi công thức

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.7}$$

Về phương diện hình học, các điểm $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ chính là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = \rho^{1/n}$. Thật vậy môđun của mọi w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ đều bằng nhau và khi chuyển từ w_k đến w_{k+1} acgumen được tăng lên $2\pi/n$. Sau n lần chuyển như thế ta trở lại giá trị căn đầu tiên rồi sau đó lại nhận được các giá trị của nó mà ta đã lập.

1.1.7 Dạng mũ của số phức

Để đơn giản cách viết các số phức ta đặt

$$\cos\varphi + i \sin\varphi \overset{def}{=} e^{i\varphi}. \tag{1.8}$$

(Để ý rằng đến bây giờ ta chưa định nghĩa phép toán nâng một số phức lên lũy thừa ảo. Trong chương II ta sẽ chứng tỏ sự đúng đắn của công thức (1.8)).

Từ (1.8) ta có

$$z = \rho e^{i\varphi}. \tag{1.9}$$

Đó là *dạng số mũ* của số phức.

Dễ dàng chứng minh rằng nếu $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ và $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ thì

1. $z_1z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi_1-\varphi_2)}$.

3. $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$.

4. $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$

Từ (1.8) và (1.9) và bằng cách thay φ bởi $-\varphi$ ta có

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}),\\ \sin\varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Các công thức (1.10) được gọi là *công thức Euler*.

1.1.8 Khái niệm về mặt phẳng mở rộng

Trong không gian Euler ba chiều với hệ tọa độ Descartes vuông góc (ξ, η, ζ) ta xét mặt cầu với tâm tại điểm $\left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ với bán kính bằng $\dfrac{1}{2}$ (hình I.1)

$$S = \left\{(\xi, \eta, \zeta) : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

sao cho nó tiếp xúc với mặt phẳng z tại gốc tọa độ và trục thực của mặt phẳng z trùng với trục $\{\eta = 0, \zeta = 0\}$, còn trục ảo thì trùng với trục $\{\xi = 0, \zeta = 0\}$.

Ta xét phép chiếu π với cực bắc tại điểm $P(0, 0, 1)$. Giả sử $z \in \mathbb{C}$ là điểm tùy ý. Nối điểm $z \in \mathbb{C}$ với cực bắc P bằng đoạn thẳng. Đoạn thẳng này cắt mặt cầu S tại điểm $A(z)$. Và ngược lại, giả sử $A \in S$ là một điểm tùy ý của mặt cầu. Khi đó tia PA sẽ cắt mặt phẳng phức tại điểm z. Hiển nhiên rằng đó là một phép tương ứng đơn trị một-một.

Hình I.1

Định nghĩa 1.1.7. Phép tương ứng

$$\pi : \mathbb{C} \ni z \mapsto A(z) \in S$$

như đã mô tả ở trên được gọi là *phép chiếu nổi* với cực tại điểm P. Điểm $A(z) \in S$ được gọi là *ảnh nổi* hay là *ảnh cầu* của điểm z.

Định lý 1.1.10. *Trong phép chiếu nổi*

$$\pi : \mathbb{C} \ni z \mapsto A(z) \in S$$

điểm $x = x + iy \in \mathbb{C}$ sẽ tương ứng với điểm $A(z) \in S$ có tọa độ là

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \cdot \tag{1.11}$$

Công thức (1.11) được gọi là *công thức của phép chiếu nổi.*

Chứng minh. Thật vậy, vì ba điểm $P(0,0,1)$, $A(z) = (\xi, \eta, \zeta)$ và $z = (x, y, 0)$ cùng nằm trên một đường thẳng nên các tọa độ của chúng phải thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1},$$

hay là

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} \cdot \tag{1.12}$$

Để ý rằng

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} \quad \text{và} \quad \xi^2 + \eta^2 + \Big(\zeta - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}$$

ta thu được

$$|z|^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

và do đó $\zeta = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$. Thế giá trị ζ vào (1.12) ta tìm được

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}\,, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}\,.$$

□

Hiển nhiên trong phép biến đổi π, điểm $P(0,0,1)$ không tương ứng với điểm z nào của mặt phẳng $\mathbb{C}$. Bây giờ ta xét số phức "lý tưởng" $z = \infty$ và "bổ sung" cho mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ bằng cách thêm cho nó điểm xa vô cùng duy nhất (gọi tắt *điểm vô cùng*) tương ứng với số phức $z = \infty$.

Định nghĩa 1.1.8. Tập hợp lập nên từ mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và điểm vô cùng (ký hiệu là ∞) được gọi là *mặt phẳng phức mở rộng* và ký hiệu là $\overline{\mathbb{C}}$.

Như vậy $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ và $\overline{\mathbb{C}}$ không phải là một trường. Từ định lý 1.1.10 suy rằng phép chiếu nổi π xác lập sự tương ứng đơn trị một-một giữa các điểm của $\mathbb{C}$ và các điểm của $S \setminus \{P\}$.

Hiển nhiên khi $|z| \to \infty$ thì điểm $A(z)$ sẽ dần đến điểm $P(0,0,1)$. Thật vậy, từ tính đồng dạng của hai tam giác zOP và APO suy rằng

$$\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

và do đó $\overline{AP} \to 0$ khi $|z| \to \infty$.

Từ sự lý luận đó ta rút ra kết luận rằng phép chiếu nổi $\pi : \mathbb{C} \mapsto S \setminus \{P\}$ có thể thác triển vào $\overline{\mathbb{C}}$ thành

$$\pi^* : \overline{\mathbb{C}} \to S$$

bằng cách đặt

$$\pi^*\big|_{\mathbb{C}} = \pi, \quad z \in \mathbb{C}$$

và

$$\pi(\infty) = P(0,0,1).$$

Do đó, một cách tự nhiên ta có thể cho rằng điểm $z = \infty$ tương ứng với "cực bắc" P của mặt cầu S và mọi điểm trên mặt cầu S có thể xem như là mô tả điểm tương ứng của mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$. Phương pháp biểu diễn hình học các số phức như trên được gọi là *phương pháp biểu diễn cầu* của các số phức. Mặt cầu S, vì lý do đó, được gọi là *mặt cầu số phức* Riemann. Tính ưu việt của mặt cầu Riemann là ở chỗ trên mặt cầu Riemann điểm vô cùng duy nhất của mặt phẳng phức được mô tả một cách khá trực quan. Sau này khi nghiên cứu một vấn đề nào đó nếu muốn xét cả điểm $z = \infty$ thì ta sẽ tiến hành các lập luận trên mặt cầu Riemann.

1.1.9 Khoảng cách trên $\mathbb{C}$

Tương ứng với hai phương pháp biểu fiễn hình học số phức đã được mô tả, ta sẽ đưa vào trong $\mathbb{C}$ hai mêtric. Trong mêtric thứ nhất khoảng cách giữa hai điểm z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ được giả thiết bằng $d_{\mathbb{C}} = d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) \stackrel{def}{=} |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Mêtric này là *mêtric Euclide* thông thường trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Trong mêtric thứ hai (gọi là *mêtric cầu*) khoảng cách giữa hai điểm z_1 và $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ được hiểu là khoảng cách (trong không gian ξ, η, ζ) giữa các ảnh cầu của chúng. Khoảng cách này được gọi là *khoảng cách cầu* hay *khoảng cách Jordan* giữa hai điểm z_1 và $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$:

$$d_{\overline{\mathbb{C}}} \stackrel{def}{=} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2).$$

Định lý 1.1.11. *Giả sử $d_{\overline{\mathbb{C}}} = d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2)$ là khoảng cách cầu giữa các điểm $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó*

1.

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{1/2} \cdot (1 + |z_2|^2)^{1/2}}\,; \tag{1.13}$$

2. *Nếu $z_2 = \infty$ thì*

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}\,; \tag{1.14}$$

3. *Khoảng cách cầu thỏa mãn các tiên đề thông thường của một mêtric.*

Chứng minh. 1. Thật vậy, từ công thức (1.11) ta có

$$\begin{aligned}d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1,z_2) &= [(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2]^{1/2}\\ &= [\zeta_1+\zeta_2-2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)]^{1/2} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Big\{\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2|}+\frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}-2\Big[\frac{x_1x_2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}\\ &\quad+\frac{y_1y_2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}+\frac{|z_1|^2|z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}\Big]\Big\}^{1/2}\\ &= \frac{\big\{|z_1|^2(1+|z_2)^2)+|z_2|^2(1+|z_1|^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)-2|z_1|^2|z_2|^2\big\}^{1/2}}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}\\ &= \frac{\big[|z_1|^2+|z_2|^2-2x_1x_2-2y_1y_2\big]^{1/2}}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}=\frac{\big[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\big]^{1/2}}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}\\ &= \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}\,.\end{aligned}$$

Công thức (1.13) được chứng minh.

2. Trong trường hợp khi $z_2=\infty$ ta có

$$\begin{aligned}d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1,\infty) &= \sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+(1-\zeta_1)^2} = (\text{vì } z_2=\infty \text{ nên } \zeta_2=1)\\ &= \sqrt{1-\zeta_1}=\frac{1}{(1+|z+1|^2)^{1/2}}\,.\end{aligned}$$

3. Hiển nhiên rằng $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1,z_2)\geqslant 0$ và $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1,z_2)=0 \Leftrightarrow z_2=z_2$ và $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1,z_2)=d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_2,z_1)$. Ta còn phải chứng minh rằng $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1,z_3)\leqslant d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1,z_2)+d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_2,z_3)$.

Đối với z_1, z_2 và z_3 ta có đồng nhất sau

$$(z_1-z_2)(1+z_3\overline{z}_3)=(z_1-z_3)(1+z_2\overline{z}_3)+(z_3-z_2)(1+z_1\overline{z}_3).$$

Từ đó

$$|z_1-z_2|(1+|z_3|^2)\leqslant|z_1-z_3|(|1+z_2\overline{z}_3|)+|z_3-z_2|(|1+z_1\overline{z}_3|). \tag{1.15}$$

Nhưng để ý rằng

$$(1 + uv)(1 + \overline{u}\,\overline{v}) \leqslant (1 + |u|^2)(1 + |v|^2)$$

cho nên

$$|1 + z_2\overline{z}_3|^2 = (1 + z_2\overline{z}_3)(1 + \overline{z}_2 z_3) \leqslant (1 + |z_2|^2)(1 + |z_3|^2) \tag{1.16}$$

và

$$|1 + \overline{z}_1 z_3|^2 \leqslant (1 + |z_1|^2)(1 + |z_3|^2). \tag{1.17}$$

Từ các hệ thức (1.13) và (1.15) - (1.17) ta thu được điều phải chứng minh. □

Ta nhận xét rằng trên các tập hợp bị chặn $M \subset \mathbb{C}$ (tức là những tập hợp được chứa trong hình tròn cố định nào đó $\{|z| \leqslant R, R < \infty\}$) hai mêtric Euclide và mêtric - cầu là tương đương với nhau.

Thật vậy, nếu $M \subset \{|z| \leqslant R\}$ thì từ (1.13) ta có

$$\frac{|z_1 - z_1|}{1 + R^2} \leqslant d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) \leqslant |z_1 - z_2|, \quad \forall\, z_1, z_2 \in M.$$

Do đó mêtric cầu thường được áp dụng khi xét các tập hợp không bị chặn. Và nói chung, khi tiến hành các lập luận trên $\mathbb{C}$ ta sử dụng mêtric Euclide $d_{\mathbb{C}}$, còn trên $\overline{\mathbb{C}}$ thì sử dụng mêtric - cầu $d_{\overline{\mathbb{C}}}$.

Từ điều vừa chứng minh trên đây cũng suy ra rằng việc đưa vào mỗi mêtric trên đây đều biến $\mathbb{C}$ thành không gian mêtric.

1.2 Các khái niệm tôpô cơ bản trên mặt phẳng phức

Trên $\mathbb{C}$ và $\overline{\mathbb{C}}$ ta đã đưa vào các mêtric tương ứng biến $\mathbb{C}$ và $\overline{\mathbb{C}}$ thành những không gian mêtric. Bây giờ ta đưa vào các tập hợp được xét những tôpô tương ứng với các mêtric ấy và qua đó trình bày vắn tắt những *tính chất tôpô cơ bản của mặt phẳng phức*.

1.2.1 Tôpô trên $\mathbb{C}$

Định nghĩa 1.2.1. 1) Tập hợp những điểm $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn hệ thức

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

trong đó ε là số dương cho trước, được gọi là ε - *lân cận* của điểm z_0. Đó là hình tròn với tâm tại z_0 và bán kính ε.

2) Tập hợp những điểm $z \in \overline{\mathbb{C}}$ thỏa mãn hệ thức $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) < \varepsilon$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, được gọi là ε - *lân cận* của điểm z_0.

Từ hệ thức (1.14) suy ra rằng

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, \infty) < \varepsilon \Leftrightarrow |z| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}.$$

Do đó ta sẽ hiểu ε - lân cận của điểm ∞ là tập hợp

$$U(\infty, \varepsilon) = \Big\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\Big\}.$$

Đó là phần ngoài hình tròn với tâm tại gốc tọa độ và bán kính $r = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Trong nhiều trường hợp ta còn dùng thuật ngữ "lân cận thủng". Theo định nghĩa, *ε-lân cận thủng của điểm $z_0 \in \mathbb{C}$* được hiểu là

$$\dot{U}(z_0, \varepsilon) = U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Tương tự, *ε-lân cận thủng của điểm $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$* là tập hợp

$$\dot{U}(z_0, \varepsilon) = \{z : 0 < d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) < \varepsilon\}.$$

Định nghĩa 1.2.2. Giả sử tập hợp con $M \subset \mathbb{C}$ (hoặc $\overline{\mathbb{C}}$). Điểm z_0 được gọi là *điểm trong* của M nếu $\exists\, \varepsilon > 0$ sao cho ε - lân cận của điểm z_0 là thuộc M.

Định nghĩa 1.2.3. Tập con $A \subset \mathbb{C}$ (hoặc $\overline{\mathbb{C}}$) được gọi là *tập hợp mở* nếu mọi điểm $z \in A$ đều là điểm trong của nó.

Định lý 1.2.1. *Họ các tập con mở của $\mathbb{C}$ thỏa mãn các tính chất sau đây (các tiên đề cấu trúc tôpô):*

1. *$\emptyset$ và $\mathbb{C}$ là những tập hợp mở.*

2. *Hợp của một số hữu hạn hay vô hạn bất kỳ các tập hợp mở là một tập hợp mở.*

3. *Giao của một số hữu hạn tập hợp mở là tập hợp mở.*

Chứng minh. 1. Hiển nhiên.

2. Giả sử $\{U_\lambda\}$ là họ các tập con mở nào đó. Nếu $z_0 \in U_\mu$ nào đó thì $\exists\, r > 0$ sao cho $U(z_0, r) \subset U_\mu \subset U = \bigcup\limits_\lambda U_\lambda$.

3. Giả sử $U_1, \dots, U_n$ là những tập hợp mở. Nếu $U_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$ thì U mở (theo 1.). Giả sử $U_0 \neq \emptyset$ và $z_0 \in U_0$. Khi đó, với mỗi giá trị i $(i = 1, 2, \dots, n)$ sẽ tồn tại $\varepsilon_i > 0$ sao cho

$$U(z_0, \varepsilon_i) \subset U_i.$$

Hiển nhiên rằng $U(z_0, \varepsilon) \subset U_0$, trong đó

$$\varepsilon = \min_{i=\overline{1,n}} |\varepsilon_i| > 0.$$

□

Với cách đưa vào khái niệm tập hợp mở như vậy $\mathbb{C}$ và $\overline{\mathbb{C}}$ trở thành không gian tôpô.

Định lý 1.2.2. (tiên đề tách Hausdorff). *Giả sử z_1 và z_2 là những điểm khác nhau của $\overline{\mathbb{C}}$. Khi đó tồn tại những lân cận[3] $U(z_1, .)$ và $U(z_2, .)$ sao cho $U(z_1, .) \cap U(z_2, .) = \emptyset$.*

Chứng minh. 1. Giả sử $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Đặt $\varepsilon = \dfrac{1}{4}|z_1 - z_2|$ và $U(z_i, .) = U(z_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2$. Giả sử $\exists\, z \in U(z_1, \varepsilon) \cap U(z_2, \varepsilon)$. Khi đó

$$4\varepsilon = |z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - z| + |z - z_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

[3] Ở đây ta ký hiệu $U(z; .)$ là hình tròn với tâm tại điểm z và với bán kính "." sẽ được xác định trong quá trình chứng minh

Điều này vô lý. Vậy

$$U(z_1, \varepsilon) \cap U(z_2, \varepsilon) = \emptyset.$$

2. Bây giờ giả sử $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 = \infty$. Ta sẽ chứng minh rằng lân cận $U(z_1; 1)$ và $U\Big(\infty, \dfrac{1}{|z_1| + 2}\Big)$ không giao nhau. Giả sử $z \in U(z_1, 1) \cap U\Big(\infty, \dfrac{1}{|z_1| + 2}\Big)$. Vì $z \in U(z_1, 1)$ nên

$$\rho(z, 0) \leqslant \rho(z, z_1) + \rho(z_1, 0) < 1 + |z_1|.$$

Mặt khác vì $z \in U\Big(\infty, \dfrac{1}{|z_1| + 2}\Big)$ nên $\rho(z, 0) > |z_1| + 2$. Đó là điều mâu thuẫn. □

Định nghĩa 1.2.4. Tập hợp con $A \subset \mathbb{C}$ (hoặc $\overline{\mathbb{C}}$) được gọi là *tập đóng* nếu phần bù $C_{\mathbb{C}}A$ của nó là tập mở.

Định lý 1.2.3. *Hệ các tập hợp đóng thỏa mãn các tính chất sau đây:*

1. $\mathbb{C}$ *và* $\emptyset$ *là những tập đóng.*
2. *Hợp của một số hữu hạn tập hợp đóng là tập hợp đóng.*
3. *Giao của một số hữu hạn hay vô hạn bất kỳ các tập hợp đóng là tập hợp đóng.*

Chứng minh. Suy trực tiếp từ định lý 1.2.1 và các quy tắc lấy phần bù. □

Nhận xét 1.2.1. Từ định lý 1.2.1 và 1.2.3 suy ra rằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ chỉ có chính $\mathbb{C}$ và tập hợp $\emptyset$ là đồng thời vừa đóng vừa mở trong $\mathbb{C}$.

1.2.2 Phần trong và phần ngoài

Định nghĩa 1.2.5. Giả sử $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$. Tập hợp các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A và được ký hiệu là $\overset{\circ}{A}$.

Từ định lý 1.2.1 suy ra rằng $\overset{\circ}{A}$ là tập hợp mở.

Định nghĩa 1.2.6. Phần trong $\overset{\circ}{\widehat{C_{\mathbb{C}}A}}$ được gọi là *phần ngoài* của tập hợp A.

Ta có

Định lý 1.2.4. *Điểm* $z_0 \in \mathbb{C}$ *là điểm ngoài của tập hợp* A *khi và chỉ khi* $d(z_0, A) > 0$*, trong đó khoảng cách*

$$d(z_0, A) = \inf_{z' \in A} d(z_0, z').$$

Chứng minh. 1. Vì $d(z_0, A) > 0 \Rightarrow U(z_0, d(z_0, A)) \subset CA$, do đó z_0 là điểm trong của CA, tức là điểm ngoài của A.

2. Nếu z_0 là điểm ngoài của A thì tồn tại hình tròn $U(z_0, r)$, $r > 0$, nằm trong CA. Như vậy đối với điểm $z \in A$ bất kỳ ta có $d(z_0, z) > r$ và do đó $d(z_0, A) \geqslant r$. □

1.2.3 Điểm tụ

Ta xét điểm tụ của tập hợp và của dãy điểm trên $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.2.7. Điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là *điểm tụ* (hay *điểm giới hạn*) của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ nếu trong lân cận bất kỳ của nó có vô số điểm của A.

Tập hợp các điểm tụ của tập hợp A thường được ký hiệu là A'. Từ định nghĩa 1.2.7 suy rằng lân cận bất kỳ của điểm z giao với A khi và chỉ khi hoặc $z \in A$, hoặc z là điểm tụ của A. Vì vậy, có thể mô tả khái niệm tập hợp đóng theo ngôn ngữ lân cận như sau:

Định nghĩa 1.2.4'. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm tụ của nó.

Hợp của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ với tập hợp mọi điểm tụ của nó được gọi là *bao đóng* của tập hợp A và ký hiệu là $\overline{A}$.

Như vậy $\overline{A} = A \cup A'$.

Định nghĩa 1.2.8. Ánh xạ $z_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ được gọi là một *dãy điểm* trên $\mathbb{C}$ và ký hiệu là $\{z_n\}_{n \geqslant 0}$. Dãy $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ được gọi là *hội tụ* tới điểm z (hay z là *giới hạn* của dãy $\{z_n\}$) nếu: với mỗi lân cận V của z, đều $\exists\, m_0 \in \mathbb{N} : \forall\, m \in \mathbb{N}$, $m > m_0$ thì $z_m \in V$.

Từ định lý 1.2.2 (tiên đề Hausdorff) ta có

Định lý 1.2.5. *Trong $\mathbb{C}$ mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.*

Chứng minh. Nếu dãy hội tụ z_n có hai giới hạn z_0 và $\tilde{z}_0$ ($z_0 \neq \tilde{z}_0$) thì tìm được hai lân cận U và V của z_0 và $\tilde{z}_0$ tương ứng sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Theo định nghĩa giới hạn thì $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$; $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $z_n \in U, \forall\, n \geqslant m_0$, $z_n \in V$, $\forall\, n \geqslant n_0$, vì vậy $z_n \in U \cap V$ khi $n \geqslant \max(m_0, n_0)$. Nhưng điều này không thể xảy ra. □

Nhận xét 1.2.2. Giữa các khái niệm điểm tụ của dãy $\{z_n\}$ và của tập hợp các giá trị $\{z_n\}$ có sự khác nhau. Ví dụ, dãy $x_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ có điểm tụ $x = 1$, còn tập $\{z_n\}$ chỉ gồm một điểm $z_n = 1$ không có điểm tụ.

1.2.4 Biên của tập hợp

Định nghĩa 1.2.9. Tập hợp những điểm của $\mathbb{C}$ không thuộc phần trong và không thuộc phần ngoài của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là *biên* của A và ký hiệu là ∂A.

Vì $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{\widehat{CA}}$ là tập hợp mở nên ∂A là tập hợp đóng.

Định lý 1.2.6. *Điểm $a \in \partial A$ khi và chỉ khi lân cận bất kỳ của điểm a đồng thời chứa điểm của A và của CA.*

Chứng minh. Giả sử lân cận V bất kỳ của điểm a đồng thời giao với A và CA:

$$V \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap CA \neq \emptyset.$$

Khi đó $V \not\subset A$ và $V \not\subset CA$. Suy ra $a \notin \overset{\circ}{A}$ và $a \notin \overset{\circ}{\widehat{CA}}$. Vậy $a \in \partial A$.

Ngược lại, giả sử $a \in \partial A$ và V là lân cận nào đó của a. Khi đó $V \cap A \neq \emptyset$ vì nếu $V \cap A = \emptyset$ thì $V \subset CA$ suy ra a thuộc phần ngoài của A. Tương tự $V \cap CA \neq \emptyset$. □

1.2.5 Tập hợp compắc

Định nghĩa 1.2.10. 1. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là *tập hợp compắc* nếu nó đóng và bị chặn.

2. Tập hợp $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là tập compắc nếu A là tập hợp đóng trong $\overline{\mathbb{C}}$.

Giả sử $\{U\}$ là họ tùy ý các tập hợp mở phủ tập hợp compắc A, tức là mỗi điểm $z \in A$ đều thuộc ít nhất là một tập hợp của họ $\{U\}$. Người ta cũng nói rằng họ $\{U\}$ là một *phủ mở* của A. Đối với các tập hợp $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ hai điều kiện sau đây là tương đương với nhau:

(I) A là tập hợp compắc;

(II) từ mọi phủ mở của A đều có thể trích ra một phủ con hữu hạn, tức là có một số hữu hạn chỉ số $i_1, i_2, \dots, i_n$ sao cho

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}, \quad U_{i_k} \in \{U\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Đó chính là nội dung của bổ đề Heine - Borel - Lebesgue.

Một trong những hệ quả quan trọng nhất của bổ đề Heine - Borel - Lebesgue là nguyên lý Bozano - Weierstrass.

Định lý 1.2.7. (nguyên lý Bolzano - Weierstrass). *Dãy vô hạn bất kỳ*

$$\{z_n\}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.18}$$

các điểm của tập hợp compắc $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ có ít nhất một điểm tụ.

Chứng minh. Giả thiết rằng không một điểm nào của K là điểm giới hạn của dãy (1.18). Điều đó có nghĩa là $\forall\, z \in K$, $\exists\, \delta > 0$ sao cho $U(z, \delta)$ chứa không quá một số hữu hạn điểm của dãy (1.18). Ta ký hiệu U là họ các tập hợp mở $U(z, \delta)$ khi z chạy trên K. Đó là phủ mở của K và theo bổ đề Heine - Borel - Lebesgue có thể trích phủ con hữu hạn phủ K:

$$[U(z'_1, \delta_1), U(z'_2, \delta_2), \dots, U(z'_n, \delta_n)].$$

Vì mỗi $U(z'_k, \delta_k)$ chứa không quá một số hữu hạn điểm của dãy (1.18) nên dãy (1.18) không thể là dãy vô hạn. Nghĩa là giả thiết của chúng ta không đúng. Do đó nguyên lý Bolzano - Weierstrass được chứng minh. □

CÁC VÍ DỤ

1. Tập hợp một điểm là tập hợp compắc.

2. Tập hợp hữu hạn điểm là tập hợp compắc.

3. Tập hợp $\mathbb{C}$ không phải là tập hợp compắc. Thật vậy, nếu ta xét phủ mở với tâm tại gốc tọa độ và bán kính > 0 thì rõ ràng là một số hữu hạn bất kỳ các hình tròn này nằm trọn trong một hình tròn bán kính hữu hạn. Do đó nó không phủ toàn $\mathbb{C}$ được.

4. Tập hợp $\overline{\mathbb{C}}$ là tập hợp compắc. Để chứng minh điều này ta cụ thể hóa tôpô đã trang bị cho $\overline{\mathbb{C}}$ ở đầu mục như sau:

a) Tập hợp U không chứa điểm ∞ là mở trong $\overline{\mathbb{C}}$ nếu nó mở trong $\mathbb{C}$;

b) Tập hợp $U(\infty)$ chứa điểm ∞ là mở trong $\overline{\mathbb{C}}$ nếu phần bù $C_{\mathbb{C}}U(\infty)$ là compắc trong $\mathbb{C}$.

Bạn đọc có thể tự kiểm chứng rằng tôpô này chính là tôpô đã xác định ở trên. Với tôpô đã cụ thể hóa này ở trong $\overline{\mathbb{C}}$ ta dễ dàng chứng minh được rằng $\overline{\mathbb{C}}$ là compắc. Thật vậy, nếu $\{U_i\}$ là một phủ mở của $\overline{\mathbb{C}}$, thì một trong các U_i sẽ chứa điểm ∞. Ta ký hiệu đó là $U(\infty)$. Khi đó phần bù của nó là compắc $K \subset \mathbb{C}$ nào đó. Vì K compắc nên nó được phủ bởi một số hữu hạn tập hợp $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$. Từ đó suy ra rằng các tập hợp $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ và $U(\infty)$ là phủ con hữu hạn của $\overline{\mathbb{C}}$.

Vì mặt phẳng phức $\overline{\mathbb{C}}$ là tập hợp compắc, nên từ nguyên lý Bolzano - Weierstrass suy ra: *trong $\overline{\mathbb{C}}$ dãy vô hạn bất kỳ có ít nhất là một điểm tụ.*

Hiển nhiên rằng trong $\mathbb{C}$ tồn tại những dãy điểm không có điểm giới hạn thuộc $\mathbb{C}$. Chẳng hạn dãy $1, 2, \dots, n, \dots$ không có điểm giới hạn trong $\mathbb{C}$.

1.2.6 Tập hợp liên thông

Giả sử A là tập hợp con của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Ta có:

Định nghĩa 1.2.11. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là *tập hợp liên thông* nếu không tồn tại hai tập hợp mở A_1 và A_2 trong $\mathbb{C}$ sao cho:

1. $A \cap A_1 \neq \emptyset, \ \ A \cap A_2 \neq \emptyset$;

2. $A \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

3. $A \subset A_1 \cup A_2$.

Bây giờ ta xét tập hợp A trong tôpô cảm sinh[4] bởi tôpô của $\mathbb{C}$. Như ta đã biết, khi đó tập hợp A sẽ trở thành không gian tôpô con của $\mathbb{C}$. Do đó giả sử $A = A_1^* \cup A_2^*$, trong đó A_1^* và A_2^* là những tập hợp mở không trống và không giao nhau đối với A. Khi đó, tồn tại những tập hợp mở không giao nhau A_1 và A_2 của $\mathbb{C}$ sao cho:

$$A_1^* = A_1 \cap A, \quad A_2^* = A_2 \cap A.$$

Vì tập hợp A_1^* và A_2^* là những tập hợp bù nhau một cách tương hỗ đối với A nên A_1^* và A_2^* là những tập hợp đồng thời đóng và mở trong A. Từ đó ta có định nghĩa tương đương sau đây:

Định nghĩa 1.2.12. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là tập hợp liên thông nếu trong A không tồn tại một tập hợp con nào đồng thời vừa đóng vừa mở trong A trừ chính tập hợp A và tập hợp $\emptyset$.

CÁC VÍ DỤ

1. Tập hợp trống và tập hợp gồm một điểm là những tập hợp liên thông.
2. Tập hợp $\mathbb{C}$ là tập hợp liên thông.
3. Tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{$một số hữu hạn điểm$\}$ là tập hợp liên thông.
4.Đoạn thẳng $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ là tập hợp liên thông.

Đối với tập hợp mở không trống của mặt phẳng $\mathbb{C}$ ta có:

Định lý 1.2.8. *Giả sử U là tập hợp mở trong $\mathbb{C}$. Hai điều kiện sau đây là tương đương*

1. *Tập hợp U liên thông.*
2. *Qua hai điểm tùy ý của tập hợp U có thể nối chúng bằng một đường gấp khúc nằm trọn trong U.*

[4]Tôpô của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$, trong đó lân cận của các điểm là giao của A với các lân cận của chính các điểm ấy trong tôpô của $\mathbb{C}$ được gọi là tôpô cảm sinh

Chứng minh. Ta chứng minh từ (1) suy ra (2). Giả sử $a \in U$ là điểm bất kỳ cho trước. Ta ký hiệu E là tập hợp những điểm của U mà ta có thể nối chúng với điểm a bằng những đường gấp khúc trong U. Tập hợp E có các tính chất sau đây:

a) Tập hợp $E \neq \emptyset$ vì nó chứa ít nhất là điểm a.

b) Tập E là mở. Thật vậy, vì U mở nên với mỗi điểm $c_0 \in U$ tồn tại một lân cận hình tròn với tâm là c_0 nằm trọn trong U. Mỗi điểm của hình tròn này đều có thể nối với c_0 bằng một đường gấp khúc (chẳng hạn, nối theo bán kính). Như vậy, nếu điểm c_0 có thể nối với điểm a bằng đường gấp khúc nằm trọn trong U thì tồn tại một lân cận của điểm c_0 mà mọi điểm của nó đều có thể nối với a bằng đường gấp khúc $\in U$. Do đó E là tập hợp mở.

c) E là tập hợp đóng. Thật vậy, giả sử điểm $c_0 \in U$ là điểm tụ của E. Ta sẽ chứng minh rằng $c_0 \in E$. Với $r > 0$ nào đó, hình tròn $S = S(c_0, r)$ với bán kính r và với tâm tại c_0 được chứa trong U. Vì điểm c_0 là điểm giới hạn của E nên tìm được điểm $c \in S(c_0, r) \cap E$. Điểm c có thể nối với điểm a vì $c \in E$ và điểm c cũng có thể nối với c_0 bởi đoạn thẳng trong U. Như vậy tồn tại đường gấp khúc nằm trong U với gốc tại a và điểm cuối tại c_0. Từ đó suy rằng $c_0 \in E$ và E là tập hợp đóng.

Như vậy, E là tập hợp không trống, đồng thời vừa đóng vừa mở trong U, do đó

$$E \equiv U.$$

Bây giờ ta chứng minh từ (2) suy ra (1). Giả sử điều kiện (2) xảy ra và tập hợp mở U không liên thông, tức là theo định nghĩa 1.2.11 tồn tại hai tập mở U_1, U_2 sao cho:

$$U \cap U_1 \neq \emptyset, \quad U \cap U_2 \neq \emptyset; \quad U \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset;$$
$$U \subset U_1 \cup U_2.$$

Giả sử $z_1 \in U_1$, $z_2 \in U_2$. Ta chứng minh rằng các điểm z_1 và z_2 không thể nối với nhau bằng đường gấp khúc nằm trong U. Giả sử ngược lại, không giảm tổng quát ta có thể cho rằng z_1 và z_2 được nối với nhau bởi một đoạn thẳng I nằm trọn trong U.

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

Khi đó theo trên ta có $I \subset U_1 \cup U_2$, $I \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $I \cap U_1 \neq \emptyset$, $I \cap U_2 \neq \emptyset$. Nhưng điều này phi lý vì đoạn thẳng I là tập hợp liên thông. □

Ta có định nghĩa quan trọng sau đây.

Định nghĩa 1.2.13. Tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là một *miền* nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

1. D là tập hợp mở;
2. D là tập hợp liên thông.

Trong trường hợp khi D là tập hợp đóng liên thông thì D được gọi là một *continum*.

Bây giờ giả sử D là tập hợp mở tùy ý và z_0 là một điểm nào đó của nó. Giả sử E là tập tất cả các điểm của D mà có thể nối chúng với điểm z_0 bằng những đường gấp khúc nằm trong D. Từ chứng minh định lý 1.2.8 suy ra rằng tập hợp $E = E(z_0)$ đó có ba tính chất:

a) $E(z_0) \neq \emptyset$;

b) $E(z_0)$ là tập hợp mở;

c) Qua hai điểm tùy ý của $E(z_0)$ đều có thể nối chúng bằng một đường gấp khúc nằm trong $E(z_0)$.

Do đó $E(z_0)$ là tập hợp liên thông. Tập hợp $E(z_0)$ được gọi là *thành phần liên thông* (chứa điểm z_0) của tập hợp mở D. Thành phần liên thông của tập hợp mở D cũng có thể đặc trưng như một miền lớn nhất được chứa trong D và chứa điểm z_0 cho trước.

Hiển nhiên hai thành phần liên thông của một tập hợp mở D cùng chứa một điểm chung phải trùng nhau. Do đó hai thành phần liên thông của một tập hợp hoặc không giao nhau, hoặc trùng nhau hoàn toàn.

1.2.7 Hàm phức biến thực. Tuyến và đường cong

Bây giờ ta chuyển sang làm quen với khái niệm hàm phức biến thực (đầy đủ hơn là: hàm giá trị phức biến thực).

Định nghĩa 1.2.14. Giả sử $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Một *hàm phức biến thực*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

là một quy tắc cho ứng mỗi $t \in [a, b]$ với một số phức $z = \gamma(t)$.

Nói cách khác, một hàm phức biến thực là một ánh xạ từ tập hợp con nào đó của $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$.

Việc cho một hàm phức biến thực $z = \gamma(t)$ tương đương với việc cho hai hàm thực $x = x(t)$, $y = y(t)$ sao cho

$$z = \gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t); \quad t \in [a, b].$$

Ta nói rằng z_0 là giới hạn của hàm $z(t)$ khi $t \to t_0$: $z_0 = \lim\limits_{t \to t_0} z(t)$ nếu: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 : \forall\, t \in \{t \in [a, b] : |t - t_0| < \delta\}$ đều có bất đẳng thức $|z(t) - z_0| < \varepsilon$.

Trong trường hợp

$$\lim_{h \to 0} z(t_0 + h) = z(t_0)$$

thì ta nói rằng hàm $z(t)$ liên tục tại điểm $t = t_0$, nghĩa là $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 :$ $\forall\, t \in \{t \in [a, b] : |t - t_0| < \delta\}$ thì $|z(t) - z(t_0)| < \varepsilon$.

Xét tỷ số

$$\delta(h) = \frac{z(t + h) - z(t)}{h} \cdot$$

Ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 1.2.15. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{h \to 0} \delta(h) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{x(t + h) - x(t)}{h} + i \frac{y(t + h) - y(t)}{h} \right\} \tag{1.19}$$

thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm* của hàm $z(t)$ tại điểm t và ký hiệu là

$$\frac{dz(t)}{dt} = z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Ta lưu ý thêm rằng đạo hàm của hàm $z(t)$ tại các đầu mút của đoạn $[a,b]$ được hiểu là giới hạn (1.19) tương ứng được lấy từ phía phải điểm a và phía trái tại điểm b.

Bây giờ ta chuyển sang xét khái niệm về tuyến.

Định nghĩa 1.2.16. Ánh xạ liên tục

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad [a,b] \subset \mathbb{R}$$

được gọi là một *tuyến* (hay *tuyến tham số hóa*) trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, điểm $\gamma(a)$ gọi là điểm đầu, $\gamma(b)$ gọi là điểm cuối. Nếu $\gamma(a) = \gamma(b)$ thì tuyến được gọi là *tuyến đóng*.

Từ định nghĩa ta thấy rằng tuyến - đó là hàm giá trị phức $z = \gamma(t)$ của biến thực t liên tục tại mọi điểm $t \in [a,b]$.

Không nên nhầm lẫn ánh xạ nói trong định nghĩa 1.2.16 với ảnh của đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$ - là ảnh của tuyến qua ánh xạ đó.

Nếu ánh xạ γ là hằng ánh ($\gamma(t) \equiv \text{const}$) thì ảnh của tuyến chỉ là một điểm. Trong trường hợp này ta có thể nói: tuyến γ *co thành một điểm*. Nhưng ta nhấn mạnh rằng: tuyến là cái gì đó khác với tập hợp điểm thu được trong ánh xạ. Tương tự như vậy, lemniscat Bernoulli có thể "vòng quanh" theo hai hướng khác nhau trong khi nó chỉ là một tập hợp điểm trên mặt phẳng phức trong cả hai trường hợp. Hai phương pháp vòng quanh sẽ tương ứng với hai tuyến khác nhau, nghĩa là tương ứng với hai ánh xạ khác nhau từ đoạn thẳng của $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$.

Cần phải nói rằng trong số những tuyến thỏa mãn định nghĩa 1.2.16 ta cũng gặp những tuyến rất ít phù hợp với biểu tượng trực giác thông thường của chúng ta. Chẳng hạn, người ta đã chứng minh rằng có thể xây dựng ánh xạ liên tục đoạn thẳng của trục thực $\mathbb{R}$ lên một hình vuông (tuyến Peano!). Do đó, về sau ta sẽ tách ra những tuyến có tính chất trực quan hơn bằng những điều kiện bổ sung.

Định nghĩa 1.2.17. 1. Nếu ánh xạ $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ liên tục và đơn trị một - một thì tuyến $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ được gọi là *tuyến Jordan (tuyến đơn!)*.

2. Tuyến $z = \gamma(t), t \in [a, b]$ được gọi *tuyến trơn* nếu tại mọi điểm $t \in [a, b]$ đều tồn tại đạo hàm liên tục $\gamma'(t)$ (tại các đầu mút của $[a, b]$ - tồn tại đạo hàm một phía) và $\gamma'(t) \neq 0$.

3. Tuyến $z = \gamma(t)$ được gọi là *trơn từng khúc* nếu hàm $z = \gamma(t)$ liên tục trên $= [a, b]$ và $[a, b]$ có thể chia thành một số hữu hạn đoạn thẳng sao cho hạn chế của $\gamma(t)$ trên mỗi đoạn đó đều xác định tuyến trơn (nghĩa là hàm $\gamma(t)$ liên tục, khả vi từng khúc trên $[a, b]$ và $\gamma'(t) \neq 0$).

4. Tuyến $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ gọi là *đo được* nếu hàm $\gamma(t)$ có biến phân bị chặn.

CÁC VÍ DỤ

1. Tuyến $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ là tuyến trơn Jordan đo được.

2. Tuyến

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it}, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi, \\ \dfrac{3t}{4} - 4, & \pi < t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

là tuyến trơn từng khúc đo được (không Jordan).

3. Tuyến

$$\gamma(t) = t\Big(1 + i \sin\frac{1}{t}\Big), \quad t \in \Big[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\Big]$$

là tuyến Jordan không đo được.

Định nghĩa 1.2.18. Hai tuyến $z = \gamma_1(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ và $z = \gamma_2(\tau) : [c, d] \to \mathbb{C}$ được gọi là *tương đương* với nhau ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) nếu tồn tại hàm $\tau = g(t)$ liên tục và đơn điệu tăng trên $[a, b]$ và ánh xạ (đơn trị một - một!) $[a, b]$ lên $[c, d]$ sao cho $\gamma_1(t) = \gamma_2[g(t)], \forall\, t \in [a, b]$.

Dễ dàng thấy rằng đối với tuyến $z = \gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ bất kỳ luôn luôn có thể tìm được tuyến $z = \beta(t) : [0, 1] \to \mathbb{C}$ tương đương với nó được xác định bởi hệ thức $\beta(t) = \gamma[a + t(b-a)]$, $t \in [0,1]$. Do đó về sau ta sẽ xem mọi tuyến đều được tham số hóa bởi đoạn $[0,1]$.

CÁC VÍ DỤ

1. Hai tuyến $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0,1]$ và $\gamma_2(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$ là hai tuyếm tương đương.

2. Hai tuyến $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0,1]$ và $\gamma_2(t) = \sin \pi t$, $t \in [0,1]$ không tương đương với nhau vì không tồn tại phép biến đổi tham số thỏa mãn điều kiện của định nghĩa 1.2.18 biến hàm này thành hàm kia. Thật vậy, nếu tồn tại phép biến đổi như vậy, thì hàm đơn điệu $\gamma_1 = t$ sau khi biến đổi cũng là hàm đơn điệu trong khi đó hàm $\sin \pi t$ không đơn điệu trong khoảng $[0,1]$.

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng quan hệ được xác định trong định nghĩa 1.2.18 là một quan hệ tương đương, tức là quan hệ có các tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu (dùng định lý về hàm ngược và hàm hợp). Quan hệ tương đương này đã chia tập hợp các tuyến thành các tập hợp con gọi là các lớp tương đương - mỗi lớp gồm tất cả các tuyến tương đương với nhau.

Định nghĩa 1.2.19. Lớp các tuyến tương đương được gọi là một *đường cong.*

CÁC VÍ DỤ

1. Hai tuyến $z = \gamma_1(t) = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ và $z = \gamma_2(t) = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, xác định một đường cong liên tục được tham số hóa bởi đoạn $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

2. Ta xét tập hợp

$$\Gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0\Big\}.$$

Về mặt hình học Γ là nửa trên của đường tròn đơn vị. Giả sử $I = [-1,1]$. Khi đó hệ thức $\gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in I$ sẽ là ánh xạ liên tục đoạn thẳng I vào $\mathbb{R}^2$ và $\gamma(-1) = (1,0)$, và $\gamma(+1) = (-1,0)$ và $\gamma(I) = \Gamma$.

Như vậy ánh xạ γ cho phép ta xem Γ như là tuyến tham số hóa. Bây giờ ta xét hệ thức $\tilde{\gamma}(t^*) = (\cos t^*, \sin t^*)$, $t \in I^* = [0,\pi]$. Rõ ràng $\tilde{\gamma}(t^*)$ cũng là phép tham số hóa của Γ. Hai tuyến $\gamma(t)$ và $\tilde{\gamma}(t)$ tương đương với nhau vì $g(t^*) = -\cos t^*$ là phép biến đổi tham số từ I^* đến I và $\tilde{\gamma} = \gamma_0 g$.

3. Hai tuyến $z = \gamma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ và $z = \gamma_2(t) = \sin \pi t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ xác định hai đường cong khác nhau vì không tồn tại phép biến đổi tham số chuyển đường cong này thành đường cong kia.

Bây giờ ta muốn đề cập đến hướng trên đường cong. Từ định nghĩa 1.2.18 và 1.2.19 ta thấy rằng các phép biến đổi tham số khác nhau $g(t)$ sẽ tương ứng với các phép tham số hóa khác nhau của cùng một đường cong. Giả sử $z = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ là một phép tham số hóa (còn gọi là phương trình tham số) của đường cong Γ. Từ lý luận ở trên ta thấy rằng điểm $z = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ sẽ lập thành hợp điểm $M(\gamma)$ khác với bản thân đường cong. Điều khác biệt thứ nhất là: đường cong Γ là tập hợp điểm sắp được. Điều khác biệt thứ hai là các điểm khác nhau của đường cong có thể tương ứng với chỉ một điểm của mặt phẳng: cụ thể nếu $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ khi $t_1 \neq t_2$ thì điểm $z_1 = \gamma(t_1)$ và $z_2 = \gamma(t_2)$ là những điểm khác nhau trên đường cong Γ nhưng lại là những điểm trùng nhau trên mặt phẳng. Những điểm đó gọi là những *điểm tự cắt*. (Ở đây ta sẽ không xem sự trùng nhau giữa điểm đầu và điểm cuối là tự cắt).

Trên đường cong Γ ta sẽ xác định một hướng bằng cách cho rằng điểm với giá trị tham số bé là đứng trước điểm với giá trị tham số lớn, tức là điểm $\gamma(t_1)$ đứng trước điểm $\gamma(t_2)$ (hay $\gamma(t_2)$ đứng sau $\gamma(t_1)$) $\forall\, t_1, t_2$, $t_1 < t_2$. Bằng cách định hướng như vậy, đường cong mà trên đó được xác lập một hướng gọi là *đường cong được định hướng* hay *đường cong có hướng*. Hướng chuyển động của điểm $z = \gamma(t)$ theo đường cong Γ tương ứng với hướng tăng của tham số t được gọi là *hướng dương*.

Bây giờ ta đề cập đến đường cong có hướng ngược lại. Đối với đoạn $I \subset \mathbb{R}$ bất kỳ, ta xác định đoạn $-I = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$. Nếu $\gamma : I \to \mathbb{C}$ là một tuyến tham số hóa nào đó thì ta sẽ xác định tuyến tham số hóa $\gamma^- : -I \to \mathbb{C}$ bởi điều kiện $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$. Ta có $\gamma^-(-I) = \gamma(I)$. Do đó γ^- và γ có cùng ảnh. Nếu $I = [a, b]$ thì $-I = [-b, -a]$ và $\gamma^-(-b) = \gamma(b)$, $\gamma^-(-a) = \gamma(a)$. Như vậy khi chuyển từ γ đến γ^- thì điểm đầu và điểm cuối đổi vai trò cho nhau. Có thể chứng minh rằng nếu γ chạy suốt một lớp tương đương Γ nào đó của các tuyến thì tất cả các tuyến γ^- cũng sẽ nằm trong một lớp tương đương ký hiệu là Γ^-. Ta nói rằng đường cong Γ^- thu được từ Γ bằng phép đổi hướng.

Trong nhiều vấn đề ta cũng sử dụng sự giải thích hình học đối với đường cong và khi đó hiểu đường cong là tập hợp điểm

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [0,1]\}$$

trùng với ảnh liên tục của đoạn $[0,1] \subset \mathbb{R}$ còn $z = \gamma(t)$, $t \in [0,1]$ được xem như là một trong các phép tham số hóa của Γ. Với quan điểm đó ta có thể nói về tính Jordan, tính trơn, tính trơn từng khúc và tính đo được của đường cong tương ứng trong các trường hợp tuyến Jordan, tuyến trơn, tuyến trơn từng khúc và tuyến đo được tham số hóa đường cong ấy.

Chẳng hạn ta có:

Định nghĩa 1.2.20. Đường cong Γ gọi là *đường cong Jordan (đường cong đơn)* nết tồn tại phép tham số hóa $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ của nó sao cho $\gamma(t)$ đơn điệu một - một trên đoạn $[0,1]$ (đường cong không tự cắt nhưng các đầu mút có thể trùng nhau). Nếu $\gamma(0) = \gamma(1)$ thì Γ là đường cong đóng Jordan.

Định nghĩa 1.2.21. 1. Đường cong được gọi là *trơn* nếu tồn tại phép tham số hóa khả vi liên tục của nó $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ sao cho đạo hàm $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall\, t \in [0,1]$.

2. Đường cong được gọi là *trơn từng khúc* nếu tồn tại phép tham số hóa $\gamma(t) : t \in [0,1] \to \mathbb{C}$ của nó sao cho đoạn $[0,1]$ có thể chia thành n đoạn con bởi các điểm t_k, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ mà trong mỗi đoạn con đó hàm $\gamma(t)$ có đạo hàm $\gamma'(t)$ liên tục và $\neq 0$, còn tại các điểm chia t_k thì tồn tại đạo hàm bên phải và bên trái khác 0.

Định nghĩa các loại đường cong một cách chặt chẽ dựa trên định nghĩa các tuyến tương đương với các hạn chế bổ sung đối với ánh xạ $\tau = g(t)$ xin mời xem giáo trình của B. V. Sabat "Nhập môn giải tích phức", phần I, trang 20-23, Hà Nội 1979. Ở đây chúng tôi muốn đặc biệt lưu ý bạn đọc rằng khái niệm trơn không phải là bất biến đối với phép biến đổi tham số $\tau = g(t)$ (xem định nghĩa 1.2.18). Chẳng hạn, ta xét ánh xạ $\gamma(t) = (t,t)$, $I = [-1,+1]$. Đó là phép tham số hóa đường cong trơn $\Gamma = \{(x,y) : x = y, |x| \leqslant 1\}$ và rõ ràng $\gamma(t)$ là tuyến trơn (xem định nghĩa 1.2.17). Xét phép biến đổi tham số $\tau = g(t) = t^3$ ánh xạ đoạn thẳng I lên chính nó. Khi đó ánh xạ $\gamma^* = \gamma \circ g$ là tuyến không trơn. Thật vậy $\gamma^*(t) = (t^3, t^3)$, $\gamma^{*\prime}(t) = (3t^2, 3t^2)$ và do đó $\gamma^{*\prime}(0) = (0,0)$.

Những điểm của đường cong mà tại đó tính trơn bị phá vỡ được gọi là những *điểm góc*; những điểm còn lại được gọi là *điểm chính quy*. Tại mọi điểm chính quy của đường cong Jordan trơn từng khúc đều tồn tại tiếp tuyến. Tại các điểm góc, đường cong Jordan trơn từng khúc không có tiếp tuyến: các tiếp tuyến một phía tại những điểm này tạo nên một góc với độ lớn nào đó. Đó cũng là lý do tại sao ta gọi các điểm mà tính trơn của đường cong bị phá vỡ là những điểm góc.

Để kết thúc tiết này ta nói vài lời về độ dài của đường cong Γ. Giả sử $R = (0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1)$ là một phép phân hoạch đoạn $[0,1]$. Ta lập tổng

$$L_R(\Gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|,$$

trong đó $z = \gamma(t)$, $t \in [0,1]$ là một phép tham số hóa nào đó của Γ. Hiển nhiên $L_R(\Gamma)$ là độ dài của đường gấp khúc nội tiếp trong đường cong Γ. Số

$$L(\Gamma) = \sup_R L_R(\Gamma)$$

được gọi là *độ dài* của đường cong Γ. Đường cong Γ gọi là đo được nếu $L(\Gamma) < \infty$. Có thể chứng minh rằng (xem H. Grauert, I. Lieb và W. Fisher. Phép tính vi phân và tích phân, phần I, trang 332-339, Hà Nội 1977) độ dài của đường cong định nghĩa như vậy không phụ thuộc vào việc chọn phép tham số hóa của đường cong ấy. Nếu đường cong Γ có phép tham số hóa khả vi liên tục $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ thì Γ đo được và

$$L(\Gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

Về sau, độ dài của đường cong Γ thường được ký hiệu là $|\Gamma|$.

1.2.8 Phép đồng luân

Ý nghĩa của khái niệm đồng luân đối với giải tích (đặc biệt đối với lý thuyết hàm chỉnh hình) là ở chỗ nhiều đại lượng được xác định như một hàm của tuyến nhưng trên thực tế lại không phụ thuộc vào tuyến mà chỉ phụ thuộc vào lớp các tuyến đồng luân.

Về phép biến dạng liên tục một tuyến vào một tuyến khác, ta có thể tưởng tượng một cách khá trực quan về mặt hình học. Sau đây sẽ nêu ra định nghĩa khái niệm này một cách chặt chẽ về mặt giải tích.

Định nghĩa 1.2.22. 1. Giả sử hai tuyến

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 : I \to D \\ \gamma_1 : I \to D \end{aligned}\right\}, \quad I = [0,1]$$

có chung điểm đầu và điểm cuối, nghĩa là

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0); \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Hai tuyến γ_0 và γ_1 được gọi là *đồng luân với nhau* trong miền D như là những tuyến có đầu mút bất động nếu tồn tại ánh xạ liên tục δ:

$$I \times I \ni (t,u) \mapsto \delta(t,u) \in D$$

sao cho

$$\begin{cases} \delta(t,0) = \gamma_0(t), \\ \delta(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta(t,1) = \gamma_1(t), \\ \delta(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{cases}$$

2. Hai tuyến đóng

$$\gamma_0 : I \to D, \quad \gamma_1 : I \to D$$

được gọi là *đồng luân với nhau* trong miền D, nếu tồn tại ánh xạ liên tục δ:

$$I \times I \ni (t, u) \mapsto \delta(t, u) \in D,$$

sao cho

$$\delta(t, 0) = \gamma_0(t); \quad \delta(t, 1) = \gamma_1(t); \quad \delta(0, u) = \delta(1, u), \quad \forall\, u \in I.$$

Trong trường hợp khi tuyến γ_1 là một hằng ánh $\gamma_1(t) = \text{const}$ (tức là: γ_1 ánh xạ đoạn $I = [0, 1]$ thành một điểm) và γ_0 đồng luân với γ_1 thì ta nói rằng γ_0 được co về một điểm, hay là: γ_0 *đồng luân với không.*

Ta chỉ tính đồng luân giữa các tuyến bởi ký hiệu "$\approx$".

Để làm cho định nghĩa này dễ hiểu hơn, ta tưởng tượng rằng hình vuông $I \times I$ được cấu thành bởi các đoạn thẳng nằm ngang S_{u_0} mà mỗi giá trị $u_0 \in I$ sẽ tương ứng với một đoạn như thế (hình I.2). Hạn chế của ánh xạ δ trên S_{u_0} sẽ xác định tuyến

$$\gamma_{u_0} : [0, 1] \to D$$

bởi điều kiện

$$\gamma_{u_0}(t) = \delta(t, u_0).$$

Như vậy, ta thu được một họ các tuyến mà mỗi tuyến sẽ tương ứng với giá trị $u_0 \in [0, 1]$.

Hình I.2

Do đó, nếu cho rằng đại lượng biến thiên là thời gian thì họ các tuyến này có thể xem như là các vị trí khác nhau của một tuyến di động duy nhất.

Điều này cũng giải thích vì sao người ta gọi phép đồng luân là *phép biến dạng*.

Như vậy, mỗi điểm của tuyến γ_0 dịch chuyển theo tuyến liên tục đến điểm của tuyến γ_1. Tuyến liên tục này có thể biểu diễn nhờ tham số u, như $\delta(t,u)$, $u \in [0,1]$. Ta đòi hỏi $\delta(t,u)$ liên tục theo hai biến t và u, và với mỗi giá trị cố định u_0 nó cho ta tuyến nối $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ với $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

CÁC VÍ DỤ

1. Hàm $\delta(t,u) = [x_0(t) + iy_0(t)](1-u) + [x_1(t) + ty_1(t)]u$ là phép đồng luân trong $\mathbb{C}$ biến tuyến

$$\gamma_0(t) = x_0(t) + iy_0(t)$$

vào tuyến $\gamma_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ với các đầu mút chung bất động. Do đó $\gamma_0 \approx \gamma_1$.

2. Nếu $\gamma_1 \approx \gamma_2$ với các đầu mút chung thì $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \approx 0$.

3. Giả sử cho vành tròn

$$V = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$$

và giả sử rằng γ_1 là tuyến thuộc V nằm trọn trong nửa vành tròn trên ($\operatorname{Im} z > 0$) và nối hai điểm $z = 2$ và $z = -2$. Nếu γ_2 là tuyến cũng có các tính chất đó thì $\gamma_1 \approx \gamma_2$. Nếu γ_2 nằm trong nửa vành tròn dưới ($\operatorname{Im} z < 0$) và nối hai điểm $z = 2$ và $z = -2$ thì γ_1 không đồng luân với γ_2 trong V vì γ_1 không thể biến dạng vào γ_2 mà không cắt đường tròn đơn vị $|z| = 1$.

Quan hệ đồng luân giữa hai tuyến $\gamma_1 \approx \gamma_2$ là quan hệ tương đương. Ta sẽ chứng minh điều đó.

1. $\gamma \approx \gamma$ với phép biến dạng đồng nhất $\delta(t,u) = \gamma(t)$.

2. Nếu $\gamma_1 \approx \gamma_2$ thì $\gamma_2 \approx \gamma_1$.

3. Nếu $\gamma_1 \approx \gamma_2$, $\gamma_2 \approx \gamma_3$ thì $\gamma_1 \approx \gamma_3$. Thật vậy, nếu $\delta(t,u)$ biến dạng γ_1

vào γ_2, còn $\delta_2(t,u)$ biến dạng γ_2 vào γ_3 thì

$$\delta(t,u) = \begin{cases} \delta_1(t,2u), & 0 \leqslant u \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \delta_2(t,2u-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1 \end{cases}$$

sẽ biến dạng γ_1 vào γ_3.

Do đó, trong miền cho trước, mọi tuyến với đầu mút chung hay là các tuyến đóng có thể chia thành các lớp mà mỗi lớp bao gồm các tuyến đồng luân với nhau. Những lớp này được gọi là những *lớp đồng luân*.

Nhận xét 1.2.3. Vì tính đồng luân của hai tuyến không bị phá vỡ trong các phép thay tham số nên khái niệm đồng luân cũng được chuyển sang cho đường cong. Cụ thể là: hai đường cong với đầu mút chung, hoặc là đóng được gọi là đồng luân với nhau trong miền D nếu trong miền D các tuyến γ_1 và γ_2 - đại diện lần lượt cho các đường cong này, là đồng luân với nhau.

1.2.9 Miền đơn liên và đa liên

Bây giờ, dựa vào khái niệm đồng luân ta sẽ phân loại các miền trên $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.2.23. Miền $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là *miền đơn liên* nếu mọi tuyến đóng γ ở trong D đều đồng luân với không ($\gamma \approx 0$).

Những miền không có tính chất này được gọi là *miền đa liên*.

Đối với miền đơn liên, hai tuyến bất kỳ với đầu mút chung là đồng luân với nhau.

Hiển nhiên rằng biên của miền đơn liên là một tập hợp liên thông, còn biên của miền đa liên là tập hợp không liên thông. Số thành phần liên thông của biên của miền đã cho được gọi là *cấp liên thông* của miền đó. Nếu số thành phần liên thông của miền là vô hạn thì miền được gọi là vô hạn - liên thông.

CÁC VÍ DỤ

1. Miền lồi D bất kỳ là miền đơn liên. Vì D lồi nên nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó. Giả sử $a \in D$ và $0 \leqslant k \leqslant 1$. Khi đó phép vị tự với tâm tại a và hệ số k biến miền D vào nó và khi k biến thiên từ 1 đến 0, phép vị tự đó sẽ là phép đồng luân biến đường cong thành một điểm.

2. Miền nằm giữa hai đường tròn tiếp xúc trong là miền đơn liên (biên của nó là tập hợp liên thông!). Thật vậy, ta có thể xem hai đường tròn γ_1 và γ_2 tiếp xúc trong tại điểm S nào đó là hai đường cong có chung điểm đầu và điểm cuối (đều tại điểm S) nên từ $n^\circ 8$ suy ra $\gamma_1 \approx \gamma_2$ và do đó

$$\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1} \approx 0.$$

3. Mặt phẳng $\mathbb{C}$ là miền đơn liên. Thật vậy, hàm

$$\delta(t,u) = \gamma_0(t)u + \gamma_1(t)(1-u)$$

sẽ thực hiện phép đồng luân hai tuyến γ_0 và γ_1.

4. Tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ là miền nhị liên.

5. Vành tròn

$$V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

là miền nhị liên.

6. Giả sử có các đường cong Jordan $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

a) γ_0 là đường cong đóng;

b) Các đường cong γ_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ nằm bên trong γ_0;

c) Mỗi đường cong γ_k, $k = 1, \dots, n$ đều nằm ngoài nhau và không giao nhau. Tập hợp các điểm nằm bên trong γ_0 và nằm bên ngoài mọi γ_k, $k = 1, 2, \dots, n$ là miền $(n+1)$ - liên thông D. Các đường cong γ_k, $k = 0, 1, \dots, n$ là các thành phần của biên ∂D của miền D. Một đôi khi biên của miền còn được gọi là *chu tuyến* của miền.

Hiển nhiên rằng miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, trong đó γ là một đường cong Jordan đóng. Ta có định lý quan trọng sau đây:

Định lý Jordan. *Mọi đường cong đóng Jordan đều chia mặt phẳng phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$ thành hai miền đơn liên mà nó là biên của mỗi miền: một miền là phần trong (không chứa đểm vô cùng) và miền kia là miền ngoài chứa điểm vô cùng.*

Để kết thúc mục này ta sẽ đề cập đến biên có hướng của một miền bất kỳ mà ta sẽ xét sau.

Định nghĩa 1.2.24. Giả sử D là miền của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được giới hạn bởi tập hợp $\{\Gamma_i\}_0^n$ gồm một số hữu hạn đường cong Γ_i, $i = 0, 1, \dots, n$. Tập hợp $\{\Gamma_i\}_0^n$ được gọi là *biên có định hướng* (gọi tắt là *biên có hướng*) của miền D nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. Đường cong Γ_0 là đường cong đóng và mọi đường cong Γ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ đều thuộc phần trong của Γ_0.

2. Mọi đường cong Γ_k đều nằm trong phần ngoài của miền giới hạn bởi Γ_j, $k \neq j$; $k, j = 1, 2, \dots, n$.

3. Các đường cong Γ_i, $i = 0, 1, \dots, n$ được định hướng sao cho khi vòng quanh theo Γ_i phần trong của miền D luôn luôn nằm bên trái. Phép định hướng đó được gọi là *phép định hướng dương*. Biên của miền với phép định hướng dương được ký hiệu là ∂D.

Ta giải thích điều kiện 3. Nếu $\gamma = \gamma_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ là phương trình của đường cong Γ_i được định hướng như vậy thì tại mọi điểm $z = \gamma_i(t)$ mà tại đó tồn tại đạo hàm $\gamma_i'(t) \neq 0$ thì vectơ $\gamma_i'(t)$ có tính chất là: nếu quay vectơ ấy một góc $\dfrac{\pi}{2}$ ngược chiều kim đồng hồ thì vectơ sẽ hướng vào trong miền.

Ta lưu ý rằng nếu miền D bị chặn thì chu tuyến ngoài Γ_0 (nghĩa là chu tuyến mà một phần bù của nó là miền chứa điểm $z = \infty$ và không chứa các điểm của D) có định hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ, còn các chu tuyến trong (các chu tuyến còn lại) có định hướng dương là hướng theo chiều kim đồng hồ. Nếu miền $D \ni \infty$ thì tất cả các chu tuyến biên có định hướng dương là hướng theo chiều kim đồng hồ.

1.3 Hàm biến phức

Khái niệm hàm biến phức là một trường hợp riêng của khái niệm về hàm. Phần trước (xem 1.2) ta xét các hàm phức biến thực $\gamma : (a,b) \to \mathbb{C}$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Nói chung ta sẽ gọi ánh xạ

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

là hàm phức một biến phức (hay một cách đơn giản là một hàm biến phức). Khái niệm hàm còn được mở rộng nếu ta xét các ánh xạ từ tập hợp nào đó của $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}$.

Trong mục này, ta sẽ trình bày khái niệm hàm biến phức, tính $\mathbb{C}$ - liên tục cùng các tính chất cơ bản của nó.

1.3.1 Định nghĩa hàm biến phức

Trên mặt phẳng phức mở rộng của biến z và w (đều được ký hiệu là $\overline{\mathbb{C}}$) ta xét lần lượt các tập hợp D và D^* (có thể chứa cả điểm vô cùng).

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ là một tập hợp tùy ý cho trước. Một *hàm biến phức*

$$f : D \to \mathbb{C}$$

là một quy tắc cho ứng mỗi điểm $z \in D$ với một điểm duy nhất $w = f(z) \in \mathbb{C}$.

Để chỉ một hàm biến phức, ta còn dùng các ký hiệu sau đây:

$$z \mapsto f(z),$$
$$w = f(z), \ldots$$

CÁC VÍ DỤ

Ánh xạ $z \mapsto f(z) = az + b$ xác định một hàm *nguyên tuyến tính* trong $\mathbb{C}$.

Ánh xạ $z \mapsto f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ xác định một hàm *phân tuyến tính* trên tập hợp $D = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c}, \infty \right\}$ (giả thiết $bc - ad \neq 0$).

Ánh xạ $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ xác định một hàm thường gọi là *hàm Jukovski* trên tập $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Trong trường hợp khi $w = f(z) \in D^*$, $\forall\, z \in D$ thì ta viết $f : D \to D^*$, và nói rằng điểm $w \in D^*$ là ảnh của điểm $z \in D$, còn z là nghịch ảnh của điểm w. Để chỉ nghịch ảnh, ta dùng ký hiệu $z = f^{-1}(w)$.

Theo định nghĩa hàm đã trình bày ở trên, mọi hàm đều là *hàm đơn trị:* nghĩa là với mỗi giá trị của z ta có tương ứng một giá trị duy nhất của $f(z)$. Khái niệm hàm đa trị sẽ được trình bày trong chương V.

Giả sử tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ và $f : D \to \mathbb{C}$ là hàm được cho trên D. Hiển nhiên rằng phần thực, phần ảo của f là những số thực phụ thuộc vào z, $z \in D$. Đó là những hàm thực biến phức z:

$$\left.\begin{aligned} u(z) &: D \to \mathbb{R}, \\ v(z) &: D \to \mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \quad D \subset \mathbb{C}$$

và do đó có thể viết $f(z) = u(z) + iv(z)$.

Vì mặt phẳng $\mathbb{C}$ được đồng nhất với mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ nên mỗi $z \in D$ được đồng nhất với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Như vậy:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ngược lại, nếu trên tập D cho hai hàm nhận giá trị thực độc lập với nhau: $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$ thì cũng có nghĩa là đã cho một hàm phức

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y) = f(x, y) = f(z).$$

Do đó, việc cho hàm f trên D tương đương với việc cho hai hàm thực hai biến thực:

$$\begin{aligned} u &= u(z) = u(x, y) : D \to \mathbb{R}, \\ v &= v(z) = v(x, y) : D \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Từ nhận xét trên đây, toàn bộ lý thuyết hàm biến phức có thể giải thích như là lý thuyết các cặp hàm của hai biến thực x và y.

Định nghĩa 1.3.2. Một hàm

$$f : D \to D^*$$

được gọi là đơn trị một-một hay *đơn diệp* nếu các ảnh của những điểm khác nhau của D là khác nhau. Cụ thể hơn: $f(z)$ là đơn diệp nếu hai điểm bất kỳ $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, thì ảnh $f(z_1) \neq f(z_2)$. Điều đó tương đương với điều kiện nghịch ảnh của mỗi điểm thuộc D^* chỉ gồm đúng một điểm.

Từ định nghĩa 1.3.2 ta thấy rằng ánh xạ $w = f(z)$ là ánh xạ đơn diệp nếu không những điểm z_1 có một ảnh duy nhất w_1 mà điểm $w_1 \in D^*$ bất kỳ cũng chỉ là ảnh của một điểm $z_1 \in D$.

Trong ánh xạ đơn diệp $w = f(z)$, nghịch ảnh $z = f^{-1}(w)$ có thể xem như là một hàm đơn trị biến w. Hàm này được gọi là *hàm ngược* đối với hàm $w = f(z)$. Hiển nhiên đối với hàm đơn trị (nhưng không đơn diệp) ta cũng có thể nói về hàm ngược $z = f^{-1}(w)$, nhưng khi đó hàm ngược này không đơn trị. Rõ ràng là ánh xạ $w = f(z)$ là ánh xạ đơn diệp khi và chỉ khi cả hai hàm f và f^{-1} đều đơn trị.

Định nghĩa 1.3.3. Giả sử các hàm

$$f : D \to D^*; \quad g : D^* \to D^{**}$$

được cho theo sơ đồ

$$D \xrightarrow{f} D^* \xrightarrow{g} D^{**} \quad (f(D) \subseteq D^*).$$

Khi đó ta có thể xác định được một hàm

$$h : D \to D^{**}$$

bằng cách cho ứng mỗi điểm $z \in D$ với điểm

$$h(z) = g[f(z)] \in D^{**}.$$

Hàm h này được gọi là *hàm hợp* của các hàm f và g đã cho và được ký hiệu là

$$h = g \circ f : D \to D^{**}.$$

Chẳng hạn, nếu ánh xạ $w = f(z)$ đơn diệp và $f^{-1}(w) = \varphi(w)$ là hàm ngược của nó thì

$$\varphi[f(z)] = z.$$

1.3.2 Các ví dụ về ánh xạ đơn diệp

Bây giờ ta sẽ làm sáng tỏ những khái niệm đưa ra ở trên bằng một số ví dụ.

a. Ánh xạ phân tuyến tính. Ánh xạ

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1.20}$$

$$ad - bc \neq 0, \tag{1.21}$$

trong đó a, b, c, d là những số phức xác định thỏa mãn điều kiện $ad-bc \neq 0$, được gọi là ánh xạ phân tuyến tính.

Ánh xạ (1.20) đơn diệp khi và chỉ khi các hệ số a, b, c, d thỏa mãn hệ thức (1.21). Thật vậy, giả sử $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$. Khi đó

$$w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}, \quad w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

và do đó

$$w_2 - w_1 = \frac{(bc-ad)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}\cdot$$

Từ đó suy ra điều cần khẳng định.

Vì vậy, hệ thức (1.21) là điều kiện cần và đủ để tồn tại ánh xạ ngược của (1.20), trong đó:

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}\cdot$$

Đặc biệt, khi $c = 0$, $d = 1$, từ (1.21) ta có

$$a \neq 0. \tag{1.22}$$

Điều kiện (1.22) đảm bảo tính đơn diệp của ánh xạ tuyến tính $w = az + b$ với ánh xạ ngược là

$$z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}\cdot$$

Khi xét ánh xạ (1.20), ta loại trừ trường hợp $d = c = 0$. Trong các trường hợp còn lại, điều kiện $ad - bc = 0$ tương đương với điều kiện

$$w = \text{const}$$

và do đó nó không có miền đơn diệp.

b. Ánh xạ $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Để tìm miền đơn diệp của ánh xạ này, ta xét các giá trị:

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{và} \quad z_2 = |z_1|e^{i\varphi_2}.$$

Khi đó

$$w_1 - w_2 = |z_1|^n(e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2}).$$

Rõ ràng là ánh xạ $w = z^n$ đơn diệp trong mỗi góc với độ mở $\dfrac{2\pi}{n}$ với đỉnh tại gốc tọa độ.

c. Ánh xạ Jukovski. Ánh xạ

$$w = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \tag{1.23}$$

được gọi là ánh xạ Jukovski. Nó đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1, z_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$z_1z_2 = 1. \tag{1.24}$$

Thật vậy, giả sử

$$\frac{1}{2}\Big(z_1 + \frac{1}{z_1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big)$$

khi đó

$$(z_1 - z_2)\Big(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\Big) = 0.$$

Từ đó: hoặc $z_1 = z_2$ hoặc $z_1 z_2 = 1$.

Về mặt hình học, đẳng thức (1.24) chứng tỏ rằng điểm $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ thu được bằng phép đối xứng kép qua đường tròn đơn vị và trục thực:

$$w = \frac{1}{\overline{z}}; \quad w = \overline{w}_1.$$

Như vậy, *ánh xạ* (1.23) *đơn diệp trong miền D khi và chỉ khi D không chứa những cặp điểm khác nhau mà điểm này thu được từ điểm kia nhờ phép đối xứng kép: qua đường tròn đơn vị và trục thực.*

Ánh xạ (1.23) đơn diệp trong các miền sau đây:

$\{|z| > 1\}$ - phần ngoài hình tròn đơn vị,

$\{|z| < 1\}$ - hình tròn đơn vị.

1.3.3 Giới hạn của hàm

Bây giờ ta chuyển sang xét khái niệm cơ bản của giải tích - khái niệm giới hạn.

Giả sử cho hàm

$$f : D \to \mathbb{C}$$

và z_0 là điểm giới hạn của tập hợp D.

Định nghĩa 1.3.4. Số w_0 được gọi là *giới hạn* của hàm f khi $z \to z_0$ nếu:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, z \in D \cap \dot{\mathcal{U}}(z_0, \delta)$$
$$\Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Ký hiệu

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z), \tag{1.25}$$

(trong đó $\dot{\mathcal{U}}(z_0, \delta)$ là δ - lân cận thủng của điểm z_0).

Ta có định lý sau đây:

Định lý 1.3.1. *Giả sử $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$ và $f(z) = u(z) + iv(z)$. Khi đó giới hạn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại hai giới hạn*

$$u_0 = \lim_{z \to z_0} Re[f(z)] = \lim_{z \to z_0} u(z),$$
$$v_0 = \lim_{z \to z_0} Im[f(z)] = \lim_{z \to z_0} v(z).$$

Nói cách khác, đẳng thức

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z) \tag{1.26}$$

tương đương với hai đẳng thức:

$$u_0 = \lim_{z \to z_0} u(z), \quad v_0 = \lim_{z \to z_0} v(z). \tag{1.27}$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử f thỏa mãn (1.26), khi đó với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

khi $|z - z_0| = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} < \delta(\varepsilon)$.

Nhưng

$$|u(z) - u_0| = |\mathrm{Re}[f(z) - w_0]| \leqslant |f(z) - w_0| < \varepsilon,$$
$$|v(z) - v_0| = |\mathrm{Im}[f(z) - w_0]| \leqslant |f(z) - w_0| < \varepsilon,$$

và từ đó suy ra (1.27).

Bây giờ, giả sử (1.27) được thỏa mãn. Khi đó $\forall \varepsilon > 0$:

$$|u(z) - u_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |v(z) - v_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cdot$$

Nếu $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |z - z_0| < \delta'(\varepsilon)$ thì

$$|f(z) - w_0| = |(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2|^{1/2} < \varepsilon.$$

$\square$

Từ tính tương đương vừa được chứng minh giữa (1.26) và (1.27) suy rằng những định lý sơ cấp về giới hạn của hàm trong giải tích thực được chuyển sang cho giải tích phức không một sự thay đổi nào. Cụ thể là, nếu

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0, \quad \lim_{z\to z_0} \varphi(z) = \tilde{w}_0$$

thì tồn tại các giới hạn của $f(z) \pm \varphi(z)$, $f(z)\cdot\varphi(z)$, $f(z)/\varphi(z)$ (khi $\varphi(z) \neq 0$) khi $z \to z_0$ và:

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to z_0}[f(z) \pm \varphi(z)] = w_0 \pm \tilde{w}_0,\\
&\lim_{z\to z_0}[f(z)\ \varphi(z)] = w_0\tilde{w}_0,\\
&\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{w_0}{\tilde{w}_0}, \quad \tilde{w}_0 \neq 0.
\end{aligned}$$

Nhận xét 1.3.1. Ta cần lưu ý rằng định nghĩa 1.3.4 về giới hạn vẫn đúng cả trong các trường hợp: hoặc z_0, hoặc w_0 hoặc cả z_0 và w_0 bằng vô cùng.

Chẳng hạn, khi $z_0 \neq \infty$, $w_0 = \infty$ thì hàm f thỏa mãn (1.25) nếu từ bất đẳng thức

$$0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$$

suy ra

$$|f(z)| > \varepsilon.$$

Ví dụ. Chứng minh rằng

$$\lim_{z\to\infty}[a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n] = \infty, \quad n \geqslant 1$$

với $a_n \neq 0$.

Thật vậy, ta có

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = z^n\Big[\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n\Big].$$

Hiển nhiên rằng

$$\lim_{z\to\infty}\Big[\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\Big] = 0.$$

Điều đó có nghĩa rằng: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, R > 0 : \forall\, z : |z| > R$

$$\Rightarrow \quad \Big|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\Big| < \varepsilon.$$

Ta lấy $\varepsilon < |a_n|$. Do đó khi $|z| > R$ ta có

$$\begin{aligned}\Big|a_n + \Big(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\Big)\Big| &\geqslant |a_n| - \Big|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\Big| \\ &> |a_n| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| > |z|^n(|a_n| - \varepsilon), \quad |z| > R$$

và do đó vế phải tăng vô hạn khi $z \to \infty$ và hiển nhiên khi đó vế trái tăng vô hạn, tức là

$$\lim_{z\to\infty}[a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n] = \infty.$$

1.3.4 Tính liên tục và liên tục đều

Giả sử hàm $w = f(z)$ được cho trên tập hợp $D \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Định nghĩa 1.3.5. 1. Hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục* (hay $\mathbb{C}$ - *liên tục*) tại điểm $z_0 \in D$ nếu

$$f(z_0) \neq \infty \quad \text{và} \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in D.$$

2. Nếu hàm $f(z)$ liên tục tại mọi điểm $z \in D$ thì hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục trên tập hợp D*.

Tập hợp mọi hàm liên tục trên tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ được ký hiệu là $\mathcal{C}(D)$.

Định nghĩa 1.3.5 còn có thể phát biểu dưới dạng tương đương sau đây. Hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục* tại điểm $z_0 \in D$ nếu $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon, z_0) > 0$:

$$\forall\, z \in \{|z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)\} \tag{1.28}$$

thì

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Tương tự như vậy, ta cũng có thể nói đến tính $\mathbb{C}$ - liên tục theo một tuyến (hoặc đường cong) và hiểu như sau: những hệ thức (1.28) - (1.29) chỉ được thỏa mãn tại những điểm thuộc tuyến (hoặc đường cong) ấy mà không để ý đến các giá trị của hàm tại các điểm khác.

CÁC VÍ DỤ

1. Hàm $f(z) = \dfrac{z+a}{z+b}$ $(a \neq b)$ liên tục tại mọi điểm $z_0 \neq -b$ trong mặt phẳng z.

Thật vậy, giả sử cho trước $\varepsilon > 0$. Ta đặt $|z_0 + b| = 2d$. Giả sử thêm rằng $|z - z_0| < d$. Ta có

$$\begin{aligned} z + b &= z_0 + b + z - z_0 \\ \Rightarrow |z + b| &\geqslant \big||z_0 + b| - |z - z_0|\big| > 2d - d = d \\ &\Rightarrow |z + b| > d. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\Big|\frac{z+a}{z+b} - \frac{z_0+a}{z_0+b}\Big| = \frac{|a-b|\;|z-z_0|}{|z+b|\;|z_0+b|} \leqslant \frac{|a-b|\;|z-z_0|}{2d^2}\cdot$$

Nếu $\dfrac{|a-b|\,|z-z_0|}{2d^2} < \varepsilon$ (nghĩa là $|z-z_0| < \dfrac{2\varepsilon d^2}{|a-b|}$) và $|z-z_0| < d$ thì ta sẽ có

$$\left|\frac{z+a}{z+b} - \frac{z_0+a}{z_0+b}\right| < \varepsilon.$$

Do đó hệ thức

$$\left|\frac{z+a}{z+b} - \frac{z_0+a}{z_0+b}\right| < \varepsilon$$

được thỏa mãn nếu

$$|z-z_0| < \min\left(\frac{1}{2}|z_0+b|, \frac{|z_0+b|^2}{2|a-b|}\right).$$

2. Hàm $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ liên tục với mọi $z = a$ hữu hạn. Ta có

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$$

do đó

$$|z^n - a^n| \leqslant |z-a|(|z|^{n-1} + \cdots + |a|^{n-1}).$$

Ta xét hình tròn $\{|z| \leqslant r\}$ và giả sử z và a thuộc hình tròn đó, $|z| < r$, $|a| < r$. Khi đó

$$|z^n - a^n| \leqslant nr^{n-1}|z-a|.$$

và ta có thể chọn số $\delta(\varepsilon)$ là bằng

$$\min\left(\frac{\varepsilon}{nr^{n-1}}, r + |a|\right).$$

Điều đó chứng tỏ rằng z^n là hàm liên tục $\forall\, z \in \{|z| \leqslant r\}$, trong đó r có thể lớn tùy ý. Và như vậy z^n là hàm liên tục $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

Định lý 1.3.2. 1. *Hàm $f(z)$ liên tục tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ khi và chỉ khi $u(x,y)$ và $v(x,y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0).*

2. *Nếu hàm $f(z)$ liên tục thì hàm $|f(z)|$ cũng liên tục.*

Chứng minh. Trước hết ta lưu ý rằng

$$\left.\begin{array}{l}|u(x,y)-u(x_0,y_0)|\\|v(x,y)-v(x_0,y_0)|\end{array}\right\}\leqslant|f(z)-f(z_0)|\leqslant|u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|$$

1. Giả sử hàm $f(z)$ liên tục tại điểm z_0. Ta có

$$|u(x,y)-u(x_0,y_0)|\leqslant|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

khi $|z-z_0|<\delta$.

Nhưng $|z-z_0|<\delta$ khi đồng thời có $|x-x_0|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ và $|y-y_0|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$, do đó hàm $u(x,y)$ liên tục. Tương tự $v(x,y)$ liên tục.

Ngược lại, nếu u và v là các hàm liên tục thì hàm f liên tục (bạn đọc có thể suy luận dễ dàng).

2. Phần thứ hai của định lý được suy từ bất đẳng thức

$$\big||f(z)|-|f(z_0)|\big|\leqslant|f(z)-f(z_0)|.$$

□

Từ định lý 1.3.2 suy ra rằng những định lý sơ cấp về các phép tính đối với các hàm liên tục tại một điểm vẫn đúng trong giải tích phức, tính liên tục ở đây là tính $\mathbb{C}$ - liên tục.

Định nghĩa 1.3.6. Hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục đều* trên tập hợp $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ nếu

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall\,z\in D,\forall\,z'\in D:d(z,z')<\delta(\varepsilon),$$
$$\Rightarrow|f(z)-f(z')|<\varepsilon.$$

Từ tính liên tục đều của $f(z)$ suy ra rằng f là liên tục. Điều khẳng định ngược lại, nói chung là không đúng. Điều đó được chứng tỏ bởi ví dụ sau đây.

Giả sử $f(z)=\dfrac{1}{z}$ và $D=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$.

Hàm $f(z)$ liên tục trong D, nhưng không liên tục đều trong đó. Thật vậy, giả sử ngược lại: hàm $f(z)$ liên tục đều trong D. Khi đó với $\varepsilon = 1$, phải tồn tại số $\delta = \delta_1 > 0$ sao cho mọi cặp điểm z' và z'' ta có

$$\left|\frac{1}{z'} - \frac{1}{z''}\right| < \varepsilon, \quad 0 < |z' - z''| < \delta_1.$$

Từ dãy số $n = 2, 3, \ldots$ ta sẽ chọn số n_0 sao cho

$$\left|\frac{1}{n_0} - \frac{1}{2n_0}\right| < \delta_1.$$

Khi đó, đặt $z' = \dfrac{1}{n_0}$, $z'' = \dfrac{1}{2n_0}$ ta thu được

$$\left|\frac{1}{z'} - \frac{1}{z''}\right| = \left|\frac{1}{1/n_0} - \frac{1}{1/2n_0}\right| = n_0 > 1.$$
$$0 < |z' - z''| < \delta_1.$$

Đó là điều mâu thuẫn.

Tuy nhiên, ta cũng nhận xét rằng hàm đã cho liên tục đều trong miền

$$\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < R \leqslant |z| < 1\}.$$

Thật vậy, với cặp điểm z' và $z'' \in \tilde{D}$ bất kỳ ta có

$$\left|\frac{1}{z'} - \frac{1}{z''}\right| = \frac{|z' - z''|}{|z'|\,|z''|} \leqslant \frac{|z' - z''|}{R^2}\,.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ là số tùy ý. Khi đó nếu lấy $\delta = \varepsilon R^2$, thì từ bất đẳng thức vừa viết suy ra rằng với cặp điểm $z', z'' \in \tilde{D}$ bất kỳ thỏa mãn hệ thức

$$|z' - z''| < \delta \quad (\delta = \varepsilon R^2)$$

ta có

$$\left|\frac{1}{z'} - \frac{1}{z''}\right| < \varepsilon. \quad \text{'đ.p.c.m.}$$

Định nghĩa 1.3.7. Ánh xạ f được gọi là một *đồng phôi* (ánh xạ tôpô) nếu:

1. f đơn diệp;
2. f và $f^{-!}$ liên tục.

CÁC VÍ DỤ

1, Ánh xạ $w = \dfrac{z}{1+|z|}$ là một phép đồng phôi biến mặt phẳng $\mathbb{C}$ lên hình tròn đơn vị $\{|w| < 1\}$.

2. Ánh xạ

$$\left.\begin{array}{c} w = \dfrac{2R}{\pi} \qquad \dfrac{z}{|z|}\operatorname{arctg}|z|, \\ w(0) = 0 \end{array}\right\}$$

là một phép đồng phôi biến $\mathbb{C}$ lên hình tròn mở $\{|w| < R\}$.

Về sau ta thường sử dụng các tính chất sau đây của hàm liên tục.

1. Ảnh liên tục của tập hợp compắc là tập hợp compắc.
2. Ảnh liên tục của tập hợp liên thông là tập hợp liên thông.
3. Giả sử compắc $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ và f là hàm liên tục trên K. Khi đó

a) f bị chặn, nghĩa là $|f(z)| < A, \forall\, z \in K$, $A = \text{const}$

b) Đạt sup và inf của nó trên K, tức là $\exists\, z_1, z_2 \in K$ sao cho

$$|f(z)| \leqslant |f(z_1)|, \quad |f(z)| \geqslant |f(z_2)|, \quad \forall\, z \in K.$$

4. Giả sử f liên tục trên tập hợp compắc $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó f liên tục đều trên D (định lý Cantor trong miền phức).

1.4 Lý thuyết dãy và chuỗi trong miền phức

1.4.1 Giới hạn của dãy điểm

Trong mục **1.1.5** ta đã đề cập đến giới hạn của dãy điểm trong miền phức. Ở đây ta sẽ nói đến giới hạn của dãy một cách cụ thể hơn.

Định nghĩa 1.4.1. 1. Giả sử trong $\mathbb{C}$ cho dãy

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \tag{1.30}$$

Điểm z_0 ($\in \mathbb{C}$) được gọi là *giới hạn* của dãy (1.30) nếu $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$ sao cho $z_n \in U(z_0, \varepsilon)$ $\forall\, n \geqslant N$.

Dãy có giới hạn thuộc $\mathbb{C}$ được gọi là dãy *hội tụ*. Dãy không có giới hạn hoặc có giới hạn bằng ∞ được gọi là dãy *phân kỳ*. Trong trường hợp dãy phân kỳ có giới hạn duy nhất là ∞ ta viết

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty. \tag{1.31}$$

Đẳng thức (1.31) có nghĩa là: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$ ($N \in \mathbb{N}$): sao cho $z_n \in C\overline{U(0, \varepsilon)}$ với mọi $n \geqslant N$.

Sự minh họa Riemann đối với các số phức cho phép ta hiểu đẳng thức (1.31) một cách rất trực quan. Thật vậy, theo công thức (1.11), **1.1.8**, ảnh cầu của dãy (1.30) là dãy $\{A_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\}$ với các tọa độ:

$$\xi_k = \frac{x_k}{1 + |z_k|^2}\,, \quad \eta_k = \frac{y_k}{1 + |z_k|^2}\,, \quad \zeta_k = \frac{|z_k|^2}{1 + |z_k|^2} \tag{*}$$

Từ công thức (*) và các hệ thức $|x_k| \leqslant |z_k|$, $|y_k| \leqslant |z_k|$ ta suy ra rằng dãy $\{A_k\}$ hội tụ đến cực bắc P của mặt cầu Riemann.

Từ định nghĩa giới hạn của dãy suy ra rằng nếu dãy $\{z_n\}$ và $\{z'_n\}$ hội tụ thì dãy $\{z_n \pm z'_n\}$; $\{z_n \cdot z'_n\}$ $\left\{\dfrac{z_n}{z'_n}\right\}$ ($z'_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n \neq 0$) hội tụ và:

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (z_n \pm z'_n) &= \lim_{n\to\infty} z'_n \pm \lim_{n\to\infty} z'_n,\\
\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot z'_n) &= \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z'_n,\\
\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z'_n} &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z'_n}\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

Việc chứng minh các hệ thức (1.32) không có gì khác biệt với việc chứng minh các điều khẳng định tương ứng trong giải tích thực. (Đề nghị bạn đọc tự thực hiện).

Trong nhiều trường hợp, khi khảo sát sự hội tụ của dãy ta cũng thường sử dụng *tiêu chuẩn Cauchy* đặc trưng cho dãy hội tụ:

Dãy $\{z_n\}$ *hội tụ khi và chỉ khi*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, m, n \in \mathbb{N} : m, n > N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Phép chứng minh định lý này hoàn toàn dựa trên chứng minh định lý "thực" tương ứng. Cũng như trong trường hợp thực, dãy thỏa mãn điều kiện này được gọi là *dãy cơ bản* hay *dãy Cauchy.*

Thông thường việc tìm giới hạn của dãy (1.30) được đưa về tìm giới hạn của dãy các số thực $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$. Điều khẳng định này dựa trên cơ sở định lý sau đây:

Định lý 1.4.1. *Giả sử* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ *khi và chỉ khi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Chứng minh. Thật vậy, kết luận của định lý 1.4.1 được suy trực tiếp từ các bất đẳng thức

$$|x - x_0| \leqslant |z_n - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leqslant |z_n - z_0|;$$
$$|z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

và định nghĩa giới hạn của dãy. □

Nhận xét 1.4.1. Giả sử $z_n = r_n \cdot e^{i\varphi_n}$, trong đó $|r_n| = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \rho$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \alpha$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho e^{i\alpha}$.

Điều kết luận này được suy từ định lý 1.4.1 và hệ thức

$$z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n).$$

Ví dụ 1. Giả sử $z = x + iy$ là một số phức tùy ý, xác định. Ta sẽ chứng minh rằng dãy

$$a_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \text{có giới hạn.}$$

Ta có:

$$|a_n| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\arg a_n = n\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = n\text{arctg}\frac{\dfrac{y}{n}}{1 + \dfrac{x}{n}}\cdot$$

Hiển nhiên rằng

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{n/2} = e^x$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \arg a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{ny}{n + x} = y.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

1.4.2 Chuỗi số phức và sự hội tụ của nó

Giả sử ta có dãy số phức hoàn toàn xác định và khác ∞:

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \quad z_n = x_n + iy_n.$$

Biểu thức

$$\sum_{n\geqslant 1} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \tag{1.33}$$

được gọi là một *chuỗi số trên* $\mathbb{C}$, còn biểu thức

$$S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} z_k \tag{1.34}$$

được gọi là *tổng riêng (thứ n)* của chuỗi (1.33).

Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.4.2. Chuỗi (1.33) được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Nghĩa là: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$, $N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geqslant N$

$$\Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon.$$

Số S được gọi là tổng của chuỗi (1.33). Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói chuỗi (1.33) *phân kỳ*.

Điều kiện cần đối với sự hội tụ của chuỗi (1.33) thu được từ việc chuyển qua giới hạn đẳng thức

$$S_n - S_{n-1} = z_n$$

và nó có dạng

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0. \tag{1.35}$$

Điều kiện đó chỉ là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ: nghĩa là nếu điều kiện (1.35) không được thỏa mãn thì chuỗi không thể hội tụ. Nhưng có những chuỗi (ví dụ $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$) thỏa mãn điều kiện (1.35) nhưng lại phân kỳ.

Để khảo sát sự hội tụ của chuỗi trong $\mathbb{C}$ ta có:

Định lý 1.4.2. *Chuỗi số phức* $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$, $\; z_n = x_n + iy_n$ *hội tụ khi và chỉ khi các chuỗi*

$$\sum_{n\geqslant 1} x_n; \quad \sum_{n\geqslant 1} y_n$$

đồng thời hội tụ.

Chứng minh. Thật vậy, ta đặt

$$S_n = \sigma_n + i\tau_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k + i \sum_{1\leqslant k\leqslant n} y_k.$$

Từ đó suy ra kết luận của định lý. □

Định lý 1.4.2 cho phép ta đưa việc khảo sát sự hội tụ của chuỗi trong miền phức về khảo sát các chuỗi số thực đã quen biết.

Chẳng hạn, bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho dãy S_n ta thu được *tiêu chuẩn Cauchy đối với các chuỗi:* Chuỗi số phức (1.33) hội tụ khi và chỉ khi $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,N = N(\varepsilon) : \forall\,n > N(\varepsilon)$ và $\forall\,p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Cùng với việc xét chuỗi (1.33) người ta còn xét chuỗi lập nên từ các môđun của các số hạng của chuỗi ấy

$$\sum_{k\geqslant 1} |z_k|. \tag{1.36}$$

Vì

$$\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant m} z_{N+k}\Big| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant m} |z_{N+k}|$$

nên theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy ta kết luận rằng nếu chuỗi (1.36) hội tụ thì chuỗi (1.33) cũng hội tụ.

Định nghĩa 1.4.3. Chuỗi (1.33) được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi (1.36) hội tụ.

Từ tiêu chuẩn hội tụ Cauchy suy ra:

Định lý 1.4.3. *Giả sử* $z_n = x_n + iy_n$. *Chuỗi* (1.33) *hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi các chuỗi*

$$\sum_{n\geqslant 1} x_n \quad \textit{và} \quad \sum_{n\geqslant 1} y_n$$

đồng thời hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh. Thật vậy, điều kết luận của định lý được suy trực tiếp từ bất đẳng thức kép sau đây:

$$\left.\begin{matrix}|x_n|\\|y_n|\end{matrix}\right\} \leqslant |z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|.$$

□

Giống như chuỗi số thực sự hoán vị tùy ý các số hạng của chuỗi hội tụ tuyệt đối không làm thay đổi tổng của chuỗi.

Nhận xét. Để khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi (1.33) ta có thể sử dụng tiêu chuẩn hội tụ đã biết đối với các chuỗi với số hạng không âm.

Ví dụ 2. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(2+i)^n}{3^n}\cdot$$

Ta xét chuỗi các môđun

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n|2+i|^n}{3^n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n\sqrt{5^n}}{3^n}\cdot$$

Áp dụng dấu hiệu hội tụ D'Alambert, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)\sqrt{5^{n+1}}}{3^{n+1}} : \frac{n\sqrt{5^n}}{3^n}\right] = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{i^n}{n}\cdot$$

Ta có

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{i^n}{n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{2k} + i\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot$$

Vì vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Xét chuỗi các môđun

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{|i|^n}{n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\cdot$$

Chuỗi này là chuỗi điều hòa và như ta biết, nó là chuỗi phân kỳ. Do đó chuỗi đã cho hội tụ song không hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n.$$

Ta có $S_n = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$,

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad \text{khi} \quad z \neq 1.$$

Do đó

$$\left|S_n - \frac{1}{1-z}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z|},$$

và

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} \quad \text{khi} \quad |z| < 1.$$

Khi $|z| > 1$ thì vì

$$\lim_{n\to\infty} |z|^n = \begin{cases} 1, & \text{nếu } |z| = 1, \\ \infty, & \text{nếu } |z| > 1 \end{cases}$$

nên chuỗi phân kỳ.

Như vậy, chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ hội tụ với $|z| < 1$ và phân kỳ với $|z| \geqslant 1$.

1.4.3 Dãy và chuỗi hàm

Trong nhiều chứng minh ở nhiều phần của lý thuyết hàm biến phức, người ta sử dụng rất rộng rãi những tính chất đặc biệt của dãy hàm hội tụ. Nhờ những tính chất này mà các chứng minh đó trở nên rất đơn giản và đẹp đẽ.

Giả sử ta có dãy hàm

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots \tag{1.37}$$

xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ nào đó.

Dãy (1.37) được gọi là *hội tụ tại điểm* $z_0 \in D$ nếu dãy số $\{f_n(z_0)\}$ hội tụ. Dãy hàm (1.37) được gọi là *hội tụ trên* D nếu nó hội tụ tại mọi điểm của D. Trong trường hợp này ta có thể nói đến hàm giới hạn xác định trên D:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Định nghĩa hội tụ của dãy hàm tới hàm giới hạn $f(z)$ có thể phát biểu bằng ngôn ngữ ε, δ.

Định nghĩa 1.4.4. Dãy (1.33) *hội tụ* đến hàm $f(z)$ nếu $\forall\,\varepsilon > 0$, và với $z \in D$ bất kỳ, tồn tại số tự nhiên $N = N(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n \geqslant N$ ta có

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Cần nhấn mạnh rằng: với một $\varepsilon > 0$, số hiệu N mà khi $n > N$ thì có $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ có thể khác nhau với các điểm khác nhau của D.

Định nghĩa 1.4.5. Dãy hàm (1.37) được gọi là *hội tụ đều* trên D đến hàm $f(z)$ nếu:

$\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,N = N(\varepsilon)$ (chỉ phụ thuộc vào ε): $\forall\,n \geq N\ \forall\,z \in D \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

Dễ dàng chứng minh rằng dãy hàm (1.37) hội tụ đều đến hàm $f(z)$ khi và chỉ khi $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,N = N(\varepsilon) : \forall\,m, n \geqslant N$, $\forall\,z \in D \Rightarrow |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

Nếu dãy hàm (1.37) hội tụ đều đến hàm $f(z)$ trên D thì nó hội tụ đến hàm $f(z)$. Điều ngược lại nói chung là không đúng.

Ví dụ 5. Khảo sát sự hội tụ của dãy hàm

$$f(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}\,; \quad n = 1, 2, \ldots, \quad |z| < 1. \tag{1.38}$$

Trong ví dụ 3 mục trước, ta đã chứng minh rằng dãy (1.38) hội tụ trong hình tròn đơn vị và hàm giới hạn là

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}\,\cdot$$

Ta sẽ chứng minh rằng dãy (1.38) hội tụ đến $f(z)$ không đều trong hình tròn đơn vị.

Thật vậy, nếu dãy (1.38) hội tụ đều đến hàm $f(z)$ thì theo định nghĩa suy ra rằng:

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N = N(\varepsilon) : \forall\,n > N,\ \forall\,z \in \{|z| < 1\}$$

ta có:

$$\Big|\frac{1}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z}\Big| = \Big|\frac{z^n}{1-z}\Big| < \varepsilon.$$

Đặc biệt là khi $\varepsilon = 1$, với mọi z thực:

$$z = x; \quad 0 < x < 1$$

ta có:

$$\frac{x^n}{1-x} < 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Nhưng ta nhận xét rằng

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{1-x} = \infty \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Hai hệ thức này không thể đồng thời thỏa mãn. Do đó dãy hàm hội tụ không đều.

Dễ dàng chứng minh rằng dãy (1.38) hội tụ đều trong hình tròn $\{|z| \leqslant R < 1\}$. Thật vậy, trong hình tròn này ta có:

$$\Big|\frac{z^n}{1-z}\Big| \leqslant \frac{R^n}{1-R}$$

và với $\varepsilon > 0$ tùy ý, số hiệu N được xác định từ bất đẳng thức

$$\frac{R^n}{1-R} < \varepsilon, \quad n > \Big|\frac{\ln[\varepsilon(1-R)]}{\ln R}\Big|$$

Do đó, nếu đặt

$$N = N(\varepsilon) = E\Big(\Big|\frac{\ln[(1-R)]}{\ln R}\Big|\Big),$$

trong đó $E(t)$ là phần nguyên của t, thì với $n > N(\varepsilon)$ và với mọi $z \in \{|z| \leqslant R < 1\}$ ta có:

$$\left|\frac{1}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z}\right| < \varepsilon.$$

Định lý 1.4.4. *Giả sử các hàm $f_n(z)$ của dãy (1.37) là những hàm liên tục trên D và dãy hàm (1.37) hội tụ đều trên D đến hàm $f(z)$. Khi đó hàm $f(z)$ liên tục trên D.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $z_0 \in D$; với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số hiệu n sao cho với mọi $z \in D$ ta có

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Tiếp theo, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $z \in D \cap U(z_0, \delta)$ ta có:

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Do đó với mọi $z \in D \cap U(z_0, \delta)$ ta có

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &\leqslant |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Bây giờ ta xét chuỗi hàm:

$$f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n\geqslant 0} f_n(z). \tag{1.39}$$

Vì tại điểm $z_0 \in D$ cố định thì chuỗi (1.39) là một chuỗi số nên theo định nghĩa, sự hội tụ của nó đến tổng $S(z_0)$ có nghĩa là

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon, z_0) : \forall\, n \geqslant N$ ta có

$$|S(z_0) - S_n(z_0)| < \varepsilon, \quad S_n(z_0) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} f_k(z_0).$$

Chuỗi (1.39) được gọi là *chuỗi hội tụ trên tập D* nếu nó hội tụ tại mọi điểm $z \in D$. Hiển nhiên tổng S của nó là hàm của biến z, xác định tại mọi điểm $z \in D$.

Định nghĩa 1.4.6. Chuỗi hàm (1.39) được gọi là *hội tụ đều* trên tập hợp D nếu:

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N = N(\varepsilon) : \forall\,n \geqslant N,\ \forall\,z \in D \text{ và}$$
$$\forall\,p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

Từ định nghĩa này ta suy ra rằng chuỗi hội tụ đều trên tập hợp D thì hội tụ tại mọi điểm của tập hợp đó. Điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ 6. Xét chuỗi

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \ldots \tag{1.40}$$

Trong ví dụ 3 ở mục trước ta đã chứng minh rằng chuỗi (1.40) hội tụ trong hình tròn đơn vị và tổng của nó bằng $\dfrac{1}{1-z}$.

Tuy nhiên, chuỗi (1.40) hội tụ không đều trong hình tròn đơn vị. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}|S_{n+p}(z) - S_n(z)| &= |z^{n+1}(1 + z + \cdots + z^{n-1})|\\ &= \frac{|z|^{n+1}|1-z^p|}{|1-z|} \geqslant \frac{|z|^{n+1}(1-|z|^p)}{|1-z|}\,.\end{aligned}$$

Ta lấy số $n \in \mathbb{N}$ tùy ý và đặt $p = n$, $z_n = \dfrac{n}{n+1}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}|S_{2n}(z_n) - S(z_n)| &\geqslant \frac{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left[1 - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p}\right]}{\dfrac{1}{1+n}}\\ &= n \cdot \frac{1 - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-p}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}} \to \infty \quad (\text{khi } n \to \infty).\end{aligned}$$

Như vậy, với n đủ lớn tùy ý, tồn tại những số p $(= n)$ và những điểm $z_n \in \{|z| < 1\}$ mà: $|S_{2n}(z_n) - S_n(z_n)|$ lớn bao nhiêu tùy ý.

Từ đó suy rằng chuỗi đã cho hội tụ không đều trong hình tròn đơn vị.

Werierstrass đã chứng minh dấu hiệu đơn giản về sự hội tụ đều sau đây.

Định lý 1.4.5. *Giả sử bắt đầu từ số hiệu k_0 nào đó và với mọi $z \in D$:*

1. $|f_n(z)| \leqslant a_n, \quad a_n \geqslant 0, \ \forall\, n \geqslant k_0.$
2. *Chuỗi số* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *hội tụ.* (1.41)

Khi đó chuỗi (1.39) *hội tụ đều (và tuyệt đối) trên tập hợp D.*

Chứng minh. Vì chuỗi (1.41) hội tụ nên $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) \geqslant k_0$ sao cho $\Big|\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant m} a_{N+k}\Big| < \varepsilon$ với $m \in \mathbb{N}$ bất kỳ.

Do đó ta có

$$\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant m} f_{N+k}(z)\Big| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \big|f_{N+k}(z)\big| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant m} a_{N+k} < \varepsilon.$$

Vì vậy, theo định nghĩa, chuỗi (1.39) hội tụ đều trên D. □

Định lý 1.4.6. *Giả sử chuỗi* (1.39) *hội tụ đều trên D và mỗi số hạng của nó đều là những hàm liên tục trên D. Khi đó tổng $S(z)$ của chuỗi cũng là hàm liên tục trên D.*

Chứng minh. Giả sử $z_0 \in D$ là điểm cố định bất kỳ. Ta cần chứng minh rằng:

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(z_0, \varepsilon)$, sao cho $\forall\, z \in D \cap U(z_0, \delta)$ đều có:

$$|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon.$$

Thật vậy, vì chuỗi (1.39) hội tụ đều nên
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$, $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad z \in D.$$

Vì hàm $S_N(z)$ liên tục nên với $\varepsilon > 0$ đã chọn, tồn tại số $\delta = \delta(z_0, \varepsilon)$ sao cho

$$|S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, z \in D \cap U(z_0, \delta).$$

Từ các hệ thức này thu được:

$$
\begin{aligned}
|S(z) - S(z_0)| &\leqslant |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S(z_0) - S_N(z_0)| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

Lớp các chuỗi hàm đơn giản nhất và là công cụ có ý nghĩa đặc biệt quan trọng để nghiên cứu các hàm biến phức là các chuỗi lũy thừa.

1.4.4 Chuỗi lũy thừa

Chuỗi hàm dạng

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k(t - z_0)^k, \tag{1.42}$$

trong đó z_0, a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ là những số phức cho trước, được gọi là *chuỗi lũy thừa*. Số z_0 được gọi là tâm của chuỗi, a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ được gọi là những hệ số của chuỗi lũy thừa.

Nếu đặt $z = t - z_0$ thì có thể viết chuỗi (1.42) dưới dạng

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n. \tag{1.43}$$

Đầu tiên ta sẽ nghiên cứu cấu trúc của tập hợp điểm hội tụ của chuỗi (1.43). Hiển nhiên tập hợp đó không trống vì trong mọi trường hợp chuỗi (1.43) hội tụ tại điểm $z = 0$ với tổng bằng a_0.

Tồn tại những chuỗi lũy thừa với tập hợp điểm hội tụ gồm một điểm $z = 0$ duy nhất. Chẳng hạn, ta xét chuỗi

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} n^n \cdot z^n.$$

Với mỗi $z \neq 0$ cố định, tồn tại số hiệu n_0 mà bắt đầu từ đó $|nz| > 2$ và do đó $|n^n \cdot z^n| > 2^n$. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty} n^n \cdot z^n \neq 0$$

tức là điều kiện cần cho sự hội tụ không thỏa mãn.

Bây giờ ta xét chuỗi

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^n}\cdot$$

Với mỗi z hữu hạn, bắt đầu từ số hiệu n_0 xác định, ta có

$$\left|\frac{z}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

tức là

$$\left|\frac{z^n}{n^n}\right| < \frac{1}{2^n}\cdot$$

Vì chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi lũy thừa hội tụ trong toàn mặt phẳng.

Tồn tại những chuỗi lũy thừa hội tụ tại những điểm này, phân kỳ tại những điểm khác. Chẳng hạn chuỗi đã xét trong Ví dụ 6 hội tụ trong hình tròn và phân kỳ ngoài hình tròn đơn vị.

Để nghiên cứu cấu trúc của tập hợp điểm hội tụ, ta chứng minh:

Định lý 1.4.7. (N. Abel) *Nếu chuỗi lũy thừa* (1.43) *hội tụ tại điểm* $z_0 \neq 0$ *thì nó hội tụ tuyệt đối trong hình tròn* $\big\{|z| < |z_0|\big\}$.

Chứng minh. Vì chuỗi (1.43) hội tụ tại điểm z_0 nên

$$\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0.$$

Nhưng mọi dãy hội tụ đều bị chặn, nên tồn tại hằng số dương M sao cho

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Để ý đến bất đẳng thức này ta có:

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leqslant M \cdot q^n; \quad \left|\frac{z}{z_0}\right| = q < 1.$$

Vì chuỗi số $\sum\limits_n q^n$ hội tụ nên từ đó suy ra kết luận của định lý. □

Hệ quả 1.4.1. *Nếu chuỗi* (1.43) *phân kỳ tại điểm* $z = z_1$ *thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm* z *mà* $|z| > |z_1|$.

Chứng minh. Thật vậy, nếu chuỗi (1.43) hội tụ tại điểm $\tilde{z}$, $|\tilde{z}| > |z_1|$ thì theo định lý Abel, chuỗi đó hội tụ trong hình tròn $\{|z| < |\tilde{z}|\}$ và do đó cả tại điểm z_1. □

Trên cơ sở định lý Abel, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số $R \geqslant 0$ sao cho chuỗi (1.43) hội tụ khi $|z| < R$ và phân kỳ khi $|z| > R$.

Hiển nhiên, đối với các chuỗi lũy thừa hội tụ tại một điểm duy nhất $z = 0$ hoặc trên toàn mặt phẳng thì số R tương ứng bằng 0 hoặc ∞. Vấn đề còn lại là xét trường hợp khi chuỗi (1.43) hội tụ tại mhững điểm này và phân kỳ tại những điểm kia.

Ta có định lý sau đây:

Định lý 1.4.8. *Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa* (1.43) *là hình tròn*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

với bán kính R *xác định, phụ thuộc vào các hệ số của chuỗi. Số* R *gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.*

Chứng minh. Theo định lý Abel, trên nửa trục dương $\mathbb{R}^+$ tồn tại đoạn thẳng $[a_1, b_1]$ mà a_1 là điểm hội tụ, b_1 là điểm phân kỳ của chuỗi (1.43). Do đó, chuỗi (1.43) sẽ hội tụ khi $|z| < a_1$ và phân kỳ khi $|z| > b_1$. Vấn đề còn lại là xét sự hội tụ trong vành tròn

$$V_1 = \{a_1 < |z| < b_1\}.$$

Ta ký hiệu $[a_2, b_2]$ là nửa đoạn thẳng của $[a_1, b_1]$ mà đầu mút bên trái là điểm hội tụ của chuỗi (1.43), còn đầu mút bên phải là điểm phân kỳ. Theo định lý Abel, chuỗi (1.43) hội tụ khi $|z| < a_2$ và phân kỳ khi $|z| > b_2$ và ta tiếp tục xét sự hội tụ trong vành

$$V_2 = \{a_2 < |z| < b_2\} \subset V_1.$$

Bằng cách tiếp tục quá trình này vô hạn lần, ta thu được một dãy đoạn thẳng lồng nhau

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

với $b_n - a_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Theo nguyên lý Cantor về các đoạn thẳng lồng nhau, tồn tại suy nhất một điểm a thuộc mọi đoạn thẳng $[a_n, b_n]$ $n = 1, 2, \dots$

Ta đặt $R = a$ và chứng minh rằng chuỗi (1.43) hội tụ trong hình tròn $\{|z| < R\}$ và phân kỳ ở ngoài hình tròn đó.

Thật vậy, giả sử $|z| < R$. Vì a_n là dãy tăng dần đến R nên tìm được a_p sao cho:

$$|z| < a_p < a = R.$$

Do đó, theo định lý Abel, chuỗi hội tụ tại điểm z. Bây giờ giả sử z' : $|z'| > R$. Vì b_n là dãy giảm dần đến R nên tìm được số b_q sao cho

$$|z'| > b_q > R.$$

Do đó chuỗi phân kỳ tại điểm z'. Định lý hoàn toàn được chứng minh. □

Bây giờ, từ các hệ số a_n của chuỗi ta thành lập dãy:

$$|a_1|, |a_2|^{1/2}, \dots, |a_n|^{1/n}, \dots$$

và đặt

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}.$$

(Hiển nhiên số ρ bao giờ cũng tồn tại, có thể bằng ∞)

Định lý 1.4.9. (Cauchy - Hadamard) *Bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa (1.43) được tính theo công thức*

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}}, \tag{1.44}$$

trong đó ta đặt $R = 0$ nếu $\rho = +\infty$ và $R = +\infty$ nếu $\rho = 0$.

Công thức (1.44) được gọi là công thức *Cauchy - Hadamard.*

Chứng minh. Ta lưu ý rằng giới hạn trên của dãy số thực u_n được định nghĩa như sau:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} u_n = \lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{n\geqslant p} u_n\Big).$$

Để chứng minh công thức (1.44) ta sẽ sử dụng dấu hiệu hội tụ của Cauchy. Đặt $u_n = |a_n|\cdot r^n$. Khi đó $\overline{\lim} u_n^{1/n} = r\cdot\Big(\overline{\lim}|a_n|^{1/n}\Big)$, và chuỗi $\sum\limits_n u_n = \sum\limits_n |a_n|r^n$ hội tụ khi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n^{1/n} = r\cdot\Big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}\Big) < 1$, tức là $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n} < \dfrac{1}{r}$.
Từ đó suy ra kết luận của định lý. □

Định lý 1.4.10. *Chuỗi lũy thừa* (1.43) *hội tụ đều trong hình tròn đóng* $\{|z|\leqslant r < R\}$, *trong đó* R *là bán kính hội tụ của chuỗi.*

Chứng minh. Vì điểm $z = r$ nằm trong hình tròn hội tụ nên chuỗi số $\sum\limits_n |a_n|r^n$ hội tụ. Ngoài ra, khi $|z|\leqslant r$ ta có

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n|r^n, \quad \forall\, n,$$

và vì vậy kết luận của định lý được suy từ dấu hiệu hội tụ của Weierstrass. □

Hệ quả 1.4.2. *Tổng của chuỗi lũy thừa là hàm liên tục tại mọi điểm* z *nằm trong hình tròn hội tụ của nó.*

Để kết thúc mục này, ta xét các phép toán số học cơ bản đối với các chuỗi lũy thừa.

Giả sử bán kính hội tụ R của chuỗi (1.43) khác 0 và r là số tùy ý thỏa mãn điều kiện

$$0 < r < R.$$

Ta có định lý sau đây (gọi là định lý về tính duy nhất của chuỗi lũy thừa).

Định lý 1.4.11. *Nếu tổng $S(z)$ của chuỗi lũy thừa* (1.43) *bằng 0 khắp nơi trong hình tròn $\{|z| < r\}$ thì $a_n = 0$, $\forall\, n = 0, 1, 2, \dots$*

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng phương pháp phản chứng. Giả sử a_m là hệ số $\neq 0$ đầu tiên của chuỗi (1.43). Khi đó

$$
\begin{aligned}
S(z) &= a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots = z^m[a_m + a_{m+1} z + \dots] \\
&= z^m \sum_{k \geqslant 0} a_{m+k} z^k = z^m \cdot S_0(z).
\end{aligned}
$$

Theo giả thiết, tổng $S_0(z)$ của chuỗi $\sum\limits_{k \geqslant 0} a_{m+k} z^k$ bằng 0 khắp nơi trong vành tròn $\{|z| < r\} \setminus \{0\}$. Ta đặt:

$$\tilde{S}_0(z) = \sum_{k \geqslant 1} a_{m+k} z^k.$$

Hàm $\tilde{S}_0(z)$ liên tục khi $|z| \leqslant r$ và $\tilde{S}_0(0) = 0$. Do đó tồn tại số $\delta > 0$ sao cho khi $|z| \leqslant \delta$ ta có:

$$|\tilde{S}_0(z)| = \Big| \sum_{k \geqslant 1} a_{m+k} z^k \Big| < \frac{1}{2} |a_m|$$

và từ đó:

$$
\begin{aligned}
|S_0(z)| = |a_m + \tilde{S}_0(z)| &= \Big| a_m + \sum_{k \geqslant 1} a_{m+k} z^k \Big| \\
&\geqslant |a_m| - \Big| \sum_{k \geqslant 1} a_{m+k} z^k \Big| \geqslant |a_m| - \frac{1}{2}|a_m| = \frac{1}{2}|a_m|.
\end{aligned}
$$

Nhưng điều này mâu thuẫn với đẳng thức

$$S_0(z) = 0, \quad \forall\, z \in \{0 < |z| \leqslant \delta\}.$$

□

Bây giờ giả sử $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ là bán kính hội tụ tương ứng của chuỗi lũy thừa

$$S_1(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \tag{1.45}$$

$$S_2(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n. \tag{1.46}$$

Đặt $\rho = \min(R_1, R_2)$. Vì hình tròn $\{|z| < \rho\}$ là hình tròn hội tụ chung của các chuỗi (1.45), (1.46) nên tại mỗi điểm z của nó ta có thể nói về tổng và hiệu của hai chuỗi (1.45) và (1.46).

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n + \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} (a_n \pm b_n) z^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n. \tag{1.47}$$

Theo định lý Abel, bán kính hội tụ R của chuỗi (1.47) lớn hơn hoặc bằng ρ, $R \geqslant \rho$.

Thật vậy, ta đặt

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|.$$

khi đó $|c_n| < \gamma_n$. Nếu $r < \rho$ thì các chuỗi

$$\sum |a_n| r^n \quad \text{và} \quad \sum |b_n| r^n$$

đều hội tụ và do đó $\sum\limits_{n\geqslant 0} \gamma_n r^n < +\infty$. Do đó chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n \pm b_n) z^n$ hội tụ.

Vậy mọi $r < \rho$ đều bé hơn bán kính hội tụ của chuỗi (1.47). Do đó $R \geqslant \rho$.

Vì hai chuỗi (1.45) và (1.46) hội tụ tuyệt đối khi $|z| < \rho$ nên có thể nhân hai chuỗi với nhau và thu được chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n\geqslant 0} d_n z^n, \quad d_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k \cdot b_{n-k}. \tag{1.48}$$

Ta sẽ chứng minh rằng bán kính hội tụ của chuỗi (1.48) không bé hơn ρ. Thật vậy, ta đặt

$$\delta_n = \sum_{0\leq k\leq n} |a_k| \cdot |b_{n-k}|.$$

Khi đó $|d_n| \leqslant \delta_n$.

Nếu $r < \rho$ thì các chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|r^n$ và $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_n|r^n$ hội tụ và do đó

$$\sum_{n\geqslant 0} \delta_n \cdot r^n = \Big(\sum_{p\geqslant 0} |a_p|r^p\Big)\Big(\sum_{q\geqslant 0} |b_q|r^q\Big) < +\infty.$$

Như vậy, không một số r nào, $r < \rho$ có thể vượt quá bán kính hội tụ của chuỗi (1.48). Do đó bán kính hội tụ của chuỗi (1.48) lớn hơn hoặc bằng ρ.

Ta nhận xét rằng khi $b_0 \neq 0$, ta có thể xét thương của hai chuỗi (1.45) và (1.46) và thu được chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n\geqslant 0} \tilde{d}_n z^n$. Do $b_0 \neq 0$ nên các hệ số $\tilde{d}_n$ của chuỗi đó được xác định đơn trị từ các hệ thức truy hồi sau:

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} b_k \tilde{d}_{n-k} = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

và có thể chứng minh rằng khi $b_0 \neq 0$ thì bán kính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 0} \tilde{d}_n z^n$$

là khác 0 nếu $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$.

1.4.5 Sự hội tụ đều trên từng compắc

Giả sử D là miền của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Ta sẽ ký hiệu $\mathcal{C}(D)$ là tập hợp các hàm liên tục trong D. Trong lý thuyết các hàm chỉnh hình, sự hội tụ đều của dãy (chuỗi) trên mỗi tập hợp đóng và bị chặn thuộc D là rất quan trọng. Ta sẽ gọi sự hội tụ đó là *sự hội tụ đều trên từng compắc* của miền D để phân biệt với sự hội tụ đều trong miền D.

Định nghĩa 1.4.7. Giả sử cho dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$. Dãy hàm f_n được gọi là dãy *hội tụ đều trên từng compắc* của miền D nếu với mọi compắc $K \subset D$ dãy các hạn chế $\{f_n|K\}$ hội tụ đều.

Ta nhận xét rằng mọi dãy hội tụ đều trong miền D thì hội tụ đều trên từng compắc của miền đó. Điều khẳng định ngược lại, nói chung, là không đúng.

Ta sẽ chứng tỏ điều đó bằng ví dụ sau đây. Ta xét dãy hàm

$$f_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n.$$

1. Dãy đã cho hội tụ trong hình tròn đơn vị (xem ví dụ 4 mục trước).

2. Dãy f_n hội tụ đều trên từng compắc của hình tròn đơn vị. Thật vậy, giả sử $K \subset U = \{|z| < 1\}$ là compắc nào đó và $\delta > 0$ là khoảng cách từ K đến ∂U. Khi đó, với mọi $z \in K$ ta có

$$|z| \leqslant 1 - \delta,$$

và

$$\begin{aligned}|f_{n+p} - f_n| &= |z^{n+1} + \cdots + z^{n+p}| = \left|z^{n+1}\frac{1-z^p}{1-z}\right| \\ &\leqslant |z|^{n+1}\frac{1+|z|^p}{1-|z|} \leqslant (1-\delta)^{n+1}\frac{2}{\delta}\cdot\end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng đại lượng $(1-\delta)^{n+1}\dfrac{2}{\delta}$ dần đến 0 khi $n \to \infty$ nên có thể làm cho nó bé hơn $\varepsilon > 0$ khi $n \geqslant N(\varepsilon)$.

3. Dãy hàm đã cho không hội tụ đều trong hình tròn đơn vị. Điều này được chứng minh trong ví dụ 6 mục trước.

Định lý 1.4.12. *Nếu dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$ hội tụ đều trên từng compắc của miền D thì hàm giới hạn $f \in \mathcal{C}(D)$.*

Chứng minh. Nếu dãy hàm liên tục f_n hội tụ đều trên từng compắc K thì hàm giới hạn f có hạn chế $f|K$ trên từng compắc $K \subset D$ liên tục. Vì D là miền $\subset \mathbb{C}$ nên mọi điểm $z_0 \in D$ đều có lân cận compắc $\overline{U(z_0, \varepsilon)}$ nằm trong D. Từ đó suy ra tính liên tục của hàm f trong D. □

Ta sẽ chứng minh tiêu chuẩn sau đây về sự hội tụ đều trên từng compắc.

Định lý 1.4.13. *Dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$ hội tụ đều trên từng compắc của miền D khi và chỉ khi đối với mỗi điểm $z_0 \in D$ tồn tại lân cận mà tại đó dãy hội tụ đều.*

Chứng minh. 1. *Điều kiện cần.* Điều kiện cần ở đây là hiển nhiên vì nếu $\{|z - z_0| \leqslant \rho\} \subset D$ thì dãy phải hội tụ đều trên đó và vì vậy nó sẽ hội tụ đều trong lân cận $\{|z - z_0| < \rho\}$.

2. *Điều kiện đủ.* Ta sẽ chứng minh điều kiện đủ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử điều kiện của định lý được thỏa mãn nhưng dãy hội tụ không đều trên compắc $K \subset D$ nào đó. Khi đó cần phải tồn tại số dương ε_0, những số tự nhiên n_k $(n_k < n_{k+1})$ lớn bao nhiêu tùy ý và những điểm $z_k \in K$ sao cho

$$|f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geqslant \varepsilon_0,$$

trong đó f là hàm giới hạn của dãy.

Từ dãy điểm $\{z_k\}$ ta có thể chọn dãy con $\{z'_k\}$ hội tụ đến điểm $z_0 \in K$ nào đó. Vì z_0 là điểm của miền D nên theo điều kiện của định lý, tồn tại lân cận $U(z_0, \delta) \subset D$ mà trong đó dãy hội tụ đều. Do đó tại mọi điểm $z \in U(z_0, \delta)$ ta có

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon_0$$

với n đủ lớn.

Mặt khác, từ giả thiết của chúng ta suy ra rằng tồn tại những chỉ số n_k, lớn tùy ý sao cho tại các điểm z'_k nằm trong $U(z_0, \delta)$ (mọi điểm z'_k bắt đầu từ một số hiệu nào đó đều thuộc $\mathcal{U}(z_0, \delta)$), ta có bất đẳng thức ngược lại

$$|f(z'_k) - f_n(z'_k)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Từ mâu thuẫn đó suy ra rằng giả thiết của chúng ta là không đúng. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét. 1. Từ sự phân tích trên đây suy ra rằng tính hội tụ đều của dãy hàm trên từng compắc có đòi hỏi yếu hơn so với tính hội tụ đều trong miền D.

2. Vì có thể xem dãy hàm như là dãy các tổng riêng của một chuỗi nên các kết quả đã trình bày trên đây được chuyển sang cho các chuỗi hội tụ đều một cách tự nhiên.

1.5 Hàm $\arg z$

1.5.1 Tính liên tục của hàm $\arg z$

Giả sử

$$\Gamma = \{0, \infty e^{i\alpha}\}$$

là nhát cắt theo tia lập với hướng dương của trục thực góc α và đi từ gốc tọa độ đến điểm ∞, và $D_\alpha = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Rõ ràng D_α là miền đơn liên. Khi đó hàm $\varphi(z) = \arg z$ được xác định một cách đơn trị bởi hệ phương trình $x = r\cos\varphi(z)$, $y = r\sin\varphi(z)$ (vì $\alpha < \varphi(z) < \alpha + 2\pi$, $\forall\, z \in D_\alpha$).

Ví dụ 1. Giả sử $D_\alpha = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma(0, \infty e^{i\alpha})$. Khi đó hàm acgumen $\varphi = \arg z$ là hàm liên tục $\forall\, z \in D_\alpha$.

Chứng minh. Thật vậy, ta cố định điểm $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (0, \infty e^{i\alpha})$ tùy ý và giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước. Ta xét δ - lân cận thuộc D_α của điểm z_0:

$$U(z_0, \delta) = \{z \in D_\alpha : |z - z_0| < \delta\}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\forall\, z \in U(z_0, \delta)$ ta có

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \arcsin \frac{\delta}{|z_0|}\cdot$$

Nhưng vì khi $x > 0 \Rightarrow \arcsin x < 2x$ nên

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \frac{2\delta}{|z_0|} < \varepsilon, \quad \forall\, z \in U(z_0, \delta).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Ta lưu ý rằng trên nhát cắt Γ hàm $\varphi(z)$ có gián đoạn. Hiệu các giá trị giới hạn của $\varphi(z)$ khi z dần đến điểm trên bờ bên phải và bờ bên trái là bằng 2π.

Trong trường hợp nhát cắt dạng phức tạp hơn, $\varphi(z)$ không thể xác định nhờ bất đẳng thức $\alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$ được. Không đi sâu vào chi tiết, ta chỉ lưu ý rằng trong trường hợp này $\varphi(z)$ cũng được xác định đơn trị và là một hàm liên tục của z.

1.5.2 Số gia của acgumen dọc theo đường cong

Định nghĩa 1.5.1. Giả sử đường cong γ không đi qua gốc tọa độ $z = 0$. Khi đó góc quay của vectơ z khi điểm z chuyển động theo đường cong γ từ điểm đầu đến điểm cuối được gọi là số gia của acgumen z dọc theo đường cong γ và ký hiệu là $\Delta_\gamma \arg z$.

Ví dụ 2

1. Nếu γ là đoạn thẳng với điểm đầu $1-i$ và điểm cuối $1+i$ thì $\Delta_\gamma \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Nếu $\gamma^+ = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ với hướng ngược chiều kim đồng hồ thì $\Delta_{\gamma^+} \arg z = \pi$.

3. Nếu $\gamma^- = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ với hướng cùng chiều kim đồng hồ thì $\Delta_{\gamma^-} \arg z = -\pi$.

Bây giờ ta nêu ra công thức biểu diễn đối với $\Delta_\gamma \arg z$. Vì

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

nên

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,$$
$$dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

Do đó

$$rd\varphi = -\sin\varphi dx + \cos\varphi dy$$

và

$$d\varphi = d(\arg z) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}\cdot \tag{1.49}$$

Bây giờ ta xét $\displaystyle\int_\gamma d(\arg z)$. Tích phân này bằng hiệu giữa giá trị acgumen z tại điểm đầu và điểm cuối của đường cong γ, nghĩa là bằng $\Delta_\gamma \arg z$. Như vậy

$$\boxed{\Delta_\gamma \arg z = \int\limits_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \cdot} \tag{1.50}$$

Số gia $\Delta_\gamma \arg z$ có các tính chất sau đây.

(I) Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (tức là $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ và γ_1, γ_2 là những đường cong đồng luân với nhau ($\gamma_1 \approx \gamma_2$) trong D. Khi đó

$$\Delta_{\gamma_1} \arg z = \Delta_{\gamma_2} \arg z. \tag{1.51}$$

Chứng minh. Giả sử γ_1 và γ_2 đi từ điểm A đến điểm B. Đặt $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Vì $\gamma_1 \approx \gamma_2$ trong D và

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}\Big)$$

nên[5] tích phân của $\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ lấy theo đường cong nối điểm A với điểm B không phụ thuộc vào dạng của đường cong. Do đó

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int\limits_{\gamma_2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \cdot \tag{1.52}$$

Từ (1.50) và (1.52) suy ra (1.51). □

Đặc biệt từ tính chất (I) rút ra

(II) Nếu $\gamma \subset D$ là đường cong đóng và $\gamma \approx 0$ trong D thì

$$\Delta_\gamma \arg z = 0. \tag{1.53}$$

Nhận xét. 1. Ta lưu ý rằng đẳng thức (1.51) được thỏa mãn không phải với γ_1 và γ_2 bất kỳ (với các đầu mút chung) trong D. Thật vậy, với γ^+ và γ^- đã xét trong các ví dụ 2) và 3) ta có $\Delta_{\gamma_1} \arg z \neq \Delta_{\gamma_2} \arg z_2$. Hiển nhiên trong trường hợp này γ_1 không đồng luân với γ_2 trong D.

[5]Xem G. M. Fichtengon. Cơ sở giải tích toán học, tập II, trang 230-232. Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, Hà Nội 1972.

2. Cũng như vậy, đẳng thức (1.53) được thỏa mãn không phải đối với đường cong đóng γ bất kỳ trong D. Chẳng hạn nếu $\gamma = \{|z| = 1\}$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ thì $\Delta_\gamma \arg z = 2\pi$. Hiển nhiên ở đây γ không đồng luân với 0.

(III) Nếu đường cong γ không đi qua điểm $z = 0$ thì

$$\Delta_\gamma \arg z = -\Delta_{\gamma^-} \arg z. \tag{1.54}$$

Đẳng thức (1.54) được suy từ (1.50) và tính định hướng của tích phân đường.

(IV) Nếu đường cong γ không đi qua điểm $z = 0$ và được biểu diễn dưới dạng $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, trong đó γ_1, γ_2 là các cung của nó thì

$$\Delta_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z.$$

Điều đó được suy từ (1.50) và tính cộng tính của tích phân đường.

1.5.3 Nhánh đơn trị liên tục của hàm arg z

Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$. Theo định nghĩa, hàm đơn trị liên tục $f(z)$ trong miền D được gọi là *một nhánh đơn trị liên tục* của hàm đa trị $F(z)$ nếu tại mọi điểm $z \in D$ giá trị $f(z)$ trùng với một trong các giá trị của $F(z)$ tại điểm đó. Nếu đối với hàm $F(z)$ tồn tại dù chỉ một nhánh đơn trị liên tục trong miền D cho trước thì người ta nói rằng $F(z)$ *cho phép tách các nhánh đơn trị liên tục* trong D.

Về sau ta thường xét đến miền $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^-$ (tức là trường hợp nhát cắt đi theo bán trục thực âm). Giả sử z_0 là điểm cố định tùy ý thuộc D, $\gamma(z_0, z) \subset D_0$ là đường cong đơn liên tục đi từ z_0 đến z, $z \in D_0$ (nếu $z = z_0$ thì $\gamma(z_0, z)$ là đường cong đóng). Tại điểm z_0 ta cố định một trong các giá trị của $\arg z_0$ và ký hiệu $\varphi_0 = \arg z_0$. Ta xét hàm

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0,z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0. \end{cases} \tag{1.55}$$

Hàm $\varphi_*(z)$ có các tính chất sau đây:

1. $\varphi_*(z)$ là hàm đơn trị trong D_0. Thật vậy, giả sử $\gamma_1(z_0, z)$ và $\gamma_2(z_0, z)$ là hai đường cong đơn liên tục thuộc D_0. Vì cả γ_1 và γ_2 đều không bao điểm 0 nên từ tính chất (I) và (II) suy ra $\Delta_{\gamma_1(z_0,z)}\arg z = \Delta_{\gamma_2(z_0,z)}\arg z$. Do đó $\varphi_*(z)$ đơn trị tại điểm $z \in D_0$ bất kỳ. Do đó nó đơn trị trong D_0.

2. $\varphi_*(z)$ là hàm liên tục trong D_0. Chứng minh hệt như trong n°1 của mục này.

Từ điều vừa chứng minh suy ra rằng với giá trị được chọn φ_0, hàm $\varphi_*(z)$ là một nhánh đơn trị liên tục của hàm đa trị $\arg z$ và nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$ trong D_0 hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó tại một điểm $z_0 \in D_0$.

Tiếp theo ta xét các hàm

$$\varphi_m(z) = \begin{cases} \arg z_0 + 2m\pi, & z = z_0, m \in \mathbb{Z}, \\ \Delta_{\gamma(z_0,z)}\arg z, & z \in D, z \neq z_0. \end{cases} \tag{1.56}$$

Đó là những nhánh đơn trị liên tục của hàm đa trị $\arg z$ trong D_0 (khi $m = 0$ ta có $\varphi_0(z) = \varphi_*(z)$).

Từ công thức (1.56) ta thấy rằng để hàm (1.56) là đơn trị trong miền D nào đó, điều kiện cần và đủ là số gia của acgumen $\Delta_\gamma \arg z$ không phụ thuộc vào đường cong γ, nghĩa là đối với đường cong đóng $\tilde{\gamma} \subset D$ bất kỳ ta có $\Delta_{\tilde{\gamma}}\arg z = 0$.

Nói cách khác, miền D không chứa những đường cong đóng Jordan bao gốc tọa độ. Ví dụ về một miền như vậy là

$$D_\alpha = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, \alpha e^{i\alpha}].$$

Ta dã nói rõ vì sao khi miền $D \supset \{z = 0\}$ thì trong D không thể tách nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$.

Giả sử ngược lại, trong D tồn tại nhánh đơn trị liên tục $\tilde{\varphi}(z)$ của hàm $\arg z$. Giả sử tại điểm cố định $z_0 \in D$ ta có $\tilde{\varphi}(z_0) = \arg z_0 + 2k_0\pi$, $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ là số cố định nào đó. Giả sử γ là đường cong đóng qua z_0 và bao gốc tọa độ $z = 0$. Khi điểm z vòng quanh γ theo hướng dương từ điểm z_0 thì

$\tilde{\varphi}(z)$ sẽ biến thiên liên tục và khi z trở về điểm z_0 thì $\tilde{\varphi}(z)$ sẽ nhận giá trị $2k_0\pi + \arg z + 2\pi = \tilde{\varphi}(z) + 2\pi$. Điều đó có nghĩa là nhánh được tách $\varphi(z)$ không đơn trị. Điều đó chứng tỏ rằng trong miền D bất kỳ chứa gốc tọa độ không thể tách nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$.

1.6 Bài tập

1. Cho định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & z_{11} & \dots & z_{1n} & \overline{z}_{11} & \dots & \overline{z}_{1n} \\ a_2 & z_{21} & \dots & z_{2n} & \overline{z}_{21} & \dots & \overline{z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2n+1} & z_{2n+1,1} & \dots & z_{2n+1,n} & \overline{z}_{2n+1,1} & \dots & \overline{z}_{2n+1,n} \end{vmatrix}$$

trong đó a_i là số thực, z_{ij} là số phức. Chứng minh rằng D_n là số thực nếu n là số chẵn và D_n là số thuần ảo nếu n là số lẻ.

2. Chứng minh các đẳng thức sau:

1) $|a| + |b| = \left|\frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right| + \left|\frac{1}{2}(a+b) + \sqrt{ab}\right|, \ \ a, b \in \mathbb{C}$.

2) $|ab+1|^2 + |a-b|^2 = (1+|a|^2)(1+|b|^2), \ \ a, b \in \mathbb{C}$.

3) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2), \ \ a, b \in \mathbb{C}$.

4) Nếu $a = Re^{i\alpha}$, $b = Re^{i\beta}$, $0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$ thì $b - a = |b-a|ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

5) Nếu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ thì $\arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z_2}{z_1}$.

3. Chứng minh rằng nếu $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ là những giá trị chính thì

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{nếu } a > 0, b > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + 2\pi & \text{nếu } a > 0, b < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

4. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1) $\left|\dfrac{a}{|a|} - 1\right| \leqslant |\arg z|, \ \ a \in \mathbb{C}$.

2) $|a+b| \geqslant \dfrac{1}{2}\big(|a|+|b|\big)\left|\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|}\right|, \ \ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0, b \neq 0.$

3) $|z-1| \leqslant \big||z|-1\big| + |z||\arg z|, \ \ z \in \mathbb{C}.$

4) Giả sử $a \in \mathbb{C}$ và $|a| < 1$. Chứng minh rằng các bất đẳng thức $|z| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant 1$ là tương đương với nhau và trong cả hai trường hợp dấu bằng đạt được với cùng một giá trị z.

5) Nếu $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ thì $|1+z| \geqslant \dfrac{1+|z|}{\sqrt{2}}$.

5. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+ib} = \pm\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\operatorname{sign} b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\Big).$$

6. Gọi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ là các căn bậc n của đơn vị,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

và giả sử p là số nguyên dương. Tính tổng

$$S = \varepsilon_0^p + \varepsilon_1^p + \cdots + \varepsilon_{n-1}^p$$

trong hai trường hợp p là bội của n và p không là bội của n.

[*Trả lời:* $S = n$ nếu p là bội của n; $S = 0$ nếu p không là bội của n].

7. Chứng minh rằng phương trình đường tròn đi qua ba điểm cho trước z_1, z_2 và z_3 không nằm trên một đường thẳng có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{vmatrix} z\overline{z} & z & \overline{z} & 1 \\ z_1\overline{z}_1 & z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2\overline{z}_2 & z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ z_3\overline{z}_3 & z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Xác định quỹ tích những điểm $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn các điều kiện

$$\operatorname{Im}\Big(\frac{z-a}{z-b}\Big)^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}.$$

9. Với giá trị nào của tham số a các đường tròn trên mặt phẳng phức sau đây sẽ tương ứng với đường tròn lớn trên mặt cầu Riemann:

1. $|z-a| = a,\ \ a > 0;$
2. $\left|z + \dfrac{a}{2}\right| = a,\ \ a > 0;$
3. $|z-i| = a,\ \ a > 0;$
4. $|z-2ai| = a,\ \ a > 0.$

[*Trả lời:* 1) $a = \infty$; 2) $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 3) $a = \sqrt{2}$; 4) không tồn tại giá trị a nào].

10. Chứng minh rằng hai điểm $M(z_1)$ và $M(z_2)$ không trùng với hai cực Nam và Bắc của mặt cầu Riemann là đối kính với nhau khi và chỉ khi các điểm z_1 và z_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức $z_1z_2 = -1$.

11. Hãy mô tả hình học các điểm z trên mặt phẳng phức thỏa mãn các điều kiện:

1. $d(z,0) < R,\ \ 0 < R < 1;$
2. $d(z,\infty) < R,\ \ 0 < R < 1;$
3. $d(z,i) > \dfrac{1}{\sqrt{2}};$
4. $\dfrac{1}{2} < d(z,1) < \dfrac{1}{\sqrt{2}},$

trong đó d là khoảng cách cầu.

[*Trả lời:* 1) Hình tròn với tâm $z = 0$ và bán kính $\dfrac{R}{\sqrt{1-R^2}}$; 2) Phần ngoài hình tròn với tâm $z = 0$ và bán kính $\dfrac{1}{R}\sqrt{1-R^2}$; 3) Nửa mặt phẳng nằm ở phía trên trục thực; 4) Nửa mặt phẳng nằm ở bên phải trục ảo cắt bỏ hình tròn với tâm $z = 2$ và bán kính $\sqrt{5}$].

12. Tìm ảnh trên mặt cầu Riemann của họ đường thẳng song song trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ qua phép chiếu nổi.

Chỉ dẫn. Giả sử xét họ đường thẳng song song có phương trình là $y = kx + b$, $k = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{const}$. Từ công thức phép chiếu nổi thu được

$\eta = k\xi + b(1-\zeta)$ và do vậy

$$\begin{aligned} k\xi - \eta - b\zeta &= -b, \\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\cdot \end{aligned}$$

Đó là phương trình đường tròn qua điểm $P(0,0,1)$.

13. Chứng minh rằng trong phép chiếu nổi, các đường tròn trên mặt cầu Riemann tương ứng với các đường tròn hoặc đường thẳng trên mặt phẳng. Những đường tròn nào trên mặt cầu sẽ tương ứng với đường thẳng trên mặt phẳng.

Chỉ dẫn. Xét đường tròn trên mặt cầu Riemann

$$\begin{aligned} &A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0, \\ &\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot \end{aligned}$$

Từ phương trình này và các công thức của phép chiếu nổi hãy rút ra phương trình tương ứng

$$(D+C)(x^2+y^2) + Ax + By = -D.$$

Từ đó suy ra đpcm.

14* Giả sử cho dãy $a, a_0, a_1, \ldots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a.$$

15* Chứng minh rằng $\forall\, z \in \mathbb{C}$ và m nguyên dương ta có

$$\left| a^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \right| \leqslant e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m \leqslant \frac{|z|^2 e^{|z|}}{2m}\cdot$$

16* Nếu $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ thì các nghiệm của phương trình

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

nằm ngoài miền $|z| \leqslant 1$.

17* Giả sử các nghiệm α_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ của đa thức

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

nằm trong miền $\{|z| \leqslant r\}$ và các nghiệm β^k, $k = 1, 2, \dots, n$ của đa thức

$$Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n \quad (b_0 \neq 0)$$

nằm trong miền $\{|z| \geqslant r + 2\}$.

Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức $P(z) + Q(z)$ nằm trong miền $\{|z| \geqslant 1\}$ nếu $|a_0| \leqslant |b_0|$.

18* Chứng minh rằng hàm

$$w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

trong đó $a_0, a_1, \dots, a_n$ là những hằng số, $a_1 \neq 0$ là đơn diệp trong miền $|z| < r$ nếu r thỏa mãn điều kiện

$$|a_1| - 2|a_2|r - \cdots - (n-1)|a_{n-1}|r^{n-2} - n|a_n|r^{n-1} > 0.$$

Chương 2

Hàm chỉnh hình

2.1 Hàm khả vi 106

2.1.1 Hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi 106

2.1.2 Đạo hàm theo phương 108

2.1.3 Hàm $\mathbb{C}$ - khả vi 110

2.1.4 Mối liên hệ giữa $\mathbb{C}$ - khả vi và $\mathbb{R}^2$ - khả vi 114

2.1.5 Hàm chỉnh hình 115

2.1.6 Không gian các hàm chỉnh hình 121

2.2 Một số hàm chỉnh hình sơ cấp 122

2.2.1 Đa thức và hàm hữu tỷ 122

2.2.2 Hàm $w = z^n$ và $z = \sqrt[n]{w}$, $n \in \mathbb{N}$ 122

2.2.3 Hàm e^z 124

2.2.4 Hàm lôgarit 126

2.2.5 Hàm lũy thừa z^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ 130

2.2.6 Các hàm sơ cấp khác 131

2.2.7 Nhánh chỉnh hình của hàm đa trị 134

2.3 Hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác 138

2.3.1 Ý nghĩa hình học của acgumen của đạo hàm . . . 138
2.3.2 Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm 140
2.3.3 Ánh xạ bảo giác 141
2.3.4 Ánh xạ liên tục và ánh xạ chỉnh hình 143
2.4 Các đẳng cấu sơ cấp 146
2.4.1 Đẳng cấu phân tuyến tính 147
2.4.2 Ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$ 160
2.4.3 Hàm Jukovski 164
2.4.4 Các đẳng cấu sơ cấp khác 172
2.4.5 Một số ví dụ 175
2.5 Bài tập 183

Sự thu hẹp tập hợp các hàm biến phức bằng điều kiện $\mathbb{C}$ - khả vi sẽ đưa đến lớp các hàm chỉnh hình. Định nghĩa tính $\mathbb{C}$ - khả vi của hàm biến phức sẽ được trình bày hoàn toàn tương tự như định nghĩa tính khả vi trong giải tích thực. Tuy có sự "giống nhau" bề ngoài đó, giữa hai khái niệm này tồn tại những sự khác nhau rất cốt yếu mà ta sẽ thấy rõ trong chương II này.

2.1 Hàm khả vi

2.1.1 Hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi

Giả sử D là miền của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ và $f(x, y)$ là hàm giá trị thực hoặc phức xác định trong D, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$.

Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2.1.1. Hàm f được gọi là $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ nếu tồn tại hàm tuyến tính $Ah + Bk$ của các biến thực h và k sao cho với h và k đủ bé số gia của f thỏa mãn hệ thức

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\rho,$$

trong đó A, B thực hoặc phức, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ và $\varepsilon(h,k) \to 0$ khi $\rho \to 0$.

Nếu f là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ thì các hằng số A và B (thực hoặc phức) được xác định duy nhất và tương ứng bằng

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

và biểu thức

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \tag{2.1}$$

được gọi là *vi phân* của hàm f tại điểm (x_0, y_0).

Bằng cách sử dụng ký hiệu có tính chất truyền thống đối với h và k: $h = dx$, $k = dy$, từ (2.1) ta có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Ta lưu ý rằng nếu các đạo hàm riêng tồn tại trong một lân cận nào đó của điểm (x_0, y_0) và liên tục tại điểm ấy thì f là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm đó. Hàm f có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D được gọi là *khả vi liên tục* trong miền đó.

Bây giờ ta xét vi phân

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2.2}$$

Đối với các hàm $z = x + iy$ và $\overline{z} = x - iy$ ta có

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy$$

và do đó

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}). \tag{2.3}$$

Thế (2.3) vào (2.2) ta thu được hệ thức

$$df = \frac{1}{z}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)dz + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)d\overline{z}.$$

Bằng cách đặt

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \tag{2.4}$$

ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\Big(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)$$

và có thể viết biểu thức vi phân của hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi dưới dạng

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot d\overline{z}. \tag{2.5}$$

Định lý 2.1.1. *Phép biểu diễn vi phân (2.5) của hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi f là duy nhất, tức là nếu có*

$$df = Adz + Bd\overline{z} \quad \textit{thì} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}\,; \quad B = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\cdot$$

Chứng minh. Vì $dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$ nên

$$df = (A + B)dx + i(A - B)dy.$$

Từ đó thu được

$$A + B = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad i(A - B) = \frac{\partial f}{\partial y}\,\cdot$$

Giải hệ phương trình này ta thu được điều phải chứng minh. □

2.1.2 Đạo hàm theo phương

Giả sử $f(z)$ là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm $z_0 \in D$ và Δf là số gia của nó tại điểm z_0 ứng với $\Delta z = \Delta r e^{i\alpha}$.

Ta thành lập tỷ số $\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ và xét giới hạn của nó khi $\Delta z \to 0$ sao cho

$$\lim_{\Delta z \to 0} \alpha = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta z) = \varphi$$

trong đó φ là một số cố định cho trước.

Định nghĩa 2.1.2. Giới hạn của tỷ số $\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ khi $\Delta z \to 0$ mà $\varphi = \lim\limits_{\Delta z \to 0}(\arg \Delta z)$ được gọi là *đạo hàm của hàm f theo phương* φ tại điểm z_0.

Đạo hàm theo phương φ được ký hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial z_\varphi}$ và như vậy

$$\frac{\partial f}{\partial z_\varphi} = \lim_{\substack{\varphi = \text{const} \\ \Delta z \to 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z}\cdot$$

Ta có định lý sau đây:

Định lý 2.1.2. *Giả sử f là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi. Khi đó tập hợp các giá trị đạo hàm theo phương tại điểm z_0 cho trước lập thành đường tròn với tâm tại điểm $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ và bán kính bằng $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|$.*

Chứng minh. Theo giả thiết ta có f là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi, nên

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta \overline{z} + o(\Delta z), \tag{2.6}$$

trong đó $\lim \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ khi $\Delta z \to 0$. Do đó

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} e^{-2i\alpha} + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\varepsilon(\Delta z) = \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z}$, và ta thu được

$$\frac{\partial f}{\partial z_\varphi} = \lim \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} e^{-2i\varphi}. \tag{2.7}$$

Công thức (2.7) chứng tỏ rằng các giá trị đạo hàm của hàm f theo phương tại điểm z_0 lấp đầy đường tròn với tâm tại điểm $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ và bán kính bằng $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|$. $\square$

Trường hợp đặc biệt quan trọng là trường hợp khi đạo hàm theo mọi phương trùng nhau. Khi đó, đường tròn đã nói trong định lý 2.1.2 sẽ suy biến thành một điểm $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

2.1.3 Hàm $\mathbb{C}$ - khả vi

Giả sử D là miền của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và f là hàm biến phức $z = x + iy$ xác định trong D. Ta có định nghĩa quan trọng sau đây:

Định nghĩa 2.1.3. Hàm f được gọi là $\mathbb{C}$ - *khả vi* tại điểm $z_0 \in D$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

và ta nói rằng hàm f *có đạo hàm theo biến phức* tại điểm z_0 và ký hiệu là $f'(z_0)$ hay $\dfrac{df}{dz}(z_0)$:

$$f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \cdot \tag{2.8}$$

Định nghĩa 2.1.3 đòi hỏi rằng giới hạn (2.8) phải tồn tại đối với *mọi cách cho z dần đến* z_0. Nói chính xác hơn, hệ thức (2.8) có nghĩa rằng: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho khi $0 < |h| < \delta$ thì bất đẳng thức

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \tag{2.9}$$

được thỏa mãn. Như vậy ta đòi hỏi rằng khi $h \to 0$ (tức là $z \to z_0$) *theo bất cứ đường nào* tỷ số

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

phải dần tới cùng một giới hạn.

Từ hệ thức (2.9) cũng suy ra rằng nếu *hàm $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z_0 thì nó liên tục tại điểm đó.* Điều khẳng định ngược lại là không đúng.

Từ định nghĩa đạo hàm (2.8) và các tính chất của giới hạn trong miền phức suy rằng các quy tắc cơ bản để tính đạo hàm của tổng, tích và thương của hai hàm. của hàm hợp và hàm ngược đối với các hàm biến thực đều được bảo toàn đối với các hàm biến phức.

Bây giờ ta chuyển sang xét vấn đề tự nhiên là: tính $\mathbb{C}$ - khả vi đã nêu tương ứng với tính chất đơn giản nào của các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$.

Định lý 2.1.3. *Giả sử hàm*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

là $\mathbb{C}$ - khả vi tại điểm $z = x + iy$. Khi đó tại điểm (x, y) hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng theo biến x và y thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\cdot \end{aligned} \tag{2.10}$$

Các hệ thức (2.10) *được gọi là các điều kiện Cauchy - Riemann.*

Chứng minh. Giả sử hàm $w = f(x)$ xác định trong miền $D \subset \mathbb{C}$ và có đạo hàm tại điểm $z \in D$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot \tag{2.11}$$

Như vậy với mọi cách cho $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ dần đến 0 giới hạn (2.11) phải tồn tại và đều bằng một giá trị là $f'(z)$. Do đó giới hạn ấy phải tồn tại trong hai trường hợp riêng sau

a) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x$ và $\Delta x \to 0$.

b) $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$ và $\Delta y \to 0$.

Trong trường hợp thứ nhất ta có

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \Big[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}\Big] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Trong trường hợp thứ hai:

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y\to 0}\Big[\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}\Big]\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\\
&= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Từ (2.12) và (2.13) ta thu được

$$
\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\}
$$

Định lý được chứng minh. □

Rõ ràng là các hệ quả thu được từ *tính* $\mathbb{C}$ - *khả vi* là ấn tượng hơn nhiều so với các hệ quả thu được từ *tính* $\mathbb{C}$ - *liên tục*. Ngoài việc các hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1, các đạo hàm này còn phải liên hệ với nhau bởi các phương trình vi phân (2.10).

Như vậy, thậm chí nếu $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 thì nói chung hàm $u+iv$ không phải là hàm khả vi của z.

Từ đó, các hệ thức Cauchy - Riemann (2.10) lập thành *điều kiện cần* để hàm $f(z)$ là $\mathbb{C}$ - khả vi. Tuy nhiên đó không phải là điều kiện đủ. Ta xét một vài ví dụ.

Ta xét hàm $f(z)=\sqrt{|xy|}$. Hàm này triệt tiêu trên cả hai trục và do đó khi $z=0$ ta có

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0
$$

và điều kiện Cauchy - Riemann thỏa mãn. Nhưng hàm $f(z)$ không $\mathbb{C}$ khả vi tại điểm $z=0$. Thật vậy, ta có $\dfrac{f(z)}{z}=\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}$ và nếu $x=\alpha r$, $y=\beta r$ trong đó α, β là những hằng số còn $r>0$ thì hệ thức đó dần tới $\dfrac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta}$ khi $r\to 0$. Như vậy giới hạn không duy nhất và hàm không $\mathbb{C}$ - khả vi.

Ví dụ này chứng tỏ rằng hàm $f(z)$ có thể không $\mathbb{C}$ - khả vi nếu hệ tỷ số $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ dần đến giới hạn dọc theo hai đường thẳng vuông góc. Và nói chung, hàm f có thể không $\mathbb{C}$ - khả vi cho dù tỷ số trên dần đến giới hạn theo một lớp các đường đặc biệt nào đó. Chẳng hạn, ta xét hàm

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(x+iy)}{x^4+y^4} & \text{nếu } z \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } z = 0. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng $\lim \dfrac{f(z)-f(0)}{z} = 0$ nếu $z \to 0$ dọc theo bất cứ đường thẳng nào qua gốc tọa độ. Nhưng trên đường cong $x = y^2$ ta có

$$\frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}\cdot$$

Do đó hàm $f(z)$ không $\mathbb{C}$ - khả vi tại điểm $z = 0$.

Các hệ thức (2.10) sẽ là điều kiện đủ để $f(z)$ là $\mathbb{C}$ - khả vi nếu giả thiết thêm rằng cả bốn đạo hàm riêng cấp 1 của hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ đều tồn tại trong lân cận điểm (x,y) và liên tục tại điểm (x,y). Ta có

Định lý 2.1.4. *Nếu tại điểm (x,y) các hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann thì hàm biến phức $f(z) = u + iv$ có đạo hàm tại điểm $z = x + iy$.*

Chứng minh. Giả sử các hàm u và v có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm (x,y). Khi đó u và v khả vi tại điểm đó, tức là số gia Δu và Δv tương ứng với các số gia Δx và Δy có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o_1(\rho), \rho \to 0$$
$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o_2(\rho), \rho \to 0$$

trong đó $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o_1(\rho)$ và $o_2(\rho)$ $(\rho \to 0)$ là những vô cùng bé cấp cao hơn so với ρ, tức là

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o_j(\rho)}{\rho} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Do đó, nếu lưu ý rằng $o_1(\rho) + io_2(\rho) = o(\rho)$ $(\rho \to 0)$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\Big(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\Big)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\Delta z}\\ &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta z}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta z}\cdot\end{aligned}$$

Vì $\left|\dfrac{\rho}{\Delta z}\right| = \dfrac{\rho}{|\Delta z|} = 1$ và $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$ nên từ đó suy rằng

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

tức là tại điểm z hàm f có đạo hàm $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot$ □

2.1.4 Mối liên hệ giữa $\mathbb{C}$ - khả vi và $\mathbb{R}^2$ - khả vi

Các điều kiện Cauchy - Riemann (2.10) có thể biểu diễn dưới dạng gọn gàng hơn nếu ta sử dụng khái niệm đạo hàm hình thức trong 1. và 2.

Từ định lý 2.1.2 suy ra rằng nếu f là hàm $\mathbb{C}$ - khả vi tại điểm $z_0 \in D$ thì đạo hàm theo mọi phương tại điểm đó đều trùng nhau và bằng $\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot$

Chính xác hơn ta có

Định lý 2.1.5. *Hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi f trong miền D là hàm $\mathbb{C}$ - khả vi trong miền đó khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{2.14}$$

Chứng minh. 1. Giả sử f là hàm $\mathbb{C}$ - khả vi. Khi đó, theo định nghĩa 2.1.3 giới hạn (2.8) tồn tại không phụ thuộc vào phương pháp dần Δz đến 0, và ta có

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$. Từ đó rút ra

$$df = f'(z_0)dz,$$

tức là

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

2. Giả sử $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Từ công thức (2.6) ta thu được

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$. Từ đó thấy rõ là giới hạn (2.8) tồn tại và

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}\cdot$$

□

Điều kiện (2.9) chính là điều kiện khả vi phức Cauchy - Riemann. Điều kiện Cauchy - Riemann còn có thể biểu diễn dưới dạng

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{2.15}$$

và như vậy ta có định lý sau đây.

Định lý 2.1.6. *Hàm f là $\mathbb{C}$ - khả vi tại một điểm nào đó khi và chỉ khi nó là $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm đó và các đạo hàm riêng của nó tại điểm ấy liên hệ với nhau bằng hệ thức* (2.15).

2.1.5 Hàm chỉnh hình

Từ tính $\mathbb{C}$ - khả vi đã được định nghĩa ta chưa thể rút ra những kết luận mà chúng ta mong muốn khi nói đến tầm quan trọng của khái niệm này.

Để thu được những kết quả đó, đòi hỏi hàm f phải là $\mathbb{C}$ - khả vi tại một lân cận nào đó của điểm z_0. Vì thế ta có

Định nghĩa 2.1.4. 1) Hàm f được gọi là hàm *chỉnh hình tại điểm* z_0 nếu nó là $\mathbb{C}$ - khả vi tại một lân cận nào đó của điểm z_0. Hàm f được gọi là *chỉnh hình trong miền* D nếu nó chỉnh hình tại mọi điểm của miền ấy. Tập hợp mọi hàm chỉnh hình trong miền D được ký hiệu là $\mathcal{H}(D)$.

2) Hàm $f(z)$ *chỉnh hình tại điểm vô cùng* nếu hàm $\varphi(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$.

Phần 2) của định nghĩa 2.1.4 cho phép ta xét các hàm chỉnh hình trên các tập hợp của mặt phẳng đóng $\overline{\mathbb{C}}$.

Ta nhận xét rằng cùng với thuật ngữ "hàm chỉnh hình" người ta còn dùng những thuật ngữ tương đương khác sau đây:

"hàm chỉnh hình" $\equiv$ "hàm chính quy" $\equiv$ "hàm giải tích đơn trị".

Từ điều kiện Cauchy - Riemann và định nghĩa 2.1.4 dễ dàng suy ra

Định lý 2.1.7. *Giả sử miền* $D \subset \mathbb{C}$ *và* $\mathcal{H}(D)$ *tập hợp mọi hàm chỉnh hình trong miền* D.

Khi đó

1. $\mathcal{H}(D)$ *là một vành;*
2. *nếu* $f \in \mathcal{H}(D)$ *và* $f(z) \neq 0\ \forall\, z \in D$ *thì* $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{H}(D)$*;*
3. *nếu* $f \in \mathcal{H}(D)$ *và* f *chỉ nhận giá trị thực thì* f *là hằng số.*

Chứng minh. Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}},$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \cdot$$

Từ đó suy ra 1) và 2).

Để chứng minh 3) ta nhận xét rằng $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng chỉ nhận giá trị thực. Nhưng mặt khác:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$$

nên suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$. Vậy f là hằng số. □

Định lý 2.1.8. (về hàm hợp). *Nếu $f(w)$ là hàm chỉnh hình trong D^* và nếu $g : D \to D^*$ là hàm chỉnh hình trong D thì hàm hợp $f[g(z)]$ chỉnh hình trong D,*

Chứng minh. Thật vậy, dễ thấy rằng

$$\frac{\partial[f(g)]}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial g}{\partial\overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial\overline{w}}\cdot\frac{\partial\overline{g}}{\partial\overline{z}}\cdot$$

Theo giả thiết $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{w}} = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial\overline{z}} = 0$ nên suy ra $f[g(z)]$ là hàm chỉnh hình trong D. □

Tiếp theo, giả sử $w = f(z)$, $z \in D$ là hàm chỉnh hình ánh xạ đơn trị một - một miền D lên miền D^*. Điều đó có nghĩa là theo hàm đã cho mỗi $z \in D$ đều tương ứng với một giá trị $w \in D^*$ và đồng thời theo quy luật đó mỗi $w \in D^*$ chỉ tương ứng với một giá trị $z \in D$. Từ đó xác định được hàm đơn trị $z = \varphi(w)$, $w \in D^*$ có tính chất là $f[\varphi(w)] = w$, $w \in D^*$. Như ta biết hàm $z = \varphi(w)$ được gọi là *hàm ngược* với hàm $w = f(z)$, $z \in D$.

Ta sẽ chứng minh rằng *nếu $f'(z) \neq 0$, $z \in D$ thì hàm $z = \varphi(w)$ là hàm chỉnh hình trên D^*.*

Thật vậy, giả sử w, $w + \Delta w \in D^*$. Nhờ hàm ngược, các điểm này tương ứng với điểm z, $z + \Delta z$. Theo giả thiết hàm f có đạo hàm tại điểm z nên $f(z)$ liên tục tại đó: $\Delta w \to 0$ nếu $\Delta z \to 0$. Do tính đơn trị một - một ta có cả điều khẳng định ngược lại: $\Delta z \to 0$ nếu $\Delta w \to 0$. Nhưng khi đó

$$\lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)}\,, \quad (f'(z) \neq 0).$$

Điều đó chứng tỏ rằng đạo hàm của hàm ngược $z = \varphi(w)$ tồn tại tại điểm w và bằng

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}\,, \quad w \in D^*.$$

Vì w là điểm tùy ý của D^*, $f'(z)$ liên tục và $f'(z) \neq 0$ nên hàm $\varphi(w)$ chỉnh hình trong D^*.

Ta xét ví dụ hàm $w = az + b$, $a \neq 0$ là hàm tuyến tính nguyên. Hàm này ánh xạ đơn trị một - một mặt phẳng phức z lên mặt phẳng phức w. Hàm ngược của nó có dạng

$$z = \frac{w-b}{a}\cdot$$

Dễ dàng thấy rằng hàm $w = az + b$ và hàm ngược của nó $z = \dfrac{w-b}{a}$ chỉnh hình khắp nơi trên mặt phẳng z và w tương ứng $\left(w'_z = a, z'_w = \dfrac{1}{a}\right)$.

Định lý 2.1.9. *Giả sử cho chuỗi lũy thừa*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n. \tag{2.16}$$

Nếu bán kính hội tụ của chuỗi (2.16) *khác 0 thì tổng* $S(z)$ *của nó là một hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ* $\{|z| < R, R > 0\}$ *của nó, tức là khi* $|z| < R$ *ta có*

$$S'(z) = \lim \frac{S(z+h) - S(z)}{h}\cdot \tag{2.17}$$

Chứng minh. 1. Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu bán kính hội tụ của chuỗi đã cho (2.16) là R thì bán kính hội tụ R^* của chuỗi đạo hàm

$$S_0(z) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} \tag{2.18}$$

cũng bằng R. Thật vậy, hiển nhiên rằng bán kính R^* bằng bán kính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n.$$

Nhưng

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

và do đó

$$R^* = \Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|}\Big)^{-1} = \Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Big)^{-1} = R.$$

2. Giả sử z là điểm cố định tùy ý nằm trong hình tròn $|z| < R$. Khi đó có thể chỉ ra số R_1 $(0 < R_1 < R)$ sao cho $|z| < R_1 < R$. Giả sử Δz là số gia tùy ý của z mà $|z + \Delta z| < R_1 < R$. Vì

$$\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = (z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}$$

cho nên

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\Big| \leqslant \\
&\leqslant \Big|\sum_{n=1}^{m} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1} - nz^{n-1}\big]\Big| + \\
&\quad + \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}\big]\Big| \\
&\quad + \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\Big|. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Xét điểm $z^* = R_1$. Vì điểm $z^* = R_1$ nằm trong hình tròn hội tụ $|z| < R$ của chuỗi (2.18) nên từ sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi (2.18) trong hình tròn $|z| < R$ suy rằng: $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, M = M(\varepsilon)$ sao cho $\forall\, m > M$ thì phần dư

$$\sum_{n\ m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \qquad (2.20)$$

Do đó với $m > M$, từ (2.20) thu được

$$\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\Big| < \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \qquad (2.21)$$

và

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}\big]\Big| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Tiếp theo, từ hệ thức

$$\lim_{\Delta z\to 0}\sum_{n=1}^{m} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}\big]=\sum_{n=1}^{m} na_n z^{n-1}$$

suy rằng với số $\varepsilon > 0$ đã chọn, tìm được số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với $|\Delta z| < \min(\delta; |R_1 - z|)$ thì

$$\Big|\sum_{n=1}^{m} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}-nz^{n-1}\Big| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \qquad (2.23)$$

Bằng cách thay $n > M$ trong (2.19), từ (2.21) - (2.23) suy rằng khi $|\Delta z| < \min(\delta, |R_1 - z|)$ ta có

$$\Big|\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Do đó

$$S_0(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z} = S'(z).$$

Vì z là điểm tùy ý của hình tròn hội tụ $|z| < R$ nên định lý được chứng minh. □

Nhận xét. Vì bằng phép đổi biến theo công thức $t = z - z_0$, $z_0 \neq 0$ chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ được quy về chuỗi $\sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n$ nên ta có định lý sau:

Định lý 2.1.9*. *Tổng $f(z)$ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ là hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ $|z-z_0| < R$ của chuỗi đó và đạo hàm $f'(z)$ được tìm theo công thức*

$$f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

2.1.6 Không gian các hàm chỉnh hình

Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{C}(D)$ là tập hợp các hàm liên tục trong D và $\mathcal{H}(D)$ là tập hợp các hàm chỉnh hình trong D.

Không đi sâu vào chi tiết (việc đó dành cho bộ môn tôpô học), ở đây chỉ phác qua việc xác định tôpô trong $\mathcal{C}(D)$. Đối với tập hợp compắc $K \subset D$ bất kỳ và số $\varepsilon > 0$ bất kỳ, đặt

$$V(K, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{C}(D) : |f(z)| < \varepsilon, \forall\, z \in K\}.$$

Rõ ràng là tập hợp $V(K, \varepsilon)$ là lân cận của $f \equiv 0$ trong $\mathcal{C}(D)$. Người ta đã chứng minh rằng (xem [10], trang 188-191) nếu $\{K_n\}$ là dãy các tập hợp compắc của miền $D : K_i \subset K_{i+1}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_i = D$ sao cho mỗi compắc $K \subset D$ đều thuộc một K_n nào đó thì các tập hợp $V(K_i, \varepsilon)$ đối với mọi K_i và ε như vậy là hệ lân cận cơ sở của phần tử 0 (tức là $f \equiv 0$) và sẽ xác định một tôpô mà với tôpô đó $\mathcal{C}(D)$ là một không gian tôpô. Rõ ràng là dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$ hội tụ đều trên từng compắc của miền D khi và chỉ khi $\forall\, K \subset D$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, n$ đủ lớn suy ra

$$f_n - f \in V(K, \varepsilon).$$

Điều đó có nghĩa rằng dãy $f_n \in \mathcal{C}(D)$ có giới hạn là một điểm trong tôpô mà $V(K, \varepsilon)$ lập thành hệ lân cận cơ sở của $f \equiv 0$.

Vì $\mathcal{H}(D)$ là không gian con của không gian $\mathcal{C}(D)$ nên trên $\mathcal{H}(D)$ ta xét tôpô cảm sinh bởi tôpô của không gian $\mathcal{C}(D)$. Với tôpô đó, $\mathcal{H}(D)$ là không gian tôpô. Đối với không gian $\mathcal{C}(D)$ cũng như $\mathcal{H}(D)$ ta có thể xác định tôpô bởi mêtric hóa. Do đó có thể áp dụng cho không gian $\mathcal{C}(D)$ và $\mathcal{H}(D)$ những định lý quen thuộc về không gian mêtric. Chẳng hạn, tập hợp con A của không gian E là đóng khi và chỉ khi giới hạn của dãy điểm bất kỳ của A thuộc A.

2.2 Một số hàm chỉnh hình sơ cấp

2.2.1 Đa thức và hàm hữu tỷ

Để ý đến các đẳng thức $\dfrac{d(\text{const})}{dz} = 0$, $\dfrac{dz}{dz} = 1$ và các quy tắc tính đạo hàm ta có thể kết luận rằng *đa thức* $P_n(z)$ *là hàm chỉnh hình* $\forall\, z \in \mathbb{C}$ và

$$P_n(z) = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}\Big)' = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)a_k z^{n-k-1}.$$

Các hàm hữu tỷ $\mathcal{R}(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, trong đó $P(z)$ và $Q(z)$ là các đa thức, chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus N(Q)$, trong đó $N(Q) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$. Chẳng hạn, hàm phân tuyến tính $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Big\{-\dfrac{d}{c}\Big\}$ nếu $c \neq 0$ và chỉnh hình trong $\mathbb{C}$ nếu $c = 0$ và $d \neq 0$; hàm Jukovski $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.2.2 Hàm $w = z^n$ và $z = \sqrt[n]{w}$, $n \in \mathbb{N}$

Ta xét các giá trị $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_1|e^{i\varphi_2}$. Từ đó

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= |z_1|^n\big[e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2}\big] \\ &= |z_1|^n e^{in\varphi_2}\big[e^{in(\varphi_1-\varphi_2)} - 1\big]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hệ thức (2.24) chứng tỏ rằng z_1 và z_2 có cùng một ảnh khi và chỉ khi

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k \cdot \frac{2\pi}{n}\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do vậy, hàm $w = z^n$ đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1 và z_2 mà

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + \dfrac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ví dụ về miền đơn diệp của hàm $w = z^n$ là các hình quạt vô hạn

$$D_k = \Big\{z \in \mathbb{C} : k\frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1), k = \overline{0, n-1}\Big\}.$$

Ta chia mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ thành n hình quạt bởi các tia đi ra từ gốc tọa độ

$$\theta = \theta_k = \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Giả sử D_k là hình quạt

$$\theta_k < \theta < \theta_{k+1}, \quad \rho > 0.$$

tức là

$$D_k = \Big\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta}, \rho > 0, \theta_k < \theta = \arg z < \theta_{k+1}\Big\}.$$

Hiển nhiên D_k là miền. Ta ký hiệu

$$D_k^* = \Big\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta}, \theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}, \rho > 0\Big\}.$$

Tiếp theo ta đặt

$$\theta = \theta_k + \psi, \quad \theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}.$$

Từ đó nếu $0 \leqslant \psi < \theta_1 = \dfrac{2\pi}{n}$ thì $\theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}$ và ngược lại.

Ta chứng minh rằng: *hàm $w = z^n$ ánh xạ đơn trị một - một miền D_k^* lên toàn bộ mặt phẳng*

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_w^* = \Big\{w \in \mathbb{C} : w = re^{i\varphi}, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\Big\}.$$

Thật vậy, ta có

$$re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n e^{in(\frac{2\pi}{n}k + \psi)} = \rho^n e^{in\psi}.$$

Do đó

$$r = \rho^n, \quad \varphi = n\psi \quad \Big(0 \leqslant \psi < \theta_1 = \frac{2\pi}{n}\Big).$$

và từ đó ta thu được ảnh của D_k^* là mặt phẳng $\mathbb{C}_w^*$.

Từ chứng minh trên ta cũng thu được

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r},$$
$$\psi = \frac{\varphi}{n}$$

và từ đó suy rằng trên miền D_k^* hàm $w = z^n$ có hàm ngược

$$z = (z)_k = \rho e^{i\theta} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \; w \in \mathbb{C}_w^*. \tag{2.25}$$

Nói chung: hàm $w = z^n$ có hàm ngược n-trị

$$z = \sqrt[n]{w}$$

là n nhánh liên tục (2.25) tương ứng với các số $k = 0, 1, \dots, n-1$. Các nhánh (2.25) xác định bởi các số $k = 0, 1, \dots, n-1$ ánh xạ $\mathbb{C}^*$ lên $D_0^*, D_1^*, \dots, D_n^*$ tương ứng.

Để tính đạo hàm của nhánh thứ k ta phải xét miền $D_k \subset D_k^*$. Ta ký hiệu

$$\mathbb{C}_w^+ = \mathbb{C}_w^* \setminus \mathbb{R}_+.$$

Rõ ràng là hàm chỉnh hình $w = z^n$ ánh xạ đơn trị một - một D_k lên $\mathbb{C}_w^+$, đồng thời hàm ngược tương ứng được xác định theo công thức (2.25).

Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm ngược ta có ($z \in D_k$)

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{w}\right)' &= \left(\sqrt[n]{w}\right)_k' = \frac{1}{\left(z^n\right)'} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{z}{nw} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}}{re^{i(\varphi+2k\pi)}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i(\frac{1}{n}-1)(\varphi+2k\pi)} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

2.2.3 Hàm e^z

Giả sử $z = x + iy$. Khi đó

$$e^z \stackrel{def}{=} e^x(\cos y + i \sin y).$$

Nếu $z = x$ là số thực thì $e^z = e^x$, tức là khi z nhận các giá trị thực thì hàm biến phức e^z trùng với hàm mũ biến thực thông thường. Điều nhận xét này cùng với một số tính chất được nêu dưới đây sẽ chứng tỏ tính hợp lý của định nghĩa hàm mũ biến phức vừa nêu.

Ta lưu ý một số tính chất của hàm e^z.

1) $e^z \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Điều đó được suy ra từ định nghĩa và hệ thức $e^x \neq 0$, $|e^{iy}| = 1$.

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Chứng minh. Giả sử $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\big[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big] = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

3) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$. Điều này được suy ra từ định nghĩa và tính chất 2).

4) Đẳng thức $e^{z+\alpha} = e^z \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh. Giả sử $\alpha = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$e^{z+\alpha} = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$$

Ngược lại, nếu $e^{z+\alpha} = e^z$, $\alpha = \lambda + i\nu$ thì

$$e^{z+\lambda+i\nu} = e^z \Rightarrow e^z\big(e^{\lambda+i\nu} - 1\big) = 0.$$

Vì $e^z \neq 0$ nên $e^{\lambda+i\nu} = 1$. Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $\lambda = 0$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, từ đẳng thức $e^{\lambda+i\nu} = 1$ suy rằng $e^\lambda \cdot e^{i\nu} = 1$ và do đó $e^\lambda = 1$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; tức là $\lambda = 0$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Như vậy $\alpha = 0 + i2k\pi = 2k\pi i$. □

Các số $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ mà với $z \in \mathbb{C}$ bất kỳ ta có đẳng thức $e^{z+2k\pi i} = e^z$ được gọi là *các chu kỳ* của hàm e^z và số $2\pi i$ gọi là *chu kỳ cơ bản* của nó.

5) e^z không có giới hạn khi $z \to \infty$ vì $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty$.

6) Hàm e^z đơn diệp trong miền $D \subset \mathbb{C}$ khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1 và z_2 mà

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ cùng có một ảnh. Khi đó từ hệ thức $w_1 = w_2$ suy ra

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i.$$

□

Ví dụ về miền đơn diệp của hàm mũ biến phức là các *băng vô hạn* nằm ngang

$$D_k = \Big\{z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty; 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

7) Hàm e^z liên tục trên $\mathbb{C}$. Thật vậy vì các hàm $\operatorname{Re}(e^z) = u(x,y) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$ đều liên tục nên theo định lý ta có hàm e^z liên tục.

8) Hàm $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Thật vậy các hàm phần thực $u(x,y) = e^x \cos y$ và phần ảo $v(x,y) = e^x \sin y$ đều là những hàm khả vi và thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann, nên theo định lý 2.1.4 ta có $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2.2.4 Hàm lôgarit

Giả sử cho số phức $z \in \mathbb{C}$. Khi đó mọi số phức $\zeta \in \mathbb{C}$ thỏa mãn phương trình $e^\zeta = z$ được gọi là lôgarit của số $z \in \mathbb{C}$ và được ký hiệu là

$$\operatorname{Ln} z = \zeta.$$

Như vậy

$$\operatorname{Ln} z = \zeta \Leftrightarrow e^\zeta = z. \tag{2.26}$$

Giả sử $\zeta = x + iy$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Ta có

$$\begin{aligned}
e^{\zeta} = z \Leftrightarrow e^{x+iy} &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&\Leftrightarrow e^{x}(\cos y + i\sin y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} e^x &= r > 0,\\ y &= \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \ln r\\ y &= \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\mathrm{Ln}\, z = \zeta = x + iy = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

hay là

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.27}$$

Ta ký hiệu

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

và gọi đó là *giá trị chính* của $\mathrm{Ln}\, z$. Từ đó

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Từ hệ thức (2.27) suy ra rằng: *mỗi số phức $z \neq 0, \infty$ đều có vô số giá trị lôgarit, trong đó hai giá trị lôgarit bất kỳ là khác nhau một bội nguyên của $2\pi i$.* Nếu z là số thực dương thì giá trị chính của lôgarit trùng với $\ln|z|$ và do đó nó biểu diễn số thực trùng với lôgarit cổ điển: Chẳng hạn $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1, \dots$

Nhưng, ngoài các giá trị thực đó, lôgarit của các số thực dương còn có vô số các lôgarit phức được tính theo công thức (2.27). Chẳng hạn: $\mathrm{Ln}\, 1 = 2k\pi i$, $\mathrm{Ln}\, e = 1 + 2k\pi i, \dots$

Ta lưu ý hai tính chất đặc biệt của lôgarit số phức

a) $\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$,

b) $\mathrm{Ln}\, \dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

Các đẳng thức này cần được hiểu một cách ước lệ: đó là đẳng thức giữa các tập hợp. Nói cách khác; vế trái có thể sai khác vế phải một bội nguyên của $2\pi i$ hoặc vế phải bằng vế trái với việc chọn số hạng $2k\pi i$ trong vế trái một cách thích hợp.

Bây giờ ta xét lôgarit với tư cách là một hàm.

Ta đặt

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

và đưa vào xét hàm

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ln}_k : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}, \\ &\mathrm{Ln}_k z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i. \end{aligned}$$

Đó là hàm đơn trị. Mặt khác vì $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ nên

$$\mathrm{Ln}_k\mathbb{C}_0 \subset D_k = \Big\{ w \in \mathbb{C} : (2k+1)\pi < \mathrm{Im}\, w \leqslant (2k+1)\pi \Big\}$$

là băng vô hạn nằm ngang có bề rộng 2π.

Ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\mathrm{Ln}_k\mathbb{C}_0 = D_k,$$

tức là chứng minh rằng $\forall\, w \in D_k\ \exists\, z \in \mathbb{C}_0$ sao cho

$$\mathrm{Ln}_k z = w.$$

Giả sử $w = u + iv \in D_k$. Khi đó

$$v = v_0 + 2k\pi, \quad -\pi < v_0 \leqslant \pi.$$

Ta đặt $z = e^w = e^u(\cos v_0 + i\sin v_0)$. Khi đó ta thu được

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}_k z &= \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \\ &= u + i(v_0 + 2k\pi) = u + iv = w. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\mathrm{Ln}_k : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{(lên)}} D_k.$$

Vì D_k là miền đơn diệp của Ln_k nên tại đó nó có hàm ngược

$$\mathrm{Ln}_k^{-1} : D_k \longrightarrow \mathbb{C}_0.$$

đó là hàm

$$\mathrm{Ln}_k^{-1}(w) = e^w.$$

Hàm này đơn trị.

Ta nhận xét rằng hàm $\mathrm{Ln}_k z$ không liên tục trong $\mathbb{C}_0$, mà cụ thể là nó không liên tục trên phần âm trục thực $\mathbb{R}^-$. Thật vậy vì $\forall\, z = x_0 < 0$ và $\forall \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ là ε - lân cận của x_0, $\exists\, z \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ sao cho $\mathrm{Im}(\mathrm{Ln}_k z)$ sẽ gần với $(2k+1)\pi$ và $\exists\, z \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ sao cho $\mathrm{Im}(\mathrm{Ln}_k z)$ sẽ gần với $(2k-1)\pi$. Nói chính xác hơn khi $z \to x_0 \in \mathbb{R}^-$ mà $\mathrm{Im}\, z > 0$ (tương ứng: $\mathrm{Im}\, z < 0$) thì $\mathrm{Ln}_k z$ dần đến $\ln|x_0| + (2k+1)\pi$ (tương ứng: dần đến $\ln|x_0| + (2k-1)\pi$).

Các hàm $\mathrm{Ln}_k z$ được gọi là *các nhánh (đơn trị)* của hàm đa trị $\mathrm{Ln}\, z$.

Một cách tự nhiên ta đưa vào tập hợp

$$\mathbb{C}^* = \Big\{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi \Big\}$$

là mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ cắt bỏ phần âm trục thực và xét hàm

$$\mathrm{Ln}_k^0 = \mathrm{Ln}_k\big|_{\mathbb{C}^*}.$$

Rõ ràng là

$$\mathrm{Ln}_k^0 \mathbb{C}^* = D_k^0 = \Big\{ w \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, w < (2k+1)\pi \Big\}$$

Hàm Ln_k^0 liên tục trên $\mathbb{C}^*$. Để chứng minh điều đó ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

liên tục trên $\mathbb{C}^*$. Nhưng điều đó là hiển nhiên vì phần thực $\ln|z|$ liên tục trên $\mathbb{C}^*$ (thậm chí nó liên tục cả trong $\mathbb{C}_0$) và phần ảo $\arg z$ liên tục trên $\mathbb{C}^*$ như ta đã chứng minh trong chương trước. Như vậy: *hàm* $\mathrm{Ln}_k z$ *liên tục trên* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Đó là các nhánh đơn trị liên tục trên $\mathbb{C}^*$ của hàm lôgarit $\mathrm{Ln}\, z$.

Trong miền $\mathbb{C}^*$ ta thu được *vô số nhánh đơn trị liên tục*. Mọi nhánh $\mathrm{Ln}_k z$ hoàn toàn được đặc trụng bởi điều là: Các giá trị của nó thuộc một băng vô hạn nằm ngang D_k xác định.

Từ lập luận trên cũng suy ra rằng hàm $w = \mathrm{Ln}_k z$ ánh xạ đơn trị một - một và liên tục miền $\mathbb{C}^*$ lên D_k và hàm ngược của nó $z = e^w$ có đạo hàm $\neq 0$ tại mọi điểm $w \in D_k$. Do đó theo quy tắc đạo hàm của hàm ngược ta có

$$\Big(\mathrm{Ln}_k z\Big)'_z = \frac{1}{\big(e^w\big)'_w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}\cdot \tag{2.28}$$

Ta nhấn mạnh rằng ở đây ta tính đạo hàm không phải của hàm đa trị $\mathrm{Ln}\, z$ mà là của nhánh đơn trị của nó tương ứng với giá trị k nào đó.

2.2.5 Hàm lũy thừa z^α, $\alpha \in \mathbb{R}$

Hàm lũy thừa z^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ được định nghĩa theo công thức

$$\begin{aligned} w = z^\alpha = e^{\alpha \ln z} &= e^{\alpha[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} \\ &= |z|^\alpha e^{i\alpha(\arg z + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.29}$$

hay là

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}; z = \rho e^{i\theta}. \tag{2.30}$$

Ta xét các trường hợp sau đây.

1^+. Nếu α là số nguyên thì $e^{i\alpha 2k\pi} = 1$ và

$$w = (\rho e^{i\theta})^\alpha = z^\alpha$$

trong đó z^α được hiểu theo nghĩa thông thường là tích của α thừa số z.

2^+. Nếu $\alpha = \pm\dfrac{p}{q}$, trong đó $p > 0$, $q > 0$ là những số nguyên, thì giữa các số ở vế phải của (2.30) chỉ có các giá trị tương ứng với $k = 0, 1, \dots, q-1$ là khác nhau:

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, \dots, q-1.$$

Đặc biệt là khi $\alpha = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ thì hàm $w = z^{\frac{1}{n}}$ đã được xét trong 2).

3^+. Nếu α là số vô tỷ thì đối với các giá trị k khác nhau các hàm xác định bởi (2.29) hay (2.30) là khác nhau. Thật vậy giá trị acgumen của các giá trị z^α bằng

$$\theta_k = \alpha\theta + 2k\pi\alpha$$

và trong các giá trị đó không có các giá trị nào khác nhau một bội nguyên của 2π vì nếu với k_1, k_2 nguyên và $k_1 \neq k_3$ mà $\theta_{k_1} - \theta_{k_2} = 2k_1\pi\alpha - 2k_2\pi\alpha = 2n\pi$, trong đó n-nguyên thì

$$\alpha = \frac{n}{k_1 - k_2}$$

là số hữu tỷ. Vô lý. Điều đó chứng tỏ rằng z^α là hàm *vô số trị*. Đó là *Các nhánh liên tục của hàm vô số trị* $w = z^\alpha$.

Tiếp theo ta có ($z = \rho e^{i\theta}$)

$$\begin{aligned}\big(z^\alpha\big)' = \big(e^{\alpha\ln z}\big)' = e^{\alpha\ln z}\cdot\frac{\alpha}{z} = \alpha\,\frac{e^{\alpha[\ln\rho + i(\theta+2k\pi)]}}{e^{[\ln\rho+i(\theta+2k\pi)]}}\\ = \alpha e^{(\alpha-1)[\ln\rho+i(\theta+2k\pi)]} = \alpha z^{\alpha-1}\end{aligned}$$

tức là đẳng thức $\big(z^\alpha\big)' = \alpha z^{\alpha-1}$ đúng đối với mọi nhánh của z^α.

2.2.6 Các hàm sơ cấp khác

Các hàm chỉnh hình sơ cấp đã xét: hàm phân tuyến tính, hàm e^z và $\ln z$, hàm Jukovski đóng một vai trò cơ bản trong việc khảo sát các hàm sơ cấp cơ bản khác.

Thật vậy, khi biết hàm $f(z)$ và $\varphi(z)$ ta cũng sẽ biết cả hàm $f[\varphi(z)]$ và $\varphi[f(z)]$. Có thể khẳng định rằng mọi *hàm sơ cấp cơ bản* khác đều có thể biểu diễn dưới dạng hợp một số nào đó các hàm sơ cấp mà ta đã nghiên cứu. Chẳng hạn ta xét các hàm lượng giác biến phức

$$\sin z \overset{def}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{2.31}$$

$$\cos z \overset{def}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{2.32}$$

$$\operatorname{tg} z \overset{def}{=} \frac{sinz}{\cos z}, \tag{2.33}$$

$$\operatorname{cotg} z \overset{def}{=} \frac{\cos z}{\sin z}\cdot \tag{2.34}$$

Nếu $z = x$ là số thực thì theo định nghĩa và công thức Euler ta có

$$\sin z = \frac{1}{2i}\big[(\cos x + i\sin x) - (\cos(-x) + i\sin(-x))\big] = \sin x, \quad \cos z = \cos x.$$

Như vậy khi $z = x$ là số thực hàm biến phức $\sin z$ trùng với hàm $\sin x$ quen thuộc. Tương tự như vậy đối với hàm $\cos z$ và $\operatorname{tg} z$.

Lưu ý rằng các hàm lượng giác (2.31) bảo toàn nhiều tính chất của hàm lượng giác biến thực *nhưng không phải mọi tính chất đều được bảo toàn*. Chẳng hạn $\cos i = \dfrac{e + e^{-1}}{2} \approx 1,54$; $\sin i = \dfrac{e - e^{-1}}{2i} \approx -1,17i$, nghĩa là *không thể nói* $\cos z$ *và* $\sin z$ *có môđun bị chặn*.

Hàm $w = \cos z$ được xét như là hợp của ba hàm sau đây:

$$z_1 = iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad w = \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big).$$

Do đó việc khảo sát hàm $\cos z$ được đưa về khảo sát các hàm đã được nghiên cứu.

Từ hệ thức (2.32) và các tính chất của hàm e^z ta rút ra tính $\mathbb{C}$ - khả vi của hàm $\cos z$.

Tương tự, hàm $w = \sin z$ là hợp của bốn hàm sau đây:

$$z_1 = iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad z_3 = \frac{z_2}{i}, \; w = \frac{1}{2}(z_3 + \frac{1}{z_3}\Big)$$

nên việc khảo sát hàm $w = \sin z$ cũng được đưa về khảo sát các hàm đã xét ở trên.

Từ hệ thức (2.31) và (2.32) suy ra rằng hàm $\cos z$ và $\sin z$ là những hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π và là những hàm $\mathbb{C}$ - khả vi:

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Đối với hàm $\operatorname{tg} z$, theo định nghĩa ta có:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Đó là hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở π. Bằng cách sử dụng (2.31) và (2.32) ta có

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz+1}} \cdot \tag{2.35}$$

Do đó việc khảo sát hàm $\operatorname{tg} z$ được đưa về khảo sát các hàm "trung gian" đã được xét sau đây

$$z_1 = 2iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad w = -i \cdot \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1} \cdot$$

Bây giờ, ta chuyển sang xét hàm lũy thừa tổng quát

$$w = z^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

một cách chi tiết hơn.

Ta đặt

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Hàm này là hợp của ba hàm trung gian sau đây

$$z_1 = \log z; \quad z_2 = \alpha z_1; \quad w = e^{z_2}.$$

Cũng như ở các phần trên, ta có thể định nghĩa khái niệm nhánh liên tục của hàm z^α trong miền D. Mỗi nhánh liên tục của hàm $\log z$ trong miền D sẽ xác định một nhánh liên tục của hàm z^α trong miền đó.

Dễ dàng thấy rằng ảnh của góc

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < \arg z < b, b - a \leqslant 2\pi, b, a \in \mathbb{R}\} \tag{2.36}$$

qua ánh xạ $w = z^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ là một trong các góc sau:

$$D^* = \{w : \alpha a + 2\pi\alpha k < \arg w < \alpha b + 2\pi\alpha k, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.37}$$

Thật vậy, qua ánh xạ $z_1 = \log z$ ảnh của D sẽ là một trong các băng vô hạn sau:

$$D(z_1) = \{z_1 \in \mathbb{C} : a + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

trong đó số nguyên k được xác định bằng việc chọn nhánh liên tục của $\log z$ trong góc (2.36). Qua ánh xạ $z_2 = \alpha z_1$ thì ảnh của $D(z_1)$ sẽ là băng vô hạn

$$D(z_2) = \{z_2 \in \mathbb{C} : \alpha a + 2k\pi\alpha < \operatorname{Im} z_2 < \alpha b + 2k\pi\alpha\}$$

với điều kiện $\alpha(b - a) \leqslant 2\pi$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2.2.7 Nhánh chỉnh hình của hàm đa trị

Theo định nghĩa, hàm chỉnh hình f trong miền D được gọi là một *nhánh chỉnh hình* của hàm đa trị $F(z)$ nếu tại mọi điểm $z \in D$ giá trị của hàm $f(z)$ trùng với một trong các giá trị của $F(z)$ tại điểm ấy.

Ta sẽ giải thích khái niệm nhánh chỉnh hình đối với một vài hàm đơn giản.

Trước hết ta xét hàm $w = \sqrt[n]{z}$ trong miền $D = \mathbb{C} \setminus \{[0, \infty e^{i\alpha}]\}$, trong đó $\{0, \infty e^{i\alpha}\}$ là tia $\arg z = \alpha$. Ta đã thấy rằng nhánh đơn trị liên tục của hàm $\sqrt[n]{z}$ có thể tách được trong miền D nếu trong đó hàm $\arg z$ có thể tách các nhánh đơn trị liên tục (xem **1.5**). Giả sử z_0 là điểm cố định nào đó thuộc D và $\varphi_0 = \arg z_0$ là một trong các giá trị của $\arg z$ tại z_0. Ta xét hàm

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0,z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0 \end{cases} \tag{2.38}$$

như đã làm trong **1.5**. Ta ký hiệu $w_*(z)$ là giá trị của hàm căn $\sqrt[n]{z}$ tại điểm z tương ứng với giá trị $\varphi_*(z)$ tại điểm ấy. Khi đó

$$w_*(z) = \sqrt[n]{|z|}\Big[\cos\frac{\varphi_*(z)}{n} + i\sin\frac{\varphi_*(z)}{n}\Big]. \tag{2.39}$$

Hiển nhiên, vì $\sqrt[n]{|z|}$ và $\varphi_*(z)$ là những hàm đơn trị liên tục nên $w_*(z)$ đơn trị liên tục.

Ta chứng minh rằng $w_*(z)$ là hàm chỉnh hình trong D (xem **2.2.2**).

Thật vậy, ta ký hiệu $r = |z|$, $\varphi = \varphi_*(z)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} w_*(z) &= u_*(r,\varphi) = \sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi}{n}\,,\\ \operatorname{Im} w_*(z) &= v_*(r,\varphi) = \sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi}{n}\,,\end{aligned}$$

và dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_*}{\partial\varphi} &= \frac{1}{n\sqrt[n]{r^{n-1}}}\cos\frac{\varphi}{n}\,, &\quad \frac{\partial v_*}{\partial r} &= \frac{1}{n\sqrt[n]{r^{n-1}}}\sin\frac{\varphi}{n}\,,\\ \frac{\partial u_*}{\partial\varphi} &= -\frac{\sqrt[n]{r}}{n}\sin\frac{\varphi}{n}\,, &\quad \frac{\partial v_*}{\partial\varphi} &= \frac{\sqrt[n]{r}}{n}\cos\frac{\varphi}{n}\,\cdot\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_*}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_*}{\partial\varphi}\,,\\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_*}{\partial\varphi} &= -\frac{\partial v_*}{\partial r}\,\cdot\end{aligned}$$

Đó chính là điều kiện Cauchy - Riemann. Như vậy hàm u và v thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann trong D. Vì u và v khả vi liên tục trong D theo r và φ nên $w_*(z)$ là một nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$ trong D.

Ta xét các hàm $w_m(z)$ xác định bởi đẳng thức

$$w_m(z) = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi_m(z)}{n} + i\sin\frac{\varphi_m(z)}{n}\Big) \quad m = 0,1,\dots,n-1, \tag{2.40}$$

trong đó hàm $\varphi_m(z)$ được xác định như (5.8), **1.5**. Khi $m = 0$ ta thu được hàm $\varphi_*(z)$ trong (2.38). Dễ dàng thấy rằng các hàm này đều là những nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$.

Từ lý luận trên đây và mục **1.5.3** ta có thể kết luận rằng trong miền D không chứa điểm $z = 0$ hàm đa trị $\sqrt[n]{z}$ có thể tách n nhánh chỉnh hình được xác định bởi (2.40).

Cũng tương tự như ở mục 5, dễ dàng chứng tỏ rằng trong miền D bất kỳ có chứa gốc tọa độ ta không thể tách nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $\sqrt[n]{z}$.

Nếu từ tập hợp các nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $F(z)$ ta muốn tách một nhánh xác định thì cần đặt ra điều kiện bổ sung. Điều kiện đó thông thường được cho bởi giá trị của nhánh cần tách tại một điểm nào đó của miền D.

Ví dụ 1. Cho hàm $w = \sqrt[3]{z}$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Hãy tách nhánh chỉnh hình $w_m(z)$ mà $w_m(-1) = -1$. Tìm giá trị của nhánh đó tại điểm $z = 8i$.

Vì $w_m(-1) = -1$ nên ta có thể đặt

$$\varphi_0 = \arg z_0 = \arg(-1) = 3\pi.$$

Khi đó hàm $\varphi_m(z)$ là

$$\varphi_m(z) = \begin{cases} 3\pi, & z = -1, \\ \Delta_{\gamma(-1,z)} \arg z, & z \in D, z \neq -1 \end{cases}$$

và nhánh chỉnh hình cần tách là

$$w_m(z) = \sqrt[3]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi_m(z)}{3} + i\sin\frac{\varphi_m(z)}{3}\Big).$$

Giá trị của nó tại điểm $z = 8i$ bằng

$$\begin{aligned} w_m(8i) &= \sqrt[3]{8}\Big(\cos\frac{3\pi - \frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{3\pi - \frac{\pi}{2}}{3}\Big) \\ &= 2\Big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\Big) = -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chuyển sang xét việc tách nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit. Cũng tương tự như trên, dễ dàng chứng minh rằng nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit có thể tách được trong miền D nếu trong đó có thể tách được nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$.

Cũng như trên, giả sử z_0 là điểm cố định của $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty e^{i\alpha}]$ và $\arg z_0 = \varphi_0$ là một trong các giá trị của $\operatorname{Arg} z_0$. Ta đặt

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0,z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0 \end{cases}$$

và $w_*(z)$ là giá trị của $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ tương ứng với $\arg z = \varphi_*(z)$. Khi đó

$$w_*(z) = \ln|z| + i\varphi_*(z).$$

Hiển nhiên vì trong D cả $\ln|z|$ lẫn $\varphi_*(z)$ đều đơn trị liên tục nên $w_*(z)$ đơn trị liên tục trong D. Ta còn cần chứng minh rằng $w_*(z)$ là hàm chỉnh hình trong D (xem 2.2.3).

Đặt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w_*(z) &= u_*(r, \varphi) = \log r, \\ \operatorname{Im} w_*(z) &= v_*(r, \varphi) = \varphi_*(z) = \varphi. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{\partial u_*}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v_*}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v_*}{\partial \varphi} = 1.$$

Do đó

$$\frac{\partial u_*}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_*}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_*}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v_*}{\partial r}\cdot$$

Như vậy trong D các điều kiện Cauchy - Riemann được thỏa mãn. Vì u_* và v_* khả vi liên tục trong D nên $w_*(z)$ là nhánh chỉnh hình của $w = \operatorname{Ln} z$ trong D. Cũng tương tự các hàm

$$w_m(z) = \ln|z| + i[\varphi_*(z) + 2m\pi], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

là những nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit, trong đó $w_0(z) = w_*(z)$.

Cũng tương tự như đối với hàm căn, hàm lôgarit có thể tách được thành các nhánh chỉnh hình trong miền D bất kỳ không chứa gốc tọa độ $z = 0$, còn nếu miền $D \supset \{0\}$ thì việc tách đó là không thực hiện được.

2.3 Hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác

Trong mục này ta sẽ làm quen với sự mô tả hình học đối với các hàm chỉnh hình. Cụ thể hơn ta sẽ làm quen với một trong những vấn đề cơ bản của lý thuyết hàm biến phức là việc nghiên cứu các hàm chỉnh hình bằng cách xuất phát từ đặc tính của các ánh xạ mà các hàm đó đã thực hiện - gọi là ánh xạ bảo giác.

Bài toán cơ bản của ánh xạ bảo giác là bài toán sau đây. Giả sử cho hai miền D và D^*. Hãy tìm hàm $f : D \to D^*$ thực hiện ánh xạ đơn trị một - một và bảo giác miền D lên miền D^*.

Từ đó cũng sẽ nảy sinh ra những vấn đề tồn tại và duy nhất đối với hàm f mà ta sẽ nghiên cứu kỹ trong chương VII.

2.3.1 Ý nghĩa hình học của acgumen của đạo hàm

Giả sử hàm $w = f(z) \in \mathcal{H}(D)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$. Khi đó, theo định nghĩa, ta có:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = Ae^{i\alpha}, \quad A \neq 0 \tag{2.41}$$

và từ đó suy ra

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \alpha = \arg f'(z_0). \tag{2.42}$$

Giả sử $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ là cung trơn Jordan đi qua điểm z_0. Tại điểm $z_0 = z_0(t_0)$ ta có $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Ảnh của γ qua ánh xạ $w = f(z)$ là cung $\Gamma = f(\gamma)$ đi qua điểm w_0. Cung đó có phương trình là $w = f[\gamma(t)]$, $t \in [a, b]$.

Theo quy tắc vi phân hàm hợp, ta có:

$$w' = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) \neq 0. \tag{2.43}$$

Từ hệ thức (2.43) suy ra rằng Γ có tiếp tuyến tại điểm w_0 và

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) (\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{2.44}$$

Như vậy, về mặt hình học, $\arg f'(z_0)$ bằng góc quay của cung γ tại điểm z_0 qua ánh xạ $f(z)$.

Nếu hai đường cong có tiếp tuyến γ_1 và γ_2 giao nhau tại điểm z_0 thì qua ánh xạ $w = f(z)$ tiếp tuyến của những đường cong này sẽ quay một góc như nhau và bằng $\arg f'(z_0)$. Do đó nếu góc giữa γ_1 và γ_2 bằng $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ thì góc $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)$ giữa các ảnh $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ và $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ cũng sẽ bằng $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$. Như vậy, về độ lớn và hướng góc giữa hai đường cong cắt nhau tại một điểm là bằng góc giữa các đường cong ảnh tương ứng của chúng qua ánh xạ $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$.

Định nghĩa 2.3.1. Giả sử γ_1 và γ_2 là hai đường cong đi qua điểm vô cùng $z = \infty$. Khi đó góc giữa các ảnh của γ_1 và γ_2 qua ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{z}$ tại điểm $\zeta = 0$ được gọi là góc giữa hai đường cong γ_1 và γ_2 tại $z = \infty$.

Ví dụ 1. Giả sử hai tia γ_1 và γ_2 xuất phát từ điểm hữu hạn z_0. Khi đó góc giữa γ_1 và γ_2 tại điểm $z = \infty$ bằng góc giữa hai tia đó tại điểm z_0 với dấu ngược lại.

Để đơn giản, ta đặt $z_0 = 0$. Giả sử

$$\arg z\Big|_{z\in\gamma_i} = \varphi_i, \quad i = 1, 2.$$

Khi đó góc giữa γ_1 và γ_2 (theo hướng từ γ_1 đến γ_2) tại điểm $z = 0$ là bằng $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Ảnh của các tia γ_1 và γ_2 qua ánh xạ $\zeta = 1/z$ là $\tilde{\gamma}_1$ và $\tilde{\gamma}_2$ và $\arg\zeta\Big|_{\zeta\in\tilde{\gamma}_i} = -\varphi_i$. Do đó góc giữa $\tilde{\gamma}_1$ và $\tilde{\gamma}_2$ tại điểm $\zeta = 0$ bằng $(-\varphi_2) - (-\varphi_1) = -\alpha$ và theo định nghĩa 2.3.1 góc giữa hai tia γ_1 và γ_2 tại điểm ∞ bằng $-\alpha$.

Bây giờ ta nêu ra một số điều kiện đủ về sự bảo toàn góc tại điểm z_0 qua ánh xạ $w = f(z)$ liên tục tại lân cận điểm z_0 khi $z_0 = \infty$ hay khi $f(z_0) = \infty$.

1. Giả sử $z_0 = \infty$ và $f(z_0) \neq \infty$. Hàm $\zeta = 1/z$ ánh xạ các đường cong xuất phát từ điểm $z_0 = \infty$ thành các đường cong xuất phát từ điểm $\zeta = 0$. Do đó, để có sự bảo toàn các góc tại điểm $z_0 = \infty$ qua ánh xạ $w = f(z)$ chỉ cần các góc tại điểm $\zeta = 0$ được bảo toàn qua ánh xạ $w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Và để

được điều đó ta chỉ cần có sự tồn tại đạo hàm khác 0 của hàm $f(1/\zeta)$ tại điểm $\zeta = 0$, tức là

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{f(1/\zeta) - f(\infty)}{\zeta - 0} = \lim_{z\to 0}[z(f(z) - f(\infty))] \neq 0.$$

2. Giả sử $z_0 \neq \infty$ còn $f(z_0) = \infty$. Trong trường hợp này các đường cong xuất phát từ điểm z_0 được ánh xạ thành các đường cong đi qua điểm $w = \infty$. Do đó để các góc tại điểm z_0 bảo toàn qua ánh xạ $f(z)$ điều kiện đủ là các góc tại điểm z_0 được bảo toàn qua ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{f(z)}$. Và để có điều đó, điều kiện đủ là tồn tại giới hạn hữu hạn sau đây:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{1}{f(z)} - \dfrac{1}{f(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)(z - z_0)} \neq 0.$$

3. Bây giờ giả sử $z_0 = \infty$ và $f(z_0) = \infty$. Để bảo toàn các góc tại điểm $z_0 = \infty$ qua ánh xạ $w = f(z)$ điều kiện đủ là các góc tại điểm $\zeta_0 = \dfrac{1}{z_0} = 0$ bảo toàn qua ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}$. Và để có điều đó, điều kiện đủ là tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{1/f(1/\zeta) - 1/f(\infty)}{\zeta - 0} = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{f(z)} \neq 0.$$

2.3.2 Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm

Bây giờ từ điểm $z_0 \in D$ ta kẻ tia theo hướng vectơ đơn vị $\vec{s}$ và lấy trên tia đó điểm z. Ta lập tỷ số khoảng cách giữa các ảnh $f(z_0)$ và $f(z)$ với khoảng cách giữa các điểm z_0 và z.

Giới hạn của tỷ số này khi z dần đến z_0 theo tia được gọi là *hệ số co giãn* của ánh xạ f tại điểm z_0 theo hướng vectơ $\vec{s}$ và ký hiệu là $m_f^{\vec{s}}(z_0)$. Nếu $z = z_0 + \vec{s}t$, $0 < t < \infty$ thì

$$m_f^{\vec{s}}(z_0) = \lim_{t\to 0}\frac{|f(z_0 + \vec{s}t) - f(z_0)|}{|\vec{s}t|} = |f'(z_0)|.$$

Như vậy, nếu hàm f khả vi tại điểm z_0 thì độ co giãn tuyến tính tại điểm z_0 theo hướng $\vec{s}$ qua ánh xạ f, $f'(z_0) \neq 0$ là bằng $|f'(z_0)|$, $(m_f^{\vec{s}}(z_0) = |f'(z)_0)|)$ và không phụ thuộc vào hướng $\vec{s}$.

Bây giờ giả sử γ là đường cong Jordan như trong **1.** và $\Gamma = f(\gamma)$ là ảnh của nó.

$$|dz_0| = (dx_0^2 + dy_0^2)^{1/2}dt = ds_0,$$
$$|dw_0| = (du_0^2 + dv_0^2)^{1/2}dt = d\sigma_0$$

là những yếu tố độ dài lần lượt của γ và Γ tại các điểm z_0 và w_0 tương ứng nên

$$|f'(z_0)| = \frac{d\sigma_0}{ds_0}\cdot \tag{2.45}$$

Hệ thức (2.45) chứng tỏ rằng qua ánh xạ $w = f(z)$ hệ số co giãn tuyến tính tại điểm z_0 của một cung γ bất kỳ đi qua điểm đó không phụ thuộc vào dạng và hướng của γ.

2.3.3 Ánh xạ bảo giác

Bây giờ ta có thể phát biểu định nghĩa ánh xạ bảo giác.

Định nghĩa 2.3.2. Ánh xạ tôpô

$$w = f(z) = u(z) + iv(z),$$

biến miền D của mặt phẳng phức (z) lên miền D^* của mặt phẳng phức (w) được gọi là *ánh xạ bảo giác trong miền D* nếu tại mỗi điểm $z \in D$, góc giữa các đường cong được bảo toàn (cả về độ lớn và hướng) và độ co giãn là đều.

Từ **2.3.1** và **2.3.2** ta có thể phát biểu những điều kiện mà hàm biến phức cần thỏa mãn để nó là ánh xạ bảo giác.

Định lý 2.3.1. *Giả sử ánh xạ tôpô $w = f(z)$ chỉnh hình trong miền D và $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in D$. Khi đó ánh xạ $w = f(z)$ bảo giác trong miền D.*

Chứng minh. Vì $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$ nên độ co giãn là đều qua ánh xạ đó. Ta cần chứng minh rằng góc giữa các đường cong được bảo toàn qua ánh xạ đó. Thật vậy, giả sử z_0 là điểm tùy ý thuộc D, γ_1 và γ_2 là hai cung trơn Jordan xuất phát từ z_0, ở đây $\gamma_1 : z = z_1(t)$, $t \in [a, b]$, $z_0 = z_1(t_0)$, $z_1'(t_0) \neq 0$ và $\gamma_2 : z = z_2(\tau)$, $\tau \in [a_2, b_2]$, $z_2 = z_2(\tau_0)$, $z_2'(\tau_0) \neq 0$, và góc giữa γ_1 và γ_2 là $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$. Ta ký hiệu ảnh của γ_1 và γ_2 tương ứng qua ánh xạ f là $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$, $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$. Hai cung Γ_1 và Γ_2 đều đi qua điểm $w_0 = f(z_0)$ và có phương trình tương ứng là $w_1(t) = f[z_1(t)]$, $z_1(t_0) = z_0$ và $w_2(\tau) = f[z_2(\tau)]$, $z_2(\tau_0) = z_0$. Theo giả thiết ta có $w_1'(t_0) \neq 0$ và $w_2'(\tau_0) \neq 0$. Điều đó chứng tỏ rằng tại điểm $w_0 = f(z_0)$ hai cung Γ_1 và Γ_2 có tiếp tuyến. Ta ký hiệu góc giữa các ảnh Γ_1 và Γ_2 là $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Trên cơ sở (2.45) ta có

$$\begin{aligned} \arg f(z_0) &= \arg w_1(t_0) - \arg z_1'(t_0) (\operatorname{mod} 2\pi), \\ \arg f(z_0) &= \arg w_2(\tau_0) - \arg z_2(\tau_0) (\operatorname{mod} 2\pi). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Từ (2.46) suy ra rằng với sự sai khác số hạng $2k\pi$ ta có

$$\arg w_1'(t_0) - \arg w_1'(\tau_0) = \arg z_1'(t_0) - \arg z_2'(\tau_0)$$

hay là

$$\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) = \varphi(\gamma_1, \gamma_2).$$

□

Từ định lý vừa chứng minh suy ra rằng *tính chỉnh hình và đạo hàm khác không là điều kiện đủ để hàm f là ánh xạ bảo giác*. Điều đó được luận chứng trong định lý sau đây.

Định lý 2.3.2. *Giả sử hàm $w = f(z)$ thực hiện ánh xạ bảo giác miền D lên miền D^*. Khi đó hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f'(z) \neq 0$ với mọi $z \in D$.*

Chứng minh. Đặt $\Delta w = \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\quad \forall z, z + \Delta z \in D$. Theo điều kiện của định lý, f là bảo giác nên tại điểm $z_0 \in D$ bất kỳ ánh xạ

$w = f(z)$ có tính chất bảo toàn góc và độ co giãn đều. Do đó với mọi z_1, z_2 thuộc lân cận của z_0, với sự sai khác đại lượng vô cùng bé, ta có:

a) $$\arg\Delta w_2 - \arg\Delta w_1 = \arg\Delta z_2 - \arg\Delta z_1$$

và do đó

$$\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha, \tag{2.47}$$

b)

$$\left|\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}\right| = \left|\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}\right| = A \neq 0, \tag{2.48}$$

trong đó

$$\Delta z_1 = z_1 - z_0, \quad \Delta z_2 = z_2 - z_0,$$
$$\Delta w_1 = f(z_1) - f(z_0), \quad \Delta w_2 = f(z_2) - f(z_0).$$

Từ hệ thức (2.47), (2.48), với sự sai khác đại lượng vô cùng bé, ta có

$$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = A \cdot e^{i\alpha}. \tag{2.49}$$

Vì z_1, z_2 là những điểm tùy ý trong lân cận điểm z_0 nên hệ thức (2.49) chứng tỏ tồn tại

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

và do đó tồn tại đạo hàm $f'(z_0)$. Vì $A \neq 0$ nên

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0.$$

Vì z_0 là điểm tùy ý thuộc D, nên f chỉnh hình trong D. □

2.3.4 Ánh xạ liên tục và ánh xạ chỉnh hình

Từ các mục **2.3.1 - 2.3.3** của tiết này, ta thấy rằng ánh xạ chỉnh hình với đạo hàm khác 0 được đặc trưng bởi hai tính chất

1. Tính chất bảo toàn góc;

2. Độ co giãn đều.

Một bài toán được đặt ra tự nhiên là:

I) Mọi ánh xạ liên tục

$$w = u + iv \tag{2.50}$$

có tính chất bảo toàn góc có phải đều là chỉnh hình không ? (Nói cách khác: tính chất bảo toàn góc có kéo theo sự co giãn đều không ?)

Hoặc bài toán tương tự:

II) Mọi ánh xạ liên tục có độ co giãn đều có phải là chỉnh hình hay không ?

Cả hai vấn đề trên đây đều có lời giải hợp lý nếu ngay từ đầu ta giả thiết rằng đối với ánh xạ đã cho (2.50) các hàm u và v đều có đạo hàm riêng liên tục.

Định lý 2.3.3. *Giả sử phần thực $u(z)$ và phần ảo $v(z)$ của ánh xạ $f(z) = u(z) + iv(z)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và ánh xạ $f(z)$ có tính chất bảo toàn góc tại mọi điểm $z \in D$. Khi đó $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f'(z) \neq 0$.*

Chứng minh. Ta có

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} e^{-2i\varphi},$$

trong đó $\varphi = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z$.

Theo điều kiện của định lý, khi cố định z thì $\arg\Big(\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}\Big)$ không phụ thuộc vào φ nên

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0.$$

□

Định nghĩa 2.3.3. Ánh xạ $\mathbb{R}^2$ - khả vi f được gọi là *phản chỉnh hình (đối chỉnh hình)* trong miền D nếu

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

tại mọi điểm $z \in D$.

Hiển nhiên rằng nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ thì hàm $\overline{f}$ là phản chỉnh hình trong D.

Định lý 2.3.4. *Giả sử $u(z)$ và $v(z)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền D và tại mọi điểm $z \in D$ nó có độ co giãn đều, tức là $\left|\lim \dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| \neq 0$ không phụ thuộc vào φ. Khi đó ánh xạ $w = f = u + iv$ là chỉnh hình hoặc phản chỉnh hình.*

Chứng minh. Từ hệ thức (2.7) ta có

$$\left|\lim \frac{\Delta w}{\Delta z}\right|^2 = \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \overline{\frac{\partial w}{\partial z}} e^{2i\varphi}\right\}.$$

Từ điều kiện của định lý ta rút ra

$$\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \overline{\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}} = 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng hoặc $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0$, $\forall\, z \in D$ hoặc $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\forall\, z \in D$.

Thật vậy, nếu cả hai hệ thức vừa nói đồng thời được thỏa mãn tại một điểm nào đó thuộc D thì các đạo hàm riêng của f theo x và y đều bằng 0 tại điểm đó. Nhưng điều đó không thể xảy ra do điều kiện của định lý. Vì các hàm $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ đều liên tục nên các tập hợp

$$E_1 = \left\{z \in D : \frac{\partial w}{\partial z} = 0\right\}, \quad E_2 = \left\{z \in D : \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0\right\}$$

đều là những tập hợp đóng trong D. Như vậy miền D là hợp của hai tập hợp đóng không giao nhau E_1 và E_2. Do D liên thông nên một trong hai tập hợp này phải là tập hợp trống. □

Trong trường hợp nếu xét ánh xạ liên tục tùy ý nào đó thì hai vấn đề đặt ra trên đây sẽ trở nên rất khó khăn. Tuy nhiên, bằng cách ứng dụng các phương pháp của lý thuyết hàm biến thực đối với bài toán I, D. Menchoff[1] đã chứng minh được rằng

[1]D. Menchoff, Sur la représentation conforme des domaines planes, Math. Ann. 1926.

Nếu ánh xạ đơn diệp liên tục $w = f(z)$ có tính chất bảo toàn góc thì $f(z)$ là hàm chỉnh hình.

Thế nhưng đến nay người ta chưa rõ tính đơn diệp trong phép chứng minh định lý trên cần thiết đến mức nào. Còn đối với bài toán II thì nó đã được giải quyết trọn vẹn. H. Bohr[2] đã chứng minh được rằng

Nếu ánh xạ đơn diệp liên tục $w = f(z)$ có độ co giãn đều tại mọi điểm $z \in D$ thì hoặc $f(z)$ là hàm chỉnh hình hoặc $f(z)$ là phản chỉnh hình.

Ở đây, giả thiết "đơn diệp" đóng vai trò cốt yếu. Thật vậy, xét ví dụ hàm

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{khi } \operatorname{Im} z \geqslant 0, \\ \overline{z} & \text{khi } \operatorname{Im} z \leqslant 0. \end{cases}$$

Hàm $f(z)$ liên tục trên $\mathbb{C}$ nhưng không đơn diệp. Hàm $f(z)$ có độ co giãn đều vì rằng

$$\begin{aligned} \lim\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| &= \lim\left|\frac{\Delta z}{\Delta z}\right| = 1 \text{ khi } \operatorname{Im} z \geqslant 0, \\ \lim\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| &= \lim\left|\frac{\Delta \overline{z}}{\Delta z}\right| = 1 \text{ khi } \operatorname{Im} z \leqslant 0. \end{aligned}$$

Thế nhưng $f(z)$ không chỉnh hình và cũng không phản chỉnh hình trong mặt phẳng phức (z).

2.4 Các đẳng cấu sơ cấp

Giả sử D là miền của mặt phẳng biến phức z, D^* là miền của mặt phẳng biến phức w. Theo định nghĩa, *phép đồng phôi $f : D \to D^*$ được gọi là một phép đẳng cấu nếu cả ánh xạ f lẫn ánh xạ ngược f^{-1} đều chỉnh hình.* Phép đẳng cấu miền D lên chính nó được gọi là *phép tự đẳng cấu.*

Về sau ánh xạ bảo giác (đơn diệp) f biến miền D lên miền D^* còn được gọi là *đẳng cấu (bảo giác)*, còn D và D^* được gọi là những *miền đẳng cấu*

[2]H. Bohr, Über streckentreue und conforme Abbildung, Math. z., 1918, s, 403

với nhau. Trong mục này ta sẽ trình bày các đẳng cấu đơn giản nhất thực hiện bởi các hàm sơ cấp hoặc tổ hợp của các hàm ấy cùng một ví dụ để tiện làm quen với cách giải bài toán tìm các đẳng cấu biến miền này lên miền kia. Đồng thời thông qua việc trình bày đó, chúng tôi muốn đi đến một kết luận là: quá trình giải bài toán tìm đẳng cấu biến một miền cho trước lên miền khác được tiến hành gần giống như quá trình tìm nguyên hàm của một hàm cho trước mà ở đây các ánh xạ sơ cấp sẽ được trình bày có vai trò như một "bảng tích phân cơ bản".

Khi giải các bài toán ánh xạ bảo giác ta thường sử dụng hai tính chất sau đây của ánh xạ bảo giác (sẽ được trình bày kỹ trong **7.1**):

(i) Ánh xạ ngược với ánh xạ bảo giác là ánh xạ bảo giác.

(ii) Hợp của hai ánh xạ bảo giác là ánh xạ bảo giác.

2.4.1 Đẳng cấu phân tuyến tính

Ánh xạ phân tuyến tính đã được đề cập đến trong chương I. Ở đây, ta sẽ trình bày các tính chất cơ bản nhất của ánh xạ đó.

Ánh xạ phân tuyến tính được xác định bởi hệ thức

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{2.51}$$

trong đó a, b, c, d là các số phức.

Với điều kiện $ad - bc \neq 0$ ta có $w \not\equiv \text{const}$. Trong công thức (2.51) nếu $c = 0$ còn $d \neq 0$ thì

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \tilde{a}z + \tilde{b}.$$

Đó là một hàm nguyên.

Định lý 2.4.1. *Ánh xạ phân tuyến tính* (2.51) *là một phép đồng phôi biến* $\overline{\mathbb{C}}$ *lên* $\overline{\mathbb{C}}$.

Chứng minh. 1. Trường hợp $c = 0$ là hiển nhiên.

2. Ta xét trường hợp $c \neq 0$. Giải phương trình (2.51) đối với z ta có

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0. \tag{2.52}$$

Đó là hàm ngược của (2.51). Ánh xạ (2.52) đơn trị trong mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ và là ánh xạ phân tuyến tính. Do đó (2.51) đơn trị một - một trên $\overline{\mathbb{C}}$.

Tính liên tục của (2.51) tại các điểm $z \neq -\dfrac{d}{c}$, ∞ là hiển nhiên. Bằng cách đặt

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\Big(-\frac{d}{c}\Big) = \infty$$

ta thấy rằng (2.51) liên tục trên $\overline{\mathbb{C}}$. Định lý được chứng minh. □

Định lý 2.4.2. *Ánh xạ phân tuyến tính bảo giác khắp nơi trên* $\overline{\mathbb{C}}$.

Chứng minh. 1. Đối với $z \neq -d/c$, ∞ tính bảo giác được suy từ chỗ là tại các điểm ấy

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

2. Bây giờ giả sử hai đường cong γ_1 và γ_2 đi qua điểm $z = -d/c$ và α là góc giữa γ_1 và γ_2 tại điểm ấy. Từ **2.3.1** suy ra rằng góc giữa các ảnh γ_1^* và γ_2^* của γ_1 và γ_2 tương ứng qua ánh xạ (2.51) tại điểm $w = \infty$ (tương ứng với $z = -d/c$) là bằng α vì

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{1}{\dfrac{az + b}{cz + d}(z + d/c)} = \lim_{z \to -d/c} \frac{c}{az + b} \neq 0.$$

Trường hợp $z = \infty$ cũng được chứng minh tương tự. □

Định nghĩa 2.4.1. Ánh xạ phân tuyến tính biến miền D lên miền D^* được gọi là *đẳng cấu phân tuyến tính*, còn các miền D và D^* được gọi là những miền đẳng cấu phân tuyến tính với nhau.

Định lý 2.4.3. *Tập hợp mọi đẳng cấu phân tuyến tính lập thành một nhóm, nghĩa là*

1. *Hợp (tích) các đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.*
2. *Ánh xạ ngược của đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.*

Chứng minh. Điều khẳng định 2) là hiển nhiên.

Ta chứng minh 1). Giả sử

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0,$$
$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} w &= \frac{a_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)} = \frac{az + b}{cz + d}, \end{aligned}$$

trong đó $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$. □

Nhận xét. Hiển nhiên rằng nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính là nhóm không giao hoán. Thật vậy, giả sử $w(z) = \dfrac{1}{z}$, $\varphi(z) = z + 1$.

Khi đó

$$w(\varphi(z)) = \frac{1}{z+1}, \quad \varphi(w(z)) = \frac{1}{z} + 1.$$

Do đó

$$w(\varphi(z)) \neq \varphi(w(z)).$$

Vì qua phép chiếu nổi cả đường thẳng lẫn đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đều tương ứng với đường tròn trên mặt cầu Riemann nên ta có thể quy ước gọi đường thẳng hay đường tròn trên mặt phẳng phức đều là "đường tròn" trên $\overline{\mathbb{C}}$ (ta xem đường thẳng trên $\mathbb{C}$ là đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đi qua điểm ∞), và gọi hình tròn, phần ngoài hình tròn và nửa mặt phẳng (hình tròn với bán kính vô cùng) đều là "hình tròn" trên $\overline{\mathbb{C}}$.

$$\begin{aligned} S(a,R) &= \big\{|z-a| < R\big\} \text{ – hình tròn,}\\ S^*(a,R) &= \big\{|z-a| > R\big\} \text{ – phần ngoài hình tròn,}\\ P(R,\varphi) &= \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > R\big\} \text{ là nửa mặt phẳng.}\end{aligned}$$

Thật vậy, đặt $e^{+i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $z = x + iy$, ta có

$$P(R,\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\cos\varphi + y\sin\varphi > R\}.$$

Đó là nửa mặt phẳng;

Định lý 2.4.4. *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến "hình tròn" ("đường tròn") thành "hình tròn" (tương ứng thành "đường tròn").*

Nói cách khác: "hình tròn" và "đường tròn" đều là bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.

Chứng minh. Ánh xạ phân tuyến tính có thể biểu diễn dưới dạng hợp của các ánh xạ:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\xi; \quad \xi = \frac{1}{\zeta}; \quad \zeta = z + \frac{d}{c},$$

trong đó có hai ánh xạ tuyến tính và ánh xạ $\xi = 1/\zeta$. Đối với các ánh xạ tuyến tính định lý 2.4.4 là hiển nhiên. Ta chỉ cần xét phép nghịch đảo $w = \dfrac{1}{z}$.

1. Ta xét trường hợp hình tròn $S(a,R)$. Ảnh của nó sẽ là

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{1}{w} - a\Big| < R, \quad |1-aw| < R|w|, \quad |1-aw|^2 < R^2|w|^2\\ &\qquad \Rightarrow 1 - 2\mathrm{Re}(aw) + |a^2||w|^2 < R^2|w|^2.\end{aligned}$$

Tiếp theo ta xét ba trường hợp sau

a) $|a| > R$. Ta có

$$\begin{aligned}
&(|a|^2 - R^2)|w|^2 - 2\mathrm{Re}(aw) + 1 < 0\\
\Rightarrow &|w|^2 - 2\mathrm{Re}\frac{aw}{|a|^2 - R^2} + \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2}\\
&< \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2} - \frac{1}{|a|^2 - R^2}\\
\Rightarrow &\Big|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\Big|^2 < \frac{R^2}{(|a|^2 - R^2)^2}\\
\Rightarrow &\Big|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\Big| < \frac{R}{|a|^2 - R^2}\cdot
\end{aligned}$$

Đó là hình tròn.

b) Giả sử $|a| < R$. Tương tự như trên ta có

$$\Big|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\Big| > \frac{R}{R^2 - |a|^2}\cdot$$

c) Giả sử $|a| = R$. Đặt $a = |a|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg a$, ta có:

$$\mathrm{Re}(aw) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > \frac{1}{2|a|}\cdot$$

Đó là nửa mặt phẳng.

2. Đối với phần ngoài hình tròn $A^*(a, R)$ định lý được xét tương tự.

3. Bây giờ ta xét phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > -R$, $R > 0$. Ảnh của nó sẽ là

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big(e^{-i\varphi}\frac{1}{w}\Big) > -R \Rightarrow \mathrm{Re}\Big(e^{-i\varphi}\frac{\overline{w}}{|w|^2}\Big) > -R\\
\Rightarrow \mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > -R|w|^2,
\end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned}
&2R|w|^2 + 2\mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > 0\\
\Rightarrow &|w|^2 + 2\mathrm{Re}\Big(\frac{e^{i\varphi}}{2R}w\Big) + \frac{1}{4R^2} > \frac{1}{4R^2}\\
\Rightarrow &\Big|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\Big|^2 > \frac{1}{4R^2}, \quad \Big|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\Big| > \frac{1}{2R}\cdot
\end{aligned}$$

Đó là phần ngoài hình tròn. Phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > R > 0$ được xét tương tự. □

Nhận xét 2.4.1. Trong mọi trường hợp, điểm a được ánh xạ thành điểm $1/a$. Điểm này thuộc ảnh hình tròn $S(a, R)$ cùng với một lân cận nào đó của nó.

Định lý 2.4.5. *Ánh xạ phân tuyến tính biến miền thành miền.*

Chứng minh. Giả sử B là miền, $w = \varphi(z)$ là ánh xạ phân tuyến tính, $D = \varphi(B)$.

1. Chứng minh D là tập hợp mở. Với mọi $w_0 \in D$, tồn tại duy nhất điểm $z_0 \in B$ sao cho $\varphi(z_0) = w_0$. Giả sử $U(z_0) \subset B$ là lân cận của điểm z_0 (hình tròn với tâm z_0 nếu $z_0 \neq \infty$ hoặc phần ngoài hình tròn nếu $z_0 = \infty$). Khi đó theo định lý 2.4.4 ta có $\varphi(U(z_0))$ là "hình tròn" chứa điểm w_0 cùng với một lân cận nào đó của nó. Như vậy w_0 là điểm trong của D và do đó D là tập hợp mở.

2. Chứng minh D là tập hợp liên thông. Vì B là tập liên thông nên từ định lý 2.4.1 suy ra rằng D là tập hợp liên thông.

Như vậy D là tập hợp mở liên thông, nghĩa là: D là một miền. □

Định lý 2.4.1, 2.4.2 và 2.4.4 là những tính chất đặc trưng của ánh xạ phân tuyến tính.

Ngoài tính bảo giác và bảo toàn đường tròn, nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính còn có những bất biến khác nữa.

Đẳng cấu phân tuyến tính (2.51) chứa ba tham số phức là tỷ số của ba trong bốn hệ số a, b, c, d với hệ số thứ tư ($\neq 0$). Các tham số này được xác định đơn trị bởi điều kiện: ba điểm cho trước z_1, z_2, z_3 của mặt phẳng phức (z) biến thành ba điểm w_1, w_2, w_3 của mặt phẳng phức (w). Điều đó được suy ra từ định lý sau đây.

Định lý 2.4.6. *Tồn tại đẳng cấu phân tuyến tính duy nhất biến ba điểm khác nhau $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ thành ba điểm khác nhau $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tương ứng. Đẳng cấu đó được xác định theo công thức*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \tag{2.53}$$

Chứng minh. 1.*Tính duy nhất.* Giả sử ta có hai đẳng cấu $w_1(z)$ và $w_2(z)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý. Giả sử $\zeta_2(w)$ là ánh xạ ngược của $w_2(z)$.

Ta xét ánh xạ $\zeta_2[w_1(z)]$. Đó là một đẳng cấu phân tuyến tính. Đẳng cấu này có ba điểm bất động z_1, z_2 và z_3 vì

$$\begin{aligned} w_1(z_k) &= w_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ \zeta_2(w_k) &= z_k, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Do đó nếu đặt $\zeta_2[w_1(z)] = \dfrac{az + b}{cz + d}$ thì

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

hay là

$$cz_k^2 + (d - a)z_k - b = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Đa thức bậc hai ở vế trái chỉ có thể có ba nghiệm khác nhau ($z_1 \neq z_2 \neq z_3$) khi mọi hệ số của nó đều bằng 0, tức là $a = d$, $b = c = 0$ và $\zeta_2[w_1(z)] \equiv z$ hay là $w_1(z) \equiv w_2(z)$.

2. Đẳng cấu phân tuyến tính thỏa mãn điều kiện của định lý được xác định theo công thức (2.53). Thật vậy, giải phương trình (2.53) đối với w ta thu được hàm phân tuyến tính. Ngoài ra khi thế cặp $z = z_1$ và $w = w_1$ vào (2.53) thì cả hai vế của (2.53) đều bằng 0. Thế cặp $z = z_3$ và $w = w_3$ vào (2.53) ta thu được cả hai vế đều bằng 1 và cuối cùng, thế cặp $z = z_2$ và $w = w_2$ ta thu được cả hai vế đều bằng ∞. □

Trong hình học, biểu thức

$$\lambda = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

được gọi là *tỷ số phi điều hòa* của bốn điểm z, z_1, z_2 và z_3.

Nếu bốn điểm z_1, z_2, z, z_3 nằm trên một đường tròn (hoặc đường thẳng) thì tỷ số phi điều hòa là một số thực. Thật vậy

a) Nếu các điểm z_1, z_2, z, z_3 nằm trên đường thẳng $\zeta = \zeta_0 + te^{i\alpha}$, $-\infty < t < \infty$ ta có: $z_1 = \zeta_0 + t_1e^{i\alpha}$, $z_2 = \zeta_0 + t_2e^{i\alpha}$, $z = \zeta_0 + t_0e^{i\alpha}$, $z_3 = \zeta_0 + t_3e^{i\alpha}$ và từ đó

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\\ &= \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2} : \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Nếu các điểm z, z_1, z_2, z_3 nằm trên đường tròn $\zeta = \zeta_0 + re^{it}$, $r > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, ta có $z_1 = \zeta_0 + re^{i\varphi_1}$, $z_2 = \zeta_0 + re^{i\varphi_2}$, $z_3 = \zeta_0 + re^{i\varphi_3}$ và từ đó ta có

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_2}} : \frac{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_2}}\\ &= \frac{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}}\Big[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}\Big]}{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2}}\Big[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}\Big]} : \frac{e^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}\Big[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}\Big]}{e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}}\Big[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}}\Big]}\\ &= \frac{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_2}{2}} : \frac{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Từ định lý 2.4.6 ta rút ra một tính chất quan trọng nữa của đẳng cấu phân tuyến tính.

Hệ quả 2.4.1. *Tỷ số phi điều hòa là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

Định nghĩa 2.4.2. 1. Hai điểm z và z^* được gọi là *đối xứng với nhau qua đường tròn* $\Gamma = \big\{|z - z_0| = R\big\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ nếu chúng có các tính chất sau:

a) z và z^* cùng nằm trên một tia đi từ z_0;

b) $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.

2. Mọi điểm trên đường tròn Γ được xem là đối xứng với chính nó qua Γ.

Từ định nghĩa 2.4.2 suy ra rằng các điểm đối xứng qua đường tròn Γ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}} \cdot$$

Thật vậy, từ biểu thức vừa viết suy ra

$$|w - z_0|\ |z - z_0| = R^2$$

và

$$\arg(w - z_0) = \arg(z - z_0).$$

Trong hình học sơ cấp ta biết rằng hai điểm z và z^* đối xứng với nhau qua đường tròn Γ khi và chỉ khi mọi đường tròn $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ đi qua z và z^* đều trực giao với Γ.

Ta có định lý sau.

Định lý 2.4.7. *Tính đối xứng tương hỗ giữa các điểm là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

Chứng minh. Kết luận của định lý được suy từ định lý 2.4.2 và 2.4.4. □

Từ sự bất biến của tính đối xứng giữa các điểm suy ra rằng trong trường hợp khi đường tròn biến thành đường thẳng, tính đối xứng trùng với khái niệm đối xứng thông thường.

Ta minh họa việc áp dụng tính bất biến của các điểm đối xứng qua đẳng cấu phân tuyến tính bằng các định lý sau đây.

Định lý 2.4.8. *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị đều có dạng*

$$w = e^{i\lambda}\frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0, \tag{2.54}$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là số thực tùy ý.

Chứng minh. Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ $(\operatorname{Im}\alpha > 0)$.

Ta nhận xét rằng điểm $w = 0$ và $w = \infty$ sẽ tương ứng với các giá trị liên hợp của z, do đó $c \neq 0$ (vì nếu $c = 0$ thì điểm ∞ sẽ tương ứng với điểm ∞).

Các điểm $w = 0$, $w = \infty$ sẽ tương ứng với các điểm $-\dfrac{b}{a}$ và $-\dfrac{d}{c}$. Do đó có thể viết $-\dfrac{b}{a} = \alpha$, $-\dfrac{d}{c} = \overline{\alpha}$ và $w = \dfrac{a}{c}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\cdot$

Vì các điểm của trục thực có ảnh nằm trên đường tròn đơn vị, tức là $|w| = 1$ khi $z = x \in \mathbb{R}$, cho nên

$$\left|\frac{a}{c}\ \frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| = 1$$

và $a = ce^{i\lambda}$. Như vậy $w = e^{i\lambda}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\cdot$

Ta chứng minh rằng đó là đẳng cấu phải tìm. Thật vậy, nếu $z = x \in \mathbb{R}$ thì hiển nhiên $|w| = 1$. Nếu $\operatorname{Im} z > 0$ thì z gần α hơn so với $\overline{\alpha}$ (tức là $|z-\alpha| < |z-\overline{\alpha}|$) và do đó $|w| < 1$. □

Nhận xét 2.4.2. Trong ánh xạ (2.54) góc quay của các đường cong tại điểm α là bằng $\lambda - \dfrac{\pi}{2}$ vì từ (2.54) ta có

$$arg\, w'(\alpha) = \lambda - \frac{\pi}{2}\cdot$$

Định lý 2.4.9. *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến hình tròn* $\{|z| < 1\}$ *lên hình tròn* $\{|w| < 1\}$ *đều có dạng*

$$w = e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}, \tag{2.55}$$

trong đó $|\alpha| < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *là số thực tùy ý.*

Chứng minh. Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ biến hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ $(|\alpha| < 1)$. Theo tính chất bảo toàn điểm đối xứng, các điểm $w = 0$, $w = \infty$ tương ứng với các điểm liên hợp $z = \alpha$ và $z = \dfrac{1}{\overline{\alpha}}$, $|\alpha| < 1$. Do đó:

$$-\frac{b}{a} = \alpha, \quad -\frac{d}{c} = \frac{1}{\overline{\alpha}}, \quad |\alpha| < 1,$$

và

$$w = \frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}} = \frac{a\overline{\alpha}}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$$
$$= -\frac{a\overline{\alpha}}{c}\,\frac{z-\alpha}{1-\alpha\overline{z}}\cdot$$

Vì các điểm của đường tròn đơn vị phải biến thành các điểm của đường tròn đơn vị nên $|w| = 1$ khi $|z| = 1$. Vì $z\cdot\overline{z} = |z|^2$ nên $z\overline{z} = 1$ khi $|z| = 1$. Vì số $1-\overline{\alpha}z$ và $1-\alpha\overline{z}$ liên hợp với nhau và $|1-\overline{\alpha}z| = |1-\overline{\overline{\alpha}z}|$ nên nếu $|z| = 1$ thì

$$|1-\overline{\alpha}z| = |1-\alpha\overline{z}|\cdot|z| = |z-\alpha\overline{z}z| = |z-\alpha|.$$

Do đó khi $|z| = 1$ thì ta có:

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = 1.$$

Nhưng khi đó $|w| = 1$ cho nên $\left|\dfrac{a\overline{\alpha}}{c}\right| = 1$ và $\dfrac{a\overline{\alpha}}{c} = e^{i\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Như vậy ta thu được (2.55).

Ta cần chứng minh rằng đó là đẳng cấu muốn tìm. Thật vậy nếu $z = e^{i\theta}$ và $\alpha = r_1e^{i\beta}$ thì

$$|w| = \left|\frac{e^{i\theta}-r_1e^{i\beta}}{1-r_1e^{-i\beta}\cdot e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{1-r_1e^{i\beta}e^{-i\theta}}{1-r_1e^{-i\beta}e^{i\theta}}\right| = 1.$$

Nếu $z = re^{i\theta}$ $(r<1)$ thì

$$|z-a|^2 - |1-\overline{\alpha}z|^2 = r^2 - 2rr_1\cos(\theta-\beta) + r_1^2 - (r_1^2r^2 - 2r_1r\cos(\theta-\beta)+1)$$
$$= (r^2-1)(1-r_1^2) < 0$$

và do đó $|z-\alpha|^2 - |1-\overline{\alpha}z|^2 < 0$ và $|w| < 1$. □

Nhận xét 2.4.3. Vì

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\alpha} = e^{i\lambda}\frac{1}{1-|\alpha|^2}, \quad |\alpha| < 1,$$

cho nên về mặt hình học λ bằng góc quay của ánh xạ (2.55) tại điểm α:

$$\lambda = \left[\arg \frac{dw}{dz}\right]_{z=\alpha}.$$

Từ công thức (2.55) ta còn rút ra hệ thức

$$\left(\left|\frac{dw}{dz}\right|\right)_{z=\alpha} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

và do đó độ giãn dần đến ∞ khi điểm α dần đến biên của hình tròn đơn vị.

Nhận xét 2.4.4. Phép đẳng cấu biến hình tròn $\{|z| < R\}$ lên hình tròn $\{|w| < R'\}$ có dạng

$$w = RR'e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - R^2}, \quad |\alpha| < R, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 1. Giả sử $U_1 = \{|z| < 1\}$, $U_2 = \{|z-1| < 1\}$ và $D = U_1 \cap U_2$. Tìm đẳng cấu biến miền D lên nửa mặt phẳng trên.

Giải. Giao điểm của các cung tròn giới hạn miền D là các điểm sau:

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^* = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Giả sử cung tròn đi qua điểm $z = 1$ được ký hiệu là δ_1 và cung tròn đi qua điểm $z = 0$ là δ_2. Ta áp dụng các ánh xạ trung gian sau

1. Ánh xạ

$$z_1 = \frac{z - \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

biến miền đã cho D thành một góc trong mặt phẳng z_1 với đỉnh là $z_1 = 0$. Vì góc giữa hai cung tròn δ_1 và δ_2 tại các điểm a cũng như a^* đều bằng $\dfrac{2\pi}{3}$

nên độ mở của góc vừa thu được bằng $\frac{2\pi}{3}$. Dễ dàng thấy rằng

$$z_1(1) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1(0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

và do đó góc - ảnh thu được có cạnh đi qua điểm $z_1(1)$ và $z_1(0)$. Ta ký hiệu góc đó kà $D(z_1)$.

2. Ánh xạ quay $z_2 = e^{\frac{-2\pi i}{3}} z_1$ biến góc $D(z_1)$ thành góc có một cạnh trùng với phần dương của trục thực, còn cạnh kia đi qua điểm $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

3. Ánh xạ cần tìm có dạng $w = z_2^{3/2}$

$$\left(\text{góc có độ mở } \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi\,!\right)$$

Hợp nhất 1) - 3) ta thu được

$$w = -\left(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}}\right)^{3/2}$$

và hiển nhiên đó chỉ là một trong các hàm thực hiện ánh xạ phải tìm.

Ví dụ 2. Ánh xạ miền D là góc $\{0 < \arg z < \pi\beta, 0 < \beta < 2\}$ với nhát cắt theo một cung của đường tròn đơn vị từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\alpha\pi}$, $0 < \alpha < \beta$ (hãy vẽ hình) lên nửa mặt phẳng trên.

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây

1. Ánh xạ $z_1 = z^{1/\beta}$ biến góc đã cho thành góc $D(z_1)$ có độ mở bằng π với nhát cắt thuộc đường tròn đơn vị đi từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\frac{\alpha}{\beta}\pi}$.

2. Ánh xạ phân tuyến tính

$$z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$$

biến miền $D(z_1)$ thành nửa mặt phẳng trên với nhát cắt theo trục ảo từ gốc tọa độ đến điểm $i\text{tg}\frac{\alpha}{2\beta}\pi$. Ta ký hiệu miền ảnh đó là $D(z_2)$.

3. Ánh xạ $z_3 = z_2^2$ biến miền $D(z_2)$ thành mặt phẳng với nhát cắt theo $\Big(-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2\beta}\pi, \infty\Big) \subset \mathbb{R}$. Ta ký hiệu miền thu được là $D(z_3)$.

Hiển nhiên hàm cần tìm có dạng

$$w = \sqrt{z_3 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2\beta}\pi} = \sqrt{\Big(\frac{z^{1/\beta}-1}{z^{1/\beta}+1}\Big)^2 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2\beta}\pi}\,.$$

Để kết thúc tiết này, ta chứng minh rằng *ánh xạ phân tuyến tính* (2.51) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ *biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó khi và chỉ khi mọi hệ số* a, b, c, d *đều là những số thực thỏa mãn điều kiện* $ad-bc > 0$. Giả sử ánh xạ (2.51) biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó. Ta xét ba điểm khác nhau z_1, z_2 và z_3 của trục thực trong mặt phẳng z. Ảnh của ba điểm này là những điểm biên của nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} w > 0$, tức là các số $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2, 3$ là những số thực. Từ đó, ta thu được hệ phương trình với các hệ số thực để xác định a, b, c, d. Do đó với sự chính xác đến một thừa số nào đó từ hệ phương trình tuyến tính vừa thu được dễ dàng suy ra rằng các hệ số của (2.51) đều là thực. Vì $w = u + iv$, $z = x + iy$ nên khi $y > 0$ ta có $v > 0$. Thay $w = u + iv$, $z = x + iy$ vào (2.51) ta có

$$v = \frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2 + (cy^2)}\,.$$

Từ đó suy ra $ad - bc > 0$.

Ngược lại, nếu các hệ số a, b, c và d đều thực thì trục thực của mặt phẳng (z) được ánh xạ lên trục thực của mặt phẳng (w) và vì $ad-bc > 0$ nên nửa mặt phẳng trên được ánh xạ lên nửa mặt phẳng trên.

2.4.2 Ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$

Nếu cho trước miền D và hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ thì ta không thể tìm ngay một thuật toán cho phép tìm ảnh D^* của miền D qua ánh xạ f.

Đối với các đường cong sự việc có giản đơn hơn. Thật vậy nếu $z = z(t)$ là phương trình của đường cong trong mặt phẳng z thì phương trình của đường cong - ảnh là $f[z(t)]$. Do đó để khảo sát ảnh của một miền cho trước tốt hơn cả là tiến hành như sau: ta chọn một họ đường cong "phủ" miền đã cho và tìm ảnh của họ đường cong đó. Tất nhiên, việc chọn họ đường cong được xác định bởi dạng cụ thể của hàm đã cho và miền đã cho.

Bây giờ ta áp dụng phương pháp đó để khảo sát một số hàm sơ cấp.

Đối với ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$ ta đã có dịp đề cập đến trong chương II. Ta lưu ý rằng ánh xạ $w = e^z$ đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền này không chứa những cặp điểm khác nhau z_1 và z_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Định lý 2.4.10. *Với số nguyên n bất kỳ ($n \in \mathbb{Z}$) hàm $w = e^z$ ánh xạ bảo giác băng vô hạn*

$$D_n = \{a + 2n\pi < Im\, z < b + 2n\pi, b - a < 2\pi\}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.56}$$

lên góc

$$\Delta = \{a < arg\, w < b\}. \tag{2.57}$$

Hàm $z = log\, w$ ánh xạ bảo giác góc $\Delta = \{a < arg\, w < b\}$ lên một trong các băng vô hạn D_n (số n được xác định bởi cách chọn nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit trong góc Δ).

Chứng minh. 1. Để chứng minh phần thứ nhất ta xét họ các đường thẳng song song với trục thực:

$$\{\lambda\} = \{\lambda : z = x + i\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ảnh của các đường thẳng này qua ánh xạ e^z có phương trình là:

$$\begin{aligned} w &= e^{x+i\alpha} = e^x \cdot e^{i\alpha} = (\text{đặt } e^x = t) \\ &= te^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ 0 < t < \infty. \end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng $w = te^{i\alpha}$ là phương trình của tia $\{\arg w = \alpha\}$.

Bây giờ ta cho α biến thiên liên tục từ $a+2n\pi$ đến $b+2n\pi$. Khi đó, đường thẳng λ sẽ quét hết băng D_0 và tia ảnh của đường thẳng λ cũng sẽ quay liên tục ngược chiều kim đồng hồ từ vị trí $\arg w = a$ đến vị trí $\arg w = b$. Từ đó suy ra ảnh của băng (2.56) với $b - a < 2\pi$ là góc (2.57).

2. Ta chứng minh phần thứ hai của định lý.

Ta đặt $w = re^{i\varphi}$. Khi đó một trong các giá trị của z sẽ là: $\log r + i(\varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Do đó từ $z = x + iy$ suy ra

$$
\begin{aligned}
x &= \log r,\\
y &= \varphi + 2n\pi.
\end{aligned}
$$

Khi r biến thiên từ 0 đến ∞ thì x biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó nếu $b - a \leqslant 2\pi$ thì như ta đã biết hàm $\log w$ có thể tách nhánh chỉnh hình trong góc $a < \arg w < b$ và mỗi nhánh này sẽ ánh xạ bảo giác góc (2.57) lên băng D_n tương ứng nào đó. □

Nhận xét 2.4.5. Khi ánh xạ băng $a < \operatorname{Im} z < b$ lên góc của mặt phẳng w thì một phần của mặt phẳng w sẽ được phủ nhiều lần nếu $b - a > 2\pi$ và lúc này ánh xạ không đơn diệp.

Bây giờ ta xét ảnh của các đường thẳng song song với trục ảo. Phương trình của những đường thẳng này có thể biểu diễn dưới dạng

$$\lambda : z = c + iy, \quad -\infty < y < \infty.$$

Từ đó rút ra ảnh của λ qua ánh xạ e^z có phương trình

$$e^z\big|_{z\in\lambda} = e^{c+iy} = e^c \cdot e^{iy}; \quad -\infty < y < \infty.$$

Hiển nhiên đó là phương trình của đường tròn

$$\{|w| = e^c\}$$

được vòng quanh nhiều lần. Mỗi đoạn thẳng có độ dài 2π sẽ tương ứng với một lần vòng quanh đầy đủ. Từ đó ta rút ra

Định lý 2.4.11. *Với số nguyên $n \in \mathbb{Z}$ bất kỳ, hàm $w = e^z$ ánh xạ bảo giác hình chữ nhật*

$$R = \{c < Re\, z < d, a + 2n\pi < Im\, z < b + 2n\pi, b - a < 2\pi\} \tag{2.58}$$

lên hình quạt vòng

$$Q = \{e^c < |w| < e^d, a < arg w < b\}. \tag{2.59}$$

Hàm $z = \log w$ ánh xạ bảo giác hình quạt vòng (2.59) *lên một trong các hình chữ nhật* (2.58) *(số n được xác định bởi việc chọn nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit trong hình quạt).*

Ví dụ 3. Ánh xạ băng vô hạn nằm ngang $\{0 < y < 2\pi\}$ với nhát cắt $\{-\infty \leqslant x \leqslant a, y = H\}$ lên băng $\{0 < v < 2H\}$ (hình II.1)

Hình II.1

Giải

1. Hàm $z_1 = e^{\pi z/2H}$ ánh xạ miền đã cho lên nửa mặt phẳng trên với nhát cắt theo đoạn trục ảo $[0, bi]$, $b = e^{a\pi/2H}$. Ta ký hiệu miền thu được là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = \sqrt{z_1^2 + b^2} = \sqrt{e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}}$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên nửa mặt phẳng trên.

Hàm ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \frac{2H}{\pi} \ln z_2 = \frac{H}{\pi} \ln[e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}].$$

Ví dụ 4. Ánh xạ miền giới hạn bởi đường tròn đơn vị và đường thẳng λ tiếp xúc với đường tròn tại điểm $z = i$ lên nửa mặt phẳng trên.

Giải

1. Hàm $z_1 = \dfrac{z+i}{z-i}$ biến điểm chung của đường tròn và đường thẳng λ thành điểm $z_1 = \infty$. Từ tính chất bảo toàn đường tròn và tính bảo giác của ánh xạ phân tuyến tính suy ra ảnh của miền $D(z)$ là băng vô hạn:

$$D(z_1) = \{0 < \operatorname{Re} z_1 < 1\}.$$

2. Hàm $z_2 = \pi z_1$ ánh xạ băng $D(z_1)$ thành băng $D(z_2) = \{0 < \operatorname{Re} z_2 < \pi\}$.

3. Hàm $z_3 = e^{\pi i/2} z_2$ quay băng vừa thu được thành băng nằm ngang

$$D(z_3) = \{0 < \operatorname{Im} z_3 < \pi\}.$$

Từ đó dễ dàng suy rằng hàm

$$w = e^{z_3} = e^{\pi i \frac{z+i}{z-i}}$$

là ánh xạ phải tìm.

2.4.3 Hàm Jukovski

Hàm

$$w = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \tag{2.60}$$

được gọi là hàm Julovski. Hàm này chỉnh hình tại mọi điểm $z \neq 0, \infty$; trong đó

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big)$$

và có cực điểm đơn tại các điểm $z = 0; \infty$. Do đó hàm Jukovski đơn diệp tại mỗi điểm $z \neq \pm 1$ vì $w(z) \neq 0$ khi $z \neq \pm 1$ và không đơn diệp tại điểm $z = \pm 1$.

Ta lưu ý rằng hàm Jukovski đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1, z_2 liên hệ với nhau bởi đẳng thức $z_1 z_2 = 1$.

Ta nhận xét rằng vì $w(z) \equiv w\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$ nên ảnh của miền D và miền $\overline{D} = \Big\{t = \dfrac{1}{z} : z \in D\Big\}$ là trùng nhau. Để khảo sát ánh xạ (2.60) ta xét các họ đường cong là: họ các đường tròn $\{|z| = r\}$ và họ các tia $\{\arg z = \varphi\}$.

Đầu tiên ta tìm ảnh của họ đường tròn.

Ta đặt $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$ và thu được

$$u + iv = \frac{1}{2}\Big(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\Big),$$

hay là

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\theta \\ v &= \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Ta xét đường tròn

$$\gamma(\rho) = \big\{z = \rho e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\big\}, \tag{2.62}$$

($\rho > 0$ là số cố định). Từ (2.61) suy ra rằng qua ánh xạ Jukovski, ảnh của đường tròn (2.62) là elip

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\cos\theta, \\ v &= \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{1}{\rho}\Big)\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

với các bán trục là

$$a(\rho) = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big), \quad b(\rho) = \frac{1}{2}\Big|\rho - \frac{1}{\rho}\Big|$$

và với các tiêu điểm là $w = \pm 1$ (vì $a^2(\rho) - b^2(\rho) = 1$). Bằng cách khử tham số θ từ phương trình (2.63) ta thu được dạng chính tắc của phương trình elip

$$\frac{u^2}{a^2(\rho)} + \frac{v^2}{b^2(\rho)} = 1, \quad \rho \neq 1. \tag{2.64}$$

1. Trường hợp $0 < \rho < 1$. Vì khi $\rho < 1$ đại lượng $r - \frac{1}{r} < 0$ cho nên từ (2.63) suy ra rằng khi vòng quanh đường tròn $\gamma(\rho)$ theo hướng dương thì elip tương ứng trong mặt phẳng w sẽ chạy theo hướng âm. Thật vậy khi $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ta có $u > 0$ và giảm từ $a(\rho)$ đến 0, còn $v < 0$ và giảm từ 0 đến $-b(\rho)$. Khi $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ thì u tiếp tục giảm từ 0 đến $-a(\rho)$ còn v tăng từ $-b$ đến 0. Khi $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, u tăng từ $-a$ đến 0, còn v tăng từ 0 đến b; cuối cùng khi $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ ta có u tăng từ 0 đến a, còn v giảm từ b đến 0.

2. Trường hợp $r > 1$. Trong trường hợp này hướng của đường tròn (2.62) và elip - ảnh của nó trong mặt phẳng w là trùng nhau và chạy theo hướng dương.

3. Trường hợp $r = 1$. Trong trường hợp này đường tròn $\{|z| = 1\}$ cũng biến thành elip với các bán trục $a(\rho) = 1$, $b(\rho) = 0$ nghĩa là biến thành nhát cắt $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Bây giờ ta xét các tia

$$z = re^{i\alpha}, \quad 0 < r < \infty \tag{2.65}$$

(α là số cố định). Qua ánh xạ Jukovski ảnh của tia (2.65) là đường cong

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\alpha, \\ v &= \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\alpha. \end{aligned}\right\} 0 < r < +\infty \tag{2.66}$$

Bằng cách khử tham số r từ (2.66) ta thu được

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.67}$$

Đường cong (2.67) là đường hypecbôn với tiêu điểm tại $w = \pm 1$, dễ dàng chứng minh rằng các cặp đường kính đối xứng với nhau qua các trục tọa độ (lập nên từ các bán kính

$$z = \pm r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha), \quad 0 \leqslant r < 1)$$

được ánh xạ thành các hypecbôn không kể đỉnh, với tiêu điểm ± 1 và các bán trục $|\cos\alpha|$, $|\sin\alpha|$.

Khi $\alpha = 0$ ta có

$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big), \quad v = 0 \quad (0 \leqslant r < 1).$$

Do đó ảnh của đường kính nằm ngang của hình tròn đơn vị là khoảng vô hạn của trục đi từ điểm -1 đến điểm $+1$ qua ∞.

Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ta có

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} - r\Big), \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Từ đó dễ dàng suy ra ảnh của đường kính thẳng đứng là toàn bộ trục ảo trừ gốc tọa độ.

Hiển nhiên rằng qua ánh xạ Jukovski hai họ đường cong (2.64) và (2.67) trực giao với nhau do tính bảo giác của ánh xạ (2.60).

Ta có định lý sau đây:

Định lý 2.4.12. *Hàm Jukovski* $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$:

1. *Ánh xạ đường tròn* $\{|z| = \rho\}$ *thành elip* (2.64) $0 < \rho < 1$.

2. *Ánh xạ bảo giác hình tròn đơn vị* $\{|z| < 1\}$ *lên toàn bộ mặt phẳng đóng trừ nhát cắt theo đoạn* $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Chứng minh. 1. Điều khẳng định thứ nhất là hiển nhiên.

2. Vì $a(\rho) = \dfrac{1}{2}\Big(\rho + \dfrac{1}{\rho}\Big)$, $b(\rho) = -\dfrac{1}{2}\Big(\rho - \dfrac{1}{\rho}\Big)$, nên như ta đã nói ở trên elip (2.64) chạy theo hướng âm khi vòng quanh đường tròn theo hướng dương.

a) Khi $\rho \to 0$ ta có

$$\lim_{\rho\to 0} a(\rho) = \infty, \quad \lim_{\rho\to 0} b(\rho) = \infty,$$
$$\lim_{\rho\to 0}(a(\rho) - b(\rho)) = \lim_{\rho\to 0}\rho = 0.$$

Từ đó suy ra rằng khi $\rho \to 0$ thì các elip to dần ra và tròn dần lại.

b) Khi $\rho \to 1-0$ ta có

$$\lim_{\rho\to 1-0} a(\rho) = 1, \quad \lim_{\rho\to 1-0} b(\rho) = 0.$$

Từ đó suy ra rằng các elip ảnh co - dẹt dần thành đoạn $[-1,+1] \subset \mathbb{R}$.

Ta xét sự tương ứng giữa đường tròn đơn vị và các bờ của nhát cắt $[-1,+1]$.

Khi $r \to 1-0$ và $0 < \theta < \pi$ thì $v \to -0$. Khi $r \to 1-0$ và $\pi < \theta < 2\pi$, ta có $v \to +0$. Từ đó suy ra rằng nửa đường tròn trên biến thành bờ dưới của nhát cắt, còn nửa đường tròn dưới biến thành bờ trên. $\square$

Định lý 2.4.13. *Hàm Jukovski* (2.60) *ánh xạ bảo giác phần ngoài của hình tròn đơn vị lên toàn bộ mặt phẳng* w *với nhát cắt theo đoạn* $[-1,+1]$ *của trục thực.*

Chứng minh. Hiển nhiên điều kết luận của định lý có thể suy ngay từ chỗ là $w(z) \equiv w\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$.

Phép chứng minh trực tiếp được tiến hành như sau. Ta xét họ đường tròn $\{|z| = \rho, \rho > 1\}$. Ảnh của họ này qua ánh xạ (2.60) là những elip chạy theo hướng dương và với các bán trục là

$$a(\rho) = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big), \quad b(\rho) = \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{!}{\rho}\Big).$$

a) Khi $\rho \to 1+0$ ta có

$$\lim a(\rho) = 1, \quad \lim b(\rho) = 0.$$

Do đó các elip (2.60) co - dẹt dần thành đoạn $[-1,+1]$. Ta xét sự tương ứng giữa đường tròn và nhát cắt $[-1,+1]$. Khi $\rho \to 1+0$, và $0 < \theta < \pi$ ta có $v \to +0$ và khi $\rho \to 1+0$ và $\pi < \theta < 2\pi$ ta có $v \to -0$.

Từ đó rút ra kết luận: nửa đường tròn trên biến thành bờ trên của nhát cắt và nửa đường tròn dưới biến thành bờ dưới của nhát cắt $[-1,+1]$.

b) Khi $\rho \to \infty$ ta có

$$\lim a(\rho) = \infty, \quad \lim b(\rho) = \infty$$
$$\lim[a(\rho) - b(\rho)] = \lim \frac{1}{\rho} = 0.$$

Do đó các elip - ảnh to dần ra và tròn dần lại. □

Nhận xét 2.4.6. Tại các điểm $z = \pm 1$, ánh xạ Jukovski không bảo giác. Thật vậy từ (2.60) ta có

$$\begin{aligned} \frac{w-1}{w+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1} &= \frac{z^2 + 1 - 2z}{z^2 + 1 + 2z} \\ &= \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Bây giờ ta đặt

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}; \quad \omega = \zeta^2; \quad w = \frac{1+\omega}{1-\omega} \cdot \tag{2.69}$$

Từ đó ta suy ra rằng ánh xạ Jukovski là hợp của ba ánh xạ (2.69). Ánh xạ thứ nhất và thứ ba bảo giác khắp nơi trên $\overline{\mathbb{C}}$, ánh xạ thứ hai không bảo giác tại điểm $\zeta = 0$ (tương ứng với điểm $z = 1$) và tại điểm $\zeta = \infty$ (tương ứng với điểm $z = -1$).

Bây giờ ta xét ánh xạ ngược với ánh xạ Jukovski. Giải phương trình (2.60) đối với z, ta tìm được

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

như vậy hàm

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{2.70}$$

là hàm ngược đối với hàm Jukovski. Hàm này là hàm đa trị: mỗi điểm z sẽ tương ứng với hai giá trị w_1 và w_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w_1 w_2 = 1.$$

Trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ hàm (2.70) có thể tách thành hai nhánh chỉnh hình: một nhánh sẽ ánh xạ bảo giác phần ngoài đoạn $[-1, +1]$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị, còn nhánh kia ánh xạ phần ngoài đoạn $[-1, +1]$ lên phần trong của hình tròn đơn vị.

Ta nhận xét rằng hai nhánh chỉnh hình vừa nói trên đây không thể được đặc trưng bởi dấu của căn thức. Thật vậy, ta xét nhánh thứ nhất: nhánh ánh xạ miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị. Tại điểm $z = 2$ nó nhận giá trị $(2+\sqrt{3})$, và tại điểm $z = -2$ nó nhận giá trị $-(2+\sqrt{3})$.

Ví dụ 5. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa trên của hình tròn đơn vị và tia $\{x = 0, y > 2\}$ lên nửa mặt phẳng trên (hình II.2).

Hình II.2

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây

1. Hàm

$$z_1 = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$

ánh xạ miền $D(z)$ lên nửa mặt phẳng trên trừ nhát cắt theo trục ảo đi từ $\frac{3}{4}i$. Ta ký hiệu miền này là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = z_1^2$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên toàn bộ mặt phẳng z_2 trừ nhát cắt $\Big(-\infty, -\frac{9}{16}\Big)$ và $[0, \infty)$. Ta chỉ miền thu được là $D(z_2)$.

3. Ánh xạ phân tuyến tính $z_3 = \dfrac{z_2 + 9/16}{z_2}$ biến miền $D(z_2)$ thành miền

$D(z_3) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^+$. Từ các ánh xạ 1) - 3) suy ra rằng:

$$w = \sqrt{z_3} = \frac{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{2(z^2+1)} \cdot$$

Ví dụ 6. Ánh xạ phần ngoài elip $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị.

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Vì elip đã cho có tiêu điểm tại các điểm

$$c = \pm\sqrt{25-16} = \pm 3,$$

nên đầu tiên ta dùng ánh xạ $z_1 = \dfrac{z}{3}$ và thu được elip với tiêu điểm ± 1.

2. Hàm $z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$ ánh xạ hình elip vừa thu được lên hình tròn $\{|z_2| < 3\}$.

3. Ánh xạ đồng dạng $w = \dfrac{z_2}{3}$ cho ta ảnh của miền vừa thu được là hình tròn đơn vị. Như vậy ánh xạ cần tìm là

$$w = \frac{z + \sqrt{z^2 - 9}}{3} \cdot$$

Ví dụ 7. Ánh xạ hình quạt $Q = \left\{|z| < 1, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{n}\right\}$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ lên chính nó sao cho các đoạn

$$\big\{|z| \leqslant \alpha, \arg z = 0\big\},\ 0 < \alpha < 1\big\}$$

và

$$\big\{|z| \leqslant \alpha, \arg z = \frac{\pi}{n}, 0 < \alpha < 1\big\}$$

biến thành đoạn bán kính tương ứng.

Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau:

1. Hàm $z_1 = z^n$ ánh xạ hình quạt Q lên nửa trên của hình tròn đơn vị. Đoạn bán kính $[0, \alpha]$ biến thành đoạn $[0, \alpha^n]$, đoạn $[0, \alpha e^{i\pi/n}]$ thành đoạn $[0, -\alpha^n]$.

2. Hàm $z_2 = \dfrac{1}{2}\Big(z_2 + \dfrac{1}{z_2}\Big)$ biến miền vừa thu được thành nửa mặt phẳng dưới và đoạn $[-\alpha^n, \alpha^n]$ biến thành phần biên từ $-\dfrac{1}{2}(\alpha^n + \alpha^{-n})$ đến $\dfrac{1}{2}(\alpha^n + \alpha^{-n})$ đi qua ∞. Ta ký hiệu phần biên đó là $\lambda(\alpha)$.

3. Hàm ngược của hàm Jukovski $z_4 = z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}$ biến miền vừa thu được lên nửa trên của hình tròn đơn vị và đường kính nằm ngang là ảnh của phần biên từ -1 đến $+1$ (qua ∞).

Ánh xạ hợp trong kết quả bằng

$$w = (\alpha^n + \alpha^{-n})^{-1/n}\sqrt{z^n - z^{-n} + \sqrt{(z^n + z^{-n})^2 - (\alpha^n + \alpha^{-n})^2}}\,.$$

2.4.4 Các đẳng cấu sơ cấp khác

Các đẳng cấu sơ cấp được nghiên cứu trong **2.4.1, 2.4.2** và **2.4.3** mang lại cho ta một dự trữ cục kỳ quan trọng các ánh xạ cơ bản. Nhờ các đẳng cấu này ta có thể xây dựng các ánh xạ thực hiện bởi các hàm sơ cấp khác. Thật vậy, khi biết các ánh xạ $w = f(\zeta)$ và $\zeta = \varphi(z)$ ta sẽ biết cả ánh xạ $f[\varphi(z)]$ (phép hợp các ánh xạ).

Ánh xạ sơ cấp cơ bản bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng hợp một số nào đó các ánh xạ mà ta đã nghiên cứu trong **1. 2.** và **3.** Thật vậy, ta xét các ánh xạ sơ cấp thực hiện bởi các hàm lượng giác sau đây:

1. Hàm $w = \cos z$. Theo định nghĩa ta có

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\cdot \tag{2.71}$$

Ánh xạ này là hợp của ba ánh xạ

a) $\zeta = iz$; b) $\omega = e^{\zeta}$; c) $w = \dfrac{1}{2}\Big(\omega + \dfrac{1}{\omega}\Big)$, trong đó mọi ánh xạ trung gian đều đã được khảo sát ở trên.

Giả sử qua ánh xạ a) ảnh của miền D là miền D_1, qua ánh xạ b) ảnh của miền D_1 là D_2 và qua ánh xạ c) ảnh của miền D_2 là miền D^*. Ánh xạ a) đơn diệp khắp nơi, ánh xạ b) đơn diệp trong miền D_1 khi và chỉ khi D_1 không chứa những cặp điểm ζ_1 và ζ_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\zeta_1 - \zeta_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

hay là

$$z_1 - z_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ánh xạ c) đơn diệp trong miền D_2 khi và chỉ khi D_2 không chứa những cặp điểm liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\omega_1\omega_2 = 1,$$

hay là D không chứa những điểm mà

$$e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = e^{i(z_1+z_2)} = 1$$

tức là D không chứa những điểm mà

$$z_1 + z_2 = 2k\pi.$$

Từ đó suy ra rằng ánh xạ (2.71) đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những điểm mà $z_1 - z_2 = 2k\pi$, hoặc $z_1 + z_2 = 2k\pi$.

2. Hàm $w = \sin z$. Từ hệ thức

$$\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

suy rằng ánh xạ $w = \sin z$ khác với ánh xạ $\cos z$ bởi phép dịch chuyển mặt phẳng z.

Ánh xạ $w = \sin z$ cũng có thể biểu diễn qua các ánh xạ đã nghiên cứu ở trên. Ta biết rằng, theo định nghĩa

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2.72}$$

và do đó ánh xạ này là hợp của bốn ánh xạ:

a) $z_1 = iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $z_3 = -iz_2$; d) $w = \dfrac{1}{2}\left(z_3 + \dfrac{1}{z_3}\right) = \sin z$,

trong đó mỗi ánh xạ vừa viết đều đã được nghiên cứu.

3. Ánh xạ $w = \operatorname{tg} z$. Theo định nghĩa ta có

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \tag{2.73}$$

và do đó từ (2.71) và (2.72) rút ra:

$$\operatorname{tg} z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + w^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}\cdot$$

Do đó ánh xạ (2.73) là hợp của ba ánh xạ quen biết sau đây

a) $z_1 = 2iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $w = -i\dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1}\cdot$

4. Cũng tương tự, ánh xạ $w = \operatorname{cotg} z$ cũng là hợp của ba ánh xạ quen biết

a) $z_1 = 2iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $w = i\dfrac{z_2 + 1}{z_2 - 1}$,

trong đó mọi ánh xạ trung gian đều đã được xét.

5. Hàm $w = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Ánh xạ này là hợp của các ánh xạ trung gian sau đây:

$$\text{a) } z_1 = \ln z; \quad \text{b) } z_2 = \alpha z_1; \quad \text{c) } w = e^{z_2}. \tag{2.74}$$

Ví dụ: Ta tìm ảnh của góc

$$D(z) = \big\{a < \arg z < b, b - a \leqslant 2\pi\big\}$$

qua ánh xạ $w = z^\alpha$ (tức là ánh xạ (2.74)).

Qua ánh xạ a) góc $D(z)$ biến thành một trong các băng sau

$$D(z_1) = \Big\{a + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

(số k được xác định bằng việc chọn nhánh của logarit trong góc $D(z)$).

Qua ánh xạ b) băng $D(z_1)$ biến thành băng

$$D(z_2) = \big\{\alpha a + \alpha 2k\pi < \operatorname{Im} z_2 < \alpha b + \alpha 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\}$$

với điều kiện là $\alpha(b - a) \leqslant 2\pi$.

Do đó qua ánh xạ $w = z^\alpha$ góc đã cho có ảnh là một trong các góc sau

$$\big\{\alpha a + \alpha 2k\pi < \arg w < \alpha b + \alpha 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\big\}$$

nếu $b - a \leqslant 2\pi$ và $\alpha(b - a) \leqslant 2\pi$.

2.4.5 Một số ví dụ

Các ánh xạ bảo giác đã xét ở trên là những ánh xạ "mẫu". Nhờ các ánh xạ đó, ta có thể tìm ánh xạ bảo giác các miền đơn giản khác.

Ví dụ 8. Tìm ánh xạ bảo giác hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ thỏa mãn các điều kiện

$$w(z_0) = w_0; \quad \arg w'(z_0) = \alpha.$$

Giải. Hàm

$$\zeta = g(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

ánh xạ hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|\zeta| < 1\}$ và thỏa mãn điều kiện z_0 biến thành 0 và $\arg g'(z_0) = \alpha$.

Hàm

$$\zeta = h(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w}$$

ánh xạ hình tròn $\{w < 1\}$ lên hình tròn $\{|\zeta < 1\}$ thỏa mãn điều kiện w_0 biến thành 0, $\arg h'(w_0) = 0$. Từ đó suy ra rằng hàm $w = w(z)$ xác định bởi hệ thức

$$\frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w} = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

sẽ là ánh xạ muốn tìm.

Ví dụ 9. Ánh xạ hình quạt $Q = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho các điểm $z = e^{i\pi/8}$ và $z = 0$ biến thành các điểm $w = 0$ và $w = 1$ tương ứng.

Giải. Hàm $z_1 = z^4$ ánh xạ hình quạt đã cho lên nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z_1 > 0$. Khi đó các điểm $z = e^{i\pi/8}$ biến thành $z_1 = e^{i\pi/2} = i$ và điểm $z = 0$ biến thành điểm $z_1 = 0$. Bây giờ ta ánh xạ nửa mặt phẳng trên vừa thu được lên hình tròn $\{|z_2| < 1\}$ sao cho điểm $z_1 = i$ biến thành tâm của hình tròn

$$z_2 = k\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\cdot$$

Số k được xác định từ điều kiện là điểm $z_1 = 0$ biến thành điểm $z_2 = 1$. Dễ dàng thấy rằng $k = -1$. Từ đó suy ra rằng hàm:

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i} = \frac{i - z^4}{i + z^4}$$

là ánh xạ cần tìm.

Ví dụ 10. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền nhị liên giới hạn bởi hai đường tròn $\gamma = \{|z-3| = 9\}$ và $\Gamma = \{|z-8| = 16\}$ lên vành đồng tâm với tâm tại điểm $w = 0$ sao cho bán kính ngoài của vành bằng 1.

Giải. Điểm $w = 0$ và $w = \infty$ đồng thời đối xứng với nhau qua hai đường tròn biên của vành đồng tâm. Từ đó, theo định lý 2.4.7 các nghịch ảnh của $w = 0$ và $w = \infty$ cũng sẽ đồng thời đối xứng qua hai đường tròn Γ và γ. Ta xác định các nghịch ảnh này. Vì tâm của Γ và γ nằm trên trục thực nên các điểm cần tìm cũng nằm trên trục thực. Ta ký hiệu các điểm ấy là x_1 và x_2. Theo định nghĩa 9.2 ta có

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 81, \quad (x_1 - 8)(x_2 - 8) = 256.$$

Giải hệ phương trình này ta có: $x_1 = -24$, $x_2 = 0$ (hoặc $x_1 = 0$, $x_2 = -24$). Một trong hai điểm vừa tìm được cần được ánh xạ lên điểm $w = 0$, còn điểm kia lên điểm $w = \infty$.

a) Giả sử $w = 0$ khi $z = -24$ và $w = \infty$ khi $z = 0$. Khi đó

$$w = k\frac{z + 24}{z}\,, \tag{2.75}$$

trong đó hệ số k cần được xác định. Vì ánh xạ (2.75) biến điểm $z = 0$ thành điểm $w = \infty$ nên phần trong của mỗi đường tròn trong mặt phẳng z sẽ được ánh xạ lên phần ngoài của ảnh tương ứng. Vì γ nằm trong Γ nên qua ánh xạ (2.75) bán kính của ảnh đường tròn γ sẽ lớn hơn bán kính của ảnh đường tròn Γ. Từ đó hệ số k cần được xác định sao cho $|w| = 1$ khi $z \in \gamma$. Chẳng hạn ta xét điểm $z = 12 \in \gamma$. Giá trị w tương ứng sẽ là

$$w = 3k; \quad |w| = 3k = 1 \quad \text{hay là } k = 1/3.$$

Như vậy, trong trường hợp này ta có:

$$w = \frac{1}{3}\,\frac{z+24}{z}e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.76}$$

b) Nếu ta đòi hỏi $w = 0$ khi $z = 0$ và $w = \infty$ khi $z = -24$ thì cũng tương tự như ở trên ta có:

$$w = e^{i\alpha}\frac{2z}{z+24}\,\cdot \tag{2.77}$$

Nhận xét 2.4.7. Trong điều kiện của bài toán người ta chỉ cho trước bán kính ngoài của vành tròn. Ta sẽ chứng tỏ rằng khi đó bán kính trong cũng hoàn toàn xác định.

Thật vậy, bằng cách thế vào (2.76) hoặc (2.77) một điểm bất kỳ nằm trên đường tròn có ảnh là đường tròn trong của vành tròn, dễ dàng thấy rằng bán kính trong bằng 2/3. Từ đó suy ra rằng miền nhị liên đã cho chỉ có thể ánh xạ lên vành tròn mà tỷ số giữa bán kính trong và bán kính ngoài bằng 2/3.

Ví dụ 11. Ánh xạ băng vô hạn $\{0 < x < 1\}$ với các nhát cắt dọc theo các tia

$$\Big\{x = \frac{1}{2}\,, h_1 \leqslant y < \infty\Big\} \quad \text{và} \quad \Big\{x = +\frac{1}{2}\,, -\infty < y \leqslant h_2\Big\}.$$

trong đó $h_2 < h_1$ (Hình II.3) lên nửa mặt phẳng trên.

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = 2\pi iz$ ánh xạ miền $D(z)$ lên miền $D(z_1)$ là băng nằm ngang $\{0 < \operatorname{Im} z_1 < 2\pi\}$ với hai nhát cắt $(-\infty, \pi i - 2\pi h_1]$ và $[\pi i + 2\pi h_1, \infty)$.

2. Hàm $z_2 = e^{z_1}$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên miền

$$D(z_2) = \overline{\mathbb{C}} \setminus [(-\infty, -e^{-2\pi h_1}] \cup [e^{-2\pi h_2}, \infty].$$

Từ đó suy ra rằng ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \sqrt{\frac{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_1}}{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_2}}}\,.$$

Ví dụ 12. Ánh xạ miền giới hạn bởi các đường tròn $\{|z-1|=1\}$; $\{|z-2|=2\}$ với nhát cắt theo đoạn $\{y=0, 2\leqslant x\leqslant a\}$ $(a<4)$ lên nửa mặt phẳng trên (hình II.4).

Hình II.3 *Hình II.4*

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. $z_1 = \dfrac{4\pi}{z}$. Qua ánh xạ này miền $D(z)$ đã cho có ảnh là băng thẳng đứng $\{\pi < x < 2\pi\}$ với nhát cắt theo đoạn $\left[\dfrac{4\pi}{a}, 2\pi\right]$. Ta gọi miền đó là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = \cos z_1$ sẽ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên toàn bộ mặt phẳng trừ hai nhát cắt theo trục thực. Thật vậy, phương trình của đường thẳng $x = \pi$, $x = 2\pi$ có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} \lambda_1 &: z = \pi + it, \quad -\infty < t < \infty; \\ \lambda_2 &: z = 2\pi + it, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned}$$

khi z_1 biến thiên trên λ_1 thì

$$z_1\big|_{\lambda_1} = \cos(\pi + it) = \cos\pi \operatorname{ch} t - i\sin\pi \operatorname{sh} t = -\operatorname{ch} t.$$

Và do đó z_2 vạch nên nhát cắt tia $(-\infty, 1]$.

Tương tự khi z_1 biến thiên trên λ_2 thì

$$z_1\big|_{\lambda_2} = \cos(2\pi + it) = \operatorname{ch} t,$$

và do đó z_2 vạch nên nhát cắt $[1, \infty)$.

Từ đó suy ra

$$w = \sqrt{\frac{1 + \cos\dfrac{4\pi}{z}}{\cos\dfrac{4\pi}{z} - \cos\dfrac{4\pi}{a}}}\,.$$

là ánh xạ muốn tìm.

Ví dụ 13. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình elip lên nửa mặt phẳng trên (hãy vẽ hình!).

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = \dfrac{z}{c}$, $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ biến hình elip đã cho thành elip với tiêu điểm là $+1$ và -1. Elip cắt trục thực tại hai điểm $\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$ và cắt trục ảo tại điểm $\dfrac{bi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

2. Hàm $z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} = \dfrac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ biến miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn tâm $z_1 = 0$ và bán kính là $R = \dfrac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

3. Hàm $z_3 = \dfrac{z_2}{R}$ sẽ ánh xạ miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn đơn vị và

$$\begin{aligned} z_3 = \frac{z_1}{R} &= \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a+b} \\ &= \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{a+b}. \end{aligned}$$

4. Tiếp theo ta sử dụng ánh xạ Jukovski

$$z_4 = \frac{1}{2}\Big(z_3 + \frac{1}{z_3}\Big)$$

và thu được nửa mặt phẳng trên. Thế giá trị z_3 vào biểu thức vừa viết ta có

$$\begin{aligned}
z_4 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}{a+b} + \frac{a+b}{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}\right\}\\
&= \frac{z^2+2z\sqrt{z^2+b^2-a^2}+z^2+b^2-a^2+(a+b)^2}{2(a+b)(z+\sqrt{z^2+b^2-a^2})}\\
&= \frac{2z(z+\sqrt{z^2+b^2-a^2})+2b(a+b)}{2(a+b)(z+\sqrt{z^2+b^2-a^2})}\\
&= \frac{z}{a+b} + \frac{b}{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}\cdot
\end{aligned}$$

Áp dụng ánh xạ đồng dạng và sau vài phép biến đổi ta có

$$\begin{aligned}
w = (a+b)z_4 &= z + \frac{b(a+b)}{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}\\
&= \frac{az-b\sqrt{z^2+b^2-a^2}}{a^2-b^2}\cdot
\end{aligned}$$

Đó là ánh xạ phải tìm.

Ví dụ 14. Ánh xạ miền $\{|z|>1\}$ với các nhát cắt theo các đoạn thẳng $[a,-1]$ và $[1,b]$, trong đó $-\infty < a < -1$, $1 < b < \infty$ lên hình tròn đơn vị.

Giải

1. Hàm Jukovski $z_1 = \dfrac{1}{2}\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big)$ ánh xạ miền $D(z)$ lên phần ngoài đoạn thẳng $[A,B]\subset\mathbb{R}$, trong đó

$$A = \frac{1}{2}\Big(a+\frac{1}{a}\Big);\quad B = \frac{1}{2}\Big(b+\frac{1}{b}\Big).$$

2. Hàm tuyến tính $z_2 = \Big(z_1 - \dfrac{A+B}{2}\Big)\dfrac{2}{A+B}$ sẽ ánh xạ miền vừa thu được lên phần ngoài đoạn $[-1,1]$. Từ đó rút ra

$$w = z_2 + \sqrt{z_2^2-1}$$

là ánh xạ muốn tìm.

Ví dụ 15. Ánh xạ nửa băng $\{x>0, 0<y<2h\}$ với nhát cắt theo tia $\{x>h, y=h\}$ (Hình II.5) lên băng vô hạn $\{0<\operatorname{Im} w<1\}$

Hình II.5

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = \dfrac{z}{2h}$ ánh xạ miền $D(z)$ lên nửa băng với độ rộng là π.

2. Lợi dụng tính chất của hàm e^z, ta xét ánh xạ

$$z_2 = e^{z_1}$$

biến miền thu được trong mặt phẳng z_1 lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn đơn vị và nhát cắt $\{\mathrm{Im}\, z_2 \geqslant e^{\pi}, \mathrm{Re}\, z_2 = 0\}$. Ta gọi miền đó là $D(z_2)$.

3. Hàm

$$z_3 = \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big), \quad \Big(ie^{\pi/2} \to i\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\Big)$$

biến miền $D(z_2)$ lên miền $D(z_3)$ là nửa mặt phẳng trên trừ nhát cắt theo trục ảo đi từ điểm $i\mathrm{sh}\dfrac{\pi}{2}$.

4. Đến đây ta thấy rõ là để có băng nằm ngang rộng 2 ta cần biến miền $D(z_3)$ lên mặt phẳng với nhát cắt theo phần dương trục thực và sau đó dùng ánh xạ logarit. Như vậy,

$$z_4 = z_3^2$$

ánh xạ $D(z_3)$ lên miền $D(z_4)$ là mặt phẳng trừ hai nhát cắt $\Big(-\infty, -\mathrm{sh}^2\dfrac{\pi}{2}\Big]$ và $[0, \infty)$.

5. Hàm $z_5 = \dfrac{z_4}{z_4 + \mathrm{sh}^2\dfrac{\pi}{4}}$ ánh xạ miền $D(z_4)$ lên mặt phẳng với nhát cắt theo phần dương trục thực. Từ các ánh xạ trung gian trên đây ta suy ra

$$w = \frac{-1}{2\pi}\log\Bigg(1 + \frac{\mathrm{sh}^2\dfrac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\pi z}{2h}}\Bigg).$$

2.5 Bài tập

1. Cho hàm

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{khi } z \neq 0, \\ 0 & \text{khi } z = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

1) $f(z)$ liên tục tại điểm $z = 0$.

2) Hàm $f(z)$ thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann tại điểm $(0,0)$ nhưng đạo hàm tại điểm đó không tồn tại.

2. Chứng minh rằng các hàm

$$1) \quad f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{khi } z \neq 0 \\ 0 & \text{khi } z = 0; \end{cases}$$

$$2) \quad f_2(z) = \begin{cases} \dfrac{x^{4/3}y^{5/3}}{x^2+y^2} + i\dfrac{x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{nếu } z \neq 0, \\ 0 & \text{khi } z = 0 \end{cases}$$

đều không có đạo hàm tại điểm $z = 0$.

3. Tìm miền mà tại đó hàm

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

chỉnh hình.

[Trả lời: Hàm chỉnh hình khi

$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$, $\pi < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}(f(z) = z^2)$ và khi

$\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4}(f(x) = -z^2)$.]

4. Giả sử $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$. Khi đó hàm $f(z)$ là $\mathbb{C}$ - khả vi khi và chỉ khi $u(\rho,\varphi)$ và $v(\rho,\varphi)$ là hàm khả vi của ρ, φ và các đạo hàm riêng của chúng thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

5. Chứng minh rằng hàm dạng

$$w = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}},$$

trong đó α, β là những số phức tùy ý thỏa mãn hệ thức $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$ ánh xạ đường tròn đơn vị $\{|z| = 1\}$ lên chính nó. Nếu $\beta\overline{\beta} - \alpha\overline{\alpha} = 1$ thì phần trong đường tròn đơn vị được biến thành phần ngoài.

6. Tìm những điểm trên mặt phẳng z mà

1. $\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right| = \text{const},$
2. $\arg\dfrac{az+b}{cz+d} = \text{const},$

trong đó a, b, c, d là những hằng số phức.

7. Chứng minh rằng ảnh của đường thẳng hay đường tròn γ qua ánh xạ phân tuyến tính $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ là đường thẳng khi và chỉ khi điểm $z_0 = -\dfrac{d}{c} \in \gamma$.

8. Chứng minh rằng góc tại ∞ giữa hai đường thẳng song song là bằng 0.

9. Chứng minh rằng 4 điểm nằm trên đường thẳng hay đường tròn khi và chỉ khi tỷ số kép của chúng là một số thực.

10. Chứng minh rằng đại lượng $\dfrac{|dz|}{R^2 - |z|^2}$ là bất biến đối với các ánh xạ phân tuyến tính $w = w(z)$ biến hình tròn $\{|z| < R\}$ lên chính nó, nghĩa là

$$\frac{|dw|}{R^2 - |w|^2} = \frac{|dz|}{R^2 - |z|^2}, \quad w = w(z).$$

11. Chứng minh rằng đại lượng $\dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$ là bất biến đối với các phép ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ lên chính nó.

12. Chứng minh rằng đường thẳng qua các điểm bất động của ánh xạ $w = \dfrac{iz+2}{z-i}$ là biến thành chính nó.

13. Tìm dạng tổng quát của ánh xạ phân tuyến tính có hai điểm bất động z_1 và z_2.

(Trả lời : 1) $w = Az$ nếu $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$, $A \in \mathbb{C}$;

2) $\dfrac{w-z_1}{w-z_2} = A\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, $A \in \mathbb{C}$.)

14. Dãy điểm (z_n) xác định như sau: z_0 là điểm cho trước, $z_{n+1} = f(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, trong đó f là hàm phân tuyến tính có hai điểm bất động. Hãy khảo sát sự hội tụ của dãy đó.

Chỉ dẫn. Giả sử $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ là hai điểm bất động của f. Áp dụng bài 13 và cách cho dãy để chứng minh rằng

$$\frac{z_{n+1}-\alpha}{z_{n+1}-\beta} = |A|^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}, \quad \theta = \arg A.$$

Tiếp đó là qua giới hạn đẳng thức khi $n \to \infty$.

Trả lời 1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } |A| < 1, \\ \beta & \text{nếu } |A| > 1 \end{cases}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ không tồn tại nếu $|A| = 1$.

15. Giả sử hình tròn đơn vị được ánh xạ lên chính nó sao cho điểm z_0 của nó biến thành tâm. Chứng minh rằng khi đó nửa đường tròn đơn vị được ánh xạ thành nửa đường tròn khi và chỉ khi các đầu mút của nó nằm trên đường kính đi qua z_0.

Chỉ dẫn. Sử dụng công thức

$$w = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$$

và điều là $w(z_0) = 0$, $w\left(\dfrac{1}{\overline{z}_0}\right) = \infty$.

16. Tìm ảnh đối xứng của đường tròn $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ qua đường tròn $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$.

Trả lời. Đó là đường tròn Apolonius đối với các điểm 1 và 2: $|w-2| = 2|w=1|$.

Chỉ dẫn. Phép biến đổi đối xứng qua đường tròn γ hoàn toàn được xác định bởi hàm

$$w = 1 + \frac{1}{\overline{\overline{z-1}}}\cdot$$

17. Chứng minh rằng mọi đường tròn đi qua điểm ± 1 đều chia mặt phẳng $\mathbb{C}$ thành hai miền đơn diệp của hàm Jukovski.

Chỉ dẫn. Xét đường tròn γ bất kỳ qua ± 1 và $z_1, z_2 \notin \gamma$ sao cho $z_1 z_2 = 1$. Tiếp theo, xét ánh xạ

$$w = \frac{z+1}{k(z-1)}, \quad |k| = 1$$

biến một trong hai miền của mặt phẳng z (giới hạn bởi γ) lên nửa mặt phẳng trên. Từ điều kiện $z_1 z_2 = 1$ suy ra $w_1 = -w_2$.

18. Tìm ảnh của hình chữ nhật $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < b\}$ qua ánh xạ $w = \cos z$.

Trả lời. Ảnh là nửa dưới của hình elip với các bán trục $\operatorname{ch} b$ và $\operatorname{sh} b$.

19. Chứng minh rằng các cạnh của hình vuông với đỉnh $\pi\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)\Big(\pm 1 \pm i\Big)$, $n \in \mathbb{N}$ hàm $\dfrac{1}{|\sin z|}$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{|\sin z|} < 1$.

Chỉ dẫn. Khi ước lượng hàm trên các cạnh nằm ngang $z = x \pm i\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)\pi$ hãy sử dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{sh}\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\pi \geqslant \operatorname{sh}\frac{\pi}{2} > 1.$$

20. Giả sử $f(z) = u(z) + iv(z) \in \mathcal{H}(D)$. Chứng minh rằng các họ đường cong $u(x,y) = C$, $v(x,y) = C$ (C là hằng số tùy ý) trực giao với nhau.

Chỉ dẫn. Chứng minh rằng $\langle \operatorname{grad} y, \operatorname{grad} v\rangle = 0$, trong đó $\operatorname{grad} u = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)$, $\operatorname{grad} v = \Big(\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}\Big)$.

21. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Chứng minh rằng $|f(z)| = \text{const}$ khắp nơi trong miền D thì hàm $f(z) = \text{const}$ trong D.

Chỉ dẫn. Lấy đạo hàm riêng theo x, theo y đẳng thức $u^2 + v^2 = C^2$ rồi áp dụng điều kiện Cauchy - Riemann.

22. Tìm ảnh của miền $D = \left\{z \in \mathbb{C} : -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, -\infty < \operatorname{Im} z < \infty\right\}$ qua ánh xạ $w = \sin z$.

Trả lời. Ảnh D^* là toàn bộ mặt phẳng phức với nhát cắt theo trục thực từ điểm $w = -1$ đến điểm $w = +1$ qua ∞.

23. Với giá trị nào của α thì các tập hợp giá trị sau đây trùng nhau:

1. $(a^2)^\alpha$ và $a^{2\alpha}$;
2. $(a^3)^\alpha$ và $a^{3\alpha}$.

[*Trả lời.* 1. $\alpha = \dfrac{k}{2m+1}$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2. $\alpha = \dfrac{k}{3m-1}$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)]

24. Chứng minh rằng

1. $i^i = e^{-\pi/2} e^{-2k\pi}$,
2. $(-1)^i = e^{(2k+1)\pi}$,
3. $(-1)^{\sqrt{2}} = \cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + i\sin(2k+1)\pi\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chương 3

Lý thuyết tích phân hàm chỉnh hình

3.1 Tích phân trong miền phức 189

3.1.1 Định nghĩa tích phân 189

3.1.2 Ước lượng tích phân 193

3.1.3 Tính tích phân bằng phương pháp qua giới hạn . 194

3.1.4 Dạng vi phân đúng và dạng vi phân đóng 200

3.1.5 Tích phân đường phụ thuộc tham số 213

3.2 Lý thuyết Cauchy 217

3.2.1 Nguyên hàm địa phương của hàm chỉnh hình . . . 217

3.2.2 Nguyên hàm của hàm chỉnh hình theo tuyến . . . 223

3.2.3 Tính bất biến của tích phân đối với các tuyến đồng luân 227

3.2.4 Công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy 231

3.2.5 Nguyên hàm trong miền đơn liên 234

3.2.6 Công thức tích phân Cauchy (công thức cơ bản thứ hai của Cauchy) 235

3.2.7 Biểu diễn tích phân đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình 241
3.2.8 Điều kiện đủ để hàm f chỉnh hình 250
3.2.9 Hàm điều hòa và mối liên hệ với hàm chỉnh hình . 250
3.2.10 Tích phân dạng Cauchy. Công thức Sokhotski 257
3.2.11 Biểu diễn tích phân hàm điều hòa 270
3.3 Bài tập 277

Bây giờ xét sự thu hẹp lớp tổng quát các hàm biến phức bằng điều kiện khả tích. Sự thu hẹp đó sẽ đưa ta tới chính lớp các hàm chỉnh hình đã được nghiên cứu trong chương II. Toàn bộ chương này được dành cho việc trình bày định lý cơ bản trong phép tính tích phân của Cauchy cùng hai công thức cơ bản của nhà toán học nổi tiếng đó.

3.1 Tích phân trong miền phức

3.1.1 Định nghĩa tích phân

Giả sử cho tuyến trơn $\gamma = \gamma(t) : I \to \mathbb{C}$, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ và giả sử cho ánh xạ liên tục

$$f : \gamma(I) \to \mathbb{C}.$$

khi đó hàm $f[\gamma(t)]$ là một hàm liên tục trên I.

Ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 3.1.1. Tích phân

$$J(f) = \int_a^b f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt \tag{3.1}$$

được gọi là *tích phân của hàm f theo tuyến* γ và được ký hiệu là

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Định nghĩa này phù hợp với định nghĩa tích phân đường thông thường (theo nghĩa Cauchy - Riemann) của hàm liên tục theo khoảng compac.

Cũng có thể tính tích phân đường theo tuyến trơn từng khúc. Trong trường hợp này sẽ chọn phép phân hoạch

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

sao cho hạn chế γ_i của tuyến γ trên đoạn $[t_i, t_{i+1}]$ là tuyến trơn với i bất kỳ, $0 \le i \le n-1$. Và theo định nghĩa

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz. \tag{3.2}$$

Có thể chứng minh rằng giá trị của vế phải (3.2) không phụ thuộc vào việc chọn phép phân hoạch và trong trường hợp khi γ là tuyến trơn thì định nghĩa này của tích phân $\int\limits_\gamma f(z)dz$ trùng với định nghĩa 3.1.1.

Do đó, định nghĩa tích phân (3.2) là đúng đắn.

Ví dụ 1. Giả sử γ là đường tròn

$$\gamma = \big\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\big\}$$

(do đó $\gamma(t) = a + e^{ir}$, $t \in [0, 2\pi]$ và $f(z) = (z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Theo định nghĩa 3.1.1 ta có:

$$J(f) = \int_\gamma (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Khi $n \neq -1$ thì $J(f) = 0$.

Khi $n = -1$ thì

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Như vậy:

$$J(f) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{khi } n = -1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Nhận xét 3.1.1. Bằng cách đặt $f = u + iv$ và $dz = dx + idy$ ta thu được:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy. \tag{3.4}$$

Từ định nghĩa và công thức (3.4) dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của tích phân trong miền phức.

I - Tính chất tuyến tính. Nếu $f_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ là những hàm liên tục được cho trên γ và a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) là những hằng số cho trước thì:

$$\int_\gamma \Big(\sum_{k=1}^n a_k f_k(z)\Big)dz = \sum_{k=1}^n a_k \int_\gamma f_k(z)dz.$$

II - Tính chất cộng tính. Giả sử cho hai tuyến trơn

$$\gamma_1(t) : [a, c] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) : [c, b] \to \mathbb{C}$$

sao cho

$$\gamma_1(c) = \gamma_2(c).$$

Xét tuyến trơn từng khúc là hợp của hai tuyến γ_1, γ_2

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c], \\ \gamma_2(t), & t \in [c, b]. \end{cases}$$

Từ định nghĩa suy ra rằng

$$\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

III - Tính bất biến đối với phép biến đổi tham số. Ta nhắc lại ở đây định nghĩa phép thay tham số. Giả sử cho tuyến trơn

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

và $t = t(u)$ khả vi liên tục khi $u \in [a_1, b_1]$ $(a_1 < b_1)$ với đạo hàm $t'(u) > 0$ khắp nơi và

$$t(a_1) = a, \quad t(b_1) = b.$$

Khi đó hợp của ánh xạ $u \mapsto t(u)$ và

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

sẽ xác định một ánh xạ $\gamma_1 : u \mapsto \gamma[t(u)]$.

Ánh xạ đó cho ta một tuyến trơn và nói rằng γ_1 thu được từ γ bằng phép thay thế tham số.

Định lý 3.1.1. *Tích phân* (3.1) *là một bất biến đối với phép thay tham số. Nói cách khác, nếu $\gamma \sim \gamma^*$ thì*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma^*} f(z)dz.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa ta có

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt. \tag{3.5}$$

Thực hiện phép thay tham số ở vế phải của (3.5) và theo công thức vi phân hàm hợp, ta có

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{a_1}^{b_1} f[\gamma_1(u)]\gamma_1'(u)du = \int\limits_{\gamma^*} f(z)dz.$$

□

Từ định lý 3.1.1 ta rút ra kết luận quan trọng là: tích phân đã được xây dựng đối với tuyến vẫn có nghĩa cả đối với đường cong là lớp các tuyến tương đương.

Nói đúng hơn: Đối với tuyến bất kỳ xác định đường cong trơn nào đó thì tích phân của hàm liên tục theo tuyến ấy có một và chỉ một giá trị.

IV - Tính định hướng. Đối với tuyến trơn γ và tuyến ngược với nó γ^- (tuyến thu được từ γ bằng phép thay tham số $t \mapsto a+b-t, \gamma^-(t) = \gamma[a+b-t]$) ta có:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz.$$

Tính chất này được chứng minh như định lý 3.1.1.

3.1.2 Ước lượng tích phân

Định lý 3.1.2. *Giả sử γ là một tuyến trơn*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

và giả sử $t \mapsto f[\gamma(t)]$ là ánh xạ liên tục từ tập hợp compắx $\gamma[I]$ vào $\mathbb{C}$. Khi đó

$$\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\Big| \leqslant \sup_{\gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|,$$

trong đó $|\gamma|$ là độ dài của tuyến γ.

Chứng minh. Giả sử

$$J(f) = \int\limits_{\gamma} f(z)dz = |J(f)|e^{i\theta}.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
|J(f)| &= \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)dz = \int_a^b e^{-i\theta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}\big\{e^{-i\theta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)\big\}dt.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
|J(f)| &\leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_\gamma |f(z)||dz| \\
&\leqslant \sup_\gamma |f(z)| \cdot \int_\gamma |dz| = \sup_\gamma |f(z)| \cdot \int_a^b \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \sup_\gamma |f(z)||\gamma|.
\end{aligned}
$$

□

Hệ quả 3.1.1. *Nếu thêm vào các giả thiết của định lý 3.1.2 điều kiện $|f(z)| \leqslant M$, $\forall\, z \in \gamma$, trong đó M là hằng số nào đó thì*

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leqslant M \cdot |\gamma|.$$

3.1.3 Tính tích phân bằng phương pháp qua giới hạn

Giả sử Δ là phép phân hoạch $[a, b]$

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

trong đó đặt

$$\eta = \max_i |t_{i+1} - t_i|.$$

Ta cần tính hiệu σ_n giữa tích phân (3.1) với tổng

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[\gamma(\theta_i)]\big(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\big), \quad \theta_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

Vì

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} dz = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)$$

nên biểu thức trên có thể viết dưới dạng

$$\int\limits_a^b \tilde{f}(t) \cdot \gamma'(t)dt,$$

trong đó $\tilde{f}(t)$ là hàm trên $[a, b]$, bằng $f[\gamma(\theta_i)]$ trên khoảng (t_i, t_{i+1}). Như vậy

$$|\sigma_n| = \Big| \int\limits_a^b [f(\gamma(t) - \tilde{f}(t)]\gamma'(t)dt \Big|.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ là một số cho trước. Chọn η đủ nhỏ, sao cho với mọi cặp $t', t'' \in [a, b]$ thỏa mãn điều kiện $|t' - t''| < \eta$ ta đều có:

$$|f(\gamma(t')) - f(\gamma(t''))| < \frac{\varepsilon}{|\gamma|} \cdot$$

(Điều đó có thể thực hiện được vì hàm $f|\gamma(t)|$ liên tục trên $[a, b]$ do đó nó liên tục đều trên đoạn đó).

Khi đó

$$|f(\gamma(t)) - \tilde{f}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\gamma|}$$

và:

$$|\sigma_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\gamma|} \cdot |\gamma| = \varepsilon.$$

Từ kết quả vừa chứng minh suy ra rằng tích phân $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ là giới hạn của tổng tích phân Riemann khi $\eta \to 0$.

Từ điều vừa chứng minh và định lý 3.1.1 suy rằng tích phân đường theo tuyến không phụ thuộc phép tham số hóa tuyến đó: hai phép tham số hóa tương đương đối với tuyến chỉ cho một giá trị tích phân. Điều đặc biệt hơn nữa là các tổng Riemann có thể mô tả bởi các thuật ngữ hình học liên quan đến đường cong mà trên đó cần tính tích phân. Ta dừng lại để trình bày một cách ngắn gọn điều đó.

Giả sử $\mathcal{L}(A, B) \subset \mathbb{C}$ là đường cong có hướng với điểm đầu A và điểm cuối B và giả sử trên $\mathcal{L}(A, B)$ cho hàm $f(z)$. Thực hiện phép phân hoạch chia đường cong $\mathcal{L}(A, B)$ thành một số n tùy ý các cung nhỏ bởi các điểm $z_0 = A,\ z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = B$ nằm liên tiếp trên $\mathcal{L}(A, B)$ (tức là z_j đứng trước z_{j+1}, $j = 0, 1, \dots, n-1$). Trên mỗi cung nhỏ $\mathcal{L}_j = z_j\widehat{z_{j+1}}$ ta lấy điểm ξ_j tùy ý và lập tổng tích phân

$$J_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta z_j, \quad \Delta z_j = z_{j+1} - z_j.$$

Giả sử $r = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n-1} (\operatorname{diam} \mathcal{L}_j)$.

Nếu tồn tại giới hạn $\lim J_n$ khi $r \to 0$ không phụ thuộc vào cách phân hoạch $\mathcal{L}(A, B)$ thành các cung nhỏ và không phụ thuộc vào việc chọn các điểm trung gian ξ_j thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường của hàm f theo đường cong $\mathcal{L}(A, B)$:

$$\lim_{r \to 0} \sum_{j=0}^{r-1} f(\xi_j)\Delta z_j = \int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} f(z)dz.$$

Trong trường hợp khi $\mathcal{L}(A, B)$ là đường cong đóng $A \equiv B$ thì đặt

$\mathcal{L}(A, B) = \mathcal{L}$ và tích phân được ký hiệu là

$$J = \oint_{\mathcal{L}} f(z)dz \text{ hay } \int_{\mathcal{L}^+} f(z)dz \quad \text{nếu } \mathcal{L} \text{ có định hướng dương;}$$

$$J = \oint_{\mathcal{L}} f(z)dz \text{ hay } \int_{\mathcal{L}^-} f(z)dz \quad \text{nếu } \mathcal{L} \text{ có định hướng âm.}$$

Tiếp theo ta chứng minh định lý cho phép ta đưa việc tính tích phân trong miền phức về tính tích phân đường trong miền thực (xem (3.4))

Định lý 3.1.3. (Về sự tồn tại tích phân đường)

Nếu $\mathcal{L}$ là đường cong có hướng, đo được và hàm $f(z)$ liên tục trên $\mathcal{L}$ thì tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz$ tồn tại. Thêm vào đó, nếu $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ thì

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = \int_{\mathcal{L}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_{\mathcal{L}} v(x, y)dx + u(x, y)dy. \tag{3.6}$$

Chứng minh. Giả sử $z_j = x_j + iy_j$, $\xi_j = \zeta_j + i\eta_j$, $u_j = u(\zeta_j, \eta_j)$; $v_j = v(\zeta_j, \eta_j)$, $\Delta z_j = \Delta x_j + i\Delta y_j$. Ta biến đổi tổng tích phân của tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta z_j &= \sum_{j=0}^{n-1} (u_j + iv_j)(\Delta x_j + i\Delta y_j)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (u_j\Delta x_j - v_j\Delta y_j) + i\sum_{j=0}^{n-1} (v_j\Delta x_j + u_j\Delta y_j).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Nếu f liên tục trên $\mathcal{L}$ thì u và v liên tục trên $\mathcal{L}$ và do đó các tích phân ở vế phải (3.6) tồn tại. Vế phải của (3.7) gồm các tổng tích phân đối với các tích phân đường ở vế phải của công thức (3.6). Do đó khi $r \to 0$ vế phải của (3.7) dần đến vế phải của (3.6). Từ đó suy rằng vế trái của (3.7) có giới hạn không phụ thuộc vào cách phân hoạch đường cong $\mathcal{L}$ và không phụ thuộc vào cách chọn các điểm ξ_j. Như vậy tích phân ở vế trái của (3.6) tồn tại.

Qua giới hạn đẳng thức (3.7) khi $r \to 0$ ta thu được (3.6). Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} z^p dz, \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{3.8}$$

trong đó $\mathcal{L}$ là đường cong tùy ý có độ dài $|\mathcal{L}|$ với điểm đầu $z = a$ và điểm cuối $z = b$ (a và b là những số phức tùy ý).

Giải. Giả sử $z_0, z_1, \dots, z_n$ là các điểm chia trong phép phân hoạch đường cong $\mathcal{L}$. Trong trường hợp đó: $z_0 \equiv a$, $z_n \equiv b$ và

$$\begin{aligned} b^{p+1} - a^{p+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(z_k^{p+1} - z_{k-1}^{p+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(z_k^p + z_k^{p-1} z_{k-1} + \dots + z_{k-1}^p\right)\Delta z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} z_k^p \Delta z_k + \sum_{k=1}^{n} z_k^{p-1} z_{k-1}\Delta z_k + \dots + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} z_k^m z_{k-1}^{p-m}\Delta z_k + \dots + \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}^p \Delta z_k. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Tổng đầu và tổng cuối ở vế phải của (3.9) là các tổng tích phân thông thường: trong tổng thứ nhất ta lấy điểm trung gian là $\xi_k = z_k$, còn trong tổng cuối ta đặt $\xi_k = z_{k-1}$.

$$\lim_{r\to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^p \Delta z_k = \lim_{r\to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^p \Delta z_k = I.$$

Ta xét một tổng nào đó ở giữa, chẳng hạn

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} z_k^m z_{k-1}^{p-m} \Delta z_k, \quad 1 < m < p \tag{3.10}$$

và so sánh (3.10) với tổng cuối

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}^p \Delta z_k.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
|S'_n - S_n| &= \Big| \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}^{p-m}(z_k^m - z_{k-1}^m)\Delta z_k \Big| \\
&= \Big| \sum_{k=1}^{n} z_k^{p-m}\big(z_k^{m-1} + z_k^{m-2}z_{k-1} + \cdots + z_{k-1}^{m-1}\big)\Delta z_k^2 \Big| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_{k-1}|^{p-m}\big(|z_k|^{m-1} + \cdots + |z_{k-1}|^{m-1}\big)|\Delta z_k|^2 \\
&\leqslant mR^m \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|^2, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

trong đó R là số nào đó không bé hơn khoảng cách từ điểm bất kỳ của $\mathcal{L}$ đến gốc tọa độ.

Ta cần chứng minh rằng $\lim\limits_{r\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k|^2 = 0$. Thật vậy, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \cdot |\Delta z_k| \leqslant r \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \leqslant r|\mathcal{L}|.$$

Do đó khi $r \to 0$ thì tổng đã nêu dần đến 0.

Từ đó suy rằng

$$\lim_{r\to 0} S_n = \lim_{r\to 0} S'_n = I.$$

Qua giới hạn (3.9) khi $r \to 0$ ta thu được

$$b^{p+1} - a^{p+1} = (p+1)I \Rightarrow I = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}\,,$$

tức là

$$\int\limits_{\mathcal{L}(a,b)} z^p dz = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}\cdot$$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$J = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a}; \quad \gamma = \{z : |z-a| = r\}.$$

Giải. Phương trình của γ có thể viết dưới dạng:

$$z = a + re^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

(xem ví dụ 1 trong trường hợp khi $n = -1$).

Ta chọn phép phân hoạch $t_k = \dfrac{2k\pi}{n}$ và đặt

$$\tau_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = \frac{(2k+1)}{n}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Khi đó

$$z_k = a + re^{\frac{2k\pi}{2}i}, \quad \zeta_k = a + re^{\frac{2k+1}{n}\pi i}.$$

Tổng Riemann tương ứng có dạng

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{re^{\frac{2k+1}{n}\pi i}} r \cdot \left[e^{\frac{2(k+1)}{n}\pi i} - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}\right] = n\Big(e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}\Big) = n \cdot 2i \sin\frac{\pi}{n} \cdot$$

Do đó

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \lim_{n\to\infty}\left[2n \cdot i \sin\frac{\pi}{n}\right] = 2\pi i.$$

3.1.4 Dạng vi phân đúng và dạng vi phân đóng

Trong tiết này ta lưu ý một số khái niệm về dạng vi phân. Ta bắt đầu từ dạng vi phân trong miền thực.

I. Dạng vi phân đúng

Định nghĩa 3.1.2. Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là những hàm liên tục nhận giá trị thực hoặc phức trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Biểu thức

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = Pdx + Qdy$$

được gọi là *dạng vi phân* trong miền D.

Ví dụ. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\omega = f(z)dz &= [u(x, y) + iv(x, y)][dx + idy]\\ &= (u + iv)dx + (iu - v)dy\end{aligned}$$

là dạng vi phân trong miền D.

Định nghĩa 3.1.3. Dạng vi phân $\omega = Pdx + Qdy$ được gọi là *dạng vi phân đúng* trong miền D nếu tồn tại hàm F cho trong miền D sao cho

$$dF = \omega,$$

và khi đó hàm F được gọi là *nguyên hàm* của dạng vi phân ω.

Lưu ý rằng dạng vi phân đúng thường được gọi là *vi phân toàn phần* (hay *vi phân đủ*).

Định lý 3.1.4. *Nếu $\omega = Pdx + Qdy$ là dạng vi phân đúng trong miền D và F_1, F_2 là hai nguyên hàm của nó trong D thì $F_2(x, y) = F_1(x, y) + C$ trong D, trong đó C là hằng số nào đó.*

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $dF_1 = \omega \Rightarrow \dfrac{\partial F_1}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = Q$ và $dF_2 = \omega \Rightarrow \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y} = Q$. Ta xét hàm

$$\varphi = F_2 - F_1.$$

Ta có $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ trong D. Từ đó, áp dụng định lý [1] khẳng định rằng nếu mọi đạo hàm riêng của hàm đều bằng 0 trong miền D thì hàm đó là

[1]Nguyễn Văn Mậu, Đặng Huy Ruận, Nguyễn Thủy Thanh. Phép tính vi phân và tích phân hàm nhiều biến, Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội, 2001, (định lý 4, tr. 74)

hằng số trong D. Như thế $F_1 - F_2 = C \equiv \text{const}$ trong D, tức là $F_2 = F_1 + C$ trong D. □

Định lý 3.1.5. *Nếu $\omega = Pdx + Qdy$ là dạng vi phân đúng trong miền D; P và Q liên tục trong D và $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, B)$ là đường cong có hướng, đo được nằm trong D với điểm đầu A và điểm cuối B thì*

$$J = \int\limits_{\mathcal{L}} \omega = F(B) - F(A) \tag{3.12}$$

trong đó F là nguyên hàm nào đó của dạng vi phân ω.

Chứng minh. Giả sử $\operatorname{dist}(\mathcal{L}, \partial D) = \rho$. Ta ký hiệu

$$D^* = \Big\{ z \in D : \operatorname{dist}(z, \partial D) \geqslant \frac{\rho}{2} \Big\}.$$

Rõ ràng D^* là tập hợp đóng. Ta thực hiện phép phân hoạch tùy ý T chia đường cong $\mathcal{L}$ thành n cung tùy ý γ_j, $j = \overline{0, n-1}$ bởi các điểm chia $A_0 \equiv A$, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, $A_n \equiv B$ (A_j đứng trước A_{j+1} trên $\mathcal{L}$, $j = \overline{0, n-1}$). Ký hiệu

$$d_j = \operatorname{diam} \gamma_j, \quad d_T = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} d_j.$$

Đại lượng d_T gọi là *đường kính* của phép phân hoạch. Giả sử $d_T < \dfrac{\rho}{2}$. Khi đó

$$J^* = F(B) - F(A) = \sum_{j=0}^{n-1} \Big[F(A_{j+1}) - F(A_j) \Big], \quad A_j = (x_j, y_j)$$

Ta xét hàm

$$\varphi_j(t) = F(x_j + \Delta x_j t, y_j + \Delta y_j t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Ta nối A_j với A_{j+1} bởi đoạn thẳng và với $dT < \dfrac{\rho}{2}$ đoạn thẳng đó sẽ nằm trong D^*. Ta có

$$F(A_{j+1}) - F(A_j) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi_j), \quad 0 < \xi_j < 1$$

$$F(A_{j+1}) - F(A_j) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_j'', y_j'')\Delta x_j + \frac{\partial F}{\partial y}(x_j'', y_j'')\Delta y_j$$

Mặt khác tổng tích phân của $I = \int\limits_{\mathcal{L}} \omega$ có dạng

$$J_n = \sum_{j=0}^{n-1} \Big[\frac{\partial F}{\partial x}(x'_j, y'_j)\Delta x_j + \frac{\partial F}{\partial y}(x'_j, y'_j)\Delta y_j\Big].$$

Từ đó theo định nghĩa với $\varepsilon > 0$ và với phép phân hoạch đủ mịn ta sẽ có

$$|J_n - J| < \varepsilon$$

Bây giờ ta xét $|J_n - J^*|$. Ta có

$$\begin{aligned}
|J_n - J^*| &= \Big|\sum_{j=0}^{n-1} \Big\{\Big[\frac{\partial F}{\partial x}(x'_j, y'_j) - \frac{\partial F}{\partial x}(x''_j, y''_j)\Big]\Delta x_j \\
&\quad + \Big[\frac{\partial F}{\partial y}(x'_j, y'_j) - \frac{\partial F}{\partial y}(x''_j, y''_j)\Big]\Delta y_j\Big\}\Big| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{n-1}\Big\{|P(x'_j, y'_j) - P(x''_j, y''_j)||\Delta x_j| \\
&\quad + |Q(x'_j, y'_j) - Q(x''_j, y''_j)||\Delta y_j|\Big\}.
\end{aligned}$$

Hàm P và Q liên tục trong D và do đó theo định lý Cantor chúng liên tục đều trong D^*. Do đó với đường kính phép phân hoạch d_T đủ bé, mỗi hiệu ở vế phải không vượt quá ε và do đó

$$\begin{aligned}
|J_n - J^*| &\leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1}\big(|\Delta x_j| + |\Delta y_j|\big) \\
&\leqslant 2\varepsilon \sum_{j=0}^{n-1}\sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2} \leqslant 2\varepsilon|\mathcal{L}|
\end{aligned}$$

trong đó $|\mathcal{L}|$ là độ dài của $\mathcal{L}$. Như vậy

$$|J - J^*| \leqslant |J - J_n| + |J_n - J^*| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon|\mathcal{L}|.$$

Vì $\varepsilon > 0$ bé tùy ý nên $J = J^*$ và định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 3.1.4. Giả sử trong miền D cho dạng vi phân ω và giả sử tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega$ theo mọi đường cong đo được $\mathcal{L}$ trong D đều tồn tại.

Người ta nói rằng tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega$ *không phụ thuộc vào đường lấy tích phân* trong D nếu với hai điểm $A, B \in D$ bất kỳ và với hai đường cong đo được $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset D$ bất kỳ với điểm đầu A và điểm cuối B ta có

$$\int\limits_{\mathcal{L}_1} \omega = \int\limits_{\mathcal{L}_2} \omega.$$

Trong trường hợp này tích phân $\int \omega$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B của đường lấy tích phân và ta ký hiệu

$$\int\limits_A^B \omega = \int\limits_A^B Pdx + Qdy.$$

Định lý 3.1.6. *Giả sử D là miền của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, P và Q là những hàm liên tục trong D. Khi đó $\omega = Pdx + Qdy$ là dạng vi phân đúng trong D khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(I) *Tích phân* $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega = 0$ *theo mọi đường cong đóng đo được* $\mathcal{L} \subset D$.

(II) *Tích phân* $\int \omega$ *không phụ thuộc đường lấy tích phân trong* D.

Định lý 3.1.6 có thể phát biểu dưới dạng khác sau đây

Định lý 3.1.6*. *Giả sử D là miền của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, P và Q là những hàm liên tục trong D. Khi đó ba điều kiện sau đây là tương đương với nhau:*

(I) $\omega = Pdx + Qdy$ *là dạng vi phân đúng trong* D.

(II) *Tích phân* $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega$ *theo mọi đường cong đóng đo được trong* D *là bằng 0.*

(III) *Tích phân* $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega$ *không phụ thuộc đường lấy tích phân trong* D

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý theo lược đồ:

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III}) \Rightarrow (\mathrm{I}).$$

a) (I) $\Rightarrow$ (II). Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong đóng đo được, tức là điểm đầu A và điểm cuối B của nó trùng nhau. Vì điều kiện (I) thỏa mãn nên dạng ω có nguyên hàm F. Do đó theo định lý 3.1.5 ta có

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \omega = F(B) - F(A) = 0,$$

tức là điều kiện (II) thỏa mãn.

b) (II) $\Rightarrow$ (III). Ta lấy hai điểm $A, B \in D$ tùy ý và hai đường cong đo được $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$ từ A đến B, $\mathcal{L}_2^-$ là đường cong có hướng ngược với $\mathcal{L}_2$. Rõ ràng là $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2^-$ là đường cong đóng đo được. Vì điều kiện (II) thỏa mãn nên $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega = 0$. Do đó

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \omega = 0 \Rightarrow \int\limits_{\mathcal{L}_1} \omega + \int\limits_{\mathcal{L}_2^-} \omega = 0 \Rightarrow \int\limits_{\mathcal{L}_1} \omega - \int\limits_{\mathcal{L}_2} \omega = 0$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{L}_1} \omega = \int\limits_{\mathcal{L}_2} \omega,$$

tức là tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega$ không phụ thuộc đường lấy tích phân.

c) (III) $\Rightarrow$ (I). Giả sử điều kiện (III) thỏa mãn, tức là tích phân $\int \omega$ không phụ thuộc đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc điểm đầu và điểm cuối của đường đó. Ta lấy điểm đầu của đường lấy tích phân là điểm cố định (x_0, y_0) nào đó, còn điểm cuối là *điểm biến thiên* với tọa độ (ξ, η). Khi đó tích phân sẽ là hàm của ξ, η:

$$F(\xi, \eta) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(\xi,\eta)} \omega = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(\xi,\eta)} Pdx + Qdy.$$

Ta cần chứng minh rằng

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in D.$$

Ta cần tính $\dfrac{F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)}{h}$.

Đại lượng $F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)$ là tích phân của $Pdx + Qdy$ theo đường với điểm đầu (ξ, η) và điểm cuối $(\xi + h, \eta)$. Theo điều kiện (III) ta có thể lấy đường đó là đoạn thẳng nằm ngang nối (ξ, η) với $(\xi + h, \eta)$. Mặt khác vì

$$\int_{(\xi,\eta)}^{(\xi+h,\eta)} Qdy = 0$$

nên

$$\begin{aligned} F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(\xi+h,\eta)} \omega - \int_{(x_0,y_0)}^{(\xi,\eta)} \omega = \int_{(\xi,\eta)}^{(\xi+h,\eta)} \omega \\ &= \int_{\xi}^{\xi+h} P(x, \eta) dx = hP(\xi + \theta h, \eta), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

theo định lý giá trị trung bình đối với tích phân. Từ đó suy ra

$$\frac{F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)}{h} = P(\xi + \theta h, \eta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Vì $P(x, y)$ là hàm liên tục nên khi $h \to 0$ ta thu được

$$F'_{\xi}(\xi, \eta) = \lim_{h\to 0} \frac{F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)}{h} = P(\xi, \eta).$$

Tương tự ta chứng minh được rằng $F'_{\eta}(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.1.2. Trong trường hợp đặc biệt khi $\mathcal{L}$ là biên của hình chữ nhật thuộc D (cùng với $\mathcal{L}$) với các cạnh song song với các trục tọa độ và ω là dạng đúng trong D thì ta có

$$\int_{\mathcal{L}} \omega = 0. \tag{3.13}$$

Như vậy (3.13) là điều kiện cần để dạng ω có nguyên hàm. Nhưng điều kiện đó không phải bao giờ cũng là điều kiện đủ để dạng vi phân ω có nguyên hàm.

Nhận xét 3.1.3. Nếu D là hình tròn, P và Q là những hàm liên tục trong D và

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \omega = 0, \quad \omega = Pdx + Qdy$$

đối với biên $\mathcal{L}$ của hình chữ nhật bất kỳ nằm trong D (cùng với biên của nó) với các cạnh song song với các trục tọa độ thì ω là dạng vi phân đúng.

Chứng minh. Thật vậy, ta cố định điểm $(x_0, y_0) \in D$ và $(\xi, \eta) \in D$ là điểm tùy ý. Khi đó tồn tại hai tuyến $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$ với điểm đầu (x_0, y_0) và điểm cuối (ξ, η) và mỗi tuyến được tạo nên từ hai cạnh của hình chữ nhật với hai cạnh song song với trục tọa độ và (x_0, y_0) và (ξ, η) là hai đỉnh đối diện. Rõ ràng là

$$\int\limits_{\mathcal{L}_1} \omega = \int\limits_{\mathcal{L}_2} \omega.$$

Giả sử $F(\xi, \eta)$ là giá trị chung của các tích phân ấy. Tương ứng với điều đó ta có:

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \int\limits_{x_0}^{\xi} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{\eta} Q(\xi, y)dy \\ &= \int\limits_{y_0}^{\eta} Q(x_0, y)dy + \int\limits_{x_0}^{\eta} P(x, \eta)dx. \end{aligned}$$

Tương tự như trong chứng minh định lý 10.6* ta có $F'_\xi(\xi, \eta) = P(\xi, \eta)$, $F'_\eta(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta)$ và do vậy $F(\xi, \eta)$ là nguyên hàm của ω trong D, tức là ω là dạng vi phân đúng trong D. □

II. Dạng vi phân đóng

Định nghĩa 3.1.5. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền; P, Q là những hàm liên tục trong D. Dạng $\omega = Pdx + Qdy$ được gọi là *dạng vi phân đóng* trong D nếu đối với mỗi điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ đều tồn tại lân cận $\mathcal{U}(M_0) \subset D$ của điểm M_0 sao cho trong lân cận đó ω có nguyên hàm.

Nói một cách ngắn gọn: ta đòi hỏi rằng dạng vi phân có nguyên hàm địa phương.

Ta có thể giả thiết rằng lân cận nói trên là hình tròn với tâm tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Khi đó từ các nhận xét 10.2 và 10.3 và phương pháp chứng minh định lý 3.1.6 ta có

Định lý 3.1.7. *Dạng vi phân $\omega = Pdx + Qdy$ với các hệ số P và Q liên tục trong miền D là dạng vi phân đóng khi và chỉ khi đối với hình chữ nhật đủ bé bất kỳ nằm trong D (cùng với biên của nó) với các cạnh song song với trục tọa độ đều thỏa mãn hệ thức $\int\limits_{\mathcal{L}} \omega = 0$, trong đó $\mathcal{L}$ là biên của hình chữ nhật đó.*

Định lý 3.1.8. *Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền; $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$ là những hàm liên tục trong D. Dạng vi phân $\omega = Pdx + Qdy$ là đóng trong D khi và chỉ khi*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in D.$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Theo giả thiết ω là dạng đóng trong D. Do đó $\forall (x_0, y_0) \in D \;\; \exists\, F$ là hàm trong lân cận của điểm (x_0, y_0) sao cho $dF = \omega$ trong lân cận đó, tức là

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Lấy đạo hàm đẳng thức thứ nhất theo y và đẳng thức thứ hai theo x ta thu được

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \cdot$$

Vì $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ và $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục nên các đạo hàm riêng hỗn hợp ở vế phải liên tục. Do đó chúng bằng nhau và từ đó

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot$$

Điều kiện đủ. Trong lân cận điểm $(x_0, y_0) \in D$ ta xét hàm

$$F(\xi, \eta) = \int\limits_{x_0}^{\xi} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{\eta} Q(\xi, y)dy.$$

Đó là tích phân của dạng $\omega = Pdx + Qdy$ theo đường gấp khúc đi từ điểm (x_0, y_0) đến (ξ, η) với các cạnh của nó song song với các trục tọa độ và đỉnh (x_0, y_0), (ξ, y_0) và (ξ, η).

Lấy đạo hàm $F(\xi, \eta)$ theo ξ ta thu được

$$\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} = P(\xi, y_0) + \int\limits_{y_0}^{\eta} \frac{\partial Q(\xi, y)}{\partial \xi} dy.$$

Nhưng theo giả thiết $\dfrac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(\xi, y)$ và ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= P(\xi, y_0) + \int\limits_{y_0}^{\eta} \frac{\partial P(\xi, y)}{\partial y} dy \\ &= P(\xi, y_0) + P(\xi, \eta) - P(\xi, y_0) \\ &= P(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta)$. Như vậy $F(\xi, \eta)$ là nguyên hàm của ω trong lân cận của điểm (x_0, y_0), tức là ω là dạng vi phân đóng. $\square$

Nhận xét 3.1.4. Từ định nghĩa và các kết quả trên đây ta thấy rằng mọi dạng đúng đều là dạng đóng. Điều khẳng định ngược lại nói chung là không đúng nếu không có những điều kiện bổ sung. Ta chứng tỏ điều đó bằng ví dụ sau

Giả sử $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ và trong D cho

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\cdot$$

Hiển nhiên ω là dạng đóng trong D vì $\omega = d\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x}$ tại lân cận nào đó của mỗi điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tuy nhiên ω không phải là dạng đúng. Thật vậy, nếu Γ là đường tròn $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ thì

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t\cdot(-R\sin t)}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}dt\\ &= \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

III. Bây giờ ta chuyển sang xét dạng vi phân trong miền phức.

Định nghĩa 3.1.6. 1. Dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ được gọi là *dạng vi phân đúng trong miền* D nếu tồn tại hàm $F(z)$ thỏa mãn điều kiện $F'(z) = f(z)$, $\forall\, z \in D$.

2. Dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ được gọi là *dạng vi phân đóng trong* D nếu $\forall\, z_0 \in D$ đều tồn tại lân cận $U(z_0)$ của điểm z_0 và tồn tại hàm $F(z)$ trong $U(z_0)$ là nguyên hàm đối với $f\big|_{U(z_0)}$.

Đặt $f(z) = u + iv$ và $dz = dx + idy$. Ta có

$$\omega = f(z)dz = udx - vdy + i(vdx + udy) = \omega_1 + i\omega_2.$$

Bổ đề 3.1.1. *Dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ là dạng đúng (dạng đóng) trong miền D khi và chỉ khi các dạng vi phân $\omega_1 = udx - vdy$ và $\omega_2 = vdx + udy$ là dạng đúng (tương ứng: dạng đóng) trong D. Đồng thời, nếu $F = U + iV$ là nguyên hàm đối với $f = u + iv$ thì U và V sẽ là nguyên hàm đối với ω_1 và ω_2 tương ứng.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh bổ đề cho trường hợp dạng vi phân đúng.

1. Giả sử $\omega = f(z)dz$ là dạng vi phân đúng trong D nghĩa là $\exists\, F$ là nguyên hàm đối với f. Giả sử $F = U + iV$.

Ta có

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv.$$

Từ đó rút ra $\dfrac{\partial U}{\partial x} = u$, $\dfrac{\partial V}{\partial x} = v$. Vì hàm F chỉnh hình trong D nên

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}\,; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\cdot$$

Và bây giờ ta có

$$\omega_1 = udx - vdy = \frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

và do đó ω_1 là dạng đúng trong D và U là nguyên hàm của nó.

Tương tự

$$\omega_2 = vdx + udy = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$$

nghĩa là ω_2 - dạng đúng và V là nguyên hàm đối với nó.

2. Bây giờ giả sử ω_1 và ω_2 là những dạng vi phân đúng và U, V là nguyên hàm của chúng. Ta có

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ và $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$, nghĩa là điều kiện Cauchy - Riemann thỏa mãn. Do đó $F = U + iV$ chỉnh hình trong D và

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f(z).$$

Do đó F là nguyên hàm đối với f trong D.

Đối với các dạng vi phân đóng định lý cũng được chứng minh tương tự. □

Nhờ bổ đề vừa chứng minh ta có thể chuyển một số kết quả trong lý thuyết dạng vi phân trong miền thực sang cho dạng vi phân trong miền phức. Để làm ví dụ, ta sẽ chứng minh hai định lý sau đây.

Định lý 3.1.9. *Nếu* $\omega = f(z)dz$ *là dạng vi phân đúng trong miền* $D \subset C$*,* F_1 *và* F_2 *là hai nguyên hàm đối với* f *trong* D *thì*

$$F_2(z) = F_1(z) + C, \quad \forall\, z \in D, \quad C = const.$$

Chứng minh. Thật vậy, $F_2(z) = U_2 + iV_2$, $F_1(z) = U_1 + iV_1$, trong đó U_1, U_2 là nguyên hàm đối với $\omega_1 = udx - vdy$ $(f = u + iv)$, còn V_1 và V_2 là nguyên hàm đối với $\omega_2 = vdx + udy$. Do đó $U_2 = U_1 + C_1$, $V_2 = V_1 + C_2$ trong đó C_1 và C_2 là những hằng số. Bây giờ ta có

$$\begin{aligned} F_2(z) = U_2 + iV_2 &= U_1 + iV_1 + C_1 + iC_2 = \\ &= F_1(z) + C, \quad C = C_1 + iC_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

$\square$

Định lý 3.1.10. *Giả sử* f *là hàm liên tục trong miền* $D \subset \mathbb{C}$*. Nếu* $\int f(z)dz$ *không phụ thuộc vào đường lấy tích phân trong* D *và* F *là nguyên hàm đối với* f *trong* D *thì* $\forall\, a, b \in D$ *ta có*

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Chứng minh. Đặt $F(z) = U(z) + iV(z)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z)dz &= \int_a^b udx - vdy + i\int_a^b vdx + udy \\ &= U(b) - U(a) + i(V(b) - V(a)) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

$\square$

3.1.5 Tích phân đường phụ thuộc tham số

Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong có hướng đo được và D là tập hợp mở của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, còn $f(\zeta, z)$ là hàm *xác định, đơn trị* khi $z \in D$ và $\zeta \in \mathcal{L}$. Giả sử z_0 là điểm tụ của D (z_0 là điểm hữu hạn hay điểm vô cùng). Ta nhắc lại một vài định nghĩa liên quan đến sự hội tụ của họ hàm phụ thuộc tham số.

Định nghĩa 3.1.7. 1^+. Hàm $\phi(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{L}$ được gọi là *giới hạn* của hàm $f(\zeta, z)$ (họ hàm!) khi $z \to z_0$ ($z_0 \neq \infty$) nếu

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0, \forall \zeta \in \mathcal{L}\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, \zeta) > 0 : \forall z \in D \cap \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}\\ &\qquad \Rightarrow |f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

2^+. Hàm $\phi(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{L}$ được gọi là giới hạn của hàm $f(\zeta, z)$ khi $z \to \infty$, $z \in D$ nếu

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \forall \zeta \in \mathcal{L}\ \exists \Delta = \Delta(\varepsilon, \zeta) > 0 : \forall z \in D \cap \{z : |z| > \Delta\} \Rightarrow\\ |f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \varepsilon.\end{gathered}$$

3^+. Hàm $f(\zeta, z)$ *dần đều đối với* $\zeta \in \mathcal{L}$ *đến hàm* $\phi(\zeta)$ khi $z \to z_0$ (khi $z \to \infty$) nếu: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (tương ứng: $\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$) sao cho $\forall z \in D \cap \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ (tương ứng: $z \in D \cap \{z : |z| > \Delta)$ và $\forall \zeta \in \mathcal{L}$ thì

$$|f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \varepsilon.$$

Ký hiệu:

$$f(\zeta, z) \underset{(z \to z_0)}{\rightrightarrows} \phi(\zeta)$$

Tương tự như trường hợp dãy hàm (tức là khi $\mathcal{L} \equiv \mathbb{N}$, $D \equiv \mathbb{R}$) có thể chứng minh rằng giới hạn của họ hàm liên tục hội tụ đều là hàm liên tục. Áp dụng kết quả này ta chứng minh

Định lý 3.1.11. *Giả sử:* 1^+ *$\mathcal{L}$ là đường cong có hướng đo được, $D \subset \mathbb{C}$ là tập hợp mở với điểm tụ là z_0;*

2^+ *$f(\zeta, z)$, $\zeta \in \mathcal{L}$, $z \in D$ là hàm liên tục trên $\mathcal{L}$ $\forall\, z \in D$ như là hàm của ζ.*

3^+ $f(\zeta, z) \underset{(z\to z_0)}{\rightrightarrows} \phi(\zeta)$.

Khi đó

$$\lim_{z\to z_0} \int_{\mathcal{L}} f(\zeta, z)d\zeta = \int_{\mathcal{L}} \lim_{z\to z_0} f(\zeta, z)d\zeta = \int_{\mathcal{L}} \phi(\zeta)d\zeta$$

tức là phép qua giới hạn dưới dấu tích phân đường có thể thực hiện được.

Chứng minh. Theo nhận xét ở trên hàm giới hạn $\phi(\zeta)$ là hàm liên tục trên $\mathcal{L}$.

Vì $f(\zeta, z) \rightrightarrows \phi(\zeta)$ khi $z \to z_0$ nên: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall\, \zeta \in \mathcal{L}$

$$|f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{|\mathcal{L}|}, \quad z \in D \cap \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

trong đó $|\mathcal{L}|$ là độ dài của đường cong $\mathcal{L}$. Áp dụng định lý 3.1.2 về ước lượng tích phân ta có

$$\Big|\int_{\mathcal{L}} [f(\zeta, z) - \phi(\zeta)]d\zeta\Big| \leqslant \int_{\mathcal{L}} |f(\zeta, z) - \phi(\zeta)|dS < \frac{\varepsilon}{|\mathcal{L}|}|\mathcal{L}| = \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ là số tùy ý nên từ đó suy ra kết luận của định lý. □

Từ định lý 3.1.11 ta thu được các trường hợp riêng sau đây.

Hệ quả 3.1.2. *Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong có hướng đo được, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hàm liên tục trên $\mathcal{L}$ và $f_n \underset{(n\to\infty)}{\rightrightarrows} f(\zeta)$ trên $\mathcal{L}$. Khi đó*

$$\int_{\mathcal{L}} f_n(\zeta)d\zeta \underset{(n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathcal{L}} f(\zeta)d\zeta.$$

Hệ quả 3.1.3. *Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong có hướng đo được, chuỗi*

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n(\zeta) = u_1(\zeta) + u_2(\zeta) + \cdots + u_n(\zeta) + \dots$$

các hàm liên tục trên $\mathcal{L}$ hội tụ đều trên $\mathcal{L}$ đến tổng $S(\zeta)$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(\zeta)$ có thể tích phân theo $\mathcal{L}$ từng số hạng với nghĩa là

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \Big[\sum_{n\geqslant 1} u_n(\zeta)\Big] d\zeta = \sum_{n\geqslant 1} \int\limits_{\mathcal{L}} u_n(\zeta) d\zeta = \int\limits_{\mathcal{L}} S(\zeta) d\zeta.$$

Bổ đề 3.1.2. (Bất đẳng thức Lagrange) *Giả sử đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ và $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi tại mọi điểm của khoảng (a, b). Khi đó*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(\xi)|(b - a), \quad a < \xi < b.$$

Chứng minh. Giả sử $\varphi \in \operatorname{Arg}[f(b) - f(a)]$. Khi đó

$$|f(b) - f(a)| = e^{-i\varphi}[f(b) - f(a)] = e^{-i\varphi} f(b) - e^{-i\varphi} f(a).$$

Đặt $e^{-i\varphi} f(x) = u(x) + iv(x), \forall\, x \in [a, b]$. Ta có

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= (u(b) + iv(b)) - (u(a) + iv(a)) \\ &= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)). \end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng vế cuối cùng phải là số thực (vì vế đầu tiên là số thực). Do đó $v(b) - v(a) = 0$. Từ đó theo định lý Lagrange đối với hàm u, tồn tại điểm $\xi \in (a, b)$ sao cho

$$|f(b) - f(a)| = u'(\xi)(b - a) \leqslant |f'(\xi)|(b - a)$$

□

Định lý 3.1.12. (Đạo hàm tích phân đường theo tham số)

Giả sử

1^+ $\mathcal{L}$ là đường cong có hướng đo được, D là tập hợp mở của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

2^+ $f(\zeta, z)$, $z \in D$, $\zeta \in \mathcal{L}$ là hàm liên tục theo ζ trên $\mathcal{L}$ $\forall\, z \in D$ còn $f'_z(\zeta, z)$ là hàm liên tục trên $\mathcal{L} \times D$ và

$$\varphi(z) = \int\limits_{\mathcal{L}} f(\zeta, z)d\zeta, \quad z \in D.$$

Khi đó

$$\varphi'(z) = \int\limits_{\mathcal{L}} f'_z(\zeta, z)d\zeta \tag{3.14}$$

và $\varphi'(z)$ liên tục trên D hay là

$$\frac{d}{dz}\int\limits_{\mathcal{L}} f(\zeta, z)d\zeta = \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial z} f(\zeta, z)d\zeta.$$

Chứng minh. Ta cần chứng minh rằng biểu thức

$$\frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z} = \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{f(\zeta, z + \Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} d\zeta$$

dần đến (3.14) khi $\Delta z \to 0$, hay là

$$J(\Delta z) = \int\limits_{\mathcal{L}} \Big[\frac{f(\zeta, z + \Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta, z)\Big] d\zeta \to 0, \quad \Delta z \to 0.$$

Trước hết, theo định lý 3.1.2 về ước lượng tích phân ta có

$$|J(\Delta z)| \leqslant \int\limits_{\mathcal{L}} \Big|\frac{f(\zeta, z + \Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta, z)\Big| ds.$$

Xét hàm

$$g(t) = \frac{f(\zeta, z + t\Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta, z)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Lagrange cho hàm $g(t)$ ta thu được

$$\begin{aligned}|g(1)-g(0)| &= \Big|\frac{f(\zeta,z+\Delta z)-f(\zeta,z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta,z)\Big| \\ &\leqslant |g'(\tau)|\cdot 1 = \Big|f'_z(\zeta,z+\tau\Delta z)-f'_z(\zeta,z)\Big|, \quad 0<\tau<1.\end{aligned}$$

Như vậy

$$|J(\Delta z)| \leqslant \int\limits_{\mathcal{L}} |f'_z(\zeta,z+\tau\Delta z)-f'_z(\zeta,z)|ds.$$

Vì $f'_z(\zeta,z)$ liên tục trên $\mathcal{L}\times D$ nên nó liên tục đều trên tập hợp đóng $\mathcal{L}\times\overline{\mathcal{U}(z)}$, trong đó $\mathcal{U}(z)$ là lân cận nào đó của điểm z: $\overline{\mathcal{U}(z)}\subset D$. Do đó $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$:

$$|f'_z(\zeta,z+\tau\Delta z)-f'_z(\zeta,z)|<\varepsilon, \quad \forall\,\Delta z: |\Delta z|<\delta,\ z+\Delta z\in\overline{\mathcal{U}(z)},\ \forall\,\zeta\in\mathcal{L}.$$

Như vậy

$$|J(\Delta z)| \leqslant \int\limits_{\mathcal{L}} \varepsilon ds = \varepsilon|\mathcal{L}|, \quad |\Delta z|<\delta$$

và do đó $J(\Delta z)\to 0$, khi $\Delta z\to 0$.

Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned}|\varphi'(z_1)-\varphi'(z_2)| &\leqslant \int\limits_{\mathcal{L}} |f'_z(\zeta,z_1)-f'_z(\zeta,z_2)|ds \\ &\leqslant \int\limits_{\mathcal{L}} \varepsilon ds = \varepsilon|\mathcal{L}|, \quad |z_1-z_2|<\delta,\end{aligned}$$

tức là hàm $\varphi'(z)$ liên tục trên D. □

3.2 Lý thuyết Cauchy

3.2.1 Nguyên hàm địa phương của hàm chỉnh hình

Bây giờ ta chuyển sang xét vấn đề tồn tại nguyên hàm đối với hàm chỉnh hình. Ta có

Định nghĩa 3.2.1. Giả sử hàm $f \in \mathcal{H}(D)$. Hàm $F(z) \in \mathcal{H}(D)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(z)$ nếu

$$F'(z) = f(z), \quad \forall\, z \in D.$$

Nếu $F(z)$ là một nguyên hàm nào đó đối với hàm chỉnh hình $f(z)$ trong miền D thì tập hợp mọi nguyên hàm của nó được cho bởi công thức $F(z)+C$, trong đó C là hằng số tùy ý (xem tiết **3.1.4**).

Để nghiên cứu vấn đề tồn tại nguyên hàm đối với hàm chỉnh hình, đầu tiên ta xét vấn đề tồn tại nguyên hàm địa phương tác dụng trong lân cận của một điểm nào đó. Ta bắt đầu việc đó từ việc chứng minh định lý cực kỳ quan trọng sau đây.

Định lý 3.2.1. (Cauchy) *Giả sử D là miền của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ thì dạng vi phân $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng trong D.*

Chứng minh. 1. Đầu tiên ta chứng minh rằng $\displaystyle\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ trong đó $\partial\Delta$ là biên của tam giác Δ tùy ý nằm trong D có định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Giả sử rằng

$$\Big|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz\Big| = \alpha(\Delta) > 0. \tag{3.15}$$

Ta chia Δ thành bốn tam giác con bởi các đường trung bình và giả thiết rằng biên của Δ và của các tam giác con này đều được định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Giả sử bốn tam giác con được ký hiệu là Δ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ với biên tương ứng $\partial\Delta_i$. Vì những tích phân theo các đường trung bình được lấy hai lần theo hai hướng ngược nhau nên chúng triệt tiêu lẫn nhau và ta có

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\partial\Delta_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \alpha(\Delta_i).$$

Từ đó rút ra

$$\alpha(\Delta) = \Big|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)dz\Big| + \Big|\int\limits_{\partial\Delta_2} f(z)dz\Big| + \Big|\int\limits_{\partial\Delta_3} f(z)dz\Big| + \Big|\int\limits_{\partial\Delta_4} f(z)dz\Big|.$$

Do đó trong số bốn hình tam giác Δ_i, $i = 1,2,3,4$ tồn tại ít nhất một hình mà $\alpha(\Delta_i) \geqslant \dfrac{\alpha(\Delta)}{4}$. Ta ký hiệu tam giác đó là Δ^1. Như vậy

$$\Big|\int\limits_{\partial\Delta^1} f(z)dz\Big| \geqslant \frac{\alpha(\Delta)}{4}\cdot$$

Ta lại chia tam giác Δ^1 thành bốn tam giác bằng nhau bởi các đường trung bình như ở trên. Trong số bốn tam giác vừa thu được, tồn tại một hình, giả sử đó là hình tam giác Δ^2, thỏa mãn điều kiện

$$\Big|\int\limits_{\partial\Delta^2} f(z)dz\Big| \geqslant \frac{\alpha(\Delta)}{4^2}\cdot$$

Tiếp tục quá trình này vô hạn lần, ta có thể đi đến dãy vô hạn các hình tam giác lồng nhau:

1.

$$(\Delta^1) \supset (\Delta^2) \supset \cdots \supset (\Delta^k) \supset (\Delta^{k+1}) \supset \ldots,$$
$$(\Delta^k) \subset D, \quad \forall\, k \tag{3.16}$$

2. độ dài

$$|\partial\Delta^n| = \frac{1}{2}|\partial\Delta^{n-1}| = \frac{1}{2^n}|\partial\Delta|,$$

3.

$$\Big|\int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz\Big| \geqslant \frac{\alpha(\Delta)}{4^n}\cdot \tag{3.17}$$

Từ tính chất (3.16) suy ra rằng tồn tại điểm z_0 duy nhất thuộc mọi tam giác Δ^n, $z_0 \in \Delta^n$, $\forall n$. Hiển nhiên $z_0 \in D$ và do đó hàm $f(z)$ chỉnh hình tại điểm z_0. Từ đó suy ra rằng $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon; \quad \forall z \in D : |z - z_0| < \delta. \tag{3.18}$$

Rõ ràng là $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N$ thì $\partial\Delta^n$ nằm trong hình tròn $\{|z - z_0| < \delta\}$ và do đó $\forall z \in \partial\Delta^n$ ta có (3.18) hay là

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|.$$

Ta lưu ý rằng khoảng cách $|z' - z|$ giữa hai điểm của một tam giác luôn luôn bé hơn chu vi của nó. Do đó đối với $z \in \partial\Delta^n$ ta có

$$\varepsilon|z - z_0| < \varepsilon \cdot |\partial\Delta^n| = \varepsilon \cdot \frac{|\partial\Delta|}{2^n} \cdot \tag{3.19}$$

Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\partial\Delta^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz = \\ &= \int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz - f(z_0) \int\limits_{\partial\Delta^n} dz + f'(z_0) \int\limits_{\partial\Delta^n} zdz - z_0 f'(z_0) \int\limits_{\partial\Delta^n} dz. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Theo định nghĩa tích phân ta có

$$\int\limits_{\partial\Delta^n} dz = 0; \quad \int\limits_{\partial\Delta^n} zdz = 0$$

và từ (3.20) rút ra

$$\int\limits_{\partial\Delta^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz = \int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz.$$

Do đó từ đẳng thức vừa viết và từ (3.17) và (3.19) suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\Delta)}{4^n} &\leqslant \Big|\int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz\Big| \\ &= \Big|\int\limits_{\partial\Delta^n} [f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]dz\Big| \\ &\leqslant \varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}\cdot\end{aligned}$$

và từ đó

$$\alpha(\Delta) \leqslant \varepsilon|\partial\Delta|^2. \tag{3.21}$$

Vì ε là đại lượng bé tùy ý, còn $|\partial\Delta|$ và tích phân $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz$ không phụ thuộc vào ε nên từ bất đẳng thức (3.21) suy ra rằng $\alpha(\Delta) = 0$, hay là $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

2. Từ điều chứng minh trong 1) suy ra rằng $\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = 0$ đối với hình chữ nhật bất kỳ $R \subset D$ cùng với biên $\gamma(R)$ của nó. Rõ ràng là $\int\limits_{\gamma(R)} \omega_1 = 0$, $\int\limits_{\gamma(R)} \omega_2 = 0$ và do đó ω_1 và ω_2 là những dạng vi phân đúng trong lân cận mỗi điểm của miền D (xem định lý 3.1.3), nghĩa là: ω_1 và ω_2 là những dạng vi phân đóng trong D. Từ bổ đề đã chứng minh trong **3.1.4** suy ra rằng $\omega = f(z)dz = \omega_1 + i\omega_2$ là dạng đóng trong D. Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Định lý 3.2.2. *Nếu hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ thì f có nguyên hàm địa phương và nguyên hàm này chỉnh hình.*

Chứng minh. Thật vậy, vì $f \in \mathcal{H}(D)$ nên $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng trong D. Do đó sự tồn tại nguyên hàm địa phương được suy từ định nghĩa dạng vi phân đóng. Nguyên hàm đó là hàm chỉnh hình vì hàm chỉnh hình f là đạo hàm của nó. □

Định lý 3.2.3. *Giả sử hàm liên tục $f(z)$ chỉnh hình tại mỗi điểm của miền D có thể trừ ra những điểm nằm trên đường thẳng δ song song với trục thực. Khi đó dạng vi phân $f(z)dz$ là dạng đóng trong D.*

Trường hợp đặc biệt, nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình tại mọi điểm của miền D, có thể trừ ra những điểm cô lập thì $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng.

Như vậy, định lý 3.2.3 là sự khái quát hóa của định lý 3.2.1.

Chứng minh. Ta cần chứng minh tích phân

$$\int\limits_{\partial R} f(z)dz = 0 \tag{3.22}$$

đối với biên ∂R của hình chữ nhật $R \subset D$ bất kỳ.

1. Nếu hình chữ nhật R không cắt δ thì (3.22) là hiển nhiên.

2. Giả sử một cạnh của R nằm trên δ. Giả sử hình chữ nhật R có bốn đỉnh là u, $u+a$, $u+ib$, $u+a+ib$ trong đó u, $u+a \in \delta$; $a, b \in \mathbb{R}$. Ta ký hiệu $R(\varepsilon)$ là hình chữ nhật với bốn đỉnh là

$$u+i\varepsilon, \quad u+a+i\varepsilon, \quad u+ib, \quad u+a+ib,$$

trong đó ε là số dương đủ bé. Khi đó

$$\int\limits_{\partial R(\varepsilon)} f(z)dz = 0.$$

Nhưng khi $\varepsilon \to 0$ thì $\int\limits_{\partial R(\varepsilon)} f(z)dz \to \int\limits_{\partial R} f(z)dz$. Do đó

$$\int\limits_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

3. Bây giờ giả sử δ chia hình chữ nhật R thành hai hình chữ nhật R' và R''. Từ điều chứng minh trên suy ra rằng $\int\limits_{\partial R'} f(z)dz = 0$ và $\int\limits_{\partial R''} f(z)dz = 0$. Do đó

$$\int\limits_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

□

3.2.2 Nguyên hàm của hàm chỉnh hình theo tuyến

Trong tiết trước ta đã chứng minh rằng mọi hàm chỉnh hình trong miền D đều có nguyên hàm địa phương trong miền đó. Vấn đề về sự tồn tại nguyên hàm toàn cục trong D có phần phức tạp hơn. Trong tiết này ta sẽ nêu *phương pháp "dán"* các nguyên hàm địa phương thành nguyên hàm theo tuyến.

Định nghĩa 3.2.2. Giả sử trong miền D cho hàm f và $\gamma : I \to D$ $(I = [a, b])$ là tuyến liên tục tùy ý trong miền D. Hàm

$$F : I \mapsto \mathbb{C}$$

được gọi là nguyên hàm của hàm f dọc theo tuyến γ nếu

1. hàm F liên tục trên $[a, b]$,

2. với điểm $t_0 \in [a, b]$ tùy ý, tồn tại lân cận $U \subset D$ của điểm $\gamma(t_0)$ mà tại đó hàm f có nguyên hàm F_u sao cho $F_u(\gamma(t)) = f(t)$ với mọi t thuộc lân cận $u(t_0) \subset [a, b]$.

Định lý 3.2.4. *Giả sử hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ và γ là tuyến (liên tục) bất kỳ thuộc D. Khi đó nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ bao giờ cũng tồn tại và xác định đơn trị với sự sai khác một hằng số cộng.*

Chứng minh. 1. *Sự tồn tại.* Đối với mỗi giá trị $t_0 \in [a, b]$, tồn tại lân cận $v(t_0) \subset [a, b]$ sao cho ánh xạ γ biến nó vào hình tròn mở mà tại đấy hàm f có nguyên hàm (định lý 3.2.2). Vì đoạn $[a,b]$ compắc nên tồn tại một phép phân hoạch hữu hạn đoạn $[a,b]$ thành các đoạn con $I_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n$ sao cho $\gamma(I_k)$ thuộc hình tròn $U_k \subset D$, $k = 1, 2, \dots, n$ mà tại đó hàm f có nguyên hàm F_k. Trong số những nguyên hàm của f (chúng khác nhau bởi một hằng số cộng) ta sẽ chọn một nguyên hàm tùy ý. Ta ký hiệu nó là F_1. Ta xét một nguyên hàm nào đó của f trong hình tròn U_2. Vì $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ (vì chứa điểm $\gamma(t_1)$) và liên thông nên nguyên hàm này chỉ sai khác F_1 bởi một hằng số cộng (vì đó là nguyên hàm của cùng một hàm). Do đó, trong các nguyên hàm của f trong U_2, tồn tại một nguyên hàm F_2 mà $F_2 \equiv F_1$ trong giao $U_1 \cap U_2$. Giả sử

$$G_1 = \begin{cases} F_1 & \text{trong } U_1, \\ F_2 & \text{trong } U_2. \end{cases}$$

Khi đó G_1 là nguyên hàm của hàm f trong $U_1 \cup U_2$.

Tiếp tục quá trình lý luận đó, tại mỗi U_k ta sẽ chọn được nguyên hàm F_k sao cho

$$F_k \equiv F_{k-1}$$

trong giao $U_{k-1} \cap U_k$ $(k = 2, 3, \dots, n)$ và hàm G_{k-1} tương ứng là nguyên hàm của f trong $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$.

Ta xét hàm $F(t) = F_k(\gamma(t))$, $t \in I_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Đó là hàm liên tục trên I (do cách xây dựng). Ta cần chứng minh rằng $F(t)$ là nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ. Thật vậy, đối với mỗi điểm $t_0 \in [a,b]$ tồn tại một lân cận mà tại đó

$$F(t) = F_U(\gamma(t)),$$

trong đó F_U là nguyên hàm của f trong lân cận $U \subset I$ của điểm $\gamma(t_0)$.

2. *Tính duy nhất.* Giả sử F_1 và F_2 đều là những nguyên hàm của f dọc theo γ. Trong lân cận $U(t_0)$ của điểm $t_0 \in [a,b]$ ta có

$$F_1 = F^{(1)}(\gamma(t)), \quad F_2 = F^{(2)}(\gamma(t)),$$

trong đó $F^{(1)}$ và $F^{(2)}$ là hai nguyên hàm của f tại một lân cận nào đó của $\gamma(t_0)$. Vì hiệu $F_1 - F_2$ là hằng số nên suy ra rằng hàm

$$\varphi(t) = F_1(t) - F_2(t)$$

là hằng số trong lân cận $u(t_0)$. Ta cần chứng minh rằng

$$\varphi = \text{const}, \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Thật vậy, xét tập hợp

$$E = \{t \in [a, b] : \varphi(t) = \varphi(t_0)\}.$$

Tập hợp E có các tính chất sau đây

a) $E \neq \emptyset$ vì $t_0 \in E$,

b) E là tập mở vì φ là hằng số địa phương và với mỗi điểm $t \in E$ tồn tại một lân cận $u(t) \subset E$,

c) E là tập đóng. Vì φ liên tục (vì là hằng số địa phương) cho nên nếu $t_n \in E$ thì từ hệ thức $\varphi(t_n) = \varphi(t_0)$ ta có:

$$\lim_{t_n \to t^*} \varphi(t_n) = \varphi(t^*) = \varphi(t_0)$$

vậy $t^* \in E$. Do đó $E = I$ (vì I liên thông). □

Nhận xét 3.2.1. Nếu ánh xạ γ là hằng số thì hiển nhiên rằng nguyên hàm bất kỳ của hàm f dọc theo γ đều là hằng số.

Trong trường hợp nếu biết một nguyên hàm của hàm f dọc theo tuyến γ thì tích phân của f theo γ được tính bằng công thức Newton - Leibnitz.

Định lý 3.2.5. *Giả sử $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ là tuyến trơn từng khúc và hàm f liên tục trên γ và có nguyên hàm $F(t)$ dọc theo γ. Khi đó*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a). \tag{3.23}$$

Chứng minh. 1. Đầu tiên giả sử γ là tuyến trơn và nằm trọn trong miền mà hàm f có nguyên hàm. Giả sử F^* là nguyên hàm của f dọc theo γ, hàm $F^*[\gamma(t)]$ khác F một hằng số cộng, tức là:

$$F(t) = F^*[\gamma(t)] + C.$$

Vì γ là tuyến trơn và ${F^*}'(z) = f(z)$ nên với mọi $t \in [a, b]$ tồn tại đạo hàm liên tục

$$F'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Do đó

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

2. Trường hợp γ là tuyến trơn từng khúc. Trong trường hợp này ta có thể chia γ thành một số hữu hạn tuyến

$$\gamma_\nu : [t_\nu, t_{\nu+1}] \to \mathbb{C}, \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

sao cho mỗi tuyến γ_ν đều là trơn và đều nằm trong miền mà hàm f có nguyên hàm.

Do đó

$$\int\limits_{\gamma_\nu} f dz = F(t_{\nu+1}) - F(t_\nu). \tag{3.24}$$

Bằng cách cộng các đẳng thức (3.24) ta thu được công thức (3.23). □

Nhận xét 3.2.2. Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền D. Khi đó, từ định lý 11.4 và 11.5 ta có thể định nghĩa tích phân của hàm f theo tuyến liên tục $\gamma \subset D$ bất kỳ như là số gia của nguyên hàm của nó dọc theo γ khi t biến thiên trên $[a, b]$. Tích phân (3.23), hiển nhiên là bất biến đối với phép thay tham số. Do đó, ta có thể xét tích phân của hàm chỉnh hình theo đường cong liên tục bất kỳ.

3.2.3 Tính bất biến của tích phân đối với các tuyến đồng luân

Trước khi chứng minh định lý quan trọng về tính bất biến của tích phân hàm $f \in H(D)$ theo các tuyến đồng luân, ta chứng minh định lý sau đây về sự tồn tại của nguyên hàm theo ánh xạ.

Định nghĩa 3.2.3. Giả sử $\delta : (t, u) \mapsto \delta(t, u)$ là ánh xạ liên tục hình chữ nhật

$$R = \left\{ (t, u) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant t \leqslant b, a' \leqslant u \leqslant b' \right\}$$

vào miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và ω là dạng vi phân đóng ở trong D. Hàm liên tục $\phi(t, u)$ được gọi là *nguyên hàm của dạng vi phân đóng ω đối với ánh xạ $\delta(t, u)$* nếu nó thỏa mãn điều kiện: với điểm $(t_0, u_0) \in R$ bất kỳ, tồn tại lân cận $\mathcal{U}(\delta(t_0, u_0))$ của điểm $\delta(t_0, u_0)$ và trong lân cận đó tồn tại nguyên hàm F của ω sao cho

$$\phi(t, u) = F[\delta(t, u)]$$

với mọi điểm (t, u) đủ gần (t_0, u_0).

Định lý 3.2.6. *Với các giả thiết của định nghĩa 3.2.3 nguyên hàm $\phi(t, u)$ của dạng đóng ω đối với ánh xạ δ bao giờ cũng tồn tại và xác định đơn trị với sự sai khác hằng số cộng.*

Chứng minh. Vì hình chữ nhật R là compắc nên ta có thể chia nó thành những hình chữ nhật con bằng cách chia khoảng biến thiên của t bởi các điểm t_i và khoảng biến thiên của u bởi các điểm u_j sao cho với i và j bất kỳ qua ánh xạ δ ảnh của hình chữ nhật

$$R_{ij} = \left\{ (t, u) : t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, u_j \leqslant u \leqslant u_{j+1} \right\}$$

thuộc hình tròn mở $\mathcal{U}_{ij}$ mà tại đó dạng ω có nguyên hàm F_{ij}.

Ta cố định j. Vì các nguyên hàm khác nhau bởi hằng số cộng và vì giao $\mathcal{U}_{ij} \cap \mathcal{U}_{i+1,j} \neq \emptyset$ (và liên thông) nên có thể thêm cho mỗi nguyên hàm F_{ij} (j cố định, i biến thiên) một hằng số sao cho

$$F_{ij} = F_{i+1,j} \quad \text{trong giao} \quad \mathcal{U}_{ij} \cap \mathcal{U}_{i+1,j}.$$

Do đó đối với $u \in [u_j, u_{j+1}]$ ta thu được hàm $\phi_j(t,u)$ mà với i bất kỳ

$$\phi_j(t,u) = F_{ij}(\delta(t,u)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Như vậy hàm $\phi_j(t,u)$ liên tục trong hình chữ nhật

$$R_j = \Big\{(t,u) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant t \leqslant b, u_i \leqslant u \leqslant u_{j+1}\Big\}$$

và nó là nguyên hàm của dạng ω đối với ánh xạ δ_j, trong đó

$$\delta_j = \delta\big|_{R_j}.$$

Mỗi nguyên hàm ϕ_j đều được xác định với sự sai khác hằng số cộng.

Bây giờ đối với mỗi j ta có thể chọn liên tiếp các hằng số cộng đó một cách thích hợp sao cho

$$\phi_j(t,u) = \phi_{j+1}(t,u) \quad \text{khi} \quad u = u_{j+1}.$$

Ta xác định hàm $\phi(t,u)$ trong hình chữ nhật R như sau: với j bất kỳ ta đặt

$$\phi(t,u) = \phi_j(t,u) \quad \text{khi} \quad u \in [u_j, u_{j+1}].$$

Hàm này liên tục trong R và thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa 3.2.3. Do đó nó là nguyên hàm của dạng ω đối với ánh xạ δ. □

Bây giờ ta chứng minh định lý chủ yếu của tiết này và cũng là định lý chủ yếu của toàn bộ lý thuyết hàm chỉnh hình. Đó là định lý tích phân Cauchy. Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ thì $\omega = f(z)dz$ là dạng vi phân đóng (định lý 3.2.1), do vậy thay vì nói "*nguyên hàm của dạng* ω" ta sẽ nói: "*nguyên hàm của hàm* f". Ta có

Định lý 3.2.7. (Cauchy) *Giả sử D là miền của $\mathbb{C}$ và $f \in \mathcal{H}(D)$. Nếu γ_1 và γ_2 là hai tuyến đồng luân với nhau trong D thì*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Chứng minh. Chứng minh định lý được chia làm hai phần:

1. Tuyến γ_1 và γ_2 có đầu mút chung bất động. Theo giả thiết γ_1 và γ_2 đồng luân với nhau trong D nên ánh xạ δ thỏa mãn điều kiện

$$\delta(t,0) = \gamma_1(t), \quad \delta(t,1) = \gamma_2(t).$$

Từ định lý 3.2.6 suy ra rằng tồn tại nguyên hàm $\Phi(t,u)$ của f đối với ánh xạ δ. Do đó

$$\varphi_1(t) = \Phi(t,0)$$

là nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ_1. Tương tự

$$\varphi_2(t) = \Phi(t,1)$$

là nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ_2.

Từ định lý 3.2.5 ta có

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \Phi(1,0) - \Phi(0,0)$$
$$\int\limits_{\gamma_2} f(z)dz = \Phi(1,1) - \phi(0,1)$$

và do đó

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz - \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz &= [\Phi(1,0) - \Phi(0,0)] - [\Phi(1,1) - \Phi(0,1)]\\ &= [\Phi(0,1) - \Phi(0,0)] - [\Phi(1,1) - \Phi(1,0)].\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh rằng

$$\Phi(1,1) - \Phi(1,0) = 0, \quad \Phi(0,1) - \Phi(0,0) = 0.$$

Thật vậy, xét hàm $u \mapsto \Phi(0,u)$. Đó là nguyên hàm của hàm f theo tuyến

$$\gamma_u : u \mapsto \delta(0,u)$$

nhưng $\delta(0,u) = \gamma_1(0)$ nên tuyến γ_u là hằng số và do đó $\Phi(0,1) - \Phi(0,0) = 0$.

Tương tự, hàm $u \to \Phi(1,u)$ là nguyên hàm của f dọc theo tuyến hằng số

$$\widetilde{\gamma_u} : u \mapsto \delta(1,u)$$

nên $\Phi(1,1) - \Phi(1,0) = 0$.

2. Tuyến γ_1 và γ_2 là những tuyến đóng. Ta đã biết rằng, theo định nghĩa, nếu γ_1 và γ_2 đồng luân với nhau thì tồn tại ánh xạ liên tục hình vuông $I \times I$ vào miền D sao cho

$$\begin{aligned}
\delta(t,0) &= \gamma_1(t),\\
\delta(t,1) &= \gamma_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\\
\delta(0,u) &= \delta(1,u) \quad \forall\, u \in [0,1].
\end{aligned}$$

(Điều kiện sau cùng chứng tỏ: với mỗi $u_0 \in [0,1]$ bất kỳ, tuyến $\gamma_{u_0}(t) = \delta(t,u_0)$ là một tuyến đóng).

Bây giờ giả sử $\Phi(t,u)$ là nguyên hàm của f đối với ánh xạ δ. Ta xét hai tuyến

$$\gamma_u : u \mapsto \delta(0,u); \quad \widetilde{\gamma_u} : u \mapsto \delta(1,u).$$

Vì hai tuyến này trùng nhau, cho nên

$$\Phi(0,1) - \Phi(0,0) = \Phi(1,1) - \Phi(1,0)$$

và từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.2.3. 1. Từ định lý vừa chứng minh ta rút ra kết luận là: tích phân của hàm chỉnh hình theo một tuyến là một bất biến của lớp đồng luân chứa tuyến ấy.

2. Trong **3.1.1** ta đã nêu ra khái niệm tích phân đối với tuyến và sau đó ta đã thấy rõ ràng trên thực tế tích phân được xác định không phải bởi tuyến mà bởi đường cong (lớp các tuyến tương đương). Với định lý Cauchy dạng tổng quát vừa chứng minh ta còn có thể đi xa hơn: đối với các hàm chỉnh hình tích phân được xác định không phải bởi đường cong mà bởi một lớp đồng luân chứa đường cong ấy.

3.2.4 Công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy

Từ định lý Cauchy đã chứng minh trong tiết trước ta suy ra dạng cổ điển sau đây của định lý Cauchy - gọi là định lý tích phân Cauchy.

Định lý 3.2.8. (Cauchy) *Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và $\gamma \sim 0$ là tuyến đóng bất kỳ thuộc D thì*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Chứng minh. Vì $\gamma \sim 0$ trong D nên ta có thể biến dạng đồng luân γ thành tuyến đóng γ_1 nằm trong hình tròn $U \subset D$. Từ định lý 3.2.2 suy ra rằng hàm f có nguyên hàm địa phương F trong U và do đó nguyên hàm của f theo tuyến γ_1 là $F(\gamma_1(t))$. Vì γ_1 là tuyến đóng nên $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = a^*$. Do đó

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = F(a^*) - F(a^*) = 0.$$

Nhưng vì $\gamma_1 \sim \gamma$ nên từ định lý tích phân Cauchy suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Trong miền đơn liên, mọi tuyến đóng đều đồng luân với 0 và do đó hai tuyến bất kỳ với đầu mút chung là đồng luân với nhau. Do đó từ định lý vừa chứng minh ta rút ra dạng phát biểu cổ điển của định lý Cauchy đối với miền đơn liên.

Định lý 3.2.9. (Cauchy) *Nếu hàm f chỉnh hình trong miền đơn liên $D \subset \mathbb{C}$ thì tích phân của nó theo tuyến đóng $\gamma : I \to D$ bất kỳ là bằng 0, tức là*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{3.25}$$

Công thức (3.25) *được gọi là công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy.*

Trong miền đa liên, tích phân của hàm chỉnh hình theo tuyến đóng không nhất thiết là bằng 0. Điều đó được chứng tỏ bởi ví dụ sau đây.

Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $f(z) = 1/z$ và $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$. Ta có

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^\pi tdt = 2\pi i \neq 0.$$

Bây giờ ta chứng minh sự khái quát định lý Cauchy 3.2.9 cho miền D hữu hạn liên thông.

Định lý 3.2.10. (Cauchy) *Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$ và D^* là miền bị chặn nằm trong D cùng với biên của nó gồm một số hữu hạn đường cong đo được. Khi đó*

$$\int_{\partial D^*} f(z)dz = 0. \tag{3.26}$$

Chứng minh. Ta biết rằng miền hữu hạn liên thông (với cấp liên thông n) chính là miền đơn liên hữu hạn nào đó mà trong đó cắt bỏ $(n-1)$ lỗ thủng (các thành phần biên bên trong). Ta vẽ trong D^* những nhát cắt $\lambda_\nu^\pm$ nối các thành phần của biên miền D^* sao cho D^* trở thành miền đơn liên $\widetilde{D}^*$ với biên định hướng dương ∂D^* (ở đây ta lấy các nhát cắt từng đôi một không giao nhau và không có điểm chung với các thành phần của biên trừ các điểm đầu và cuối các nhát cắt được mô tả bởi hai bờ λ_ν^+ và λ_ν^-). Rõ ràng là

$$\partial\widetilde{D}^* = \partial D^* \cup \big(\bigcup_\nu \lambda_\nu^+\big) \cup \big(\bigcup_\nu \lambda_\nu^-\big).$$

Do đó

$$\int\limits_{\partial\widetilde{D}^*} f(z)dz = \int\limits_{\partial D^*} f(z)dz + \sum_\nu \int\limits_{\lambda_y^+} f(z)dz + \sum_\nu \int\limits_{\lambda_\nu^-} f(z)dz = 0.$$

Ta lưu ý rằng tích phân theo các nhát cắt được lấy hai lần theo hai bờ với các hướng ngược nhau. Do đó các tích phân theo các nhát cắt đều triệt tiêu lẫn nhau và thu được

$$\int\limits_{\partial\widetilde{D}^*} f(z)dz = \int\limits_{\partial D^*} f(z)dz = 0.$$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.2.4. Nếu biên ∂D^* của miền s - liên thông D^* gồm s đường cong đóng Γ_i, $i = 1, 2, \dots, s$ trong đó Γ_1 là chu tuyến ngoài, còn $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_s$ là các chu tuyến trong thì công thức (3.26) được viết như sau:

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz = \sum_{i=2}^{s} \int\limits_{\Gamma_i} f(z)dz. \tag{3.27}$$

Tất cả các định lý 3.2.8 - 3.2.10 đều được chứng minh đối với miền con nằm trọn trong miền chỉnh hình của hàm $f(z)$, tức là chúng được chứng minh với giả thiết hàm $f(z) \in \mathcal{H}(\overline{D})$, $\overline{D} = D \cup \partial D$. Các khái quát tiếp theo đối với định lý tích phân Cauchy trình bày trong các công trình của các nhà toán học A. Pringsheim[2], N. Luzin[3] và I. Privalov[4] đã chứng tỏ được rằng *hàm dưới dấu tích phân $f(z)$ không nhất thiết phải chỉnh hình*

[2]A. Pringsheim (1850-1941) là nhà toán học Đức
[3]N. Luzin (1883-1950) là nhà toán học Nga
[4]I. Privalov (1891-1941) là nhà toán học Nga

trên $\overline{D} = D \cup \partial D$ *mà chỉ cần nó chỉnh hình trong miền* D *và liên tục trên* $\overline{D}$ *là đủ*, tức là $f \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$. Cụ thể người ta đã chứng minh được

Định lý Cauchy tổng quát

Giả sử hàm $f(z)$ *chỉnh hình trong miền bị chặn* D *giới hạn bởi một số hữu hạn đường cong đóng Jordan đo được và liên tục trên* $\overline{D}$. *Khi đó tích phân của hàm* $f(z)$ *theo biên có hướng của miền đó là bằng 0, tức là*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Bạn đọc có thể xem chứng minh định lý này trong B. V. Sabat "Nhập môn giải tích phức", phần I, Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, trang 113-117, Hà Nội 1979 hoặc trong I. Privalov "Nhập môn lý thuyết hàm biến phức" §2, ch.IV, Hà Nội 1964.

3.2.5 Nguyên hàm trong miền đơn liên

Bây giờ từ định lý 3.2.9 trong tiết trước ta có thể rút ra một kết quả quan trọng mà ta chờ đợi: định lý về sự tồn tại nguyên hàm toàn cục trong miền đơn liên.

Định lý 3.2.11. *Nếu* $D \subset \mathbb{C}$ *là miền đơn liên và* $f \in H(D)$ *thì hàm* f *có nguyên hàm trong miền* D.

Chứng minh. Thật vậy, theo định lý 3.2.9, đối với tuyến đóng $\gamma \subset D$ bất kỳ ta có

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Vì vậy theo định lý 10.3 và bổ đề ở **3.1.4** suy ra rằng dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ là dạng vi phân đúng trong D. Như vậy hàm $f(z)$ có nguyên hàm trong D. □

Nhận xét 3.2.5. Đòi hỏi về tính đơn liên của miền D ở đây là rất cốt yếu. Nếu $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $f(z) = 1/z$ thì rõ ràng hàm f không có nguyên hàm trong miền D (xem nhận xét 3.1.4 ở **3.2.4**). Do đó đối với các miền đa liên nói chung định lý về sự tồn tại nguyên hàm toàn cục là không đúng.

3.2.6 Công thức tích phân Cauchy (công thức cơ bản thứ hai của Cauchy)

Trong tiết này ta sẽ nghiên cứu vấn đề về biểu diễn tích phân các hàm chỉnh hình. Ta sẽ thấy phép biểu diễn đó có những áp dụng quan trọng cả về mặt lý thuyết lẫn thực hành.

Ta có

Định lý 3.2.12. *Giả sử D là miền bị chặn với biên Jordan đo được ∂D. Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D và liên tục trong $\overline{D}$ thì với điểm $z \in D$ bất kỳ ta có công thức*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{nếu } z \in D; \\ 0 & \text{nếu } z \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{3.28}$$

trong đó ∂D là biên có định hướng dương của D.

Công thức (3.28) là *công thức tích phân cơ bản thứ hai* của Cauchy (hay *công thức tích phân Cauchy*); còn vế phải của công thức đó được gọi là *tích phân Cauchy*.

Chứng minh. 1. Để chứng minh (3.28) ta xét hình tròn đủ bé $S(\rho) = \{|\zeta - z| < \rho\}$ sao cho $S(\rho) \subset D$. Ta xét miền $K = D \setminus S$. Biên có định hướng dương ∂K gồm ∂D và biên $\partial S(\rho)$ chạy theo hướng âm. Áp dụng công thức (3.27) cho miền $D \setminus S(\rho)$ và hàm $f(z)/(\zeta - z) \in \mathcal{H}(D \setminus \{z\})$ ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Ta cần xét tích phân ở vế phải của đẳng thức vừa viết. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(\rho)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(\rho)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\\ &= f(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(\rho)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (3.29)\end{aligned}$$

Vì tích phân ở vế trái (3.29) và số hạng thứ nhất của vế phải không phụ thuộc ρ nên số hạng thứ hai ở vế phải cũng sẽ không phụ thuộc ρ. Nếu ta chứng minh được rằng số hạng thứ hai dần đến 0 khi $\rho \to 0$ thì sẽ chứng minh được rằng nó bằng 0.

Ta có

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(\rho)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\Big| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{\zeta\in\partial S(\rho)}\Big|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\Big|2\pi\rho\\ &= \max_{\zeta\in\partial S(\rho)}|f(\zeta)-f(z)|\cdot\frac{\rho}{\rho}=\max_{\zeta\in\partial S(\rho)}|f(\zeta)-f(z)|.\end{aligned}$$

Khi $\rho \to 0$, điểm $\zeta \in \partial S(\rho)$ dần đến z và do đó $\max\limits_{\zeta\in\partial S(\rho)}|f(\zeta)-f(z)| \to 0$ vì f là hàm liên tục.

Như vậy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = f(z), \quad z\in D.$$

2. Bây giờ ta xét trường hợp $z \notin \overline{D}$. Hiển nhiên trong trường hợp này hàm $g(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ là hàm chỉnh hình tại mọi điểm của $\overline{D}$ nên theo định lý tích phân Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 0, \quad z\notin \overline{D}.$$

□

Nhận xét 3.2.6. Công thức tích phân Cauchy biểu thị một hiện tượng hết sức đặc biệt là giá trị của hàm chỉnh hình trong miền $\overline{D}$ hoàn toàn được xác định bởi các giá trị của nó trên biên. Thật vậy, nếu các giá trị của hàm trên biên ∂D đã biết thì ta sẽ tìm được giá trị của f tại mọi điểm $z \in D$. Về mặt nguyên tắc, sự kiện này phân biệt các hàm chỉnh hình với các hàm $\mathbb{R}^2$-khả vi.

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$J = \int\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}, \quad \{|z-3i| = 2\}.$$

Giải. Hiển nhiên hàm $f(z) = e^z/z$, chỉnh hình trong một lân cận nào đó của hình tròn giới hạn bởi γ. Do đó từ công thức (3.28) ta có

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f(2i) = \pi(\cos 2 + isin2).$$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$J = \int\limits_{\gamma=\{|z|=5\}} \frac{dz}{z^2+16}.$$

Giải. Hàm dưới dấu tích phân chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| \leqslant 5\}$ trừ ra hai điểm $z_1 = 4i$ và $z_2 = -4i$. Ta dựng các đường tròn γ_1 và γ_2 với tâm tương ứng tại $z_1 = 4i$ và $z_2 = -4i$ và với bán kính đủ bé ε_1 và ε_2 tương ứng sao cho γ_1 và γ_2 không cắt nhau và đều thuộc hình tròn $\{|z| < 5\}$. Áp dụng công thức (3.28) cho miền

$$\begin{aligned} D &= \{|z| \leqslant 5\} \setminus \{S(\varepsilon_1) \cup S(\varepsilon_2)\}, \\ S(\varepsilon_1) &= \{|z-4i| < \varepsilon_1\}, \\ S(\varepsilon_2) &= \{|z+4i| < \varepsilon_2\}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2+16} &= \int\limits_{\gamma_1^+}\frac{dz}{z^2+16}+\int\limits_{\gamma_2^+}\frac{dz}{z^2+16}\\ &= 2\pi i\cdot\frac{1}{z+4i}\Big|_{z=4i}+2\pi i\frac{1}{z-4i}\Big|_{z=-4i}\\ &= 2\pi i\Big(\frac{1}{8i}-\frac{1}{8i}\Big)=0.\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Xét tích phân

$$J=\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos x dx}{1+x^2}\cdot$$

Để tính tích phân này, ta xét tích phân

$$\widetilde{J}=\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{[-R,R]\cup[z:|z|=R,\operatorname{Im} z\geqslant 0, R>1]\}\\ &= \{[-R,R]\cup C\}.\end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng

$$J=\operatorname{Re}\widetilde{J}.$$

Ta viết

$$\frac{e^{i\zeta}}{\zeta^2+1}=\frac{e^{i\zeta}}{\zeta+i}\Big(\frac{1}{\zeta-i}\Big)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-i};\quad f(\zeta)=\frac{e^{i\zeta}}{\zeta+i}\cdot$$

Hàm f chỉnh hình trong và trên Γ nên

$$f(i)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-i}=\frac{e^{i^2}}{i+i}=\frac{1}{2ie}\cdot$$

Như vậy

$$\frac{1}{2ie} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - i} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1}$$

và do đó:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1} = \frac{\pi}{e}\cdot$$

Bây giờ ta biểu diễn $\widetilde{J}$ dưới dạng:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1} = \int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1} + \int\limits_{C}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1}$$

và do đó

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1} = \frac{\pi}{e} - \int\limits_{C}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1}\cdot$$

Xét tích phân theo C. Khi $\zeta \in C$ thì $\zeta = Re^{i\theta}$, $0 \in [0,\pi]$, nên

$$\int\limits_{C}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1} = iR\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{i\theta}e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+1}d\theta.$$

Nhưng

$$|e^{i\theta}e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}| = e^{-R\sin\theta} \leqslant 1 \quad \forall\,\theta \in [0,\pi]$$

và

$$|R^2e^{2i\theta}+1| \geqslant R^2 - 1$$

nên

$$\Big|\int\limits_{C}\frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1}\Big| \leqslant \frac{R}{R^2-1}\int\limits_{0}^{\pi}d\theta = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

Do đó

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e} - \lim_{R\to\infty} \int_C \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2+1} = \frac{\pi}{e}\cdot$$

Từ đó rút ra công thức:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}dx = 0 \Rightarrow J = \frac{\pi}{2e}\cdot$$

Định lý 3.2.12 có thể khái quát cho trường hợp khi miền D chứa điểm ∞. Cụ thể ta có

Định lý 3.2.13. *Giả sử miền D chứa điểm ∞ với biên Jordan đo được ∂D. Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D và liên tục trong $\overline{D}$ thì với điểm $z \in D$ bất kỳ ta có công thức*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + f(\infty) \tag{3.30}$$

trong đó ∂D là biên có định hướng dương của miền D.

Chứng minh. Ta dựng đường tròn $\gamma(z,R)$ với tâm z và bán kính R đủ lớn sao cho toàn bộ biên ∂D của miền D nằm trong $\gamma(z,R)$. Ta xét miền B giới hạn bởi ∂D và $\gamma(z,R)$. Đó là miền bị chặn và $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$. Áp dụng công thức tích phân Cauchy cho miền B và hàm f ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D \cup \gamma(z,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \oint_{\gamma(z,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} f(z) = &\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(z,R)} \frac{f(\infty)}{\zeta - z}d\zeta \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(z,R)} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z}d\zeta, \end{aligned}$$

hay là

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma,R}\frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z}d\zeta. \qquad (*)$$

Nếu bây giờ ta chứng tỏ được rằng tích phân cuối cùng $I(R)$ ở vế phải bằng 0 thì định lý được chứng minh.

Một mặt ta có

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(z,R)}\frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z}d\zeta\Big| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{\max\limits_{\zeta\in\gamma}|f(\zeta) - f(\infty)|}{R}\cdot 2\pi R\\ &= \max_{\zeta\in\gamma}|f(\zeta) - f(\infty)|,\end{aligned}$$

và do tính liên tục $\max\limits_{\zeta\in\gamma}|f(\zeta) - f(\infty)| \to 0$ khi $R \to \infty$. Nghĩa là tích phân $I(R)$ nói trên dần đến 0.

Mặt khác từ công thức (*) ta thấy rằng

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(\infty)$$

không phụ thuộc R.

Do đó $I(R) = 0$ và định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.2.7. Nếu điểm $z \notin D$ thì vế phải của (3.30) bằng 0. Để thấy được điều đó chỉ cần theo dõi chứng minh định lý vừa trình bày.

3.2.7 Biểu diễn tích phân đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình

Theo định nghĩa, hàm chỉnh hình trong miền D - đó là hàm biến phức có đạo hàm tại mọi điểm của miền đó. Bây giờ, bằng cách áp dụng công thức tích phân Cauchy ta sẽ chứng tỏ rằng từ tính chỉnh hình của hàm suy ra được sự tồn tại, tính chỉnh hình và biểu diễn tích phân của đạo hàm mọi cấp của hàm đó.

Định lý 3.2.14. *Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D và liên tục trong miền $\overline{D}$. Khi đó tại mỗi điểm z_0 của miền D hàm $f(z)$ có đạo hàm mọi cấp và đạo hàm $f^{(n)}(z_0)$ chỉnh hình trong miền D và được xác định bởi giá trị của hàm $f(z)$ trên biên ∂D của miền D theo công thức*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad z_0 \in D, \tag{3.31}$$

trong đó D là miền hữu hạn liên thông tùy ý với biên ∂D gồm một số hữu hạn đường cong đóng Jordan đo được.

Chứng minh. **I.** Đầu tiên ta xét trường hợp miền D bị chặn. Phép chứng minh định lý được chia thành các bước sau.

1. Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D nên theo định nghĩa tại điểm z_0 hàm $f(z)$ có đạo hàm cấp một và ta cần chứng minh rằng

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz. \tag{3.32}$$

Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

$$f(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}dz.$$

Do đó

$$\delta_h = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)}\cdot$$

Nhưng

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-z_0-h)(z-z_0)} &= \frac{z-z_0}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\\ &= \frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{h}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\end{aligned}$$

cho nên

$$\delta_h = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} + \frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}$$

và do đó

$$\Big|\delta_k - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}\Big| = \frac{|h|}{2\pi}\Big|\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\Big|.$$

Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trên ∂D nên nó liên tục và bị chặn trên ∂D, từ đó, $\exists\, M$ sao cho:

$$|f(z)| \leqslant M, \quad \forall\, z \in \partial D.$$

Nếu ρ là khoảng cách từ z_0 đến ∂D, tức là

$$\rho = \inf_{z\in\partial D} |z_0 - z| \text{ thì } |z - z_0| > \frac{1}{2}\rho, \quad \forall\, z \in \partial D.$$

Ngoài ra, nếu số h được chọn sao cho $|h| \leqslant \min\Big[1, \dfrac{1}{4}\rho\Big]$ thì

$$|z - z_0 - h| \geqslant ||z - z_0| - |h|| \geqslant \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}\rho = \frac{1}{4}\rho.$$

Khi đó, nếu độ dài của ∂D là L thì

$$\Big|\delta_h - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}\Big| \leqslant \frac{|h|}{2\pi}\cdot\frac{ML}{\Big(\dfrac{1}{4}\rho^2\Big)\Big(\dfrac{1}{4}\rho\Big)}\cdot$$

Nếu ε là số dương bé tùy ý và chọn

$$\delta = \min\Big[1, \frac{1}{4}\rho, \frac{\rho^3\varepsilon\pi}{8ML}\Big]$$

thì

$$\Big|\delta_h - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}\Big| < \varepsilon \quad \text{khi} \quad |h| < \delta.$$

Như vậy công thức (3.32) được chứng minh.

2. Bây giờ ta chứng minh đạo hàm $f'(z)$ có đạo hàm, tức là chứng minh hàm $f'(z)$ chỉnh hình trong D_0 đồng thời chứng tỏ rằng

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz. \tag{3.33}$$

Ta có:

$$\delta_h^2 = \frac{f'(z_0+h)-f'(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{2(z-z_0)-h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)^2}f(z)dz.$$

Vì

$$\begin{aligned}\frac{2(z-z_0)-h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)^2} &= \frac{[2(z-z_0)-h](z-z_0)}{(z-z_0)^3(z-z_0-h)^2}\\ &= \frac{2}{(z-z_0)^3} + h\cdot\frac{3(z-z_0)-2h}{(z-z_0)^3(z-z_0-h)^2}\end{aligned}$$

cho nên

$$\delta_h^2 = \frac{2}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3} + \frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{3(z-z_0)-2h}{(z-z_0)^3(z-z_0-h)^2}f(z)dz.$$

Vậy ta có ước lượng

$$\begin{aligned}\Big|\delta_h^2 - \frac{2}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}\Big| &\leqslant \frac{3|h|}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{|f(z)|\cdot|dz|}{|(z-z_0)^2|\cdot|(z-z_0-h)^2|}\\ &+ \frac{2|h|^2}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{|f(z)|\cdot|dz|}{|(z-z_0)^3|\cdot|(z-z_0-h)^2|}\,.\end{aligned}$$

vì rằng $|3(z-z_0)-2h| \leqslant 3|z-z_0|+2|h|$. Nhưng vì f chỉnh hình trên ∂D nên $|f| \leqslant M$ với mọi $z \in \partial D$.

Nếu ρ là khoảng cách từ z_0 đến ∂D thì

$$|z-z_0| \geqslant \rho > \frac{1}{2}\rho.$$

Do đó với h tùy ý thỏa mãn $|h| \leqslant \min\left[1, \dfrac{1}{4}\rho\right]$

$$\begin{aligned}|z - z_0 - h| &\geqslant |z - z_0| - |h| > \frac{1}{2}\rho - |h|\\ &\geqslant \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}\rho = \frac{1}{4}\rho.\end{aligned}$$

Vậy

$$\left|\delta_h^2 - \frac{2}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}\right| < \frac{3|h|}{2\pi}\frac{ML}{\left(\frac{1}{4}\rho^2\right)\left(\frac{1}{4}\rho\right)^2} + \frac{2|h|^2}{2\pi}\cdot\frac{ML}{\left(\dfrac{1}{8}\rho^3\right)\left(\frac{1}{4}\rho\right)^2}\cdot$$

Nếu ε là số dương bé bao nhiêu tùy ý và δ được chọn thỏa mãn:

$$\delta = \min\left[\frac{1}{4}\rho, 1, \rho^4\varepsilon\pi/(192)ML\right]$$

thì

$$\left|\delta_h^2 - \frac{2}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Như vậy theo định nghĩa đạo hàm ta có

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

và do đó hàm $f'(z)$ chỉnh hình tại điểm $z_0 \in D$ tùy ý và đồng thời công thức biểu diễn tích phân (3.33) của đạo hàm cấp 2 của hàm $f(z)$ được chứng minh.

3. Ta chứng minh (3.31) theo quy nạp. Ta đã có kết quả đối với $n = 1$ và $n = 2$. Giả sử (3.31) đã được chứng minh cho $n = k$. Khi đó

$$\begin{aligned}&\frac{f^{(k)}(z_0+h) - f^{(k)}(z_0)}{h}\\ &= \frac{k!}{2\pi i h}\int\limits_{\partial D} f(z)\Big[\frac{1}{(z-z_0-h)^{k+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\Big]dz.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Để biến đổi vế phải đẳng thức (3.34) ta sử dụng hệ thức [5]

$$\frac{1}{b^{k+1}} - \frac{1}{a^{k+1}} = -\frac{(b-a)(k+1)}{a^{k+2}} + (b-a)^2 \sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{\nu}{a^{\nu+1} b^{k+2-\nu}}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Thay $b = z - z_0 - h$, $a = z - z_0$ rồi thế kết quả vào biểu thức dưới dấu tích phân ở vế phải (3.34) ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{f^{(k)}(z_0+h) - f^{(k)}(z_0)}{h} &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}} \\ &\quad + \frac{k!h}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{\nu f(z)dz}{(z-z_0)^{\nu+1}(z-z_0-h)^{k+2-\nu}}.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\Big|\delta_k^{(k+1)} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}}\Big| \\ &\leqslant |h| \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{\nu |f(z)||dz|}{|z-z_0|^{\nu+1}|z-z_0-h|^{k+2-\nu}}.\end{aligned}$$

Ta có $|f(z)| \leqslant M \ \forall z \in \partial D$ và nếu gọi ρ là khoảng cách từ z_0 đến ∂D thì $|z - z_0| \geqslant \rho > \dfrac{1}{2}\rho$, $\forall z \in \partial D$. Chọn h thỏa mãn điều kiện:

$$|h| < \frac{1}{2}\rho$$

thì

$$|z - z_0 - h| \geqslant |z - z_0| - |h| \geqslant \rho - |h| > \frac{1}{2}\rho;$$

[5] Xem chứng minh trong lần xuất bản thứ nhất của giáo trình này, trang 244-245

và

$$\Big|\delta_h^{(k+1)} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}}\Big| \leqslant \frac{|h|\cdot k!}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\sum_{\nu=1}^{k+1}\frac{\nu\cdot M|dz|}{\Big(\dfrac{1}{2}\rho\Big)^{k+3}}$$
$$< |h|\cdot\frac{k!2^{k+2}}{\pi\cdot\rho^{k+3}}\cdot M\cdot\sum_{\nu=1}^{k+1}\nu\int\limits_{\partial D}|dz|$$
$$= |h|\cdot 2^{k+1}\cdot\frac{(k+2)!}{\pi\cdot\rho^{k+3}}\cdot ML.$$

Nếu ε là số dương tùy ý và chọn

$$\delta = \min\Big\{\frac{1}{2}\rho; \pi\rho^{k+3}/[2^{k+1}(k+2)!ML]\Big\}$$

thì

$$\Big|\delta_k^{(k+1)} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}}\Big| < \varepsilon \quad \text{với } |h| < \delta.$$

Do đó, theo định nghĩa đạo hàm thì:

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}}\cdot$$

Như vậy $f^{(k+1)}(z)$ - đạo hàm cấp 1 của hàm $f^{(k)}(z)$ tồn tại trong lân cận nào đó của điểm $z_0 \in D$ và được cho bởi công thức (3.31). Định lý được chứng minh cho trường hợp miền D không chứa điểm ∞.

II. Giả sử miền $D \ni \infty$. Đối với điểm $z_0 \neq \infty$ ta có công thức (3.32):

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz, \quad z_0 \in D,\ z_0 \neq \infty. \tag{3.35}$$

Khi $z_0 \to \infty$ vế phải (3.35) dần đến 0 và theo định nghĩa ta cho rằng $f'(\infty) = 0$. Đồng thời với điều đó công thức (3.35) đúng tại điểm ∞ và $f'(z_0)$ liên tục tại điểm ∞. Lặp lại các lập luận này ta thu được các công thức liên tiếp (3.31) đối với trường hợp điểm $z_0 = \infty \in D$. □

Nhận xét 3.2.8. Công thức (3.31) có thể thu được một cách hình thức từ công thức tích phân Cauchy bằng phép đạo hàm tích phân đường phụ thuộc tham số liên tiếp n lần.

Nhận xét 3.2.9. Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền $D \ni \infty$. Ta xét miền D^* thu được từ miền D qua phép biến đổi $w = \dfrac{1}{z}$ $\left(z = \dfrac{1}{w}\right)$ và chứng tỏ rằng hàm $f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ chỉnh hình trong D^*. Đối với mọi điểm $w \neq 0$ ($w = 0$ thuộc D^*) thì điều đó là hiển nhiên theo quy tắc đạo hàm của hàm hợp. Ta cần chứng minh hàm $f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ chỉnh hình tại điểm $w = 0$, tức là tồn tại đạo hàm trong lân cận $w = 0$. Trong miền D ta dựng đường tròn $\gamma(R)$ với tâm tại điểm $z = 0$ và bán kính R đủ lớn sao cho $\gamma(R) \subset D$. Hàm $w = \dfrac{1}{z}$ ánh xạ đường tròn $\gamma(R) \subset D$ thành đường tròn $\gamma^*\left(\frac{1}{R}\right)$ với tâm $w = 0$ và bán kính $\dfrac{1}{R}$. Đối với z nằm ngoài $\gamma(R)$, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty).$$

và do đó đối với các điểm w nằm trong $\gamma^*\left(\dfrac{1}{R}\right)$ ta thu được

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(R)} \frac{w f(\zeta)}{w\zeta - 1} d\zeta + f(\infty).$$

Từ đó bằng cách áp dụng định lý 10.10 về phép đạo hàm tích phân đường phụ thuộc tham số ta thu được

$$\frac{d}{dw} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta w - 1)^2} d\zeta.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng đạo hàm $\dfrac{df\left(\dfrac{1}{w}\right)}{dw}$ tồn tại và liên tục tại lân cận điểm $w = 0$.

Ta nêu ra điều nhận xét sau đây: Định lý vừa được chứng minh là một kết quả tuyệt vời và nó hoàn toàn mâu thuẫn với những gì mà ta đã biết trước đây về hàm biến thực.

Chẳng hạn, ta xét hàm biến thực

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Hàm này có đạo hàm với mọi x. Thật vậy, nếu $x \neq 0$ thì

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x},$$

và nếu $x = 0$ thì

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Tuy nhiên $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ không tồn tại, tức là đạo hàm $f'(x)$ không liên tục. Do đó, đối với hàm biến thực thì sự tồn tại đạo hàm tại mỗi điểm không thể suy ra tính liên tục của đạo hàm đó.

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{(z-i)^3},$$

trong đó Γ là chu tuyến đóng bao điểm i một lần.

Giải. Hàm $f(z) = \cos z$ chỉnh hình trong miền biên Γ. Do đó áp dụng công thức (3.31) với $n = 2$ ta có

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2(\cos z)}{dz^2}\Big|_{z=i} = \pi i \frac{e^{-1} + e}{2}\cdot$$

Vậy:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = -\pi i \text{ch} 1.$$

3.2.8 Điều kiện đủ để hàm f chỉnh hình

Bây giờ ta sẽ chứng minh một điều kiện đủ để hàm liên tục đã cho chỉnh hình. Nếu hàm f liên tục trong miền $D \subset \mathbb{C}$ và

$$\int_{\Omega} f dz = 0$$

đối với Ω thuộc lớp các tập hợp nào đó thuộc D thì hàm $f \in \mathcal{H}(D)$. Ta sẽ giả thiết rằng $\{\Omega\}$ là tập hợp mọi hình chữ nhật nằm trong D với các cạnh song song với các trục tọa độ.

Định lý 3.2.15. (Morera) *Giả sử f là hàm liên tục trong miền D. Nếu dạng vi phân $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng thì hàm f chỉnh hình trong D.*

Chứng minh. Thật vậy, theo định nghĩa 10.5 hàm f có nguyên hàm địa phương $g(z)$. Nguyên hàm này là hàm chỉnh hình. Theo định lý 3.2.14 đạo hàm f của nguyên hàm này là hàm chỉnh hình. Định lý được chứng minh. $\square$

3.2.9 Hàm điều hòa và mối liên hệ với hàm chỉnh hình

Lớp hàm thực liên quan một cách chặt chẽ với các hàm chỉnh hình là *lớp các hàm điều hòa*.

Định nghĩa 3.2.4. Hàm thực $u(x,y)$ đơn trị trong miền D của hai biến thực x, y được gọi là *hàm điều hòa* trong miền D nếu trong miền D nó liên tục, có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục và thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.36}$$

Phương trình vi phân đạo hàm riêng (3.36) được gọi là *phương trình Laplace*[6] và toán tử vi phân

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

[6]P. S. Laplace (1749-1827) là nhà toán học Pháp.

gọi là *toán tử Laplace.*

Bằng cách áp dụng phép vi phân hình thức (**2.1**) dễ dàng thấy rằng

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}, \quad z = x + iy,\ \overline{z} = x - iy.$$

Do đó phương trình (3.36) có thể viết dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \overline{z}} = 0. \tag{3.37}$$

Định lý 3.2.16. *Mọi hàm chỉnh hình đều là hàm điều hòa.*

Chứng minh. Thật vậy, mọi hàm chỉnh hình f đều khả vi vô hạn lần và

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Áp dụng phép vi phân $\dfrac{\partial}{\partial z}$ ta thu được (3.37). □

Hệ quả 3.2.1. *Phần thực và phần ảo của hàm chỉnh hình là các hàm điều hòa.*

Chứng minh. Ta có

$$u = \mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \quad v = \mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}).$$

Từ đó suy rằng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\Big) = 0$$

(ở đây ta có $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ do tính chỉnh hình của f; còn hàm $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$ là phản chỉnh hình). Tương tự ta có $\dfrac{\partial^2 v}{\partial z\partial \overline{z}} = 0$. □

Như vậy phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D là những hàm điều hòa trong D. Điều khẳng định ngược lại là không đúng nếu miền D đa liên. Để thấy rõ điều đó, bạn đọc chỉ cần xét hàm $u = \ln|z|$ và miền $D = \{z : 0 < |z| < \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Về mặt địa phương* tại lân cận của điểm $z \neq 0$ bất kỳ ta có thể tách một nhánh liên tục nào đó của hàm đa trị $\ln z$ và hàm $u = \ln|z|$ là phần thực của nhánh đó. Trong miền $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ không thể tách nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $\ln z$.

Ví dụ 1. Tìm hàm điều hòa dạng

$$u = \varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Giải. Nếu hàm điều hòa dạng đã nêu tồn tại thì nó sẽ được tìm từ phương trình Laplace. Ta đặt $x + \sqrt{x^2 + y^2} = t$, khi đó

$$u'_x = \varphi'(t)t'_x = \varphi'(t)\frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,;$$

$$u''_{xx} = \varphi''(t)\frac{t^2}{x^2 + y^2} + \varphi'(t)\frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}\,;$$

$$u'_y = \varphi'(t)t'_y = \varphi'(t)\frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,;$$

$$u''_{yy} = \varphi''(t)\frac{y^2}{x^2 + y^2} + \varphi'(t)\frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}\,\cdot$$

Từ đó

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \varphi''(t)\frac{y^2 + t^2}{x^2 + y^2} + \varphi'(t)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\varphi''(t)\frac{y^2 + x^2 + 2x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varphi'(t) = 0,$$

$$\varphi''(t)\big[2\sqrt{x^2 + y^2} + 2x\big] + \varphi'(t) = 0,$$

$$2\varphi''(t)t + \varphi'(t) = 0,$$

$$\frac{2\varphi''(t)}{\varphi'(t)} + \frac{1}{t} = 0$$

$$2\ln\varphi'(t) + \ln t = 2\ln\frac{1}{2}C,$$

$$\varphi'(t) = \frac{C}{2\sqrt{t}}\,,$$

$$\varphi(t) = C\sqrt{t} + C_1.$$

Như vậy

$$u(x,y) = C\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C_1.$$

Định nghĩa 3.2.5. Nếu các hàm điều hòa $u(x,y)$ và $v(x,y)$ thỏa mãn các điều kiện Cauchy-Riemann thì hàm $v(x,y)$ được gọi là *hàm điều hòa liên hợp* với $u(x,y)$.

Ta lưu ý rằng khi đó $u(x,y)$ là hàm điều hòa liên hợp với $-v(x,y)$ (chứ không phải với $v(x,y)$).

Từ đó ta thu được

Định lý 3.2.17. *Để một hàm là chỉnh hình trong miền D điều kiện cần và đủ là phần ảo của nó là hàm điều hòa liên hợp với phần thực của nó trong miền D.*

Ta sẽ chứng tỏ rằng nếu lấy $u(x,y)$ là nghiệm bất kỳ của phương trình Laplace $\Delta u = 0$ trong *miền đơn liên bị chặn* D thì hàm $v(x,y)$ sẽ được xác định với sự sai khác một hằng số cộng.

Thật vậy, từ các điều kiện Cauchy-Riemann ta có

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Dạng vi phân $\omega_1 = -\dfrac{\partial u}{\partial y}dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}dy$ là dạng vi phân đóng trong D (theo (3.36)) và vì D là *miền đơn liên* nên ω_1 là dạng vi phân đúng trong D. Ta ký hiệu nguyên hàm của dạng vi phân này là v (nó xác định với sự sai khác hằng số cộng). Đồng thời ta có $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, tức là điều kiện Cauchy-Riemann được thỏa mãn. Mặt khác ta có

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \Delta v = 0,$$

tức là hàm v thỏa mãn phương trình Laplace, và v là hàm điều hòa. Từ đó ta có

Định lý 3.2.18. *Mọi hàm điều hòa trong miền đơn liên bị chặn đều có thể xem là phần thực hay phần ảo của một hàm chỉnh hình nào đó trong miền ấy.*

Nhận xét 3.2.10. 1. Nếu miền D là tùy ý thì nguyên hàm v nói trên chỉ tồn tại địa phương. Điều đó có nghĩa là về mặt địa phương mọi hàm thực điều hòa trong miền D là phần thực hoặc phần ảo của hàm chỉnh hình.

2. Ta có thể chỉ ra phương pháp tích phân để xác định hàm f như sau.

Giả sử $U = \{|z - z_0| < r\} \subset D$. Từ (3.36) suy ra rằng dạng vi phân

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

là dạng vi phân đóng trong U. Do đó tích phân của ω trong U không phụ thuộc tuyến lấy tích phân. Ta đặt

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

và từ đó dễ dàng thấy rằng

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

Các hệ thức này chính là điều kiện khả vi phức của hàm $f = u + iv$, $u = \text{Re}f$.

Như vậy

$$f(z) = u(x, y) + i\int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + iC.$$

Đối với hàm $if = -v + iu$ thì $u(x, y)$ là phần ảo.

Ta xét một vài ví dụ.

1) Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (tức là mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ trừ ra bán trục $y = 0$, $x \leqslant 0$) và $u(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. Tìm hàm chỉnh hình $f(z)$ mà $u(x, y) = \text{Re}f(z)$.

Giải. Trước hết dễ dàng kiểm ta rằng $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ là hàm điều hòa trong D. Ta cần tìm hàm $v(x,y)$ điều hòa liên hợp với $u(x,y)$. Ta có các phương trình

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2}\,;$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\,\cdot$$

Do đó

$$v(x,y)=\int\limits_{z_0}^{z}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy+C.$$

Ta lấy $z_0=(1,0)$, $z=(x,y)$.

Nếu điểm z thuộc nửa mặt phẳng bên phải thì ta có thể lấy tích phân theo đường gấp khúc z_0Mz, $M=(x,0)$. Ta có

$$v(x,y)=\int\limits_{(1,0)}^{(x,y)}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int\limits_{z_0M}+\int\limits_{M}^{z}=$$
$$=0+\int\limits_{0}^{y}\frac{xdy}{x^2+y^2}=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+C.$$

Nếu điểm z thuộc góc phần tư thứ II (hay thuộc góc phần tư thứ III) của mặt phẳng tọa độ ($x\leqslant 0$, $y\neq 0$) thì ta có thể lấy tích phân theo đường gấp khúc $z_0M'z$, $M'=(1,y)$, $z=(x,y)\in II$ (tương ứng: theo đường gấp khúc $z_0M''z$, $M''=(1,y)$, trong đó $z=(x,y)$ thuộc góc III).

Ta có

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int\limits_{0}^{y}\frac{dy}{1+y^2}-\int\limits_{1}^{x}\frac{ydx}{x^2+y^2}+C\\&=\mathrm{arctg}y-\mathrm{arctg}\frac{x}{y}+\mathrm{arctg}\frac{1}{y}+C\\&=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+C.\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng $v(x,y) = \arg z + C \ \ \forall\, z \in D$ và như vậy

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arg z + iC = \ln|z| + i\arg z + iC.$$

2) Tìm hàm chỉnh hình trên toàn mặt phẳng phức $w = u + iv = f(z)$ mà $v(x,y) = x^3 - 3y^2x$ và $f(0) = 1$.

Giải. Bài toán có lời giải vì $v(x,y) = x^3 - 3y^2x$ là hàm điều hòa trên toàn mặt phẳng:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

Cũng như trên hàm $u(x,y)$ có thể tìm theo vi phân toàn phần của nó

$$du = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial y}dy = -6xydx - (3x^2 - 3y^2)dy.$$

Từ đó ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(3x^2 - 3y^2). \tag{3.39}$$

Từ phương trình (3.38) ta có thể viết

$$u = -\int 6xydx = -3x^2y + \varphi(y),$$

và mặt khác, theo (3.39) ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -3x^2 + \varphi'(y) = -(3x^2 - 3y^2)\\ &\Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = y^3 + C.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} u &= -3x^2y + y^3 + C;\\ f(z) &= -3x^2y + y^3 + C + i(x^3 - 3y^2x)\\ &= i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3) + C\\ &= i(x+iy)^3 + C = iz^3 + C.\end{aligned}$$

Nhưng vì $f(0) = C = 1$ nên $f(z) = iz^3 + 1$.

3.2.10 Tích phân dạng Cauchy. Công thức Sokhotski

1^+ *Khái niệm tích phân dạng Cauchy.* Giả sử trong mặt phẳng phức z cho đường cong đo được tùy ý đóng hoặc không đóng $\mathcal{L}$ và trên đường cong đó cho hàm liên tục $\varphi(\zeta)$ nào đó. Khi đó hiển nhiên tích phân

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{L} \tag{3.40}$$

sẽ xác định một hàm nào đó của z. Tích phân đó được gọi là *tích phân dạng Cauchy*, hàm $\dfrac{1}{\zeta - z}$ được gọi là *nhân Cauchy*, hàm $\varphi(\zeta)$ được gọi là *mật độ*.

Tích phân Cauchy là trường hợp riêng của tích phân dạng Cauchy. Thật vậy, nếu $\mathcal{L}$ là đường cong đóng đo được giới hạn một miền đơn liên hoặc $\mathcal{L}$ gồm một số hữu hạn đường cong đo được giới hạn miền hữu hạn liên thông và $f \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$ thì tích phân (3.40) là tích phân Cauchy.

Lặp lại nguyên vẹn các lập luận trong chứng minh định lý 3.2.14 ta có thể chứng minh tính chất đặc biệt sau đây của tích phân dạng Cauchy: *tại mọi điểm z không nằm trên đường cong $\mathcal{L}$ ($z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{L}$) tích phân dạng Cauchy* (3.40) *là hàm chỉnh hình của biến z và*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$

Hơn thế nữa $F(z)$ có đạo hàm mọi cấp và

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.41}$$

Nếu đường cong $\mathcal{L}$ tách mặt phẳng phức thành một số miền thì trong các miền đó, nói chung tích phân dạng Cauchy xác định những hàm chỉnh hình khác nhau. Trong trường hợp khi $\mathcal{L}$ là đường cong đóng Jordan đo được thì theo định lý Jordan: *mặt phẳng phức $\overline{\mathbb{C}}$ được tách thành hai miền đơn liên mà đường cong đó là biên của mỗi miền.* Và khi đó tích phân dạng Cauchy (3.40) xác định hai hàm chỉnh hình, cụ thể là:

(1) Ở phần trong D^+ của $\mathcal{L}$ tích phân (3.40) xác định hàm chỉnh hình ký hiệu là $f^+(z)$

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

(2) Trong phần ngoài D^- của $\mathcal{L}$ tích phân (3.40) xác định hàm chỉnh hình $f^-(z)$

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Chẳng hạn tích phân

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

bằng 1 khắp nơi trong hình tròn $\{z : |z| < 1\}$ và bằng 0 khắp nơi ngoài hình tròn đơn vị. Rõ ràng $f^+(z) = 1$, $z \in \{z : |z| < 1\}$ và $f^-(0) = 0$, $z \in \{z : |z| > 1\}$ là hai hàm chỉnh hình khác nhau.

Ta cũng lưu ý rằng hàm $F(z)$ xác định bởi tích phân (3.40) là hàm chỉnh hình tại điểm vô cùng. Điều đó được suy ra từ nhận xét 11.9.

Vấn đề quan trọng nẩy ra một cách tự nhiên là có thể xét giá trị của tích phân (3.40) khi $z = z_0$ thuộc chu tuyến $\mathcal{L}$ hay không, tức là biểu thức

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta \tag{3.42}$$

có nghĩa hay không khi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$?

Định nghĩa 3.2.6. Người ta nói rằng hàm đơn trị $f(z)$ cho trên tập hợp liên thông $\mathcal{L}$ thỏa mãn điều kiện Holder [7] nếu tồn tại các hằng số dương M (gọi là hằng số Holder) và số dương α, $0 < \alpha \leqslant 1$ (gọi là số mũ Holder) sao cho với mọi cặp điểm $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$ ta đều có

$$|f(z_1) - f(z_2)| < M|z_1 - z_2|^\alpha. \tag{3.43}$$

[7] L. Holder (1859-1937) là nhà toán học Đức.

Nhận xét 3.2.11. 1) Khi $\alpha = 1$ thì điều kiện Holder còn được gọi là *điều kiện Lipschitz*[8]. Trong nhiều sách chuyên khảo điều kiện Holder được gọi là *điều kiện* Lipschitz cấp α.

2) Khi hàm $f(z)$ thỏa mãn điều kiện Holder trên $\mathcal{L}$ thì người ta nói rằng f thuộc lớp Holder cấp $\alpha : f \in H^\alpha(\mathcal{L})$.

3) Người ta cũng nói rằng hàm $f(\zeta)$ thỏa mãn *điều kiện Holder với số mũ* $0 < \alpha \leqslant 1$ *tại điểm* ζ_0 nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho với mọi điểm $\zeta \in \mathcal{L}$ đủ gần ζ_0 thì

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leqslant M|\zeta - \zeta_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

2^+ *Tích phân với nghĩa giá trị chính theo Cauchy*

Ta sẽ giả thiết rằng $\mathcal{L}$ là đường cong Jordan trơn và điểm $z = z_0$ nằm trên $\mathcal{L}$.

Khi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ thì tích phân (3.42) không tồn tại theo nghĩa thông thường. Nhưng với một số hạn chế bổ sung đối với mật độ $\varphi(\zeta)$ người ta có thể gán cho (3.42) một ý nghĩa xác định. Giả sử γ là đường tròn: $\gamma = \gamma(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$ trong đó ε là số dương đủ bé sao cho γ chỉ cắt $\mathcal{L}$ tại hai điểm. Phần đường cong $\mathcal{L}$ nằm ngoài hình tròn $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant \varepsilon\}$ được ký hiệu là $\mathcal{L}(\varepsilon)$. Khi đó tích phân

$$I(z_0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

tồn tại theo nghĩa thông thường.

Định nghĩa 3.2.7. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I(z_0, \varepsilon) = I(z_0)$$

thì giới hạn đó được gọi là *tích phân với nghĩa giá trị chính theo Cauchy* (gọi tắt là giá trị chính) hay *tích phân bất thường Cauchy* và được ký hiệu là

$$I(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \tag{3.44}$$

[8]R. Lipschitz (1832-1903) là nhà toán học Đức.

hay

$$I(z_0) = v.p\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0}\cdot \tag{3.45}$$

Hai chữ cái v.p ở trước tích phân trong vế phải của (3.45) là viết tắt của các từ valuer principal có nghĩa là *giá trị chính.*

Định lý 3.2.19. *Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong đóng Jordan trơn và hàm $\varphi(\zeta)$ thỏa mãn điều kiện Holder*

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| \leqslant M|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1$$

khắp nơi trên $\mathcal{L}$. Khi đó giá trị chính theo Cauchy của tích phân dạng Cauchy tồn tại tại mọi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ và

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta + \frac{1}{2}\varphi(z_0). \tag{3.46}$$

Chứng minh. Ta xét tích phân theo $\mathcal{L}(\varepsilon)$:

$$\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = \int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta + \varphi(z_0)\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \tag{3.47}$$

và thực hiện phép qua giới hạn (3.47) khi $\varepsilon \to 0$.

1) *Khảo sát giới hạn*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta \tag{I}$$

Vì $\varphi \in H^\alpha(\mathcal{L})$ nên

$$\left|\frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0}\right| \leqslant M|\zeta - z_0|^{\alpha - 1}. \tag{3.48}$$

Mặt khác vì $\mathcal{L}$ là đường cong Jordan trơn nên nó có tính chất đặc biệt là

$$1 \geqslant \frac{|\zeta - z_0|}{|s - s_0|} > a > 0 \tag{3.49}$$

trong đó s và s_0 là các giá trị của độ dài cung của $\mathcal{L}$ tương ứng với điểm ζ và z_0. Do đó từ (3.48) và (3.49) ta có

$$\Big|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta\Big| \leqslant K_1|s-s_0|^{\alpha-1}ds.$$

Như vậy

$$\Big|\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta\Big| \leqslant K_1\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}|s-s_0|^{\alpha-1}ds$$

và từ đó suy rằng tích phân (I) hội tụ tuyệt đối và

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta = \int\limits_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta. \tag{3.50}$$

2) *Khảo sát giới hạn*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0}\cdot \tag{II}$$

Lưu ý rằng $\gamma(z_0,\varepsilon)$ chỉ cắt $\mathcal{L}$ tại hai điểm. Ta ký hiệu cung tròn nằm trong đường cong $\mathcal{L}$ của $\gamma(z_0,\varepsilon)$ và nối hai giao điểm đó là $\gamma_i(\varepsilon)$. Khi đó theo định lý Cauchy ta có

$$\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int\limits_{\gamma_i(\varepsilon)}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \tag{3.51}$$

Nhưng tích phân ở vế phải của (3.51) bằng $i\alpha(\varepsilon)$ trong đó $\alpha(\varepsilon)$ là số đo góc của cung $\gamma_i(\varepsilon)$. Khi $\varepsilon\to 0$ đại lượng $\alpha(\varepsilon)$ dần đến góc giữa các tiếp tuyến với đường cong $\mathcal{L}$ tại điểm z_0. Do $\mathcal{L}$ là đường cong trơn nên $\alpha(\varepsilon)\to\pi$ khi $\varepsilon\to 0$. Qua giới hạn đẳng thức (3.47) khi $\varepsilon\to 0$ ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta + \varphi(z_0)\cdot\frac{\pi i}{2\pi i}$$

và từ đó thu được (3.46). □

Về sau ta ký hiệu

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta, \quad z_0 \in \mathcal{L} \tag{3.52}$$

và như ta biết tích phân (3.52) là *tích phân bất thường Cauchy*

3^+ *Giá trị giới hạn của tích phân dạng Cauchy*

Ở đây ta sẽ tìm giá trị giới hạn của tích phân dạng Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{L}$$

khi điểm z dần đến điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ từ phía trong và từ phía ngoài và xác lập mối liên hệ giữa các giá trị giới hạn ấy. Đó cũng chính là nội dung cơ bản của các công thức Sokhoski-Plemeli[9].

Để thấy rõ bản chất của vấn đề, đầu tiên ta xét

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{3.53}$$

là *tích phân Cauchy*. Khi đó tại mỗi điểm của miền D^+ (là phần trong của $\mathcal{L}$) hàm $F(z)$ trùng với hàm $\varphi(z)$ chỉnh hình trong miền D^* nào đó chứa cả D và $\mathcal{L}$. Do đó nếu z_0 là điểm nào đó thuộc $\mathcal{L}$ thì hàm $F(z) = \varphi(z)$ dần đến giới hạn $\varphi(z_0)$ khi $z \to z_0$ từ phía trong và

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D^+}} F(z) = \varphi(z_0) = \varphi^+(z_0) \tag{3.54}$$

trong đó ta ký hiệu $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D^+}} F(z) = \varphi^+(z_0)$. Khi $z \notin \overline{D}^+$ thì tích phân Cauchy (3.53) bằng 0. Do đó khi $z \to z_0$, $z \notin \overline{D}^+$ thì tích phân Cauchy dần đến 0 và

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D^-}} F(z) = 0 = \varphi^-(z_0) \tag{3.55}$$

[9] Iu. V. Sokhoski (1842-1927) là nhà toán học Nga.
J. Plemeli là nhà toán học Đức.

trong đó ta ký hiệu $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D^-}} F(z) = \varphi^-(z_0)$.

Từ (3.54) và (3.55) suy ra

$$\varphi^+(z_0) - \varphi^-(z_0) = \varphi(z_0) - 0 = \varphi(z_0). \tag{3.56}$$

Như vậy đối với tích phân Cauchy tại mỗi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ đều tồn tại các giá trị giới hạn bằng $\varphi(z_0)$ từ phía trong và bằng 0 từ phía ngoài và các giá trị giới hạn đó thỏa mãn hệ thức (3.56).

Bây giờ giả sử (3.53) là *tích phân dạng Cauchy.* Ta sẽ thấy rằng khi $z \to z_0 \in \mathcal{L}$ thì các giá trị giới hạn của (3.53) cũng tuân theo chính quy luật như đối với tích phân Cauchy.

Để đơn giản trong trình bày ta sẽ xét tích phân (3.53) với các giả thiết sau đây

(i) $\mathcal{L}$ là đường cong đóng Jordan trơn;

(ii) Hàm biên (mật độ) $\varphi(\zeta)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của mỗi điểm của đường cong $\mathcal{L}$.

Định lý 3.2.20. (Iu. Sokhoski, J. Plemeli) *Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong đóng Jordan trơn và $\varphi(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của mỗi điểm của đường cong $\mathcal{L}$. Khi đó tích phân dạng Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{3.57}$$

có các giá trị giới hạn là $F^+(z_0)$ và $F^-(z_0)$ tại mọi điểm z_0 của đường cong $\mathcal{L}$ khi điểm z dần đến z_0 từ phía trong và phía ngoài tương ứng và các giá trị giới hạn đó được biểu diễn qua hàm biên $\varphi(\zeta)$ và tích phân bất thường bởi các công thức

$$\begin{aligned} F^+(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2}\varphi(z_0),\\ F^-(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2}\varphi(z_0). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Các công thức (3.58) *được gọi là các công thức Sokhoski - Plemeli.*

Nhận xét. Lưu ý đến ký hiệu (3.52) các công thức (3.58) có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} F^+(z_0) &= F(z_0) + \frac{1}{2}\varphi(z_0) \\ F^-(z_0) &= F(z_0) - \frac{1}{2}\varphi(z_0) \end{aligned} \tag{3.58*}$$

Chứng minh. Giả sử z_0 là điểm tùy ý của đường cong $\mathcal{L}$ ($z_0 \in \mathcal{L}$). Ta xét δ-lân cận $\mathcal{U}(z_0, \delta) = \mathcal{U}(z_0)$ sao cho hàm $\varphi(\zeta)$ chỉnh hình trong $\mathcal{U}(z_0)$. Ta dựng đường tròn $\gamma(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| = \varepsilon\}$ đủ bé sao cho $\gamma(z_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}(z_0)$. Ta ký hiệu:

+ $\mathcal{L}(\varepsilon)$ là phần đường cong $\mathcal{L}$ nằm ngoài hình tròn $S(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| \leqslant \varepsilon\}$, còn $\sigma(\varepsilon)$ là phần đường cong $\mathcal{L}$ nằm trong $S(z_0, \varepsilon)$;

+ $\gamma_e(\varepsilon)$ là cung tròn của $\gamma(z_0, \varepsilon)$ nằm ngoài $\mathcal{L}$, còn $\gamma_i(\varepsilon)$ nằm trong $\mathcal{L}$;

+ $\Gamma(\varepsilon) = \mathcal{L}(\varepsilon) \cup \gamma_e(\varepsilon)$; $\quad \gamma(\varepsilon) = \mathcal{L}(\varepsilon) \cup \gamma_i(\varepsilon)$.

Tiếp theo ta xét tích phân dạng Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{3.57*}$$

trong hai trường hợp sau đây.

Trường hợp thứ nhất: điểm $z \in D^+$. Khi đó tích phân dạng Cauchy (3.57*) xác định hàm $F^+(z) \in \mathcal{H}(D^+)$ và

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Vì điểm z nằm ngoài đường cong $\sigma(\varepsilon) \cup \gamma_e(\varepsilon)$ và $\varphi(\zeta)$ chỉnh hình trong $\mathcal{U}(z_0)$ nên theo định lý tích phân Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma(\varepsilon)\cup\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

và từ đó suy rằng

$$
\begin{aligned}
F^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)\cup\gamma_e(\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

trong đó tích phân ở vế phải là tích phân dạng Cauchy. Nó xác định hàm chỉnh hình trong lân cận bất kỳ của điểm z_0 (không chứa điểm của $\mathcal{L}(\varepsilon) + \gamma_e(\varepsilon)$) đồng thời tại các điểm thuộc D^+ của lân cận đó nó trùng với hàm $F^+(z)$. Qua giới hạn (3.59) khi z $(\in D^+)$ dần đến $z_0 \in \mathcal{L}$ ta có

$$
\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D^+}} F^+(z_0) = F^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta. \qquad (3.60)
$$

Công thức (3.60) chứng tỏ rằng giá trị giới hạn $F^+(z_0)$ của tích phân dạng Cauchy tồn tại $\forall\, z_0 \in \mathcal{L}$ và do (3.59) nó xác định một hàm chỉnh hình trên chu tuyến $\mathcal{L}$.

Để xác định sự phụ thuộc giữa hàm $F^+(z_0)$ với hàm biên $\varphi(z_0)$ ta cần chuyển qua giới hạn đẳng thức (3.60) khi $\varepsilon \to 0$.

Đầu tiên khảo sát giới hạn

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta.
$$

Đặt $\zeta - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ dọc theo cung $\gamma_e(\varepsilon)$. Khi đó $d\zeta = \varepsilon i e^{i\theta}d\theta$. Ngoài ra ta có thể viết

$$
\varphi(\zeta) = \varphi(z_0) + \eta(\zeta, z_0)
$$

trong đó $\big|\eta(\zeta, z_0)\big|_{\zeta\in\gamma_e(\varepsilon)} \longrightarrow 0$ khi $\varepsilon \to 0$ và $\zeta \in \gamma_e(\varepsilon)$. Do đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}\frac{\varphi(z_0)+\eta}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta\\ &= \frac{\varphi(z_0)}{2\pi}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}\eta d\theta.\end{aligned}$$

vì $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}d\theta = \pi$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}\eta d\theta = 0$ nên

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = \frac{\varphi(z_0)}{2}\cdot \tag{3.61}$$

Tiếp theo, khi $\varepsilon \to 0$ từ (3.60) ta thu được tích phân $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta$ dần đến giới hạn xác định. Ta ký hiệu giá trị giới hạn đó là

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta. \tag{3.62}$$

Đó là giá trị của tích phân dạng Cauchy tại điểm $z_0 \in \mathcal{L}$.

Như vậy qua giới hạn đẳng thức (3.60), từ (3.61) và (3.62) ta có

$$F^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta + \frac{1}{2}\varphi(z_0). \tag{3.63}$$

Trường hợp thứ hai: điểm $z \in D^-$. Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp thứ nhất, trong trường hợp này ta có

$$\begin{aligned}F^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_i^-(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)\cup\gamma_i^-(\varepsilon)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.\end{aligned} \tag{3.64}$$

trong đó tích phân dạng Cauchy ở vế phải xác định hàm chỉnh hình trong lân cận điểm z_0 và trùng với $F^-(z)$ tại những điểm thuộc D^- của lân cận đó. Qua giới hạn (3.64) khi điểm $z \in D^-$ dần đến điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ ta thu được

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D^-}} F^-(z) = F^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \tag{3.65}$$

Như vậy ta đã chứng minh sự tồn tại giá trị giới hạn từ ngoài của tích phân dạng Cauchy tại điểm tùy ý $z_0 \in \mathcal{L}$.

Lưu ý rằng theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \varphi(z_0)$$

và do đó từ (3.61) ta thu được

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2} \varphi(z_0). \tag{3.66}$$

Từ (3.66), qua giới hạn (3.65) khi $\varepsilon \to 0$ ta có

$$F^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2} \varphi(z_0).$$

Như vậy ta thu được

$$F^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{\varphi(z_0)}{2},$$

$$F^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{\varphi(z_0)}{2}.$$

Đó là các công thức Sokhoski - Plemeli. □

Hệ quả 3.2.2. *1. Cộng vế với vế các đẳng thức* (3.58) *ta thu được*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{F^+(z_0) + F^-(z_0)}{2}. \tag{3.67}$$

Hệ thức (3.67) *chứng tỏ rằng giá trị của tích phân dạng Cauchy tại điểm bất kỳ của chu tuyến tích phân là bằng trung bình cộng các giá trị giới hạn từ trong và từ ngoài của nó.*

2. Lấy đẳng thức thứ nhất của (3.58) *trừ đẳng thức thứ hai ta có*

$$\varphi(z_0) = F^+(z_0) - F^-(z_0). \tag{3.68}$$

Hệ thức (3.68) *chứng tỏ rằng giá trị của hàm biên tại điểm bất kỳ của $\mathcal{L}$ là bằng hiệu giữa các giá trị giới hạn tại điểm đó của tích phân dạng Cauchy.*

Kết quả tương tự như định lý 3.2.20 có thể chứng minh cho trường hợp $\mathcal{L}$ là đường cong trơn từng khúc. Khi đó tại các điểm mà $\mathcal{L}$ có tiếp tuyến các công thức (3.58) vẫn giữ nguyên. Tại các điểm góc các công thức (3.58) được thay bởi

$$F^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta + \Big(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\Big)\varphi(z_0),$$
$$F^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta - \frac{\alpha}{2\pi}\varphi(z_0)$$

trong đó α là góc giữa các tiếp tuyến với $\mathcal{L}$ tại điểm góc $z_0 \in \mathcal{L}$.

Nhận xét 3.2.12. Các công thức Sokhoski-Plemeli vẫn còn đúng nếu hàm biên $\varphi(\zeta) \in H^\alpha(\mathcal{L})$ chỉ liên tục trên $\mathcal{L}$ và $\mathcal{L}$ là đường cong Jordan đo được.

Ví dụ

1. Xét tích phân

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta} \frac{dx}{x - z}$$

trong đó $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ và tích phân được lấy theo hướng tăng của x. Giả sử lấy $z_0 = 0$. Ở đây hàm $\varphi(\zeta) \equiv 1$ là hàm chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Do đó ngoại trừ điều kiện duy nhất là đường tròn $\gamma(z_0, \varepsilon)$ phải cắt Δ tại hai điểm đứng trước và đứng sau $z_0 = 0$, ta có thể chọn đường tròn $\gamma(z_0, \varepsilon)$ một cách tùy ý. Ta lấy $\gamma(z_0,\varepsilon)$ là đường tròn đơn vị. Khi đó cung $\sigma(\varepsilon)$ là đoạn $\Delta=[-1,+1]$ và các cung $\gamma_i(\varepsilon)$, $\gamma_e(\varepsilon)$ chính là nửa trên và nửa dưới của đường tròn. Theo công thức (3.68) ta có

$$F^+(0)-F^-(0)=\varphi(0)=1.$$

Ta xác định $F^+(0)$ và $F^-(0)$. Ta có

$$F^+(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e(\varepsilon)}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{i\theta}id\theta}{e^{i\theta}}=\frac{1}{2};$$

$$F^-(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_i(\varepsilon)}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{e^{i\theta}id\theta}{e^{i\theta}}=\frac{1}{2}\cdot$$

2. Giả sử $\mathcal{L}=\{z:|z|=1\}$, $\varphi(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta}$. Ta xét tích phân dạng Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}\cdot$$

Nếu điểm z nằm trong $\mathcal{L}$ thì

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}&=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\\&=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=0.\end{aligned}$$

Nếu điểm z nằm ngoài $\mathcal{L}$ thì tích phân đó bằng $-\dfrac{1}{z}$. Như vậy

$$F^+(z_0)=0,\quad F^-(z_0)=-\frac{1}{z_0}$$

và do đó theo công thức (3.67) ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z_0)}=-\frac{1}{2z_0}\cdot$$

3.2.11 Biểu diễn tích phân hàm điều hòa

Bây giờ ta chuyển sang xét biểu diễn tích phân hàm điều hòa.

Định lý 3.2.21. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong hình tròn $S(R) = \{|z| < R\}$ và liên tục trong hình tròn đóng $\overline{S(R)}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$. Khi đó*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(Re^{it})\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}dt + iv(0). \tag{3.69}$$

Công thức (3.69) *được gọi là công thức Schwartz còn hàm* $\dfrac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}$ *được gọi là nhân Schwartz.*

Chứng minh. Thật vậy, đối với $z \in S(R)$, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z}dt. \tag{3.70}$$

Đặc biệt là

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{it})dt. \tag{3.71}$$

Ngoài ra ta có

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - R^2/\overline{z}}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{\overline{z}Re^{it}}{Re^{it}\overline{z} - R^2}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{-\overline{z}}{Re^{-it} - \overline{z}}dt, \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

vì $|R^2/\overline{z}| > R$ và do đó hàm dưới dấu tích phân chỉnh hình trong $S(R)$ và liên tục trên $\overline{S(R)}$. Từ (3.70) và (3.71) ta thu được

$$f(z) - \frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{1}{2}\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}dt. \tag{3.73}$$

Bây giờ từ (3.71) và (3.72) ta có

$$\frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{1}{2}\frac{Re^{-it}+\overline{z}}{Re^{-it}-z}dt,$$

và do đó

$$\frac{1}{2}\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(Re^{it})}\frac{1}{2}\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}dt. \tag{3.74}$$

Đặt $f(z) = u(z) + iv(z)$ và cộng (3.73) với (3.74) ta thu được

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}dt + iv(0).$$

□

Nhận xét 3.2.13. Công thức (3.69) cho phép ta xác định hàm chỉnh hình $f(z)$ trong hình tròn $S(R)$ (với sự chính xác đến một hằng số cộng thuần ảo) khi biết các giá trị của phần thực của hàm đó trên biên $\partial S(R)$.

Từ định lý vừa chứng minh, bằng cách tách các phần thực và phần ảo, ta có

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{it}-z|^2}dt. \tag{3.75}$$

Nếu đặt $z = re^{i\theta}$, $r < R$ và để ý rằng

$$\begin{aligned} Re\Big\{\frac{Re^{it}+re^{i\theta}}{Re^{it}-re^{i\theta}}\Big\} &= \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\theta)+r^2} \end{aligned}$$

ta có thể viết (3.75) ở dạng khác như sau:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2}dt. \tag{3.76}$$

Công thức (3.75) hoặc (3.76) được gọi là *công thức Poisson* còn hàm $\dfrac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - z|^2}$ được gọi là *nhân Poisson*.

Công thức này đúng đối với phần thực của hàm chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$ và liên tục trong $\overline{S(R)}$. Có thể chứng minh rằng công thức ấy đúng với hàm $u(z)$ bất kỳ điều hòa trong $S(R)$ và liên tục trong $\overline{S(R)}$. Nếu $f(z) = u(z) + iv(z)$ chỉnh hình trong $S(R)$ và liên tục trong $\overline{S(R)}$ thì bằng cách biểu diễn u và v bởi công thức (3.75) (hoặc (3.76)) ta thu được

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2}dt. \tag{3.77}$$

Công thức này được gọi là *công thức Poisson đối với các hàm chỉnh hình* trong hình tròn và liên tục trong hình tròn đóng.

Bây giờ ta chứng minh công thức Poisson và Schwarz đối với trường hợp khi miền là phần ngoài hình tròn.

Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền $S^\infty(R) = \{|z| > R\}$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$. Khi đó nhờ công thức tích phân Cauchy ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial S^\infty(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + f(\infty) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{Re^{it}}{Re^{it} - z}dt + f(\infty). \end{aligned}$$

Ngoài ra

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S^\infty(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + f(\infty) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{it}) + f(\infty),$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S^\infty(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \dfrac{R^2}{\overline{z}}}d\zeta + f(\infty) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{-\overline{z}}{Re^{it} - \overline{z}}dt + f(\infty) \end{aligned}$$

vì rằng

$$\left|\frac{R^2}{\overline{z}}\right| < R.$$

Bằng phương pháp lý luận như ở trên ta thu được

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(Re^{it})\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}dt + v(\infty)i, \quad |z| > R.$$

Đó là công thức Schwartz đối với các hàm chỉnh hình trong $S^\infty(R)$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$. Tiếp theo cũng như ở trên ta có

$$u(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(Re^{it})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}dt, \quad r > R.$$

Đó là công thức Poisson đối với các hàm điều hòa trong $S^\infty(R)$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$. Công thức Poisson đối với các hàm chỉnh hình trong $S^\infty(R)$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$ có dạng

$$f(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2}dt, \quad r > R.$$

Công thức Poisson (3.75) có vai trò rất quan trọng trong khi giải bài toán Dirichlet.

Bài toán Dirichlet đặt ra như sau: Giả sử $f(\theta)$ là hàm 2π-tuần hoàn, liên tục trên đường tròn $\gamma = \{|z| = r\}$. Hãy tìm hàm biến phức $F(z)$ thỏa mãn điều kiện:

a) điều hòa trong hình tròn $U = \{|z| < r\}$;

b) liên tục trong $\overline{U} = \{|z| \leqslant r\}$; và

c) $f(\theta_0) = \lim\limits_{\substack{z \to e^{i\theta_0} \\ |z|<r}} F(z)$.

Ta muốn chứng minh định lý sau đây.

Định lý 3.2.22. *Bài toán Dirichlet đối với hình tròn luôn luôn có nghiệm.*

Chứng minh. Giả sử $|z| < r$. Ta đặt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta. \tag{3.78}$$

Ta cần chứng minh rằng

1. $F(z)$ là hàm điều hòa trong U.
2. $f(\theta_0) = \lim\limits_{\substack{z \to e^{i\theta_0} \\ |z|<r}} F(z)$

Chứng minh 1). Trước hết ta nhận xét rằng hàm $F(z)$ xác định bởi (3.78) là phần thực của hàm

$$\widetilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}d\theta.$$

Do đó nếu ta chứng minh được rằng $\widetilde{F}(z)$ chỉnh hình thì 1) được chứng minh. Với $z \in U$ bất kỳ ta có

$$\frac{\widetilde{F}(z + \Delta z) - \widetilde{F}(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{re^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2}d\theta =$$

$$= \frac{\Delta z}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} f(\theta)d\theta}{(re^{i\theta} - z)^2(re^{i\theta} - z - \Delta z)}$$

và do đó vế trái dần đến 0 khi $\Delta z \to 0$, tức là đạo hàm $\widetilde{F}'(z)$ tồn tại.

Như vậy tính điều hòa của $F(z)$ được chứng minh.

Chứng minh 2). Ta nhận xét rằng đối với hàm điều hòa hằng số $u(z) = 1$ ta có công thức

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta, \quad |z| \leqslant r,$$

và do đó

$$\begin{aligned}
F(z) - f(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}[f(\theta) - f(\theta_0)]d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|\leqslant\eta} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}[f(\theta - f(\theta_0)]d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|>\eta} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}[f(\theta) - f(\theta_0)]d\theta = \\
&= \Delta_1 + \Delta_2 \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

trong đó η là số sẽ được xác định.

Ước lượng tích phân Δ_1. Giả sử $\varepsilon > 0$ là số dương cho trước tùy ý. Vì $f(\theta)$ là hàm liên tục nên ta có thể xác định số $\eta(\varepsilon)$ sao cho

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon/2, \quad |\theta - \theta_0| < \eta(\varepsilon).$$

Do đó

$$|\Delta_1| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|\leqslant\eta}\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta = \frac{\varepsilon}{2}\cdot \qquad (3.80)$$

Ước lượng tích phân Δ_2. Sau khi chọn số $\eta(\varepsilon)$ ở trên, ta xét tích phân

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|>\eta}\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta \qquad (3.81)$$

và chứng tỏ rằng

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta_0}\\ |z|<r}} \delta(z) = 0.$$

Ta đặt $z = \rho e^{i\alpha}$. Nếu $|\alpha - \theta_0| < \eta/2$ thì

$$|\alpha - \theta| \geqslant \eta/2$$

đối với θ bất kỳ thỏa mãn điều kiện $|\theta - \theta_0| > \eta$. Do đó

$$|re^{i\theta} - |z| \geqslant r\sin\frac{\eta}{2}\,,$$

và

$$|\delta(z)| \leqslant \frac{1}{r^2\sin^2\dfrac{\eta}{2}}(r^2 - \rho^2) \to 0.$$

khi $\rho \to r$.

Như vậy sau việc chọn số $\eta(\varepsilon)$ ở trên ta có

$$|\Delta_2| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|>\eta}\Big| \leqslant \frac{2M}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|>\eta}\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta = 2M\delta(z),$$

trong đó $M = \sup|f(\theta)|$, và $\delta(z)$ là giá trị của tích phân (3.81). Vì $\delta(z) \to 0$ khi $z \to re^{i\theta_0}$ ($|z| < r$) nên khi z thuộc lân cận đủ bé của điểm $re^{i\theta_0}$ ta có

$$|\Delta_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{3.82}$$

Từ (3.79), (3.80) và (3.82) ta thu được

$$|F(z) - f(\theta_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3.3 Bài tập

1. Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và γ là chu tuyến đóng trơn từng khúc thuộc miền đơn liên D thì

$$\int\limits_{\gamma} \overline{f(z)} d\overline{z} = 0.$$

2. Chứng minh rằng hàm

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^n}{\zeta^n} d\zeta = g(z),$$

trong đó γ là chu tuyến Jordan bao điểm $\zeta = 0$ và $\zeta = z$, là đa thức bậc $n-1$ và

$$g^{(m)}(0) = f^{(m)}(0), \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

3. Giả sử miền $D \ni \infty$ và $f \in \mathcal{H}(D)$. Khi đó

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty), \quad z \in D.$$

4. Chứng minh rằng trung bình cộng của mọi giá trị $z^{-n} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ đối với các điểm z trên đường tròn $\{|z| = 1\}$ là bằng a_n nếu $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ là hàm chỉnh hình ở trong và trên biên hình tròn $\{|z| \leqslant 1\}$.

5. Tìm hàm điều hòa trong nửa trên của hình tròn đơn vị nhận giá trị bằng 0 trên đường kính và bằng 1 trên nửa đường tròn.

6. Tìm hàm $u(z)$ điều hòa trong vành lệch tâm giữa hai đường tròn $\gamma_0 = \{|z-3| = 9\}$ và $\gamma_1 = \{|z-8| = 16\}$ và $u\big|_{z\in\gamma_0} = u_0$, $u\big|_{z\in\gamma_1} = u_1$, trong đó u_0 và u_1 là những hằng số.

7. Tìm một hàm điều hòa trong nửa mặt phẳng trên bỏ đi hình tròn $S = \{|z - 2i| < 1\}$ và có giá trị bằng 0 trên trục thực và giá trị bằng 1 trên chu vi của S.

Chương 4

Các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình

4.1 Các kết quả quan trọng nhất rút ra từ tích phân Cauchy 279

4.1.1 Định lý giá trị trung bình 279

4.1.2 Định lý Liouville 280

4.1.3 Định lý Weierstrass về chuỗi hàm hội tụ đều . . . 284

4.1.4 Tính chất địa phương của hàm chỉnh hình. Chuỗi Taylor 288

4.1.5 Các quan điểm khác nhau trong việc xây dựng lý thuyết hàm chỉnh hình 305

4.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình 310

4.2.1 Không điểm (0-điểm) của hàm chỉnh hình 310

4.2.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình 313

4.2.3 Nguyên lý thác triển giải tích 317

4.2.4 Nguyên lý môđun cực đại 320

4.3 Điểm bất thường cô lập 326

4.3.1 Chuỗi Laurent 326
4.3.2 Điểm bất thường cô lập đơn trị 337
4.3.3 Dáng điệu của hàm tại điểm vô cùng 348
4.3.4 Phân loại hàm chỉnh hình 350
4.4 Tính bất biến của tập hợp mở 354
4.4.1 Nguyên lý acgumen 354
4.4.2 Định lý Rouché 360
4.4.3 Tính bất biến của tập hợp mở 363
4.5 Bài tập 365

Trong chương trước, ta đã chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết hàm chỉnh hình- định lý Cauchy. Định lý này kéo theo một loạt hệ quả quan trọng. Đặc biệt là nó cho phép ta xác lập mối liên hệ nhất định giữa các giá trị của hàm chỉnh hình tại các điểm trong của miền chỉnh hình với các giá trị biên của hàm đó. Mối liên hệ đó được mô tả trong công thức tích phân cơ bản thứ hai của Cauchy. Đó là công thức trung tâm của lý thuyết hàm chỉnh hình.

4.1 Các kết quả quan trọng nhất rút ra từ tích phân Cauchy

Ở một mức độ nhất định, mọi định lý của mục này đều là hệ quả của công thức tích phân Cauchy.

4.1.1 Định lý giá trị trung bình

Đó là định lý sau đây.

Định lý 4.1.1. *Giả sử $f(z)$ là hàm liên tục trong hình tròn đóng $\overline{S(R)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant R\}$ và chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$. Khi đó ta có* *đẳng thức*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt,$$

tức là giá trị của hàm tại tâm hình tròn bằng trung bình cộng các giá trị của nó trên đường tròn.

Chứng minh. Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta.$$

Thực hiện phép biến đổi theo công thức

$$\zeta = z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

ta thu được

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\frac{Re^{it}idt}{Re^{it}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})dt.$$

□

4.1.2 Định lý Liouville

Định lý 4.1.2. (Liouville[1]) *Nếu hàm chỉnh hình trên toàn mặt phẳng phức $f(z)$ có môđun bị chặn thì nó đồng nhất hằng số, tức là $f(z) \equiv \text{const}\ \forall z \in \mathbb{C}$.*

Chứng minh. Giả sử $|f(z)| \leqslant M < \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Ta sẽ áp dụng công thức tích phân Cauchy cho đạo hàm $f'(z)$ và hình tròn $S(R)$ với tâm tại điểm z và bán kính R. Ta có

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$

[1] I. Liouville (1809-1882) là nhà toán học Pháp

Từ đó

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}2\pi R = \frac{M}{R}\cdot$$

Vế trái của bất đẳng thức này không phụ thuộc R, còn vế phải dần đến 0 khi R tăng vô hạn. Từ đó suy rằng $|f'(z)| = 0$ và $f'(z) = 0 \ \forall \mathbb{C}$. Do đó $f(z) \equiv$ const trong $\mathbb{C}$. □

Như vậy lớp các hàm chỉnh hình trong toàn mặt phẳng và bị chặn chỉ gồm các hàm tầm thường (các hằng số).

Định lý Liouville vừa chứng minh có thể khái quát dưới dạng

Định lý 4.1.3. *Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện $|f(z) \leqslant M|z|^n$, $M < \infty$ và n là số nguyên dương thì đó là đa thức bậc không cao hơn n.*[2]

Chứng minh. Giả sử z_0 là điểm tùy ý của mặt phẳng phức. Từ công thức tích phân Cauchy đối với đạo hàm cấp cao ta có

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(R)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}dz, \quad S(R) = \{z : |z - z_0| < R\}$$

và do đó

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leqslant \frac{M|z|^n}{R^{n+1}}(n+1)!.$$

Vì $|z| \leqslant |z_0| + R$ nên qua giới hạn khi $R \to \infty$ ta thu được $f^{(n+1)}(z_0) = 0$. Do z_0 là điểm tùy ý của $\mathbb{C}$ nên $f^{(n+1)}(z) \equiv 0$. Từ đó suy rằng $f^{(n)}(z) \equiv$ const vì

$$f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z} f^{(n+1)}(z)dz \equiv 0,$$

tức là $f^{(n)}(z) \equiv f^{(n)}(z_0) = \text{const}\ldots$ Bằng cách lập luận như vậy, dễ dàng thu được điều khẳng định của định lý. □

[2]Khi $n = 0$ thì ta thu được định lý 12.1

Định lý Liouville còn có thể phát biểu dưới dạng

Định lý 4.1.2*. *Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trên toàn mặt phẳng mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$ thì nó đồng nhất hằng số.*

Chứng minh. Vì hàm f chỉnh hình tại điểm ∞ nên $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ tồn tại và hữu hạn. Từ đó suy ra $f(z)$ bị chặn trong lân cận nào đó $\mathcal{U}(\infty) = \{z : |z| > R\}$ của điểm ∞. Giả sử $f(z)| \leqslant M_1$, $\forall\, z \in \mathcal{U}(\infty)$. Mặt khác, do hàm f chỉnh hình (và do đó nó liên tục) trong hình tròn đóng $\overline{S(R)} = \{z : |z| \leqslant R\}$ nên nó bị chặn trong hình tròn đó. Giả sử $|f(z)| \leqslant M_2$, $z \in \overline{S(R)}$. Nhưng khi đó hàm f bị chặn trong toàn mặt phẳng: $f(z)| < M = \max(M_1, M_2)\ \ \forall\, z \in \mathbb{C}$. Vì hàm f chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ nên theo định lý 4.1.2 ta có $f \equiv \text{const}$. □

Bây giờ ta áp dụng định lý Liouville để chứng minh định lý Gauss - định lý cơ bản của đại số.

Định lý 4.1.4. (Gauss) *Mọi đa thức đại số bậc $m \geqslant 1$ với hệ số phức đều có m nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó.*

Chứng minh. Giả sử

$$P_m(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_m \neq 0,\ m \geqslant 1.$$

Ta chứng minh bằng phản chứng: giả sử $P_m(z)$ không có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Ta xét hàm

$$f(z) = \frac{1}{P_m(z)}\,.$$

Hàm $f(z)$ có các tính chất sau đây

(i) Hàm $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ vì $P_m(z) \neq 0\ \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

(ii) Hàm $f(z)$ có môđun bị chặn, tức là $|f(z)| \leqslant M\ \forall\, z \in \mathbb{C}$. Thật vậy, vì $\lim\limits_{z\to\infty} P_m(z) = \infty$ nên $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{P_m(z)} = 0$. Từ đó $\exists\, R > 0$ sao cho $\forall\, z : |z| > R$ ta có

$$|f(z)| < 1.$$

Trong hình tròn đóng $|z| \leqslant R$ hàm $f(z)$ có môđun bị chặn, tức là $|f(z)| \leqslant m$ $\forall\, z \in \{|z| \leqslant R\}$. Từ đó suy rằng $|f(z)| < m + 1 = M$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Như vậy hàm $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ và $|f(z) \leqslant M$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$, tức là thỏa mãn các điều kiện của định lý Liouville. Do đó $f(z) \equiv \text{const}$ trên $\mathbb{C}$. Từ đó suy rằng $P_m(z_{\equiv}$ const. Nhưng điều đó không thể xảy ra vì $a_m \neq 0$ và $m \geqslant 1$.

Như vậy tồn tại giá trị $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ sao cho

$$P(\alpha_1) = 0.$$

Do đó $P_m(z) = (z - \alpha_1)P_{m-1}(z)$, $P_{m-1}(\alpha_1) \neq 0$. Nhưng $P_{m-1}(z)$ cũng là đa thức đại số bậc $m - 1$ nên $\exists\, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ sao cho $P_{m-1}(z) = (z - \alpha_2)P_{m-2}(z)$, $P_{m-2}(\alpha_2) \neq 0$. Như vậy

$$P_m(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)P_{m-2}(z), \ldots$$

Tiếp tục lập luận như vậy ta thu được đẳng thức

$$P_m(z) = a_m(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_m).$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ là nghiệm và ngoài chúng ra đa thức $P_m(z)$ không còn nghiệm nào khác. Thật vậy nếu β là nghiệm $\beta \neq \alpha_i$ $\forall\, i = \overline{1, m}$ của đa thức $P_m(z)$ thì

$$P_m(\beta) = a_m(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)\cdots(\beta - \alpha_m) = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng một trong các thừa số phải bằng 0, tức là

$$\begin{aligned} &\beta - \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \iff\quad &\beta = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

$\square$

Định lý vừa chứng minh còn có tên gọi là *định lý về trường đóng đại số.*

4.1.3 Định lý Weierstrass về chuỗi hàm hội tụ đều

Trong **1.4** ta đã trình bày khái niệm chuỗi hàm *hội tụ đều trong miền* D và *hội tụ đều trên từng compắc* của miền D cùng một số tính chất hàm của chuỗi hội tụ đều. Bây giờ ta chứng minh định lý quan trọng của Weierstrass về sự bảo toàn tính chỉnh hình của tổng của chuỗi trong phép qua giới hạn đều và phép đạo hàm từng số hạng của chuỗi hàm chỉnh hình hội tụ đều.

Định lý 4.1.5. (Weierstrass) *Giả sử:*

1) $u_n(z)$ $n \in \mathbb{N}$ *là những hàm chỉnh hình trong miền* D*;*

2) *chuỗi hàm*

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \ldots \tag{4.1}$$

hội tụ đều trên từng compắc của miền D *đến hàm (hữu hạn)* $f(z)$.

Khi đó

1) *Tổng* $f(z)$ *của chuỗi là hàm chỉnh hình trong miền* D.

2) *Chuỗi có thể đạo hàm từng số hạng đến cấp tùy ý*

$$u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \cdots + u_n^{(m)}(z) + \cdots = f^{(m)}(z); \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

3) *Mọi chuỗi* (4.2) *đều là chuỗi hội tụ đều trên từng compắc của miền* D.

Chứng minh. 1) Lấy hình tròn $S(R)$ bất kỳ bán kính R với biên $\gamma(R)$ sao cho $\overline{S(R)} \subset D$. Trên đường tròn $\gamma(R)$ ($\gamma(R)$ là tập hợp đóng nằm trong D) chuỗi (4.1) hội tụ đều đến hàm $f(z)$. Do đó hàm

$$f(\zeta) = u_1(\zeta) + u_2(\zeta) + \cdots + u_n(\zeta) + \ldots; \quad \zeta \in \gamma(R) \tag{4.3}$$

liên tục trên $\gamma(R)$. Nhân (4.3) với hàm

$$v(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\zeta - z}, \quad \zeta \in \gamma(R),\ z \in S(R).$$

Hàm này bị chặn trên $\gamma(R)$. Do đó chuỗi thu được sau khi nhân (4.3) với $v(\zeta)$ vẫn hội tụ đều trên $\gamma(R)$ và có thể tích phân từng số hạng theo $\gamma(R)$. Ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(R)}\frac{u_1(\zeta}{\zeta - z}d\zeta + \dots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(R)}\frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \dots$$

Tích phân ở vế trái là tích phân dạng Cauchy. Do đó vế trái là hàm chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$. Ta ký hiệu hàm đó là $f_R(z)$. Áp dụng công thức tích phân Cauchy cho các hàm $u_n(\zeta)$ từ biểu thức trên ta thu được

$$f_R(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots \tag{4.4}$$

Như vậy chuỗi được xét hội tụ đều đến hàm $f_R(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$. Nhưng trong $S(R)$ hàm $f_R(z)$ trùng với $f(z)$. Nghĩa là $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong $S(R)$. Vì mỗi điểm z của miền D đều thuộc một hình tròn $S(R)$, $\overline{S(R)} \subset D$ nào đó nên hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D.

Các lập luận trên đây chỉ đúng nếu miền D không chứa điểm ∞. Giả sử miền $D \ni \infty$. Ta sẽ xét "hình tròn" $S_R(\infty) = \{z : |z| > R\}$ với bán kính R đủ lớn sao cho toàn bộ biên ∂D đều nằm trong đường tròn $\gamma_R(\infty) = \{z : |z| = R\}$. Lập luận như trên và thay cho chuỗi (4.4) theo định lý 3.2.13 ta thu được đẳng thức

$$\begin{aligned} f_R(z) = [u_1(z) - u_1(\infty)] + [u_2(z) - u_2(\infty)] + \dots \\ + [u_n(z) - u_n(\infty)] + \dots \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} f_R(z) = [u_1(z) + \dots + u_n(z) + \dots] \\ - [u_1(\infty) + u_2(\infty) + \dots + u_n(\infty) + \dots]. \end{aligned}$$

Chuỗi trong dấu ngoặc vuông thứ hai ở vế phải hội tụ đến $f(\infty)$ và do đó

$$f_R(z) + f(\infty) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

Ở đây $f_R(z) + f(\infty) = f(z)\ \forall\, z \in S_R(\infty)$ và hàm $f_R(z) + f(\infty)$ chỉnh hình trong $S_R(\infty)$. Do vậy hàm f chỉnh hình trong lân cận điểm ∞.

2) Nếu nhân chuỗi (4.3) với hàm

$$v_m(\zeta) = \frac{m!}{2\pi i}\, \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}}, \quad z \in S(R)$$

bị chặn trên $\gamma(R)$ và tích phân từng số hạng theo $\gamma(R)$ thì thay cho (4.4) ta thu được chuỗi

$$f_R^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \cdots + u_n^{(m)}(z) + \dots$$

Vì $f_R(z) = f(z)\ \ \forall\, z \in D$ nên từ đó thu được (4.2).

3) Để chứng minh phần thứ ba của định lý ta phủ tập hợp đóng tùy ý $E \subset D$ bởi hệ các hình tròn S' sao cho $\overline{S}' \subset D$. Nếu tập hợp $E \ni z = \infty$ thì ta có thể lấy hình tròn là tập hợp $S'(\infty) = \{z : |z| > R > 0\}$, $\overline{S'(\infty)} \subset D$. Từ hệ các hình tròn này ta có thể chọn một phủ con gồm một số hữu hạn các hình tròn. Hợp mọi hình tròn đóng này được ký hiệu là E^*. Giả sử δ là khoảng cách từ E^* đến biên miền D: $\delta = \mathrm{dist}\{E^*, \partial D\}$.

Đối với mỗi hình tròn S' của phủ hữn hạn ta dựng hình tròn S đồng tâm với bán kính lớn hơn bán kính của S' một đại lượng bằng $\dfrac{\delta}{2}$ (đối với $S'(\infty)$ thì cần lấy bán kính bé hơn $\dfrac{\delta}{2}$). Chu tuyến $\mathcal{L}$ của các hình tròn này lập thành tập hợp đóng $\Gamma \subset D$. Do đó chuỗi được xét $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(z)$ hội tụ đều trên Γ, nghĩa là

$$\begin{gathered}\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N,\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, \zeta \in \Gamma \Rightarrow \\ \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\zeta)\Big| < \varepsilon.\end{gathered}$$

Giả sử z là điểm tùy ý của E và giả sử nó thuộc hình tròn S' của phủ hữu hạn. Khi $\zeta \in \mathcal{L}$ và $z \in S'$ thì $|\zeta - z| \geqslant \dfrac{\delta}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k^{(m)}(z)\Big| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{m!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{u_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}d\zeta\Big| \\
&\leqslant \frac{m!}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\Big|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(\zeta)\Big|}{|\zeta - z|^{m+1}}ds \\
&\leqslant \frac{m!}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^{m+1}}2\pi R_*
\end{aligned}$$

trong đó R_* là bán kính của hình tròn S tương ứng. Như vậy đối với mỗi điểm $z \in E$ ta có

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k^{(m)}(z)\Big| \leqslant \frac{\widetilde{R}m!\varepsilon}{\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^{m+1}}$$

trong đó $\widetilde{R}$ là bán kính lớn nhất trong các bán kính của các hình tròn S của phủ hữu hạn. Từ đó suy ra sự hội tụ đều của chuỗi đạo hàm trên từng compắc của D. $\square$

Nhận xét 4.1.1. Trong giải tích thực không có định lý tương tự như định lý Weierstrass. Thật vậy, trong giải tích thực ta biết rằng tổng $S(x)$ của chuỗi hàm thực (biến thực) khả vi $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ hội tụ đều trên khoảng nào đó có thể là hàm không khả vi. Hơn thế nữa nếu $\exists\, S'(x)$ thì hoàn toàn không nhất thiết phải có đẳng thức $S'(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'(x)$.

Nhận xét 4.1.2. Nếu có dãy hàm $\big(f_n(z)\big)_{n\geqslant 1}$ cho trong miền D thì chuỗi

$$f_1(z) + [f_2(z) - h(z)] + \cdots + [f_n(z) - f_{n-1}(z)] + \ldots$$

có tổng riêng thứ n là $S_n(x) = f_n(x)$. Từ đó mọi điều khẳng định về chuỗi đều có thể phát biểu đối với dãy và ngược lại. Từ đó và định lý 4.1.3 ta rút ra

Định lý 4.1.6. (Weierstrass; về dãy hàm chỉnh hình hội tụ đều)

Nếu dãy các hàm $\big(f_n(z)\big)_{n\geqslant 1}$ *chỉnh hình trong miền* D *hội tụ đều trên từng compắc của miền* D *đến hàm hữu hạn* $f(z)$ *thì* $f(z)$ *là hàm chỉnh hình trong* D *và dãy các đạo hàm* $\big(f_n^{(m)}(z)\big)_{n\geqslant 1}$; $m = 1, 2, \dots$ *hội tụ đều trên từng compắc của* D *đến hàm* $f^{(m)}(z)$.

Từ định lý Weierstrass 4.1.3 và định lý Abel rút ra

Hệ quả 4.1.1. *Tổng của chuỗi lũy thừa*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

là hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ của nó và trong hình tròn hội tụ của chuỗi ta có thể lấy tích phân và đạo hàm từng số hạng một số lần tùy ý, đồng thời phép đạo hàm và tích phân từng số hạng không làm thay đổi bán kính hội tụ của chuỗi.

4.1.4 Tính chất địa phương của hàm chỉnh hình. Chuỗi Taylor

Trong **2.1** ta đã chứng minh rằng tổng của chuỗi lũy thừa là hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ của nó. Bây giờ nhờ công thức tích phân Cauchy ta có thể chứng minh một tính chất quan trọng nữa của hàm chỉnh hình - đó là tính chất địa phương: mỗi hàm chỉnh hình trong hình tròn đều biểu diễn được dưới dạng tổng của chuỗi lũy thừa. Cụ thể ta chứng minh định lý sau

Định lý 4.1.7. (Cauchy - Taylor[3])

Nếu hàm $f(z)$ *chỉnh hình trong miền* D *thì tại lân cận của mỗi điểm* $z_0 \in D$ *hàm* $f(z)$ *biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \tag{4.5}$$

với bán kính hội tụ R *không bé hơn khoảng cách* d *từ điểm* z_0 *đến biên* ∂D *của miền* D ($d = dist(z_0, \partial D)$).

[3]B. Taylor (1685-1731) là nhà toán học Anh

Chứng minh. Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$ và z_0 là điểm tùy ý của miền D. Ta ký hiệu $S(z_0, d) = \{z \in D : |z - z_0| < d\}$ và giả sử z là điểm tùy ý của $S(z_0, d) : z \in S(z_0, d)$. Xét hình tròn $S(z_0, \delta)$ đồng tâm với hình tròn $S(z_0, d)$ với bán kính δ thỏa mãn điều kiện $0 < \delta < d$ sao cho điểm z nằm trong D. Áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)\Big(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)}, \tag{4.6}$$

trong đó $\gamma(\delta) = \zeta : |\zeta - z_0| = \delta\}$.

Đối với điểm $z \in S(z_0; \delta)$ cố định ta có bất đẳng thức

$$\Big|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big| = q < 1, \quad \zeta \in \gamma(\delta).$$

Do đó biểu thức

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

có thể xem như tổng của cấp số nhân

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n \geqslant 0} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n. \tag{4.7}$$

Chuỗi (4.7) hội tụ đều trên $\gamma(\rho)$ nên ta có thể thực hiện phép tích phân từng số hạng và từ (4.6) và (4.7) ta thu được

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geqslant 0} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\delta)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\Big)(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned} \tag{4.8}$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\delta)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.9}$$

Để ý đến công thức tích phân Cauchy đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình ta có

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

Vì đối với mỗi điểm z cố định thuộc hình tròn $\{|z - z_0| < \delta\}$ chuỗi ở vế phải của (4.7) hội tụ đều đối với $\zeta \in \gamma(\delta)$ còn các hệ số a_n không phụ thuộc vào δ trong khoảng $0 < \delta < d$ nên bán kính hội tụ R của chuỗi $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ không bé hơn d. Thật vậy nếu $R < d$ thì mâu thuẫn với định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi đó vì có thể lấy δ là số lớn hơn R. Định lý được chứng minh. □

Hình IV.1

Chuỗi (4.8) với hệ số biểu diễn qua hàm chỉnh hình $f(z)$ theo các công thức (4.9) hay (4.10) được gọi là *chuỗi Taylor với tâm tại điểm* z_0 hay *khai triển Taylor tại lân cận điểm* z_0 của hàm $f(z)$.

Hệ quả 4.1.2. *Mọi chuỗi lũy thừa đều là chuỗi Taylor của tổng của nó.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử trong hình tròn nào đó

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n. \tag{4.11}$$

Thay $z = z_0$ ta có $f(z_0) = a_0$, đạo hàm từng số hạng chuỗi (4.11) rồi thay $z = z_0$ ta tìm được $f'(a) = a_1$. Tính đạo hàm từng số hạng liên tiếp chuỗi (4.11) rồi thay $z = z_0$ ta có $f''(z_0) = 2!a_2$, $f^{(3)}(z_0) = 3!a_3, \dots, f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ và do đó $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Do đó chuỗi (4.11) là chuỗi Taylor của hàm $f(z)$. □

Hệ quả 4.1.3. *Giả sử* $M(r) = \max\limits_{\zeta \in \gamma(r)} |f(\zeta)|$. *Khi đó các hệ số* a_n *của chuỗi Taylor thỏa mãn các bất đẳng thức*

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4.12}$$

trong đó r *là số bất kỳ bé hơn bán kính hội tụ của chuỗi. Các bất đẳng thức (4.12) được gọi là các bất đẳng thức Cauchy đối với hệ số của chuỗi Taylor.*

Chứng minh. Từ các công thức (4.9) và (4.10) ta có

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Từ đó áp dụng công thức ước lượng tích phân trong miền phức ta thu được

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

□

Để rút ra hệ quả tiếp theo ta nêu ra

Định nghĩa 4.1.1. 1) Điểm $z = a$ được gọi là điểm *chính quy* của hàm $f(z)$ nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong một lân cận nào đó của điểm a.

2) Điểm $z = a$ được gọi là *điểm bất thường* của hàm $f(z)$ nếu nó không là điểm chính quy đối với hàm $f(z)$ nhưng trong lân cận bất kỳ của nó đều có điểm chính quy của hàm.

Hệ quả 4.1.4. *Bán kính hội tụ của chuỗi Taylor với tâm tại điểm $z = a$ bằng khoảng cách từ điểm a đến điểm bất thường gần nhất của hàm $f(z)$.*

Chứng minh. Vì các điểm bất thường đều là điểm biên đối với miền chỉnh hình của hàm nên theo định lý Cauchy - Taylor bán kính hội tụ của chuỗi Taylor thu được không bé hơn khoảng cách d từ điểm a đến điểm bất thường gần nhất của hàm, tức là $R \geqslant d$. Nhưng bán kính hội tụ không thể lớn hơn khoảng cách đó vì nếu $R > d$ thì có ít nhất một điểm bất thường của hàm f rơi vào hình tròn hội tụ, mà điều đó lại không thể xảy ra do tổng của chuỗi lũy thừa là hàm chỉnh hình trong *toàn bộ* hình tròn hội tụ. Do đó $R = d$. □

Công thức tổng quát (4.9) hay (4.10) đối với hệ số Taylor thường không tiện lợi trong tính toán. Trong một số trường hợp ta có thể áp dụng các phương pháp đơn giản hơn để khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa.

Nếu $f(z)$ là hàm hữu tỷ thực sự thì ta có thể biểu diễn nó dưới dạng tổng hữu hạn các phân thức tối giản dạng $\dfrac{1}{z-a}$ hay $\dfrac{1}{(z-a)^k}$ $(k > 1)$. Khi đó phân thức $\frac{1}{z-a}$ khai triển thành chuỗi cấp số nhân, còn phân thức $\frac{1}{(z-a)^k}$ $(k>1)$ khai triển thành chuỗi thu được bằng phép đạo hàm liên tiếp $k-1$ lần chuỗi cấp số nhân.

Nếu $f(z)$ là biểu thức vô tỷ hay siêu việt thì có thể áp dụng các khai triển Taylor đối với hàm e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^\alpha, \dots$ (gọi là các *khai triển bảng*) thu được bằng cách tính trực tiếp các đạo hàm của các hàm ấy.

I. $e^z = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}, \ \ z\in\mathbb{C}$

II. $\cos z = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \ \ z\in\mathbb{C}$

III. $\sin z = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \ z\in\mathbb{C}$

IV. $\ln(1+z) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \ \ |z|<1$

V.

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha &= 1 + \sum_{n\geqslant 1}\binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \dots\\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \dots, \quad \alpha\in\mathbb{R},\ |z|<1,\end{aligned}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$
$$\binom{\alpha}{n} = C_n^\alpha \text{ nếu } \alpha\in\mathbb{N}$$

VI$_1$. $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n, \ \ |z|<1$

VI$_2$. $\dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n z^n, \ \ |z|<1.$

. . . .

Trước khi áp dụng các khai triển bảng ta cần biến đổi sơ bộ hàm đã cho. Ta minh họa điều đó bằng một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 1. Khai triển hàm

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$$

thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $z = 0$.

Giải. Hàm đã cho có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{5}\Big[\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+4}\Big] \\ &= \frac{1}{5}\Big[\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{4\Big(1+\dfrac{z^2}{4}\Big)}\Big]. \end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng khai triển VI_1

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n\geqslant 0} t^n, \quad |t| < 1$$

ta có

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{5}\Big[1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\Big] z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Ví dụ 2. Tìm khai triển Taylor của hàm

$$f(z) = e^z \cdot \cos z.$$

Giải. Tại lân cận điểm $z = 0$ ta có thể nhân hai chuỗi với nhau. Tuy nhiên, trong trường hợp này, tiện lợi hơn cả là sử dụng đồng nhất thức

$$e^z \cdot \cos z = e^z\Big[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\Big] = \frac{1}{2}[e^{(1+i)z} + e^{1-i)z}].$$

Vì $1 + i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$; $1 - i = \sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$ nên áp dụng khai triển (II) ta có:

$$\begin{aligned} e^z \cdot \cos z &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{\frac{n}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi n}{4}} + 2^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi n}{4}}}{2} z^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\Big(2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}\Big)\cdot z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Khai triển hàm $f(z) = \dfrac{1}{1+z} + e^{-z}$ thành chuỗi Taylor với tâm $a = 0$ và chỉ ra bán kính hội tụ của chuỗi.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots \\ e^{-z} &= 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Từ đó bằng cách cộng các chuỗi ta thu được

$$\begin{aligned} f(z) &= [1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots] \\ &\quad + \Big[1 - z + \frac{z^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \dots\Big] \\ &= 2 - 2z + \Big(1 + \frac{1}{2!}\Big) z^2 - \Big(1 + \frac{1}{3!}\Big) z^3 + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1}\Big(1 + \frac{1}{(n-1)!}\Big) z^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1}\Big(1 + \frac{1}{(n-1)!}\Big) z^{n-1}. \end{aligned}$$

Điểm bất thường gần gốc tọa độ nhất là $z = -1$. Do đó bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Ví dụ 4. Khai triển hàm

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)}$$

thành chuỗi Taylor với tâm tại điểm $a = 0$ và chỉ ra bán kính hội tụ của chuỗi thu được.

Giải. Vì $f(z)$ là phân thức hữu tỷ thực sự nên ta có thể biểu diễn nó dưới dạng tổng các phân thức tối giản:

$$f(z) = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2}\,\cdot$$

Tiếp theo ta có

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2z}{5}} = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}z^n.$$

Vì điểm $z = -\dfrac{5}{2}$ là điểm bất thường gần gốc tọa độ nhất nên bán kính hội tụ R_1 của chuỗi thu được là $R_1 = \dfrac{5}{2}$.

Để khai triển hàm $\dfrac{2}{(z-3)^2}$ thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $a = 0$ ta sẽ áp dụng hệ quả của định lý Weierstrass. Ta có

$$\Big(\frac{2}{z-3}\Big)' = -\frac{2}{(z-3)^2}$$

$$\frac{2}{z-3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -2\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3^{n+1}}z^n, \quad |z| < 3.$$

và do đó

$$\frac{2}{(z-3)^2} = 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}} = 2\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+2}}, \quad |z| < 3.$$

Cộng các chuỗi thu được ta có

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0}\Big[(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\Big]z^n, \quad |z| < \frac{5}{2}\cdot$$

Ví dụ 5. Khai triển nhánh logarit nhận giá trị $2\pi i$ tại điểm $z_0 = 1$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm $a = 2$.

Giải. Trước hết ta cần xác định nhánh nào (trong vô số nhánh của hàm logarit) là nhánh thỏa mãn điều kiện của bài toán. Ta có

$$\begin{aligned}\ln z = \ln[2 + (z-2)] &= \ln\Big\{2\Big[1 + \frac{z-2}{2}\Big]\Big\}\\ &= \ln 2 + \ln\Big(1 + \frac{z-2}{2}\Big).\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng

$$\ln z = \ln 2 + \ln\Big(1 + \frac{z-2}{2}\Big) + 2\pi i$$

là nhánh cần tìm. Nhánh này chỉnh hình trong miền $\overline{\mathbb{C}}\backslash\mathbb{R}^-$. Vì dist $(2;\partial D) = 2$ nên trong hình tròn $\{z : |z-2| < 2\}$ theo IV nhánh được chọn khai triển được thành chuỗi Taylor dạng

$$\ln z = \ln 2 + 2\pi i + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(z-2)^n,$$

với bán kính hội tụ $R = 2$.

Ví dụ 6. Khai triển hàm $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm $a = -8$.

Giải. Như trong ví dụ 5 ta có

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-8 + (z+8)} = \sqrt[3]{-8}\Big[1 - \frac{z+8}{8}\Big]^{1/3}$$

và do đó nhánh thỏa mãn điều kiện bài toán là

$$f(z) = -2\Big(1 - \frac{z+8}{8}\Big)^{1/3}.$$

Tiếp theo, áp dụng công thức V ta có

$$f(z) = -2\Big(1 - \sum_{n\geqslant 1}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ n\end{pmatrix}\frac{1}{8^n}(z+8)^n\Big\}$$

Vì $z = 0$ là điểm bất thường của hàm gần điểm $a = -8$ nhất nên $R = \text{dist}(0; -8) = 8$.

Định lý 4.1.8. *Giả sử chuỗi các hàm chỉnh hình* $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(z)$ *hội tụ đều trong hình tròn* $S(a;R) = \{z : |z-a| < R\}$ *đến tổng* $f(z)$*:*

$$f(z) = \sum_{k\geqslant 1} u_k(z) \tag{4.13}$$

Khi đó các hệ số Taylor $a_n(f)$ *của hàm* $f(z)$ *xác định bởi* (4.13) *là bằng các tổng của các hệ số Taylor cùng số hiệu* $a_n(u_k)$ *của các hàm* $u_k(z)$*, tức là*

$$a_n(f) = \sum_{k\geqslant 1} a_n(u_k). \tag{4.14}$$

Chứng minh. Tính chỉnh hình của hàm tổng $f(z)$ được suy ra từ định lý Weierstrass (**4.1.3**). Cũng theo định lý Weierstrass ta có

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k\geqslant 1} u_k^{(n)}(z)$$

Thay $z = a$ ta thu được

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{u_k^{(n)}(a)}{n!}$$

hay là

$$a_n(f) = \sum_{k\geqslant 1} a_n(u_k).$$

□

Ta xét ví dụ sau đây.

Ta xét tổng của chuỗi hàm

$$F(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{1-z^n}\cdot$$

Trước hết ta nhận xét rằng các số hạng của chuỗi đều là những hàm chỉnh hình trong hình tròn đơn đơn vị.

Ta cần chứng minh rằng chuỗi đã cho hội tụ đều trên từng compắc của hình tròn đơn vị U. Thật vậy, nếu K là tập hợp đóng trong U và $\delta > 0$ là khoảng cách từ K đến đường tròn đơn vị thì

$$|z| \leqslant 1-\delta = \rho < 1 \quad \forall z \in K.$$

Do đó

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho}\cdot$$

Nhưng vì chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\rho^n}{1-\rho}$ hội tụ, nên chuỗi đã cho hội tụ đều trên K.

Để xác định hệ số Taylor của z^k trong khai triển Taylor của hàm $f(z)$ ta cần cộng các hệ số Taylor của z^k trong mọi khai triển

$$\sigma_n = \frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + z^{3n} + \dots$$

Ta ký hiệu hệ số Taylor của σ_n là $A_k(\sigma_n)$. Ta có

$$A_k(\sigma_n) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } n, \\ 0, & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } n. \end{cases}$$

Do đó hệ số cần tìm của z^k bằng tổng các đơn vị với số lượng bằng số các ước tự nhiên của số k. Nếu ta ký hiệu $\varphi(k)$ là số đó, thì $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 2$; $\varphi(4) = 3, \dots$ và ta có

$$F(z) = \sum_{k\geqslant 1} \varphi(k) z^k$$

Đó là khai triển muốn tìm. Hàm $F(z)$ chỉnh hình trong hình tròn đơn vị (theo định lý Weierstrass) nên chuỗi đang xét hội tụ trong hình tròn đơn vị.

Định lý 4.1.9. *Giả sử $f(z)$ là hàm hợp của z*

$$f(z) = F[\varphi(z)] = F(w), \quad w = \varphi(z)$$

và các điều kiện sau đây được thỏa mãn

1^+. *hàm $w = \varphi(z)$ chỉnh hình trong lân cận điểm $z = a$;*

2^+. *hàm $F(w)$ chỉnh hình trong lân cận điểm $w = b = \varphi(a)$.*

Khi đó: 1) *hàm $f = F \circ \varphi$ chỉnh hình tại lân cận điểm $z = a$;*

2) *Khai triển Taylor của hàm $f(z)$ với tâm tại điểm $z = a$ thu được bằng phép thế chuỗi theo lũy thừa của $z - a$ đối với hàm $\varphi(z)$ vào chuỗi theo lũy*

thừa của $w - b$ đối với hàm $F(w)$; ở đây các hệ số Taylor của hàm $f(z)$ được tìm bằng cách thực hiện các phép nhân chuỗi và cộng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc.

Chứng minh. Giả sử

$$\varphi(z) = b + \sum_{m \geqslant 1} a_m (z-a)^m, \quad |z - r| < r \tag{4.15}$$

$$F(w) = \sum_{n \geqslant 0} A_n (w-b)^n, \quad |w - b| < R. \tag{4.16}$$

trong đó các hệ số a_m, A_n đã biết.

Vì $\varphi(z) \to b$ khi $z \to a$ nên $\exists\, \rho = \rho(R)$, $0 < \rho \leqslant r$ sao cho khi $|z - a| < \rho$ thì

$$|\varphi(z) - b| < R.$$

Do đó khi $|z| < \rho$, điểm $w = \varphi(z)$ thuộc hình tròn hội tụ của chuỗi (4.16). Vì $F(w)$ chỉnh hình trong hình tròn $|w - b| < R$, còn $\varphi(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $|z - a| < \rho$ và giá trị của nó thuộc hình tròn $|w - b| < R$ nên hàm hợp

$$f(z) = F[\varphi(z)]$$

chỉnh hình trong hình tròn $|z - a| < \rho$. Từ đó theo định lý Cauchy - Taylor hàm $f(z)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa trong hình tròn $|z - a| < \rho$. Ta cần tìm hệ số của chuỗi đó.

Xét khai triển

$$\begin{aligned} f(z) = F[\varphi(z)] &= \sum_{n \geqslant 0} A_n [\varphi(z) - b]^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} A_n \Big\{ \sum_{m \geqslant 1} a_m (z-a)^m \Big\}^n \end{aligned} \tag{4.17}$$

hội tụ khi $|z - a| < \rho$.

Để có thể dựa vào tính hội tụ đều của nó ta thay ρ bởi số không lớn hơn nó là $0 < \rho' \leqslant \rho$ sao cho trong hình tròn $|z-a| < \rho'$ thì

$$|\varphi(z) - b| < \frac{R}{2}\cdot$$

Vì chuỗi (4.16) hội tụ đều khi $|w-b| < \dfrac{R}{2}$ nên chuỗi (4.17) hội tụ đều khi $|z-a| < \rho'$. Do đó hệ số của z^k trong khai triển Taylor của $f(z)$ có thể tìm được bằng cách lấy tổng các hệ số cùng số hiệu trong khai triển của mỗi hàm $u_n(z) = A_n[\varphi(z) - b]^n$. Để tìm khai triển Taylor đối với $u_n(z)$ ta cần thực hiện phép nhân liên tiếp các chuỗi $\sum\limits_{m\geqslant 1} a_m(z-a)^m$ với chính nó. Chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(z)$ hội tụ đều và gồm từ các hàm chỉnh hình nên có thể áp dụng định lý 4.1.6. Từ đó và từ tính duy nhất của khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa suy ra cách xác định các hệ số Taylor của hàm f. Định lý được chứng minh. □

Ví dụ. Tìm bốn số hạng đầu tiên của khai triển hàm $f(z) = e^{\sin z}$ thành chuỗi Taylor với tâm $a = 0$.

Giải. Thay $t = \sin z$ vào đẳng thức

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots = \frac{t^n}{n!} + \dots$$

ta thu được

$$e^{\sin z} = 1 + \frac{\sin z}{1!} + \frac{\sin^2 z}{2!} + \dots + \frac{\sin^n z}{n!} + \dots$$

Từ đó ta có

$$e^{\sin z} = 1 + \Big(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\Big) + \frac{1}{2!}\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\Big)^2 + \frac{1}{3!}\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\Big)^2 + \dots =$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \Big(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\Big) + \frac{1}{2!}z^2\Big(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\Big)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}z^2\Big(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\Big)^3 + \dots \\
&= 1 + z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots \\
&= 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + 0 + \dots
\end{aligned}
$$

Định lý 4.1.10. *Giả sử cho hai chuỗi lũy thừa*

$$\varphi(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n, \quad \psi(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n(z-a)^n$$

với bán kính hội tụ tương ứng là R_1 *và* R_2*. Giả sử* $\psi(z)$ *không triệt tiêu trong hình tròn* $|z-a| < \rho$, $\rho > 0$*; ký hiệu* $r = \min(R_1, R_2, \rho)$*. Khi đó hàm*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

chỉnh hình trong hình tròn $|z-a| < r$ *và nếu*

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

thì

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{b_0}, \\
c_n &= \frac{1}{b_0^{n+1}}\begin{vmatrix}
b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\
b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\
b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & a_{n-1} \\
b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & a_n
\end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Chứng minh. Tính chỉnh hình của hàm $f(z)$ trong hình tròn đã nêu được rút ra từ quy tắc đạo hàm đối với phân thức. Ta nhận xét rằng từ điều kiện của định lý suy rằng $b_0 \neq 0$ vì trong trường hợp ngược lại $\psi(a) = 0$ và do đó $\rho = 0$ và ta đi đến mâu thuẫn. Tiếp theo, từ đồng nhất thức $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = f(z)$ suy rằng

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n \cdot \sum_{n\geqslant 0} b_n(z-a)^n.$$

Vì các chuỗi ở vế phải hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $|z-a| < r$ nên trong hình tròn đó ta có thể thực hiện phép nhân các chuỗi đó. Ta thu được

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n &= \sum_{n\geqslant 0} \Big(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}c_k\Big)(z-a)^n \\
&= c_0b_0 + (c_0b_1 + c_1b_0)(z-a) \\
&\quad + (c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0)(z-a)^2 + \dots \\
&\quad + (c_0b_n + c_1b_{n-1} + \dots + c_nb_0)(z-a)^n + \dots
\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa ta có thể xác định các hệ số $c_0, c_1, \dots$ bởi hệ sau

$$\begin{array}{ll}
b_0c_0 & = a_0, \\
b_1c_0 + b_0c_1 & = a_1, \\
b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2 & = a_2, \\
\dots \quad \dots \quad \dots & \quad \dots \\
b_nc_0 + b_{n-1}c_1 + b_{n-2}c_2 + \dots + b_0c_n & = a_n, \\
\dots \quad \dots \quad \dots & \quad \dots
\end{array}$$

Đó là hệ vô hạn các phương trình tuyến tính đối với các hệ số chưa biết $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ Từ hệ đó ta có thể xác định hệ số $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ với số hiệu cho trước bất kỳ. Thật vậy, hệ $n+1$ phương trình đầu với các ẩn $c_0, c_1, \dots, c_n$ có định thức bằng

$$\begin{vmatrix}
b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0
\end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0 \tag{4.19}$$

Từ (4.19) và quy tắc Cramer ta thu được (4.18). □

Ví dụ. Ta thực hiện phép chia chuỗi lũy thừa cho chuỗi lũy thừa. Xét hàm

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}\cdot$$

Vì z và $e^z - 1$ đều chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C}$ nên hàm $f(z)$ chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0; \pm 2\pi i; \pm 4\pi i; \dots\}$. Vì

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{\left(1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \dots\right) - 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^2}{3!} + \dots} \tag{4.20}$$

nên sau khi cho $f(0) = 1$ ta có thể xem $f(z)$ chỉnh hình tại $z = 0$. Điểm bất thường gần $z = 0$ nhất là $z = 2\pi i$ (và $z = -2\pi i$). Do đó trong hình tròn $|z| < 2\pi$ hàm $f(z)$ khai triển được thành chuỗi $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$. Dựa vào (4.20) ta có thể viết

$$1 = \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots\right)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right)$$

Chuỗi thu được sau phép nhân chuỗi với chuỗi ở vế phải đồng nhất bằng 1 (tức là bằng $1 + 0z + 0z^2 + \dots$)

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1,\\
&a_1 + \frac{1}{2!}a_0 = 0,\\
&a_2 + \frac{1}{2!}a_1 + \frac{1}{3!}a_0 = 0,\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&a_n + \frac{1}{2!}a_{n-1} + \dots + \frac{1}{n!}a_1 + \frac{1}{(n+1)!}a_0 = 0, \quad n \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Từ (4.21) suy ra:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{720}, \dots$$

và do đó khai triển có dạng

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \dots \tag{4.22}$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng trong chuỗi thu được mọi hệ số với số hiệu lẻ (trừ ra a_1) đều bằng 0. Thật vậy từ (4.22) ta có

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \dots$$

Vế trái là hàm chẵn vì

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2}\mathrm{cth}\frac{z}{2}\cdot$$

Do đó khai triển Taylor của nó ở vế phải chỉ chứa các lũy thừa chẵn.

4.1.5 Các quan điểm khác nhau trong việc xây dựng lý thuyết hàm chỉnh hình

Khi xây dựng lý thuết hàm chỉnh hình ta có thể xuất phát từ các định nghĩa tương đương nhau về hàm chỉnh hình trong miền D. Điều đó dựa trên cơ sở là lớp các hàm chỉnh hình trong miền D có thể *được đặc trưng* bởi những *tính chất đặc biệt khác nhau nhưng tương đương nhau*. Do vậy hệ thống trình bày lý thuyết hàm biến phức phụ thuộc nhiều vào việc chọn tính chất nào trong số đó làm định nghĩa xuất phát.

Sau đây là những tính chất quan trọng nhất đặc trưng cho tính chỉnh hình của hàm $f(z)$ trong miền D. Ở đây ta giả thiết D là miền đơn liên và ta ký hiệu $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$.

Tính chất $\mathcal{C}$. Hàm $f(z)$ có đạo hàm $f'(z)$ tại mọi điểm của miền D.

Tính chất $\mathcal{R}$. Trong miền D phần thực $u(x, y)$ và phần ảo $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục và thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\cdot$$

Tính chất J. Giả thiết hàm $f(z)$ liên tục trong miền D. Tính chất J được phát biểu bởi một trong hai dạng tương đương sau.

(J_1) Với hai điểm a và b thuộc D bất kỳ, tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}(a,b)} f(z)dz$ lấy theo đường cong đo được $\mathcal{L}(a,b)$ đi từ điểm a đến điểm b là không phụ thuộc vào đường lấy tích phân $\mathcal{L}(a,b)$ mà chỉ phụ thuộc vào hàm $f(z)$, điểm đầu a và điểm cuối b của $\mathcal{L}$.

(J_2) Với đường cong đóng đo được bất kỳ $\mathcal{L}$ nằm trong miền D tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz$ lấy theo đường cong đó là bằng không.

Tính chất $\mathcal{W}$. Với mọi điểm $a \in D$ hàm $f(z)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa với tâm tại a, tức là: $\forall\, a \in D$, $\exists (A_n)$, $A_n = A_n(a)$ sao cho chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 0} A_n(z-a)^n$$

hội tụ trong hình tròn $\{z : |z-a| < R\}$ nào đó (bán kính hội tụ R phụ thuộc vào a) và có tổng bằng $f(z)$).

Ta có

Định lý 4.1.11. *Các tính chất $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, J và $\mathcal{W}$ là tương đương với nhau.*

Chứng minh. Ta cần chứng minh lược đồ sau đây

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \Longrightarrow & \mathcal{R} \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ \mathcal{W} & \Longleftarrow & J \end{array}$$

1^+ Điều khẳng định $\mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{R}$ được chứng minh trong định lý 6.3 (về điều kiện cần để hàm $f(z)$ là $\mathbb{C}$ - khả vi) và định lý 11.14 về sự tồn tại đạo hàm mọi cấp của hàm chỉnh hình.

2^+ Điều khẳng định $\mathcal{R} \Longrightarrow J$ được chứng minh bởi định lý 10.3.

3^+ Điều khẳng định $J \Longrightarrow \mathcal{W}$ được chứng minh bởi định lý Cauchy - Taylor.

4^+ Sau cùng, điều khẳng định $\mathcal{W} \Longrightarrow \mathcal{C}$ được chứng minh trong định lý 6.9 về tính chỉnh hình của chuỗi lũy thừa trong hình tròn hội tụ của nó. $\square$

Xuất phát từ các quan điểm khác nhau như vậy nên các thuật ngữ được dùng cũng khác nhau. Từ định lý 4.1.11 các thuật ngữ sau đây được xem là đồng nghĩa

"*hàm chỉnh hình*" $\equiv$ "*hàm giải tích*" $\equiv$

$\equiv$ "*hàm đều*" $\equiv$ "*hàm chính quy*"

hoặc còn dùng thuật ngữ "*hàm nguyên trong miền D*". Ở đây, thuật ngữ hàm chỉnh hình được dùng đầu tiên bởi các học trò của Cauchy. Thuật ngữ "hàm giải tích" được dùng đầu tiên bởi Lagrange và sau đó bởi Weierstrass.

Trên thực tế O. Cauchy (1784 - 1857) đã định nghĩa hàm chỉnh hình bởi tính chất $\mathcal{C}$ (dựa vào các tính chất khả vi của hàm) mặc dù khi chứng minh định lý tích phân Cauchy (công thức tích phân cơ bản I) ông đã thêm giả thiết có tính chất kỹ thuật là đạo hàm $f'(z)$ phải liên tục trong D. Nhưng điều đó đã được khắc phục bởi Goursat và Pringsheim về sau.

Cùng thời với Cauchy, nhà toán học Đức B. Riemann (1826 - 1866) đã xuất phát từ tính chất $\mathcal{R}$. Phương pháp này đưa đến sự khảo sát đồng thời cặp hàm điều hòa liên hợp u và v trong miền D liên hệ với nhau bởi điều kiện Cauchy - Riemann và xác định hàm chỉnh hình dưới dạng $f(z) = u(z)+iv(z)$.

Người tiếp theo xác lập cơ sở lý thuyết hàm biến phức theo một cách khác là K. Weierstrass (1815 - 1897). Weierstrass đã sử dụng tính khai triển được của hàm thành chuỗi lũy thừa (tức là tính chất $\mathcal{W}$) để làm định nghĩa.

Sau cùng, để thu được các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình và đặc biệt là thu được nhanh công thức tích phân Cauchy người ta đã sử dụng tính chất J. Người đầu tiên khảo sát các tính chất của hàm chỉnh hình dựa trên quan điểm này là Osgood: Hàm liên tục $f(z)$ trong miền đơn liên D được gọi là hàm chỉnh hình trong miền đó nếu với đường cong đóng đo được $\mathcal{L}$ bất kỳ thuộc miền D thì tích phân $\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)$ lấy theo đường cong đó là bằng 0.

Bây giờ ta nêu ra một số ví dụ chứng minh một số tính chất của hàm bằng những phương pháp khác nhau dựa trên các định nghĩa xuất phát đã nêu.

1. *Tổng của hai hàm chỉnh hình trong miền D là hàm chỉnh hình trong miền D.*

Chứng minh. Giả sử $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$.

($\mathcal{C}$). Nếu f_1 và f_2 khả vi tại điểm $z \in D$ tùy ý thì $f_1 + f_2$ cũng khả vi tại đó và tại đó nó có đạo hàm mọi cấp.

($\mathcal{R}$). Đặt $f_1(z) = u_1(x, u) + iv_1(x, y)$; $f_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$. Khi đó

$$f_1(z) + f_2(z) = [u_1(x, y) + u_2(x, y)] + i[v_1(x, y) + v_2(x, y)].$$

Vì mọi đạo hàm riêng cấp 1 của hàm u_1, u_2, v_1, v_2 tồn tại và liên tục nên các hàm $u_1 + u_2$ và $v_1 + v_2$ cũng có tính chất đó. Ngoài ra từ các điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial x} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = \dfrac{\partial v_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_2}{\partial x} \end{cases}$$

suy ra

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} = \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial y} = -\frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x},$$

tức là $f_1(z) + f_2(z)$ chỉnh hình theo định nghĩa $\mathcal{R}$.

(J). Đối với đường cong đóng đo được Γ bất kỳ trong miền D ta có

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{\Gamma} f_1(z)dz = 0 \\ \displaystyle\int\limits_{\Gamma} f_2(z)dz = 0 \end{array}\right. \implies \int\limits_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z)]dt = 0$$

tức là hàm $f_1 + f_2$ chỉnh hình theo định nghĩa J.

($\mathcal{W}$). Nếu các chuỗi lũy thừa

$$f_1(z) = \sum_{n \geqslant 0} a'_n (z - a)^n$$

và

$$f_2(z) = \sum_{n\geqslant} a''_n (z-a)^n$$

hội tụ trong lân cận của điểm a tùy ý nào đó của miền D thì chuỗi

$$f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n\geqslant 0} (a'_n + a''_n)(z-a)^n$$

cũng hội tụ trong lân cận đó và hàm $f_1(z) + f_2(z)$ chỉnh hình theo định nghĩa $(\mathcal{W})$. □

2. *Nếu* $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$ *thì* $f_1 f_2 \in \mathcal{H}(D)$, $\dfrac{f_1}{f_2} \in \mathcal{H}(D)$, $f_2 \neq 0$ *trong miền* D.

Chứng minh. 1^+ Việc chứng minh $f_1 f_2 \in \mathcal{H}(D)$ theo định nghĩa $\mathcal{C}$ là không có gì khó khăn. Phép chứng minh theo định nghĩa $\mathcal{W}$ (phép nhân chuỗi) hay định nghĩa $\mathcal{R}$ tuy phức tạp nhưng đều dẫn đến kết quả mong muốn. Việc chứng minh tính chỉnh hình của $f_1 \cdot f_2$ bằng định nghĩa J tỏ ra không thích hợp.

2^+ Để chứng minh $\dfrac{f_1}{f_2} \in \mathcal{H}(D)$ đơn giản hơn cả là dùng định nghĩa $\mathcal{C}$. Phép chứng minh dựa vào định nghĩa $\mathcal{W}$ rất phức tạp: đó là phép chia chuỗi cho chuỗi theo phương pháp hệ số bất định (định lý 4.1.10). □

3. *Nếu hàm* $W = \varphi(z)$ *chỉnh hình tại điểm* z_0, *còn hàm* $f(w)$ *chỉnh hình tại* $w_0 = \varphi(z_0)$ *thì hàm* $f(\varphi(z))$ *chỉnh hình tại điểm* z_0.

Chứng minh. Phép chứng minh dựa vào định nghĩa $\mathcal{C}$ là hiển nhiên vì nó thu được từ quy tắc đạo hàm của hàm hợp. Nếu áp dụng định nghĩa $(\mathcal{W})$ thì phép chứng minh phức tạp hơn do phép thế chuỗi vào chuỗi (định lý 4.1.9). □

4.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình

Trong **3.2** ta đã thấy rằng hàm chỉnh hình hoàn toàn được xác định bởi các giá trị của nó trên biên của miền chỉnh hình. Bây giờ ta sẽ chứng tỏ rằng hàm chỉnh hình hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó trên dãy điểm tùy ý hội tụ đến điểm thuộc miền chỉnh hình. Tính chất "nội tại" này của hàm chỉnh hình được gọi là *tính chất duy nhất*.

4.2.1 Không điểm (0-điểm) của hàm chỉnh hình

Định nghĩa 4.2.1. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Khi đó

1^+ Điểm $z = a \in D$ được gọi là *không-điểm* (0-điểm) của hàm $f(z)$ nếu $f(a) = 0$.

2^+ Điểm $z = a \in D$ được gọi là *không-điểm cấp m* của hàm $f(z)$ nếu

$$\begin{aligned} f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \\ f^{(m)}(a) \neq 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Nếu $m = 1$ thì $z = a$ gọi là không-điểm cấp 1 hay *không-điểm đơn* của hàm $f(z)$.

Từ định lý Cauchy-Taylor suy rằng trong lân cận $\mathcal{U}(a, \delta)$ của không điểm a của hàm f ta có

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1} + \dots$$

hay là

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$$

trong đó

$$\varphi(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a) + \dots$$

là hàm chỉnh hình trong lân cận $\mathcal{U}(a, \delta)$ và $\varphi(a) = \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$.

Ta có tiêu chuẩn sau đây để xác định không-điểm của hàm chỉnh hình.

Định lý 4.2.1. *Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$ và $a \in D$. Khi đó điểm $z = a$ là không-điểm cấp m của hàm f khi và chỉ khi tại lân cận của điểm a hàm f thỏa mãn hệ thức*

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

trong đó hàm φ chỉnh hình tại điểm a và $\varphi(a) \neq 0$.

Chứng minh. 1. Giả sử điểm a là không-điểm cấp m của hàm f. Theo định lý Cauchy-Taylor ta có:

$$\begin{aligned} f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} \\ + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m + f_1(z)(z-a)^{m+1}, \end{aligned}$$

trong đó

$$f_1(z) = \frac{f^{(m+1`)}(a)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(a)}{(m+2)!}(z-a) + \dots$$

chỉnh hình tại điểm a. Nhưng $z = a$ là không-điểm cấp m nên $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ và do đó

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + f_1(z)(z-a)^{m+1} \\ &= (z-a)^m \Big[\frac{1}{m!} f^{(m)}(a) + f_1(z)(z-a)\Big]. \end{aligned}$$

Đặt $\varphi(z) = \Big[\frac{1}{m!} f^{(m)}(a) + f_1(z)(z-a)\Big]$ và nhận xét rằng $\varphi(a) = \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$. Từ đó suy ra điều khẳng định của định lý.

2. Bây giờ giả sử

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z).$$

Áp dụng công thức Leibnitz đối với đạo hàm cấp cao của tích các hàm

$$(uv)^{(m)} = u^{(m)} v + C_m^1 u^{(m-1)} v' + \cdots + C_m^{m-1} u' v^{(m-1)} + u v^{(m)}$$

và đặt $u = (z-a)^m$, $v = \varphi(z)$ ta có

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z) \Rightarrow f(a) = 0;$$

$$\begin{aligned}
&f'(z) = m(z-a)^{m-1}\varphi(z) + (z-a)^m \varphi'(z) \Rightarrow f'(a) = 0;\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&f^{(m-1)}(z) = m(m-1)\cdots 2(z-a)\varphi(z) + C^1_{m-1} m(m-1)\cdots 3(z-a)^2 + \dots\\
&+ (z-a)^m \varphi^{(m-1)}(z), \Rightarrow f^{(m-1)}(a) = 0.
\end{aligned}$$

Nhưng

$$\begin{aligned}
f^{(m)}(z) = m!\varphi(z) + C^1_m m(m-1)\cdots 2(z-a)\varphi'(z) + \dots\\
+ (z-a)^m \varphi^{(m)}(z) \Rightarrow f^{(m)}(a) = m!\varphi(a) \neq 0
\end{aligned}$$

và đó là điều phải chứng minh. □

Ví dụ

1) Mọi điểm $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ đều là không-điểm đơn của hàm $f(z) = \sin z$ vì $f(z_k) = \sin z_k = \sin k\pi = 0$ và $f'(z_k) = \cos z_k = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$.

2) Điểm $z = 0$ là không-điểm cấp 4 của hàm $f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2$. Thật vậy, khai triển hàm đã cho thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $z = 0$

$$\begin{aligned}
f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2 &= \Big(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{n!} + \dots\Big) - 1 - z^2\\
&= \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots + \frac{z^{2n}}{n!} + \dots\\
&= z^4 \Big[\underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^{2n-4}}{n!} + \dots}_{\varphi(z)}\Big] = z^4\varphi(z).
\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng $z = 0$ là không-điểm cấp 4 của hàm đã cho.

3) Tìm cấp của không-điểm $z = 0$ đối với hàm

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}\cdot$$

Giải. Sử dụng khai triển hàm $\sin z$ thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $z = 0$, ta thu được

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left[z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dots\right]}$$
$$= \frac{z^8}{\dfrac{z^3}{3!} - \dfrac{z^5}{5!} + \dots} = z^5 \frac{1}{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{z^2}{5!} + \dots}.$$

Đặt

$$\varphi(z) = \frac{1}{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{z^2}{5!} + \dots}$$

khi đó $f(z) = z^5\varphi(z)$, trong đó $\varphi(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z = 0$ (tại sao?) và $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Do vậy $z = 0$ là không-điểm cấp 5 của hàm $f(z)$.

4.2.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình

Một hiện tượng rất đặc biệt là lớp hàm mà ta đã tách ra từ tập hợp các hàm biến phức tổng quát bằng điều kiện C-khả vi tức là lớp các hàm chỉnh hình $\mathcal{H}(D)$ mang một tính chất nội tại rất chặt chẽ. Tính chất nội tại đó cho phép ta đưa ra một kết luận xác định về dáng điệu của hàm ấy trong miền con đủ bé thuộc miền D. Ta có định lý sau đây mô tả tính chất đó gọi là *định lý duy nhất.*

Định lý 4.2.2. *Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D và triệt tiêu trên tập hợp vô hạn $E \subset D$ nào đó có ít nhất một điểm tụ nằm trong D thì*

$$f(z) = 0 \quad \forall\, z \in D.$$

Chứng minh. I. Đầu tiên ta xét trường hợp tập hợp E có điểm tụ hữu hạn $a \in D$. Phép chứng minh được chia thành các bước sau.

1^+ Hàm f có khai triển Taylor

$$f(z) = a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots \tag{4.24}$$

Thật vậy, vì hàm f liên tục tại điểm a nên $f(a) = 0$. Tiếp đó, vì f chỉnh hình tại điểm a nên nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm a và do $f(a) = 0$ nên ta có (4.24).

2^+ Ta chứng minh rằng $a_k = 0 \ \ \forall k = 1, 2, \dots$. Giả sử ngược lại: tồn tại những hệ số khác 0. Giả sử a_m là hệ số khác 0 với số hiệu nhỏ nhất, tức là $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$. Khi đó

$$f(z) = (z-a)^m[a_m + a_{m+1}(z-a) + \dots], \quad a_m \neq 0. \tag{4.25}$$

Từ (4.25) suy rằng trong lân cận thủng đủ bé của điểm $z = a$ cả hai thừa số của vế phải (4.25) đều khác 0. Nhưng điều đó lại mâu thuẫn với giả thiết rằng $z = a$ là điểm tụ của 0-điểm của hàm chỉnh hình f. Như vậy giả thiết của ta là sai và $a_k = 0 \ \forall \, k \geqslant 1$. Nhưng khi đó $f(z) \equiv 0$ trong lân cận nào đó của điểm a với bán kính bằng khoảng cách từ điểm a đến biên của miền D.

3^+ Bây giờ ta chứng minh rằng $f(z) \equiv 0$ trong toàn miền D. Giả sử ngược lại: tại điểm $z = b$ hữu hạn nào đó $f(b) \neq 0$, $b \in D$. Ta nối điểm a với điểm b bởi đường cong $\ell = \ell(a, b) \subset D$ và ký hiệu $\delta = \mathrm{dist}(\ell, \partial D)$ là khoảng cách từ đường cong ℓ đến biên ∂D, $\delta > 0$. Ta phủ đường cong ℓ bởi các hình tròn bán kính δ sao cho hình tròn thứ nhất có tâm tại a, hình tròn tiếp theo có tâm tại giao điểm của đường tròn thứ nhất với đường cong $\ell, \dots$ Theo chứng minh trong 2^+ ta có $f(z) \equiv 0$ trong hình tròn thứ nhất và tâm của hình tròn thứ hai là điểm tụ của các không-điểm của hàm $f(z)$. Do vậy $f(z) \equiv 0$ trong hình tròn thứ hai. Lập luận tương tự ta thu được $f(z) \equiv 0$ trong mọi hình tròn và đặc biệt là $f(b) = 0$. Trái với giả thiết. Như vậy $f(z) \equiv 0$ tại mọi điểm hữu hạn của miền D. Nếu hàm f chỉnh hình tại ∞ thì theo tính liên tục ta có $f(\infty) = 0$, tức là $f(z) \equiv 0$ trong D.

II. Trường hợp tập E có điểm tụ duy nhất tại ∞. Ta xét hàm $f(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$. Hàm này chỉnh hình trong miền D^* là ảnh của miền D qua ánh xạ $w = \dfrac{1}{z}$. Tập hợp E có ảnh qua ánh xạ $w = \dfrac{1}{z}$ là tập hợp E^* nào đó có điểm tụ $w = 0$ thuộc miền D^*. Lập luận như trên ta có: $F(w) = 0$ trong D^*. Do đó $f(z) \equiv 0$ trong D. Định lý được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Hệ quả 4.2.1. (nguyên lý cô lập của 0-điểm hàm chỉnh hình)

Mọi 0-điểm của hàm chỉnh hình không đồng nhất bằng 0 đều cô lập, tức là đối với mỗi 0-điểm nằm trong D của hàm $f \not\equiv 0$ đều tồn tại lân cận mà trong đó hàm f không có một 0-điểm nào khác ngoài 0-điểm đó.

Chứng minh. Giả sử tồn tại 0-điểm $z = a$ của hàm $f \not\equiv 0$ mà trong lân cận bất kỳ của nó còn tồn tại các 0-điểm khác của f. Khi đó số 0-điểm đó là vô số và đối với chúng điểm $z = a$ là điểm tụ. Từ đó theo định lý duy nhất $f(z) \equiv 0$ trong D. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng $f(z) \not\equiv 0$ trong D. □

Hệ quả 4.2.2. *Nếu hàm f chỉnh hình trong miền D và tại điểm $a \in D$ nào đó hàm f và mọi đạo hàm của nó đều triệt tiêu thì $f(z) \equiv 0$ trong D.*

Chứng minh. Vì hàm f chỉnh hình tại điểm $a \in D$ nên trong lân cận nào đó của điểm a nó khai triển được thành chuỗi Taylor. Theo điều kiện của hệ quả ta có $f^{(n)}(a) = 0 \; \forall n \geqslant 0$ nên

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

Điều đó cũng có nghĩa là $f(z) \equiv 0$ trong lân cận đó. Lấy lân cận này làm tập hợp E và áp dụng định lý duy nhất ta có $f(z) \equiv 0$ trong D. □

Hệ quả 4.2.3. *Nếu $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$ và $f_1(z) = f_2(z)$ trên tập hợp E nào đó nằm trong D và có điểm tụ thuộc D thì $f_1(z) \equiv f_2(z)$ trong D.*

Chứng minh. Hệ quả 4.2.3 thu được bằng cách áp dụng định lý duy nhất cho hàm $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. □

Nhận xét 4.2.1. Bên cạnh định lý duy nhất đã được chứng minh (còn gọi là *định lý duy nhất trong*) trong lý thuyết hàm chỉnh hình còn có các *định lý duy nhất biên*, trong đó tổng quát nhất và sâu sắc nhất là các định lý của N. Luzin và I. Privalov mà do phạm vi giáo trình ta sẽ không trình bày ở đây.

Nhận xét 4.2.2. Từ định lý vừa chứng minh ta cũng suy ra rằng mỗi không-điểm của hàm $f(\not\equiv 0)$ đều có cấp hữu hạn. Thật vậy, từ định lý 4.1.1 và khai triển Taylor (4.24) suy rằng nếu không điểm của hàm chỉnh hình có "cấp vô hạn" thì

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{(z-a)^n}=0,\quad n=0,1,2,\dots$$

và do đó $f\equiv 0$ trong D.

Nhận xét 4.2.3. Tập hợp con compắc $K\subset D$ bất kỳ chỉ chứa một số hữu hạn các không- điểm của hàm chỉnh hình f.

Nhận xét 4.2.4. Nếu tập hợp mọi không-điểm của hàm chỉnh hình f $(f\not\equiv 0)$, trong miền chỉnh hình D của nó không hữu hạn thì tập hợp đó chỉ có thể là tập đếm được. Thật vậy, ta ký hiệu $\overline{D}'_n$ là hệ các miền đóng thuộc D thỏa mãn các điều kiện:

a) $\overline{D}'_{n+1}\subset\overline{D}'_n$;

b) $\operatorname{dist}(\partial D,\partial D'_n)=\dfrac{1}{n}$.

Trong mỗi miền đóng $\overline{D}'_n$ hàm f chỉ có một số hữu hạn không-điểm vì trong trường hợp ngược lại, tồn tại giới hạn của các không điểm ấy và điểm giới hạn này thuộc D. Do đó $f(z)\equiv 0$ trong D theo định lý duy nhất. Từ nhận xét đó, dễ dàng suy ra rằng tập hợp các không điểm của hàm chỉnh hình là đếm được.

Nhận xét 4.2.5. Trong nhiều trường hợp, thay vì các không-điểm của hàm chỉnh hình ta sẽ xét A-điểm. Ta gọi z_0 là A-điểm của hàm f chỉnh hình trong miền D nếu $f(z_0)=A$, $A\in\mathbb{C}$. Trong trường hợp đặc biệt khi $A=0$ thì z_0 là không-điểm của hàm f. Ta nhận xét rằng với mọi $A\neq\infty$, mọi A-điểm của hàm f đều là không-điểm của hàm $f(z)-A$. Do đó mọi quy luật tổng quát đã được xác lập đối với không-điểm của hàm chỉnh hình đều đúng với A-điểm của hàm chỉnh hình, trong đó $A\neq\infty$ là số phức tùy ý.

4.2.3 Nguyên lý thác triển giải tích

Định nghĩa 4.2.2. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn: 1) hàm f chỉnh hình trong miền D; 2) hàm F chỉnh hình trong miền $\tilde{D} \supset D$; 3) $F(z)\big|_D \equiv f(z)$, tức là $F(z) \equiv f(z)$ khi $z \in D$. Khi đó hàm $F(z)$ được gọi là *thác triển giải tích* của hàm $f(z)$ (từ miền D ra miền $\tilde{D}$).

Nói một cách khác: hãy mở rộng miền xác định của hàm f mà vẫn giừ nguyên tính chỉnh hình.

Tính chất quan trọng nhất của thác triển giải tích là tính duy nhất của nó. Định lý sau đây (gọi là *nguyên lý thác triển giải tích*) có một ý nghĩa rất cơ bản trong việc xây dựng khái niệm hàm giải tích.

Định lý 4.2.3. (nguyên lý thác triển giải tích)

Nếu phép thác triển giải tích hàm chỉnh hình vào miền xác định rộng hơn cho trước là có thể thực hiện được thì phép thác triển đó là duy nhất.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử f_1 và g_1 là hai thác triển giải tích của hàm $f_0 \in \mathcal{H}(D)$ vào cùng một miền $D_1 \supset D$. Khi đó hàm

$$h(z) = f_1(z) - g_1(z)$$

chỉnh hình trong miền D_1 và bằng 0 trong miền D. Từ định lý duy nhất suy ra rằng $h(z) \equiv 0$ và $f_1(z) \equiv g_1(z)$ trong D_1. □

Nhận xét 4.2.6. Hiển nhiên bao giờ ta cũng mong muốn thác triển hàm chỉnh hình cho trước ra miền càng rộng hơn càng tốt và kết quả thác triển hàm chỉnh hình cho trước ra khắp nơi (tất nhiên nơi nào có thể) nói chung sẽ dẫn đến tính đa trị!

Về sau (xem chương V) ta thường cần đến sự mở rộng khái niệm thác triển giải tích vừa được trình bày.

Giả sử cho hai miền $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ và $D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ và các hàm chỉnh hình tương ứng $f_1 \in \mathcal{H}(D_1)$ và $f_2 \in \mathcal{H}(D_2)$. Hai hàm $f_1(z)$ và $f_2(z)$ được gọi là *thác triển giải tích trực tiếp* của nhau nếu

a) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$,

b) tồn tại miền $\delta_{12} \subset D_1 \cap D_2$ sao cho

$$f_1\big|_{\delta_{12}} = f_2\big|_{\delta_{12}}.$$

Theo định lý duy nhất hai hàm f_1 và f_2 phải bằng nhau khắp nơi trong thành phần liên thông $\Delta \supset \delta_{12}$ của giao $D_1 \cap D_2$. Nhưng giao $D_1 \cap D_2$ có thể không liên thông và do đó tại các thành phần liên thông khác đẳng thức

$$f_1(z) = f_2(z)$$

có thể không được thỏa mãn.

Bây giờ ta đưa ra khái niệm tổng quát hơn về *thác triển giải tích theo một xích miền.*

Giả sử cho xích miền

$$D_0, D_1, \ldots, D_n$$

sao cho mọi giao $D_{i,i+1} = D_i \cap D_{i+1}$ đều không trống và đều là những miền với mọi i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Giả sử tồn tại các hàm

$$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$$

chỉnh hình trong các miền D_i, $i = 0, \ldots, n$ tương ứng sao cho trong mọi miền $D_{i,i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ ta có đẳng thức

$$f_i \equiv f_{i+1}$$

với mọi $z \in D_{i,i+1}$ (tức là: f_{i+1} là thác triển giải tích trực tiếp của f_i từ D_i vào miền D_{i+1}). Khi đó, hàm $f_n(z)$ được gọi là *thác triển giải tích của hàm $f_0(z)$ theo xích miền $D_0, D_1, \ldots, D_n$* (không có hình dung từ "trực tiếp"!).

Dễ dàng thấy rằng: thác triển giải tích hàm chỉnh hình theo một xích miền cho trước là duy nhất (tất nhiên, nếu phép thác triển đó có thể thực hiện được).

Rõ ràng là khi thác triển hàm chỉnh hình cho trước theo một xích miền ta có thể trở về miền xuất phát sau một số bước chuyển tiếp nào đó và nói chung lúc đó ta có thể thu được một hàm chỉnh hình khác.

Để kết thúc tiết này, ta tìm điều kiện để có thể thực hiện thác triển giải tích.

Ta có định lý sau đây.

Định lý 4.2.4. *Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$ và hàm $f \in \mathcal{H}(D)$. Hàm $f(z)$ có thể thác triển giải tích ra miền $D^* \supset D$ khi và chỉ khi tồn tại, dù chỉ là một, phép khai triển hàm đó thành chuỗi Taylor tại lân cận của điểm $a \in D$ nào đó với hình tròn hội tụ vượt ra khỏi biên giới của miền D.*

Chứng minh. 1^+ Giả sử hình tròn hội tụ $\mathcal{K}(a)$ của khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \tag{4.26}$$

vượt ra khỏi biên giới của miền D. Ta ký hiệu

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(a) &= \big\{z \in D : |z-a| < \operatorname{dist}(a, \partial D)\big\},\\ G &= \mathcal{K}(a) \cap D.\end{aligned}$$

Xét đẳng thức (4.26). Vế trái của nó là hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D; còn vế phải là chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm chỉnh hình trong hình tròn $\mathcal{K}(a)$. Theo định lý Cauchy-Taylor hai vế của (4.26) bằng nhau trong hình tròn $\mathcal{K}_1(a)$. Do đó theo định lý duy nhất chúng bằng nhau trong giao G mà tại đó cả hai vế đều chỉnh hình.

Ta thác triển hàm $f(z)$ ra khỏi miền D bằng cách đặt

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z) & \text{nếu } z \in D,\\ S(z) & \text{nếu } z \in \mathcal{K}(a) \setminus G\end{cases}$$

trong đó $S(z)$ là tổng của chuỗi ở vế phải của (4.26).

Từ đó ta thu được hàm xác định trong $D \cap \mathcal{K}(a)$ đơn trị và chỉnh hình $f^*(z)$ tại đó. Như vậy nếu hình tròn hội tụ $\mathcal{K}(a)$ của khai triển Taylor của hàm $f(z)$ vượt ra khỏi biên giới của miền chỉnh hình của hàm thì có thể thác triển giải tích hàm đó ra miền $D \cup \mathcal{K}(a)$.

2^+ Ngược lại, giả sử hàm $f(z)$ có thể thác triển ra miền rộng hơn $D^* \supset D$. Khi đó tồn tại hình tròn $\mathcal{K}(a^*)$ vượt ra khỏi biên giới miền D với tâm tại điểm $a^* \in D$. Theo định lý Cauchy-Taylor khai triển

$$f(z) = f(a^*) + \frac{f'(a^*)}{1!}(z-a) + \dots$$

hội tụ ít nhất là trong hình tròn $\mathcal{K}(a)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Trên cơ sở định lý vừa chứng minh, quá trình thác triển giải tích có thể hình dung như sau.

Ta khai triển hàm thành chuỗi Taylor tại mỗi điểm trong của miền D. Có hai khả năng có thể xảy ra

(i) Nếu không một hình tròn hội tụ nào của các khai triển thu được vượt ra khỏi miền D thì hàm $f(z)$ không thác triển được ra khỏi miền D và miền D được gọi là *miền tồn tại tự nhiên* của hàm $f(x)$ (xem **5.1**, **5.2**).

(ii) Nếu có những hình tròn hội tụ vượt ra khỏi miền D thì theo định lý 4.2.3 ta thu được hàm chỉnh hình trong D^* là hợp của mọi hình tròn hội tụ và $D^* \supset D$.

Hàm đã được thác triển như vậy được khai triển thành chuỗi Taylor tại mỗi điểm $a \in D^* \setminus D$. Nếu không một hình tròn hội tụ nào của các khai triển mới vượt ra khỏi miền D^* thì D^* là miền tồn tại của hàm được xét. Trong trường hợp ngược lại ta lại áp dụng định lý trên và bằng các khai triển mới ta thác triển hàm vào miền $D^{**} \supset D^*$ trong đó D^{**} là hợp của các hình tròn hội tụ mới.

Quá trình thác triển đã chỉ ra được tiếp tục cho đến khi thu được miền $D(f)$ mà hàm f không thể thác triển giải tích tiếp được nữa.

4.2.4 Nguyên lý môđun cực đại

Đó là định lý sau đây

Định lý 4.2.5. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó môđun của hàm không thể đạt giá trị cực đại của nó (và do đó không đạt giá trị lớn nhất) tại bất cứ điểm nào của miền đó, trừ trường hợp khi $f(z) \equiv \text{const}$ trong miền D.*

Chứng minh. Giả thiết rằng tại điểm $z_0 \in D$ $(z_0 \neq \infty)$ mođun của hàm $f(z) \not\equiv \text{const}$ đạt cực đại của nó. Điều đó có nghĩa rằng trong lân cận nào đó $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ của điểm z_0 hàm f thỏa mãn hệ thức $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$.

Đầu tiên ta cần chứng minh rằng $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$. Giả sử $\gamma(z_0, \varepsilon)$ là đường tròn tùy ý với bán kính $\varepsilon < \varepsilon_0$ và tâm tại z_0. Theo định lý trung bình ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it})dt$$

và từ đó

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{it})|dt$$

hay là

$$0 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big[|f(z_0 + \varepsilon e^{it})| - |f(z_0)|\big]dt.$$

Trong bất đẳng thức trên biểu thức dưới dấu tích phân là không dương. Do đó bất đẳng thức chỉ có thể xảy ra trong trường hợp nếu

$$|f(z_0 + \varepsilon e^{it})| \equiv |f(z_0)|,$$

tức là $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ trên $\gamma(z_0, \varepsilon)$. Vì ε là tùy ý, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ nên từ đó suy rằng $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$.

Tiếp theo ta cần chứng minh rằng $f(z) \equiv f(z_0)$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$. Nếu $f(z_0) = 0$ thì $|f(z)| \equiv 0$ và do đó $f(z) \equiv 0$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$. Nếu

$f(z_0) \neq 0$ thì $f(z) \neq 0$ trong lân cận đã nêu. Trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$ ta xét hàm

$$F(z) = \ln f(z) = \ln |f(z)| + i\arg f(z) = u + iv.$$

Ở đây vì $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ với $z \in \mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$ nên $u \equiv \text{const}$ (vì $u = \ln |f(z)| = \ln |f(z_0)|$). Theo điều kiện Cauchy-Riemann ta có

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0,$$

và từ đó ta có $v = \text{const}$ trong $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$. Do vậy hàm $F(z) = \ln f(z) \equiv \text{const}$ và từ đó $f(z) \equiv \text{const}$ trong lân cận của điểm z_0. Như vậy $f(z) \equiv \text{const}$ trong lân cận của điểm z_0. Theo định lý duy nhất, ta có $f(z) \equiv \text{const}$ trong miền D. Đó là điều vô lý.

Bây giờ ta xét trường hợp miền $D \ni \infty$ và hàm $f(z)$ có môđun đạt cực đại tại ∞. Trong trường hợp này ta xét hàm $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Hàm này chỉnh hình trong miền D^* thu được từ D qua ánh xạ $w = \frac{1}{z}$. Hàm $F(w)$ có cực đại tại điểm $w = 0$ và điểm $w = 0$ là điểm trong của D^*. Theo phần chứng minh trên ta có $F(w) = \text{const}$ trong D^*. Do đó $f(z) \equiv \text{const}$ trong miền D. $\square$

Ta lưu ý các hệ quả sau

Hệ quả 4.2.4. *Hàm f chỉnh hình trong miền D có môđun hằng số khi và chỉ khi bản thân hàm đó là hằng số trong miền đó.*

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên. Điều kiện cần được trình bày trong phần cuối của chứng minh định lý. $\square$

Hệ quả 4.2.5. *Nếu $f(z) \not\equiv \text{const}$ là hàm chỉnh hình trong miền D và liên tục trên $\overline{D}$ thì giá trị cực đại của môđun của nó chỉ đạt được trên biên của miền D.*

Chứng minh. Thật vậy, theo định lý quen thuộc trong giải tích thực, hàm $|f(z)|$ (liên tục trong miền $\overline{D}$) nhận giá trị cực đại của nó tại điểm z_0 nào đó của miền $\overline{D}$. Theo nguyên lý môđun cực đại điểm z_0 không thể nằm trong D. Do đó điểm z_0 chỉ có thể nằm trên biên ∂D của miền D. □

Hệ quả 4.2.6. *Nếu* $f(z) \not\equiv \text{const}$ *là hàm chỉnh hình trong miền* D *và* $f(z_0) \neq 0\ \forall\, z \in D$ *thì môđun của nó không thể đạt cực tiểu (và do đó không đạt giá trị bé nhất) ở trong miền* D.

Chứng minh. Giả sử hàm $|f(z)|$ có cực tiểu tại điểm $z_0 \in D$. Ta xét hàm

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}\,\cdot$$

Đó là hàm chỉnh hình trong miền D. Hàm $|F(z)| = |f(z)|^{-1}$ có cực đại tại điểm $z_0 \in D$. Nhưng khi đó $F(z) \equiv \text{const}$ trong D và do đó $f(z) \equiv \text{const}$ trong D. Điều đó trái với giả thiết của hệ quả. □

Hệ quả 4.2.7. *Nếu hàm* $f(z) \not\equiv \text{const}$ *chỉnh hình trong miền* D *và liên tục trên* $\overline{D}$ *và* $|f(z)| \equiv \text{const}$ *trên biên* ∂D *của miền* D *thì nó có ít nhất một 0-điểm nằm trong* D.

Chứng minh. Giả sử ngược lại: hàm $f(z)$ không có 0-điểm trong D. Khi đó môđun $|f(z)|$ không có cả cực đại lẫn cực tiểu trong miền D. Vì $|f(z)|$ liên tục trên $\overline{D}$ nên nó đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của nó tại các điểm biên của miền. Nhưng, theo giả thiết trên biên của miền D $|f(z)|$ là hàm hằng. Do đó giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong miền $\overline{D}$ là trùng nhau, tức là $|f(z)| \equiv \text{const}$ trong D. Điều đó có nghĩa là mỗi điểm của D đều là điểm cực đại đối với $|f(z)|$. Nhưng điều đó không thể xảy ra vì $f(z) \not\equiv \text{const}$. Như vậy hàm $f(z)$ có ít nhất một 0-điểm trong miền D. □

Từ nguyên lý môđun cực đại của hàm chỉnh hình ta thu được định lý sau đây gọi là Bổ đề Schwarz [4]

[4]K. G. A. Schwarz (1843-1921) là nhà toán học Đức.

Định lý 4.2.6. *Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong hình tròn đơn vị $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1\}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 0$ và $|f(z)| < 1$ $\forall z \in \mathcal{U}$.*

Khi đó

1^+ hàm $f(z)$ cũng thỏa mãn các điều kiện $|f'(0)| \leqslant 1$ và $|f(z)| \leqslant |z|$ $\forall\, z \in \mathcal{U}$,

2^+ nếu đẳng thức $|f(z)| = |z|$ thỏa mãn dù chỉ tại một điểm $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$ hay $|f'(0)| = 1$ thì khắp nơi trong hình tròn $\mathcal{U}$ hàm

$$f(z) = e^{i\alpha} z$$

trong đó α là hằng số thực.

Chứng minh. 1^+ Giả sử r là số dương tùy ý < 1. Khi đó

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{f(t)dt}{t - z}, \quad z \in \{|z| < r\}.$$

Từ giả thiết $f(0) = 0$ và hệ thức vừa viết ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \Big(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t}\Big) f(t)dt \\ &= \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{f(t)dt}{t(t - z)}, \end{aligned}$$

nghĩa là hàm

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{f(t)dt}{t(t - z)}$$

chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < r\}$, trong đó

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

Như vậy hàm

$$F(z) = \frac{f(z)}{z}; \quad F(0) = f'(0)$$

chỉnh hình trong hình tròn: $\{|z| < 1\}$.

Từ nguyên lý môđun cực đại suy ra rằng $\max |F|$ đạt được trên đường tròn $\{|z| = r_1\}$ trong đó r_1 là số dương tùy ý bé hơn r. Do đó, với $|z| < r_1$, theo giả thiết, ta có:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r_1} \quad \text{khi} \quad |z| = r_1.$$

Từ đó, đối với điểm z cố định bất kỳ thuộc hình tròn đơn vị, qua giới hạn khi $r_1 \to 1$ ta có

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1$$

Đặc biệt là đối với $z = 0$ ta có $|F(0)| = |f'(0)| \leqslant 1$ và đối với điểm $z \neq 0$ thì $|F(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|z|} \leqslant 1$ tức là $|f(z)| \leqslant |z|$.

2^+ Nếu tại điểm $z_0 \neq 0$, $z_0 \in \mathcal{U}$ ta có đẳng thức $|f(z_0)| = |z_0|$ thì tại điểm đó $|F(z_0)| = \left|\dfrac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$. Điều đó có nghĩa là hàm $|F(z)|$ đạt cực đại $= 1$ tại điểm $z_0 \in \mathcal{U}$. Do đó theo nguyên lý môđun cực đại ta có $F(z) \equiv \text{const}$ trong $\overline{\mathcal{U}}$. Nếu có đẳng thức $|f'(0)| = 1$ thì bằng lý luận tương tự ta cũng kết luận rằng $F(z) \equiv \text{const}$. Trong cả hai trường hợp rõ ràng là $|F(z)| = 1$, tức là $F(z) = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ và do đó $f(z) = e^{i\alpha}z$. Bổ đề Schwarz được chứng minh. $\square$

Về mặt hình học Bổ đề Schwarz có nghĩa như sau. Qua ánh xạ bất kỳ thực hiện bởi hàm chỉnh hình $w = f(z)$, $f(0) = 0$ biến hình tròn đơn vị $\mathcal{U}$ lên miền D^* nằm trong hình tròn đơn vị khoảng cách từ ảnh $f(z_0)$ của điểm $z_0 \in \mathcal{U}$ đến điểm $w = 0$ không vượt quá khoảng cách từ chính điểm z đến điểm $z = 0$. Nếu có một điểm nào đó của $\mathcal{U}$ mà khoảng cách từ đó đến gốc tọa độ bằng khoảng cách từ ảnh của nó đến gốc tọa độ thì miền D^* trùng với hình tròn đơn vị và lúc đó ánh xạ chỉ là phép quay.

4.3 Điểm bất thường cô lập

4.3.1 Chuỗi Laurent

Chuỗi hàm dạng

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n &= \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a}\\ &\quad + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \dots\\ &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n\\ &= \sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-a)^n \qquad (4.27)\end{aligned}$$

được gọi là *chuỗi Laurent*[5], trong đó $z = a$ là điểm cố định của mặt phẳng phức, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ là các hệ số của chuỗi Laurent (*hệ số Laurent*) và phép lấy tổng được thực hiện theo các giá trị âm và dương của số hiệu n.

Ta xét hai chuỗi

$$a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \dots \qquad (4.28)$$

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots \qquad (4.29)$$

Định nghĩa 4.3.1. 1) Chuỗi Laurent (4.27) hội tụ tại điểm $z \in \mathbb{C}$ nếu tại điểm đó các chuỗi (4.28) và (4.29) đồng thời hội tụ.

2) Nếu chuỗi Laurent hội tụ thì tổng của nó được định nghĩa như là tổng của hai tổng của chuỗi (4.28) và (4.29).

Chuỗi (4.28) là chuỗi lũy thừa thông thường nên nếu nó hội tụ thì miền hội tụ sẽ là hình tròn $S(R) = \{z : |z-a| < R\}$ (khi $R = 0$ chuỗi (4.28) chỉ hội tụ tại điểm a; còn khi $R = \infty$ thì chuỗi hội tụ trong toàn mặt phẳng). Trong (4.29) ta thay $\dfrac{1}{z-a} = t$ và thu được chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n. \qquad (4.30)$$

[5]P. Laurent (1813-1854) là nhà toán học Pháp.

Nếu chuỗi (4.30) hội tụ thì miền hội tụ sẽ là hình tròn

$$S(r_1) = \left\{ t : |t| < r_1 = \frac{1}{r} \right\}.$$

Do đó chuỗi (4.29) hội tụ trong miền $\{z : |z - a| > r\}$. Nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$r < R$$

thì chuỗi (4.27) hội tụ trong miền

$$\mathcal{V} = \left\{ z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R, r < R \right\}.$$

Đó là vành tròn với tâm tại điểm a.

Tại mỗi điểm nằm ngoài vành tròn đó chuỗi Laurent (4.27) phân kỳ do một trong hai chuỗi (4.28) và (4.29) phân kỳ. Như vậy nếu thỏa mãn điều kiện $r < R$ thì miền hội tụ của chuỗi (4.27) là vành tròn. Tại các điểm nằm trên biên của vành tròn $\mathcal{V}$ chuỗi (4.27) có thể hội tụ tại những điểm này nhưng phân kỳ tại các điểm khác. Nếu $r > R$ thì các chuỗi (4.28) và (4.29) không có miền hội tụ chung và do vậy chuỗi (4.27) không hội tụ tại bất cứ điểm nào của mặt phẳng phức.

Nhận xét 4.3.1. Từ định lý Abel (định lý 4.6) suy rằng trong mọi vành tròn đóng $r < r_1 \leqslant |z - a| \leqslant R_1 < R$ nằm trong vành tròn $\mathcal{V}$ chuỗi Laurent hội tụ đều và theo định lý Weierstrass (định lý 12.3) tổng của chuỗi Laurent (4.27) là hàm chỉnh hình trong vành tròn $\mathcal{V}$. Đồng thời, chuỗi có thể đạo hàm và tích phân từng số hạng một số lần tùy ý.

Trong trường hợp riêng có thể xảy ra trường hợp $r = 0$ hay $R = \infty$. Từ sự lập luận ở trên suy rằng nếu trong chuỗi chỉ có một số hữu hạn số hạng với lũy thừa âm thì $r = 0$ và nếu chỉ có một số hữu hạn số hạng với lũy thừa dương thì $R = \infty$.

Định lý 4.3.1. (Laurent)

Giả sử $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. *Mọi hàm* $f(z)$ *chỉnh hình trong vành tròn*

$$\mathcal{V} = \{ z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < r, r < R \}$$

đều biểu diễn được thành chuỗi Laurent hội tụ trong vành tròn đó

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n\leqslant -1} a_n(z-a)^n + \sum_{n\geqslant 0} a)_n(z-a)^n \tag{4.31}$$

và khai triển đó là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử z là điểm cố định của vành tròn $\mathcal{V}$. Ta xét vành tròn

$$\mathcal{V}^* = \{z \in \mathcal{V} : r' < |z-a| < R',\ r < r' < R' < R\}$$

sao cho điểm $z \in \mathcal{V}^*$. Ta ký hiệu các đường tròn biên của $\mathcal{V}^*$ là $\Gamma(r') = \{z \in \mathcal{V} : |z-a| = r'\}$ và $\Gamma(R') = \{z \in \mathcal{V} : |z-a| = R'\}$. Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma(R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma(r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{4.32}$$

Trên đường tròn $\Gamma(R')$ nhân Cauchy $\dfrac{1}{\zeta - z}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}, \quad \zeta \in \Gamma(R').$$

Vì

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = q_1 < 1$$

nên chuỗi thu được trên đây hội tụ đều trên $\Gamma(R')$. Nhân chuỗi đó với hàm $\dfrac{f(\zeta)}{2\pi i}$ và tích phân kết quả theo đường tròn $\Gamma(R')$ ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma(R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k\geqslant 0} a_k(z-a)^k, \tag{4.33}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma(R')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta. \tag{4.34}$$

Trên đường tròn $\Gamma(r')$ ta có

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}} = -\sum_{k\geqslant 1}\frac{(\zeta-a)^{k-1}}{(z-a)^k},$$

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = q_2 < 1.$$

Nhân với $\dfrac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ và tích phân kết quả theo đường tròn $\Gamma(r')$ ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(r')}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \sum_{k\geqslant 1}\frac{a_{-k}}{z-a)^k} \tag{4.35}$$

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(r')} f(\zeta)(\zeta-a)^{k-1}d\zeta \tag{4.36}$$

Thế các công thức (4.33) và (4.35) vào (4.32) ta có

$$f(z) = \sum_{-\infty<k<\infty} a_k(z-a)^k, \tag{4.37}$$

với mọi $z \in \mathcal{V}^*$. Vấn đề còn lại là chứng minh rằng khai triển thu được là duy nhất.

Giả sử $\mathcal{L}$ là đường cong đóng Jordan trơn từng khúc nào đó nằm trong $\mathcal{V}^*$ và bao điểm a. Trên đường cong này chuỗi (4.37) hội tụ đều. Nhân hai vế của đẳng thức (4.37) với $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{(z-a)^{m+1}}$, trong đó m là số nguyên cố định, rồi tích phân kết quả thu được theo đường cong đóng $\mathcal{L}$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathcal{L}}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz = \sum_{-\infty<k<\infty} a_k\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathcal{L}}\frac{dz}{(z-a)^{m+1-k}}\cdot$$

Vì

$$\oint\limits_{\mathcal{L}}\frac{dz}{(z-a)^{m+1-k}} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq k\\ 2\pi i & \text{nếu } m = k\end{cases}$$

nên từ đó suy ra

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Điều đó chứng tỏ khai triển (4.37) trong vành tròn $\mathcal{V}^*$ là duy nhất. Vì r' và R' có thể lấy tương ứng gần r và R tùy ý nên khai triển (4.37) hội tụ trong toàn vành $\mathcal{V}$ và khai triển đó là duy nhất. □

Định nghĩa 4.3.2. 1. Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \rho\}$. Khi đó hàm f có thể khai triển thành chuỗi Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n + \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{(z-a)^n} \tag{4.38}$$

hội tụ trong vành tròn đó. Chuỗi (4.38) được gọi là *chuỗi (hay khai triển) Laurent của hàm $f(t)$ trong lân cận của điểm a.*

2. Giả sử tại lân cận điểm $z = \infty$ (tức là trong miền $\{z : R < |z| < \infty\}$) hàm $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng chuỗi hội tụ

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n z^n. \tag{4.39}$$

Khi đó chuỗi (4.39) được gọi là *chuỗi (hay khai triển) Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận của điểm ∞.*

Nhận xét 4.3.2. Các hệ số của khai triển (4.37) được tính theo công thức (4.34) nếu $n \geqslant 0$ và được tính theo công thức (4.36) nếu $n \leqslant -1$. Ta lấy đường tròn tùy ý

$$\gamma(\rho) = \Big\{ z \in \mathcal{V}^* : |z-a| = \rho, r' < \rho < R' \Big\}$$

và áp dụng định lý tích phân Cauchy dễ dàng thấy rằng các hệ số Laurent được tính bằng phép tích phân theo đường tròn $\gamma(\rho)$ và ta có công thức hợp nhất hai công thức (4.34) và (4.36) sau đây

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma(\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.40}$$

Bây giờ ta chuyển sang xét phép khai triểm hàm thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm vô cùng.

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong lân cận thủng nào đó của điểm vô cùng. Đặt $z = \dfrac{1}{\zeta}$. Qua phép biến đổi này điểm $z = \infty$ biến thành điểm $\zeta = 0$ và lân cận $\mathcal{V}(\infty)$ của điểm vô cùng chuyển thành lân cận của điểm $\zeta = 0$. Rõ ràng là hàm $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ chỉnh hình tại lân cận điểm $\zeta = 0$. Do đó có thể khai triển hàm $\varphi(\zeta)$ thành chuỗi Laurent

$$\varphi(\zeta) = \sum_{-\infty<n<\infty} c_n\zeta^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n\zeta^n + \sum_{n\geqslant 1}\frac{c_{-n}}{\zeta^n}\cdot$$

Tiếp đó, sau khi thực hiện phép đổi biến $\zeta = \dfrac{1}{z}$ và thay $c_n = a_{-n}$ ta có

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n\geqslant 1} a_n z^n = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n. \tag{4.41}$$

Chuỗi (4.41) là khai triển Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận của điểm $a = \infty$.

Định nghĩa 4.3.3. 1^+ Phần của chuỗi (4.31) hoặc (4.41) gồm từ mọi số hạng của chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = a$ mà khi $z \to a$ các số hạng đó đều dần đến ∞ được gọi là *phần chính* của khai triển Laurent của hàm $f(z)$.

2^+ Hiệu giữa chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = a$ và phần chính của nó được gọi là *phần chỉnh hình* (hay *phần đều*) của chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = a$.

Nếu điểm $a \neq \infty$ thì trong khai triển Laurent (4.31):

(i) chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant -1} a_n(z-a)^n$ là phần chính;

(ii) chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$ là phần chỉnh hình.

Nếu điểm $a = \infty$ thì trong khai triển Laurent (4.41):

(i) chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ là phần chính;

(ii) chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_{-n}}{z^n}$ là phần chỉnh hình.

Nhận xét 4.3.3. 1. Khai triển Laurent thường được sử dụng trong những trường hợp khi hàm f xác định trong một lân cận nào đó của điểm z_0 nhưng không xác định tại z_0.

Khi đó, khai triển Laurent của hàm f có thể thực hiện được trong vành tròn $\{0 < |z - z_0| < \delta\}$. Khai triển ấy thường được gọi là khai triển Laurent của hàm f tại lân cận điểm z_0.

2. Chuỗi Taylor là trường hợp riêng của chuỗi Laurent khi $a_n = 0$, $n = -1, -2, \dots$. Khác với trường hợp chuỗi Taylor, trong đó có các hệ số Taylor được biểu diễn qua các đạo hàm của hàm, trong trường hợp chuỗi Laurent người ta không thể biểu diễn các hệ số Laurent a_n qua các đạo hàm của f tại điểm z_0 vì hàm f không xác định tại điểm z_0.

Để khai triển hàm thành chuỗi Laurent ta cần lưu ý một số phương pháp sau đây.

Trong thực hành các công thức (4.38) ít khi được dùng để tìm hệ số của khai triển Laurent của các hàm cụ thể. Thông thường bằng cách này hay cách khác việc khai triển các hàm cụ thể thành chuỗi Laurent được quy về khai triển thành chuỗi Taylor và do đó cần áp dụng các *khai triển bảng* đã nêu trong **4.1.4**.

Để khai triển hàm thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $a = \infty$ ta có thể *sử dụng các khai triển bảng* hoặc sử dụng *phương pháp chính tắc* sau.

Đầu tiên thực hiện phép biến đổi biến $z = \dfrac{1}{\zeta}$ rồi áp dụng các khai triển bảng để khai triển hàm $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $\zeta = 0$. Sau cùng thay $\zeta = \dfrac{1}{z}$ vào chuỗi thu được ta sẽ thu được chuỗi Laurent tại lân cận điểm $z = \infty$.

Ví dụ 1. Hàm $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(z+2)}$ chỉnh hình trong các miền

a) $D_1 = \{|z| < 1\}$;

b) $D_2 = \{1 < |z| < 2\}$;

c) $D_3 = \{|z| > 2\}$.

Giải. Ta sẽ tìm khai triển Laurent của hàm f trong các miền nói trên.

Với mục đích đó, ta biểu diễn hàm f dưới dạng

$$f(z) = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\Big].$$

a) Khai triển Laurent trong miền D_1. Vì trong miền D_1 ta có $|z| < 1$ nên

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n,$$

và

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\Big(1+\dfrac{z}{2}\Big)} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{2^{n+1}}\,\cdot$$

Do đó

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3}\Big[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\Big] z^n, \quad z \in D_1.$$

Đó là khai triển Taylor.

b) Khai triển Laurent trong miền D_2. Vì $1 < |z| < 2$ nên:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z\Big(1-\dfrac{1}{z}\Big)} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{z^{n+1}}\,, \quad |z| > 1,$$

và

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\Big(1+\dfrac{z}{2}\Big)} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{2^{n+1}}\,, \quad |z| < 2.$$

Do đó

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \Big(\frac{1}{3}\Big) \cdot \frac{1}{z^n} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{3 \cdot 2^{n+1}}\,, \quad z \in D_2.$$

c) Khai triển Laurent trong miền D_3. Vì $|z| > 2$ nên

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= -\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{z^n}\,, \quad |z| > 1,\\
\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z\Big(1+\dfrac{2}{z}\Big)} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{z^{n+1}}\\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{z^n}\,,
\end{aligned}$$

và ta có kết quả:

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1} - 1}{3 \cdot z^n}, \quad |z| > 2.$$

Ví dụ 2. Khai triển hàm $f(z) = \dfrac{1}{2-z}$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $a = \infty$.

Giải. Đầu tiên thực hiện phép đổi biến $z = \dfrac{1}{\zeta}$. Khi đó hàm đã cho có dạng

$$w = f\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = \frac{\zeta}{2\zeta - 1} = -\frac{\zeta}{1-2\zeta}\cdot$$

Vì với điều kiện $|2\zeta| < 1$ ta có

$$w = f\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = -\zeta\sum_{n\geqslant 0}(2\zeta)^n = -\sum_{n\geqslant 0} 2^n\zeta^{n+1}, \quad |\zeta| < \frac{1}{2}$$

nên khi trở về biến z ta thu được

$$f(z) = \frac{1}{2-z} = -\sum \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

Đó là khai triển Laurent cần tìm.

Ta cũng có thể thu được khai triển này bằng cách áp dụng phương pháp giải ví dụ 1

Ta có

$$f(z) = \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}$$

Khi đó với điều kiện $\left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$ ta có

$$f(z) = -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n\geqslant 0}\Big(\frac{2}{z}\Big)^n = -\sum\frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

Ví dụ 3. Khai triển các hàm e^z, $\sin z$, $\cos z$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $a = \infty$.

Giải. Thực hiện phép đổi biến $z = \dfrac{1}{\zeta}$. Khi đó các hàm đã cho có dạng $e^{\frac{1}{\zeta}}$, $\sin\dfrac{1}{\zeta}$, $\cos\dfrac{1}{\zeta}$. Khai triển các hàm này thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $\zeta = 0$:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{\zeta}} &= 1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2\zeta^2} + \cdots + \frac{1}{n!\zeta^n} + \ldots,\\
\sin\frac{1}{\zeta} &= \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3!\zeta^3} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n-1)!\zeta^{2n-1}} + \ldots,\\
\cos\frac{1}{\zeta} &= 1 - \frac{1}{2!\zeta^2} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!\zeta^{2n}} + \ldots
\end{aligned}$$

Trở về biến z ta thu được

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,\\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Khai triển hàm trong ví dụ 1 thành chuỗi Laurent trong các miền khác nhau nếu lấy $a = 1$.

Giải. Trong trường hợp này ta có hai vành tròn với tâm tại điểm $a = 1$:

(i) hình tròn thủng: $\mathcal{V}_1 = \{z : 0 < |z-1| < 1\}$

(ii) phần ngoài hình tròn $\mathcal{V}_2 = \{z : |z-1| > 1\}$.

Trong mỗi vành tròn vừa nêu hàm $f(z)$ chỉnh hình và trên biên của chúng tồn tại điểm mà hàm không chỉnh hình.

Cũng như trong ví dụ 1, ta có

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\,.$$

Tiếp theo,

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n\geqslant 0}(z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

Do đó

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n\geqslant 0}(z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

(ii) Khai triển trong vành tròn $1 < |z-1| < \infty$.

Trong miền này ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} &= \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}\\ &= \frac{1}{z-1}\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(z-1)^n}\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1.\end{aligned}$$

và từ đó suy rằng

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(z-1)^n}, \quad 1 < |z-1| < \infty$$

Để kết thúc tiết này ta chứng minh

Định lý 4.3.2. *Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\mathcal{V} = \{z : r < |z-a| < R\}$. Khi đó các hệ số của chuỗi Laurent*

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-a)^n$$

của hàm $f(z)$ trong vành tròn $\mathcal{V}$ thỏa mãn các bất đẳng thức

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.42}$$

trong đó $M = \max\limits_{z\in\gamma(\rho)}|f(z)|$, $\gamma(\rho) = \{z \in \mathcal{V} : |z-a| = \rho, r < \rho < R\}$.

Các bất đẳng thức (4.42) *được gọi là các bất đẳng thức Cauchy đối với hệ số Laurent.*

Chứng minh. Sử dụng các công thức (4.38) ta có

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma(\rho)}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}}d\zeta \leqslant \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}}\int\limits_{\gamma(\rho)}ds = \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}\cdot$$

□

4.3.2 Điểm bất thường cô lập đơn trị

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong lân cận nào đó của điểm $z = a$, có thể trừ ra chính điểm a. Nói cách khác, $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn (lân cận thủng) $\dot{\mathcal{U}}(a;r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$. Khi đó hai khả năng sau đây có thể xảy ra

(1) Tìm được số A sao cho nếu đặt $f(a) = A$ thì hàm $f(z)$ trở nên chỉnh hình tại điểm $z = a$, tức là chỉnh hình trong toàn hình tròn $\mathcal{U}(a;r) = \{z : |z - a| < r\}$. Trong trường hợp này điểm $z = a$ được gọi là *điểm bất thường khử được* (hay còn gọi là *điểm đều* hoặc *điểm thường*).

(2) Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\dot{\mathcal{U}}(a;r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ nhưng không chỉnh hình trong hình tròn $\mathcal{U}(a;r) = \{z : |z - a| < r\}$. Khi đó điểm $z = a$ được gọi là *điểm bất thường cô lập đơn trị* (gọi tắt là *điểm bất thường cô lập* hoặc đôi khi chỉ gọi là *điểm bất thường*) của hàm $f(z)$.

Để khảo sát dáng điệu của hàm trong lân cận của điểm $z = a$ ta khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent trong vành tròn $\dot{\mathcal{U}}(a,r)$:

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n, \qquad (4.43)$$

$$0 < |z - a| < r$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z},\ 0 < \rho < r. \qquad (4.44)$$

Ta có

Định lý 4.3.3. *Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\dot{\mathcal{U}}(a;r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ thì $z = a$ là điểm bất thường khử được của $f(z)$ khi và chỉ khi hàm $f(z)$ có môđun bị chặn trong lân cận nào đó của điểm a.*

Chứng minh. I. *Điều kiện cần.* Giả sử $z = a$ là điểm bất thường khử được của $f(z)$. Khi đó tìm được số A sao cho sau khi thay $f(a) = A$ thì ta thu được hàm chỉnh hình tại điểm $z = a$ và do đó nó liên tục tại a. Từ sự tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{z\to a} f(z) = A$ suy ra $f(z)$ bị chặn trong lân cận nào đó của điểm a.

II. *Điều kiện đủ.* Giả sử tồn tại lân cận $\mathcal{U}(a;\delta)$, $0 < \delta \leqslant r$ và tồn tại số $M > 0$ sao cho $|f(z)| \leqslant M$ khi $z \in \mathcal{U}(a;\delta)$, $z \neq a$. Trong các công thức (4.44) ta xem $\gamma(\rho) = \{z : |z-a| = \rho, \rho < \delta\}$ và áp dụng định lý 4.3.2

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ta thu được

$$|a_{-n}| \leqslant M\rho^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.45}$$

Trong công thức (4.45) các hệ số a_{-n} không phụ thuộc ρ. Do đó khi $\rho \to 0$ ta thu được $a_{-n} = 0$ $n = 1, 2, \ldots$. Từ đó suy rằng trong khai triển Laurent (4.43) của hàm $f(z)$ phần chính bằng 0 và

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

Ký hiệu tổng của chuỗi lũy thừa vế phải là $S(z)$. Tổng $S(z)$ là hàm chỉnh hình trong toàn hình tròn $\mathcal{U}(a;r)$ và $f(z) = S(z)\ \forall\, z \in \dot{\mathcal{U}}(a;r)$. Nếu ta đặt $f(a) = S(a)$ thì $f(z)$ trở nên chỉnh hình trong $\mathcal{U}(a;r)$ kể cả điểm $z = a$. (Đó cũng là lý do có tên gọi "điểm bất thường khử được"). □

Nhận xét 4.3.4. Khái niệm "*điểm bất thường khử được*" được dùng tương tự như khái niệm "*điểm gián đoạn khử được*". Tuy nhiên nếu đối với hàm hai biến thực $F(x,y)$ xác định và khả vi trong lân cận điểm (x_0,y_0) (có thể trừ ra chính điểm (x_0,y_0)) tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} F(x,y) = A$ sau khi bổ sung giá trị $f(x_0,y_0) = A$ ta sẽ thu được hàm $F(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0) nhưng nói chung không khả vi tại (x_0,y_0). Trong khi đó đối với hàm $f(z)$ chỉnh hình trong $\dot{\mathcal{U}}(a;r)$ *chỉ với một điều kiện* về tính bị chặn của nó trong lân cận điểm $z = a$ ta đã có giới hạn $\lim_{z\to a} f(z)$ tồn tại hữu hạn và sau khi bổ sung giá trị $f(a) = \lim_{z\to a} f(z)$ ta thu được hàm chỉnh hình tại chính điểm $z = a$.

Từ định lý 4.3.3 đã chứng minh suy rằng $z = a$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\dot{\mathcal{U}}(a;r)$ khi và chỉ khi $|f(z)|$ không bị chặn trong bất cứ lân cận nào của điểm $z = a$, tức là

$$\overline{\lim}\, |f(z)| = \infty.$$

Như vậy nếu $z = a$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ thì hàm $f(z)$ không có giới hạn hữu hạn khi $z \to a$ và do đó chỉ có thể xuất hiện hai trường hợp

i) $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

ii) hàm $f(z)$ không dần tới một giới hạn hữu hạn hay vô cùng nào khi $z \to a$ (tức là tồn tại ít nhất hai dãy điểm $z_1', z_2', \dots, z_n', \dots$ và $z_1'', z_2'', \dots, z_n'', \dots$ cùng hội tụ đến a sao cho các dãy giá trị tương ứng của hàm $f(z_n')$ và $f(z_n'')$ không dần tới cùng một giới hạn).

Ví dụ 5. 1) Ta xét hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Hàm này chỉnh hình khi $0 < |z - a|$ và $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$. Như vậy, trường hợp i) xảy ra.

2) Ta xét ví dụ khác là $f(z) = e^{\frac{1}{z-\alpha}}$, $a = \alpha + i\beta$. Hàm này chỉnh hình khi $0 < |z - a|$, nhưng $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ không tồn tại. Thật vậy, giả sử z nằm trên đường thẳng qua a và song song với trục thực. Vì $z - a = x - \alpha$ là số thực nên khi $x > \alpha$ và $x \to \alpha$ thì $e^{\frac{1}{x-\alpha}} \to \infty$, còn khi $x < \alpha$ và $x \to \alpha$ thì $e^{\frac{1}{x-\alpha}} \to 0$. Do đó không tồn tại giới hạn hữu hạn lẫn giới hạn vô cùng khi $z \to a$ và ta có trường hợp ii).

Định nghĩa 4.3.4. 1) Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ được gọi là *cực điểm* nếu $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

2) Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ được gọi là *điểm bất thường cốt yếu* nếu hàm $f(z)$ không bị chặn về môđun và không dần đến ∞ khi $z \to a$.

Ta khảo sát một cách chi tiết dáng điệu của hàm tại lân cận của cực điểm.

Định lý 4.3.4. *Điểm $z = a$ là cực điểm của hàm $f(z)$ khi và chỉ khi điểm đó là 0-điểm đối với hàm $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.*

Chứng minh. I. Giả sử $z = a$ là cực điểm của hàm $f(z)$. Khi đó $\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = \infty$ và do đó tồn tại lân cận $\mathcal{U}(a;\delta) = \{z : |z-a| < \delta < r\}$ của điểm a sao cho trong đó $f(z)$ thỏa mãn bất đẳng thức $|f(z)| > 1$. Trong lân cận đó hàm $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ là hàm chỉnh hình có thể trừ ra điểm $z = a$. Nhưng từ hệ thức

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1$$

và định lý 4.3.3 suy rằng $z = a$ là điểm bất thường khử được đối với hàm $\varphi(z)$. Giá trị của hàm này tại điểm a bằng:

$$\varphi(a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)} = 0.$$

Do đó hàm $\varphi(z)$ chỉnh hình trong $\mathcal{U}(a;\delta)$ và $z = a$ là 0-điểm của nó.

II. Ngược lại, giả sử $z = a$ là 0-điểm của hàm $\varphi(z)$. Ta cần chứng minh $z = a$ là cực điểm của $f(z)$. Thật vậy, vì $z = a$ là 0-điểm của hàm $\varphi(z)$ và $\varphi(z) \not\equiv 0$ nên $\exists\,\Delta > 0$ đủ bé sao cho trong lân cận $\mathcal{U}(a;\Delta) = \{z : |z-a| < \Delta\}$ hàm $\varphi(z)$ không có 0-điểm nào khác ngoài $z = a$ (tính cô lập của 0-điểm của hàm chỉnh hình!). Ta lập hàm $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$. Đó là hàm chỉnh hình trong lân cận thủng $\dot{\mathcal{U}}(a;\Delta) = \{z : 0 < |z-a| < \Delta\}$ và dần đến ∞ khi $z \to a$. Do đó $z = a$ là cực điểm của $f(z)$. □

Nhờ sự tương ứng giữa 0-điểm và cực điểm được xác lập trong định lý 4.3.4 ta có thể phát biểu định nghĩa về *cấp* của cực điểm.

Định nghĩa 4.3.5. Ta nói rằng điểm $z = a$ là *cực điểm cấp m* ($m \geqslant 1$) đối với hàm $f(z)$ nếu điểm $z = a$ là 0-điểm cấp m đối với hàm $\dfrac{1}{f(z)}$. Trong trường hợp $m = 1$ cực điểm được gọi là *cực điểm đơn* còn khi $m > 1$-cực điểm gọi là *cực điểm bội.*

Ví dụ 6. 1) Xét hàm $f(z) = \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$. Các điểm $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ đều là cực điểm đơn của $f(z)$. Thật vậy, hàm $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$ chỉnh hình khi $z \neq 0$ và z_k là 0-điểm đơn của nó ($g'(z_k) \neq 0$). Điểm $z = 0$ là điểm bất thường không cô lập, nó là điểm tụ của các cực điểm.

2) Chứng minh rằng $z = 0$ là cực điểm cấp 3 của hàm $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$. Tương tự như trên dễ dàng thấy rằng $(z - \sin z)'\big|_{z=0} = (z - \sin z)''\big|_{z=0} = 0$, còn $(z - \sin z)^{(3)}\big|_{z=0} = 1$. Do vậy $z = 0$ là 0-điểm cấp 3 của mẫu số và do đó là cực điểm cấp 3 của hàm.

Dáng điệu của hàm tại lân cận của cực điểm cấp m cũng được xác định nhờ cấu trúc của khai triển Laurent tại lân cận của cực điểm.

Định lý 4.3.5. *Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ là cực điểm cấp m của nó khi và chỉ khi phần chính của khai triển Laurent của hàm $f(x)$ trong lân cận điểm $z = a$ chứa không quá m số hạng và $a_n = 0\ \forall\, n \leqslant -(m+1)$, còn $a_{-m} \neq 0$.*

Chứng minh. I. Giả sử $z = a$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$. Khi đó $z = a$ là 0-điểm cấp m đối với hàm $\dfrac{1}{f(z)}$. Từ đó suy rằng trong lân cận nào đó của $z = a$ ta có

$$\frac{1}{f(z)} = A_m(z-a)^m + A_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots; \quad A_m \neq 0$$

và do đó

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{A_m + A_{m+1}(z-a) + \dots} \cdot \tag{4.46}$$

Chuỗi lũy thừa $A_m + A_{m+1}(z-a) + \dots$ biểu diễn một hàm chỉnh hình không triệt tiêu trong một lân cận nào đó của điểm $z = a$ (vì $A_m \neq 0$). Do đó

$$\varphi(z) = \frac{1}{A_m + A_{m+1}(z-a) + \dots}$$

là hàm chỉnh hình trong lân cận của điểm $z = a$ và ta có khai triển dạng

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z-a) + \cdots + \alpha_n(z-a)^n + \ldots \quad \alpha_0 = \frac{1}{A_m} \neq 0. \tag{4.47}$$

Thay chuỗi (4.47) vào (4.46) ta thu được chuỗi

$$f(z) = \frac{\alpha_0}{(z-a)^m} + \frac{\alpha_1}{(z-a)^{m-1}} + \ldots \tag{4.48}$$

và do tính duy nhất của khai triển hàm thành chuỗi Laurent, chuỗi ở vế phải của (4.48) là khai triển Laurent của hàm $f(z)$.

Thay đổi ký hiệu các hệ số trong (4.48) bằng cách đặt $\alpha_n = a_{n-m}$; $n = 0, 12, \ldots$ ta thu được

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots \tag{4.49}$$

II. Giả sử trong lân cận nào đó của điểm $z = a$ hàm $f(z)$ có khai triển dạng (4.49), trong đó $a_{-m} \neq 0$. Khai triển đó có thể viết lại dưới dạng

$$f(z) = \frac{a_{-m} + A_{-m+1}(z-a) + \ldots}{(z-a)^m}\cdot$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \cdot \frac{1}{a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \ldots}, \quad a_{-m} \neq 0.$$

Bằng cách thay hàm chỉnh hình $\dfrac{1}{a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \ldots}$ bởi khai triển Taylor của nó theo các lũy thừa của $z - a$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)} &= (z-a)^m[\beta_0 + \beta_1(z-a) + \ldots] \\ &= \beta_0(z-a)^m + \beta_1(z-a)^{m+1} + \ldots; \quad \beta_0 = \frac{1}{a_{-m}} \neq 0. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Khai triển (4.50) chứng tỏ rằng $z = a$ là 0-điểm cấp m của hàm $\dfrac{1}{f(z)}$. Do đó theo định lý 4.3.4 điểm $z = a$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$. □

Áp dụng phương pháp chứng minh vừa trình bày ta có thể chứng minh

Định lý 4.3.6. *Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ là cực điểm cấp m $(m \geqslant 1)$ của nó khi và chỉ khi hàm $f(z)$ có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad \varphi(a) \neq 0$$

trong đó $\varphi(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z = a$ và $\varphi(a) \neq 0$.

Ví dụ 7. 1) Xét hàm $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^4}$. Hàm f chỉnh hình trong miền $D = \{z : 0 < |z| < \infty\}$. Khai triển Laurent của hàm đó trong miền D có dạng

$$\frac{\cos z - 1}{z^4} = \frac{1}{z^4}\Big[\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - 1\Big] = -\frac{1}{2z^2} + \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+4)!}$$

và do đó $z = 0$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)$ (ở đây $a_{-2} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$; $a_{-n} = 0 \ \ \forall\, n > 2$).

2) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$.

Rõ ràng là $z = 0$ là điểm bất thường của hàm $f(z)$. Vì e^z tuần hoàn nên mẫu số của phân thức thứ nhất bằng 0 khi $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Như vậy hàm $f(z)$ chỉnh hình $\forall\, z \neq 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nếu $z_k = 2k\pi i$, $k \neq 0$ thì $\dfrac{1}{z}$ chỉnh hình, còn $\dfrac{1}{e^z - 1}$ có cực điểm đó. Dễ dàng thấy rằng $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ là các cực điểm đơn của $\dfrac{1}{e^z - 1}$ và do vậy chúng cũng là cực điểm đơn của hàm $f(z)$. Ta xét điểm $z = 0$. Ta có

$$f(z) = \frac{1 + z - e^z}{z(e^z - 1)} = \frac{1 + z - \Big[1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dots\Big]}{z\Big[\Big(1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dots\Big) - 1\Big]}$$

$$= \frac{-\dfrac{z^2}{2!} - \dfrac{z^3}{3!} - \dots}{z\Big(z + \dfrac{z^2}{2!} + \dots\Big)}$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{2!} - \dfrac{z}{3!} - \dots}{1 + \dfrac{z}{2!} + \dots} \to -\frac{1}{2} \quad (z \to 0).$$

Do đó hàm $f(z)$ bị chặn trong lân cận điểm $z = 0$ và vì vậy $z = 0$ là điểm bất thường khử được.

Sau cùng ta khảo sát dáng điệu của hàm chỉnh hình tại lân cận điểm bất thường cốt yếu. Từ các định lý 4.3.3 và 4.3.5 dễ dàng chứng minh

Định lý 4.3.7. *Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ là điểm bất thường cốt yếu của nó khi và chỉ khi phần chính trong khai triển Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm a có vô số số hạng.*

Ví dụ 8. 1) Hàm $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ chỉnh hình trong miền $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ và

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}} + \dots$$

Phần chính của khai triển có vô số hạng thức khác 0. Do đó điểm $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $\sin\dfrac{1}{z}$.

2) Hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ chỉnh hình trong miền $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ và $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n!z^n}$. Do đó, điểm $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $e^{\frac{1}{z}}$.

Sự phức tạp của dáng điệu hàm chỉnh hình tại lân cận điểm bất thường cốt yếu được thể hiện trong định lý sau đây

Định lý 4.3.8. (Weierstrass)[6]

Giả sử a là điểm bất thường cốt yếu của hàm f(z). Khi đó tại lân cận $\mathcal{U}(a;\delta)$ bất kỳ của điểm a hàm f(z) nhận những giá trị gần một số phức cho trước bất kỳ bao nhiêu tùy ý, tức là:

$$\forall\, b \in \mathbb{C},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \mathcal{U}(a,\delta)\ \exists\, z \in \dot{\mathcal{U}}(a,\delta) : |f(z) - b| < \varepsilon.$$

Điều đó có nghĩa là: f(z) dần đến giới hạn cho trước bất kỳ khi z dần đến a theo dãy các giá trị được chọn tương ứng.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả thiết rằng

$$\exists\, b \in \mathbb{C},\ \exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathcal{U}(a;\delta) : \forall\, z \in \dot{\mathcal{U}}(a;\delta) \Rightarrow |f(z) - b| \geqslant \varepsilon.$$

Ta xét hàm

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - b}\cdot$$

Hàm $\varphi(z)$ có các tính chất là

i) $\varphi(z)$ có môđun bị chặn trong lân cận thủng $\dot{\mathcal{U}}(a;\delta)$

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - b|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\cdot$$

ii) $\varphi(z)$ chỉnh hình trong $\dot{\mathcal{U}}(a;\delta)$ và vì $z = a$ là điểm bất thường cô lập của $f(z)$ nên nó cũng là điểm bất thường cô lập của $\varphi(z)$.

Do đó theo định lý 4.3.3, điểm a là điểm bất thường khử được của $\varphi(z)$ và tại lân cận điểm a (chẳng hạn $a \neq \infty$) ta có

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq m} a_n(z - a)^n, \quad a_m \neq 0,\ m \geqslant 0\ \forall\, z \in \dot{\mathcal{U}}(a;\delta).$$

Nếu $m = 0$ thì $a_0 \neq 0$ và hàm

$$f(z) = b + \frac{1}{\varphi(z)} = b + \frac{1}{a_0 + a_1(z - a) + \ldots}$$

[6]K. Weierstrass (1815-1897) là nhà toán học Đức.

chỉnh hình trong lân cận thủng $\dot{\mathcal{U}}(a;\delta)$, tức là $z = a$ là điểm bất thường khử được đối với $f(z)$. Mâu thuẫn với giả thiết của định lý. Nếu $m > 0$ thì $a_m \neq 0$ và hàm

$$f(z) = b + \frac{1}{\varphi(z)} = b + \frac{1}{a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots}$$

có cực điểm cấp m tại điểm a. Điều đó cũng mâu thuẫn với điều kiện của định lý. □

Định nghĩa 4.3.6. Ta nói rằng *tập hợp E trù mật khắp nơi trong tập hợp B* nếu

$$\forall\, z \in B,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, z^* \in E : |z - z^*| < \varepsilon.$$

Sử dụng định nghĩa 4.3.6 ta có thể phát biểu định lý Weierstrass dưới dạng: *Nếu a là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì $\forall \mathcal{U}(a;\delta)$ là lân cận của điểm a tập hợp $f(\dot{\mathcal{U}}(a;\delta))$ trù mật khắp nơi trong $\mathbb{C}$.*

Định lý Weierstrass chỉ khẳng định rằng trong lân cận đủ bé của điểm bất thường cốt yếu hàm nhận những giá trị gần một số phức cho trước bao nhiêu tùy ý chứ không nói gì về việc hàm nhận mọi giá trị. Nhà toán học Pháp Picard[7] đã chứng minh định lý mạnh hơn và sâu sắc hơn sau đây

Định lý Picard. *Trong lân cận bé bao nhiêu tùy ý của điểm bất thường cốt yếu hàm $f(z)$ nhận vô số lần mọi giá trị hữu hạn ngoại trừ nhiều nhất một giá trị (gọi là giá trị ngoại lệ Picard).*

Ví dụ 9. 1) Khảo sát dáng điệu của hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tại lân cận điểm $z = 0$.

Như đã biết điểm $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu. Ta sẽ chứng tỏ rằng trong lân cận điểm $z = 0$ hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ có dáng điệu như được mô tả trong định lý Picard. Giả sử A là số phức $\neq 0$ bất kỳ. Đặt $A = \rho e^{i\varphi}$. Từ phương trình $e^{\frac{1}{z}} = A$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \ln A = \ln\rho + i(\varphi + 2k\pi) \\ &\Rightarrow z_k = \frac{1}{\ln\rho + i(\varphi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

[7]C. Picard (1856-1942) là nhà toán học Pháp.

Rõ ràng là đối với mọi hình tròn với tâm $z = 0$ và bán kính đủ bé ta có thể lấy số k_1 sao cho với mọi k mà $|k| \geqslant |k_1|$ thì mọi z_k đều rơi vào trong hình tròn đó. Nhưng z_k là nghiệm của phương trình $e^{\frac{1}{z}} = A$ với mọi A cho trước và $A \neq 0$. Như vậy đối với hàm $e^{\frac{1}{z}}$ giá trị ngoại lệ Picard là $A = 0$.

2) Hàm $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ có điểm bất thường cốt yếu là $z = 0$. Giả sử A là số được cho tùy ý.

Ta xét phương trình $\sin\dfrac{1}{z} = A$. Sử dụng định nghĩa hàm $\sin t$ trong miền phức ta viết phương trình dưới dạng

$$\frac{e^{\frac{i}{z}} - e^{-\frac{i}{z}}}{2i} = A.$$

Sau một vài phép biến đổi ta thu được phương trình

$$e^{\frac{2i}{z}} - 2Aie^{\frac{i}{z}} - 1 = 0$$

và do đó

$$e^{\frac{i}{z}} = Ai \pm \sqrt{(Ai)^2 + 1} = B.$$

Số $B \neq 0$ vì nếu không như vậy thì $Ai = \pm\sqrt{(Ai)^2 + 1}$ hay là $(Ai)^2 = (Ai)^2 + 1$. Giả sử

$$B = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Khi đó từ phương trình $e^{\frac{i}{z}} = B$ ta thu được

$$\frac{i}{z} = \ln B = \ln\rho + i(\varphi + 2k\pi)$$

$$z = \frac{1}{\varphi + 2k\pi - i\ln\rho}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Từ đó suy rằng trong lân cận bất kỳ của điểm $z = 0$ đều tìm được nghiệm của phương trình $\sin\dfrac{1}{z} = A$, $\forall A$ vì số k có thể lấy lớn tùy ý về môđun. Trong trường hợp này hàm $\sin\dfrac{1}{z}$ không có giá trị ngoại lệ Picard.

4.3.3 Dáng điệu của hàm tại điểm vô cùng

Ta lưu ý rằng trên mặt phẳng phức z chỉ tồn tại một điểm vô cùng và theo định nghĩa lân cận của điểm ∞:

$$\mathcal{U}(\infty;\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : d_{\overline{\mathbb{C}}}(z;\infty) < \varepsilon\}$$

Đó là phần ngoài hình tròn với bán kính $R = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon^2} - 1}$ và với tâm tại gốc tọa độ. Trên mặt cầu Riemann lân cận đó tương ứng với hình tròn cầu với tâm tại cực bắc của mặt cầu.

Nếu thực hiện phép biến đổi $z = \dfrac{1}{\zeta}$ hay $\zeta = \dfrac{1}{z}$ thì lân cận điểm $z = \infty$ của mặt phẳng z biến thành lân cận điểm $\zeta = 0$ của mặt phẳng ζ. Do đó việc khảo sát dáng điệu của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = \infty$ được đưa về khảo sát dáng điệu của hàm $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ tại lân cận điểm $\zeta = 0$.

Định nghĩa 4.3.7. Điểm vô cùng $z = \infty$ của mặt phẳng phức là *điểm bất thường cô lập* của hàm chỉnh hình $f(z)$ nếu có thể chỉ ra giá trị $R > 0$ sao cho trong phần ngoài hình tròn $|z| > R$ hàm $f(z)$ không có các điểm bất thường mà khoảng cách từ đó đến gốc tọa độ là hữu hạn.

Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(\infty;\varepsilon))$. Sau khi thực hiện phép biến đổi $z = \dfrac{1}{\zeta}$ ta thu được

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$$

và hàm $\varphi(\zeta)$ chỉnh hình trong lân cận nào đó của điểm $\zeta = 0$. Từ đó suy rằng *tính bất thường* của hàm $f(z)$ khi $z \to \infty$ và của $\varphi(\zeta)$ khi $\zeta \to 0$ là như nhau vì

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\zeta\to 0} \varphi(\zeta).$$

Ta có

Định nghĩa 4.3.8. Giả sử $z = \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$. Người ta nói rằng điểm $z = \infty$ là *điểm bất thường khử được*, *cực điểm* hay *điểm bất thường cốt yếu* tùy theo giới hạn $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ hữu hạn, bằng ∞ hay hoàn toàn không tồn tại.

Tuy nhiên các tiêu chuẩn về dạng của điểm bất thường được phát biểu dựa vào khai triển Laurent cần phải có sự thay đổi.

Khai triển Laurent của hàm $f(z)$ tại ∞ thu được từ khai triển Laurent của $\varphi(\zeta)$ tại lân cận điểm $\zeta = 0$ bằng cách thay $\zeta = \dfrac{1}{z}$:

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n\geqslant 1} a_n z^n = \sum_{-\infty<b<+\infty} a_n z^n, \tag{4.51}$$

trong đó

chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_{-n}}{z^n}$ là *phần chỉnh hình*

chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ là *phần chính.*

Ta thấy, khác với khai triển Laurent trong lân cận điểm bất thường hữu hạn, trong khai triển (4.51) đối với hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = \infty$ *tập hợp mọi số hạng với lũy thừa dương của z đóng vai trò phần chính*, còn tập hợp lũy thừa âm lập nên phần chỉnh hình. Từ định nghĩa 4.3.8 và cấu trúc của chuỗi Laurent (4.51) ta có

Định lý 4.3.9. *Điểm $z = \infty$ là*

1^+ *điểm bất thường khử được của hàm $f(z)$ khi và chỉ khi khai triển* (4.51) *không chứa phần chính (tức là không chứa các số hạng với lũy thừa dương của z);*

2^+ *cực điểm khi và chỉ khi phần chính trong* (4.51) *chỉ chứa một số hữu hạn số hạng;*

3^+ *điểm bất thường cốt yếu khi và chỉ khi phần chính chứa vô số số hạng (tức là chứa vô số số hạng với lũy thừa dương của z).*

Đối với điểm bất thường cốt yếu tại ∞ định lý Weierstrass diễn đạt như sau: *Nếu $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì trong lân cận* *bất kỳ của nó hàm $f(z)$ nhận những giá trị gần một số phức cho trước bao nhiêu tùy ý.*

Định lý Picard đối với trường hợp điểm bất thường cốt yếu vô cùng cũng được phát biểu tương tự như trường hợp hữu hạn.

Ta minh họa định lý Picard bằng hai ví dụ sau.

Ví dụ 10. 1) Điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu đối với hàm $f(z) = e^z$. Ta xét phương trình

$$e^z = A, \quad A \neq 0.$$

Phương trình này có các nghiệm sau đây

$$z_k = \ln|A| + i(\arg A + 2k\pi),$$

trong đó $\arg A$ là giá trị chính của acgumen, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy rằng trong lân cận bất kỳ của điểm $z = \infty$ tồn tại vô số điểm z_k mà tại đó hàm e^z nhận giá trị A ($A \neq 0$). Giá trị $A = 0$ là giá trị ngoại lệ Picard (hàm e^z không nhận giá trị $A = 0$).

2) Đối với hàm $f(z) = \sin z$ điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu và đối với mỗi giá trị A phương trình $\sin z = A$ có vô số nghiệm

$$z_k = \frac{1}{i}\ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó hàm $f(z) = \sin z$ không có giá trị ngoại lệ Picard.

4.3.4 Phân loại hàm chỉnh hình

Phù hợp với sự phân loại điểm bất thường cô lập, ta sẽ phân loại các hàm chỉnh hình đơn giản nhất theo các điểm bất thường của chúng.

Định nghĩa 4.3.9. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng $\mathbb{C}$ (tức là hàm không có điểm bất thường hữu hạn) được gọi là *hàm nguyên*.

Khai triển hàm nguyên $f(z)$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n. \tag{4.52}$$

Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng $\mathbb{C}$ nên chuỗi (4.52) hội tụ với mọi z, và do đó chuỗi đó là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm ∞ với phần chính là

$$f_1(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$$

và phần chỉnh hình

$$f_2(z) = a_0.$$

Trong $\overline{\mathbb{C}}$, điểm bất thường duy nhất của hàm nguyên chỉ có thể là điểm $z = \infty$.

Định lý 4.3.10. *Nếu điểm $z = \infty$ là cực điểm cấp n của hàm nguyên $f(z)$ thì $f(z)$ là đa thức bậc n.*

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{z^n}\cdot$$

Đặt $g(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z$. Đó là phần chính của khai triển Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận điểm $z = \infty$. Hiển nhiên hàm

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

là một hàm nguyên và điểm $z = \infty$ là điểm chỉnh hình của nó. Do đó theo định lý Liouville $h(z) \equiv \text{const}$. Từ đó suy ra $f(z)$ là đa thức bậc n. $\square$

Hàm nguyên, mà điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu được gọi là *hàm nguyên siêu việt*, (ví dụ các hàm $e^z, \sin z, \cos z, \dots$)

Lớp tổng quát hơn các hàm nguyên là các hàm phân hình.

Định nghĩa 4.3.10. Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong miền $D \subset \mathbb{C}$ nếu tồn tại tập hợp (hữu hạn hoặc vô hạn) các điểm cô lập

$$\{a_i\}_{i\in J}, \quad a_i \in D\ \forall\, i \in J$$

mà mỗi điểm trong đó là cực điểm của hàm f sao cho

$$f \in \mathcal{H} \quad (D \setminus \{a_i\}).$$

Nói cách khác: trong tập hợp D hàm f không có các điểm bất thường nào khác ngoài cực điểm.

Trong lân cận của mỗi điểm thuộc D hàm phân hình có thể biểu diễn dưới dạng thương của hai hàm chỉnh hình $\varphi(z)/\psi(z)$, trong đó $\psi(z)$ không đồng nhất bằng 0. Một cách tự nhiên, ta có thể xác định phép cộng và nhân các hàm phân hình. Rõ ràng là đối với các phép toán đó, tập hợp các hàm phân hình trong D lập thành một vành.

Định lý 4.3.11. *Giả sử hàm $f(z)$ phân hình trong D. Khi đó hàm f' cũng là phân hình trong D. Hàm f và f' cũng có cực điểm như nhau, đồng thời nếu z_0 là cực điểm cấp $m > 0$ của hàm f thì nó là cực điểm cấp $m+1$ của đạo hàm f'.*

Chứng minh. Hàm f' xác định và chỉnh hình tại mọi điểm của miền D không phải là cực điểm của hàm f. Ta sẽ chứng minh rằng nếu z_0 là cực điểm của f thì z_0 cũng là cực điểm của f'. Với z đủ gần z_0 ta có

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot h(z),$$

trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận điểm z_0, $h(z_0) \neq 0$. Do đó, nếu $z \neq z_0$ thì

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}[(z - z_0)h'(z) - mh(z)] \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}\tilde{h}(z). \end{aligned}$$

Vì $\tilde{h}(z_0) = mh(z_0) \neq 0$ nên điểm z_0 là cực điểm cấp $m+1$ của hàm f'. □

Ta nhận xét rằng *trong miền đóng bị chặn bất kỳ của mặt phẳng phức hàm phân hình chỉ có một số hữu hạn cực điểm.*

Thật vậy, nếu trong miền đóng bị chặn bất kỳ $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ hàm có vô số cực điểm thì từ tập hợp các cực điểm có thể trích ra dãy (z_n) hội tụ đến điểm z_0 nào đó nằm trong miền đóng được xét $z_0 \in \overline{D}$. Khi đó z_0 là điểm tụ của dãy các cực điểm (z_n) của $f(z)$ và

$$\lim_{z_n \to z_0} f(z_n) = \infty.$$

Do đó z_0 là điểm bất thường của hàm $f(z)$. Mặt khác là điểm tụ của dãy (z_n), điểm z_0 không thể là điểm bất thường cô lập của f. Như vậy, điểm z_0 không thể là cực điểm của hàm $f(z)$. Nhưng điều đó mâu thuẫn với tính phân hình của $f(z)$.

Ta có định lý sau:

Định lý 4.3.12. *Hàm chỉnh hình $f(z)$ trong $\overline{\mathbb{C}}$ không có các điểm bất thường khác ngoài cực điểm khi và chỉ khi f là hàm hữu tỷ.*

Chứng minh. 1. Hiển nhiên hàm hữu tỷ là một hàm phân hình có một số hữu hạn cực điểm.

2. Ngược lại, rõ ràng là số cực điểm của hàm f trong $\overline{\mathbb{C}}$ là hữu hạn (vì $\overline{\mathbb{C}}$ là compắc). Ta ký hiệu a_ν $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ là những cực điểm của nó và $g_\nu(z)$ là phần chính của khai triển Laurent tương ứng tại điểm a_ν. Gọi $g(z)$ là phần chính của khai triển Laurent tại điểm $z = \infty$ (nếu f chỉnh hình tại ∞ thì $g(z) \equiv 0$).

Hàm

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{\nu=1} g_\nu(z)$$

chỉnh hình trong $\overline{\mathbb{C}}$ và theo định lý Liouville thì $\varphi(z) \equiv \text{const}$. Từ đó suy ra

$$f(z) = g(z) + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(z) + \text{const}$$

là một hàm hữu tỷ. □

4.4 Tính bất biến của tập hợp mở

Một trong những tính chất tôpô quan trọng của hàm chỉnh hình là tính chất bất biến của tập hợp mở mà ta sẽ xét trong mục này.

4.4.1 Nguyên lý acgumen

Định lý 4.4.1. *Giả sử tập hợp mở $D \subset \mathbb{C}$ và $f \in \mathcal{H}(D)$ với tập hợp các 0-điểm trong D là $N_f(D)$. Giả sử $\partial\widetilde{D}$ là biên định hướng của miền $\widetilde{D}$ nằm trong D sao cho*

$$\partial\widetilde{D} \subset D \setminus N_f(D).$$

Khi đó nếu gọi $N_f(\widetilde{D})$ là số 0-điểm của hàm f nằm trong $\widetilde{D}$, thì ta có công thức

$$N_f(\widetilde{D}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz, \tag{4.53}$$

trong đó mỗi 0-điểm được tính một số lần bằng cấp của nó.

Chứng minh. Theo định lý duy nhất (xem nhận xét 13.4) trong $\widetilde{D}$ chỉ có một số hữu hạn 0-điểm của hàm f. Ta ký hiệu các không điểm đó là $a_1, a_2, \dots, a_m$ với cấp tương ứng là $n(a_1), \dots, n(a_m)$. Như vậy

$$N_f(\widetilde{D}) = \sum_{j=1}^{m} n(a_j).$$

Đối với mỗi 0-điểm a_j ta xét hình tròn $S(a_j) \subset \widetilde{D}$ với tâm tại a_j và bán kính đủ bé sao cho

$$S(a_j) \cap S(a_i) = \emptyset; \quad i \neq j;\ i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Ta xét compắc: $D^* = \widetilde{D} \setminus \Big\{ \bigcup\limits_{j=1}^{m} \mathring{S}(a_j) \Big\}$, trong đó $\mathring{S}(a_j)$ là phần trong của hình tròn $S(a_j)$.

Hiển nhiên biên của D^* là

$$\partial D^* = \partial\widetilde{D} \cup \partial S(a_1) \cup \cdots \cup \partial S(a_m),$$

trong đó các đường tròn $\partial S(a_j)$ được lấy theo hướng âm.

Vì $\partial\widetilde{D} \subset D \setminus N_f(D)$ nên hàm $g = \dfrac{f'}{f}$ chỉnh hình trong lân cận nào đó của biên $\partial\widetilde{D}$. Do đó, đối với D^* ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^*}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0,$$

hay là

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(a_j)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{4.54}$$

Vì a_j, $j = 1, 2, \dots, m$ là 0-điểm của hàm f nên $f(z) = (z - a_j)^{n(a_j)} \cdot \varphi_j(z)$ trong đó $\varphi_j(z)$ chỉnh hình tại điểm a_j và $\varphi_j(a_j) \neq 0$.

Do đó

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(a_j)}{z - a_j}\,\frac{\varphi_j'(z)}{\varphi_j(z)}\cdot \tag{4.55}$$

Từ (4.54) và (4.55) ta thu được (4.53):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}}\frac{f'(z)dz}{f(z)} &= \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(a_j)}\frac{n(a_j)}{z - a_j}dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(a_j)}\frac{\varphi_j'(z)dz}{\varphi_j(z)}\\ &= \sum_{j=1}^{m} n(a_j) = N_f(\widetilde{D}).\end{aligned}$$

□

Định lý vừa chứng minh có thể diễn đạt về mặt hình học như sau. Ta biểu diễn $\partial\widetilde{D}$ bằng tuyến

$$z = z(t), \quad t \in [a, b]$$

và ký hiệu $\Phi(t)$ là nguyên hàm của f'/f dọc theo tuyến đó. Khi đó

$$\int\limits_{\partial\widetilde{D}} \frac{f'(z)dx}{f(z)} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Mặt khác, $\Phi(t) = \ln f[z(t)]$, trong đó ln là nhánh liên tục bất kỳ của hàm lôgarit biến thiên dọc theo biên $\partial\widetilde{D}$. Vì

$$\ln f = \ln|f| + i\arg f$$

và hàm $\ln|f|$ đơn trị nên số gia của $\ln|f|$ dọc theo tuyến $\partial\widetilde{D}$ bằng 0 và

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= i\{\arg f[z(b)] - \arg f[z(a)]\} \\ &= i\Delta_{\partial\widetilde{D}}\arg f.\end{aligned}$$

Do đó

$$N_f(\widetilde{D}) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\widetilde{D}}\arg f. \tag{4.56}$$

Về mặt hình học, vế phải của (4.56) chỉ số vòng quay đầy đủ của vectơ $w = f(z)$ xung quanh điểm $w = 0$ khi z vòng quanh theo $\partial\widetilde{D}$ (hình IV.2).

Hình IV.2

Ta ký hiệu $\Gamma^* = f(\partial\widetilde{D}) : w = f[z(t)]$, $t \in [a, b]$. Khi đó số $N_f(\widetilde{D})$ trong công thức (4.53) và (4.56) bằng số vòng quay của vectơ w khi điểm w vòng quanh theo Γ^*. Số vòng quay đó được gọi là *chỉ số* của tuyến Γ^* đối với điểm

$w = 0$ và được ký hiệu là $\mathrm{ind}_0\partial D^*$. Do đó, công thức (4.56) có thể viết dưới dạng

$$N_f(\widetilde{D}) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma^*}\arg w = \mathrm{ind}_0\partial D^*.$$

Nhận xét 4.4.1. Thay vì xét không-điểm của hàm f ta có thể xét các A-điểm của nó, tức là nghiệm của phương trình $f(z) = A$. Để làm điều đó, ta chỉ cần thay hàm f bởi hàm $f(z) - A$ trong toàn bộ quá trình lập luận như trên. Nếu $\partial\widetilde{D}$ không chứa A-điểm của f thì

$$\begin{aligned} N_{f,A}(\widetilde{D}) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}} \frac{f'dz}{f - A} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\widetilde{D}}\arg\{f(z) - A\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma^*}\arg[w - A] = \mathrm{ind}_A\partial D^*, \end{aligned}$$

trong đó $N_{f,A}(\widetilde{D})$ là số A-điểm của hàm f trong $\widetilde{D}$.

Ví dụ 1. (Định lý Gauss). Đa thức

$$P_n(z) = a_0z^n + A_1z^{n-1} + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_kz^{n-k}, \quad a_0 \neq 0$$

có n nghiệm (không-điểm) trên $\mathbb{C}$.

Vì $\lim\limits_{z\to\infty} P_n(z) = \infty$ nên mọi nghiệm của $P_n(z)$ đều nằm trong hình tròn $\{|z| < R\}$ với bán kính R đủ lớn. Ta ký hiệu số nghiệm đó là N_p. Khi đó theo định lý 4.4.3 ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} \frac{P_n'(z)dz}{P_n(z)} = N_p.$$

Mặt khác, dễ dàng thấy rằng với $|z|$ đủ lớn, thì

$$\begin{aligned} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} &= \frac{na_0z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}}{a_0z^n + \cdots + a_n} \\ &= \frac{n}{z}\Big[1 + \sum_{k\geqslant 1}\alpha_k \cdot z^{-k}\Big] = \frac{n}{z} + \frac{\mathrm{const}}{z^2}\cdot h(z), \end{aligned}$$

trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình ở ngoài hình tròn $|z| \geqslant R$ và $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 1$.

Do đó, nếu $\Gamma(\rho)$ là đường tròn $\{|z| = \rho\}$ thì ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\rho)} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \frac{n}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\rho)} \frac{dz}{z} + \frac{\text{const}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\rho)} \frac{h(z)}{z^2}dz.$$

Nhưng tích phân thứ hai ở vế phải dần đến 0 khi $\rho \to \infty$ nên

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\rho)} \frac{P_n'(z)dz}{P_n(z)} = n.$$

Như vậy $N_p = n$, tức là đa thức bậc n có đúng n nghiệm trong $\mathbb{C}$.

Định lý 4.4.1 và công thức (4.53) có thể khái quát cho hàm phân hình. Tuy nhiên trong trường hợp này, nó không cho ta số không-điểm nằm trong $\widetilde{D}$ mà chỉ cho hiệu

$$N_f(\widetilde{D}) - P_f(\widetilde{D})$$

giữa số $N_f(\widetilde{D})$ các không-điểm và số $P_f(\widetilde{D})$ các cực điểm của hàm f trong $\widetilde{D}$. Như vậy ta có

Định lý 4.4.2. *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong tập hợp mở D, $f \neq$ const với số không-điểm là N_f và số cực điểm P_f. Giả sử $\partial\widetilde{D}$ là biên có hướng của miền $\widetilde{D} \subset D$ sao cho*

$$\partial\widetilde{D} \subset D \setminus \{N \cup P\}$$

(N và P là tập các không-điểm và cực điểm của hàm f). Khi đó nếu $N_f(\widetilde{D})$ và $P_f(\widetilde{D})$ lần lượt là số không-điểm và cực điểm của hàm f trong $\widetilde{D}$ thì ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = N_f(\widetilde{D}) - P_f(\widetilde{D}), \tag{4.57}$$

trong đó mỗi không-điểm và mỗi cực điểm đều được tính một số lần bằng cấp của nó.

Trường hợp riêng, khi $f \in \mathcal{H}(D)$ thì vế phải của (4.57) bằng $N_f(\widetilde{D})$.

Chứng minh. Hiển nhiên rằng $N_f(\widetilde{D})$ và $P_f(\widetilde{D})$ là hữu hạn. Ta ký hiệu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các cực điểm của f nằm trong $\widetilde{D}$ với cấp tương ứng là $p(b_1), p(b_2), \ldots, p(b_n)$ và như vậy

$$P_f(\widetilde{D}) = \sum_{k=1}^{n} p(b_k).$$

Cũng như ở trên, lấy các không-điểm và cực điểm làm tâm ta dựng các hình tròn $S(a_j)$ và $S(b_j)$ đủ bé sao cho chúng ngoài nhau từng đôi một và cùng nằm trong $\widetilde{D}$.

Tương tự như trong chứng minh định lý 4.4.1 ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(a_j)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S(b_j)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{4.58}$$

Đối với các không-điểm quá trình lý luận được tiến hành như ở trên.

Ta xét các cực điểm. Đối với cực điểm b_j ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h(z)}{(z-b_j)^{p(b_j)}}\,; \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= -\frac{p(b_j)}{z-b_j} + \frac{h'(z)}{h(z)}\,, \end{aligned} \tag{4.59}$$

trong đó $h(z)$ chỉnh hình và không có không-điểm trong lân cận điểm b_j.

Thế (4.59) vào tích phân thứ hai ở vế phải (4.58) và áp dụng (4.55) ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}} \frac{f'(z)dz}{f(z)} &= \sum_{j=1}^{m} n(a_j) - \sum_{j=1}^{n} p(b_j) \\ &= N_f(\widetilde{D}) - P_f(\widetilde{D}). \end{aligned}$$

□

Định lý 4.4.3. (Nguyên lý acgumen)

Với các giả thiết của định lý 4.4.2 ta có

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\widetilde{D}}\arg f(z) = N_f(\widetilde{D}) - P_f(\widetilde{D}). \tag{4.60}$$

Nói rõ hơn: giả sử điểm z vòng quanh theo các tuyến đóng $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ của biên có hướng

$$\partial\widetilde{D} = \{\Gamma_i\}_{i\in I} \quad \textit{của miền } \widetilde{D}.$$

Khi đó điểm $w = f(z)$ sẽ vòng quanh theo các tuyến đóng xác định $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_n$. Tổng số vòng quay của điểm w theo các tuyến bao điểm $w = 0$ đó sẽ bằng hiệu giữa số 0-điểm và số cực điểm của hàm f trong miền $\widetilde{D}$.

4.4.2 Định lý Rouché

Sử dụng các kết quả trong tiết trước ta sẽ chứng minh định lý quan trọng sau đây gọi là định lý Rouché.

Định lý 4.4.4. (Rouché)

Giả sử $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm chỉnh hình trong miền D; Γ là biên có hướng của miền $\widetilde{D} \subset D$. Khi đó nếu $|f(z)| > |g(z)|$ khắp nơi trên $\Gamma = \partial\widetilde{D}$ thì:

a) *hàm $f + g$ không có không-điểm trên Γ;*

b) $N_f(\widetilde{D}) = N_{f+g}(\widetilde{D})$,

(tức là số không-điểm của hàm f trong miền $\widetilde{D}$ bằng số không-điểm của hàm $f + g$ trong $\widetilde{D}$).

Chứng minh. a) Điều khẳng định thứ nhất là hiển nhiên vì nếu $f(z)+g(z) = 0$ thì $|f(z)| = |g(z)|$ trên Γ.

b) Vì $|f(z)| > |g(z)| \geqslant 0 \Rightarrow f(z) \neq 0$ trên Γ. Theo định lý 4.4.1, số không-điểm của hàm $f(z) + g(z)$ trong $\widetilde{D}$ là

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)}dz,$$

vì $f(z) + g(z) \neq 0$ trên Γ.

Mặt khác, tích phân này có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}[\ln(f(z)+g(z))]dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}(\ln f)dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\Big(1+\frac{g}{f}\Big)dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)dz}{f(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d}{dz}\ln\Big[1+\frac{g(z)}{f(z)}\Big]dz \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ta xét hàm

$$\omega(z) = \frac{f(z)+g(z)}{f(z)}\cdot$$

Dễ dàng thấy rằng tích phân thứ hai ở vế phải của (*) bằng

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*}\frac{d\omega}{\omega},$$

trong đó Γ^* là ảnh của Γ qua ánh xạ $\omega = 1 + \dfrac{g}{f}$. Nhưng vì

$$\Big|\frac{g(z)}{f(z)}\Big| < 1,$$

nên Γ^* nằm trọn trong hình tròn $\{|\omega - 1| < 1\}$. Vì hình tròn này không chứa điểm $\omega = 0$ nên

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*}\frac{d\omega}{\omega} = 0.$$

Như vậy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

$\square$

Ví dụ 2. Tìm số không-điểm của hàm

$$\varphi(z) = z^9 - 6z^4 + 3z - 1$$

trong hình tròn $\{|z| < 1\}$.

Giải. Ta ký hiệu

$$f(z) = -6z^4; \quad g(z) = z^9 + 3z - 1$$

và do đó $f(z) + g(z) = \varphi(z)$.

Khi $|z| = 1$ ta có

$$\begin{aligned} &|f(z)|_{|z|=1} = 6; \\ &|g(z)|_{|z|=1} \leqslant (|z|^9 + 3|z| + 1)\big|_{|z|=1} = 5. \end{aligned}$$

Do đó $|f|_{\{|z|=1\}} > |g|_{\{|z|=1\}}$ và theo định lý Rouché số không-điểm của hàm φ trong hình tròn đơn vị là 4.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng *đa thức $P_n(z)$ bậc n trong ví dụ 1 (**4.3**) có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ (định lý Gauss).*

Giải. Ta đặt

$$\begin{aligned} &f(z) = a_0 z^n, \\ &g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Với $|z|$ đủ lớn, ta có

$$|f(z)| > |g(z)|.$$

Thật vậy, khi $|z| \geqslant 1$ ta có

$$\begin{aligned} |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n| &\leqslant |a_1||z|^{n-1} + \cdots + |a_n| \\ &\leqslant |z|^{n-1}(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) \end{aligned}$$

Đặt $M = \sum\limits_{m=1}^{n} |a_m|$. Khi đó $|z|^{n-1}M < |a_0 z^n|$ nếu $|z| > \dfrac{M}{|a_0|}$. Do đó

$$|a_0 z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$$

được thỏa mãn khi $|z| > R_0 = \max\left\{1, \dfrac{M}{|a_0|}\right\}$. Từ đó suy ra rằng đa thức $P_n(z) \neq 0$ khi $|z| > R_0$. Ta đặt

$$\Gamma(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R > R_0\}.$$

Hàm $f(z)$ và $g(z)$ $(f(z)+g(z) = P_n(z))$ thỏa mãn định lý Rouché trong hình tròn $\{|z| \leqslant R\}$. Do đó, số nghiệm của $P_n(z)$ trong $\mathbb{C}$ bằng số nghiệm của hàm f trong $\mathbb{C}$ và bằng bậc của đa thức đã cho.

Ví dụ 4. Tính số nghiệm của phương trình

$$0,9 \cdot e^{-z} + 1 = 2z$$

trong miền $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \mathrm{Re} z > 0\}$.

Giải. Ta đặt $f(z) = -2z + 1$, $g(z) = 0,9 \cdot e^{-z}$.

Khi $|z| = 1$, $x \geqslant 0$ ta có

$$|f(z)| \geqslant 2|z| - 1 = 1,$$
$$|g(z)| = 0,9 \cdot e^{-x} \leqslant 0,9.$$

Khi $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ ta có

$$|f(z)| = \sqrt{1 + 4y^2} \geqslant 1;$$
$$|g(z)| = 0,9.$$

Như vậy

$$|f(z)|_{\partial D} > |g(z)|_{\partial D}.$$

Vì trong miền D hàm f có một không-điểm là $z_0 = \dfrac{1}{2}$ nên theo định lý Rouché phương trình đã cho có một nghiệm trong D.

4.4.3 Tính bất biến của tập hợp mở

Định lý 4.4.5. *Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình, không đồng nhất bằng hằng số trong tập hợp mở $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó ảnh $D^* = f(D)$ cũng là tập hợp mở trong $\mathbb{C}$.*

Chứng minh. Giả sử w_0 là điểm tùy ý thuộc D^* và z_0 là một trong các nghịch ảnh của nó trong D. Vì D là tập hợp mở nên tồn tại hình tròn

$$S = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\Big\} \subset D.$$

Bằng cách giảm bán kính δ trong trường hợp cần thiết, ta có thể cho rằng hình tròn

$$\overline{S} = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant \delta\Big\}$$

không chứa các w_0-điểm khác ngoài điểm z_0 (vì $f \not\equiv \text{const}$ nên theo định lý duy nhất, mọi w_0-điểm đều cô lập). Giả sử

$$\alpha = \min_{z \in \partial S} |f(z) - w_0|. \tag{4.61}$$

Hiển nhiên rằng $\alpha > 0$. Thật vậy, vì hàm $f(z) - w_0$ liên tục nên $|f(z) - w_0|$ đạt cực đại trên ∂S. Do đó, nếu $\alpha = 0$ thì trên ∂S tồn tại w_0-điểm của hàm f. Điều đó trái với cách xây dựng hình tròn S.

Bây giờ ta cần chứng minh rằng

$$S^* = \{|w - w_0| < \alpha\} \subset D^*.$$

Giả sử w_1 là điểm tùy ý của hình tròn S^*, tức là

$$|w_1 - w_0| < \alpha. \tag{4.62}$$

Ta xét biểu thức

$$f - w_1 = (f - w_0) + (w_0 - w_1). \tag{4.63}$$

Từ (4.61) ta có

$$|f(z) - w_0| \geqslant \alpha; \forall\, z \in \partial S \tag{4.64}$$

và do đó, từ (4.62) - (4.64) ta thu được

$$|f(z) - w_1| \geqslant |f(z) - w_0| - |w_0 - w_1| > 0, \quad \forall\, z \in \partial S.$$

Như vậy hai hàm $f(z) - w_0$ và $w_1 - w_0$ thỏa mãn điều kiện định lý Rouché. Do đó trong hình tròn S hàm $f(z) - w_1$ có số không-điểm bằng số không-điểm của hàm $f(z) - w_0$, tức là có ít nhất một không-điểm, (điểm $z = z_0$ có thể là không-điểm bội của hàm $f(z) - w_0$). Như vậy, trong ∂S hàm f nhận giá trị w_1 và do đó $w_1 \in D^*$. Vì w_1 là điểm tùy ý, nên $S^* \subset D^*$.

Tính mở của D^* được chứng minh. □

Định lý 4.4.6. (Nguyên lý bảo toàn miền)

Giả sử D là miền thuộc $\mathbb{C}$ và $f \in \mathcal{H}(D)$, $f \not\equiv \text{const}$. Khi đó ảnh $D^* = f(D)$ là một miền trong $\mathbb{C}$.

Chứng minh. Tập hợp D^* là tập hợp mở theo định lý 4.4.5. Ta cần chứng minh D^* liên thông. Giả sử w_1 và w_2 là những điểm tùy ý của D^* và z_1 là một trong các nghịch ảnh của w_1, z_2 là một trong các nghịch ảnh của w_2 qua ánh xạ $f : f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$; $z_1, z_2 \in D$. Vì D liên thông nên tồn tại đường cong Jordan $\gamma \subset D$ nối z_1 với z_2. Giả sử γ có phương trình $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Khi đó $\forall\, t \in [\alpha, \beta]$ hàm $\gamma(t) \subset D$ và $\gamma(\alpha) = z_1$, $\gamma(\beta) = z_2$. Vì hàm f liên tục nên $\psi = f \circ \gamma$ là biểu diễn tham số của đường cong liên tục $\gamma^* \subset D^*$ nối w_1 với w_2: $\psi(\alpha) = (f \circ \gamma)(\alpha) = f(z_1) = w_1$, $\psi(\beta) = (f \circ \gamma)(\beta) = f(z_2) = w_2$. Do vậy D^* là tập liên thông. Do đó D^* là miền. □

4.5 Bài tập

1. Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z : |z| < 1\}$ và $|f(z)| < 1\ \forall\, z \in D$ thì

$$\Big|\frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)}\Big| \leqslant \Big|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\Big|; \quad z_0, z \in D \tag{*}$$

Chỉ dẫn. Áp dụng Bổ đề Schwarz.

2. Chứng minh rằng nếu $F \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z : |z| < R\}$ và $|F(z)| \leqslant M$ $\forall\, z \in D$ thì

$$\Big|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}\Big| \leqslant \frac{2MR}{|R^2 - \overline{z}_0 z|}, \quad \forall\, z_0, z \in D.$$

Chỉ dẫn. Áp dụng (*) cho hàm $f(z) = \dfrac{F(Rz)}{M}$.

3. Chứng minh rằng

$$\Big|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\Big| \geqslant \frac{|a|-|b|}{1-|a||b|}, \quad \forall\, a, b \in \{z : |z| < 1\}.$$

4. Chứng minh rằng nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình và $|f(z)| < 1$ trong hình tròn đơn vị thì

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |f(0)||z|}\cdot$$

Chỉ dẫn. Áp dụng 3 và 1.

5. Tìm những tập hợp điểm mà trên đó các chuỗi sau đây hội tụ đều:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 z}{n^2}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\Big\{z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}}\Big\}$.

Chứng tỏ rằng trên các tập đó hai chuỗi nói trên không cho phép lấy đạo hàm từng số hạng. Hãy giải thích tại sao điều đó không mâu thuẫn với định lý Weierstrass?

6. Giả sử phần ảo của hàm nguyên $f(z)$ bị chặn bởi hằng số M trên toàn mặt phẳng. Chứng minh rằng khi đó hàm f là hằng số.

Chỉ dẫn. đặt $\varphi(z) = e^{-if(z)}$ và xét $|\varphi(z)|$.

7. Hãy xác định xem có tồn tại hay không hàm chỉnh hình tại điểm $z = 0$ và tại các điểm $z_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ nó nhận giá trị

$$1) \qquad f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 1,\\ \dfrac{1}{2n} & \text{khi } n \neq 1; \end{cases}$$

$$2) \qquad f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2n}\cos^2\frac{n\pi}{2}\cdot$$

Trả lời. 1) Tồn tại, $f(z) = \begin{cases} z/2 & \text{khi } z \neq 1, \\ 0 & \text{khi } z = 1; \end{cases}$

2) Không tồn tại

8. Hãy xét xem trong hình tròn đơn vị có tồn tại hay không hàm chỉnh hình mà

$$1) \qquad f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{n}{n+1}\,, \quad n = 2, 3, \dots;$$

$$2) \qquad f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}\,, & n \neq 1, \\ 0, & n = 1. \end{cases}$$

Trả lời. 1) Tồn tại, $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$;

2) Không tồn tại.

9. Giả sử a là điểm bất thường cốt yếu của hàm f. Hãy xét xem a là điểm bất thường loại nào đối với $\dfrac{1}{f(z)}$?

Trả lời. Điểm giới hạn của các cực điểm hoặc điểm bất thường cốt yếu.

10. Giả sử z_0 là cực điểm cấp m của $f(z)$. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số dương ε, A, B sao cho $\forall\, z \in \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ ta có:

$$\frac{A}{|z - z_0|^m} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{B}{|z - z_0|^m}\,.$$

11. Hãy chứng minh định lý Liouville bằng cách tính tích phân

$$\int\limits_{\mathcal{L}(R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz, \quad \mathcal{L}(R) = \{z : |z| = R\},\ |a| < R,\ |b| < R$$

và ước lượng tích phân ấy khi $R \to \infty$.

Chỉ dẫn. Hãy chứng minh rằng tích phân I bằng

$$I = 2\pi i\Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big).$$

12. Xác định số nghiệm của đa thức $P(z) = z^5 - 12z^2 + 14$:

1^+ trong vành tròn $\mathcal{V}_1 = \{z : 0 < |z| < 2\}$;

2^+ trong vành tròn $\mathcal{V}_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

3^+ trong nửa mặt phẳng bên phải.

Trả lời. 1^+ $N_{\mathcal{V}_1}(f) = 5$; 2^+ $N_{\mathcal{V}_2}(f) = 2$; 3^+ $N(f) = 2$.

13. Hãy xác định các nghiệm của đa thức

$$P(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$$

nằm trong những góc phần tư nào của mặt phẳng phức

Trả lời. Trong gốc phần tư thứ II và thứ III.

14. Chứng minh rằng nếu $P(z)$ là đa thức bậc n thì đường mức $\mathcal{L}_R = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| = R\}$ (đường lemniscate) có thể phân rã thành không quá n thành phần liên thông.

Chỉ dẫn. Áp dụng nguyên lý môđun cực đại.

Chương 5

Hàm đa trị và diện Riemann

5.1 Phương pháp thác triển của Weierstrass 370

5.1.1 Phần tử chính tắc 371

5.1.2 Điểm bất thường của phần tử chính tắc 372

5.1.3 Phương pháp thác triển của Weierstrass 373

5.1.4 Hàm không cho phép thác triển giải tích 378

5.2 Các phương pháp khác 380

5.2.1 Thác triển giải tích theo tuyến 380

5.2.2 Thác triển đối xứng 386

5.3 Hàm giải tích đủ 391

5.3.1 Khái niệm hàm giải tích đủ 391

5.3.2 Một vài ví dụ 393

5.3.3 Tính đơn trị và đa trị. Định lý đơn trị (monodromie) 396

5.3.4 Nhánh và phương pháp tách nhánh chỉnh hình . . 399

5.3.5 Khái niệm về điểm bất thường 405

5.4 Khái niệm về diện Riemann 412

5.4.1 Một số ví dụ mở đầu 413

5.4.2 Phương pháp dựng diện Riemann 419

5.5 Bài tập 420

Trong các chương trước ta đã xét các hàm chỉnh hình trong miền cho trước và đã không quan tâm đến bản chất của hàm ở ngoài miền đó. Sự khảo sát có tính chất "địa phương" đó là cần thiết để có sự khảo sát các hàm một cách toàn cục - tức là khảo sát hàm trong miền tồn tại nói chung của nó.

Nguyên nhân chung trong sự xuất hiện tính đa trị của thác triển giải tích một hàm chỉnh hình từ một miền cho trước ra miền rộng hơn là ở chỗ: các điểm của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ không phải là một tập hợp được sắp thứ tự, trong khi phép thác triển chỉ có thể đơn trị trong trường hợp khi ta có một thứ tự cố định giữa các điểm mà trên đó quá trình thác triển giải tích được diễn ra.

Một điều cũng cần nhấn mạnh là trong lý thuyết hàm người ta không được phép loại trừ các hàm đa trị vì ngay các hàm ngược của những hàm đơn trị giản đơn nhất cũng đã có thể là không đơn trị. Do đó vấn đề cơ bản là cần xây dựng một quan điểm không mâu thuẫn, cân đối và logic đối với các hàm đa trị.

5.1 Phương pháp thác triển của Weierstrass

Trong lý thuyết Weierstrass, đầu tiên hàm chỉ được xác định ở trong hình tròn hội tụ của chuỗi luỹ thừa đầu tiên. Sau đó, hàm được xác định bởi các giá trị cho bởi chuỗi đó và mọi thác triển của nó.

Trong mục này ta sẽ trình bày một cách ngắn gọn quá trình thác triển giải tích theo Weierstrass hay còn gọi là *phương pháp chuẩn* của thác triển.

5.1.1 Phần tử chính tắc

Giả sử miền D trong định nghĩa 13.1 là một hình tròn. Nếu tâm a của hình tròn thuộc $\mathbb{C}$ (hữu hạn!) thì hình tròn đó có dạng

$$S(a) = \{|z - a| < R_a, R_a \leqslant \infty\}.$$

Nếu $a = \infty$ thì $S(a) = \{|z| > R_a, R_a \geqslant 0\}$. Khi đó trong hình tròn $S(a)$ hàm f có thể biểu diễn dưới dạng

$$f_a(z) = \begin{cases} \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n, & z \in \{|z-a| < R_a\}; \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{-n}, & z \in \{|z| > R_a\}. \end{cases}$$

Định nghĩa 5.1.1. Cặp $P_a = (S(a); f_a(z))$, trong đó $f_a(z)$ là tổng của chuỗi luỹ thừa với tâm tại điểm a và $S(a)$ là hình tròn hội tụ của nó được gọi là một *phần tử chính tắc* với tâm tại a và $S(a)$ được gọi là hình tròn hội tụ của P_a.

Đối với các phần tử chính tắc việc định nghĩa thác triển giải tích trực tiếp và thác triển giải tích có phần đơn giản hơn vì các hình tròn hội tụ giao nhau theo một tập hợp liên thông và do đó không cần thiết phải chỉ rõ phép thác triển giải tích được tiến hành qua thành phần liên thông nào của giao. Ta có

Định nghĩa 5.1.2. Giả sử $S(a_1), S(a_2), \dots, S(a_n)$ là dãy hữu hạn các hình tròn thuộc $\mathbb{C}$ sao cho tâm a_{i+1} của hình tròn $S(a_{i+1})$ nằm trong hình tròn $S(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Dãy hình tròn ấy được gọi là *một xích.* Nếu $f_{a_i}(z)$ là phần tử chính tắc với hình tròn hội tụ $S(a_i)$ và $f_{a_{i+1}}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của f_{a_i}, $i = 1, 2, \dots, n-1$ thì ta nói rằng f_{a_1} được *thác triển giải tích theo xích các hình tròn.*

Từ đó ta rút ra là: phần tử chính tắc $f_b(z)$ là thác triển giải tích của phần tử chính tắc $f_a(z)$ nếu

a) hoặc $f_b(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_a(z)$;

b) hoặc $f_b(z)$ là khâu cuối cùng của một xích hữu hạn các phần tử

$$f_a(z) = f_{a_1}(z), f_{a_2}(z), \ldots, f_{a_n}(z) = f_b(z),$$

trong đó mỗi chuỗi $f_{a_j}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_{a_{j-1}}(z)$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Dễ dàng thấy rằng quan hệ thác triển giải tích giữa các phần tử chính tắc có các tính chất:

1. *tính phản xạ*: mỗi phần tử chính tắc là thác triển giải tích của chính nó;

2. *tính đối xứng*: nếu phần tử chính tắc $f_b(z)$ là thác triển giải tích của phần tử $f_a(z)$ thì phần tử $f_a(z)$ là thác triển giải tích của phần tử $f_b(z)$;

3. *tính bắc cầu*: Nếu phần tử $f_b(z)$ là thác triển giải tích của phần tử $f_a(z)$, phần tử $f_c(z)$ là thác triển giải tích của $f_b(z)$ thì $f_c(z)$ là thác triển giải tích của $f_a(z)$.

5.1.2 Điểm bất thường của phần tử chính tắc

Giả sử $f_a(z)$ là phần tử chính tắc với tâm a và bán kính hội tụ R_a. Ta xét điểm s nào đó trên biên $\gamma(R_a) = \{|z-a| = R_a\}$ của hình tròn hội tụ của $f_a(z)$. Các điểm của $\gamma(R_a) = \gamma(R)$ có thể chia thành hai lớp.

1. Tại điểm s đã cho của đường tròn $\gamma(R)$ tồn tại phần tử chính tắc $f_s(z)$ là thác triển trực tiếp của $f_a(z)$. Những điểm này được gọi là những *điểm chính quy* của $f_a(z)$.

2. Phần tử như thế không tồn tại. Những điểm này được gọi là những *điểm bất thường* của phần tử chính tắc $f_a(z)$.

Từ định nghĩa điểm chính quy suy ra rằng: nếu $z_0 \in \gamma(R_a)$ là điểm chính quy thì mọi điểm của cung $\delta \ni z_0$ nào đó đều là điểm chính quy. Do đó, nếu tồn tại một điểm chính quy thì sẽ tồn tại vô số điểm chính quy. Ngược lại với điều này, điểm bất thường có thể là duy nhất.

Vì biên $\gamma(R_a)$ là đóng nên các điểm bất thường của một phần tử chính tắc lập thành một tập hợp đóng. Nói cách khác, điểm giới hạn của các điểm bất thường cũng là điểm bất thường.

Về điểm bất thường của phần tử chính tắc ta có

Định lý 5.1.1. *Trên biên $\gamma(R_a) = \{|z-a| = R_a\}$ của hình tròn hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f_a(z)$ có ít nhất một điểm bất thường của phần tử chính tắc.*

Chứng minh. Giả sử trên $\gamma(R_a)$ không tồn tại một điểm bất thường nào của phần tử chính tắc. Khi đó hàm này có thể thác triển giải tích đến mọi điểm nằm trên $\gamma(R_a)$. Kết quả của thác triển giải tích được ký hiệu là $\varphi(z)$. Như vậy $\varphi(z) \equiv f_a(z)$, $z \in S(a)$. Theo định nghĩa thác triển giải tích, đối với mỗi điểm $\zeta \in \gamma(R_a)$ đều tồn tại hình tròn $S(\zeta)$ với tâm tại ζ mà trong đó $\varphi(z)$ chỉnh hình.

Như vậy đường tròn $\gamma(R_a)$ được phủ bởi vô số hình tròn với tâm nằm trên $\gamma(R_a)$.

Theo bổ đề Heine - Borel, từ phủ vô hạn đó có thể trích một phủ con hữu hạn, nghĩa là tồn tại hệ các hình tròn $S(\zeta_j)$ $j = 1, 2, \ldots, n$; $\zeta_j \in \gamma(R_a)$ phủ $\gamma(R_a)$. Giả sử z_j là một điểm của giao hai hình tròn kề nhau $S(\zeta_j)$ và $S(\zeta_{j+1})$ $(j = 1, 2, \ldots, n$; $S(\zeta_{n+1}) \equiv S(\zeta_1))$ nằm ngoài $S(a)$. Ta đặt $R = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j - a|$. Khi đó hàm $\varphi(z)$ trùng với $f_a(z)$ trong $S(a)$ và chỉnh hình trong hình tròn lớn hơn $S_0(a) = \{|z-a| < R, R > R_a\}$. Từ đó suy ra rằng hàm $f_a(z)$ biểu diễn chuỗi luỹ thừa hội tụ trong hình tròn $S_0(a)$ với bán kính hội tụ $R > R_a$. Nhưng điều này không thể xảy ra. □

Ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 5.1.1. *Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f_a(z)$ bằng khoảng cách từ tâm a đến điểm bất thường gần nhất của phần tử chính tắc.*

Trong nhiều trường hợp, điều khẳng định này cho phép ta tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa một cách rất có hiệu lực mà không sử dụng công thức Cauchy - Hadamard.

5.1.3 Phương pháp thác triển của Weierstrass

Phương pháp thác triển giải tích của Weierstrass dựa trên việc áp dụng một cách có hệ thống chuỗi Taylor. Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D thì nó có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận của mỗi điểm $z_0 \in D$ với bán kính hội tụ R_0 không bé hơn khoảng cách ngắn nhất δ_0 từ z_0 đến biên ∂D. Nếu bán kính hội tụ lớn hơn khoảng cách ngắn nhất đó thì chuỗi vừa thu được sẽ xác định hàm chỉnh hình trong phần hình tròn nằm ngoài miền D và trùng với $f(z)$ trong hình tròn $\{|z - z_0| < \delta_0\}$. Do đó chuỗi vừa thu được cho ta thác triển hàm vào hình tròn $|z - z_0| < R_0\}$ (xem định lý 13.5)

Như vậy, về sau ta chỉ cần xét các khai triển Taylor và dùng các khai triển đó để thực hiện thác triển giải tích.

Nội dung của phương pháp Weierstrass là như sau. Giả sử ta bắt đầu từ chuỗi luỹ thừa

$$f_{a_1}(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - a_1)^n \tag{5.1}$$

có bán kính hội tụ hữu hạn $R_{a_1} > 0$. Chuỗi đó sẽ xác định hàm $f_{a_1}(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $S(a_1) = \{|z - a_1| < R_{a_1}\}$. Nếu ta lấy điểm a_2 với mođun bé hơn R_{a_1}, thì dễ dàng thấy rằng các giá trị $f_{a_1}(a_2)$, $f'_{a_1}(a_2), \dots, d^{(p)}_{a_1}(a_2)$ được tính (về mặt lý thuyết) theo các công thức

$$f^{(p)}_{a_1}(a_2) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n(a_2 - a_1)^{n-p}.$$

Do đó ta có thể xét chuỗi Taylor

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}_{a_1}(a_2)}{p!}(z - a_2)^p; \quad (0! = 1). \tag{5.2}$$

Ta nhận xét rằng việc khai triển hàm $f_{a_1}(z)$ thành chuỗi theo các luỹ thừa của $(z - a_2)$ có thể tiến hành một cách nhanh chóng bằng cách dựa vào hệ thức

$$\begin{aligned}(z - a)^n &= [(z - a_2) + (a_2 - a_1)]^n \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} C^k_n (a_2 - a_1)^{n-k}(z - a_2)^k\end{aligned}$$

và nhóm các từ của chuỗi thu được sau khi thế biểu thức vừa viết vào (5.1).

Giả sử chuỗi (5.2) hội tụ trong hình tròn

$$S(a_2) = \{|z - a_2| < R_{a_2}, R_{a_2} \geqslant R_{a_1} - |a_2 - a_1|\}.$$

Nếu $R_{a_2} = R_{a_1} - |a_2 - a_1|$ thì hình tròn $S(a_2)$ tiếp xúc trong với hình tròn $S(a_1)$. Trong trường hợp này ta không thu được thác triển giải tích.

Giả sử $R_{a_2} > R_{a_1} - |a_2 - a_1|$. Khi đó hình tròn $S(a_2)$ vượt ra khỏi giới hạn của hình tròn $S(a_1)$. Trong hình tròn $S(a_2)$ chuỗi (5.2) xác định hàm $f_{a_2}(z)$ chỉnh hình trong $S(a_2)$ và

$$f_{a_1}(z) \equiv f_{a_2}(z), \quad z \in S(a_1) \cap S(a_2).$$

Do đó $f_{a_2}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_{a_1}(z)$ từ hình tròn $S(a_1)$ vào hình tròn $S(a_2)$.

Như vậy, trong miền $S(a_1) \cup S(a_2)$ ta thu được hàm chỉnh hình

$$f(z) = \begin{cases} f_{a_1}(z), & z \in S(a_1), \\ f_{a_2}(z), & z \in S(a_2). \end{cases}$$

Nói cách khác: hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền giới hạn bởi các cung tròn AmB và AnB (hình V.1). Từ đó ta cũng thấy rằng nếu $z = a_3$ thuộc hình quạt Aa_1B của $S(a_1)$ thì bán kính hội tụ của mỗi chuỗi Taylor biểu diễn hàm $f(z)$ tại điểm a_3 sẽ không bé hơn khoảng cách từ điểm a_3 đến biên của miền $AmBnA$ và lớn hơn $R_{a_1} - |a_3|$, và mỗi điểm của hình quạt Aa_1B đều cho phép thác triển giải tích hàm $f(z)$ ra khỏi giới hạn của $S(a_1)$. Do đó, nếu đối với a_2 nào đó miền $R_{a_2} = R_{a_1} - |a_2|$ thì ta không thể thác triển giải tích bằng cách xuất phát từ các điểm nằm trên bán kính a_1H đi qua điểm a_2, trong đó H là điểm cuối của bán kính hình tròn $S(a_1)$. Trong trường hợp này, điểm H là điểm bất thường của $f_{a_1}(z)$.

Hình V.1

Vì trên biên của hình tròn hội tụ của chuỗi luỹ thừa có ít nhất một điểm bất thường nên các điểm bất thường có thể rơi vào A hoặc B. Cũng có thể xảy ra trường hợp mọi điểm của $AmBnA$ đều là điểm bất thường đối với $f(z)$, khi đó $f(z)$ không thể thác triển rộng hơn nữa. Giả sử rằng không phải mọi điểm của $AmBnA$ đều là điểm bất thường. Khi đó tìm được điểm a_3 và chuỗi

$$\sum_{q\geqslant 0} \frac{f^{(q)}(a_3)}{q!}(z-a_3)^q$$

với hình tròn hội tụ $S(a_3)$ vượt ra khỏi giới hạn $AmBnA$. Trong phần hình tròn $S(a_3)$ nằm ngoài $AmBnA$ ta sẽ thu được một thác triển mới của $f(z)$ mà không cần phân biệt a_3 thuộc $S(a_1)$ hay $S(a_2)$. Như vậy ta thu được hàm chỉnh hình

$$f(z) = \begin{cases} f_{a_1}(z), & z \in S(a_1),\\ f_{a_2}(z), & z \in S(a_2),\\ f_{a_3}(z), & z \in S(a_3). \end{cases}$$

Sau khi bước thứ hai này đã hoàn thành ta chuyển sang bước thứ ba, thứ tư,...

Giả sử tồn tại một dãy các phần tử chính tắc

$$f_{a_1}(z), f_{a_2}(z), f_{a_3}(z), \dots, f_{a_n}(z);$$

sao cho chuỗi $f_{a_j}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_{a_{j-1}}(z)$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Khi đó phần tử chính tắc $f_{a_n}(z)$ là thác triển giải tích của phần tử chính tắc $f_{a_1}(z)$ dọc theo dây xích các hình tròn $S(a_1), S(a_2), \dots, S(a_n)$.

Thuật toán đã nêu trên đây để thác triển giải tích có thể tiến hành vô hạn nếu ta chọn tâm của các khai triển Taylor là những điểm chính quy ngày càng mới đối với các phần tử chính tắc đã thu được.

Ta nhận xét rằng vì hai phần tử chính tắc $f_{a_j}(z)$ và $f_{a_{j-1}}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của nhau nên

$$\partial S(a_j) \cap \partial S(a_{j-1}) \neq \emptyset.$$

Thật vậy, nếu $S(a_j) \subset S(a_{j-1})$ thì $f_{a_j}(z)$ là hàm chỉnh hình trong hình tròn tâm a_j bán kính lớn hơn bán kính R_{a_j}. Do đó hình tròn $S(a_j)$ không còn là hình tròn hội tụ của $f_{a_j}(z)$ nữa.

Ví dụ 1. Giả sử hàm đầu tiên $f_1(z)$ được cho trong hình tròn $S(0) = \{|z| < 1\}$ bởi chuỗi

$$f_1(z) = \sum_{n \geqslant 0} z^n.$$

Hiển nhiên tổng $f_1(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

Ta chọn điểm $z_0 \neq 0$ tùy ý trong hình tròn $S(0)$ và khai triển hàm $f_1(z)$ theo luỹ thừa $(z - z_0)^n$. Dễ dàng thấy rằng khai triển Taylor của $f_1(z)$ tại lân cận z_0 có dạng

$$f_2(z) = \sum a_n^1 (z - z_0)^n, \quad a_n^1 = \frac{f_1^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{(1 - z_0)^{n+1}} \cdot$$

Do đó

$$f_2(z) = \sum \frac{(z - z_0)^n}{(1 - z_0)^{n+1}} \cdot$$

Dễ dàng kiểm tra rằng bán kính hội tụ R_0 của chuỗi này bằng $|1 - z_0|$. Nếu điểm z_0 không nằm trên đoạn $[0, 1]$ thì $R_0 = |1 - z_0| > 1 - |z_0|$, nghĩa là R_0 lớn hơn khoảng cách từ z_0 đến đường tròn $\partial S(0)$. Do đó, hình tròn hội tụ $S(z_0) = \{|z - z_0| < R_0\}$ vượt ra khỏi giới hạn của đường tròn $\partial S(0)$. Trong hình tròn $S(z_0)$ chuỗi trên đây xác định hàm chỉnh hình $f_2(z) = \dfrac{1}{1-z}$ và

$$f_2(z) = f_1(z), \quad z \in S(0) \cap S(z_0).$$

Như vậy $f_2(z)$ là thác triển giải tích của f_1 từ $S(0)$ vào $S(z_0)$. Vì $R_0 = |1 - z_0|$ bằng khoảng cách từ điểm 1 đến điểm z_0 nên với mọi vị trí của z_0 trong $S(0)$ biên $\partial S(z_0)$ đều phải đi qua điểm $z = 1$.

Bây giờ ta lấy điểm $z_1 \neq z_0$, $z_1 \in \{|z - z_0| < |1 - z_0|\}$ làm tâm và lại thu được khai triển

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(z - z_1)^n}{1 - z_1)^{n+1}}$$

hội tụ trong hình tròn $S(z_1) = \{|z - z_1| < |1 - z_1|\}$ đến hàm $f_3(z) = \dfrac{1}{1-z}$ trùng với hàm f_1 và f_2 trong các phần chung của $S(z_1)$ với miền xác định của hàm f_1 và f_2. Do đó $f_3(z)$ là thác triển giải tích của f_1 ra miền $S(z_1) = \{|z - z_1|, |1 - z_1|\}$. Với mọi vị trí của điểm z_1 biên của hình tròn $S(z_1)$ đều phải đi qua điểm $z = 1$.

Bằng cách lặp lại quá trình đó, ta thu được thác triển giải tích hàm $f_1(z)$ ra toàn mặt phẳng trừ điểm $z = 1$. Như vậy hàm

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

là thác triển giải tích của $f_1(z)$ từ hình tròn đơn vị ra miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$.

Nhận xét 5.1.1. 1. Về mặt lý thuyết, phương pháp thác triển của Wreierstrass tiện lợi trong mọi trường hợp. Nhưng trong các bài toán cụ thể, việc áp dụng phương pháp đó gặp rất nhiều khó khăn bởi tính phức tạp của nó.

2. Quá trình thác triển giải tích được trình bày trên đây là cơ sở của lý thuyết hàm số được Weierstrass đưa ra, trong đó Weierstrass đã lấy chuỗi luỹ thừa làm nền tảng để định nghĩa hàm giải tích mà ta sẽ trình bày trong mục sau.

5.1.4 Hàm không cho phép thác triển giải tích

Tuy phần lớn các chuỗi luỹ thừa thông thường đều cho phép thác triển giải tích ra khỏi giới hạn của hình tròn hội tụ đầu tiên nhờ các chuỗi Taylor, nhưng không nên nghĩ rằng đối với mọi chuỗi luỹ thừa phép thác triển giải tích đều luôn luôn thực hiện được. Weierstrass, người đầu tiên đưa ra định nghĩa thác triển giải tích, đã chứng tỏ bằng ví dụ rằng tồn tại những phần tử chính tắc mà *mọi điểm biên của hình tròn hội tụ đều là điểm bất thường*, nghĩa là biên của hình tròn hội tụ là một *đường bất thường*.

Ta xét chuỗi

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^6 + \cdots + z^{n!} + \ldots \tag{5.3}$$

Dễ dàng thấy rằng bán kính hội tụ của chuỗi (5.3) là bằng 1. Do đó trên đường tròn đơn vị có ít nhất một điểm bất thường của hàm $f(z)$.

Nếu dần đến điểm $z = 1$ từ phía trong thì mỗi số hạng của chuỗi (5.3) đều dần đến 1, còn tổng của nó thì dần đến ∞. Từ đó suy rằng $z = 1$ là điểm bất thường của (z).

Trên mỗi cung bé tùy ý của đường tròn $\{|z| = 1\}$ đều tồn tại những điểm có acgumen bằng 2π nhân với một số hữu tỷ nào đó. Ta đặt

$$z = re^{2\pi i \frac{m}{n}}, \quad r < 1$$

$m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$z^{n!} = r^{n!} e^{2\pi i m(n-1)!} = r^{n!}$$

$$z^{(n+1)!} = (z^{n!})^{n+1} = (r^{n!})^{n+1} = r^{(n+1)!}, \dots$$

Từ đó có thể viết chuỗi (5.3) dưới dạng

$$f(z) = (1 + z + z^2 + \cdots + z^{(n-1)!}) + r^{n!} + r^{(n+1)!} + \dots$$

Khi $r \to 1$, biểu thức trong dấu ngoặc

$$1 + z + \cdots + z^{(n-1)!}$$

dần đến một giới hạn nào đó, còn phần dư dần đến ∞. Điều đó chứng tỏ rằng các điểm dạng $z = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ đều là điểm bất thường của hàm $f(z)$. Vì tập hợp các điểm $z = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ lập nên tập hợp trù mật khắp nơi trên đường tròn $\{|z| = 1\}$ và vì tập hợp các điểm bất thường là đóng nên mọi điểm thuộc đường tròn đơn vị đều là điểm bất thường của hàm $f(z)$.

Trong trường hợp này hàm $f(z)$ hoàn toàn không thể thác triển đến điểm z nằm ngoài đường tròn $\{|z| = 1\}$ và một hàm như vậy được gọi là hàm không thác triển được, còn đường tròn $\{|z| = 1\}$ được gọi là *biên tự nhiên* của hàm.

5.2 Các phương pháp khác

Nếu thác triển giải tích của một hàm tồn tại thì thác triển đó có thể xây dựng bởi một xích các miền tròn như đã mô tả trong mục trước. Nhưng khái niệm này còn chưa hoàn toàn tiện lợi để thu được một biểu tượng rõ ràng về đặc tính đa trị xuất hiện trong thác triển giải tích. Khái niệm có hiệu lực nhất để đạt được mục đích đó là khái niệm thác triển giải tích theo tuyến.

5.2.1 Thác triển giải tích theo tuyến

Không hạn chế tổng quát, ta có thể giả thiết rằng mọi tuyến đang xét đều được tham số hóa trên đoạn $I = [0, 1]$.

Thác triển giải tích theo tuyến được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 5.2.1. Giả sử cho tuyến

$$\gamma : I \to \mathbb{C}$$

với điểm đầu $a = \gamma(0)$ và điểm cuối $b = \gamma(1)$, và phần tử chính tắc

$$f_*(z) = f_{\gamma(0)}(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - \gamma(0))^n$$

với tâm $\gamma(0) = a$ tại điểm đầu của tuyến γ. Ta nói rằng phần tử chính tắc f_0 *thác triển giải tích được theo tuyến* nếu

1. tồn tại họ các phần tử chính tắc

$$f_t(\gamma) = f_{\gamma(t)}(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z - \gamma(t))^n, \quad t \in I$$

với tâm tại điểm $a_t = \gamma(t)$ và bán kính hội tụ $R_t = R(\gamma(t)) \neq 0$ (nghĩa là mỗi giá trị $t \in I$ đều tương ứng với phần tử chính tắc f_t);

2. nếu $u(t_0) \subset [0, 1]$ là lân cận liên thông của điểm $t_0 \in I$ mà

$$\gamma(t) \subset S[\gamma(t_0)] = \{|z - \gamma(t_0)| < R_{t_0}\}, \quad \forall\, t \in u(t_0)$$

thì với $t \in u(t_0)$ bất kỳ, phần tử chính tắc f_t là thác triển giải tích trực tiếp của f_{t_0}.

Trong trường hợp f_0 thác triển được theo tuyến thì ta nói rằng phần tử chính tắc $f_1 = f_{\gamma(1)}$ của họ trên (với tâm tại điểm cuối $b = \gamma(1)$ của tuyến) thu được từ f_0 bằng thác triển giải tích theo γ. Ngược lại, phần tử chính tắc f_0 thu được từ f_1 bằng thác triển giải tích theo tuyến γ^-.

Thác triển giải tích theo tuyến có thể xem như trường hợp giới hạn của thác triển giải tích theo một xích miền: thay cho xích hữu hạn các miền và hàm chỉnh hình trong các miền tương ứng đó, ta sẽ lấy một họ liên tục các hàm và miền. Về sau ta sẽ thấy rằng thác triển giải tích theo tuyến luôn luôn có thể đưa về thác triển giải tích theo một xích các hình tròn.

Bây giờ ta chuyển sang xét một số tính chất của thác triển giải tích theo tuyến.

Định lý 5.2.1. *Bán kính hội tụ $R(a)$ của chuỗi $f_a(z)$ hoặc đồng nhất bằng vô cùng, hoặc là hàm liên tục của tâm a.*

Chứng minh. Giả sử $R(a) < \infty$ đối với t_0 nào đó, $a_0 = \gamma(t_0)$. Ta lấy t_1 sao cho điểm $\gamma(t_1)$ nằm trong hình tròn hội tụ của phần tử chính tắc $f_{t_0}(z)$ và

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| < \frac{R(a_0)}{2}\cdot$$

Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi $f_{t_1}(z)$ không bé hơn khoảng cách từ $\gamma(t_1)$ đến biên của hình tròn hội tụ $f_{t_0}(z)$. Do đó

$$R[\gamma(t_1)] \geqslant R[\gamma(t_0)] - |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|.$$

Điểm $\gamma(t_0)$ nằm trong hình tròn hội tụ của $f_{t_1}(z)$ nên

$$R[\gamma(t_0)] \geqslant R[\gamma(t_1)] - |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|.$$

Như vậy

$$|R(\gamma(t_0)) - R(\gamma(t_1))| \leqslant |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|$$

và từ đó suy ra kết luận của định lý. □

Định lý 5.2.2. *Phép thác triển giải tích phần tử chính tắc cho trước theo tuyến γ luôn luôn dẫn đến một phần tử chính tắc P_1 duy nhất không phụ thuộc vào cách chọn họ các phần tử thực hiện thác triển.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử P_t và Q_t là hai thác triển của cùng một phần tử $P_0 \equiv Q_0$ dọc theo tuyến γ. Nếu $E = \{t \in J : P_t \equiv Q_t\}$ thì E có các tính chất sau đây

a) $E \neq \emptyset$ vì điểm $t = 0 \in E$;

b) E là tập hợp mở. Thật vậy, với t_0 bất kỳ cả hai chuỗi P_{t_0} và Q_{t_0} đều hội tụ trong hình tròn

$$|z - \gamma(t_0)| < \varepsilon(t_0),$$

trong đó $\varepsilon(t_0)$ bằng bán kính bé nhất trong hai bán kính hội tụ. Tồn tại số $\delta = \delta(t_0) > 0$ sao cho

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t)| < \varepsilon(t_0), \quad \forall\, t \in \{|t - t_0| < \delta\},$$

cho nên P_t và Q_t là thác triển giải tích trực tiếp tương ứng của P_{t_0} và Q_{t_0} khi $|t - t_0| < \delta$. Nếu $t_0 \in E$ thì $P_{t_0} \equiv Q_{t_0}$ và các thác triển giải tích trực tiếp của chúng P_t và Q_t cũng trùng nhau. Như vậy $t \in E$ nếu $|t - t_0| < \delta$. Tính mở của E được chứng minh.

c) E là tập hợp đóng. Giả sử t_0 là điểm giới hạn của E. Khi đó tồn tại $t_1 \in E$ sao cho

$$|t_1 - t_0| < \delta(t_0).$$

và $P_{t_1} = Q_{t_1}$. Nhưng hình tròn hội tụ của ba chuỗi P_{t_1}, P_{t_0} và Q_{t_0} giao nhau và trong giao đó tổng của ba chuỗi trùng nhau. Như vậy $P_{t_0} \equiv Q_{t_0}$ và $t_0 \in E$.

Từ ba tính chất trên đây suy ra $E = J$ và như vậy $P_t \equiv Q_t$ với mọi $t \in J$. Do đó $P_1 = Q_1$. □

Định lý 5.2.3. *Phép thác triển giải tích phần tử P_0 dọc theo tuyến γ luôn luôn có thể thay bằng phép thác triển giải tích theo một xích hữu hạn các hình tròn.*

Chứng minh. Vì bán kính hội tụ $R(\gamma(t))$ là hàm liên tục dương của $\gamma(t)$ nên $R(\gamma(t)) \geqslant \delta > 0$ với mọi $t \in J$. Ta chọn dãy các giá trị $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ sao cho

$$|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| < \delta, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Khi đó các hình tròn $S_j = \{|z - \gamma(t_j)| < R(\gamma(t_j))|, 0 \leqslant j \leqslant n-1$ lập nên một xích hữu hạn các hình tròn, còn các phần tử $P_0, P_1, \dots, P_{t_n}$ lập nên thác triển giải tích theo xích các hình tròn. □

Tiếp theo, nếu phần tử P_0 được thác triển giải tích theo tuyến γ_1, nối điểm a với điểm b thì thác triển giải tích P_0 dọc theo tuyến bất kỳ khác cũng nối a với b và đủ gần γ_1 sẽ dẫn đến một phần tử duy nhất P_1. Cụ thể ta có

Định lý 5.2.4. *Giả sử δ là giá trị cực tiểu của bán kính hội tụ $R(\gamma(t))$ của phần tử chính tắc P_t trên γ. Giả sử $\gamma_1 : z = \gamma_1(t)$, $t \in J$, là tuyến bất kỳ khác thỏa mãn điều kiện*

$$\gamma_1(0) = \gamma(0) = a, \quad \gamma_1(1) = \gamma(1) = b,$$

$$|\gamma_1(t) - \gamma(t)| \leqslant \frac{\delta}{4}\cdot$$

Khi đó nếu Q_t là phần tử thu được từ $P_0 = Q_0$ bằng thác triển giải tích theo γ_1 thì

$$P_1 = Q_1.$$

Chứng minh. Ta xét dãy điểm $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ thỏa mãn điều kiện $|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})| < \dfrac{\delta}{4}$ với mọi $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $0 \leqslant i \leqslant n$. Khi đó phép thác triển P_0 thành P_1 có thể thực hiện theo xích hữu hạn các thác triển trực tiếp.

Giả sử L_i là đoạn thẳng nối $\gamma(t_i)$ với $\gamma_1(t_i)$. Ta xét thác triển P_0, từ điểm a đến điểm $\gamma(t_1)$. Phép thác triển này có thể thực hiện:

a) theo tuyến γ từ điểm a đến điểm $\gamma(t_1)$; và

b) theo tuyến hợp gồm đoạn của γ_1 từ điểm a đến điểm $\gamma_1(t_1)$ và L_1^- từ $\gamma_1(t_1)$ đến $\gamma(t_1)$.

Cả hai thác triển trên cùng đưa đến một phần tử P_{t_1} vì đó là hai thác triển xảy ra trong hình tròn hội tụ của phần tử chính tắc $P_0 \equiv Q_0$.

Bây giờ ta thác triển tiếp tục P_{t_1} từ điểm $\gamma(t_1)$ đến điểm $\gamma(t_2)$. Phép thác triển này có thể thực hiện:

a) dọc theo γ từ điểm $\gamma(t_1)$ đến $\gamma(t_2)$ và thu được phần tử P_{t_2};

b) hoặc theo tuyến hợp gồm đoạn L_1, đoạn của γ_1 từ điểm $\gamma_1(t_1)$ đến điểm $\gamma_1(t_2)$ và L_2^- từ $\gamma_1(t_2)$ đến $\gamma(t_2)$ và cũng thu được phần tử P_{t_2} (vì trong phép thác triển này, ta không ra khỏi hình tròn hội tụ của P_{t_1}).

Ta nhận xét rằng trong thác triển P_0 từ a đến $\gamma(t_2)$ ta đã thác triển theo L_1 liên tiếp theo hai hướng ngược nhau, nên kết quả sẽ không đổi nếu ta bỏ qua L_1. Như vậy, ta đã thác triển dọc theo hai tuyến:

a) tuyến từ a đến $\gamma(t_2)$ dọc theo γ; và

b) tuyến từ a đến $\gamma_1(t_2)$ và sau đó từ $\gamma_1(t_2)$ đến $\gamma(t_2)$ theo L_2^-, và đã đưa đến một kết quả là phần tử chính tắc P_{t_2}.

Tiếp tục quá trình đó, sau một số hữu hạn bước ta sẽ đến điểm b và thu được $P_1 \equiv Q_1$. □

Để kết thúc việc nghiên cứu các tính chất của thác triển theo tuyến, ta chứng minh tính bất biến của thác triển theo các tuyến đồng luân. Định lý đó có ý nghĩa cực kỳ quan trọng đối với lý thuyết các hàm đa trị mà ta sẽ thấy rõ trong mục sau.

Định lý 5.2.5. *Giả sử*

$$\gamma_0 = \gamma_0(t), \quad t \in J, \quad \gamma_1 = \gamma_1(t), \quad t \in J$$

là những tuyến có đầu mút chung đồng luân với nhau và giả sử phần tử chính tắc P thác triển giải tích được dọc theo tuyến bất kỳ

$$\gamma_u = \gamma_u(t), \quad u \in J$$

thực hiện phép đồng luân ($\gamma_0 \sim \gamma_1$) ấy. Khi đó, các kết quả của thác triển phần tử P theo γ_0 và γ_1 là trùng nhau.

Chứng minh. Theo định nghĩa phép đồng luân và điều kiện của định lý tồn tại họ các tuyến $\gamma_u = \gamma_u(t)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ phụ thuộc liên tục vào u sao cho

a) mọi tuyến γ_u đều có chung điểm đầu và điểm cuối;

b) tuyến γ_u trùng với γ_0 khi $u = 0$ và trùng với γ_1 khi $u = 1$;

c) thác triển giải tích phần tử P theo mọi tuyến γ_u đều có thể thực hiện được.

Để đơn giản cách lý luận, ta tạm gọi hai tuyến với các đầu mút chung là tương đương nếu kết quả của thác triển theo các tuyến đó là như nhau. Ta cần chứng minh rằng mọi tuyến γ_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$ đều tương đương với nhau.

Từ định lý 5.2.4 ta suy ra rằng với $u > 0$ đủ bé, các tuyến γ_u đều tương đương với γ_0. Ta ký hiệu u^* là cận dưới đúng của các giá trị u, $0 \leqslant u \leqslant 1$ mà tuyến γ_u không tương đương với tuyến γ_0 (nếu những giá trị u ấy tồn tại!).

Từ lý luận vừa nêu suy ra rằng $u^* > 0$. Một mặt, tuyến γ_{u^*} không thể tương đương với tuyến γ_0, và mặt khác γ_{u^*} không thể không tương đương với γ_0, vì theo định lý 5.2.4 mọi tuyến γ_u với u đủ gần u^* đều có một tính chất hệt như của γ_{u^*}. Nhưng điều đó không thể xảy ra theo định nghĩa số u^*. Do đó số u^* không tồn tại và mọi tuyến γ_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$ đều tương đương với nhau. Từ đó suy ra kết luận của định lý. $\square$

Nhận xét 5.2.1. Nếu dù chỉ dọc theo một trong các tuyến γ_u thực hiện phép đồng luân $\gamma_0 \sim \gamma_1$ phần tử P không thể thác triển được thì kết quả của thác triển phần tử P dọc theo γ_0 và γ_1 có thể khác nhau.

Thật vậy ta xét nửa trên γ_0 đường tròn đơn vị và nửa dưới γ_1 của nó. Giả sử $f(z) = \sqrt{z}$. Ta xét kết quả của thác triển f dọc theo γ_0 và γ_1 từ điểm 1 đến điểm -1. Hiển nhiên $\gamma_0 \sim \gamma_1$ và phép đồng luân này có thể thực hiện nhờ họ các cung tròn γ_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$ đi qua hai điểm ± 1. Giả sử để xác định ta ký hiệu

$$\gamma_{\frac{1}{2}} = [-1, +1] \subset \mathbb{R}.$$

Hiển nhiên hàm f có thể thác triển dọc theo γ_u, $u \neq \dfrac{1}{2}$. Hàm f không thể thác triển giải tích theo tuyến $\gamma_{\frac{1}{2}}$ vì

$$f'(z) \to \infty \text{ khi } z \to 0 \in [-1, +1].$$

Tất nhiên tại điểm -1 ta có

$$f_0 = i\sqrt{r} = i, \quad f_1 = -i\sqrt{r} = -i,$$

trong đó f_0 là kết quả của thác triển hàm f theo γ_0 còn f_1 là kết quả của thác triển hàm f theo γ_1.

5.2.2 Thác triển đối xứng

Để xây dựng một cách thực tiễn phép thác triển giải tích hàm chỉnh hình cho trước, thông thường người ta sử dụng nguyên lý đối xứng của Riemann và Schwartz. Đó là một trường hợp riêng của thác triển giải tích có liên quan tới ánh xạ bảo giác. Nguyên lý này sẽ đưa đến những trường hợp riêng quan trọng thường gặp trong ứng dụng, đồng thời nó cũng đưa đến việc xây dựng có hiệu lực thác triển giải tích.

Định lý 5.2.6. (Riemann - Schwartz) *Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D có biên Jordan ∂D chứa đoạn thẳng $\delta \subset R$ của trục thực và $D \cap D^* = \emptyset$, trong đó D^* là miền đối xứng với D qua trục thực. Giả sử hàm f liên tục đến tận δ và trên đoạn thẳng δ hàm $f(z)$ nhận giá trị thực. Khi đó hàm f được thác triển giải tích qua đoạn δ vào miền D^* và phép thác triển đó được cho bởi công thức*

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \delta, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^*. \end{cases}$$

Chứng minh. Trước hết ta nhận xét rằng hàm thu được trong thác triển là duy nhất, do tính chất duy nhất của thác triển giải tích.

Ta chứng minh rằng hàm

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in D^*$$

chỉnh hình trong D^*. Ta có

$$\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\overline{z}+\overline{\Delta z})} - \overline{f(\overline{z})}}{\Delta z} = \overline{\Big[\frac{f(\overline{z}+\overline{\Delta z})-f(\overline{z})}{\overline{\Delta z}}\Big]}.$$

Vì z và $z+\Delta z \in D^*$ nên $\overline{z}$, $\overline{z}+\overline{\Delta z} \in D$ và do đó

$$\lim_{z\to 0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} = \overline{f'(\overline{z})}.$$

Như vậy hàm $g(z)$ chỉnh hình trong D^*.

Bây giờ ta chứng minh rằng hàm $h(z)$ liên tục trong miền $D\cup\delta\cup D^*$. Thật vậy, từ tính liên tục của hàm f đến tận δ suy ra

$$\lim_{z\to x} f(z) = f(x), \quad x\in\delta$$

và từ đó ta có

$$\lim_{z\to x} g(z) = \lim_{z\to x}\overline{f(\overline{z})} = \overline{f(x)}.$$

tức là hàm $g(z)$ cũng liên tục đến tận δ. Vì

$$f(x) = \overline{f(x)}$$

theo điều kiện của định lý nên

$$g(z)\big|_{z\in\delta} = f(z)\big|_{z\in\delta}$$

Như vậy hàm $h(z)$ liên tục trong $D\cup\delta\cup D^*$, chỉnh hình tại mọi điểm của D và D^*. Từ định lý 11.3 và định lý Morera suy ra rằng hàm $h(z)$ chỉnh hình trong $D\cup\delta\cup D^*$ và là thác triển giải tích của hàm $f(z)$. □

Ta nhận xét rằng tại các điểm của $D\cup\delta\cup D^*$ đối xứng với nhau qua trục thực hàm $f(z)$ nhận các giá trị liên hợp phức. Đó cũng là nguyên do để người ta gọi định lý 5.2.6 là "nguyên lý đối xứng".

Bây giờ ta trình bày một số ví dụ áp dụng nguyên lý đối xứng để tìm ánh xạ bảo giác.

Ví dụ 1. Ánh xạ miền $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{[-3i, +3i] \cup [-4, +\infty)\}$ lên nửa mặt phẳng trên $D_0^* = \{\mathrm{Im} w > 0\}$.

Giải. Ta nhận xét rằng cả hai miền D_0 và D_0^* đã cho đều có tính chất đối xứng: miền D_0 có trục đối xứng là trục thực, còn miền D_0^* có trục đối xứng là trục ảo. Do đó, để có ánh xạ cần tìm ta kẻ nhát cắt phụ (đường chấm chấm) theo trục thực và xét nửa trên của miền D_0, kẻ nhát cắt phụ theo trục ảo trong mặt phẳng w (đường chấm chấm) và xét góc phần tư thứ nhất D^* của D_0^* (hình V.2).

Hình V.2

Ta cần tìm ánh xạ $D(z)$ lên D^* sao cho phần biên phụ $[-\infty, -4]$ được ánh xạ lên phần dương của trục ảo, còn phần biên $ABCD_\infty$ được ánh xạ lên phần dương trục thực.

1. Đầu tiên ta dùng ánh xạ $z_1 = z^2$ ánh xạ miền $D(z)$ lên toàn bộ mặt phẳng với nhát cắt $[-9, +\infty) \subset \mathbb{R}$, trong đó bờ trên của nhát cắt tương ứng với phần biên CD_∞, còn đoạn bờ dưới $[-9, +16]$ tương ứng với phần biên CBA, đoạn của bờ dưới đi từ 16 đến ∞ tương ứng với phần biên phụ $(-\infty, -4]$.

2. Tiếp theo ta sử dụng hàm

$$z_2 = \sqrt{z^2 + 9}$$

ánh xạ miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên, trong đó đoạn $[-\infty, -5]$ là phần biên phụ và phần còn lại - đoạn $[-5, \infty)$ - là ảnh của biên miền D.

3. Ánh xạ

$$z_3 = \sqrt{z_2 + 5} = \sqrt{5 + \sqrt{z^2 + 9}}$$

sẽ biến nửa mặt phẳng vừa thu được thành góc phần tư thứ nhất, trong đó bán trục $\mathbb{R}^+$ tương ứng với biên của D, còn phần dương của trục ảo tương ứng với phần biên phụ.

Áp dụng nguyên lý đối xứng cho đoạn $(-\infty, -4)$ ta suy ra rằng hàm $w = z_3 = \sqrt{5 + \sqrt{z^2 + 9}}$ cùng với thác triển của nó xuống nửa mặt phẳng dưới (qua đoạn $(-\infty, -4)$ ánh xạ miền D_0 lên nửa mặt phẳng trên.

Ví dụ 2. Tìm ánh xạ phần trong hình tròn đơn vị D lên phần ngoài của "hình sao" D^*:

$$\{|w| \leqslant 1, \arg w = \frac{2k\pi}{n}\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Giải. Hiển nhiên cả miền D lẫn D^* đều có tính chất đối xứng. Do đó, để có ánh xạ cần tìm ta chỉ cần xét ánh xạ hình quạt

$$D_0 = \Big\{|z| \leqslant 1, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\Big\},$$

lên hình quạt

$$D^* = \Big\{|w| < \infty, 0 < \arg w < \frac{2\pi}{n}\Big\},$$

trong đó cung tròn $AB = \Big(0, \dfrac{2\pi}{n}\Big)$ biến thành hai đoạn thẳng $\{|w| < 1, \arg w = 0\}$ và $\Big\{|w| < 1, \arg w = \dfrac{2\pi}{n}\Big\}$ (hình V.3)

Hình V.3

Ta vẽ các nhát cắt phụ theo các bán kính OA và OB và xét hình quạt D_0 trong mặt phẳng z; ta vẽ các nhát cắt phụ $A'\infty$ và $B'\infty$ trong mặt phẳng w và xét hình quạt D^*. Ta sẽ tìm ánh xạ hình quạt D_0 lên D_0^* sao cho cung AB được ánh xạ lên hai đoạn thẳng $B'O' \cup O'A'$, các nhát cắt phụ được ánh xạ lên các đoạn thẳng $A'\infty$ và $B'\infty$.

Ta thực hiện các ánh xạ trung gian sau:

1. Ánh xạ $z_1 = z^n$ ánh xạ hình quạt D_0 lên hình tròn đơn vị với nhát cắt phụ $[0, 1]$.

2. Hàm Jukovski

$$z_2 = \frac{1}{2}\Big(z_1 + \frac{1}{z_1}\Big)$$

ánh xạ miền vừa thu được lên toàn bộ mặt phẳng trừ nhát cắt $[-1, +\infty]$, trong đó nhát cắt $[1, +\infty]$ là nhát cắt phụ (đó là những điểm trong!). Ta ký hiệu miền ảnh là $D(z_2)$.

3. Hàm

$$z_3 = \frac{z_2 + 1}{2}$$

ánh xạ miền $D(z_2)$ lên toàn bộ mặt phẳng với nhát cắt $[0, +\infty)$, trong đó nhát cắt $[+1, \infty)$ là nhát cắt phụ.

4. Hàm $z_4 = \sqrt{z_3}$ cho ta nửa mặt phẳng trên, trong đó nhát cắt phụ chuyển thành đoạn thẳng đi từ -1 đến $+1$ qua ∞.

5. Hàm

$$w = \sqrt[n]{z_4}$$

sẽ ánh xạ miền thu được trong mặt phẳng z_4 lên hình quạt D_0^*. Tiếp đó, bằng phương pháp lý luận tương tự như trong ví dụ trước ta sẽ thu được ánh xạ cần tìm.

5.3 Hàm giải tích đủ

Khái niệm thác triển giải tích đã trình bày trong các mục trước là một khái niệm cực kỳ quan trọng. Nó cho phép ta khái quát hóa khái niệm hàm chỉnh hình, đi đến khái niệm hàm giải tích.

5.3.1 Khái niệm hàm giải tích đủ

Bây giờ ta có thể phát biểu định nghĩa sau đây của Weierstrass về hàm giải tích.

Định nghĩa 5.3.1. Giả sử tại điểm a cho phần tử chính tắc $f_a(z)$ với tâm tại điểm $z = a$. Ta thác triển giải tích phần tử $f_a(z)$ đã cho theo mọi tuyến bắt đầu từ tâm a của phần tử mà trên mỗi tuyến phép thác triển ấy có thể thực hiện được. Tập hợp F mọi phần tử thu được từ $f_a(z)$ trong kết quả của mọi thác triển được gọi là *hàm giải tích đủ.*

Hiển nhiên khái niệm hàm giải tích đã được định nghĩa ở đây không phụ thuộc vào việc chọn phần tử chính tắc đầu tiên. Thật vậy, giả sử $f_b(z)$ là phần tử bất kỳ thuộc hàm giải tích $F(z)$ xác định bởi $f_a(z)$. Khi đó $f_b(z)$ thu được từ $f_a(z)$ bằng thác triển giải tích theo tuyến γ. Nhưng chính $f_a(z)$ lại thu được từ $f_b(z)$ bằng thác triển giải tích theo tuyến γ^-. Nếu $f_c(z)$ là phần tử tùy ý thu được từ $f_a(z)$ bằng thác triển theo tuyến λ thì $f_c(z)$ cũng thu được từ $f_b(z)$ bằng thác triển giải tích theo tuyến hợp $\gamma^- \cup \lambda$.

Hai hàm giải tích được xem là bằng nhau nếu chúng có ít nhất một phần tử chung. Từ định lý 5.2.2 ta kết luận rằng khi đó mọi phần tử tương ứng của chúng đều bằng nhau.

Ta có

Định lý 5.3.1. *Giả sử $F(z)$ là một hàm giải tích đủ và D_F là hợp mọi hình tròn hội tụ của mọi phần tử chính tắc thuộc F. Khi đó D_F là một miền (gọi là miền tồn tại theo nghĩa Weierstrass của hàm giải tích F).*

Chứng minh. 1. Hiển nhiên D_F là tập hợp mở.

2. Ta cần chứng minh D_F là tập hợp liên thông. Giả sử $z_0 \in S(z_0)$, $f_{z_0}(z) \in F$ và $z^* \in S(z^*)$, $f_{z^*}(z) \in F$. Theo định nghĩa, tồn tại một xích nối f_{z_0} với f_{z^*}

$$f_{z_0}, \dots, f_{z_n} = f_{z^*}.$$

Vì $f_{z_{j-1}}$ và f_{z_j} là thác triển giải tích trực tiếp của nhau nên

$$S(z_{j-1}) \cap S(z_j) = \delta_{j-1,j} \neq \emptyset.$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$. Giả sử $\xi_j \in \delta_{j-1,j}$ và γ_j là tuyến thuộc $S(z_j)$ và nối ξ_j với ξ_{j+1}, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Khi đó, bằng cách nối z_0 với ξ_1 bởi tuyến liên tục γ_0 trong $S(z_0), \dots,$ nối ξ_n với z^* bởi tuyến liên tục $\gamma_n \subset S(z_n)$ ta thu được tuyến

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n \subset D_F$$

nối z_0 với z^*. Điều đó chứng tỏ D_F là tập hợp liên thông. □

Hàm giải tích được định nghĩa ở đây không phải là hàm theo nghĩa thông thường của từ vì mỗi giá trị z cho trước không nhất thiết phải tương ứng với một giá trị của hàm mà có thể tương ứng với một số, và thậm chí là với vô số giá trị của hàm. Điều cần lưu ý ở đây là: nói chung, phần tử chính tắc sẽ sinh ra hàm giải tích đa trị.

Nhận xét 5.3.1. 1. Nếu ta cho một phần tử $f_a(z)$ tại điểm $a \in \overline{\mathbb{C}}$ nào đó thì hiển nhiên phần tử này sẽ xác định một tập hợp $\mathcal{K}$ nào đó các tuyến γ nằm trong $\overline{\mathbb{C}}$ và đều xuất phát từ điểm a mà trên những tuyến đó có thể thác triển giải tích phần tử $f_a(z)$. Hàm giải tích sinh bởi phần tử $f_a(z)$ sẽ được xác định đối với mỗi tuyến $\gamma \subset \mathcal{K}$. Do đó ta có thể xem giá trị tại điểm cuối của tuyến γ trong thác triển giải tích phần tử đầu tiên $f_a(z)$ theo γ là giá trị của hàm giải tích tương ứng với tuyến $\gamma \subset \mathcal{K}$.

2. Từ sự phân tích trên ta thấy rằng Weierstrass đã lấy chuỗi luỹ thừa để làm công cụ xuất phát trong khi định nghĩa hàm giải tích. Tính ưu việt của định nghĩa Weierstrass là ở chỗ định nghĩa đó mang tính chất kiến thiết

khá rõ rệt. Tuy nhiên trong việc xây dựng lý thuyết hàm theo quan điểm Weierstrass, một số chứng minh đã tỏ ra khó khăn hơn so với phương pháp của Cauchy. Nhưng mặt khác, với phương pháp của Cauchy ta đã thu được khá ít ỏi khi chưa tìm được những hàm thỏa mãn các điều kiện đủ để một hàm là chỉnh hình. Ta cũng đã tìm được là: các hàm chỉnh hình tổng quát nhất đều có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa; và do đó cả hai quan điểm này hoàn toàn tương đương với nhau. Điều đó chứng tỏ, để xây dựng lý thuyết một cách trọn vẹn ta cần đến cả hai phương pháp (xem **4.1.5**).

5.3.2 Một vài ví dụ

Bây giờ ta xét một vài ví dụ quan trọng nhất về các hàm giải tích. Ta sẽ không dừng lại khảo sát một cách chi tiết, mà chỉ phác họa việc định nghĩa cùng một số tính chất của các hàm ấy.

Ví dụ 1. Đối với các giá trị phức z, hàm $\ln z$ được định nghĩa một cách tự nhiên như là thác triển giải tích của $\ln x$. Hàm $\ln x$ được khai triển thành chuỗi Taylor dạng

$$\ln x = \ln[1 + (x - 1)] = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x - 1)^n. \tag{5.4}$$

Chuỗi này hội tụ trong khoảng $(0, 2) \subset \mathbb{R}$. Theo định lý Abel, chuỗi này hội tụ cả đối với các giá trị phức trong hình tròn $S(1) = \{|z - 1| < 1\}$ và vì thế, ta có thể xét chuỗi (5.4) với z phức, nghĩa là xét hàm

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z - 1)^n. \tag{5.5}$$

Chuỗi (5.5) hội tụ trong hình tròn $S(1)$ và do đó hàm $f_1(z)$ chỉnh hình trong $S(1)$ và $f_1(x) = \ln x$ khi $0 < x < 2$. Do đó hàm $f_1(z)$ là thác triển giải tích (duy nhất!) của hàm $\ln x$ từ khoảng $0 < x < 2$ vào hình tròn $S(1)$.

Bây giờ nếu lấy $f_1(z)$ làm phần tử chính tắc đầu tiên và thực hiện mọi thác triển giải tích phần tử đó (được cho tại điểm $z = 1$) ta sẽ thu được hàm giải tích $\ln z$.

Ví dụ 2. Ta xét hàm luỹ thừa tổng quát

$$w = z^a, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Với x thực và dương và với a là một số thực cố định ta có công thức

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Ta mở rộng công thức này cho trường hợp $z \in \mathbb{C}$ và a cố định thuộc $\mathbb{C}$ bằng cách đặt

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

Ở đây, ta có thể lấy phần tử chính tắc đầu tiên là

$$g_1(z) = e^{af_1(z)}$$

tại điểm $z = 1$, trong đó $f_1(z)$ là phần tử đầu tiên của hàm $\ln z$ tại điểm $z = 1$. Khi đó

$$g_1(z) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{a}{n} (z-1)^n, \tag{5.6}$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{d^n}{dz^n} g_1(z)\Big|_{z=1} = \frac{d^n}{dx^n} g_1(x)\Big|_{x=1} = \frac{d^n}{dx^n} x^n\Big|_{x=1} = n! \binom{a}{n}.$$

Từ hệ thức này và công thức Taylor

$$g_1(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{g_1^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

ta suy ra (5.6).

Như vậy, hàm luỹ thừa tổng quát là hàm giải tích.

Ta sẽ phân biệt bốn trường hợp sau đây.

1. $a \in \mathbb{Z}$. Trong trường hợp này hàm $w = z^a$ chỉnh hình trong $\mathbb{C}$ nếu $a > 0$ và trong $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nếu $a < 0$.

2. $a \in Q$ ($a = \dfrac{p}{q}$ là số hữu tỷ). Trong trường hợp này mỗi giá trị $z \neq 0$, ∞ sẽ tương ứng với q giá trị khác nhau của m.

Thật vậy, đặt $z = re^{i\varphi}$, ta có

$$\begin{aligned}|w| &= e^{a\ln x} = r^a,\\ \theta_k &= a\varphi + 2k\pi a.\end{aligned}$$

Khi $k = 0, 1, \dots, q-1$ ta có

$$\begin{aligned}\theta_0 &= a\varphi,\\ \theta_1 &= a\varphi + \frac{p}{q}2\pi,\\ \dots \quad &\dots \quad \dots\\ \theta_{q-1} &= a\varphi + \frac{p}{q}(q-1)2\pi,\end{aligned}$$

còn khi $k \geqslant q$ thì các giá trị θ_k khác các giá trị trên đây một số hạng bội nguyên của 2π. Do đó

$$z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}\,.$$

3. a là số vô tỷ. Trong trường hợp này đối với các giá trị $\theta_k = a\varphi + 2k\pi a$ sẽ không có những giá trị khác nhau một bội nguyên của 2π. Thật vậy, nếu $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ và $k_1 \neq k_2$ mà

$$2k_1\pi a - 2k_2\pi a = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

thì ta có

$$a = \frac{n}{k_1 - k_2} \in \mathbb{Q}.$$

Điều này trái với giả thiết rằng a là số vô tỷ.

Do đó khi a là số vô tỷ, mỗi giá trị $z \neq 0, \infty$ sẽ tương ứng với một tập hợp đếm được giá trị.

4. $a = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Trong trường hợp này w là hàm có vô số giá trị và

$$\begin{aligned} \rho_k &= |w| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}, \\ \widetilde{\theta}_k &= \arg w = \alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Từ hai hệ thức này suy ra rằng khi $z \neq 0, \infty$ các giá trị của hàm luỹ thừa tổng quát được phân bố trên hệ các đường tròn

$$\{|w| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

5.3.3 Tính đơn trị và đa trị. Định lý đơn trị (monodromie)

Giả sử $z = a^*$ là một điểm thuộc miền tồn tại D_F và $f_{a_0}(z)$ là phần tử chính tắc được cho tại a_0. Có hai khả năng sau đây có thể xảy ra:

1. Thác triển giải tích phần tử $f_{a_0}(z)$ theo mọi tuyến đều chỉ dẫn đến một và chỉ một phần tử tại điểm a^*.

2. Phần tử tìm được tại a^* trong thác triển theo một tuyến không trùng với phần tử thu được tại điểm ấy nhưng qua thác triển theo một tuyến khác.

Điều vừa trình bày trên đây đã buộc ta phải chia các hàm giải tích thành hai lớp:

(I) lớp các hàm thỏa mãn khả năng thứ nhất được gọi là lớp các *hàm đơn trị*;

(II) lớp các hàm thỏa mãn khả năng thứ hai được gọi là lớp các *hàm đa trị*.

Tính chất của hàm là đơn trị hay đa trị là tính chất toàn cục, nghĩa là tính chất đó không xuất hiện đối với một phần đủ bé của hàm ấy.

Ta xét hàm giải tích $F(z)$ sinh bởi phần tử $f_a(z)$ tại điểm a. Giả sử miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ và $a \in D$, và giả sử phần tử $f_a(z)$ cho phép thác triển giải tích theo mọi tuyến xuất phát từ a và nằm trong D. Tập hợp các phần tử thu được qua mọi thác triển đó được gọi là hàm giải tích $F(z)$ trong miền D.

Ta sẽ chứng minh rằng khái niệm

"HÀM GIẢI TÍCH ĐƠN TRỊ"

và khái niệm

"HÀM CHỈNH HÌNH"

là hai khái niệm đồng nhất.

Thật vậy, giả sử $F(z)$ chỉnh hình trong miền D. Tại mỗi điểm $z_0 \in D$ ta cho phần tử $f_{z_0}(z)$ mà cụ thể là chính hàm $F(z)$. Ta cố định điểm $z_0 \in D$ và phần tử $f_{z_0}(z)$ tại đó. Nếu tuyến γ nối z_0 với z^* và $\gamma \subset D$ thì một cách hiển nhiên phần tử $f_{z_0}(z)$ có thác triển giải tích theo γ và ta có thể lấy hàm $F(z)$ làm phần tử chính tắc tại z^*.

Bây giờ giả sử $F(z)$ giải tích đơn trị trong D. Ta cần chứng minh $F(z)$ chỉnh hình trong miền đó. Thật vậy, tại mỗi điểm của miền D ta có đúng một phần tử $F(z)$ (vì nếu tại một điểm nào đó tồn tại hai phần tử khác nhau thì hàm đã cho không đơn trị!). Do đó tại lân cận của mỗi điểm thuộc miền D các giá trị của hàm $F(z)$ trùng với các giá trị của một phần tử (duy nhất) nào đó. Vì vậy hàm $F(z)$ chỉnh hình tại mọi điểm của miền D.

Khó khăn chủ yếu khi khảo sát các hàm đa trị là việc chọn các giá trị của hàm tại một điểm cho trước. Trong một số trường hợp, hàm giải tích có thể được xem như những hàm "thông thường" (đơn trị!). Ta có định lý cực kỳ quan trọng đối với lý thuyết hàm đa trị sau đây - gọi là định lý đơn trị monodromie trường hợp riêng của định lý 5.2.5.

Định lý 5.3.2. (định lý đơn trị). *Giả sử $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ là miền đơn liên và $f_0(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z_0 \in D$ nào đó. Giả sử hàm $f_0(z)$ có thể thác triển giải tích theo tuyến $\gamma \subset D$ bất kỳ (với điểm đầu tại z_0) không vượt khỏi giới hạn của miền D. Khi đó hàm giải tích $F(z)$ thu được qua mọi thác triển ấy của hàm $f_0(z)$ là hàm chỉnh hình trong D.*

Chứng minh. Giả sử hàm $f_0(z)$ là tổng của chuỗi luỹ thừa hội tụ trong hình tròn $S(z_0)$. Giả sử z^* là điểm tùy ý thuộc D. Vì miền D đơn liên nên hai tuyến γ_0 và $\gamma_1 \subset D$ bất kỳ đi từ z_0 đến z^* là đồng luân với nhau. Từ điều kiện của định lý suy ra rằng hàm $f_0(z)$ có thể thác triển giải tích theo tuyến γ_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$ bất kỳ thực hiện phép đồng luân ấy. Theo định lý 5.2.5 mọi thác triển đó đều dẫn đến một và chỉ một phần tử chính tắc tại điểm z^*. Như vậy, hàm giải tích xác định trong miền D bởi mọi thác triển đó là hàm đơn trị trong D. Do đó $F(z)$ là hàm chỉnh hình. □

Nhận xét 5.3.2. 1. Định lý đơn trị cho ta sự giải thích quan trọng về nguyên nhân của tính đa trị có thể có trong thác triển giải tích: tính đa trị có thể nảy sinh khi vòng quanh những điểm mà phép thác triển phần tử đầu tiên không thể thực hiện được.

2. Với các điều kiện của định lý 5.3.2, phần tử chính tắc $f_{z_0}(z)$ sẽ sinh ra một hàm giải tích trong miền D. Do đó, định lý đơn trị còn có thể phát biểu ở một dạng khác như sau:

Hàm giải tích trong miền đơn liên là một hàm chỉnh hình.

3. Nếu điều kiện của định lý đơn trị không được thỏa mãn thì tại các điểm $z \in D$ hàm giải tích có thể nhận nhiều giá trị. Vấn đề cần xem xét là số các giá trị, nghĩa là số phần tử tại điểm $z \in D$, có thể có là bao nhiêu? Số các phần tử khác nhau của hàm giải tích tại một điểm có thể là vô hạn.

Nhưng ta có

Định lý 5.3.3. (J. H. Poincare, V. Volterra). *Hàm giải tích $F(z)$ có thể có không quá một tập hợp đếm được các phần tử khác nhau với tâm tại điểm cố định cho trước.*

Chứng minh. Giả sử hàm giải tích $F(z)$ được xác định bởi phần tử đầu tiên $f_a(z)$, $a \in M_F$ là điểm tùy ý. Theo định nghĩa, các phần tử khác nhau của hàm giải tích $F(z)$ đều có thể thu được bằng thác triển phần tử đầu tiên theo một tuyến nào đó. Theo định lý 5.2.4 kết quả của thác triển theo tuyến sẽ không thay đổi nếu ta biến dạng tuyến đó đi một ít. Do đó ta luôn luôn có thể xem thác triển giải tích được diễn ra theo các đường gấp khúc với đỉnh tại các điểm của mặt phẳng có tọa độ hữu tỷ. Tập hợp các đường gấp khúc đó là tập hợp đếm được. Do đó tập hợp các phần tử thu được bằng thác triển theo các đường gấp khúc ấy là đếm được. □

5.3.4 Nhánh và phương pháp tách nhánh chỉnh hình

Giả sử cho hàm giải tích $F(z)$ được sinh bởi phần tử đầu tiên $f_a(z)$. Ta lấy một miền D nào đó chứa điểm a và xét các thác triển giải tích $f_a(z)$ không phải theo mọi tuyến có thể có đi từ điểm a mà chỉ theo những tuyến nằm trong miền D. Kết quả của mọi thác triển đó cho ta hàm $\Phi(z)$ khác với toàn bộ hàm giải tích $F(z)$ ở chỗ là: miền xác định của $\Phi(z)$ có phần hẹp hơn. Hàm $\Phi(z)$ này được gọi là một *nhánh* của hàm giải tích $F(z)$ trong miền D.

Cụ thể hơn ta có

Định nghĩa 5.3.2. Phần của hàm giải tích đủ $F(z)$ được xác định bởi tập hợp các phần tử thu được bằng thác triển giải tích phần tử $f_a(z)$ theo các tuyến không vượt khỏi giới hạn của miền D cho trước được gọi là một *nhánh* trong miền D của hàm giải tích đủ $F(z)$.

Ta nhấn mạnh rằng: nhánh của hàm giải tích trong miền D cũng như bản thân hàm giải tích đều được sinh bởi việc cho phần tử đầu tiên $f_a(z)$.

Do đó định nghĩa trên còn có thể diễn đạt như sau:

Tập hợp con liên thông các phần tử của một hàm giải tích được gọi là một nhánh của hàm giải tích.

Nhánh của một hàm giải tích có thể là một hàm không đơn trị của z. Về sau ta chỉ xét các nhánh đơn trị của hàm giải tích.

Vì hàm giải tích đơn trị trong miền D là chỉnh hình trong miền đó nên ta có

Định nghĩa 5.3.3. Nếu hàm $\Phi(z)$ giải tích trong miền D là đơn trị trong miền đó thì $\Phi(z)$ được gọi là một *nhánh chỉnh hình* của hàm giải tích $F(z)$ (trong miền D).

Việc tách các nhánh chỉnh hình của hàm giải tích là một phần rất quan trọng của bài toán khảo sát đặc tính đa trị của hàm giải tích đó. Định lý đơn trị đã chứng minh trong tiết trước cho phép ta xây dựng một thuật toán đơn giản và tiện lợi để "tách ≡ cắt" hàm giải tích $F(z)$ thành các nhánh chỉnh hình.

Nội dung thuật toán đó như sau

1. Ta vẽ những nhát cắt biến miền đa liên D có cấp liên thông hữu hạn thành miền đơn liên D^*.

2. Ta cố định phần tử chính tắc

$$P(a) = \{S(a); f_a(z)\}$$

tại điểm $a \in D^*$.

3. Áp dụng định lý đơn trị, ta thu được hàm chỉnh hình $F_a(z) \in H(D^*)$.

Hàm vừa thu được là một nhánh chỉnh hình của hàm $F(z)$. Hiển nhiên, các phần tử khác nhau tại điểm a sẽ sinh ra các nhánh chỉnh hình khác nhau của hàm $F(z)$. Từ đó suy ra rằng trong miền D^* hàm $F(z)$ được tách thành những nhánh chỉnh hình.

Ta nhận xét rằng các nhát cắt biến miền D thành miền đơn liên D^* có thể lấy theo các cách khác nhau, do đó hàm giải tích cũng được tách thành nhánh chỉnh hình theo những cách khác nhau.

Tuy nhiên định lý đơn trị không cho phép ta giải quyết vấn đề tách nhánh chỉnh hình của hàm giải tích $F(z)$ trong miền đa liên D.

Trong trường hợp chung, phương pháp tách nhánh chỉnh hình được tiến hành theo "thủ tục" sau đây:

Giả sử $f(z)$ là một phần tử nào đó của hàm giải tích $F(z)$ tại điểm $z_0 \in D$ và $\gamma \subset D$ là một tuyến đóng với điểm đầu tại z_0. Bằng cách thác triển giải tích hàm $f(z)$ theo tuyến γ ta sẽ thu được phần tử $\varphi(z, \gamma)$ tại điểm z_0.

Có hai khả năng sau đây có thể xảy ra

(I) Thác triển giải tích phần tử $f(z)$ theo mọi tuyến đóng $\gamma \subset D$ có thể có với điểm đầu tại z_0 sẽ dẫn đến một và chỉ một phần tử $f(z)$ tại điểm z_0.

Trong trường hợp này tồn tại hàm chỉnh hình $g(z)$ trong D sao cho $g(z) \equiv f(z)$, với mọi điểm z của lân cận điểm z_0.

(ii) Thác triển giải tích phần tử $f(z)$ theo một tuyến đóng $\gamma_0 \subset D$ nào đó với điểm đầu tại z_0 dẫn đến phần tử $\varphi(z, \gamma_0)$:

$$\varphi(z, \gamma_0) \neq f(z)$$

tại điểm z_0.

Trong trường hợp này hàm giải tích $F(z)$ không cho phép tách nhánh chỉnh hình trong D.

Đó là nội dung "thủ tục" tách nhánh chỉnh hình trong trường hợp chung.

Để làm sáng tỏ điều vừa trình bày, ta xét việc tách nhánh chỉnh hình của các hàm trong các ví dụ 2 và 3 của mục **5.1**.

Trước hết ta xét hàm $w = \sqrt[n]{z}$. Hiển nhiên theo định lý đơn trị, nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$ có thể tách trong miền đơn liên bất kỳ không chứa điểm $z = 0$, ∞. Hơn thế nữa: *Nhánh của hàm* $\sqrt[n]{z}$ *có thể tách trong một miền bất kỳ không chứa một tuyến đóng nào bao điểm* $z = 0$.

Chứng minh. Thật vậy, khi vòng quanh theo những tuyến γ bao điểm $z = 0$ thì $\arg z$ thay đổi một bội nguyên của 2π. Do đó phép thác triển một phần tử nào đó theo γ có thể dẫn đến một phần tử khác. □

Trong mỗi miền thỏa mãn điều kiện của mệnh đề vừa chứng minh ta có thể tách n nhánh chỉnh hình của hàm giải tích $F(z) = \sqrt[n]{z}$, mỗi nhánh trong số đó sẽ khác với nhánh kia bởi các thừa số $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ và hoàn toàn được đặc trưng bởi việc chỉ ra một miền mà trong đó hàm xác định và một giá trị của hàm tại một điểm của miền đó.

Đối với hàm giải tích $F(z) = \ln z$ ta cũng có mệnh đề tương tự như ở trên: cụ thể là:

Nhánh của hàm $\ln z$ *có thể tách trong miền* D *bất kỳ không chứa một tuyến đóng nào bao điểm* $z = 0$.

Chứng minh. Thật vậy, nếu tuyến đóng γ bao điểm $z = 0$ thì khi vòng quanh theo γ điểm $w = \ln z$ không trở về vị trí ban đầu của nó mà nhận một vị trí mới là

$$w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i.$$

□

Ví dụ 3. Ta xét hàm giải tích

$$w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}$$
$$a_i \neq a_j, \quad i,j = 1,2,\dots,n, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Mỗi giá trị z sẽ tương ứng với hai giá trị w. Ta xét phần tử $w_0(z)$ cho trước tại điểm z_0. Giả sử γ là tuyến đóng Jordan với điểm đầu z_0.

1. Tuyến γ bao một số lẻ các điểm a_i. Trong trường hợp này phép thác triển $w_0(z)$ theo γ dẫn đến giá trị $w_0(z)$ tại điểm z_0.

2. Tuyến γ bao một số chẵn điểm. Trong trường hợp này phép thác triển theo γ sẽ đi đến giá trị đầu tiên.

Ta sẽ chứng minh 1), còn 2) được chứng minh tương tự. Giả sử γ bao k điểm $a_1, a_2, \dots, a_k$, k là số lẻ. Ta đặt $\varphi_i = \arg(z-a_i)$, $i = 1,2,\dots,k,k+1,\dots,n$. Qua thác triển theo γ, hiển nhiên φ_i, $i = 1,2,\dots,k$ sẽ nhận gia số là 2π; còn φ_i, $i = k+1,\dots,n$ không nhận gia số nào. Do đó qua thác triển theo γ ta có

$$\Delta_\gamma \arg w = \frac{2\pi.k + \overbrace{0+0+\dots+0}^{n-k \text{ lần}}}{2\pi} = k,$$

k lẻ từ đó suy ra 1).

Bây giờ giả sử các điểm a_i, $i = 1,\dots,n$ được ghép thành các cặp: $[a_1,a_2], [a_3,a_4], \dots$ và ký hiệu các nhát cắt giản đơn không giao nhau nối a_1 với a_2; a_3 với a_4; … tương ứng là

$$\gamma(a_1,a_2), \quad \gamma(a_3,a_4), \dots$$

Nếu n là số lẻ thì a_n không được phép thành cặp với điểm nào cả. Trong trường hợp này ta ghép a_n với ∞ và thu được $\dfrac{n+1}{2}$ nhát cắt. Trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1,a_2) \cup \dots \cup \gamma(a_n,\infty)\}$ cả hai nhánh của w đều chỉnh hình.

Nếu n là số chẵn thì ta thu được $\dfrac{n}{2}$ nhát cắt $(a_1,a_2),\dots,(a_{n-1},a_n)$ và trong trường hợp này hàm đã cho được tách thành hai nhánh chỉnh hình trong $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1,a_2) \cup \dots \cup \gamma(a_{n-1},a_n)\}$.

Ví dụ 4. Ta chứng minh rằng hàm giải tích

$$w(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}$$

có thể tách thành một tập hợp đếm được các nhánh chỉnh hình trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

Giả sử $w_0(z)$ là phần tử đầu tiên của hàm $F(z)$ tại điểm z_0 và $\gamma \subset D$ là tuyến đóng Jordan với điểm đầu z_0. Sau khi thác triển hàm $w_0(z)$ theo γ ta thu được giá trị $F(z_0)$ bằng

$$w(z_0) = w_0(z_0) + i\Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z} \cdot$$

Đặt $\varphi_1 = \arg(1-z)$, $\varphi_2 = \arg(1+z)$; ta có

$$\Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Có hai khả năng có thể xảy ra

1. Đoạn $[-1, 1]$ nằm trong γ. Trong trường hợp này $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$. Do đó $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $w(z_0) = w_0(z_0)$ và $f(z) = \ln \dfrac{1-z}{1+z}$, $z \in D$ $f(z_0) = w_0(z_0)$ là một nhánh chỉnh hình.

2. Đoạn $[-1, +1]$ không nằm trong γ. Khi đó $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ và $f(z) = \ln \dfrac{1-z}{1+z}$, $z \in D$ là nhánh chỉnh hình.

Hàm giải tích đã cho có thể tách thành tập hợp đếm được các nhánh chỉnh hình. Các nhánh đó xác định theo công thức

$$f_n(z) = \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + i\Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z} + i\mathrm{Im}\, w_0 + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z},$$

trong đó $w_0 = \ln \dfrac{1-z_0}{1+z_0}$ là giá trị cố định của lôgarit, còn γ là tuyến nằm trong D nối z_0 với z.

Ví dụ 5. Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ và $f(z) = \left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ là nhánh chỉnh hình sao cho $f(0 + i0) = 1$. Tính các giá trị $f(z)$ khi $z \in \mathbb{R}$.

Khi $z \in D$ thì

$$f(z) = \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^{\alpha} e^{i\varphi}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

trong đó $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z)$, $\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z)$, γ là tuyến nối $z_0 = 0$ với điểm $z \in D$.

Ta phân biệt các trường hợp sau đây

1. $z = x \in (-1, +1)$ và nằm ở bờ trên của nhát cắt $(-1, +1)$. Trong trường hợp này $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Do đó

$$f(x + i0) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} > 0.$$

2. $z = x > 1$. Trong trường hợp này ta có

$$\varphi_1 = -\pi, \quad \varphi_2 = 0$$

và do đó

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} e^{-i\alpha\pi}.$$

3. $z = x < -1$. Khi đó $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ và

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} e^{-i\alpha\pi}.$$

4. $z = x \in (-1, +1)$ và z nằm ở bờ dưới của nhát cắt. Hiển nhiên trong trường hợp này

$$\varphi_1 = -2\pi, \quad \varphi_2 = 0$$

và do đó

$$f(x - i0) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} e^{-i2\pi\alpha}.$$

Ví dụ 6. Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ và $f(z)$ là nhánh chỉnh hình trong miền D của hàm $\ln \dfrac{1-z}{1+z}$ mà $f(0 + i0) = 0$. Tính giá trị của $f(z)$ trên trục thực và trục ảo.

Tại mọi điểm $z \in D$ ta có

$$f(z) = \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + i(\varphi_1 - \varphi_2),$$
$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z), \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z),$$

trong đó $\gamma \subset D$ là tuyến nối điểm 0 nằm ở bờ trên của nhát cắt với điểm z.

1. Giả sử $z = x \in (-1,1)$ và nằm ở bờ trên của nhát cắt. Khi đó $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ và

$$f(x+i0) = \ln\frac{1-x}{1+x}\cdot$$

2. Giả sử $z = x > 1$. Khi đó $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = 0$ và

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1} - i\pi.$$

Nếu $z = x < -1$ thì $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ và

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1} - i\pi.$$

3. Giả sử $z = x \in (-1,1)$ và nằm ở bờ dưới của nhát cắt. Khi đó $\varphi_1 = -2\pi$, $\varphi_2 = 0$ và

$$f(x-i0) = \ln\frac{1-x}{1+x} - 2\pi i.$$

4. Giả sử $z = iy$, $y > 0$. Khi đó $\varphi_1 = -\varphi_2$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} y$ và do đó khi $y > 0$

$$f(iy) = -2i\operatorname{arctg} y,$$
$$(\text{vì } |1-iy| = |1+iy|).$$

5.3.5 Khái niệm về điểm bất thường

Ta đã gặp khái niệm điểm bất thường trong chương trước. Nếu như tại các điểm bất thường mà ta đã gặp trong chương trước đây tính chỉnh hình của hàm bị phá vỡ một cách rất đơn giản: do hàm không liên tục, thì ở đây (xem cả mục trước) ta sẽ gặp loại điểm bất thường mà tính chỉnh hình của hàm bị phá vỡ do tính đa trị của hàm tại lân cận điểm đó.

Ta sẽ trình bày khái niệm điểm bất thường trên cơ sở lý thuyết thác triển giải tích.

Định nghĩa 5.3.4. Giả sử cho hàm giải tích $F(z)$ sinh bởi phần tử chính tắc đầu tiên $f_a(z)$ tại điểm a và cặp (a^*, γ) gồm a^* là điểm nào đó của $\overline{\mathbb{C}}$ và γ là tuyến đi từ a đến a^*. Ta sẽ nói rằng cặp (a^*, γ) *xác định một điểm bất thường của hàm giải tích* $F(z)$ nếu phần tử $f_a(z)$ có thể thác triển giải tích theo γ từ a đến điểm tùy ý của γ ngoài điểm cuối a^*.

Một điều quan trọng cần nhấn mạnh ở đây là: khái niệm điểm thường cũng như điểm bất thường phụ thuộc một cách rất căn bản vào tuyến γ. Điểm $z = a$ có thể là điểm thường đối với tuyến thác triển giải tích đi từ tâm a của $f_a(z)$ nhưng lại là điểm bất thường đối với tuyến khác cũng xuất phát từ tâm a.

Vậy khi nào thì hai cặp (a, γ) và (a, γ_1) sẽ xác định một điểm bất thường?

Hai cặp (a, γ) và (a, γ_1) được xem là xác định một điểm bất thường nếu các phần tử $f_{\widetilde{a}}(z)$ và $f_{\widetilde{a}_1}(z)$ tương ứng với các điểm $\widetilde{a} \in \gamma$ và $\widetilde{a}_1 \in \gamma_1$ đủ gần điểm cuối chung a^* của γ và γ_1 có thể thác triển giải tích vào nhau theo tuyến nào đó nằm trong hình tròn

$$\{|z - a^*| < b, \rho = \max\{|\widetilde{a} - a^*|, |\widetilde{a}_1 - a^*|\}\}.$$

Vì cấu trúc của điểm bất thường của hàm giải tích là hết sức phức tạp nên ta chỉ hạn chế xét lớp các điểm bất thường đơn giản nhất - các điểm bất thường cô lập.

Định nghĩa 5.3.5. Điểm $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là *điểm bất thường cô lập* của hàm giải tích $F(z)$ nếu tồn tại lân cận $V(a)$ của điểm a.

$$V(a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0 < |z - a| < R\}$$

sao cho mọi phần tử $f_{z_1} \in F$ nào đó có thể thác triển ra toàn vành tròn $V(a)$).

Ví dụ 7. Các điểm $z = 0, 1, \infty$ là những điểm bất thường cô lập của hàm $F(z) = \dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$.

Thật vậy, các điểm $0, \infty$ là những điểm bất thường cô lập của hàm $F(z)$ vì trong trường hợp này tập hợp

$$V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\},$$

thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa 5.3.5. Ta xét điểm $z = 1$. Tại lân cận bé $U(1, \varepsilon)$ của điểm $z = 1$ hàm $\sqrt{z}$ được phân thành hai nhánh chỉnh hình $f_1(z)$ và $f_2(z)$ (định lý Monodromie). Giả sử

$$f_1(1) = 1, \quad f_2(1) = -1.$$

Khi đó hàm $f(z)$ cũng sẽ phân thành hai nhánh

$$F_j(z) = \frac{1}{1 + f_j(z)}\,, \quad j = 1, 2,\ \forall\, z \in U(1, \varepsilon).$$

Nhánh $F_1(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 1$, nhánh $F_2(z)$ có cực điểm đơn tại $z = 1$, vì

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \frac{1}{1+\sqrt{z}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+(z-1)}} \\ &= \frac{1}{-\dfrac{z-1}{2} + \dots} = -\frac{2}{z-1} + \dots \end{aligned}$$

tại lân cận của điểm $z = 1$.

Ví dụ 8. Các điểm $z = 0, 1, \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm

$$F(z) = \frac{1+\sqrt{z}}{z-1}\cdot$$

Thật vậy, hiển nhiên $z = 0, \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm $F(z)$. Ta xét điểm $z = 1$. Tương tự như trong ví dụ trước, tại lân cận $U(1, \varepsilon)$ của điểm $z = 1$ hàm $F(z)$ được tách thành hai nhánh chỉnh hình $F_j(z) = \dfrac{1 + f_j(z)}{z - 1}$, $j = 1, 2$; $z \in U(1, \varepsilon)$. Nhánh F_1 có cực điểm đơn tại điểm $z = 1$, còn nhánh F_2 chỉnh hình tại điểm $z = 1$.

Định nghĩa 5.3.6. Giả sử a là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $F(z)$ và $V(a)$ là lân cận thỏa mãn định nghĩa 5.3.5 và $\gamma \subset V(a)$ là tuyến đóng Jordan chứa điểm a ở bên trong. Khi đó, nếu phép vòng quanh theo γ không làm thay đổi phần tử chính tắc đầu tiên thì điểm a được gọi là *điểm bất thường có đặc tính đơn trị*.

Như vậy, điểm bất thường cô lập có đặc tính đơn trị được đặc trưng bởi điều là: phần tử chính tắc $f_{z_1}(z)$ tại điểm z_1 đủ gần điểm cuối a của tuyến γ (cặp (a, γ)) xác định điểm bất thường của ta, có thể thác triển ra toàn vành tròn $V(a)$ như một hàm chỉnh hình.

Do đó, điểm bất thường cô lập có đặc tính đơn trị có thể xem như điểm biên cô lập của miền chỉnh hình của hàm chỉnh hình f nào đó (là một nhánh của hàm giải tích). Do đó sự phân loại các điểm bất thường này được căn cứ vào cấu trúc của chuỗi Laurent của hàm f trong $V(a)$ như đã trình bày trong **4.3**.

Định nghĩa 5.3.7. Giả sử a là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $F(z)$, $V(a)$ là lân cận như trong định nghĩa 5.3.5 và $\gamma \subset V(a)$ là tuyến Jordan bao điểm a ở trong. Giả sử phép vòng quanh theo γ đưa đến phần tử khác phần tử đầu tiên. Khi đó điểm a được gọi là *điểm bất thường có đặc tính đa trị* hay *điểm phân nhánh*. Có thể xảy ra hai khả năng sau đây.

1. Nếu tồn tại số nguyên $n \geqslant 2$ sao cho sau phép vòng quanh n lần theo một hướng ta quay về với phần tử đầu tiên thì điểm a được gọi là *điểm phân nhánh cấp hữu hạn* và số n bé nhất có tính chất vừa nêu là *cấp phân nhánh*.

2. Nếu số n như trong 1) không tồn tại (nghĩa là vòng quanh theo γ theo một hướng luôn luôn đưa đến phần tử mới) thì điểm a được gọi là *điểm phân nhánh cấp vô hạn* hay *điểm phân nhánh lôga*.

Ví dụ 9. Điểm $z = \pm 1$ là điểm phân nhánh cấp hai của hàm

$$F(z) = \sqrt{z^2 - 1}\,.$$

Thật vậy, giả sử

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2}.$$

Khi đó

$$F(z) = \sqrt{\rho_1\rho_2} \cdot e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

Từ đó suy ra rằng khi vòng quanh theo tuyến γ bao một trong hai điểm $z = -1$ hoặc $+1$ giá trị thu được khác giá trị đầu tiên của F về dấu. Thật thế, khi vòng theo γ thì θ_1 (hoặc θ_2) tăng lên 2π trong khi đó θ_2 (hoặc θ_1) không thay đổi. Do đó acgumen của căn thức thay đổi đại lượng bằng π còn môđun trở về giá trị ban đầu của nó. Nếu vòng quanh theo γ một lần nữa thì căn thức quay về giá trị đầu tiên của nó.

Ví dụ 10. Điểm $z = a$ và $z = b$ là những điểm phân nhánh của hàm

$$F(z) = \sqrt[n]{(z-a)^k(z-b)^{n-k}}, \quad 0 < k < n.$$

Thật vậy, ta xét điểm a. Ta đặt

$$z - a = r(a) \cdot e^{i\varphi(a)}, \quad z - b = r(b) \cdot e^{i\varphi(b)}.$$

Khi đó

$$F(z) = \sqrt[n]{r(a)r(b)} \cdot e^{\frac{k\varphi(a)+(n-k)\varphi(b)}{n}}.$$

Khi vòng quanh theo tuyến γ chỉ bao điểm a thì $\varphi(a)$ có gia số là 2π, và $\varphi(b)$ không thay đổi, còn $\sqrt[n]{r(a)r(b)}$ trở về giá trị đầu tiên của nó. Do đó

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma \arg F(z) &= \frac{k(\varphi(a)+2\pi)+(n-k)\varphi(b)}{n}\\ &= \frac{k\varphi(a)+(n-k)\varphi(b)}{n} + \frac{k}{n}2\pi.\end{aligned}$$

a) Nếu k và n nguyên tố cùng nhau thì hiển nhiên điểm $z = a$ là điểm phân nhánh cấp n.

b) Nếu d là ước số chung lớn nhất của k và n, tức là $k = p \cdot d$, $n = q \cdot d$, $q \geqslant 1$ và p, q nguyên tố cùng nhau thì khi đó điểm $z = a$ là điểm phân nhánh cấp q nếu $q \geqslant 2$. Nếu $q = 1$ thì k chia hết cho n và điểm $z = a$ không phải là điểm phân nhánh.

Tương tự như vậy, điểm $z = b$ là điểm phân nhánh của hàm $F(z)$. Việc xác định cấp phân nhánh của điểm b được tiến hành tương tự.

Ví dụ 11. Xét hàm giải tích

$$F(z) = \sqrt[n]{(z-a)^k(z-b)^\ell}\,,$$

trong đó $k + \ell$ không phải bội của n.

Hiển nhiên các điểm $z = a, b$ là những điểm phân nhánh của hàm $F(z)$. Ta sẽ chứng tỏ rằng điểm ∞ cũng là điểm phân nhánh.

Ta ký hiệu

$$z - a = r(a)e^{i\varphi(a)}\,, \quad z - b = r(b)e^{i\varphi(b)},$$

trong đó z nằm trên đường tròn chạy theo hướng âm:

$$\gamma^-(R) = \{|z| = R, R > \max\{|a|, |b|\}\}.$$

Khi đó

$$F(z) = \sqrt[n]{r(a)r(b)}\; e^{i\frac{k\varphi(a)+\ell\varphi(b)}{n}}.$$

Khi vòng quanh theo $\gamma^-(R)$ thì cả $\varphi(a)$ lẫn $\varphi(b)$ đều nhận hai số -2π và do đó

$$\begin{aligned}\Delta_{\gamma^-(R)} \arg F(z) &= \frac{k[\varphi(a) - 2\pi] + \ell[\varphi(b) - 2\pi]}{n}\\ &= \frac{k\varphi(a) + \ell\varphi(b)}{n} - \frac{k+\ell}{n}2\pi.\end{aligned}$$

Vì $k + \ell$ không phải bội số của n nên $\dfrac{k+\ell}{n}2\pi \neq$ bội nguyên của 2π. Từ đó suy ra $z = \infty$ là điểm phân nhánh.

Để kết thúc mục này ta chứng minh định lý về cấu trúc của hàm giải tích lân cận điểm phân nhánh cấp hữu hạn a.

Định lý 5.3.4. *Giả sử $f(z)$ giải tích trong vành tròn $V(a)$ và a là điểm phân nhánh cấp hữu hạn m của hàm $f(z)$. Khi đó hàm $f(z)$ có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-a)^{n/m}. \tag{5.7}$$

Chứng minh. Để chứng minh ta xét hàm

$$g(\zeta) = f(a + \zeta^m).$$

Hàm $g(\zeta)$ có các tính chất sau đây.

a) Hàm $g(\zeta)$ giải tích trong vành tròn

$$V^* = \{0 < |\zeta| < \sqrt[m]{r}\}$$

b) Hàm $g(\zeta)$ đơn trị trong V^*. Thật vậy, ta lấy đường tròn

$$\gamma(\rho) = \{|\zeta| = \rho,\ 0 < \rho < \sqrt[m]{r}\}.$$

Khi điểm $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ đi hết đường tròn $\gamma(\rho)$ một lần theo hướng dương thì điểm $z = a + \zeta^m = a + \rho^m e^{im\varphi}$ sẽ vòng quanh đường tròn

$$\gamma^*(\rho) = \{|z - a| = \rho^m\}$$

theo hướng dương m lần. Do đó phép thác triển giải tích hàm $g(\zeta)$ theo đường tròn $\gamma(\rho)$ trọn một vòng sẽ đưa đến thác triển giải tích hàm $f(z)$ theo đường tròn $\gamma^*(\rho)$ trọn m lần theo hướng dương. Vì điểm a là điểm phân nhánh cấp m nên theo định nghĩa 5.3.6 lần thác triển thứ m theo đường tròn $\gamma^*(\rho)$ sẽ đưa đến phần tử đầu tiên. Do đó hàm $g(\zeta)$ đơn trị trong V^*.

Từ hai tính chất này và nhận xét ở đầu tiết 2 của mục này, suy ra tính chỉnh hình của $g(\zeta)$. Khai triển hàm $g(\zeta)$ thành chuỗi Laurent trong vành tròn V^* ta có

$$g(\zeta) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n \zeta^n. \tag{5.8}$$

Bằng cách thế $\zeta = (z - a)^{1/m}$ vào khai triển (5.8) ta thu được (5.7). □

Hệ quả 5.3.1. *Giả sử điểm $z = \infty$ là điểm phân nhánh cấp m của hàm giải tích $f(z)$. Khi đó hàm f có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^{n/m}, \tag{5.9}$$

trong đó chuỗi hội tụ trong vành tròn dạng $\{R < |z| < \infty\}$.

Chứng minh. Nhận xét rằng điểm $\zeta = 0$ là điểm phân nhánh cấp m của hàm $f(1/\zeta)$. Do đó từ định lý 5.3.4 suy ra hệ quả 5.3.1. □

Khai triển (5.7) và (5.9) là khái quát của khai triển Laurent mà ta đã nghiên cứu trong chương trước. Như vậy, điểm phân nhánh cô lập cấp m của hàm $f(z)$ $(m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2)$ được đặc trưng bởi điều kiện là: tại lân cận của điểm ấy có một nhánh của $f(z)$ được biểu diễn dưới dạng

$$f = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n(z-a)^{n/m} \quad a \neq \infty \tag{5.10}$$

hoặc

$$f = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^{-n/m} \quad (a = \infty). \tag{5.11}$$

Căn cứ vào cấu trúc của chuỗi (5.10) hoặc (5.11) điểm phân nhánh $z = a$ còn được gọi là

1. *điểm phân nhánh đại số* nếu chỉ có một số hữu hạn hệ số $a_n \neq 0$ khi $n < 0$;

2. *điểm phân nhánh siêu việt* nếu có vô số hệ số $a_n \neq 0$ khi $n < 0$ (điểm bất thường cốt yếu có đặc tính đa trị!).

5.4 Khái niệm về diện Riemann

Như đã nói trong mục trước, hàm giải tích không phải là hàm theo nghĩa thông thường của từ đó vì mỗi giá trị z có thể tương ứng với một hoặc một số (và thậm chí là một tập hợp đếm được giá trị). Để có thể xem hàm $F(z)$ như là hàm theo nghĩa thông thường ta gắn hàm $F(z)$ với một mặt R nào đó mà trên đó hàm $F(z)$ đơn trị. B. Riemann là người đầu tiên đưa ra ý niệm tìm những mặt mới thay cho mặt phẳng phức mà trên đó mọi hàm giải tích đều đơn trị. Những mặt thu được đó gọi là *diện Riemann*. Diện Riemann có thể xem như là phương pháp tưởng tượng trực quan về đặc trưng đa trị của hàm giải tích. Có thể nói rằng tính trực quan là ý nghĩa cơ bản của việc đưa khái niệm diện Riemann để nghiên cứu hàm đa trị.

5.4.1 Một số ví dụ mở đầu

Giả sử cho hàm chỉnh hình $f(z)$ xác định trong miền D của mặt phẳng phức. Tại mỗi điểm $a \in D$ hàm $f(z)$ được khai triển thành chuỗi Taylor. Ta tách ra những chuỗi mà hình tròn hội tụ của chúng vượt ra khỏi giới hạn của D. Hợp miền D với mọi hình tròn này lập nên một miền $D_1 \supset D$ nào đó. Có thể có hai trường hợp xảy ra.

1. *Trường hợp 1:* Trong giao của hai hình tròn K_1 và K_2: $G = K_1 \cap K_2$, tổng của chuỗi Taylor tương ứng

$$f_1(z) = a_0^1 + a_1^1(z-a) + a_1^1(z-a)^2 + \dots$$
$$f_2(z) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}(z-\widetilde{a}) + a_2^{(2)}(z-\widetilde{a})^2 + \dots$$

khác nhau, nghĩa là $f_1(z) \neq f_2(z)$, $z \in G$.

Do đó, tại điểm $z \in G$ hàm có hai giá trị. Theo đề nghị của Riemann, trong trường hợp đó, ta sẽ hình dung rằng ở phía trên miền G, các hình tròn K_1 và K_2 nằm trên nhau (không nhập làm một) trong hai mặt phẳng (hoặc tờ - mặt phẳng).

2. Nếu tổng $f_1(z) = f_2(z)$ trong G thì ta sẽ dán các hình tròn K_1 và K_2 với nhau theo miền G để được một "tờ". Như vậy, miền thu được D_1 trong kết quả của thác triển không nhất thiết là đơn diệp (một tờ) mà ở những phần riêng lẻ nó có thể là đa diệp (nhiều tờ!).

Quá trình thác triển giải tích có thể tiếp tục bằng cách khai triển hàm thành chuỗi Taylor tại các điểm nằm ngoài D nhưng nằm trong D_1 (ở một số phần riêng lẻ miền D_1 có thể là đa diệp). Qua bước thác triển này miền giải tích của hàm có thể được mở rộng thành miền D_2 nào đó chứa D_1, v. v... Quá trình này có thể tiếp tục cho đến khi phép thác triển tiếp theo không thực hiện được. Và như ta biết, hàm thu được trong kết quả là hàm giải tích đủ, còn miền được phủ bởi miền D đã cho và mọi hình tròn hội tụ được gọi là miền tồn tại của hàm. Miền này có thể là đơn diệp và cũng có thể là đa diệp. Bây giờ ta sẽ trình bày một số ví dụ xây dựng diện Riemann một số hàm đơn giản để phục vụ cho sự hình dung trực quan diện Riemann sẽ trình bày trong phần sau.

Ví dụ thứ nhất. Xét hàm giải tích

$$F(z) = \sqrt[n]{z}\,, \quad z \in D = \{0 < |z| < \infty\}.$$

Trong miền $D = \{0 < |z| < \infty\}$ hàm $F(z)$ là đa trị. Các điểm $z = 0, \infty$ là điểm phân nhánh cấp n (xem định nghĩa 5.3.7). Ta đặt $D^* = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Trong miền D^* hàm $F(z)$ có thể tách thành n nhánh chỉnh hình

$$f_m(z) = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2\pi i m}{n}} = \widetilde{F}(z) e^{i\frac{2\pi m}{n}}, \tag{5.12}$$

$\widetilde{F}(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\arg z}{n}}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $-\pi < \arg \leqslant \pi$. Ta lấy n bản - miền D^*

$$D^*_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_-$$

với biên của mỗi miền là nhát cắt theo $\mathbb{R}_-$. Ta ký hiệu bờ trên của nhát cắt $\mathbb{R}_-$ là γ^+ và bờ dưới là γ^-.

Ta nhận xét rằng các nhánh chỉnh hình $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ có thể thác triển liên tục lên các bờ của nhát cắt. Do đó ta có thể đồng nhất những điểm trên các bờ của các nhát cắt mà tại đó giá trị của các nhánh chỉnh hình trùng nhau.

Từ các hệ thức (5.12) ta có

$$f_m(z)\big|_{\gamma^+} = \widetilde{F}(z) e^{\frac{2m+1}{n}\pi i}, \quad f_n(z)\big|_{\gamma^-} = \widetilde{F}(z) e^{\frac{2m-1}{n}\pi i}.$$

Do đó

$$f_m(z)\big|_{\gamma^+} = f_{m+1}(z)\big|_{\gamma^-} : \ m = 0, 1, \ldots, n-2$$

và

$$f_{n-1}(z)\big|_{\gamma^-} = f_0(z)\big|_{\gamma^+}.$$

Do đó từ nhận xét trên đây ta có thể đồng nhất ("dán") các bờ của nhát cắt như sau. Khi $m = 0, 1, \ldots, n-2$ ta sẽ dán bờ γ^+ của nhát cắt $\mathbb{R}_-$ trên bản miền D^*_m với bờ γ^- trên bản miền D^*_{m+1}. Vì giá trị $f_0 = f_n$ trên $\mathbb{R}_-$ (và cả $D_0^* = D_n^*$) nên ta còn phải dán bờ γ^+ của bản miền D_0^* với bờ γ^- của bản miền D_{n-1}^*.

Trong không gian ba chiều, phép dán không có tự cắt sau cùng này không thể thực hiện được. Nhưng điều đó không căn bản. Mặt n- tờ vừa được dựng gọi là *diện Riemann của hàm* $\sqrt[n]{z}$. Bây giờ tọa độ z sẽ xác định điểm trên tờ số 0, điểm trên tờ số 1, ... , và điểm nằm trên tờ thứ $n-1$. Ta cần tìm ký hiệu để xác định điểm duy nhất trên diện Riemann.

Điểm $z \neq 0, \neq \infty$ thuộc tờ thứ 0 đặt tương ứng với giá trị cố định của $\sqrt[n]{z}$ bằng $f_0(z)$, $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ và ký hiệu điểm trên tờ thứ 0 là $(z, f_0(z))$. Sau đó xuất phát từ giá trị $\sqrt[n]{z}$ ta thác triển hàm $F(z)$ theo tuyến đóng giản đơn bao điểm gốc tọa độ ta sẽ vượt qua nhát cắt và đi đến tờ thứ nhất và khi trở về điểm có tọa độ z trên tờ thứ nhất $F(z)$ nhận giá trị $f_1(z)$. Ta ký hiệu điểm z trên tờ thứ nhất là $(z, f_1(z))$, v.v... Bằng cách lý luận tương tự, ta ký hiệu điểm z trên tờ thứ $n-1$ là $(z, f_{n-!}(z))$.

Như vậy mọi điểm của mặt n - tờ vừa dựng có thể xem như các cặp có thứ tự $(z, F(z))$, trong đó $F(z) = \sqrt[n]{z}$ và ngoài ra hai điểm (z_1, F_1) và (z_2, F_2) trùng nhau trên diện Riemann khi và chỉ khi

$$z_1 = z_2, \quad F_1(z) = F_2(z)$$

tại lân cận điểm $z = z_1$. Hiển nhiên rằng hàm $F(z)$ đơn trị trên diện Riemann của nó và nhận giá trị F tại điểm (z, F).

Ở phía trên điểm $z = 0$ diện Riemann của hàm F chỉ có một điểm và tương tự trên điểm $z = \infty$ diện Riemann cũng chỉ có một điểm. Các điểm này gọi là *điểm phân nhánh* của mặt.

Trên hình V.4 là diện Riemann của hàm 2-trị $\sqrt{z}$. Đối với hàm $w = \sqrt{z}$, mỗi giá trị $\neq 0$ tương ứng với hai giá trị khác nhau w_1 và $w_2 = e^{\pi i}w_1$ khác nhau bởi thừa số $e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i} = -1$, tức là khác nhau về dấu.

Nếu xuất phát từ điểm z_0 thuộc tờ D_2 ta vạch một chu tuyến đóng bao điểm phân nhánh $z = 0$ thì khi trở về vị trí xuất phát z_0 ta sẽ ở tờ D_1 với giá trị hàm $w_2(z_0)$ và nếu tiếp tục thực hiện một lần vòng quanh miền xung quanh điểm phân nhánh ta sẽ trở về vị trí xuất phát cùng với giá trị xuất phát của hàm $w_1(z_0)$.

Hình V.4 *Hình V.5*

Ví dụ thứ hai. Xét hàm giải tích

$$F(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(xem ví dụ 9, **5.3**). Ta ký hiệu $\rho_1(z)$, $\theta_1(z)$ và tương ứng $\rho_2(z)$, $\theta_2(z)$ là môđun và acgumen của các số phức $z-1$ và $z+1$. Khi đó

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{\rho_1(z)\rho_2(z)}e^{i\frac{[\theta_1(z)+\theta_2(z)]+2m\pi}{2}}, \quad m = 0, 1$$

và hiển nhiên rằng trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ hàm $\varphi(z)$ có thể tách thành hai nhánh chỉnh hình $\varphi_m(z)$, $m = 0, 1$ và do đó hàm F được tách thành hai nhánh chỉnh hình $f_0(z)$ và $f_1(z)$.

Để dựng diện Riemann của hàm $F(z) = z + \varphi_m(z)$, $m = 0, 1$ ta lấy hai bản miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ trong đó đoạn $\gamma = [-1, +1]$ được chứa trong $\mathbb{R}$, $m = 0, 1$. Tương tự như trong ví dụ thứ nhất dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} f_0(z)\big|_{\gamma^- \subset D_0} &= f_1(z)\big|_{\gamma^+ \subset D_1}, \\ f_0(z)\big|_{\gamma^+ \subset D_0} &= f_1(z)\big|_{\gamma^- \subset D_1}. \end{aligned}$$

Do đó ta sẽ dán bờ dưới γ^- của bản miền D_0 với bờ trên γ^+ của bản miền D_1 và tiếp theo là dán bờ trên $\gamma^+ \subset D_0$ với bờ dưới $\gamma^- \subset D_1$ (cách dán này gọi là cách dán bắt chéo!).

Mặt hai tờ vừa thu được gọi là diện Riemann của hàm $F(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (hình V.5).

Điểm $z = \infty$ không phải là điểm phân nhánh của hàm đã cho vì tại lân cận điểm ∞ ta có thể khai triển hàm đó thành chuỗi Laurent có phần chính dạng $= \text{const} \cdot z$, và do đó điểm ∞ là cực điểm đơn của các nhánh chỉnh hình. Từ đó suy ra rằng trên mỗi tờ đều có điểm vô cùng riêng của nó.

Ví dụ thứ ba. Trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_-$ hàm giải tích

$$F(z) = \operatorname{Ln} z$$

có thể tách vô số nhánh chỉnh hình. Bờ trên của nhát cắt ta ký hiệu là γ^+, còn bờ dưới là γ^-. Khi đó, nếu ta ký hiệu $f_m(z)$ là các nhánh chỉnh hình thì

$$\begin{aligned} f_m(z) &= \ln|z| + i\arg z + 2\pi i m; \\ -\pi &< \arg z < \pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Từ hệ thức (5.13) suy ra rằng

$$\begin{aligned} f_m(z)\big|_{\gamma^+} &= \ln|z| + (2m+1)\pi i, \\ f_m(z)\big|_{\gamma^-} &= \ln|z| + (2m-1)\pi i. \end{aligned}$$

Do đó

$$f_m(z)\big|_{\gamma^+} = f_{m+1}(z)\big|_{\gamma^-}.$$

Áp dụng nhận xét đã nêu trong ví dụ thứ nhất ta sẽ lấy các bản miền D_m tương ứng với các nhánh chỉnh hình $f_m(z)$ và dán các bờ của chúng như sau: dán bờ γ^+ của bản miền D_m với γ^- của bản miền D_{m+1}, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Kết quả của phép dán này sẽ cho ta mặt vô số tờ - diện Riemann của hàm lôgarit (hình V.6).

Trên diện Riemann này có thể xem lôgarit như hàm theo nghĩa thông thường. Tại các điểm $z = 0$ và $z = \infty$ lôgarit không xác định, do đó diện Riemann không có một điểm nào ở phía trên $z = 0$ và $z = \infty$.

Ví dụ thứ tư. Tương tự như ở ví dụ thứ hai, diện Riemann của hàm (xem ví dụ 3, **5.3**)

$$F(z) = \sqrt{(z-m)(z-a_2)(z-a_3)}\,, \quad a_1 \neq a_2 \neq a_3$$

có thể dựng như sau. Hiển nhiên rằng điểm a_1, a_2, a_3 và $z = \infty$ là những điểm phân nhánh cấp hai của hàm $F(z)$. Giả sử $\gamma(a_1, a_2)$, $\gamma(a_3, \infty)$ là những tuyến Jordan không giao nhau, nối a_1 với a_2, a_3 với ∞ (hình V.7).

Hình V.6 *Hình V.7*

Bây giờ ta lấy hai bản miền D.

$D_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \gamma(a_3, \infty)\}$, $m = 0, 1$ tương ứng với các nhánh chỉnh hình f_m; $m = 0, 1$ trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \gamma(a_3, \infty)\}$ và sau đó dán bắt chéo các bản miền đó với nhau theo các nhát cắt $\gamma(a_1, a_2)$ và $\gamma(a_3, \infty)$. Mặt hai tờ vừa dựng là diện Riemann của hàm đã cho. Các điểm của mặt này có thể ký hiệu là $(z, F(z))$, trong đó z xác định điểm trên cả hai tờ, còn $F(z)$ thì xác định điểm đó của mặt nằm trên tờ nào.

Ví dụ thứ năm. Diện Riemann của hàm

$$F(z) = \sqrt[n]{(z-a)^k (z-b)^\ell}$$

là mặt n - tờ. Để dựng diện Riemann của hàm $F(z)$ cần phân biệt hai trường hợp có thể xảy ra.

1. Số $k + \ell$ là bội số của n. Do đó, điểm $z = \infty$ không phải là điểm phân nhánh của hàm $F(z)$. Trong trường hợp này diện Riemann của $F(z)$ được xây dựng tương tự như ở ví dụ thứ hai.

2. Số $k + \ell$ không phải là bội số của n. Trong trường hợp này (xem ví dụ 11, **5.3**) điểm $z = \infty$ là điểm phân nhánh cấp n của hàm $F(z)$. Do đó diện Riemann của hàm $F(z)$ được xây dựng tương tự như trong ví dụ thứ tư.

Ví dụ thứ sáu. Xét hàm giải tích (xem ví dụ thứ tư)

$$F(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}\,,$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số phức khác nhau. Như ta biết $F(z)$ là hàm có hai giá trị. Do đó ta sẽ thu được diện Riemann hai tờ với các điểm phân nhánh là $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Để dựng diện Riemann đối với hàm đã cho, ta cần phân biệt hai trường hợp có thể xảy ra.

1. *n là số lẻ.* Ta ghép các điểm rẽ nhánh thành các cặp (a_1, a_2), $(a_3, a_4), \ldots$ Điểm a_n không được ghép với điểm nào thành cặp cả. Trong trường hợp này, điểm $z = \infty$ cũng là điểm phân nhánh nên ta sẽ ghép a_n với ∞. Do đó trong miền

$$D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\overbrace{\gamma(a_1, a_2) \cup \cdots \cup \gamma(a_n, \infty)}^{\frac{n+1}{2}\ \text{nhát cắt}}\},$$

trong đó $\gamma(a_1, a_2), \ldots, \gamma(a_n, \infty)$ là những nhát cắt đơn giản không giao nhau, hàm đã cho có thể tách thành hai nhánh chỉnh hình.

Bây giờ lấy hai bản miền D_m

$$D_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \cdots \cup \gamma(a_n, \infty)\}, \quad m = 0, 1$$

và dán bắt chéo với nhau theo những nhát cắt và ta sẽ thu được diện Riemann của hàm $F(z)$.

2. *n là số chẵn.* Trong trường hợp này ta lấy hai bản miền D_m.

$$D_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \gamma(a_3, a_4) \cup \cdots \cup \gamma(a_{n-1}, a_n)\}, \quad m = 0, 1$$

và tiến hành phép dán như ở trên (xem ví dụ thứ hai).

5.4.2 Phương pháp dựng diện Riemann

Ý niệm chủ yếu về diện Riemann là ở chỗ: tùy theo sự xuất hiện các hiện tượng không đơn trị trong quá trình thác triển giải tích, người ta đưa vào xét những "bản miền" mới ("các tờ" mới) thuộc mặt phẳng của biến độc lập và bằng cách gắn liền đồng thời các "bản mới" đó với các bản trước (có thể nói: "dán bản này với bản khác" !) sao cho điểm z chuyển dịch từ bản này đến bản kia là thông suốt.

Phương pháp dựng diện Riemann bằng cách cắt - dán đã mô tả trong các ví dụ ở tiết trước được ứng dụng trong trường hợp tổng quát. Ta sẽ mô tả một cách vắn tắt quá trình này.

Giả sử $F(z)$ là hàm giải tích tùy ý chỉ có các điểm bất thường cô lập. Từ mỗi điểm của mặt phẳng mà ở trên điểm đó tồn tại dù chỉ là một điểm bất thường, ta kẻ tia đi từ điểm đó ra vô cùng và không đi qua hình chiếu của các điểm bất thường khác. Mặt phẳng z với các nhát cắt theo những tia đó là một miền đơn liên D. Theo định lý Monodromie hàm giải tích $F(z)$ có thể tách thành một tập hợp đếm được các nhánh chỉnh hình

$$f_m(z), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Mỗi nhánh chỉnh hình $f_m(z)$ sẽ tương ứng với một bản miền D_m. Các tờ của chồng bản miền D_m vừa thu được sẽ được dán với nhau theo phương pháp đã tiến hành trong tiết trước.

5.5 Bài tập

1. Hãy khảo sát xem hàm đa trị

$$\sqrt{1+\sqrt{z}}$$

có nhánh đơn trị cho phép khai triển thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $z = 1$ hay không ?

2. Chứng minh rằng hàm $z^\alpha(1-z)^\beta$, trong đó α, β là những số thực, có thể tách nhánh chỉnh hình trong $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ nếu $\alpha + \beta$ là số nguyên.

3. Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ và f là nhánh chỉnh hình trong D của hàm $\sqrt{z^2-1}$ sao cho $f(2) = \sqrt{3}$.

1. Tính giá trị của f tại điểm $z = x \in \mathbb{R}$.
2. Khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $z = \infty$.

Trả lời: 2) $f(z) = z \sum\limits_{n \geqslant 0} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n z^{-2n}$.

4. Chứng minh rằng hàm đa trị

$$f(z) = \sqrt{z - z^2}$$

cho phép tách các nhánh chỉnh hình trong phần ngoài D của các nhát cắt $\Gamma_1 = [1, +\infty)$ và $\Gamma_2 = (-\infty, 0]$.

5. Giả sử $w(z)$ là nhánh chỉnh hình của hàm $f(z)$ trong bài tập 4 mà $w\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{1}{2}$.

Tính $w\Big(\dfrac{1+i}{2}\Big)$, $w(-1 + i0)$, $w(-1 - i0)$.

6. Giả sử D là phần ngoài của hai tia $\gamma_1 = [1, 1 - i\infty)$ và $\Gamma_2 = [-1, -1 + i\infty)$ và $w(z)$ là nhánh chỉnh hình của hàm $\ln(1 - z^2)$ thỏa mãn điều kiện $w(0) = 0$. Tính $w(8)$ và $w(1 + i)$.

7. Dựng diện Riemann của các hàm

1. $w = \sqrt[n]{(z-a)^k (z-b)^\ell}$

phân biệt hai trường hợp $k + \ell$ là bội của n và không là bội của n.

2. $w = \operatorname{Ln} \dfrac{z-a}{z-b}$.

Chương 6

Lý thuyết thặng dư và ứng dụng

6.1 Cơ sở lý thuyết thặng dư 423

6.1.1 Định nghĩa thặng dư 423

6.1.2 Phương pháp tính thặng dư 425

6.1.3 Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư 436

6.1.4 Tính tích phân theo chu tuyến đóng 444

6.2 Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư 448

6.2.1 Phương pháp tính tích phân 448

6.2.2 Tính tích phân dạng $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ . . . 451

6.2.3 Tích phân dạng $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 454

6.2.4 Tích phân dạng $I = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iax}R(x)dx$ 459

6.2.5 Tích phân dạng $I = \int\limits_{\mathbb{R}^+} R(x)x^{\alpha}dx$ 463

6.2.6 Một số ví dụ khác 478

6.2.7 Tìm tổng của chuỗi 490

6.3 Hàm nguyên và hàm phân hình 495

6.3.1 Hàm phân hình. Bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức 495

6.3.2 Hàm nguyên. Bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức 503

6.4 Bài tập 513

6.1 Cơ sở lý thuyết thặng dư

6.1.1 Định nghĩa thặng dư

Trước khi phát biểu định nghĩa về thặng dư ta chứng minh một định lý đơn giản sau đây

Định lý 6.1.1. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong vành tròn*

$$V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$$

Khi đó tích phân

$$I(\rho) = \int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)dz, \quad r < \rho < R$$

không phụ thuộc vào ρ.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ và $\gamma(\rho_1) = \{|z - a| = \rho_1\}$, $\gamma(\rho_2) = \{|z - a| = \rho_2\}$. Từ định lý về bất biến của tích phân theo các tuyến đồng luân suy ra rằng

$$\int\limits_{\gamma(\rho_1)} f(z)dz = \int\limits_{\gamma(\rho_2)} f(z)dx.$$

□

Định nghĩa 6.1.1. Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình tại điểm a hoặc có bất thường cô lập đặc tính đơn trị a. Giả sử γ là đường cong đóng Jordan bao điểm $z = a$ và được định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó tích phân $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ được gọi là *thặng dư* của hàm $f(z)$ đối với điểm a và được ký hiệu là

$$Res\,[f;a] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz. \tag{6.1}$$

Hiển nhiên chu tuyến γ thỏa mãn định nghĩa 6.1.1 bao giờ cũng tồn tại. Thật vậy, theo điều kiện đã cho hàm f chỉnh hình trong $U(\rho) = \{0 < |z-a| < \rho\}$. Do đó ta có thể lấy γ là đường cong Jordan đóng bất kỳ thuộc $U(\rho)$ không đi qua a nhưng bao a, ví dụ đường tròn $\gamma_r = \{|z-a| = r, r < \rho\}$.

Từ định lý Cauchy và định lý 6.1.1 suy ra rằng thặng dư (6.1) có thể viết dưới dạng

$$\mathrm{Res}\,[f;a] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(a,r)} f(z)dz, \tag{6.2}$$

trong đó đường tròn $\gamma(a,r)$ chạy theo hướng dương và đại lượng ở vế phải của (6.2) không phụ thuộc vào r và hoàn toàn được xác định bởi dáng điệu địa phương của hàm f tại điểm a.

Định nghĩa 6.1.2. Giả sử hàm $f \in H\{|z| > r\}$ và $z = \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$. Đại lượng

$$\mathrm{Res}\,[f;\infty] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-(0,R)} f(z)dz$$

được gọi là *thặng dư của hàm f tại điểm* ∞ trong đó $\gamma^{-}(0, R)$ là đường tròn $\gamma^{-}(0, R) = \{|z| = R\}$ với bán kính đủ lớn được định hướng sao cho lân cận điểm ∞ luôn luôn nằm bên trái.

Ta có thể đưa ra định nghĩa hợp nhất sau đây về thặng dư.

Định nghĩa 6.1.3. Giả sử $a \in \overline{\mathbb{C}}$ là điểm chỉnh hình hoặc điểm bất thường cô lập đơn trị của hàm f. Giá trị của tích phân của hàm f theo biên của lân cận đủ bé của điểm $z = a$ chia cho $2\pi i$ được gọi là *thặng dư* của hàm f tại điểm a.

Theo định lý Cauchy

$$\mathrm{Res}\,[f; a] = 0$$

nếu hàm f chỉnh hình tại điểm a và $a \in \mathbb{C}$. Thặng dư tại ∞ có thể khác 0 khi hàm chỉnh hình tại ∞. Thật vậy, giả sử $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Hiển nhiên điểm $z = \infty$ là không điểm đơn của f và

$$\mathrm{Res}\,[f; \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^{-}(0,R)} \frac{1}{z} dz = -1 \neq 0.$$

Như vậy hàm chỉ có thể có thặng dư $\neq 0$ tại điểm a cách gốc tọa độ một khoảng cách hữu hạn trong trường hợp khi a thật sự là điểm bất thường, trong khi đó nó có thể có thặng dư $\neq 0$ tại ∞ thậm chí cả trong trường hợp hàm chỉnh hình tại đó.

6.1.2 Phương pháp tính thặng dư

Việc tính thặng dư bằng cách xuất phát từ định nghĩa hết sức phức tạp. Cơ sở cho việc tính toán thặng dư một cách thực tiễn là định lý sau đây.

Định lý 6.1.2. *Giả sử với $0 < |z - a| < \rho$ hàm $f(z)$ có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n (z - a)^n, \tag{6.3}$$

Khi đó

$$\operatorname{Res}[f;a] = a_{-1}. \tag{6.4}$$

Nếu khi $R < |z| < \infty$

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_n z^n \tag{6.5}$$

thì

$$\operatorname{Res}[f;\infty] = -a_{-1}. \tag{6.6}$$

Chứng minh. 1. Trong vành tròn đóng bất kỳ

$$0 < \rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant \rho_2 < \rho$$

chuỗi (6.3) hội tụ đều nên có thể tích phân từng số hạng chuỗi (6.3) theo đường tròn $\gamma(r) = \{|z-a| = r; \rho_1 \leqslant r \leqslant \rho_2\}$. Kết quả của phép tích phân đó cho ta

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r)} f(z)dz = a_{-1}.$$

Từ đó suy ra (6.4) được chứng minh.

2. Vì chuỗi (6.1.5) hội tụ đều trên đường tròn

$$\gamma(0,\widetilde{R}) = \{|z| = \widetilde{R}, \widetilde{R} > R\}$$

nên có thể tích phân từng số hạng chuỗi đó theo $\gamma(0,\widetilde{R})$ và thu được

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-(0,\widetilde{R})} f(z)dz = -a_{-1}.$$

□

Ví dụ 1. Giả sử

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^6}\cdot$$

Tính $\mathrm{Res}[f;0]$.

Giải. Vì tại lân cận điểm $z=0$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^6}\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\Big)\\ &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} + \dots \end{aligned}$$

nên $a_{-1} = \dfrac{1}{5!}$ và $\mathrm{Res}[f;0] = \dfrac{1}{5!}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu

$$f(z) = z\cdot\cos\frac{1}{z+1}$$

thì

$$\mathrm{Res}[f;-1] = -\frac{1}{2}\cdot$$

Giải. Thật vậy, ta có

$$f(z) = [(z+1)-1]\Big[1 - \frac{1}{2(z+1)^2} + \dots\Big]$$

và do đó

$$a_{-1} = -\frac{1}{2}\cdot$$

Ví dụ 3. Giả sử

$$f(z) = \frac{1}{z(1-e^{-hz})}\cdot$$

Tính $\mathrm{Res}[f;0]$.

Giải. Khi đó $\operatorname{Res}[f;0] = \dfrac{1}{2}$. Thật vậy, tại lân cận điểm $z = 0$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z\Big[1 - 1 + hz - \dfrac{h^2z^2}{2!} + \dots\Big]} \\ &= \frac{1}{hz^2 - \dfrac{h^2z^3}{2!} + \dots} \\ &= \frac{1}{hz^2} + \frac{1}{2z} + \varphi(z), \end{aligned}$$

trong đó $\varphi(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Ta xét miền $D = \mathbb{C} \setminus [0,1]$ và hàm giải tích trong đó

$$F(z) = \sqrt[8]{\frac{z}{1-z}}\cdot$$

Tính $\operatorname{Res}[f;\infty]$, trong đó f là nhánh chỉnh hình nhận giá trị dương ở bờ trên của nhát cắt $[0,1]$.

Giải. Trong miền D hàm $F(z)$ có thể tách thành ba nhánh chỉnh hình. Giả sử $f(z)$ là nhánh chỉnh hình nhận giá trị dương ở bờ trên của nhát cắt. Ta sẽ khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm ∞. Với $z \in D$ ta có

$$f(z) = \left|\sqrt[8]{\frac{z}{1-z}}\right| e^{i\frac{\varphi}{3}}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

trong đó $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z$, $\varphi_2 = \Delta_\gamma(1-z)$, $\gamma \subset D$ là đường cong nằm trong D và nối điểm $0 + i0$ với $z \in D$. Khi $z = x > 1$ ta có $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\pi$. Do đó

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} e^{i\pi/3},$$

và $f(\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{i\pi/3}$.

Từ đó suy ra rằng trong lân cận điểm $z = \infty$ ta có

$$f(z) = e^{i\pi/3}\sqrt[3]{\frac{1}{1 - \dfrac{1}{z}}} = e^{i\pi/3}\Big(1 - \frac{1}{z}\Big)^{-\frac{1}{3}},$$

trong đó căn thức nhận giá trị 1 tại ∞. Từ đó dễ dàng thấy rằng

$$f(z) = e^{i\pi/3} \sum_{n \geq 0} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-1)^n z^{-n}$$

và

$$\operatorname{Res}[f; \infty) = -e^{i\pi/3} \binom{-\frac{1}{3}}{1}.$$

Ví dụ 5. Giả sử $f(z)$ là nhánh chỉnh hình của hàm

$$F(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

mà $f(0+i0) = 1$ trong miền $D = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Tính thặng dư của hàm $f(z)$ tại điểm ∞ (ví dụ **5.3.5**).

Giải. Ta khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm ∞. Ta có

$$f(\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-i\alpha\pi}.$$

Tiếp theo

$$f(z) = \left(\frac{-1 + \dfrac{1}{z}}{1 + \dfrac{1}{z}}\right)^{\alpha} = e^{-i\alpha\pi} g(z),$$

trong đó ta đặt

$$g(z) = \left(\frac{1 - \dfrac{1}{z}}{1 + \dfrac{1}{z}}\right)^{\alpha}.$$

Hàm $g(z)$ chỉnh hình tại điểm ∞ và $g(\infty) = 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{1 - \dfrac{1}{z}}{1 + \dfrac{1}{z}}\right)^{\alpha} \\ &= \frac{1 - \dfrac{\alpha}{z} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^{-2} + \dots}{1 + \dfrac{\alpha}{z} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^{-2} + \dots} \\ &= 1 - \frac{2\alpha}{z} + \dots \end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$f(z) = e^{i\pi\alpha}\Big[1 - \frac{2\alpha}{z} + \dots\Big]$$

và

$$\mathrm{Res}\,[f;\infty] = 2\alpha e^{i\alpha\pi}.$$

Ví dụ 6. Giả sử $f(z)$ là nhánh chỉnh hình của hàm $F(z) = \mathrm{Ln}\dfrac{1-z}{1+z}$ mà $f(0+i0) = 0$ trong miền $D = \mathbb{C}\setminus[-1,+1]$. Tính thặng dư của hàm $f(z)$ tại điểm ∞ (ví dụ **5.3.6**).

Giải. Ta có

$$\begin{gathered} f(z) = \ln\Big|\frac{1-z}{1+z}\Big| + i(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z), \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma(1+z), \end{gathered}$$

trong đó γ là tuyến thuộc D nối điểm $z = 0 + i0$ (điểm 0 ở bờ trên của nhát cắt) với điểm z. Hiển nhiên khi $z = iy$, $y > 0$ thì $\varphi_1 = -\varphi_2$, $\varphi_2 = \mathrm{arctg}\,y$ và do đó với $y > 0$.

$$f(iy) = -2i\mathrm{arcrg}\,y,$$

vì $|1 - iy| = |1 + iy|$.

Từ đó cũng rút ra rằng

$$f(\infty) = \lim_{y\to\infty} f(iy) = -\pi i.$$

Do đó tại lân cận điểm $z = \infty$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln \frac{-1+\dfrac{1}{z}}{1+\dfrac{1}{z}} \\ &= -\pi i + \ln\Big(1-\frac{1}{z}\Big) - \ln\Big(1+\frac{1}{z}\Big), \end{aligned}$$

trong đó các logarit ở vế phải chỉnh hình tại lân cận điểm ∞ và bằng 0 khi $z = \infty$.

Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} f(z) &= -\pi i - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{nz^n} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{nz^n} \\ &= -\Big[\pi i + \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)z^{2n+1}}\Big], \quad 1 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

và từ đó rút ra

$$\mathrm{Res}[f;\infty] = +2.$$

Trong các ví dụ trên đây, việc khai triển hàm thành chuỗi Laurent được tiến hành một cách dễ dàng. Tuy nhiên tuyệt đại đa số trường hợp phép khai triển đó được tiến hành rất khó khăn.

I. THẶNG DƯ TẠI ĐIỂM BẤT THƯỜNG CỐT YẾU. Nếu điểm $z = a$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì để tính thặng dư của hàm tại điểm đó ta cần tìm phần chính của khai triển Laurent và sử dụng công thức (6.4) nếu $a \in \mathbb{C}$, công thức (6.6) nếu $a = \infty$.

II. THẶNG DƯ TẠI CỰC ĐIỂM. Trong trường hợp khi a là cực điểm của hàm f, để tính thặng dư tại điểm a, thay cho công thức (6.4) và (6.6) (sử dụng khai triển Laurent) ta thường sử dụng những công thức sẽ chứng minh dưới đây chỉ cần tìm đạo hàm. Ta xét các trường hợp cụ thể sau đây.

1. Trường hợp cực điểm đơn

Định lý 6.1.3. *Nếu a là cực điểm đơn của hàm $f(z)$ thì thặng dư của f tại a được tính theo công thức*

$$Res[f;a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{6.7}$$

Chứng minh. Tại lân cận điểm a khai triển Laurent của hàm $f(z)$ có dạng

$$f(z) = a_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

và từ đó suy ra

$$a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Như vậy, để tính thặng dư tại cực điểm đơn ta có công thức

$$\mathrm{Res}[f(z);a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

□

Hệ quả 6.1.1. *Nếu* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$*, trong đó* φ *và* ψ *là những hàm chỉnh hình tại điểm a thỏa mãn điều kiện* $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ *thì*

$$Res[f;a] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\cdot \tag{6.8}$$

Chứng minh. Thật vậy, vì a là cực điểm của $f(z)$ nên từ (6.7) ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f;a] &= \lim_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)}\\ &= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\cdot\end{aligned}$$

□

Ví dụ 7. Tìm thặng dư của hàm $w = \operatorname{tg} z$ tại các điểm $z_n = \dfrac{2n+1}{2}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Giải. Ta có $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cos z_n = 0$, $\cos z'\big|_{z_n} = -\sin z_n$. Do đó từ (6.8) ta có

$$\operatorname{Res}[\operatorname{tg} z; z_n] = \frac{\sin z_n}{-\sin z_n} = -1.$$

Trường hợp cực điểm bội. Ta có định lý sau đây:

Định lý 6.1.4. *Nếu a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$ thì*

$$\operatorname{Res}[f; a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big\{(z-a)^m f(z)\big\}. \tag{6.9}$$

Chứng minh. Vì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$ nên

$$f(z) = \frac{a_m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

và từ đó

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1}\\ &\quad + \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^{n+m}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Lấy vi phân biểu thức (6.10) $m-1$ lần liên tiếp ta có

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!\,a_{-1} + m!\,a_0(z-a) + \ldots$$

và chuyển qua giới hạn khi $z \to a$ ta thu được (6.9). □

Ví dụ 8. Tính thặng dư của hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

đối với điểm $z = i$.

Giải. Hiển nhiên điểm $z = i$ là cực điểm cấp ba của hàm $f(z)$. Do đó áp dụng công thức (6.9) ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f;i] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\Big[(z-i)^3\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[(z+i)^{-3}]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to i}[(-3)(-4)(z+i)^{-5}] = -\frac{3}{16}i.
\end{aligned}$$

Ví dụ 9. Tính

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{\sin z^2}\,;0\Big].$$

Giải. Vì $z = 0$ là cực điểm cấp hai của hàm $f(z)$ nên

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f;0] &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\Big[\frac{z^2}{\sin z^2}\Big] = \lim_{z\to 0}\frac{2z\sin z^2 - 2z^3\cos z^2}{\sin^2 z^2}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{2z\Big[z^2 - \dfrac{z^6}{3!} + \dots\Big] - 2z^3\Big[1 - \dfrac{z^4}{2!} + \dots\Big]}{\Big(z^2 - \dfrac{z^6}{3!} + \dots\Big)^2}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{2}{3}z^7 + \dots}{z^4 + \dots} = 0.
\end{aligned}$$

III. THẶNG DƯ TẠI VÔ CÙNG. Công thức (6.6) là công thức cơ bản để tính thặng dư tại điểm vô cùng

$$\mathrm{Res}[f;\infty] = -a_{-1}. \qquad (20.6)$$

Tuy nhiên, trong một số trường hợp để tính thặng dư tại ∞, ta có thể áp dụng công thức được chứng minh trong định lý sau đây.

Định lý 6.1.5. *Nếu hàm f chỉnh hình tại điểm ∞ thì*

$$\mathrm{Res}[f;\infty] = -\lim_{z\to\infty} z[f(z) - a_0]. \qquad (6.11)$$

Chứng minh. Thật vậy, với $|z| > R$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 \Rightarrow f(z) - a_0 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{-n}}{z^n}\cdot \end{aligned}$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên đây với z và chuyển qua giới hạn khi $z \to \infty$ ta thu được (6.11). □

Hệ quả 6.1.2. *Nếu* ∞ *là không - điểm cấp* $m \geqslant 1$ *của* $f(z)$ *thì* $a_0 = a_{-1} = \dots = a_{-m+1} = 0$ *và do đó* $\mathrm{Res}[f;\infty] = -a_{-1} = 0$.

Nếu $m = 1$, *tức là* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a_0 = 0$ *thì*

$$\mathrm{Res}[f(z);\infty] = -\lim_{z\to\infty} z\cdot f(z).$$

Ví dụ 10. Giả sử cho hàm

$$F(z) = \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}, \quad p\in\mathbb{R} \quad D = \overline{\mathbb{C}}\setminus[0,1].$$

Tính thặng dư tại ∞ của nhánh chỉnh hình $f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$\arg(1-z) = \arg z = 0$$

khi z thuộc bờ trên của nhát cắt $[0,1] \subset \mathbb{R}$ còn sau đó các acgumen biến thiên liên tục.

Giải. Hiển nhiên điểm $z = 0$, $z = 1$ là điểm phân nhánh của hàm đa trị $F(z)$ và trong miền D hàm $F(z)$ có thể tách nhánh chỉnh hình. Giả sử $f(z)$ là nhánh thỏa mãn các điều kiện đã nêu. Hiển nhiên rằng

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

Do đó, để tính $\mathrm{Res}[f;\infty]$ ta có thể áp dụng công thức (6.11). Ta cần tìm $\lim\limits_{z\to\infty} |zf(z)|$ và $\lim\limits_{z\to\infty} \arg\, zf(z)$.

Ta có a)

$$\lim_{z\to\infty}|f(z)\cdot z| = \lim_{z\to\infty}|z|\cdot\frac{|z|^{1-p}|1-z|^p}{|1+z^2|}$$
$$= \lim_{z\to\infty}\frac{\left|1-\dfrac{1}{z}\right|^p}{\left|1+\dfrac{1}{z^2}\right|} = 1.$$

b) Tính $\lim\arg(zf(z))$. Vì $z\cdot f(z)$ là hàm chỉnh hình trong D nên giới hạn của nó không phụ thuộc vào phương dần z ra vô cùng. Giả sử $z\to\infty$ theo hướng dương của trục thực. Ta có

$$\lim_{z\to\infty}\arg(z\cdot f(z)) = \lim_{z\to\infty}\{\arg z + (1-p)\arg z + p\arg(1-z) - \arg(1+z^2)\}$$
$$= 0 + (1-p)\cdot 0 + p\cdot(-\pi) + 0 = -p\pi.$$

Như vậy

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot f(z) = e^{-p\pi i},$$

và từ đó suy ra rằng

$$\mathrm{Res}[f;\infty] = -e^{-p\pi i}.$$

6.1.3 Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư

Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư là định lý sau đây

Định lý 6.1.6. (Cauchy) *Giả sử D là tập hợp mở của mặt phẳng phức và f là hàm chỉnh hình trong $D\setminus\{a_i\}$, trong đó a_i là tập hợp những điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$. Giả sử Γ là biên có hướng của miền $B\subset D$ và giả thiết rằng Γ không đi qua một điểm bất thường nào của f. Khi đó*

1. *số điểm bất thường của f ở trong B là hữu hạn.*
2. *hàm $f(z)$ thỏa mãn hệ thức*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{a_i\in B} Res[f;a_i], \tag{6.12}$$

trong đó tổng ở vế phải của (6.12) *được lấy theo mọi điểm bất thường của hàm $f(z)$ nằm trong B.*

Chứng minh.

1. Điều khẳng định thứ nhất của định lý hoàn toàn hiển nhiên.

2. Để chứng minh điều khẳng định thứ hai ta cần phân biệt hai trường hợp

Trường hợp thứ nhất. Điểm $\infty \notin B$. Vì điểm ∞ không thuộc B nên B là miền của $\mathbb{C}$. Giả sử S_i là những hình tròn đóng với tâm tại mỗi điểm bất thường a_i $(\in \mathring{B})$: $S_i = \{|z - a_i| \leqslant r_i, r_i > 0\}$. Ta giả thiết rằng r_i được chọn đủ bé sao cho:

a) $\overline{S}_i \subset \mathring{B}$, $\forall\, i$; b) $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Giả sử γ_i là biên của hình tròn S_i tương ứng chạy theo hướng dương. Ta ký hiệu

$$B^* = B \setminus \big(\bigcup_i \mathring{S}_i\big),$$

trong đó $\mathring{S}_i$ là phần trong của S_i. Hiển nhiên B^* cũng là một miền. Biên ∂B^* chính là hiệu giữa biên có hướng Γ của B và các đường tròn γ_i. Vì $f \in H(B^*)$ nên

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz. \tag{6.13}$$

Nhưng mặt khác từ (6.2) ta có

$$\int_{\gamma_i} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f; a_i].$$

Thế biểu thức này vào (6.13) ta thu được hệ thức (6.12).

Trường hợp thứ hai. Điểm $\infty \in B$. Giả sử $U(\infty, r) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geqslant r\}$ là lân cận điểm ∞ mà tại đó hàm $f(z)$ chỉnh hình (có thể trừ ra chính điểm $z = \infty$) và giả sử $\partial U(\infty, r) \cap \Gamma = \emptyset$.

Ta ký hiệu:

$$\widetilde{B}(r) = B \setminus \{|z| > r\}.$$

Biên có hướng của $\widetilde{B}(r)$ là tổng biên có hướng Γ của B và đường tròn $\{|z| = r\}$ chạy theo hướng dương. Vì miền $\widetilde{B}(r)$ không chứa điểm ∞ nên từ trường hợp I suy ra

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz + \int\limits_{\{|z|=r\}} f(z)dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}[f; a_i], \tag{6.14}$$

trong đó tổng ở vế phải của (6.14) được lấy theo mọi điểm bất thường a_i của f nằm trong miền B trừ ra điểm ∞. Nhưng theo định nghĩa 6.1.2 ta có

$$\int\limits_{\{|z|=r\}} f(z)dz = -2\pi i \mathrm{Res}[f; \infty],$$

và từ (6.14) suy ra rằng

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \Big\{ \sum_i \mathrm{Res}[f; a_i] + \mathrm{Res}[f; \infty] \Big\}.$$

Đó chính là đẳng thức (6.2) vì điểm ∞ cũng là một trong các điểm a_i. □

Nhận xét 6.1.1. Công thức tích phân cơ bản thứ hai của Cauchy là nền tảng để xây dựng toàn bộ lý thuyết hàm chỉnh hình mà đặc biệt là để thu được khai triển Laurent và do đó để tính thặng dư. Nhưng công thức đó lại là một hệ quả của định lý cơ bản của Cauchy về lý thuyết thặng dư. Thật vậy, đối với hàm $f \in \mathcal{H}(D)$, hàm

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$$

nhận điểm a là điểm bất thường có thể có. Thặng dư của hàm này tại a bằng $f(a)$. Thật thế, điểm a chỉ có thể là điểm chỉnh hình hoặc cực điểm đơn của $\dfrac{f(z)}{z-a}$ và nếu ta sử dụng khai triển

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots$$

thì hệ số của $\dfrac{1}{z-a}$ sẽ là $f(a)$. Do đó

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = Res\Big[\frac{f(z)}{z-a}\,;a\Big] = f(a).$$

Định lý 6.1.6 có ý nghĩa to lớn về mặt nguyên tắc vì nó đưa việc tính một đại lượng có tính chất toàn cục - tích phân của hàm chỉnh hình theo biên của miền - về tính những đại lượng có tính chất địa phương - thặng dư của hàm tại các điểm bất thường.

Hệ quả 6.1.3. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong toàn mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ trừ ra (một số hữu hạn) các điểm bất thường cô lập. Khi đó tổng các thặng dư tại các điểm ấy (kể cả điểm ∞) là bằng 0.*

Chứng minh. Trước hết ta nhận xét rằng số các điểm bất thường cô lập (nếu hàm không có điểm bất thường không cô lập) không thể bằng ∞ vì trong trường hợp đó sẽ tồn tại điểm tụ đối với tập hợp các điểm bất thường và điểm đó là điểm bất thường nhưng không cô lập.

Bây giờ giả sử a là điểm hữu hạn tùy ý mà tại đó f chỉnh hình. Ta bao điểm a bởi một đường tròn $\gamma(a,\varepsilon)$ với tâm a và bán kính đủ bé ε sao cho f chỉnh hình trong $\overline{S(a,\varepsilon)} = \{|z-a| \leqslant \varepsilon\}$. Đường tròn $\gamma(a,\varepsilon)$ chia mặt phẳng thành hai miền: miền bị chặn $D = S(a,\varepsilon)$ và miền không bị chặn D^∞. Áp dụng định lý thặng dư đối với D^∞ ta thu được

$$\int\limits_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)dz = 2\pi i\sum_{\overline{\mathbb{C}}}\mathrm{Res}[f;.].$$

Mặt khác, theo định lý tích phân Cauchy (áp dụng cho miền D) ta có

$$\int\limits_{\gamma(a,\varepsilon)} f(z)dz = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{\overline{\mathbb{C}}}\mathrm{Res}[f;.] = 0. \qquad (6.15)$$

□

Định lý Cauchy vừa chứng minh là một trong những định lý quan trọng nhất của lý thuyết hàm biến phức. Định lý đó chỉ đúng trong trường hợp khi trên biên Γ hàm $f(z)$ không có điểm bất thường. Ta sẽ khái quát định lý 6.1.6 cho trường hợp khi hàm $f(z)$ *có cực điểm đơn* trên biên Γ.

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong Γ trừ ra một số hữu hạn điểm bất thường cô lập

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

và chỉnh hình trên Γ trừ ra một số hữu hạn điểm bất thường cô lập

$$a_1, a_2, \dots, a_m.$$

Lấy $a_1, a_2, \dots, a_m$ làm tâm ta dựng các đường tròn $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ với bán kính ε đủ bé sao cho mỗi đường tròn γ_k, $k = 1, \dots, m$ chỉ cắt Γ tại hai điểm. Ta ký hiệu

$$\gamma(a_k, \varepsilon) = \Gamma \cap \{|z - a_k| \leqslant \varepsilon\}, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$
$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \gamma(a_k, \varepsilon).$$

Ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 6.1.4. Giới hạn của tích phân

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} f(z)dz,$$

khi $\varepsilon \to 0$ được gọi là *giá trị chính* của tích phân $I = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ theo Cauchy và ký hiệu là

$$\text{v.p.} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} f(z)dz,$$

(trong đó v.p. là những chữ cái đầu tiên của các từ tiếng Pháp Valeur-principal - có nghĩa là “giá trị chính”).

Định lý 6.1.7. *Giả sử D là tập hợp mở của mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ và f là hàm chỉnh hình trong $D \setminus \{a_i\}$, trong đó a_i là tập hợp những điểm bất thường cô lập của f. Giả sử trên biên trơn Γ của miền $\widetilde{D} \subset D$ hàm f chỉ có một số hữu hạn cực điểm đơn $a_1, a_2, \dots, a_m$.*

Khi đó giá trị chính của tích phân $\int\limits_\Gamma f dz$ tồn tại và được tính theo công thức

$$v.p. \int\limits_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \Big\{ \sum_{a_i \in \widetilde{D}} Res[f; a_i] + \frac{1}{2} \sum_{a_k \in \Gamma} Res[f; a_k] \Big\} \tag{6.16}$$

trong đó tổng $\sum\limits_{a_i \in \widetilde{D}}$ được lấy theo mọi điểm bất thường a_i nằm trong $\widetilde{D}$, còn tổng thứ hai ở vế phải (6.16) *được lấy theo mọi cực điểm $a_k \in \Gamma$.*

Chứng minh. Để tiện trình bày ta ký hiệu các điểm bất thường cô lập của f trong $\mathring{\widetilde{D}}$ là

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

(một số hữu hạn điểm!). Ta sẽ chọn ε đủ bé sao cho các điểm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ không nằm trên các đường tròn γ_k, $k = 1, 2, \dots, m$, trong đó

$$\gamma_k = \big\{ |z - a_k| = \varepsilon \big\}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Giả sử

$$\widetilde{\gamma}(a_k, \varepsilon) = \widetilde{D} \cap \gamma_k,$$

là cung tròn chạy theo hướng âm, và

$$\widetilde{\Gamma}(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon) \cup \Big\{ \bigcup_{k=1}^{m} \widetilde{\gamma}(a_k, \varepsilon) \Big\}.$$

Như vậy $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)$ là biên của miền D^* nào đó và hiển nhiên trên $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)$ hàm f không có điểm bất thường nào. Áp dụng định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư cho D^* với biên $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)$ và hàm f ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)} f dz &= \int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f;\alpha_k],\end{aligned}$$

và do đó

$$\int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f;\alpha_k] + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+} f(z)dz, \tag{6.17}$$

trong đó $\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+$ là những cung tròn chạy theo hướng dương. Vì $a_1, a_2, \dots, a_m$ là cực điểm đơn của hàm f nên tại lân cận các điểm ấy, hàm f có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = \frac{c_{-1,k}}{z-a_k} + \varphi_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

trong đó $\varphi_k(z)$ là phần chỉnh hình của f tại lân cận điểm a_k. Do đó

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+} f(z)dz = c_{-1,k} \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+} \frac{dz}{z-a_k} + \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+} \varphi_k(z)dz = I_1 + I_2.$$

Rõ ràng là khi $\varepsilon \to 0$ thì hai cát tuyến $\overline{a_k t_2}$ và $\overline{a_k t_1}$ (hình VI.1) dần tới vị trí của tiếp tuyến với Γ tại điểm a_k và do đó

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi, \text{ và}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)} \frac{dz}{z-a_k}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} i(\varphi_2-\varphi_1) = \pi i; \ (z - a_k = \varepsilon e^{i\varphi}).$$

Bây giờ ta xét I_2. Vì $\varphi_k(z)$ chỉnh hình tại lân cận của điểm a_k nên với ε đủ bé ta có

Hình VI.1

$$
\begin{aligned}
|I_2| = \Big| \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+} \varphi_k(z)dz \Big| &= \Big| \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi_k(a_k + \varepsilon e^{i\varphi}) i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \Big| \\
&\leqslant M\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1), \\
M &= \sup_{z\in\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+} |\varphi_k(z)\Big|.
\end{aligned}
$$

Như vậy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)^+} f(z)dz = c_{-1,k}\pi i = \pi i \mathrm{Res}[f; a_k].$$

Thế đẳng thức vừa thu được vào (6.17) ta có

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} f(z)dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f; \alpha_k] + \pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[f; a_k] \\
&= 2\pi i \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \cdot + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \cdot \Big\}.
\end{aligned}
$$

□

Nhận xét 6.1.2. 1. Nếu trên Γ hàm f không có điểm bất thường thì từ (6.16) ta thu được (6.12) tức là định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư.

2. Nếu thay điều kiện trơn của Γ bằng điều kiện trơn từng khúc và giả sử góc giữa các tiếp tuyến tại mỗi điểm góc là δ_k, $k = 1, 2, \dots, m$, ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}(a_k,\varepsilon)} f(z)dz = \delta_k i \mathrm{Res}[f; a_k],$$

và do đó

$$v.p. \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \Big\{ \sum_{k=1}^{n} Res[f; \alpha_k] + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \delta_k Res[f; a_k] \Big\}.$$

6.1.4 Tính tích phân theo chu tuyến đóng

Ta xét một số ví dụ tính tích phân theo chu tuyến đóng bằng cách áp dụng thặng dư. Trong các ví dụ này chu tuyến tích phân γ được định hướng sao cho khi vòng quanh theo γ thì phần trong của γ luôn luôn ở bên trái.

Ví dụ 11. Giả sử

$$f(z) = (2z-1)\cos\frac{z}{z-1}\cdot$$

Khi đó

$$I = \int\limits_{\{|z|=2\}} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f;1].$$

Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $\{|z|<2\}$ trừ ra điểm $z=1$ là điểm bất thường cốt yếu của $f(z)$. Ta có

$$\begin{aligned}\cos\frac{z}{z-1} &= \cos\Big(1+\frac{1}{z-1}\Big)\\ &= \cos 1\cdot\cos\frac{1}{z-1} - \sin 1\sin\frac{1}{z-1}\\ &= \cos 1\cdot\Big[1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\dots\Big]-\\ &\quad -\sin 1\cdot\Big[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\dots\Big];\\ 2z-1 &= 2(z-1)-1\end{aligned}$$

và từ đó hệ số $a_{-1}(f)$ của chuỗi Laurent hàm f bằng

$$a_{-1}(f) = -(\cos 1+\sin 1).$$

Do đó

$$I = -2\pi i(\cos 1+\sin 1).$$

Ví dụ 12. Tính tích phân

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}\,,\quad (\sqrt{1}=1),$$

trong đó Γ là parabôn $y^2 = x$ chạy theo hướng tăng của y.

Giải. Điểm rẽ nhánh của hàm dưới dấu tích phân là $z = i$ và $z = -i$. Do đó trong miền $D = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ ta có thể tách nhánh đơn trị của hàm đa trị và với điều kiện

$$\sqrt{z^2+1}\Big|_{z=1} > 0,$$

ta sẽ xác định được một nhánh đơn trị. Để tính tích phân I đầu tiên ta tính tích phân theo chu tuyến đóng $\mathcal{L}$ như ở hình VI.2 gồm:

(1) cung parabôn BOA,

(2) đoạn thẳng AB : $\mathrm{Re}\, z = r$; và sau đó chuyển qua giới hạn khi $r \to \infty$.

Hình VI. 2

Ta có

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f dz = \int\limits_{BOA} + \int\limits_{AB} = 2\pi i\{\mathrm{Res}[\ ] + \mathrm{Res}[\ ]\}.$$

Ta xét tích phân theo đoạn AB. Vì trên đoạn AB ta có

$$x = r$$
$$-\sqrt{r} \leqslant y \leqslant \sqrt{r}$$

và do đó

$$|z|_{z\in AB} = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant r^{1/2}$$

nên dễ dàng thấy rằng

$$\Big|\int\limits_{AB}\Big| \leqslant \frac{2\sqrt{r}}{(r^2-1)\sqrt{r-1}} \to 0 \quad \text{khi} \quad r \to \infty.$$

Từ đó suy ra rằng

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\Big\{\mathrm{Res}\big[f; e^{i\frac{\pi}{4}}\big] + \mathrm{Res}\big[f; e^{-i\frac{\pi}{4}}\big]\Big\}.$$

Để ý rằng

$$\sqrt[4]{1+\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}},$$
$$\sqrt[4]{1+\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}},$$

ta có

$$\operatorname{Res}\big[f; e^{i\frac{\pi}{4}}\big] = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{z^2+1}}}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}},$$
$$\operatorname{Res}\big[f; e^{-i\frac{pi}{4}}\big] = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{z^2+1}}}{4z^3}\Big|_{z=e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{7\pi}{8}}},$$

và do đó

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}} = \frac{\pi i}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\,.$$

Ví dụ 13. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2-2az+b} \qquad b>a>0.$$

Giải. Mẫu số của hàm dưới dấu tích phân triệt tiêu tại hai điểm

$$\alpha = \frac{a-i\sqrt{b^2-a^2}}{b} \quad \text{và}$$
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a+i\sqrt{b^2-a^2}}{b}\,.$$

Vì α và $\dfrac{1}{\alpha}$ là cực điểm đơn của hàm dưới dấu tích phân và

$$|\alpha| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| = 1,$$

Hình VI. 3

nên cả hai cực điểm α và $\dfrac{1}{\alpha}$ đều nằm trên chu tuyến tích phân. Ta đặt

$$\widetilde{\Gamma}(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)\cup\gamma^-(\alpha,\varepsilon)\cup\gamma^-\Big(\frac{1}{\alpha},\varepsilon\Big),$$

gồm (hình VI. 3)

(1) đường tròn đơn vị loại bỏ hai cung nằm trong các hình tròn bé;

(2) cung tròn $\gamma(\alpha,\varepsilon)$ chạy theo hướng âm,

(3) cung tròn $\gamma\Big(\dfrac{1}{\varepsilon},\varepsilon\Big)$ chạy theo hướng âm.

Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}(\varepsilon)} = \int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} - \int\limits_{\gamma(\alpha,\varepsilon)} - \int\limits_{\gamma(\frac{1}{\alpha},\varepsilon)} = I(\varepsilon) - I(\alpha,\varepsilon) - I\Big(\frac{1}{\alpha},\varepsilon\Big) = 0.$$

Do đó

$$\int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} = I(\alpha,\varepsilon) + I\Big(\frac{1}{\alpha},\varepsilon\Big).$$

Ta xét tích phân $I(\alpha,\varepsilon)$. Tại lân cận điểm α ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-\alpha)\Big(z-\dfrac{1}{\alpha}\Big)} &= \frac{1}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}\Big[\frac{1}{z-\alpha} + \text{hàm chỉnh hình tại } z=\alpha\Big]\\ &= -\frac{\Big(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{-1}}{z-\alpha} + \varphi_\alpha(z).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} I(\alpha,\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(\alpha,\varepsilon)} \frac{\Big(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma,\varepsilon)} \varphi_\alpha(z)dz\\ &= \Big(\alpha-\frac{1}{\alpha}\Big)^{-1}\pi i.\end{aligned}$$

Bằng phương pháp tương tự ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} I\Big(\frac{1}{\alpha},\varepsilon\Big) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(\frac{1}{\alpha},\varepsilon)} \Big[\frac{\Big(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\Big)^{-1}}{z-\dfrac{1}{\alpha}} + \varphi_{\frac{1}{\alpha}}(z)\Big]dz\\ &= \Big(\frac{1}{\alpha}-\alpha\Big)^{-1}\pi i.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} I(\alpha,\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0} I\Big(\frac{1}{\alpha},\varepsilon\Big) \\ &= \frac{1}{b}\frac{1}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}\pi i + \frac{1}{b}\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha}-\alpha}\pi i = 0. \end{aligned}$$

6.2 Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư

Định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư đã chứng minh trong mục trước là điểm xuất phát để ứng dụng lý thuyết hàm chỉnh hình trong các quá trình tính toán khác nhau.

Trong mục này, ta sẽ xét sự áp dụng lý thuyết thặng dư để tính tích phân xác định (không tìm nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân), và tính tổng của một số chuỗi. Đây không phải là phương pháp chung để sử dụng trong mọi trường hợp. Ta chỉ xét vài loại tích phân cổ điển và tính tổng một số chuỗi và thông qua đó để chứng tỏ phương pháp đưa các bài toán trên về bài toán tính thặng dư.

6.2.1 Phương pháp tính tích phân

Giả sử ta cần tính tích phân của hàm thực $f(x)$ theo đoạn (a,b) (hữu hạn hoặc vô hạn) nằm trên trục thực $\mathbb{R}$ của mặt phẳng z.

Thực chất của phương pháp tính các tích phân dựa trên cơ sở lý thuyết thặng dư là như sau.

Ta sẽ bổ sung vào đoạn (a,b) một đường cong Γ nào đó sao cho đường cong Γ cùng với đoạn (a,b), lập nên đường cong đóng giới hạn miền D mà hàm $f(x)$ có thể thác triển giải tích từ $\mathbb{R}$ vào $\overline{D}$. Sau đó, áp dụng định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư cho thác triển giải tích $f(z)$ vừa thu được ta có

$$\int_a^b f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}, \tag{6.18}$$

trong đó $\sum$ Res là tổng thặng dư của hàm f trong D.

Nếu tích phân theo Γ có thể tính được hoặc biểu diễn được qua tích phân cần tìm $\int\limits_a^b f(x)dx$ thì bài toán được giải xong. Trong nhiều trường hợp ta có thể chọn $f(z)$ sao cho hàm f được cho trên (a,b) là phần thực hoặc phần ảo của nó thì tích phân theo đoạn (a,b) sẽ được tính bằng cách tách phần thực và phần ảo của (6.18). Trong trường hợp khi đoạn (a,b) là vô hạn thì thông thường người ta xét các họ các chu tuyến tích phân mở ra vô hạn sao cho trong giới hạn ta thu được tích phân theo (a,b). Trong trường hợp này, tích phân theo Γ trong (6.18) có thể không cần tính mà chỉ cần tìm giới hạn của nó mà thông thường bằng cách ước lượng các tích phân.

Sau đây ta sẽ chứng minh một số bổ đề thường được sử dụng để ước lượng các tích phân theo Γ.

Bổ đề 6.2.1. (Jordan) *Giả sử $\alpha > 0$ và hàm f thỏa mãn các điều kiện*

1. *hàm $f(z)$ liên tục trong miền*

$$D(R_0) = \{\operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\};$$

2. $M(R) = \max\limits_{z\in\gamma(R)} |f(z)|$ *và*

$$\lim_{R\to\infty} M(R) = 0, \tag{6.19}$$

$$\gamma(R) = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

Khi đó

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma(R)} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0. \tag{6.20}$$

Chứng minh. Giả sử $z \in \gamma(R)$, $R > R_0$. Khi đó $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}| = e^{-\alpha R\sin\varphi}.$$

Bây giờ ta ước lượng tích phân $\int\limits_{\gamma(R)} f(z)e^{i\alpha z}dz$. Ta có

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\gamma(R)} f(z)e^{i\alpha z}dz\Big| &\leqslant \max_{z\in\gamma(R)}|f(z)|\int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi}Rd\varphi\\ &\leqslant 2RM(R)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\varphi}d\varphi\\ &\Big(\sin\varphi\geqslant\frac{2}{\pi}\varphi, \varphi\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big]\Big)\\ &\leqslant 2RM(R)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-2R\frac{\alpha}{\pi}\varphi}d\varphi\\ &= M(R)\Big(-\frac{\pi}{\alpha}\Big)e^{-2R\frac{\alpha}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\pi/2}\\ &= M(R)\frac{\pi}{\alpha}[1-e^{-\alpha\pi}]\leqslant\frac{\pi}{\alpha}M(R).\end{aligned}$$

Từ đó, theo (6.19) ta thu được (6.20). □

Nhận xét 6.2.1. 1. Nếu $\alpha < 0$ và hàm f thỏa mãn các điều kiện của bổ đề Jordan trong nửa mặt phẳng dưới $\{\operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ thì công thức (6.20) vẫn còn hiệu lực, trong đó $\gamma(R) = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$.

2. Nếu $\alpha = ia$ $(a > 0)$ và hàm f thỏa mãn các điều kiện của bổ đề Jordan trong nửa mặt phẳng bên phải thì bằng cách chứng minh tương tự ta có

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma(R)} f(z)e^{-az}dz = 0, \quad a > 0,$$

$$\gamma(R) = \{|z| = R; \operatorname{Res} z \geqslant 0\}.$$

3. Nếu $\alpha = -ia$ $(a > 0)$ và hàm f thỏa mãn các điều kiện của bổ đề Jordan trong nửa mặt phẳng bên trái thì

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma(R)} f(z)e^{az}dz = 0, \quad a > 0.$$

Bổ đề 6.2.2. *Giả sử* $\gamma(R) = \{|z| = R\}$ *và* $M(R) = \max\limits_{z\in\gamma(R)} |f(z)|$.

Khi đó ta có các điều khẳng định sau đây

$$1. \quad \{RM(R) \to 0(R \to 0)\} \Rightarrow \Big\{ \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz \to 0(R \to 0)\Big\} \tag{6.21}$$

$$2. \quad \{RM(R) \to 0(R \to \infty)\} \Rightarrow \Big\{ \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz \to 0(R \to \infty)\Big\} \tag{6.22}$$

Chứng minh. Các hệ thức (6.21) - (6.22) dễ dàng suy ra từ ước lượng

$$\Big| \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz\Big| \leqslant M(R)2\pi R.$$

□

Trong khi giải nhiều bài toán bổ đề sau đây có một vai trò rất căn bản.

Bổ đề 6.2.3. *Nếu trên cung tròn* $\delta(R)$ *của đường tròn bán kính* R *hàm* f *thỏa mãn hệ thức* $|f| \leqslant \dfrac{\text{const}}{R^\alpha}$, *thì*

$$\Big| \int\limits_{\delta(R)} f(z)dz\Big| \leqslant \frac{\text{const}}{R^{\alpha-1}}\cdot$$

Do đó với $\alpha > 1$ *tích phân dần tới 0 khi* $R \to \infty$ *còn với* $\alpha < 1$ *tích phân dần tới 0 khi* $R \to 0$.

Chứng minh. Được suy trực tiếp từ bổ đề 6.2.2. □

6.2.2 Tính tích phân dạng $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$

Giả sử ta xét tích phân

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi, \tag{6.23}$$

trong đó $R(u, v)$ là hàm hữu tỷ của u, v.

Việc tính các tích phân dạng (6.23) sẽ được đưa về tính tích phân của hàm biến phức theo chu tuyến đóng. Quả vậy, ta đặt

$$z = e^{i\varphi}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big); \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \\ d\varphi &= -i\frac{dz}{z}\cdot \end{aligned}$$

Khi φ biến thiên từ 0 đến 2π, biến z sẽ vạch nên đường tròn $\gamma = \{|z| = 1\}$ theo hướng dương và tích phân (6.23) được đưa về tích phân

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{|z|=1} R_1(z)dz; \\ R_1(z) &= -\frac{i}{z}R\Big[\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big] \end{aligned}$$

là hàm hữu tỷ.

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[R_1(z); z_k],$$

trong đó $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là các cực điểm của hàm hữu tỷ $R_1(z)$ nằm trong hình tròn đơn vị.

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}\,, \quad 0 < |a| < 1.$$

Giải. Đặt

$$z = e^{ix}$$

ta có

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad dx = \frac{dz}{iz}, \text{ và}$$
$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{idz}{az^2 - (a^2+1)z + a} \cdot$$

Phương trình $az^2 - (a^2+1)z + a = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = a$ và $z_2 = \frac{1}{a}$. Vì $0 < |a| < 1$ nên z_1 nằm trong hình tròn đơn vị, đó là cực điểm đơn của hàm dưới dấu tích phân.

Từ đó dễ dàng suy ra $I = \frac{2\pi}{1-a^2} \cdot$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2}, \quad a > b > 0.$$

Giải. Đặt $z = e^{ix}$. Khi đó

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{4zdz}{ib^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$
$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2-b^2}}{b} \cdot$$

Trong hình tròn đơn vị hàm dưới dấu tích phân có cực điểm cấp hai là $z = z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}$ với thặng dư bằng

$$\frac{a}{i(a^2-b^2)^{3/2}} \cdot$$

Do đó

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} \cdot$$

6.2.3 Tích phân dạng $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$

Giả sử ta xét các tích phân dạng

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}} R(x)dx, \tag{6.24}$$

trong đó $R(x)$ là hàm hữu tỷ của biến x. Giả sử

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

trong đó P_n là đa thức đại số bậc n của x và Q_m là đa thức đại số bậc m.

Để tính các tích phân dạng (6.24) ta thường dựa trên định lý sau đây

Định lý 6.2.1. *Giả sử*

$$R(x) = \frac{P_n}{Q_m}$$

là hàm hữu tỷ và giả sử a_1 là các không - điểm phức hoặc là những không điểm thực cấp một của Q_m và

$$m \geqslant n + 1.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx &= v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} R(x)dx \\ &= 2\pi i \Big\{ \sum_{\mathrm{Im} a_i > 0} \mathrm{Res}\Big[\frac{P_n}{R_m}; a_i\Big] + \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{Im} a_j = 0} \mathrm{Res}\Big[\frac{P_n}{Q_m}\,; a_i\Big] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{Res}\Big[\frac{P_n}{Q_m}\,; \infty\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Chứng minh. Giả sử hàm $R(z)$ có các cực điểm a_i, $\operatorname{Im} a_i > 0$ và giả sử trên $\mathbb{R}$ hàm $R(z)$ có một số cực điểm đơn a_j, $\operatorname{Im} a_j = 0$. Ta xét chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ gồm (hình VI.4):

(1) các đoạn $[-R, a_1 - \varepsilon]$, $[a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon], \dots, [a_p + \varepsilon, R]$.

$$\operatorname{Im} a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad |a_i| < R;$$

(2) các cung tròn

$$\gamma(a_i, \varepsilon) = \{|z - a_i| = \varepsilon, \operatorname{Im} z \geqslant 0; i = 1, \dots, p\};$$

(3) nửa đường tròn

$$\gamma(R) = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0, |a_i| < R \; \forall\, i = \overline{1, p}\}.$$

Hình VI.4

Áp dụng định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư cho $\Gamma(R, \varepsilon)$ và hàm $R(z)$ ta có

$$\int_{-R}^{a_1-\varepsilon} R(x)dx + \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon} R(x)dx + \cdots + \int_{a_p+\varepsilon}^{R} R(x)dx +$$
$$+ \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \int_{\gamma(a_i,\varepsilon)} R(z)dz + \int_{\Gamma(R)} R(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}[R(z), a_i].$$

Do đó bằng cách sử dụng cách lý luận trong chứng minh định lý 6.1.6 ta thu được

$$\begin{aligned}
\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} R(x)dx &= \lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_{\substack{|z|\leqslant R\\ |z-a_i|\geqslant\varepsilon, a_i\in\mathbb{R}}} R(z)dz\Bigg)\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma(R)} R(z)dz + 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a_i>0}\operatorname{Res}[R(z);a_i] + \pi i\sum_{a_i\in\mathbb{R}}\operatorname{Res}[R(z);a_i]\\
&= \pi i\operatorname{Res}[R;\infty] + 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a_i>0}\operatorname{Res} + \pi i\sum_{\operatorname{Im} a_i=0}\operatorname{Res}[R;a_i]\\
&= 2\pi i\Big\{\frac{1}{2}\operatorname{Res}[R;\infty] + \sum_{\operatorname{Im} a_i>0}\operatorname{Res}[R;a_i] + \frac{1}{2}\sum_{\operatorname{Im} a_i=0}\operatorname{Res}[R;a_i]\Big\}.
\end{aligned}$$

□

Nhận xét 6.2.2. 1. Nếu $m \geqslant n+2$ thì

$$\operatorname{Res}[R(z);\infty] = 0,$$

do đó số hạng thứ ba ở vế phải của (6.25) bằng 0.

2. Nếu $R(z)$ chỉ có các cực điểm phức và không có cực điểm trên $\mathbb{R}$ thì số hạng thứ hai ở vế phải của (6.25) bằng 0.

3. Nếu ta lấy

$$\gamma(R) = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$$

chạy theo hướng âm và

$$\gamma(a_i,\varepsilon) = \{|z-a_i| = \varepsilon, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$$

chạy theo hướng dương thì bằng lý luận tương tự ta có

$$\begin{aligned}
v.p.\int_{\mathbb{R}} R(x)dx = -2\pi i\sum_{Im a_i<0} Res[R;a_i] -\\
- \pi i\sum_{Im a_i=0} Res[R;a_i] - \pi i Res[R;\infty]. \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

Hai kết quả (6.25) và (6.26) trùng nhau vì tổng toàn phần các thặng dư bằng 0.

Ví dụ 3. Tính tích phân

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} \cdot$$

Giải. Hàm $f(x)$ xác định trên toàn trục x và hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

là thác triển giải tích của hàm đã cho vào nửa mặt phẳng trên. Hàm $f(z)$ chỉnh hình khắp nơi trừ ra điểm $z = i$ và trên trục thực nó không có điểm bất thường.

Hiển nhiên hàm f thỏa mãn điều kiện

$$|f(z)|_{|z|=R>R_0>1} = \Big|\frac{1}{(R^2+1)^3}\Big| < \frac{1}{R^6} \cdot$$

Do đó từ công thức (6.25) ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \text{Res}[f; i] = 2\pi i\Big(-\frac{3}{16}i\Big) = \frac{3}{8}\pi.$$

Ví dụ 4. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Phương trình

$$z^{2n} + 1 = 0$$

có các nghiệm sau đây

$$z_k = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Do đó thác triển giải tích $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^{2n}},$$

của hàm đã cho vào nửa mặt có n cực điểm đơn và hiển nhiên rằng

$$f(ze^{i\pi/n}) \equiv f(z).$$

Ta sẽ lấy chu tuyến tích phân $\Gamma(R)$ gồm

a) đoạn thẳng $[0, R] \subset \mathbb{R}$,

b) cung tròn $\gamma(R) = \left\{z = Re^{i\varphi}; 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{n}\right\}$,

c) đoạn thẳng $\delta = \left\{z = re^{i\frac{\pi}{n}}, 0 \leqslant r \leqslant R\right\}$, (hình VI. 5).

Hình VI. 5

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma(R)} f(z)dz &= \int\limits_0^R f(x)dx + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz + \int\limits_{\delta} f(z)dz \\
&= 2\pi i \mathrm{Res}[f; z_0] \text{ (ở trong } \Gamma(R) \text{ hàm } f(z) \\
&\qquad \text{chỉ có một cực điểm } z_0) \\
&= -2\pi i \frac{e^{i\pi/2n}}{2n} = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/2n}.
\end{aligned}$$

Ta xét tích phân theo δ. Ta có

$$\int\limits_{\delta} f(z)dz = -\int\limits_{0}^{R} f(re^{i\pi/n})e^{i\pi/n}dr$$
$$= e^{i\frac{\pi}{n}}\int\limits_{0}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}}\cdot$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Vì $x \in \gamma(R)$ nên

$$z = Re^{i\varphi},$$

$$\Big|\int\limits_{\gamma(R)}\Big| \leqslant \int\limits_{\gamma(R)}\frac{Rd\varphi}{R^{2n}-1} = \frac{\dfrac{\pi}{n}R}{R^{2n}-1} \longrightarrow 0(R\to\infty).$$

Chuyển qua giới hạn khi $R \to \infty$ ta thu được

$$\left(1-e^{\frac{i\pi}{n}}\right)I = -\frac{\pi i}{n}e^{\frac{i\pi}{n}}$$

hay là

$$I = \frac{\pi}{2n\sin\dfrac{\pi}{2n}}\cdot$$

6.2.4 Tích phân dạng $I = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iax}R(x)dx$

Ta có định lý sau đây

Định lý 6.2.2. *Giả sử P_n/Q_m là hàm hữu tỷ trên $\mathbb{C}$ và a_i là không điểm phức hoặc là không điểm thực cấp một của đa thức Q_m và ngoài ra*

$$m \geqslant n+1.$$

Khi đó với $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có các công thức sau đây

$$\text{v.p.}\int\limits_R \frac{P_n}{Q_m}e^{i\alpha x}dx =$$

$$\begin{cases} 2\pi i\Big\{\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i>0}\operatorname{Res}\Big[\dfrac{P_n}{Q_m}e^{i\alpha z}, a_i\Big] + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i=0}\operatorname{Res}\Big[\dfrac{P_n}{Q_m}e^{i\alpha z}; a_i\Big]\Big\},\ \alpha>0;\\ -2\pi i\Big\{\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i<0}\operatorname{Res}\Big[\dfrac{P_n}{Q_m}e^{i\alpha z}; a_i\Big] + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i=0}\operatorname{Res}\Big[\dfrac{P_n}{Q_m}e^{i\alpha z}; a_i\Big]\Big\},\ \alpha<0. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta lại sử dụng chu tuyến đóng $\Gamma(R,\varepsilon)$ như trong chứng minh định lý 6.2.1. Những tích phân theo các nửa đường tròn $\gamma(a_i,\varepsilon)$, $a_i \in \mathbb{R}$ dần đến $-\pi i\operatorname{Res}\Big[\dfrac{P_n}{Q_m}e^{\alpha iz}\Big]$. Tích phân theo nửa đường tròn lớn $\gamma(R)$ dần đến 0 theo bổ đề Jordan. Từ đó dễ dàng rút ra kết luận thứ nhất của định lý đối với $\alpha > 0$.

Đối với trường hợp $\alpha < 0$ ta cần lấy các nửa đường tròn dưới (xem nhận xét 6.2.1) và thu được điều kết luận thứ hai. □

Ví dụ 5. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx. \tag{6.27}$$

Giải. Tích phân phải tìm có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx. \end{aligned}$$

Do đó, để tính (6.10) ta xét tích phân sau

$$I = (R,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)}\frac{e^{iz}}{z}dz.$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R,\varepsilon)$ được mô tả trên hình VI. 6.

Hình VI. 6

Tích phân $I(R,\varepsilon) = 0$ vì hàm $\dfrac{e^{iz}}{z}$ chỉnh hình bên trong chu tuyến $\Gamma(R,\varepsilon)$. Nhưng mặt khác

$$I(R,\varepsilon) = \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dx + \\ + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{\gamma(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Vì $\dfrac{e^{iz}}{z} = \dfrac{1}{z} + h(z)$, trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z = 0$, nên

$$\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\int\limits_{\pi}^{0} d\varphi + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} h(z)dz \to -\pi i (\varepsilon \to 0).$$

Tích phân theo $\gamma(R)$ dần đến 0 khi $R \to \infty$. Tổng hai tích phân theo hai đoạn $[-R,-\varepsilon]$ và $[\varepsilon, R]$ bằng

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Do đó

$$0 = I(R,\varepsilon) = 2i \int\limits_{0}^{R} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i + 0(\varepsilon) + 0(R),$$

và qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$ ta thu được

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Ví dụ 6. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0.$$

Giải. Tích phân phải tìm có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

Do đó để tính tích phân trên đây ta xét tích phân

$$J(R,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz,$$

trong đó $\Gamma(R,\varepsilon)$ là chu tuyến trong ví dụ 5 (hình VI. 6) ta có

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} f(x)dx + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = 0.$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Hiển nhiên $\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz$ dần đến 0 khi $R \to \infty$ (theo bổ đề Jordan). Bây giờ ta xét tích phân theo nửa đường tròn $\gamma(0,\varepsilon)$.

Ta có

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{i(\alpha-\beta)z + \dfrac{(i\alpha z)^2 - (i\beta z)^2}{2!} + \dots}{z^2} \\
&= \frac{i(\alpha-\beta)}{z} + \varphi(z),
\end{aligned}
$$

trong đó $\varphi(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$. Từ đó suy ra

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dx = i(\alpha-\beta)(-\pi i) = \pi(\alpha-\beta).$$

Tổng hai tích phân còn lại bằng

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} \Big(\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{x^2} + \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{x^2}\Big) dx = 2\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} dx.$$

Như vậy

$$2\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} dx + \pi(\alpha-\beta) + 0(\varepsilon) + 0(R) = 0$$

và do đó qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$ ta thu được

$$2I + \pi(\alpha-\beta) = 0,$$

từ đó

$$I = \frac{\pi}{2}(\beta-\alpha).$$

6.2.5 Tích phân dạng $I = \int\limits_{\mathbb{R}^+} R(x)x^\alpha dx$

Giả sử

$$R(x) = \frac{P_n}{Q_m}$$

là một hàm hữu tỷ và α là một số thực.

Ta xét các tích phân dạng

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha dx, \tag{6.28}$$

trong đó $R(x)$ không có cực điểm $\geqslant 0$ và $R(0) \neq 0$ (vì trong trường hợp ngược lại $R(x) = x^l R_l(x)$, trong đó l là số nguyên). $R_l(x)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$, sao cho $R_l(0) \neq 0$. Khi đó thay cho (6.28) ta có thể xét tích phân

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^+} x^\beta R_l(x)dx; \quad (R_l(0) \neq 0, \infty)).$$

Ta lưu ý rằng tích phân (6.28) hội tụ khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

a) hàm $R(x)$ không có cực điểm $\geqslant 0$;

b) hàm $R(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\text{(b.1)} \quad \lim_{x\to 0} |x|^{\alpha+1}|R(x)| = 0,$$
$$\text{(b.2)} \quad \lim_{x\to \infty} |x|^{\alpha+1}|R(x)| = 0.$$

Hiển nhiên điều kiện (b.1) được thỏa mãn khi và chỉ khi $\alpha + 1 > 0$ (tức là $\alpha > -1$). Ta xét điều kiện (b.2). Khi $x \to \infty$ thì ta có thể viết

$$R(x) \approx \frac{\text{const}}{x^{m-n}} \quad (\text{const} \neq 0, m - n \in \mathbb{Z}).$$

Do đó điều kiện (b.2) được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$m - n - \alpha - 1 > 0,$$

hay là

$$\alpha + n - m < -1.$$

Như vậy, ở đây ta sẽ giả thiết rằng $R(x)$ là hàm hữu tỷ không có cực điểm $\geqslant 0$, $R(0) \neq 0$. Tích phân dạng (6.28) hội tụ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \alpha &> -1 \qquad \text{(khả tích tại 0)}. \\ \alpha + n - m &< -1 \qquad \text{(khả tích tại vô cùng)}, \end{aligned}$$

tức là

$$1 - \alpha < m - n - 1. \tag{6.29}$$

Định lý 6.2.3. *Giả sử* $R = \dfrac{P_n}{Q_m}$ *là hàm hữu tỷ không có các cực điểm* $\geqslant 0$ *và* α *là số thực không nguyên sao cho*

$$\alpha > -1, \tag{6.30}$$

$$\alpha + n - m < -1. \tag{6.31}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int\limits_{R^+} R(x) x^\alpha dx \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{a_i} Res[R(z) z^\alpha; a_i], \end{aligned} \tag{6.32}$$

trong đó z^α *là hàm được xác định theo công thức* $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$, $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.

Chứng minh. Đặt

$$f(z) = R(z) z^\alpha$$

và xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z) dz$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ (hình VI. 7)
gồm

(1) đoạn $[\varepsilon, R]$ (bờ I)

(2) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R\}$,

(3) đoạn $[R, \varepsilon]$ (bờ II)

(4) đường tròn $\gamma(0, \varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$.

Đối với thừa số đa trị của hàm dưới dấu tích phân

Hình VI.7

$$h(z) = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = |z|^\alpha e^{i \arg z} = |z|^\alpha e^{i\alpha\varphi},$$

ta sẽ chọn nhánh thỏa mãn điều kiện

$$0 < \arg z < 2\pi.$$

Hiển nhiên hàm z^α này chỉnh hình trong miền

$$D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_+,$$

và do đó hàm

$$f(z) = R(z)z^\alpha,$$

phân hình.

Trên bờ (I) của nhát cắt $\varphi = 0$ nên

$$h(x + i0) = h(x) = x^\alpha > 0 \quad (x > 0).$$

Bây giờ ta xét điểm $z \in (II)$. Khi $z \in (II)$ thì $z = x - i0 \quad (x > 0)$ và $\varphi = 2\pi$, và do đó

$$\begin{aligned} h(x - i0) = x^\alpha e^{i\alpha(2\pi)} \Rightarrow h(z)\big|_{z\in(II)} \\ = h(x)e^{2i\pi\alpha} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Từ hệ thức vừa viết suy ra rằng

$$h(z)\big|_{z\in(II)} = e^{2\pi i\alpha} f(x).$$

Như vậy

$$\int\limits_{(I)} f(z)dz = \int\limits_{(I)} f(x)dx,$$

$$\int\limits_{(II)} f(z)dz = -e^{2\pi i\alpha} \int\limits_{(I)} f(x)dx.$$

Bây giờ áp dụng định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư cho hàm $f(z)$ và chu tuyến $\Gamma(R,\varepsilon)$ ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)dz &= \int\limits_{(I)} f(x)dx + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz + \int\limits_{(II)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{a_i} \mathrm{Res}[f(z), a_i],\end{aligned}$$

với R đủ lớn và ε đủ bé; hay là

$$(1 - e^{2\pi i\alpha} \int\limits_{(I)} f(x)dx + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_i} \mathrm{Res}. \qquad (6.33)$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Ta có

$$|f(z)| = |R(z)\cdot z^\alpha| \leqslant \mathrm{const}\cdot |z|^{\alpha+n-m}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz\Big| &\leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^{2\pi} R^{\alpha+n-m} R d\varphi \\ &= \mathrm{const}\cdot 2\pi\, R^{\alpha+n-m+1} \to 0 \quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

theo điều kiện (6.31).

Bây giờ ta xét tích phân theo $\gamma(0,\varepsilon)$.

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz\Big| &\leqslant \max_{z\in\gamma(0,\varepsilon)} |f(z)| \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon^{\alpha+1} d\varphi \\ &= 2\pi\varepsilon^{\alpha+1} \max_{z\in\gamma(0,\varepsilon)} |f(z)| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)\end{aligned}$$

theo điều kiện (6.30).

Chuyển qua giới hạn khi $\varepsilon\to 0$ và $R\to\infty$ từ (6.33) ta thu được (6.32) (để ý rằng vì α không nguyên nên $1 - e^{2\pi i\alpha} \neq 0$). Định lý được chứng minh. □

Bây giờ ta xét một vài ví dụ minh họa cho chứng minh lẫn việc ứng dụng định lý 6.2.3.

Ví dụ 7. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Giải. Ta xét tích phân

$$I(R,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz,$$

trong đó $\Gamma(R,\varepsilon)$ là chu tuyến đóng như trong định lý 6.2.3.

Ta có

$$f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = \frac{e^{(\alpha-1)\ln z}}{1+z},$$

trong đó $\ln z$ là nhánh chỉnh hình khi $0 < \arg z < 2\pi$. Hàm $f(z)$ có cực điểm đơn tại $z = -1$ với thặng dư bằng

$$\mathrm{Res}[f;-1] = \frac{e^{(\alpha-1)\ln(-1)}}{(1+z)'}\Big|_{z=-1} = e^{\pi(\alpha-1)i} = -e^{\pi\alpha i}.$$

Theo định lý cơ bản về thặng dư ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)dz &= \int\limits_{(I)} f(x)dx + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz + \int\limits_{(II)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz \\ &= -2\pi i e^{\alpha\pi i},\end{aligned}$$

hay là

$$(1-e^{2\pi i\alpha})\int\limits_{(I)} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} + \int\limits_{\gamma(R)} = -2\pi i e^{\alpha\pi i}.$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(0,\varepsilon)$. Khi $z \in \gamma(0,\varepsilon)$ ta có $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, và

$$\Big| \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} \Big| \leqslant 2\pi \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{1-\varepsilon}\varepsilon \leqslant \text{const} \cdot \varepsilon^{\alpha}.$$

Hiển nhiên khi $\alpha > 0$ thì $\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} \to 0$.

Tương tự, khi $z \in \gamma(R)$ ta có $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, và

$$\Big| \int\limits_{\gamma(R)} \Big| \leqslant 2\pi R \frac{R^{\alpha-1}}{R-1} \leqslant \text{const} \cdot R^{\alpha-1}$$

và tất nhiên $\int\limits_{\gamma(R)} \to 0$ khi $R \to \infty$.

Như vậy, qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$ ta có

$$(1 - e^{2\pi\alpha i}) \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = -2\pi i e^{\alpha\pi i},$$

và do đó

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{-2\pi i e^{\alpha\pi i}}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\cdot$$

Ví dụ 8. Tính tích phân (theo nghĩa giá trị chính)

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6.34}$$

Giải. Việc áp dụng trực tiếp định lý 6.2.3 là không thể được vì trên bán trục $\mathbb{R}_+$ hàm dưới dấu tích phân có cực điểm đơn $x = 1$.

Để tính (6.34) ta xét tích phân

$$I(R,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{e^{(\alpha-1)\ln\alpha}}{1-z}dz, \quad R > 1,$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R,\varepsilon)$ (hình VI. 8) gồm:

(1) đoạn thẳng $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$;
(2) nửa đường tròn
$\gamma(1,\varepsilon) = \{|z-1| = \varepsilon, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$,
(3) đoạn thẳng $[1+\varepsilon, R]$,
(4) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R\}$;
(5) đoạn thẳng $[R, 1+\varepsilon]$;
(6) nửa đường tròn
$\gamma(e^{2\pi i};\varepsilon) = \{|z-e^{2\pi i}| = \varepsilon,$
$\operatorname{Im} z \leqslant 0\}$;
(7) đoạn thẳng $[1-\varepsilon, \varepsilon]$;
(8) đường tròn $\gamma(0,\varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$.

Hình VI. 8

Hiển nhiên, trên các phần biên (1) và (3) ta có

$$f(z)\Big|_{z\in(1),(3)} = \frac{(xe^{i\varphi})^{\alpha-1}}{1-(xe^{i\varphi})} = \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} = f(x),$$

(trên (1) và (3) ta có $\varphi = 0$) và trên các phần biên (5) và (7)

$$f(z)\big|_{z\in(5),(7)} = e^{2\pi\alpha i}f(x).$$

Do đó theo định lý cơ bản về thặng dư ta có thể viết

$$\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz + (1-e^{2\pi\alpha i})\Big\{\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{1+\varepsilon}^{R} f(x)dx\Big\} +$$
$$+\int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(e^{2\pi i},\varepsilon)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = 0. \qquad (*)$$

Bằng phương pháp ước lượng tương tự như trong ví dụ 7 tích phân thứ nhất và thứ năm ở vế trái dần đến 0.

Ta xét tích phân theo $\gamma(1,\varepsilon)$. Tại lân cận điểm $z = 1$ (bờ thứ nhất) ta có

$$\frac{z^{\alpha-1}}{1-z} = -\frac{1}{z-1} + h_1(z),$$

trong đó $h_1(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 1$. Vì

$$1 - z = \varepsilon e^{i\varphi}, \quad dz = -i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$$

nên

$$\int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} f(z)dz = \int\limits_0^{-\pi} \Big[\frac{-i\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\Big] d\varphi + \int\limits_0^{-\pi} h_1[1 - \varepsilon e^{i\varphi}] i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$$

$$= \pi i + \int\limits_0^{-\pi} h_1[1 - \varepsilon e^{i\varphi}] i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \to \pi i \quad (\varepsilon \to 0).$$

Tương tự ta có

$$\int\limits_{\gamma(e^{2\pi i},\varepsilon)} f(z)dz = \int\limits_{-\pi}^{-2\pi} \frac{e^{2\pi\alpha i}}{\varepsilon e^{i\varphi}}(-i\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi + \int\limits_{-\pi}^{-2\pi} h_2(z)dz,$$

trong đó $h_2(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = e^{2\pi i}$ (điểm 1 của bờ dưới). Do đó

$$\int\limits_{\gamma(e^{2\pi i},\varepsilon)} f(z)dz = \pi i e^{2\pi\alpha i} + 0(\varepsilon), \quad 0(\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Bây giờ từ (*) và các giá trị giới hạn vừa thu được ta có

$$(1 - e^{2\pi\alpha i}) \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx + \pi i(1 + e^{2\pi\alpha i}) = 0,$$

và từ đó rút ra

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = \pi \cdot \mathrm{ctg}\alpha\pi.$$

Trong định lý 6.2.3 ta chỉ xét trường hợp khi α là số thực không nguyên. Nếu α là số nguyên thì các điều kiện của định lý 6.2.3 không còn phù hợp nữa. Trong trường hợp này $1 - e^{2\pi\alpha i} = 0$ và tích phân $\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)}$ cũng bằng 0 (vì lúc này $R(z)z^\alpha$ là hàm hữu tỷ và tổng toàn phần mọi thặng dư của nó bằng 0) và do đó

$$\int_0^\infty R(x)x^\alpha dx = \frac{0}{0}\,!$$

Do đó để tính tích phân dạng (6.28) khi α nguyên ta cần tiến hành theo một cách khác. Ta xét tích phân dạng

$$I = \int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha (\ln x)^{k+1} R(x)dx. \tag{**}$$

trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$ (nguyên hoặc không nguyên), k là số nguyên $\geqslant 0$. Ta giả thiết $R(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý 6.2.3. Khi đó tích phân vừa viết hội tụ khi và chỉ khi nó thỏa mãn các điều kiện (6.29) (vì thừa số $(\log x)^{k+1}$ không ảnh hưởng đến tính chất hội tụ của tích phân).

Ta chứng minh định lý sau đây

Định lý 6.2.4. *Với các giả thiết của định lý 6.2.3 và α là số nguyên ta có hệ thức sau đây*

$$(1) \qquad \int_0^\infty R(x)x^\alpha dx = -\sum_{a_i} \operatorname{Res}[R(z)z^\alpha \ln z, a_i], \tag{6.35}$$

$$(2) \qquad \int_0^\infty R(x)x^\alpha \log x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Res}[R(z)z^\alpha \ln z; a_i] - \pi i \sum_{a_i} \operatorname{Res}[R(z)z^\alpha \ln z; a_i]. \tag{6.36}$$

Chứng minh. Ta xét tích phân

$$I(R,\varepsilon) = \int_{\Gamma(R,\varepsilon)} R(z)z^\alpha (\ln z)^{k+1} dz, \tag{6.37}$$

trong đó $\Gamma(R,\varepsilon)$ là chu tuyến đã chọn trong định lý 6.2.3 (hình VI. 7), z^α là nhánh chỉnh hình của hàm z^α trong $\Gamma(R,\varepsilon)$ nhận giá trị dương ở bờ trên của nhát cắt, $\log z$ là nhánh chỉnh hình của lôgarit nhận giá trị dương của bờ trên của nhát cắt. Khi đó trong miền D ta có

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Tích phân theo (I) dẫn đến

$$\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha(\ln x)^{k+1}dx.$$

Trong khi đó tích phân theo (II) dẫn đến

$$\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha(e^{2\pi\alpha i})(\ln x + 2\pi i)^{k+1}dx.$$

Do đó ta còn phải xét hai tích phân theo $\gamma(R)$ và $\gamma(0,\varepsilon)$. Xét tích phân theo $\gamma(R)$. Nếu $z \in \gamma(R)$ thì

$$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + \varphi^2} \leqslant (\ln^2 R + (2\pi)^2)^{1/2} < \text{const}\cdot\ln R,$$
$$|\ln z|^{k+1} < \text{const}(\ln R)^{k+1}. \tag{6.38}$$

Do đó nếu $z \in \gamma(R)$ thì

$$|f(z)| = |R(z)z^\alpha(\ln z)^{k+1}| \leqslant \text{const}\cdot R^\alpha(\ln R)^{k+1}R^{n-m}$$
$$= \text{const}\cdot\frac{(\ln R)^{k+1}}{R^{m-n-\alpha}}\cdot$$

Từ đó và điều kiện (6.29) suy ra rằng

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = 0.$$

Tương tự, nếu $z \in \gamma(0,\varepsilon)$ thì

$$|\ln z| \leqslant \text{const}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{6.39}$$

và

$$|\log z|^{k+1} \leqslant \text{const}\Big(\log\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{k+1}$$

và do đó

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz = 0.$$

Như vậy từ (6.37) và định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)dz = 2\pi i\sum_{a_i}\text{Res}[f(z),a_i],$$

hay là

$$\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha[(\ln x)^{k+1} - e^{2\pi\alpha i}(\ln x + 2\pi i)^{k+1}]dx = 2\pi i\sum_{a_i}\text{Res}[R(z);a_i]. \tag{6.40}$$

Ta xét các trường hợp riêng sau đây

a) α là số nguyên và $k = 0$. Khi đó

$$2\pi i\sum\text{Res}[R(z)z^\alpha\ln z;a_i] = -2\pi i\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha dx,$$

và từ đó ta thu được (6.35)

b) Trường hợp $k = 1$. Trong trường hợp này ta có

$$2\pi i\sum\text{Res}[R(z)z^\alpha(\ln z)^2;a_i] = -4\pi i\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha\ln x dx + 4\pi^2\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha dx,$$

và từ đó ta thu được (6.36). $\square$

Nhận xét 6.2.3. Trong trường hợp khi α không phải là số nguyên, bằng cách đặt $k = 0$, từ hệ thức (6.40) ta có

$$(1 - e^{2\pi\alpha i})\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha \ln x dx - 2\pi i e^{2\pi\alpha i}\int\limits_0^\infty R(x)x^\alpha dx$$
$$= 2\pi i \sum Res[R(z)z^\alpha \ln z; a_i]. \tag{6.41}$$

Ta xét tiếp một vài ví dụ về tích phân dạng (**)

Ví dụ 9. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^\infty x^{-1/2}\ln x \frac{dx}{(x+1)^2}\cdot$$

Giải. Trong trường hợp này $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $n = 0$, $m = 2$, $k = 0$.

Do đó điều kiện (6.29) được thỏa mãn. Từ công thức (6.41) ta có

$$2\int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\ln x\frac{dx}{(x+1)^2} + 2\pi i\int\limits_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}dx = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z); -1].$$

Vì điểm $z = -1$ là cực điểm cấp hai nên

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f; -1] &= \lim_{z\to -1}[z^{-1/2}\ln z]' \\ &= \Big[\Big(-\frac{1}{2}\Big)\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z}\ln z + \frac{1}{z}z^{-\frac{1}{2}}\Big]_{z=-1} \\ &= \Big[\Big(-\frac{1}{2}\Big)\frac{-i}{-1}\pi i + \frac{i}{1}\Big] = \frac{\pi}{2} + i.\end{aligned}$$

Từ đó dễ thấy rằng

$$\int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\ln x\frac{dx}{(x+1)^2} = -\pi, \quad \int\limits_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Ví dụ 10. Tính tích phân

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2}dx.$$

Giải. Để tính tích phân này ta chọn chu tuyến như trong định lý 6.1.3 (hình VI.9) và xét tích phân

$$I(R,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2}dz,$$

trong đó ln là nhánh chỉnh hình thỏa mãn điều kiện

$$0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi,$$

$$\begin{aligned} f(z)\big|_{z\in(I)} &= \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2+b^2}\,, \\ f(z)\big|_{z\in(II)} &= \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2+b^2} \\ &= \frac{\ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2}{(x+a)^2+b^2}\,. \end{aligned}$$

Bây giờ từ định lý cơ bản về thặng dư ta thu được

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(I)} + \int\limits_{\gamma(R)} + \int\limits_{(II)} + \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} = \\ &= 2\pi i\{\mathrm{Res}[f;-a+bi] + \mathrm{Res}[f;-a-bi]\}. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Bằng cách sử dụng các ước lượng (6.38) và (6.39) dễ dàng thấy rằng

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma(R)} = 0.$$

Ta tính thặng dư của f tại các cực điểm đơn của nó. Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f;-a+ib] &= \frac{[\ln r + i(\pi-\varphi)]^2}{2bi}\,, \\ \mathrm{Res}[f;-a-bi] &= -\frac{[\ln r + i(\pi+\varphi)]^2}{2bi}\,, \end{aligned}$$

trong đó $r = (a^2+b^2)^{1/2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Do đó qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$, từ (6.42) ta thu được

$$\int\limits_{\infty}^{0} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2+b^2}dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2+b^2}dx =$$

$$= -4\pi i \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}dx + 4\pi^2 \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{4\pi\varphi}{b}(\pi - i\ln r)$$

và

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{\varphi \ln r}{b} = \frac{\ln(a^2+b^2)^{1/2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

6.2.6 Một số ví dụ khác

Trong thực tế, để áp dụng phương pháp thặng dư trong việc tính các tích phân (chủ yếu là tích phân suy rộng) hoặc ta phải đưa những tích phân cần tính về các dạng chính tắc đã trình bày trên đây, hoặc ta áp dụng trực tiếp các phương pháp tương tự cho các tích phân với dạng đã cho.

Ta sẽ nêu một vài ví dụ minh họa cho điều vừa nói.

Ví dụ 11. Ta xét tích phân

$$J(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6.43}$$

Giải.

a) Đưa tích phân (6.43) về dạng chính tắc. Hiển nhiên bằng phép thế $e^x = t$ ta sẽ đưa tích phân đã cho về dạng

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt.$$

Đó là tích phân đã nghiên cứu trong ví dụ 7.

b) Áp dụng phương pháp thặng dư trực tiếp. Ta xét hàm

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z}\cdot$$

Hình VI.9

Vì hàm e^z là tuần hoàn với chu kỳ thuần ảo $2\pi i$ nên hàm $f(z)$ chỉ thay đổi một thừa số $e^{2\pi\alpha i}$ khi z nhận giá trị số $2\pi i$. Do đó ta sẽ chọn chu tuyến tích phân là chu vi hình chữ nhật với các đỉnh là $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$ (hình VI. 9). Trong hình chữ nhật đó hàm $f(z)$ có cực điểm đơn $z = \pi i$ với thặng dư bằng

$$\text{Res}[f; \pi i] = \frac{e^{\alpha\pi i}}{(1+e^z)'}\Big|_{z=\pi i} = -e^{-\alpha\pi i}.$$

Theo định lý Cauchy ta có

$$\int\limits_{(I)} f(z)dz + \int\limits_{(II)} f(z)dz + \int\limits_{(III)} f(z)dz + \int\limits_{(IV)} f(z)dz = -2\pi i e^{\alpha\pi i}. \qquad (6.44)$$

$$\int\limits_{(I)} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx,$$

$$\int\limits_{(III)} f(z)dz = \int\limits_{+R}^{-R} \frac{e^{(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx = -e^{-2\pi\alpha i}\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx.$$

Trên đoạn (II) ta có $z = R + iy$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ nên

$$|f|_{z\in(II)} = \left|\frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1}$$

và do đó

$$\left|\int\limits_{(II)} f(z)dz\right| \leqslant 2\pi\frac{e^{\alpha R}}{e^R-1} = 2\pi\frac{e^{(\alpha-1)R}}{1-e^{-R}} \to 0(R\to\infty) \text{ (vì } \alpha < 1).$$

Cũng tương tự, trên đoạn (IV) ta có

$$|f|_{z\in(IV)} = \left|\frac{e^{(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}\right| \leqslant \frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}}$$

và do đó

$$\left|\int\limits_{(IV)} f(z)dz\right| \leqslant 2\pi\frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}} \to 0(R\to\infty) \text{ (vì } \alpha > 0).$$

Như vậy nếu $0 < \alpha < 1$ thì qua giới hạn khi $R \to \infty$ từ (6.44) ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx - e^{2\alpha\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

hay là

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\cdot$$

Ví dụ 12. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3}dx, \quad (-1 < p < 2). \tag{6.45}$$

Giải. Để áp dụng lý thuyết thặng dư tính tích phân này, đầu tiên ta thác triển giải tích hàm dưới dấu tích phân ra mặt phẳng phức. Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0,1]$. Dễ dàng thấy rằng thác triển giải tích

$$F(z) = \frac{z^p(1-z)^{1-p}}{(1+z)^3}$$

của hàm dưới dấu tích phân có hai điểm rẽ nhánh là 0 và 1 và trong miền D ta có thể tách nhánh chỉnh hình của hàm giải tích $F(z)$. Ta sẽ tách nhánh chỉnh hình $f(z)$ của $F(z)$ sao cho $f(z) > 0$ khi z ở bờ trên của nhát cắt $[0, 1]$.

Khi $z = x + i0$, $0 < x < 1$ thuộc bờ trên của nhát cắt

$$\begin{aligned} f(x + i0) = f(z)\big|_{z \in I} &= \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3} \\ &= f(x) > 0, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Ta tìm giá trị $f(x - i0)$. Khi điểm $z = x - i0$ ở bờ dưới của nhát cắt, ta có:

$$\begin{aligned} &z^p(1-z)^{1-p} = |z|^p|1-z|^{1-p}e^{i\{p\varphi_1 + (1-p)\varphi_2\}}, \\ &\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z, \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-1), \end{aligned}$$

trong đó γ là đường cong nối điểm thuộc bờ I với điểm $z \in D$. Nếu $z\big|_{II} = x - i0 \ \ (0 < x < 1)$ thì

$$\varphi_1 = 2\pi, \quad \varphi_2 = 0,$$

và do đó

$$z^p(1-z)^{1-p} = e^{2\pi p i}[x^p(1-x)^{1-p}].$$

Từ đó suy ra rằng

$$f(z)\big|_{z \in II} = e^{2\pi p i}\frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3}\cdot$$

Bây giờ ta xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)dz,$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ (Hình VI. 10) gồm:

Hình VI. 10

(1) đường tròn $\gamma(0,\varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$;

(2) bờ (I) của nhát cắt $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$

(3) đường tròn $\gamma(1,\varepsilon) = \{|z-1| = \varepsilon\}$;

(4) bờ (II) của nhát cắt $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$;

(5) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R, R > 1\}$.

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} &= \int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz + (1-e^{2\pi pi})\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz\\ &= 2\pi i \mathrm{Res}[f,-1].\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f;-1] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\{z^p(1-z)^{1-p}\}''\\ &= p(p-1)2^{-p-2}e^{\pi pi},\end{aligned}$$

và như vậy

$$\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} + (1-e^{2\pi pi})\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} + \int\limits_{\gamma(R)} = \pi i p(p-1)2^{-p-1}e^{p\pi i}. \quad (6.46)$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(0,\varepsilon)$. Vì $z \in (0,\varepsilon)$ nên $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, do đó

$$\Big|\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)}\Big| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^p(1+\varepsilon)^{1-p}}{(1-\varepsilon)^3}\varepsilon d\varphi \leqslant \mathrm{const}\cdot\varepsilon^{p+1}.$$

Từ đó suy ra rằng

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(0,\varepsilon)} f(z)dz = 0 \quad (\text{vì } p > -1).$$

Cũng tương tự ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} f(z)dz = 0, \quad p < 2.$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Vì $z \in \gamma(R)$ nên $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ và do đó

$$\Big|\int\limits_{\gamma(R)}\Big| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^p(1+R)^{1-p}}{(R-1)^3}Rd\varphi \leqslant \text{const}\cdot\frac{1}{R} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

Từ các ước lượng này và (6.46) trong giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$ ta có

$$(1-e^{2\pi pi})\int\limits_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3}dx = \pi ip(p-1)2^{-p-1}e^{p\pi i}$$

hay là

$$\int\limits_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3}dx = \pi ip(p-1)2^{-p-1}e^{p\pi i}$$

hay là

$$\int\limits_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3}dx = \frac{\pi ip(p-1)2^{-p-1}e^{p\pi i}}{1-e^{2\pi pi}} =$$

$$\text{(nhân tử và mẫu số với } e^{-p\pi i}\text{)}$$

$$= \frac{p(1-p)}{2^{p+2}\sin p\pi}\cdot$$

Nhận xét 6.2.4. Ta nhận xét rằng bằng phép thế $\dfrac{x}{1-x} = t$ tích phân (6.45) sẽ được đưa về tích phân đã nghiên cứu trong 5° (tích phân dạng (6.28)).

Ví dụ 13. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^p(1-x)^{1-p}}{1+x^2}dx, \quad -1 < p < 2.$$

Giải. Ta ký hiệu

$$D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$$

mặt phẳng với nhát cắt theo đoạn $[-1, +1]$ có hai bờ (I) và (II), trong miền D ta tách nhánh chỉnh hình của hàm

$$f(z) = \frac{(1+z)^p(1-z)^{1-p}}{1+z^p}$$

là thác triển giải tích hàm dưới dấu tích phân ra toàn mặt phẳng. Ta chọn nhánh chỉnh hình $f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(z) > 0$$

khi z thuộc bờ trên của nhát cắt $[-1, +1]$ và do đó

$$\begin{aligned} f(x+i0) = f(z)\big|_{z\in(I)} &= \frac{(1+x)^p(1-x)^{1-p}}{1+x^2} \\ &= f(x) > 0, \quad -1 < x < 1, \\ f(x-i0) = f(z)\big|_{z\in(II)} &= e^{2\pi pi} f(x). \end{aligned}$$

Ta xét tích phân

$$I(R,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)dz,$$

trong đó $\Gamma(R,\varepsilon)$ là chu tuyến đóng, gồm:

(1) đường tròn $\gamma(-1,\varepsilon) = \{|z+1| = \varepsilon\}$;

(2) bờ (I) của nhát cắt: $(I) = [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$;

(3) đường tròn $\gamma(1,\varepsilon) = \{|z-1| = \varepsilon\}$;

(4) bờ (II) của nhát cắt: $(II) = [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$;

(5) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R > 1\}$.

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)dz = \int\limits_{\gamma(-1,\varepsilon)} f(z)dz + (1-e^{2\pi pi})\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)dx \\ + \int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz \\ = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f;i] + \mathrm{Res}[f;-i]\} = 2\pi i\sum \mathrm{Res} f.\end{aligned} \tag{6.47}$$

Ta tính thặng dư

$$\mathrm{Res}[f;\pm i] = \Big(\frac{(1+z)^p(1-z)^{1-p}}{2z}\Big)\Big|_{z=\pm i}.$$

Bằng cách tính các giá trị của hàm luỹ thừa $(1+z)^p(1-z)^{1-p}$ tại các điểm $z = i$ và $z = -i$, dễ dàng thấy rằng

$$\mathrm{Res}[f;+i] = \frac{\sqrt{2}}{2i}e^{i\left[p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$\mathrm{Res}[f;-i] = -\frac{\sqrt{2}}{2i}e^{i\left[p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]}$$

và từ đó ta có thể viết (6.47) dưới dạng

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma(-1,\varepsilon)} f(z)dz + (1-e^{2\pi pi})\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{(1+x)^p(1-x)^{1-p}}{1+x^2}dx + \\ + \int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} f(z)dz + \int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = \\ = \pi\sqrt{2}\Big\{e^{i\left[p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]} - e^{i\left[p\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]}\Big\}\end{aligned} \tag{6.48}$$

Vì $-1 < p < 2$ nên dễ dàng thấy rằng

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(-1,\varepsilon)} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(1,\varepsilon)} f(z)dz = 0.$$

Ta xét tích phân $\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz$. Hiển nhiên tích phân này không dần đến 0 khi $R \to \infty$. Do đó, để xét tích phân theo $\gamma(R)$ ta dùng định nghĩa 6.1.2 và hệ quả 6.1.2. Ta có

$$\operatorname{Res}[f;\infty] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(R)^-} f(z)dz,$$

và do đó

$$\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f;\infty].$$

Ta tính thặng dư $\operatorname{Res}[f;\infty]$. Ta có

$$\operatorname{Res}[f;\infty] = -\lim_{z\to\infty} zf(z)$$

và để tính giới hạn đó, ta cần tính giới hạn của môđun và acgumen của $zf(z)$.

a) $\displaystyle \lim_{z\to\infty} |z|\,|f(z)| = \lim_{z\to\infty} \frac{\left|1+\frac{1}{z}\right|^p \left|1-\frac{1}{z}\right|^{1-p}}{\left|1+\frac{1}{z^2}\right|} = 1.$

b) Tính $\lim\limits_{z\to\infty}[\arg zf(z)]$. Vì giới hạn của hàm chỉnh hình không phụ thuộc vào hướng dần đến giới hạn nên trong trường hợp này ta cho z dần đến ∞ theo hướng dương của trục thực. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} \arg[zf(z)] &= \lim_{z\to\infty}\{\arg z + p\cdot\arg(1+z) + (1-p)\arg(1-z) + \arg(1+z^2)\}\\ &= 0 + 0 + (1-p)(-\pi) + 0 = (p-1)\pi.\end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = e^{(p-1)\pi i} = -e^{p\pi i}$$

và từ đó suy ra

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}[f;\infty] = e^{p\pi i}, \\ &\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = -2\pi i e^{p\pi i}. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Chuyển qua giới hạn khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$, từ (6.48) và (6.49) ta thu được

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi\sqrt{2}\Big\{e^{i\left[p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]} - e^{i\left[p\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]}\Big\} + 2\pi i e^{p\pi i}}{1-e^{2\pi p i}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}\Big\{e^{-i\left[p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]} - e^{i\left[p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]}\Big\} + 2\pi i}{e^{-p\pi i}-e^{p\pi i}} \\ &= \frac{\pi\Big[\sqrt{2}\sin\Big(p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)-1\Big]}{\sin p\pi}\cdot \end{aligned}$$

Ví dụ 14. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x}dx, \quad -1 < p < 2.$$

Giải. Giả sử

$$f(x) = \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x}\cdot$$

Hàm $f(x)$ được cho trên đoạn $(0,1) \subset \mathbb{R}$ có thể thác triển giải tích ra toàn mặt phẳng phức và thác triển giải tích của nó, hàm

$$F(z) = \frac{z^p(1-z)^{1-p}}{2+z}$$

có hai điểm phân nhánh là $z = 0$ và $z = 1$.

Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0,1)$. Khi đó, trong miền D ta có thể tách nhánh chỉnh hình của hàm giải tích $F(z)$. Ta sẽ chọn nhánh chỉnh hình $f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(z) > 0$$

khi z thuộc bờ trên I của nhát cắt $(0,1)$ và do đó

$$f(z)\big|_{z\in(I)} = f(x) = \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x}\cdot$$

Ta tìm giá trị của $f(z)$ ở bờ dưới (II) của nhát cắt $(0,1)$. Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} f(z)\big|_{z\in(II)} &= e^{-(1-p)2\pi i}\frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x} \\ &= e^{-(1-p)2\pi i}f(x). \end{aligned}$$

Ta xét tích phân

$$I(R,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)dz,$$

trong đó $\Gamma(R,\varepsilon)$ là chu tuyến đóng gồm:

(1) đường tròn $\gamma(0;\varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$;

(2) bờ (I) của nhát cắt $(0,1)$;

(3) đường tròn $\gamma(1,\varepsilon) = \{|z-1| = \varepsilon\}$;

(4) bờ (II) của nhát cắt $(0,1)$;

(5) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R, R > 2\}$.

Dễ dàng thấy rằng tích phân theo các đường tròn $\gamma(0,\varepsilon)$ và $\gamma(1,\varepsilon)$ đều dần đến 0 khi $\varepsilon \to 0$. Do đó theo định lý Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (1-e^{2\pi pi})\int\limits_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x}dx &= 2\pi i\text{Res}[f;-2] - \oint\limits_{\gamma(R)} f(z)dz \\ &= 6\pi i\Big(\frac{2}{3}\Big)^p e^{p\pi i} + \oint\limits_{\gamma(R)} f(z)dz. \end{aligned}$$

Đối với tích phân $\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz$ ta có thể viết

$$\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = -2\pi i \mathrm{Res}[f;\infty].$$

Do đó ta cần tính $\mathrm{Res}[f;\infty]$. Để làm việc đó, ta xét hàm

$$F^*(z) = \frac{\left(1-\dfrac{1}{z}\right)^{1-p}}{1+\dfrac{2}{z}}\cdot$$

Hiển nhiên đó là một hàm đa trị. Ta sẽ xét nhánh $f^*(z)$ của hàm $F^*(z)$ sao cho nhánh đó dần đến 1 khi $z\to\infty$. Đối với nhánh đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{\left(1-\dfrac{1}{z}\right)^{1-p}}{1+\dfrac{2}{z}} &= \left[1-(1-p)\frac{1}{z}+\frac{(1-p)(-p)}{2!}\frac{1}{z^2}-\dots\right]\\ &\quad\times\left[1-\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\dots\right]\\ &= 1-[(1-p)+2]\frac{1}{z}+\dots\end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$c_{-1}(f^*) = -3+p,$$

(hệ số của $1/z$).

Ta nhận xét thêm rằng

a) $|f| = |f^*|$;

b) $\arg f(z) \neq \arg f^*(z)$.

Thật vậy, khi $z\to\infty$ theo $\mathbb{R}^+$ ta có

$$\arg\frac{z^p(1-z)^{1-p}}{2+z}\to -(1-p)\pi$$

trong khi đó

$$\arg f^*(z) \to 0$$

khi $z \to \infty$ theo $\mathbb{R}^+$ vì $\lim f^*(z) = 1$. Từ đó suy ra rằng trên bán trục $\mathbb{R}^+$ ta có

$$f(z) = e^{-\pi i(1-p)} f^*(z)$$

và theo định lý duy nhất, biểu thức vừa viết đúng cho toàn mặt phẳng. Do đó

$$c_{-1}(f) = (p-3)e^{-\pi i(1-p)}$$

và

$$\int\limits_{\gamma(R)} f(z)dz = +2\pi i(p-3)e^{-\pi i(1-p)}.$$

Như vậy khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$ ta có

$$(1 - e^{2\pi p i})J = 6\pi i\Big(\frac{2}{3}\Big)^p e^{p\pi i} - 2\pi i(p-3)e^{-\pi i(1-p)}$$

hay là

$$J = \frac{\pi}{\sin p\pi}\Big[p - 3 - 3\Big(\frac{2}{3}\Big)^p\Big].$$

6.2.7 Tìm tổng của chuỗi

Các phương pháp của lý thuyết thặng dư còn được áp dụng để khảo sát tổng các chuỗi. Trong một số trường hợp, việc đó thường dựa trên các định lý sau đây:

Định lý 6.2.5. *Giả sử*

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

là hàm hữu tỷ với các cực điểm không nguyên $z_1, z_2, \dots, z_p$ $(z_k \notin \mathbb{Z},\ k = 1, 2, \dots, p)$ *và giả sử* $m \geqslant n + 2$.

Khi đó

$$\sum_{-\infty<n<\infty} R(n) = -\pi \sum_{k=1}^{p} Res[R(z)\,ctg\pi z; z_k]. \tag{6.50}$$

Chứng minh. Ta xét tích phân

$$I(n) = \int\limits_{\gamma(n)} R(z)\text{ctg}\pi z dz; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

trong đó $\gamma(R)$ là biên của hình vuông với tâm tại gốc tọa độ với các đỉnh tại

$$\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \quad (\pm 1, \pm i)$$

sao cho các điểm $z_1, z_2, \dots, z_p$ thuộc phần trong của nó (hình VI.11).

Hình VI.11

Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} I(n) = 0$. Vì mẫu số của $R(n)$ có bậc cao hơn bậc tử số hai đơn vị nên

$$|R(z)| \leqslant \text{const}\ \frac{1}{|z|^2}$$

và do đó

$$\max_{z\in\gamma(n)} |R(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)^2} \leqslant \frac{\text{const}}{n^2}\cdot \tag{6.51}$$

Bây giờ ta xét $|\text{ctg}\pi z|$ trên $\gamma(n)$. Trên các cạnh song song với trục ảo ta có

$$\begin{aligned}|\text{ctg}\pi z|_{z\in D_nA_n,B_nC_n} &= \left|\frac{\cos\Big[\pm\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi+iy\pi\Big]}{\sin\Big[\pm\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi+iy\pi\Big]}\right|\\ &= \left|\frac{\sin iy}{\cos iy}\right| = \left|\frac{e^{y\pi}-e^{-y\pi}}{e^{y\pi}+e^{-y\pi}}\right| < 1,\end{aligned}$$

còn trên các cạnh song song với trục thực thì

$$\begin{aligned}|\text{ctg}\pi z|_{z\in A_nB_n,C_nD_n} &= \left|\frac{\cos\Big[nx\pm i\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi\Big]}{\sin\Big[nx\pm i\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi\Big]}\right| \leqslant\\ &\leqslant \frac{\text{ch}\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi}{\text{sh}\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi} = \frac{1+e^{-(2n+1)\pi}}{1-e^{-(2n+1)\pi}}\\ &\leqslant \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}\end{aligned}$$

(ở đây ta đã sử dụng các bất đẳng thức

$$\begin{aligned}|\cos z| &\leqslant \frac{|e^{iz}|+|e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \text{ch}y\\ |\sin z| &\geqslant |\text{sh}y|).\end{aligned}$$

Như vậy với mọi $z\in\gamma(n)$ ta có

$$|\text{ctg}\, z|_{z\in\gamma(n)} \leqslant \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}, \tag{6.52}$$

và do đó từ (6.51) và (6.52) suy ra

$$\begin{aligned}|I(n)| &\leqslant \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}\cdot\frac{\text{const}}{n^2}\cdot 4(2n+1)\\ &\leqslant \frac{\text{const}}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Nhưng mặt khác, theo định lý về thặng dư ta có

$$I(n) = 2\pi i\Big\{\sum_{-n}^{n}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{ctg}\pi z; k] + \sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}[., z_k]\Big\} \tag{6.53}$$

trong đó $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ là cực điểm của $\mathrm{ctg}\pi z$.

Hiển nhiên rằng

$$\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{ctg}\pi z; k] = \frac{1}{\pi}R(k)$$

và do đó từ (6.53) ta có

$$I(n) = 2\pi i\sum_{-n}^{n}\frac{R(k)}{\pi} + \sum_{1}^{p}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{ctg}\pi z; z_k].$$

Qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta thu được công thức phải chứng minh. □

Định lý 6.2.6. *Với các giả thiết của định lý 6.2.5 ta còn có*

$$\sum_{-\infty<n<\infty}(-1)^n R(n) = -\pi\sum_{k=1}^{p} Res\Big[\frac{R(z)}{\sin\pi z}; z_k\Big]. \tag{6.54}$$

Chứng minh. Cũng như trong chứng minh định lý 6.2.5, ta xét tích phân $I(n) = \int\limits_{\gamma(n)}\frac{R(z)dz}{\sin nz}$, $\gamma(n)$ = chu vi hình vuông $A_nB_nC_nD_n$, và hiển nhiên rằng

$$I(n) = 2\pi i\Big\{\frac{1}{\pi}\sum_{-n}^{n}(-1)^k R(k) + \sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}\Big[\frac{R(z)}{\sin\pi z}; z_k\Big]\Big\}.$$

Ta cần chứng minh rằng $I_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Để làm việc đó, ta sẽ ước lượng $\Big|\frac{1}{\sin\pi z}\Big|$ khi z biến thiên trên các cạnh hình vuông $A_nB_nC_nD_n$.

Trên các cạnh song song với trục ảo ta có

$$\Big|\frac{1}{\sin\pi z}\Big| = \Big|\frac{1}{\sin\pi\Big[\pm\Big(n+\frac{1}{2}\Big)+iy\Big]}\Big| = \Big|\frac{1}{\cos i\pi y}\Big| = \frac{1}{\mathrm{ch}\pi y} < 1$$

(vì chπy không bị chặn khi y tăng!) còn trên các cạnh song song với trục thực thì

$$\Big|\frac{1}{\sin\pi\Big[\pm\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)i\pm x\Big]}\Big|\leqslant\frac{1}{\mathrm{sh}\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi}<1.$$

Từ đó suy ra rằng $\lim\limits_{n\to\infty}I(n)=0$ và ta thu được công thức (6.54). □

Ví dụ 16. Tìm tổng của chuỗi

$$\sum_{-\infty<n<\infty}\frac{1}{(a+n)^3}\,;\quad a\notin\mathbb{Z}.$$

Giải. Đặt

$$R(z)=\frac{1}{(a+z)^2}$$

và áp dụng định lý 6.2.5 ta có

$$\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty<n<\infty}\frac{1}{(a+n)^2}=-\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{(a+z)^2}\mathrm{ctg}\pi z;-a\Big].$$

Vì

$$\mathrm{ctg}\pi z=\mathrm{ctg}(-\pi a)+(\pi z-\pi a)\Big[\frac{-1}{\sin^2\pi a}\Big]+\dots$$

nên

$$\mathrm{Res}\Big[\frac{\mathrm{ctg}\pi z}{(a+z)^2}\,;-a\Big]=\frac{-\pi}{\sin^2\pi a}$$

và do đó

$$\sum_{-\infty<n<\infty}\frac{1}{(a+n)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}\,\cdot$$

Ví dụ 17. Tìm tổng của chuỗi

$$\sum_{-\infty<n<\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}\,;\quad a\notin\mathbb{Z}.$$

Giải. Đặt

$$R(z) = \frac{1}{(z+a)^2},$$

và áp dụng định lý 6.23 ta có

$$\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty<n<\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = -\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{(z+a)^2\sin\pi z}, -a\Big].$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\mathrm{Res}[.; -a] = -\frac{\pi\cos\pi a}{\sin^2\pi a}$$

và do đó

$$\sum_{-\infty<n<\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2\cos\pi a}{\sin^2\pi a}\cdot$$

6.3 Hàm nguyên và hàm phân hình

6.3.1 Hàm phân hình. Bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức

Ta lưu ý rằng hàm đơn trị được gọi là *hàm phân hình* nếu trong toàn mặt phẳng (có thể trừ điểm ∞) nó chỉ có các điểm bất thường là cực điểm (xem **4.3.5**).

Hàm phân hình có thể có một số hữu hạn hoặc vô hạn các cực điểm. Nếu nó có vô số cực điểm thì các cực điểm không thể có điểm tụ trong $\mathbb{C}$ vì điểm tụ đó là điểm bất thường nhưng không cô lập và trong mọi trường hợp nó không phải là cực điểm. Điều đó trái với định nghĩa hàm phân hình.

Bây giờ ta xét các đường tròn C_n và C_{n+1} với bán kính bằng n và $n+1$ tương ứng. Từ điều đã nói trên suy ra rằng giữa các đường tròn này chỉ có một số hữu hạn cực điểm của hàm phân hình. Điều đó chứng tỏ rằng các cực điểm có thể đánh số theo thứ tự không giảm đối với mô đun của chúng

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_n| \leqslant$$

và khi đó $\lim_n a_n = \infty$.

Giả sử f là hàm phân hình và a_n là một trong các cực điểm của nó. Ta ký hiệu

$$g_n(z) = \widetilde{g}_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big)$$

là phần chính của khai triển Laurent tại lân cận điểm a_n.

Bây giờ ta chuyển sang nghiên cứu bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức.

Giả sử $\{a_n\}$ là tập hợp đóng các điểm cô lập của $\mathbb{C}$. Đối với mỗi điểm a_n ta xác định hàm dạng

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n}\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big)^k \tag{6.55}$$

(đó là những đa thức đối với $1/(z-a_n)$).

Bài toán Cousin thứ nhất được đặt ra như sau. *Hãy xác định hàm phân hình f trong $\mathbb{C}$ sao cho f có cực điểm tại a_n với phần chính tương ứng $g_n(z)$ tại các cực điểm đó, còn hàm $f - g_n(z)$ thì chỉnh hình tại các điểm a_n.*

1. Nếu số cực điểm a_n là hữu hạn (ví dụ m) thì hàm như thế sẽ là, chẳng hạn

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} \widetilde{g}_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big).$$

2. Giả sử số cực điểm của hàm f là vô hạn. Để trình bày lời giải của bài toán Cousin trong trường hợp này, đầu tiên ta cần quy ước hiểu sự hội tụ của chuỗi các hàm phân hình.

Định nghĩa 6.3.1. Chuỗi các hàm phân hình được gọi là *hội tụ* (tương ứng: *hội tụ đều*) trên tập hợp M nếu chỉ một số hữu hạn các số hạng của nó có cực điểm trên M và sau khi cắt bỏ các số hạng ấy thì chuỗi *hội tụ (tương ứng hội tụ đều)* trên M.

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý về sự tồn tại lời giải của bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức, tức là chứng minh sự tồn tại hàm phân hình với các cực điểm và phần chính tương ứng cho trước.

Định lý 6.3.1. (Mittag-Leffer) *Giả sử* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là dãy điểm rời rạc bất kỳ của* $\mathbb{C}$

$$0 \leqslant |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_n| \leqslant \ldots \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ và } g_n(z) = \widetilde{g}_n\Big(\frac{1}{z-a_n}\Big)$$

là dãy các đa thức bất kỳ của

$$\frac{1}{z-a_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Khi đó tồn tại hàm phân hình f có cực điểm tại mọi a_n (và cũng chỉ tại các điểm ấy) với các phần chính $g_n(z)$ tương ứng.

Chứng minh. 1. Không giảm tổng quát, ta có thể cho rằng $a_n \neq 0$ vì thay cho f ta có thể xét hàm $f - g_0$, trong đó g_0 là phần chính của f tại điểm $z = 0$.

Hàm $g_n(z)$ chỉnh hình trong miền $D_n = \mathbb{C} \setminus \{a_n\}$, do đó có thể khai triển $g_n(z)$ thành chuỗi luỹ thừa

$$g_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \cdots + a_k^{(n)} z^k + \ldots \tag{6.56}$$

Chuỗi (6.56) hội tụ trong hình tròn $\{|z| < |a_n|\}$. Ta chọn một dãy $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n > 0$ sao cho chuỗi $\sum \varepsilon_n$ hội tụ. Vì chuỗi (6.56) hội tụ đều trên từng compắc của hình tròn $\{|z| < |a_n|\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\exists m_n \in \mathbb{N}$ sao cho khi $|z| < \dfrac{1}{2}|a_n|$ ta có

$$\Big|g_n(z) - \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} z^k\Big| < \varepsilon_n. \tag{6.57}$$

Ta đặt $P_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} z^k$ và xét chuỗi

$$\sum_{n>1} |g_n(z) - P_n(z)|. \tag{6.58}$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng chuỗi (6.58) hội tụ đều trên từng compắc $K \subset \mathbb{C}$ theo nghĩa của định nghĩa (6.55). Thật vậy, tập hợp $K \subset \mathbb{C}$ bất kỳ luôn luôn có thể xem là nằm trong hình tròn $\{|z| < R\}$, $R > 0$ nào đó. Ta ký hiệu $N(R) + 1$ là chỉ số mà bắt đầu từ đó tất cả các cực điểm a_n đều nằm ngoài hình tròn với bán kính gấp đôi:

$$|a_n| > 2R \Rightarrow |a_n|/2 > R \quad \forall n > N(R), \tag{6.59}$$

và xét chuỗi

$$\sum_{n \geqslant N(R)+1} [g_n(z) - P_n(z)]. \tag{6.60}$$

Tất cả các cực điểm của chuỗi (6.3.6) đều thỏa mãn điều kiện (6.59): $\dfrac{|a_n|}{2} > R$; và do đó hình tròn $\{|z| < R\}$ nằm trong mọi hình tròn $\left\{|z| < \dfrac{|a_n|}{2}\right\}$. Do điều kiện (6.57) ta có thể khẳng định rằng $|g_n(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n$ nếu $|z| < R$ và $n > N(R)$. Từ đó suy ra rằng chuỗi (6.3.6) hội tụ đều trong hình tròn $|z| < R$ và do đó trên K; và tổng $\varphi_N(z)$ của nó là hàm chỉnh hình trên K. Từ đó suy ra rằng tổng f của (6.58) khác với $\varphi_N(z)$ một hàm hữu tỷ $\sum\limits_{k=1}^{N(R)} [g_k(z) + P_k(z)]$ với các cực điểm $a_1, a_2, \dots, a_{N(R)}$ với các phần chính tương ứng $g_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, N(R)$. Do đó trong K hàm f có các cực điểm cho trước và phần chính tương ứng cho trước.

Vì K là compắc bất kỳ nên f là hàm phân hình và trong $\mathbb{C}$ nó có các cực điểm và phần chính tương ứng cho trước.

2. Hiển nhiên hàm $f(z)$ chỉ là một trong các hàm thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Bây giờ ta chứng tỏ rằng lời giải tổng quát của bài toán có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = h(z) + \sum_{n \geq 1} [g_n(z) - P_n(z)], \tag{6.61}$$

trong đó $h(z)$ là hàm nguyên, $P_n(z)$ là những đa thức nào đó. Để chứng minh, ta áp dụng phần 1 vừa chứng minh để xây dựng hàm $\varphi(z)$ có cực điểm và phần chính tương ứng của hàm $f(z)$.

Ta có

$$\varphi(z) = \sum_{n\geqslant 1}[g_n(z) - P_n(z)].$$

Hiển nhiên hiệu $f(z) - \varphi(z) = h(z)$ chỉnh hình trong $\mathbb{C}$, do đó h là hàm nguyên. Từ đó suy ra rằng

$$f(z) = h(z) + \varphi(z) = h(z) + \sum_{n\geqslant 1}[g_n(z) - P_n(z)].$$

$\square$

Định lý Mittag-Leffter vừa chứng minh là định lý tồn tại chứ không cho ta một lượng thông tin nào về việc chọn các đa thức "hiệu chỉnh" P_n và hàm nguyên $h(z)$. Ta sẽ sử dụng phương pháp Cauchy để chứng minh một định lý có tính chất kiến thiết hơn sau đây.

Định lý 6.3.2. (Cauchy) *Giả sử trên hệ đường tròn*

$$\gamma_n = \{|z| = r_n, r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \dots, r_n \to \infty\}$$

nào đó hàm phân hình f tăng không nhanh hơn so với z^m, tức là với mọi $z \in \gamma_n$ $(n = 1, 2, \dots)$

$$|f(z)| \leq A|z|^m, \quad A \equiv const. \tag{6.62}$$

Khi đó có thể lấy các hàm P_n và h trong khai triển (6.61) *là những đa thức bậc không vượt quá m.*

Chứng minh. Giả sử hàm f có các cực điểm là $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Ta cố định điểm $z \in \mathbb{C}$ tùy ý khác với các cực điểm của f và giả sử γ_N chứa điểm z ở bên trong. Ta xét hàm

$$F(z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\cdot$$

Hàm $F(z)$ chỉnh hình khắp nơi trong γ_N trừ điểm $\zeta = z$ và các cực điểm $a_1, a_2, \dots, a_N$ của hàm f. Ta xét tích phân

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1 - \dfrac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^m}{\zeta^{m+1}} + \frac{1}{\zeta - z} \times \frac{z^{m+1}}{\zeta^{m+1}},$$

và do đó

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} f(\zeta)\Big[\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^m}{\zeta^{m+1}} + \frac{1}{\zeta - z}\cdot\frac{z^{m+1}}{\zeta^{m+1}}\Big] d\zeta$$

hay là

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} f(\zeta) d\zeta = \frac{z^{m+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\frac{d\zeta}{\zeta^{m+1}}\cdot \tag{6.63}$$

Tính tích phân $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Ta có

$$\mathrm{Res}[F(\zeta); z] = f(z).$$

Bây giờ tính $\mathrm{Res}[F(\zeta); a_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$. Vì tại lân cận điểm a_k hàm f có dạng

$$f(z) = g_k(z) + \varphi_k(z),$$

trong đó $\varphi_k(z)$ chỉnh hình tại điểm a_k, do đó

$$\mathrm{Res}[F; a_k] = -g_k(z).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{(\gamma_N)} g_n(z). \tag{6.64}$$

Bây giờ ta tính các tích phân dạng

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta.$$

Bằng cách áp dụng công thức tích phân đối với đạo hàm cấp cao tại điểm $z=0$, từ công thức (6.64) ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{(\gamma_N)}\frac{g_n^{(k)}(0)}{k!}\quad k=0,1,2,\dots,m,$$

và từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}f(\zeta)d\zeta &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k - \sum_{k=0}^{m}\Big(\sum_{(\gamma_N)}\frac{g_n^{(k)}(0)}{k!}\Big)z^k\\ &= h(z) - \sum_{(\gamma_N)}P_n(z)\end{aligned}$$

trong đó

$$h(z) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k,\quad P_n(z) = \sum_{k=0}^{m}\frac{g_n^{(k)}(0)}{k!}z^k. \tag{6.65}$$

Như vậy, từ (6.26) ta thu được

$$\frac{z^{m+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+1}}d\zeta = f(z) - h(z) - \sum_{(\gamma_N)}(g_n - P_n).$$

Vấn đề còn lại là ước lượng tích phân ở vế trái. Ta có

$$R_N(z) = \frac{z^{m+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{f(\zeta)}{\zeta^m}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}$$

và do đó sử dụng điều kiện (6.25) ta thu được

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{A|z|^{m+1}}{r_N - |z|}\cdot$$

Do đó $R_N(z)\to 0$ khi $N\to\infty$ và sự hội tụ đó là đều trên compắc bất kỳ. Định lý được chứng minh đầy đủ. $\square$

Ví dụ 1. Định lý Cauchy vừa chứng minh có ứng dụng quan trọng việc khai triển hàm phân hình thành các phân thức tối giản. Ta xét ví dụ sau

$$f(z) = \text{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\cdot$$

Hàm phân hình f có các cực điểm đơn tại $z_k = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ với thặng dư là

$$\text{Res}[f; n\pi] = 1.$$

Ta sẽ chứng minh rằng hàm f bị chặn trên hệ các đường tròn

$$\gamma_n = \Big\{|z| = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\pi\Big\}.$$

Vì $f(z)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ π nên trong mỗi băng $n\pi < \text{Re}\, z < (n+1)\pi$ hàm đó nhận những giá trị như nhau. Do đó ta chỉ cần chứng minh nó bị chặn trong miền D là băng $0 \leqslant \text{Re}\, z \leqslant \pi$ trừ đi các nửa hình tròn

$$|\text{ctg}\, z| \leqslant \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{||e^{iz}| - |e^{-iz}||} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{|e^{-y} - e^{y}|}\cdot$$

Do đó khi $y > 1$:

$$|\text{ctg}\, z| \leqslant \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}\,,$$

và khi $y < -1$

$$|\text{ctg}\, z| \leqslant \frac{1 + e^{2y}}{1 - e^{-2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}\cdot$$

Trong phần còn lại của miền đang xét khi $-1 \leqslant y \leqslant 1$ thì hàm $|\text{ctg}\, z|$ bị chặn vì nó liên tục.

Như vậy $|\text{ctg}\, z|$ bị chặn trong miền D và do đó ta có thể lấy $m = 0$. Từ đó cũng suy ra rằng hàm $\text{ctg}\, z$ bị chặn trong toàn mặt phẳng cắt bỏ các hình tròn $\{|z - n\pi| < r, n \in \mathbb{Z}\}$.

Thặng dư của f tại các điểm ấy bằng

$$g_n(z) = \frac{1}{z - n}\,, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Các đa thức P_n (trong công thức (6.65)) là những đa thức bậc không quá $m = 0$:

$$P_n(z) = g_n(0) = \frac{1}{n\pi}\,, \quad n \neq 0.$$

Từ đó rút ra

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty<n<\infty, n\neq 0} \Big(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\Big). \tag{6.66}$$

Chuỗi (6.66) là chuỗi hội tụ đều trong phần bị chặn tùy ý của mặt phẳng $|z| < R$ sau khi vứt bỏ các số hạng chứa cực điểm trong phần đó. Thật vậy, ta có

$$\Big|\frac{z}{(z-n\pi)n\pi}\Big| = \frac{1}{n^2}\frac{|z|}{\pi\Big|\pi - \dfrac{z}{n}\Big|} \leqslant \frac{R}{\pi\Big(\pi - \dfrac{R}{n}\Big)}\cdot\frac{1}{n^2}\,.$$

Vì $\dfrac{R}{\pi\Big(\pi - \dfrac{R}{n}\Big)} \to \dfrac{R}{\pi^2}$ khi $n \to \infty$ và chuỗi $\sum\limits_{n\neq 0}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi (6.66) (ta có thể làm được vì chuỗi hội tụ đều và tuyệt đối) ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\Big)\\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2 - n^2\pi}\,\cdot\end{aligned}$$

6.3.2 Hàm nguyên. Bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức

Bây giờ ta chuyển sang xét các hàm nguyên. Theo định nghĩa (xem **4.3.5**) hàm f được gọi là *hàm nguyên* nếu nó chỉnh hình trong $\mathbb{C}$. Hàm nguyên f có thể

1. không có một không-điểm nào,

2. có một số hữu hạn không-điểm,

3. có vô số không-điểm trong $\mathbb{C}$.

Trong trường hợp thứ nhất ta có

Định lý 6.3.3. *Hàm nguyên không có không - điểm khi và chỉ khi nó có thể biểu diễn dưới dạng $f = e^g$, trong đó g là hàm nguyên.*

Chứng minh. 1. Nếu g là hàm nguyên thì e^g cũng là hàm nguyên không có không - điểm.

2. Ngược lại nếu f là hàm nguyên không có không - điểm thì tồn tại hàm nguyên g sao cho $f = e^g$. Thật vậy, nhánh bất kỳ của $\ln f(z)$ đều là hàm chỉnh hình trong toàn mặt phẳng (vì f chỉnh hình và không triệt tiêu) và có thể thác triển giải tích $\ln f(z)$ theo tuyến bất kỳ. Do đó $\ln f(z)$ là hàm đơn trị trong $\mathbb{C}$, nghĩa là: $\ln f(z)$ là hàm nguyên. Ta ký hiệu nó là g và thu được $f = e^g$. □

Trong trường hợp thứ hai, giả sử hàm nguyên f có một số hữu hạn không-điểm trong $\mathbb{C}$, trong đó mỗi không - điểm được tính một số lần bằng cấp của nó. Ta sẽ xét việc khai triển hàm nguyên thành tích các thừa số bậc nhất tương ứng với các không - điểm của chúng tương tự như khai triển đa thức

$$P(z) = az^m \prod_{n=1}^{l}(z - a_n) = Az^m \prod_{n=1}^{l}(1 - z/a_n).$$

Ta có

Định lý 6.3.4. *Nếu các hàm nguyên $f(z) \not\equiv 0$ và $F(z) \not\equiv 0$ có các không - điểm như nhau (với cấp như nhau) thì*

$$f(z) = e^{g(z)}F(z),$$

trong đó $g(z)$ là một hàm nguyên nào đó (có thể là hằng số).

Chứng minh. Ta xét hàm $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{F(z)}$. Hàm này có thể có các điểm bất thường (cực điểm!) tại các không điểm của $F(z)$. Nhưng không-điểm của

$F(z)$ cũng là không-điểm của $f(z)$ với cùng một cấp cho nên $\varphi(z)$ không có một cực điểm nào trong $\mathbb{C}$. Do đó $\varphi(z)$ là hàm nguyên. Bằng cách lý luận tương tự ta còn thấy rằng $\varphi(z)$ không có không điểm trong $\mathbb{C}$. Từ đó cũng suy ra rằng hàm

$$h(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

cũng là hàm nguyên. Lấy tích phân hàm $h(z)$ từ 0 đến điểm z tùy ý ta thu được

$$g_1(z) = \int\limits_0^z h(z)dz = \int\limits_0^z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = \ln\frac{\varphi(z)}{\varphi(0)} + 2k\pi i.$$

Từ đó rút ra $g_1(z)$ là hàm nguyên và

$$\varphi(z) = \varphi(0)e^{g_1(z)} = e^{g_1(z)+\ln\varphi(0)} = e^{g(z)},$$

trong đó hàm $g(z) = g_1(z) + \ln\varphi(0)$ cũng là hàm nguyên.

Từ đó rút ra

$$f(z) = e^{g(z)}F(z).$$

□

Nếu hàm nguyên f có một số hữu hạn không điểm trong $\mathbb{C}$:

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m\,\text{lần}}, a_1, a_2, \dots, a_n$$

thì vì đa thức $F(z) = z^m(1 - z/a_1)\dots(1 - z/a_n)$ cũng có những không điểm đó nên từ định lý vừa chứng minh suy ra

$$f(z) = e^{g(z)}z^m\prod_{k=1}^{n}(1 - z/a_k). \tag{6.67}$$

Bây giờ ta xét sự khái quát công thức trên đây cho trường hợp khi tập hợp các không điểm $N(f)$ của hàm nguyên f là vô hạn. Từ định lý duy nhất của hàm chỉnh hình suy ra rằng $N(f)$ là tập hợp đếm được. Vì trong mọi hình tròn $\{|z| < R, R < \infty\}$ hàm f chỉ có một số hữu hạn không điểm nên các không-điểm của chúng có thể đánh số theo thứ tự môđun không giảm và mỗi không điểm được tính một số lần bằng bội của nó. Như vậy

$$N(f) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \quad \lim a_n = \infty.$$

Trong trường hợp này ta cần xét tích vô hạn thay cho tích hữu hạn (6.67). Ta nhắc lại vài định nghĩa và sự kiện giản đơn nhất liên quan đến các tích ấy mà ta sẽ sử dụng sắp tới. Tích vô hạn với các thừa số phức

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n) \tag{6.68}$$

được gọi là *hội tụ* nếu mọi thừa số của nó khác 0 và tích riêng

$$\pi_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + c_k)$$

có giới hạn $\Pi = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n$ cũng khác 0. Số Π được gọi là giá trị của tích (6.68).

Vì $1 + c_n = \dfrac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}}$ cho nên điều kiện $c_n \to 0$ là điều kiện cần để tích (6.68) hội tụ. Dĩ nhiên đó không phải là điều kiện đủ: chẳng hạn $\Pi\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$. Để tích (6.68) hội tụ, điều kiện cần và đủ là chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1 + c_n)$ hội tụ với việc chọn các giá trị của lôgarit thích hợp.

Cuối cùng, tích vô hạn mà thừa số là các hàm chỉnh hình trên tập hợp M được gọi là hội tụ trên M nếu trong các thừa số chỉ có một số hữu hạn là triệt tiêu trên M và sau khi gạt bỏ các thừa số ấy thì tích hội tụ tại mỗi điểm của M.

Định lý 6.3.5. (Về tích vô hạn các hàm nguyên)

Giả sử các hàm nguyên $U_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$ thỏa mãn các điều kiện:

1. *Đối với mỗi $R > 0$ đều tồn tại chỉ số $N(R)$ sao cho với mọi $n > N(R)$, các hàm $U_n(z)$ đều không có không điểm trong hình tròn $\{|z| < R\}$.*

2. *Chuỗi*

$$\sum_{n>N(R)+1} \ln U_n(z)$$

hội tụ đều trong hình tròn $\{|z| < R\}$ *với cách chọn nào đó đối với các lôgarit. Khi đó tích vô hạn*

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n(z) \tag{6.69}$$

a) *hội tụ* $\forall\, z \in \mathbb{C}$;

b) *là một hàm nguyên;*

c) *tập hợp các không điểm của hàm nguyên ấy chính là tập hợp các không - điểm của mọi thừa số* $U_n(z)$.

Chứng minh. a) Ta viết tích vô hạn dưới dạng

$$\prod_{n\geqslant 1} U_n(z) = \prod_{n=1}^{N(R)} U_n(z) \prod_{n\geqslant N(R)+1} U_n(z).$$

Từ điều kiện 2) suy ra rằng tích vô hạn $\prod\limits_{n\geqslant N(R)+1} U_n(z)$ hội tụ trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Khi đó tích vô hạn (6.69) hội tụ trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Do R tùy ý nên tích vô hạn (6.69) hội tụ $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

b) Ta xét hàm

$$\varphi_R(z) = \sum_{n\geqslant N(R)+1} \ln U_n(z).$$

Theo giả thiết, $\forall\, n > N(R)$ các hàm $U_n(z)$ chỉnh hình và không triệt tiêu trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Và khi đó cả $\ln U_n(z)$ cũng là hàm chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Theo điều kiện 2) chuỗi đối với $\varphi_R(z)$ hội tụ đều. Do đó tổng của nó là hàm chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Từ đó suy ra rằng tích vô hạn

$$P(z) = \prod_{n\geqslant 1} U_n(z) = \prod_{n=1}^{N(R)} U_n(z) \cdot e^{\varphi_R(z)} \tag{6.70}$$

cũng là hàm chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Vì R là tùy ý nên tích vô hạn là hàm chỉnh hình trong $\mathbb{C}$, nghĩa là tích vô hạn (6.69) là hàm nguyên.

c) Để chứng minh 3) ta sẽ áp dụng công thức (6.70). Vì $\varphi_n(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$ nên $e^{\varphi_R(z)}$ không triệt tiêu trong hình tròn ấy. Do đó trong hình tròn $\{|z| < R\}$ tích vô hạn chỉ triệt tiêu tại những điểm mà các thừa số $U_n(z)$ triệt tiêu, $n = 1, 2, \ldots, n(R)$. Vì R là tùy ý, nên từ đó suy ra điều khẳng định của định lý. $\square$

Trước khi chuyển sang trình bày cách đặt bài toán Cousin thứ hai và lời giải của nó ta chứng minh

Bổ đề 6.3.1. *Giả sử $a \neq 0$ và $p \in \mathbb{N}$. Khi đó đối với hàm*

$$u(z) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{z}{a}\right) e^{(z/a) + \frac{1}{z}(z/a)^2 + \cdots + \frac{1}{p-1}(z/a)^{p-1}}, & p \geqslant 2 \\ 1 - z/a, & p = 1 \end{cases} \tag{6.71}$$

trong hình tròn $\left\{|z| < \dfrac{1}{2}|a|\right\}$ ta có ước lượng

$$|\ln U(z)| \leqslant 2|z/a|$$

nếu nhánh liên tục của lôgarit được chọn sao cho $\ln U(0) = 0$.

Chứng minh. 1. Giả sử $p \geqslant 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} \ln U(z) &= \ln\left(1 - \frac{z}{a}\right) + \frac{z}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a}\right)^{p-1} \\ &= -\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \cdots + \left(\frac{z}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a}\right)^{p-1} \\ &= -\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a}\right)^p - \frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{p+1} - \ldots \end{aligned}$$

Khi $|z| < \dfrac{|a|}{2}$ ta có

$$\begin{aligned}|\ln U(z)| &\leqslant \Big|\frac{z}{a}\Big|^p\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\Big|\frac{z}{a}\Big| + \dots\Big)\\ &\leqslant \Big|\frac{z}{a}\Big|^p\Big(1 + \Big|\frac{z}{a}\Big| + \Big|\frac{z}{a}\Big|^2 + \dots\Big)\\ &= \Big|\frac{z}{a}\Big|^p\frac{1}{1-\Big|\dfrac{z}{a}\Big|} \leqslant 2\Big|\frac{z}{a}\Big|^p.\end{aligned}$$

Như vậy, đối với $p \geqslant 2$ ta có $|\ln U(z)| \leqslant 2\Big|\dfrac{z}{a}\Big|^p$ khi $|z| < \dfrac{|a|}{2}$.

2. Trường hợp $p = 1$ được xét tương tự. □

Nhận xét. $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \neq 0 \quad \forall n : \lim a_n = \infty$ $\exists \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ $p_n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\dfrac{R}{|a_n|}\Big)^{p_n}$ hội tụ với mọi $R > 0$. Dãy p_n như vậy luôn luôn có thể tìm được, chẳng hạn, có thể đặt $p_n = n$ và khi đó với $|a_n| > 2R$ ta có

$$\Big(\frac{R}{|a_n|}\Big)^n \leqslant \Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

và do đó chuỗi $\sum\Big(\dfrac{R}{a_n}\Big)^n$ hội tụ.

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức.

Giả sử cho tập đóng các điểm cô lập $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong $\mathbb{C}$ và số nguyên $p_n \geqslant 1$ đối với mỗi n. Bài toán Cousin thứ hai gồm việc xác định hàm nguyên trên $\mathbb{C}$ có không điểm tại các điểm a_n với cấp tương ứng là p_n.

Lời giải của bài toán này được diễn đạt trong định lý sau đây.

Định lý 6.3.6. (Weierstrass) *Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ là dãy điểm rời rạc bất kỳ của $\mathbb{C}$, $\lim a_n = \infty$. Khi đó tồn tại hàm nguyên f có không - điểm tại mọi điểm a_n (và cũng chỉ tại các điểm ấy) và cấp của không điểm a_n bằng số các số hạng bằng a_n trong dãy cho trước.*

Chứng minh. 1. Không giảm tổng quát, có thể xem $a_n \neq 0 \ \forall n$ (vì thay cho f ta có thể xét hàm nguyên $f(z)/z^m$, trong đó m là cấp của không điểm của

f tại $z = 0$) và các số a_n được đánh số như sau

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant |a_3| \leqslant \cdots \leqslant |a_n| \leqslant \ldots, \quad \lim a_n = \infty.$$

Hiển nhiên rằng $\forall\, R > 0\ \exists N(R) \in \mathbb{N} : |a_n| > 2R\ \forall\, n > N(R)$. Ta đặt

$$U_n = \begin{cases} (1 - z/a_n)e^{(z/a_n) + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{p_n - 1}(\frac{z}{a_n})^{p_n - 1}}, & p_n \geqslant 2 \\ 1 - z/a_n, \quad p_n = 1, \end{cases}$$

khi đó hàm $U_n(z)$ không có không điểm trong hình tròn $\{|z| < R\}$ $\forall\, n > N(R)$. Như vậy điều kiện 1) trong định lý về tích vô hạn các hàm nguyên được thỏa mãn. Ngoài ra, với $n > N(R)$ ta có

$$|\ln U_n(z)| \leqslant 2\Big|\frac{z}{a_n}\Big|^{p_n} < 2\Big(\frac{R}{|a_n|}\Big)^{p_n}$$

trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Từ ước lượng này và tính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\dfrac{R}{|a_n|}\Big)^{p_n}$ ta kết luận rằng chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant N(R)+1} \ln U_n(z)$ hội tụ tuyệt đối và đều (với việc chọn các lôgarit tương ứng) trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Như vậy, điều kiện 2) của định lý vừa nói trên cũng được thỏa mãn. Do đó tích vô hạn

$$f(z) = \prod_{n\geqslant 1}(1 - z/a_n)e^{(z/a_n) + \frac{1}{2}(z/a_n)^2 + \cdots + \frac{1}{p_n - 1}(\frac{z}{a_b n}^{p_n - 1}}$$

(gọi là tích vô hạn Weierstrass) có các tính chất:

a) hội tụ trong toàn mặt phẳng $\mathbb{C}$;

b) $f(z)$ là hàm nguyên;

c) tập hợp các không điểm của $f(z)$ là dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ và tất cả các không điểm đều có bội cho trước.

2. Bây giờ ta chứng minh rằng mọi hàm nguyên khác thỏa mãn điều kiện của bài toán đều thu được từ $f(z)$ bằng cách nhân nó với hàm nguyên tùy ý không có không điểm. Thật vậy, theo phần 1) vừa chứng minh ta xây dựng hàm φ như trên: φ có không điểm tại mọi a_n với bội cho trước. Khi

đó hàm $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ là hàm nguyên không có không điểm. Do đó theo định lý đã chứng minh, hàm này có dạng

$$\frac{\varphi}{f} = e^{g(z)},$$

trong đó $g(z)$ là hàm nguyên. Từ đó rút ra $\varphi = fe^g$. $\square$

Ví dụ 2. Ta xét hàm $\sin z$. Hàm này có các không điểm đơn tại $a_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{R}{a_n}\right)^{p_n}$ hội tụ khi $p_n = p = 2\ \forall R > 0$. Áp dụng định lý vừa chứng minh ta có

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{z}{n\pi}\Big) e^{z/n\pi} \Big(1 + \frac{z}{n\pi}\Big) e^{-z/n\pi}$$

hay là

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\Big) \cdot$$

Từ đó suy ra rằng đạo hàm lôga có dạng

$$\frac{\cos z}{\sin z} = g'(z) + \frac{1}{z} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{2z}{\Big(1 - \dfrac{z^2}{n^2\pi^2}\Big) n^2\pi^2} \cdot$$

Bây giờ bằng cách so sánh với khai triển $\operatorname{ctg} z$ thành phân thức tối giản trong tiết trước ta kết luận rằng $g'(z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g(z) \equiv \text{const}$. Từ đó ta có

$$\sin z = cz \prod_{n\geqslant 1} (1 - z^2/(n^2\pi^2)), \quad c = \text{const}.$$

Bằng cách chia cả hai vế cho z và dần z đến 0, qua giới hạn ta có $c = 1$. Như vậy

$$\sin z = z \prod_{n\geqslant 1} (1 - z^2/n^2\pi^2).$$

Định lý 6.3.7. *Giả sử*

$$A = \{a_i\}_{i\in I}, \quad B = \{b_j\}_{j\in J}, \quad A \cap B = \emptyset$$

là những tập hợp đóng các điểm cô lập của $\mathbb{C}$ và p_i, q_j là những số nguyên dương tùy ý. Khi đó tồn tại hàm phân hình f ở trên $\mathbb{C}$ có không - điểm tại a_i với cấp tương ứng p_i và có cực điểm tại b_j với cấp tương ứng q_j (Bài toán Cousin thứ hai tổng quát).

Chứng minh. Giả sử f là hàm nguyên có không điểm cấp p tại điểm a_i và $\varphi(z)$ cũng là hàm nguyên có không điểm cấp q_j tại điểm b_j. Ta xét hàm

$$H(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}\cdot$$

Hiển nhiên hàm $H(z)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý. □

Từ định lý Weierstrass ta có

Định lý 6.3.8. *Hai lớp hàm chỉnh hình sau đây là đồng nhất với nhau:*

(I) *Lớp các hàm chỉnh hình không có điểm bất thường khác trong $\mathbb{C}$ ngoài cực điểm.*

(II) *Lớp các hàm biểu diễn được dưới dạng thương của hai hàm nguyên.*

Chứng minh. Mũi tên từ (I) đến (II) được chứng minh như sau. Ta dựng hàm nguyên $F(z)$ có không điểm tại các cực điểm của $f(z)$ (với cấp bằng cấp của cực điểm của $f(z)$). Khi đó hàm

$$F(z)\cdot f(z) = H(z)$$

là một hàm nguyên. Từ đó suy ra

$$f(z) = \frac{H(z)}{F(z)}\cdot$$

Như vậy mỗi hàm lớp (I) đều nằm trong lớp (II).

Mũi tên từ (II) đến (I). Hiển nhiên các hàm thuộc lớp (II) không thể có các điểm bất thường hữu hạn khác ngoài các cực điểm. Do đó mỗi hàm lớp (II) đều nằm trong lớp (I). □

BÀI TẬP

6.4 Bài tập

1. Giả sử hàm f chỉnh hình và $g(z) = f(z^n)$ trong đó $n \in \mathbb{N}$. Giả sử thêm rằng z_0 là cực điểm của hàm $g(z)$. Chứng minh rằng

1) $z_k = z_0\varepsilon^k$, $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ cũng là cực điểm của $g(z)$;

2) $\text{Res}(g; z_k) = \varepsilon_n^k \text{Res}(g; z_0)$.

2. Giả sử $f(z) = g(az)$, $a \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\text{Res}(f; z_0 a) = \frac{1}{a}\text{Res}(g(z), z_0).$$

3. Giả sử $f(z) = z^m g(z^n)$, trong đó m và n là những số nguyên thỏa mãn điều kiện $m \geqslant 0$, $m < n$. Chứng minh rằng:

$$\text{Res}[f; z_0 e^{2k\pi i/n}] = e^{2k\pi i(m+1)/n}\text{Res}[f; z_0].$$

4. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad a \in \mathbb{C},\ a \neq \pm 1.$$

Trả lời:

$$I = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1-a^2} & \text{nếu } |a| < 1; \\ \dfrac{2\pi}{a^2-1} & \text{nếu } |a| > 1; \\ 0 & \text{(giá trị chính), nếu } |a| = 1;\ a \neq \pm 1 \\ & \text{(khi } a = \pm 1 \text{ giá trị chính không tồn tại).} \end{cases}$$

5. Chứng tỏ rằng khi $-\pi < a < \pi$ thì

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sh}ax}{\text{sh}\pi x}dx = \frac{1}{2}\text{tg}\frac{a}{2}\cdot$$

6. Chứng minh các đẳng thức sau đây

1. $$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}(1+p-2^p).$$

2. $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}}dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot$$

3. $$\int_1^2 \frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{x}dx = \pi\Big(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\Big).$$

4. $$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{1+x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{4}{3}-\sqrt[3]{2}\Big).$$

Chương 7

Ánh xạ bảo giác

7.1 Các khái niệm chung 516

7.1.1 Hàm đơn diệp 517

7.1.2 Điều kiện đủ để hàm đơn diệp 522

7.1.3 Sự hội tụ của dãy hàm đơn diệp 524

7.1.4 Tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0 525

7.1.5 Tính chất chung của ánh xạ bảo giác 527

7.1.6 Đẳng cấu và tự đẳng cấu 528

7.1.7 Điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu 532

7.1.8 Điều kiện chuẩn 534

7.2 Định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác . 537

7.2.1 Tập hợp bị chặn trong $\mathcal{H}(D)$ 538

7.2.2 Tập hợp liên tục đồng bậc 539

7.2.3 Nguyên lý compắc 540

7.2.4 Phiếm hàm liên tục 544

7.2.5 Đơn giản hóa cách đặt bài toán Riemann 546

7.2.6 Định lý Riemann 548

7.2.7 Định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác 553

7.2.8 Sự tương ứng giữa các biên và công thức Christoffel-Schwarz 554

7.3 Bài tập 560

Tài liệu tham khảo 563

Trong chương II ta đã làm quen với sự mô tả hình học các tính chất chỉnh hình của hàm biến phức. Một trong những vấn đề cơ bản của quá trình đó là việc nghiên cứu các hàm chỉnh hình bằng cách xuất phát từ các ánh xạ thực hiện bởi các hàm ấy. Các ánh xạ ấy là bảo giác tại mọi điểm mà hàm có đạo hàm khác không. Từ đó ta cũng có thể thu được những ví dụ khác nhau về các ánh xạ bảo giác minh họa về mặt hình học một hàm đã cho nào đó.

Tuy nhiên, trong thực tế vấn đề được quan tâm hơn cả và cũng là vấn đề khó khăn hơn cả là bài toán ngược - gọi là *bài toán cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác*. Bài toán đó được đặt ra như sau:

Giả sử cho hai miền D và D^* của $\mathbb{C}$. Hãy tìm hàm ánh xạ bảo giác miền này lên miền kia.

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu vấn đề tồn tại hàm ánh xạ bảo giác đối với trường hợp đơn giản nhất khi hai miền D và D^* đơn liên. Cụ thể là ta sẽ chứng minh định lý Riemann khẳng định rằng *mọi miền đơn liên với biên chứa ít nhất hai điểm đều có thể ánh xạ bảo giác lên hình tròn mở của* $\mathbb{C}$.

7.1 Các khái niệm chung

Khái niệm ánh xạ bảo giác đã được định nghĩa trong **2.3**. Trong mục này ta sẽ trình bày một số khái niệm chung của lý thuyết ánh xạ bảo giác cùng với một vài tính chất chung của các ánh xạ ấy.

7.1.1 Hàm đơn diệp

Khái niệm hàm đơn diệp trong một miền đã được đề cập đến trong chương I. Bây giờ ta đưa vào khái niệm hàm đơn diệp tại một điểm và nghiên cứu một số tính chất của lớp hàm này mà qua đó ta sẽ thấy rõ tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm $\neq 0$.

Định nghĩa 7.1.1. Hàm $F(z)$ được gọi là *đơn diệp tại điểm* z_0 nếu hàm ấy đơn diệp trong lân cận nào đó của điểm z_0.

Hiển nhiên, hàm đơn diệp trong miền thì đơn diệp tại mọi điểm của miền ấy. Điều khẳng định ngược lại nói chung là không đúng. Thật vậy, hàm $f(z) = e^z$ đơn diệp tại mọi điểm $z \neq \infty$ nhưng f không đơn diệp trong $\mathbb{C}$ vì

$$\forall\, z_k = a + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ta đều có } f(z_k) = e^a.$$

Bây giờ ta xét tiêu chuẩn để hàm đơn diệp tại một điểm.

Định lý 7.1.1. *Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền $D \subset \mathbb{C}$ là đơn diệp tại điểm $z_0 \in D$ khi và chỉ khi $f'(z_0) \neq 0$.*

Chứng minh. 1. Giả sử f đơn diệp tại điểm z_0. Ta cần chứng minh $f'(z_0) \neq 0$. Ta giả sử ngược lại: $f'(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$; $f^{(p)}(z_0) \neq 0$, $p \geqslant 2$. Bằng cách áp dụng phương pháp lý luận như trong chứng minh tính bảo toàn tập mở (**4.4** định lý 4.4.3) ta sẽ chọn hình tròn $U(z_0, r) = \{|z - z_0| \leqslant r\} \subset D$ sao cho trong đó không có w_0 - điểm của hàm f cũng như không có các không - điểm của đạo hàm ngoài tâm z_0 của nó (ta lại sử dụng tính chất có tập của các không điểm) và ta có

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta) - w_0}, \quad w_0 = f(z_0).$$

Từ định nghĩa chỉ số một điểm đối với đường cong (xem **4.4**) ta thấy rằng trong trường hợp này $J(w, \partial U)$ bằng p với mọi w đủ gần w_0 (chẳng hạn $|w - w_0| < \mu$). Điều đó chứng tỏ rằng trong hình tròn $U(z_0, r)$ hàm f nhận giá trị w_1, $|w_1 - w_0| < \mu$, đến p lần (vì hàm f nhận giá trị w_0 đến p lần). Vì

$f(z) \neq 0$ tại mọi $z \in \{S(z_0, r) \setminus \{z_0\}\}$ nên hàm f sẽ nhận giá trị w_1 bất kỳ tại p điểm khác nhau trong hình tròn $S(z_0.r)$. Điều đó có nghĩa là f không đơn diệp tại điểm z_0. Điều đó mâu thuẫn với giả thiết.

2. Ngược lại, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một lân cận điểm z_0 mà tại đó hàm đơn diệp. Ta xét lân cận $U(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\}$ của điểm z_0 sao cho $\overline{U}(z_0, r) \subset D$ và

a) $f'(z_0) \neq 0$ trong $\overline{U}(z_0, r)$,

b) $h(z) = f(z) - f(z_0) \neq 0, \forall z \in \{\overline{U(z_0, r)} \setminus \{z_0\}\}$.

(tức là $f(z) - f(z_0)$ có không điểm duy nhất z_0; vì không điểm của hàm chỉnh hình cô lập nên lân cận đó tồn tại).

Khi đó ta có $N_h(U) = 1$ (vì không điểm duy nhất của hàm $f(z) - f(z_0)$ có cấp bằng 1) và $N_h(\partial U) = 0$. Giả sử $\lambda = \min_{z \in \partial U} |f(z) - f(z_0)|$ và $V = \{w : |w - f(z_0)| < \lambda\}$. Giả sử w_1 là điểm đủ gần $f(z_0)$ sao cho $w_1 \in V$. Ta xét biểu thức

$$f(z) - w_1 = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1), \quad w_0 = f(z_0).$$

Vì $|f(z) - w_0| > \lambda, \forall z \in \partial U$ và $|w_1 - w_0| < \lambda$ nên

$$|f(z) - w_1| \geqslant |f(z) - w_0| - |w_1 - w_0| > 0, \quad \forall z \in \partial U.$$

Từ đó suy ra rằng $f(z) - w_1$ và $f(z) - w_0$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rouché. Do đó $N_{f-w_1}(U) = N_{f-w_0}(U) = 1$. Nhưng điều đó chứng tỏ rằng hàm $f(z) - w_1$ chỉ triệt tiêu một lần trong U. Do đó trong hình tròn V tồn tại hàm đơn trị $g(z)$ là hàm ngược của $f(z)$. Khi đó trong miền $U \cap g(V)$ chứa điểm z_0 hàm $f(z)$ đơn diệp. Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 7.1.1. *Hàm chỉnh hình tại điểm* $z = \infty$

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots, \quad |z| > R$$

là đơn diệp tại đó khi và chỉ khi

$$a_{-1} = -Res[f; \infty] \neq 0.$$

Chứng minh. Ta xét hàm chỉnh hình tại điểm $\zeta = 0$

$$\varphi(\zeta) = f\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = a_0 + a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 + \dots, \quad |\zeta| < \frac{1}{R}\cdot$$

Hàm $\zeta = \dfrac{1}{z}$ ánh xạ đơn trị một - một lân cận $\{|z| > R\}$ của điểm ∞ lên lân cận $\{|\zeta| < 1/R\}$ của điểm $\zeta = 0$. Do đó hàm $f(z)$ đơn diệp tại ∞ khi và chỉ khi hàm $\varphi(\zeta)$ đơn diệp tại điểm $\zeta = 0$ (và theo định lý 7.1.1) tức là khi và chỉ khi

$$\varphi'(0) = a_{-1} \neq 0.$$

□

Hệ quả 7.1.2. *Hàm $f(z)$ có cực điểm tại z_0 (hữu hạn hoặc vô hạn) là đơn diệp tại điểm ấy khi và chỉ khi z_0 là cực điểm đơn.*

Chứng minh. Áp dụng định lý 7.1.1 cho hàm $\dfrac{1}{f(z)}$ nếu $z_0 \neq \infty$ và hệ quả 7.1.1 nếu $z_0 = \infty$. □

Ví dụ 1. Nếu z_0 là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì f không đơn diệp tại điểm z_0. Thật vậy, theo định lý Picard, trong lân cận bất kỳ của điểm z_0 - phương trình $f(z) = c$ có vô số nghiệm đối với mọi giá trị c, có thể trừ ra một giá trị. Do đó $f(z)$ không đơn diệp tại z_0.

Ví dụ 2. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$ trừ ra hai điểm z_1, z_2 là những cực điểm của nó. Khi đó $f(z)$ không đơn diệp trong D. Thật vậy, nếu $|c|$ là số đủ lớn thì phương trình $f(z) = c$ có ít nhất hai nghiệm $\widetilde{z}_1$ và $\widetilde{z}_2$ trong đó $\widetilde{z}_j$ đủ gần z_j. Do đó $f(z)$ không đơn diệp trong D.

Định lý 7.1.2. *Nếu hàm $w = f(z)$ đơn diệp trong D, còn $F(w)$ đơn diệp trong D' thì hàm $\varphi = F(f(z))$ đơn diệp trong D.*

Chứng minh. Thật vậy, vì F đơn diệp trong D' nên từ đẳng thức $F(f(z_1)) = F(f(z_2))$ suy ra $f(z_1) = f(z_2)$ và vì f đơn diệp trong D nên $z_1 = z_2$. □

Định lý 7.1.3. *Giả sử* $w = f(z)$ *chỉnh hình đơn diệp trong miền* D *không chứa điểm* ∞. *Khi đó hàm ngược* $z = \varphi(w)$ *cũng chỉnh hình đơn diệp trong* D^* $(D^* = f(D))$.

Chứng minh. 1. Sự tồn tại hàm ngược được suy từ định lý 7.1.1.

2. Hàm $\varphi(w)$ đơn trị. Thật vậy, nếu $z_1 \neq z_2$ là hai giá trị của $w_0 \in D$ thì ta phải có $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Điều này mâu thuẫn với tính đơn diệp của $f(z)$.

3. Hàm $\varphi(w)$ là đơn diệp. Nếu $\varphi(w_1) = \varphi(w_2) = z_0$, trong đó $w_1 \neq w_2$ thì ta có

$$f(z_0) = w_1, \quad f(z_0) = w_2.$$

Nhưng điều này mâu thuẫn với tính đơn trị của $f(z)$.

4. Hàm $\varphi(w)$ liên tục. Thật vậy, giả sử $w_0 \in D'$ và $\varphi(w_0) = z_0$. Khi đó mỗi điểm $w' \in \{|w - w_0| < \mu\}$ sẽ là giá trị của $f(z)$ tại điểm z' nào đó nằm trong hình tròn $U(z_0, r) = \{|z - z_0| \leqslant r\}$. Nói cách khác $z' = \varphi(w') \in U(z_0, r)$ nếu $w' \in \{|w - w_0| < \mu\}$. Do đó với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta chọn số $r < \varepsilon$. Khi đó đối với số $\mu = \mu(r)$ tương ứng với nó ta sẽ có

$$|\varphi(w') - \varphi(w_0)| < r < \varepsilon, \quad |w' - w_0| < \mu.$$

Do đó $\varphi(w')$ liên tục.

Vấn đề còn lại là chứng tỏ $\varphi(w)$ chỉnh hình tại điểm $w_0 \in D^*$ bất kỳ. Giả sử $\varphi(w_0) = z_0$. Khi đó vì f đơn diệp nên $\Delta w \neq 0$ khi $\Delta z \neq 0$ và do đó suy ra sự tồn tại đạo hàm $\varphi'(w)$ tại mọi điểm thuộc $\{|w - w_0| < \mu\}$ và $\varphi'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}\cdot$ □

Mối liên hệ giữa ánh xạ bảo giác và hàm đơn diệp được thể hiện trong định lý sau đây.

Định lý 7.1.4. *Ánh xạ chỉnh hình*

$$w = f : D \to D^*$$

là bảo giác khi và chỉ khi f *đơn diệp trong* D.

Chứng minh. 1. Giả sử $f : D \to D^*$ là ánh xạ bảo giác, khi đó f đơn trị một - một và do đó nó đơn diệp.

2. Ngược lại, giả sử hàm f đơn diệp. Ta cần chứng minh rằng f là ánh xạ bảo giác tại mọi điểm $z \in D$. Vì f đơn diệp nên $f'(z_0) \neq 0 \; \forall z \in D$. Do đó nếu $z_0 \neq \infty$, và $f(z_0) \neq \infty$ kết luận của định lý được rút ra từ chỗ là $f'(z_0) \neq 0$. Giả sử $z_0 \neq \infty$ và $f(z_0) = \infty$. Khi đó

$$w = f(z) = \frac{A_{-1}}{z - z_0} + A_0 + A_1(z - z_0) + \dots, \quad A_{-1} \neq 0$$

và

$$\begin{aligned} \widetilde{w} = \frac{1}{w} = \frac{1}{f(z)} &= a_1(z - z_0) + \dots, \\ a_1 = \frac{1}{A_{-1}} &= \frac{d\widetilde{w}}{dz}\Big|_{z=z_0} \neq 0. \end{aligned}$$

Vì ánh xạ $\widetilde{w} = \dfrac{1}{f(z)}$ bảo giác tại điểm z_0 nên ánh xạ $w = f(z)$ cũng bảo giác tại điểm đó.

Trường hợp $z_0 = \infty$ có thể đưa về trường hợp đã xét bằng cách đặt $z' = \dfrac{1}{z}$. Có thể xảy ra hai khả năng:

a) $f(\infty) \neq \infty$. Khi đó

$$w = f\left(\frac{1}{z'}\right) = A_0 + A_1 z' + \dots, \quad A_1 \neq 0.$$

b) $f(\infty) = \infty$. Khi đó

$$w = f = \left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{A_{-1}}{z'} + A_0 + A_1 z' + \dots, \quad A_{-1} \neq 0.$$

□

Nhận xét 7.1.1. Từ điều vừa trình bày trên đây suy ra rằng các điều kiện sau đây là những điều kiện cần để hàm f đơn diệp trong miền D:

1. Hàm f chỉnh hình trong miền D có thể trừ ra một điểm là cực điểm đơn của f.

2. Tại mỗi điểm hữu hạn $z_0 \in D$ (mà tại đó f chỉnh hình) hàm f thỏa mãn điều kiện $f'(z_0) \neq 0$.

3. Nếu $z_0 = \infty \in D$ và f chỉnh hình tại z_0 thì f phải thỏa mãn điều kiện $c_{-1} = -\text{Res}[f; \infty] \neq 0$.

Ta nhấn mạnh lại rằng nói chung các điều kiện 1) - 3) không phải là những điều kiện đủ để hàm f đơn diệp. Các điều kiện đủ được xét trong tiết sau.

7.1.2 Điều kiện đủ để hàm đơn diệp

Sử dụng nguyên lý acgumen ta sẽ chứng minh hai định lý sau đây là những điều kiện đủ để hàm đơn diệp trong miền D. Ta lưu ý rằng trong một số sách giáo khoa, các định lý này còn được gọi là *nguyên lý tương ứng một - một*.

Định lý 7.1.5. *Giả sử* 1) *D là miền đơn liên bị chặn (hoặc không bị chặn chứa điểm ∞) với biên γ là đường cong đóng Jordan;* 2) $f \in \mathcal{H}(D)$ *và* $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$*;* 3) *khi z vòng quanh γ thì điểm $w = f(z)$ vạch nên đường cong đóng Jordan Γ.*

Khi đó hàm f đơn diệp trong miền D và ánh xạ bảo giác miền D lên miền bị chặn D^* với biên Γ.

Chứng minh. Ta cần chứng minh rằng

1. Đối với mỗi điểm $w_1 \in D^*$ chỉ tồn tại một điểm $z_0 \in D$ sao cho $f(z) = w_1$, tức là $F_1(z) = f(z) - w_1$ có đúng một không - điểm trong D.

2. Đối với điểm $w_2 \notin D^*$ hàm $f(z)$ không nhận giá trị w_2 $\forall z \in D$, tức là $F_2(z) = f(z) - w_2$ không có không điểm trong D.

Ta chứng minh 1). Ta ký hiệu số w_1 - điểm của hàm f trong D là $N_f(D; w_1)$ và giả sử điểm z vòng quanh γ theo hướng dương. Khi đó điểm $w = f(z)$ sẽ vòng quanh Γ, hoặc theo hướng dương, hoặc theo hướng âm. Trong trường hợp thứ nhất vectơ $F_1 = f(z) - w_1$ quay được một góc bằng

2π và

$$\begin{aligned} N_{F_1}(D; w_1) &= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(f(z) - w_1) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma(w - w_1) = 1 \end{aligned}$$

nghĩa là F_1 có một không - điểm trong D. Trong trường hợp thứ hai vectơ F_1 quay được góc - 2π và do đó $N_{F_1}(D; w_1) = -1$ và F_1 có trừ một không điểm trong D. Điều này không thể xảy ra. Từ đó suy ra: thứ nhất khi z vòng quanh γ theo hướng dương thì đường cong Γ được vòng quanh theo hướng dương; và thứ hai hàm $f(z) - w_1$ có một không - điểm trong miền D.

Bây giờ ta chứng minh 2). Rõ ràng là từ điều vừa chứng minh suy ra

$$N_{F_2}(D; w_2) = 0 \quad \forall\, w_2 \notin D^*$$

vì trong trường hợp này vectơ $F_2 = f(z) - w_2$ không nhận một gia số acgumen nào. Do đó hàm $F_2(z)$ không có không - điểm ở ngoài D. Định lý được chứng minh. □

Định lý 7.1.6. *Giả sử:* 1) *D là miền đơn liên bị chặn (hoặc không bị chặn chứa điểm ∞) với biên γ là đường cong đóng Jordan;* 2) *$f \in \mathcal{H}(D \setminus \{z_0\})$ và $f \in \mathcal{C}(\overline{D} \setminus \{z_0\})$, trong đó z_0 là cực điểm đơn duy nhất của f trong D;* 3) *khi z vòng quanh biên γ thì điểm $w = f(z)$ vạch nên đường cong đóng Jordan Γ giới hạn phần trong D^* và phần ngoài D^*_∞;* 4) *ở trong D hàm f không nhận giá trị $w_0 \in D^*$ nào đó.*

Khi đó hàm f đơn diệp trong D và ánh xạ bảo giác D lên D^*_∞.

Chứng minh. Giả sử điểm $w_1 \in D^*_\infty$. Khi điểm z vòng quanh γ acgumen của vectơ $F_1 = F(z) - w_1$ không nhận một gia số nào. Áp dụng nguyên lý acgumen ta có

$$\begin{aligned} N_{F_1}(D) - 1 &= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg\{f(z) - w_1\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\{w - w_1\} = 0. \end{aligned}$$

Do đó số không - điểm và số cực điểm của hàm $f(z) - w_1$ trong D là bằng nhau. Từ đó suy ra nó có một không - điểm.

Bây giờ giả sử $w_2 \in D^*$. Khi đó acgumen của vectơ $F_2 = f(z) - w_2$ nhận gia số hoặc 2π hoặc -2π khi điểm z vòng quanh γ. Trong trường hợp thứ nhất ta có

$$N_{F_2}(D) - 1 = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\{w - w_2\} = 1$$
$$\Rightarrow N_{F_2}(D) = 2$$

nghĩa là F_2 có hai không điểm trong D. Nhưng điều đó không thể xảy ra vì khi $w_2 = w_0$ nó không có một không điểm nào (theo điều kiện 4 của định lý). Như vậy chỉ còn lại trường hợp thứ hai. Trong trường hợp này ta có

$$N_{F_2}(D) - 1 = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\{w - w_2\} = -1$$
$$\Rightarrow N_{F_2}(D) = 0$$

tức là F_2 không có không điểm trong D. Định lý được chứng minh. □

7.1.3 Sự hội tụ của dãy hàm đơn diệp

Nói chung kết quả của các phép toán đại số trên lớp các hàm đơn diệp là những hàm không đơn diệp. Ngược lại, phép toán qua giới hạn các dãy hàm đơn diệp lại cho ta hàm đơn diệp (trừ một trường hợp đặc biệt).

Ta có định lý sau đây về tính đơn diệp của hàm giới hạn.

Định lý 7.1.7. *Giả sử:* 1) *D là miền thuộc $\overline{\mathbb{C}}$;* 2) *$f_n(z)$ $n = 1, 2, \dots$ là những hàm chỉnh hình đơn diệp trong D;* 3) *Dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên từng compắc của miền D;* 4) $f(z) = \lim_n f_n(z) \not\equiv \text{const}$ *trong D.*

Khi đó hàm f chỉnh hình và đơn diệp trong miền D.

Chứng minh. Theo định lý Weierstrass hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D. Ta cần chứng minh rằng hàm f đơn diệp trong D.

Giả sử hàm f không đơn diệp trong D. Khi đó tồn tại các điểm $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ sao cho $f(z_1) = f(z_2) = a$. Giả sử U_k, $k = 1, 2$ là những hình tròn với tâm tại điểm z_k, $k = 1, 2$ sao cho $\overline{U}_k \subset D$, $k = 1, 2$. Có thể cho rằng $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ và $N_{f-a}(U_k) = 1$ và $N_{f-a}(\partial U_k) = 0$ với $k = 1, 2$. Ta đặt

$$\lambda = \min_{z \in \Gamma} |f(z) - a|,$$

trong đó $\Gamma = \partial U_1 \cup \partial U_2$. Rõ ràng là $\lambda > 0$. Do tính hội tụ đều của dãy hàm f_n đến hàm f trên Γ nên $\exists N \in \mathbb{N}$: $|f_n(z) - f(z)| < \lambda$, $\forall\, n > N$, $\forall\, z \in \Gamma$. Áp dụng định lý Rouché ta thu được

$$\begin{aligned} N_{f_n - a}(U_k) &= N_{(f-a)-(f-f_n)}(U_k) \\ &= N_{f-a}(U_k) = 1, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là với $n > N$ hàm f_n nhận giá trị a cả ở trong U_1 lẫn trong U_2. Kết luận này trái với giả thiết về tính đơn diệp của hàm f_n trong D. Định lý được chứng minh. □

Ví dụ về dãy các hàm $f_n(z) = \dfrac{z}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ chỉnh hình và đơn diệp trong hình tròn đơn vị chứng tỏ rằng điều kiện 4) của định lý là một điều kiện cốt yếu.

7.1.4 Tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0

Giả sử $w_0 = f(z_0)$ và

$$f'(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0,\ f^{(p)}(z_0) \neq 0, \quad p \geqslant 2. \tag{7.1}$$

Áp dụng phương pháp lý luận như trong chứng minh phần 1 định lý 7.1.1 dễ dàng thấy rằng mỗi giá trị w đủ gần w_0 (và $\neq w_0$) sẽ tương ứng đúng p giá trị z khác nhau. Nói cách khác: $w = f(z)$ là hàm p tờ tại lân cận của điểm z_0.

Giả sử γ_1 và γ_2 là hai đường cong liên tục đi qua điểm $z_0 \in D$, có tiếp tuyến xác định tại z_0 với góc nghiêng đối với hướng dương của trục thực là

θ_1 và θ_2 tương ứng. Giả sử $z_1 = z_0 + h \in \gamma_1$ và $z_2 = z_0 + h_2 \in \gamma_2$. Ta đặt:

$$z_1 - z_0 = h_1 = re^{i\theta_1}, \quad \theta_1 = \theta_1(r),$$
$$z_2 - z_0 = h_2 = re^{i\theta_2}, \quad \theta_2 = \theta_2(r).$$

Khi đó

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)},$$
$$\lim_{r\to 0} \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \lim_{r\to 0}(\theta_2 - \theta_1) = \theta,$$

trong đó θ là góc giữa hai đường cong γ_1 và γ_2 với đỉnh tại z_0. Vì f chỉnh hình tại z_0 và thỏa mãn điều kiện (7.1) nên

$$f(z) = a_0 + a_p(z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \ldots \quad a_p \neq 0, p \geqslant 2 \tag{7.2}$$

và chuỗi vừa viết hội tụ trong lân cận nào đó của z_0.

Giả sử qua ánh xạ $w = f(z)$ ta có:

$$w_0 = f(z_0) = a_0,$$
$$\Gamma_1 = f(\gamma_1), \quad \Gamma_2 = f(\gamma_2),$$

và góc giữa Γ_1 và Γ_2 là

$$\psi = \lim_{r\to 0} \arg \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0}, \quad w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2).$$

Từ đó ta có

$$\frac{w_1 - w_0}{(z_1 - z_0)^p} = a_p + a_{p+1}(z_1 - z_0) + \ldots,$$
$$\frac{w_2 - w_0}{(z_2 - z_0)^p} = a_p + a_{p+1}(z_2 - z_0) + \ldots,$$

và do đó

$$\begin{aligned}
\psi &= \lim_{r\to 0} \arg \left\{ \frac{\dfrac{w_2 - w_0}{(z_2 - z_0)^p}(z_2 - z_0)^p}{\dfrac{w_1 - w_0}{(z_1 - z_0)^p}(z_1 - z_0)^p} \right\} \\
&= \lim_{r\to 0} \arg \frac{(z_2 - z_0)^p}{(z_1 - z_0)^p} \\
&= p \lim_{r\to 0} \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = p \cdot \theta.
\end{aligned}$$

Như vậy ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0 sẽ không bảo giác tại điểm z_0.

7.1.5 Tính chất chung của ánh xạ bảo giác

Từ sự phân tích trên đây, ta có thể phát biểu định nghĩa ánh xạ bảo giác (**2.3**) dưới dạng tương đương sau đây.

Định nghĩa 7.1.2. Ánh xạ $w = f(z)$ biến miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ lên miền $D^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là *ánh xạ bảo giác* nếu:

1. Ánh xạ đó đơn trị một - một, nghĩa là hàm f đơn diệp trong D;

2. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D có thể trừ ra một điểm mà tại đó hàm f có cực điểm đơn.

Định lý 7.1.8. *Giả sử f là ánh xạ bảo giác. Khi đó ánh xạ ngược f^{-1} cũng là bảo giác.*

Chứng minh. Định lý này được suy trực tiếp từ định nghĩa 7.1.2 về hàm ngược. □

Định lý 7.1.9. *Qua ánh xạ bảo giác miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ lên miền $D^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ góc giữa các đường cong tại mỗi điểm của miền D được bảo toàn.*

Chứng minh. Ta cần chứng minh

1. Nếu hàm

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots, \quad |z| > R$$

chỉnh hình tại điểm $z = \infty$, $a_1 \neq 0$ thì ánh xạ $w = f(z)$ bảo toàn góc giữa các đường cong tại điểm $z = \infty$.

2. Nếu hàm f có cực điểm đơn tại điểm z_0 (hữu hạn hoặc vô cùng) thì ánh xạ f cũng bảo toàn góc tại điểm ấy.

Ta chứng minh 1). Ta biểu diễn hàm $w = f(z)$ dưới dạng hợp của hai hàm

$$\zeta = \frac{1}{z},$$
$$w = g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0 + a_1\zeta + \dots$$

theo định nghĩa 22.3 ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{z}$ bảo toàn góc tại điểm $z = \infty$. Ánh xạ $w = g(\zeta)$ cũng bảo toàn góc tại điểm $\zeta = 0$ vì

$$g'(0) = a_{-1} \neq 0$$

Do đó ánh xạ hợp $w = f(z)$ bảo toàn góc tại điểm $z = \infty$.

Điều kết luận 2) được chứng minh tương tự. $\square$

7.1.6 Đẳng cấu và tự đẳng cấu

Ta xét tiếp một số khái niệm chung có liên quan tới lý thuyết ánh xạ bảo giác.

Nếu hàm f chỉnh hình đơn diệp trong miền D thì f là một phép đồng phôi biến tập mở của D lên tập mở của $f(D)$ và ánh xạ ngược f^{-1} chỉnh hình trong $f(D)$.

Định nghĩa 7.1.3. 1) Giả sử D là miền của mặt phẳng biến phức z, D^* là miền của mặt phẳng biến phức w. Phép đồng phôi

$$f : D \to D^*$$

được gọi là một *phép đẳng cấu* nếu cả ánh xạ f lẫn ánh xạ ngược f^{-1} đều chỉnh hình.

2) Phép đẳng cấu miền D lên chính nó

$$f : D \to D$$

được gọi là một *phép tự đẳng cấu.*

Dễ dàng thấy rằng nếu ta thừa nhận hợp $f_1 \circ f_2$ là phép toán-nhóm, ánh xạ đồng nhất $z \mapsto z$ là đơn vị, ánh xạ ngược $z = f^{-1}(w)$ là phần tử ngược đối với phần tử f, thì tập hợp mọi phép tự đẳng cấu của miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ bất kỳ sẽ lập thành một nhóm; nhóm đó được gọi là *nhóm các tự đẳng cấu* của miền D. Ta ký hiệu nhóm các tự đẳng cấu của miền D là $\mathrm{Aut}D$.

Ta giả thiết rằng giữa hai miền D và D^* tồn tại ít nhất một phép đẳng cấu f_0. Ta có định lý sau đây về mối liên hệ giữa các đẳng cấu và tự đẳng cấu.

Định lý 7.1.10. *Nếu* $f_0 : D \to D^*$ *là một phép đẳng cấu cố định nào đó thì tập hợp mọi phép đẳng cấu* f *của miền* D *lên miền* D^* *được cho bởi công thức*

$$f = \varphi \circ f_0,$$

trong đó $\varphi \in \operatorname{Aut} D^*$ *là một tự đẳng cấu tùy ý của* D^**.*

Chứng minh. Giả sử $\varphi \in \mathrm{Aut}D^*$. Khi đó hiển nhiên $\varphi \circ f_0$ là ánh xạ bảo giác D lên D^*. Mặt khác, giả sử

$$f : D \to D^*$$

là một phép đẳng cấu tùy ý. Khi đó

$$\varphi = f \circ f_0^{-1}$$

sẽ là ánh xạ bảo giác D^* lên chính nó, và do đó nó là phần tử của nhóm $\mathrm{Aut}D^*$. Từ đó rút ra

$$f = \varphi \circ f_0.$$

□

Bây giờ ta tính nhóm các tự đẳng cấu $\mathrm{Aut}D$ khi D là miền chính tắc.

Ta lưu ý lại rằng: miền D được gọi là *miền chính tắc* nếu D là một trong ba miền sau đây:

1. mặt phẳng mở $\mathbb{C}$;
2. mặt phẳng đóng $\overline{\mathbb{C}}$;
3. hình tròn đơn vị $U = \{|z| < 1\}$.

Định lý 7.1.11. *Giả sử* $D = \mathbb{C}$*. Khi đó các phép biến đổi tuyến tính nguyên:* $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$ *là những phép tự đẳng cấu duy nhất của mặt phẳng mở* $\mathbb{C}$ *và lập thành nhóm*

$$\operatorname{Aut} \mathbb{C} = \{z \mapsto az + b, a \neq 0\}$$

phụ thuộc bốn tham số thực.

Chứng minh. Giả sử ánh xạ $w = f(z)$ là một phép tự đẳng cấu nào đó của $\mathbb{C}$. Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trong $\mathbb{C}$ nên có thể có hai khả năng xảy ra:

1. điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu;
2. hàm f là một đa thức.

Ta sẽ chứng minh rằng khả năng thứ nhất không thể xảy ra. Thật vậy, vì ánh xạ f đơn diệp nên ảnh của tập hợp $\{|z| > 1\}$ không thể có điểm chung với ảnh của tập hợp $\{|z| < 1\}$. Ảnh của tập hợp $\{|z| < 1\}$ là một miền không trống. Do đó ảnh của tập hợp $\{|z| > 1\}$ không trù mật khắp nơi trong mặt phẳng và vì thế theo định lý Weierstrass điểm $z = \infty$ không thể là điểm bất thường cốt yếu của $f(z)$. Do đó f là một đa thức bậc $n \geq 1$. Theo định lý Gauss, khi $n > 1$ đa thức $f(z)$ nhận mọi giá trị w đến n lần. Nhưng điều đó lại mâu thuẫn với tính đơn diệp của f. Từ đó rút ra $n = 1$, tức là $f(z)$ có dạng

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0.$$

□

Ta xét trường hợp $D = \overline{\mathbb{C}}$.

Định lý 7.1.12. *Giả sử miền $D = \overline{\mathbb{C}}$. Khi đó mọi phép tự đẳng cấu của $\overline{\mathbb{C}}$ đều là tự đẳng cấu phân tuyến tính. Các phép tự đẳng cấu đó lập thành một nhóm các tự đẳng cấu với sáu tham số thực.*

$$\mathrm{Aut}\overline{\mathbb{C}} = \Big\{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0\Big\}.$$

Chứng minh. Giả sử $w = f(z)$ là một tự đẳng cấu của $\overline{\mathbb{C}}$ và $f(\infty) = \widetilde{C} \neq \infty$. Khi đó

$$\widetilde{w} = \frac{1}{w - \widetilde{C}} = \frac{1}{f(z) - \widetilde{C}}$$

biến điểm $z = \infty$ thành $\widetilde{w} = \infty$ và là một hàm nguyên. Nhưng khi đó $\widetilde{w} = a_0 + a_1 z$, $a_1 \neq 0$, hay là $\dfrac{1}{w - \widetilde{C}} = a_0 + a_1 z$.

Do đó $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ trong đó $a = \widetilde{C}a_1$, $b = \widetilde{C}a_0 + 1$, $c = a_1$, $d = a_0$, đồng thời $ad - bc = -a_1 \neq 0$.

Nếu $f(\infty) = \infty$ thì hiển nhiên ta có $f(z) = a_0 + a_1 z$. □

Ta xét tiếp trường hợp $D = U = \{|z| < 1\}$.

Định lý 7.1.13. *Giả sử $D = U = \{|z| < 1\}$. Khi đó mọi phép tự đẳng cấu của hình tròn đơn vị đều là tự đẳng cấu phân tuyến tính.*

Chứng minh. Giả sử φ là một tự đẳng cấu tùy ý của hình tròn đơn vị. Ta ký hiệu $\varphi(0) = w_0$ và dựng phép tự đẳng cấu phân tuyến tính:

$$\lambda : w \mapsto \frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w}$$

của hình tròn U biến điểm w_0 thành điểm 0. Ta xét ánh xạ $f = \lambda \circ \varphi$. Đó cũng là một tự đẳng cấu của hình tròn U và $f(0) = 0$. Vì $|f(z)| < 1$ với mọi $z \in U$ nên theo bổ đề Schwarz ta có

$$|f(z)| \leqslant |z|, \quad \forall\, z \in U. \tag{7.3}$$

Nhưng hiển nhiên ánh xạ ngược $z = f^{-1}(w)$ cũng thỏa mãn bổ đề Schwarz, nên $|f^{-1}(w)| \leqslant |w|\ \forall\, w \in U$.

Đặt $w = f(z)$, ta có:

$$|z| \leqslant f(z), \quad \forall\, z \in U. \tag{7.4}$$

Từ (23.3) và (23.4) ta rút ra

$$|f(z)| \equiv |z|, \quad \forall\, z \in U$$

và cũng theo bổ đề Schwarz ta có $f(z) \equiv e^{i\alpha} z$. Nhưng khi đó $\varphi = \lambda^{-1} \circ f = \lambda^{-1}(e^{i\alpha} z)$ là ánh xạ phân tuyến tính. Như vậy:

$$\operatorname{Aut} U = \Big\{ z \mapsto e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}, |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \Big\}.$$

□

7.1.7 Điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu

Giả sử cho hai miền D và $D^* \subset \mathbb{C}$. Hãy tìm mọi đẳng cấu (nếu chúng tồn tại) biến miền D lên miền D^*.

Rõ ràng là với dạng tổng quát trên đây lời giải của bài toán cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác sẽ không tồn tại. Do đó vấn đề đầu tiên nảy ra khi khảo sát bài toán cơ bản đó là vấn đề khả năng ánh xạ bảo giác miền cho trước.

Sau đây ta sẽ chỉ ra một số điều kiện cần để bài toán trên có lời giải. Vì mọi đẳng cấu đều là những phép đồng phôi nên điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu miền D lên miền D^* là tồn tại một ánh xạ đồng phôi nào đó giữa các miền.

Do đó điều kiện cần đầu tiên là: các miền D và D^* phải đồng phôi với nhau.

Chẳng hạn, nếu miền D là đơn liên thì điều kiện cần là miền D^* phải đơn liên (tính đơn liên là một bất biến tôpô!).

Thế nhưng điều kiện cần này lại không phải là điều kiện đủ. Điều đó được suy ra từ định lý sau đây.

Định lý 7.1.14. *Mặt phẳng* $\mathbb{C}$ *và hình tròn mở* $U = \{|z| < 1\}$ *không đẳng cấu với nhau.*

Chứng minh. Giả thiết rằng tồn tại đẳng cấu $f : \mathbb{C} \to U$. Khi đó f chỉnh hình và bị chặn trong $\mathbb{C}$. Theo định lý Liouville $f \equiv \text{const}$. Điều đó trái với giả thiết f là đẳng cấu. □

Hệ quả 7.1.3. $\overline{\mathbb{C}}$ *và* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, $z_0 \neq \infty$ *đều không đẳng cấu với hình tròn mở* U.

Chứng minh. Vì $z_0 \neq \infty$ nên bằng ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ ta đưa z_0 về ∞ và áp dụng định lý vừa chứng minh. □

Tuy nhiên mặt phẳng $\mathbb{C}$ và hình tròn đơn vị U là đồng phôi với nhau.

Thật vậy hàm

$$W(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{z}{|z|} \text{arctg}|z|, & \text{khi } z \neq 0, \\ 0, & \text{khi } z = 0 \end{cases}$$

là một trong số ánh xạ đồng phôi $\mathbb{C}$ lên U.

Nhận xét 7.1.2. Vì tính đồng phôi là điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu giữa hai miền cho trước D và $D^* \subset \mathbb{C}$ nên từ đó suy ra rằng: *miền đa liên không đẳng cấu với miền đơn liên.*

Như vậy, nếu bây giờ đặt vấn đề về sự tồn tại đẳng cấu biến các miền D khác nhau lên miền đơn liên cho trước D^* thì ta cần phải hạn chế xét các miền đơn liên.

Trong trường hợp này *điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu là:*

1. *miền D phải đơn liên;*

2. *miền $D \neq \mathbb{C}$.*

Điều kiện thứ nhất là điều kiện cần vì miền D đồng phôi với miền đơn liên D^*. Điều kiện $D \neq \mathbb{C}$ là điều kiện cần theo định lý 7.1.14 đã chứng minh trên đây.

Ta lưu ý thêm rằng mặt phẳng $\mathbb{C}$ chỉ đẳng cấu với $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, $z_0 \neq \infty$ (hoặc đẳng cấu với bản thân nó). Điều đó được suy ra từ chỗ là mọi hàm chỉnh hình đơn diệp trong $\mathbb{C}$ đều là phân tuyến tính (xem định lý 7.1.11 và hệ quả 7.1.3).

Toàn bộ sự khảo sát trong mục tiếp theo của chương này là dành để trình bày những điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại và duy nhất của nghiệm bài toán cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác các miền đơn liên.

Sau khi loại trừ hai trường hợp đã nói trong định lý 7.1.14 và hệ quả của nó ta sẽ giả thiết rằng biên của miền được ánh xạ D có ít nhất là hai điểm khác nhau và do tính đơn liên của D nó có một tập hợp biên liên thông nối hai điểm ấy.

7.1.8 Điều kiện chuẩn

Giả sử lời giải đối với bài toán vừa nêu là tồn tại. Bây giờ ta chuyển sang xét những điều kiện xác định lời giải đó một cách duy nhất. Những điều kiện đó là cần thiết vì nếu hàm $f(z)$ ánh xạ miền đơn liên D lên hình tròn đơn vị thì theo định lý 9.9 ánh xạ thu được từ $f(z)$ bằng phép biến đổi phân tuyến tính dạng

$$e^{i\theta}\frac{f(z)-w_0}{1-\overline{w}_0 f(z)}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

(Phép tự đẳng cấu của hình tròn đơn vị) cũng là ánh xạ bảo giác miền D lên hình tròn đơn vị đó. Nói một cách khác: nếu ta chứng minh được rằng tồn tại một hàm $f(z)$ ánh xạ miền D lên hình tròn đơn vị thì sẽ tồn tại vô số hàm như vậy thực hiện ánh xạ đó. Do đó để ánh xạ được xét duy nhất, ngoài các điều kiện được nêu trong tiết **7.1.7**, người ta còn đòi hỏi một trong ba điều kiện bổ sung (tương đương với nhau) sau đây (các điều kiện này sẽ *chuẩn hóa* ánh xạ bảo giác được xét !)

(I) *Điểm trong z_0 cho trước tùy ý của miền D được ánh xạ thành điểm cho trước w_0 của miền D^* và một hướng cho trước tại z_0 chuyển thành hướng cho trước tại w_0:*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{7.5}$$

Hệ thức (7.5) chứng tỏ rằng ánh xạ bảo giác hai miền cho trước D và D^* phụ thuộc vào ba tham số thực và về mặt hình học nó chứng tỏ rằng: qua ánh xạ $w = f(z)$, điểm z_0 cho trước biến thành điểm w_0 cho trước, các tiếp tuyến với mọi đường cong đi qua điểm z_0 sẽ quay một góc bằng θ khi chuyển qua các đường cong ảnh đi qua điểm w_0.

Ta cũng nhận xét rằng, bằng các phép đổi biến phân tuyến tính điều kiện chuẩn (7.5) có thể viết dưới dạng

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0. \tag{7.6}$$

(II) *Hai điểm cho trước tùy ý: điểm z_0 ở trong, điểm z_1 nằm trên biên của miền D, được ánh xạ thành các điểm cho trước tương ứng w_0 và w_1,* *trong đó w_0 là điểm trong còn w_1 là điểm biên:*

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1. \tag{7.7}$$

Phương trình thứ nhất trong (7.7) sẽ đưa đến hai phương trình thực vì rằng vị trí của điểm trên biên được xác định bằng một tham số thực, chẳng hạn, bởi khoảng cách (dọc theo biên) từ một điểm biên cố định nào đó.

(III) *Ba điểm biên cho trước tùy ý z_1, z_2 và z_3 của miền D được ánh xạ thành ba điểm biên cho trước tùy ý w_1, w_2 và w_3 tương ứng của miền D^*.*

Trong mục sau ta sẽ chứng tỏ rằng tập hợp vô số các ánh xạ bảo giác biến miền D lên hình tròn đơn vị chỉ tồn tại một ánh xạ thỏa mãn một trong ba điều kiện chuẩn trên đây, tức là chỉ tồn tại một ánh xạ bảo giác được chuẩn hóa.

Ví dụ 1. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ lên hình tròn đơn vị $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Giải. Dạng tổng quát của hàm ánh xạ nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị sao cho $w(i) = 0$ có dạng

$$w = e^{i\alpha}\frac{z-i}{z+i}\cdot$$

Từ đó

$$w'(z) = e^{i\alpha}\frac{2i}{(z+i)^2} \Rightarrow w'(i) = -\frac{1}{2}ie^{i\alpha}$$
$$\Rightarrow \arg w'(i) = \alpha - \frac{\pi}{2}\cdot$$

Theo điều kiện của bài toán $\arg w'(i) = -\pi/2$ nên $\alpha = 0$. Như vậy, ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \frac{z-i}{z+i}\cdot$$

Ví dụ 2. Ánh xạ phần ngoài hình tròn $\{|z - (1+i)| < 1\}$ lên nửa mặt phẳng $\{\mathrm{Im} w > 0\}$ sao cho $w(0) = i$, $w(1) = 0$.

Giải. Ta cần chuyển đường tròn $\{|z-(1+i)|=1\}$ thành trục thực của mặt phẳng w. Để làm việc đó ta thực hiện ánh xạ biến điểm $z=i$ thành $z_1=\infty$ và $z=1$ thành $z_1=0$. Chẳng hạn ta có

$$z_1 = k\frac{z-1}{z-i}\,,$$

trong đó k chưa được xác định. Nhưng qua điểm $z_1=0$ và $z_1=\infty$ ta có vô số đường thẳng đi qua và ta cần thu được trục thực. Để có được điều đó, góc quay tại điểm $z=1$ qua ánh xạ z_1 phải bằng π, tức là

$$\arg z_1'(z)\big|_{z=1} = \pi.$$

Từ đó

$$\arg k + \arg\frac{1-i}{(z-i)^2}\Big|_{z=1} = \pi \Rightarrow \arg k = \frac{3\pi}{4}\cdot$$

Để xác định k, ta không có một điều kiện nào cho trước nên để đơn giản ta lấy $k=-1+i$, và từ đó

$$z_1 = (-1+i)\frac{z-1}{z-i}\cdot$$

Qua ánh xạ này điểm $z=0 \mapsto z_1 = 1+i$, $z=1\mapsto z_1=0$. Do đó ánh xạ thu được chưa thỏa mãn các điều kiện đã cho.

Bây giờ ta cần ánh xạ nửa mặt phẳng $\{\mathrm{Im} z_1 > 0\}$ lên nửa mặt phẳng $\{\mathrm{Im} w > 0\}$ sao cho

$$\begin{aligned} z_1 &= 1+i && \mapsto w = i,\\ z_1 &= 0 && \mapsto w = 0. \end{aligned}$$

Vì ánh xạ biến nửa mặt phẳng trên lên nửa mặt phẳng trên có dạng

$$w = \frac{az_1+b}{ax_1+d}\,,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

nên với hai cặp điểm tương ứng ở trên ta có

$$i = \frac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d}\,,\ 0=\frac{b}{d} \Rightarrow b=0,\ c=a,\ d=2a.$$

Do đó

$$w = \frac{-z_1}{z_1 - 2} = i\frac{z-1}{(1-2i)z-1}\,.$$

Ví dụ 3. Tìm ánh xạ biến băng $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : -\pi/4 < \mathrm{Re}z < \pi/4\}$ lên hình tròn đơn vị $U = \{|w| < 1\}$ sao cho ba điểm biên sau đây tương ứng $f(\pm\pi/4) = \pm 1$, $f(i\infty) = i$ ($i\infty$ là ký hiệu điểm vô cùng phía trên của băng).

Bằng các ánh xạ trung gian

a) $z_1 = 2iz$, b) $z_2 = e^{z_1}$

ta biến băng D đã cho thành nửa mặt phẳng bên phải $\mathrm{Re}z_2 > 0$. Qua các ánh xạ của các điểm $z = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, i\infty$ sẽ là các điểm $z_2 = i, -i, 0$ tương ứng. Bây giờ ta cần ánh xạ nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}z_2 > 0$ lên hình tròn đơn vị sao cho các điểm $z_2 = i, -i, 0$ chuyển thành các điểm $w = 1, -1, i$ tương ứng. Hàm ánh xạ thỏa mãn điều kiện vừa nêu sẽ được rút ra từ công thức (9.3) (định lý 9.6):

$$\begin{aligned}
&\frac{w-1}{w-i}(1+i) = \frac{z_2 - i}{z_2}\\
\Rightarrow &w = \frac{1}{i}\frac{z_2-1}{z_2+1}\\
\Rightarrow &w = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \mathrm{tg}z.
\end{aligned}$$

7.2 Định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác

Trong mục này ta sẽ giải quyết vấn đề có tính chất nguyên tắc là sự tồn tại hàm ánh xạ biến miền đơn liên D cho trước trong mặt phẳng phức z lên miền đơn liên D^* cho trước trong mặt phẳng w. Cụ thể ta sẽ chứng minh rằng: *đối với hai miền đơn liên bất kỳ D và $D^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ với biên có ít nhất là hai điểm khác nhau luôn luôn tồn tại ánh xạ bảo giác biến miền này lên miền kia.*

Đó là nội dung của định lý cơ bản trong lý thuyết ánh xạ bảo giác - định lý Riemann. Định lý này được Riemann phát biểu đầu tiên trong luận án tiến sĩ của mình "Cơ sở của lý thuyết tổng quát về hàm biến phức" năm 1851. Phép chứng minh mà ta sẽ trình bày là của Feijer và Riesz.

7.2.1 Tập hợp bị chặn trong $\mathcal{H}(D)$

Giả sử D là miền thuộc $\mathbb{C}$ và giả sử trong D cho tập hợp các hàm chỉnh hình $M(D) = \{f(z)\}$. Đặc biệt là: $M(D)$ có thể là dãy hàm

$$\Big\{f_n(z)\Big\}_{n=1}^{\infty}.$$

Định nghĩa 7.2.1. Tập hợp $M(D)$ được gọi là bị chặn đều trên từng compắc $K \subset D$ nếu $\forall K \subset D$, $\exists \sigma(K) > 0$:

$$|f(z)| \leqslant \sigma(K), \quad \forall\, z \in K,\ \forall\, f \in M(D).$$

Tập hợp bị chặn đều trên D cũng sẽ gọi là họ bị chặn.

Khái niệm tập hợp bị chặn đều trên từng compắc của miền D là khái niệm rộng hơn so với khái niệm bị chặn trong miền D. Chẳng hạn, các hàm $\dfrac{\cos\theta}{1-z}$, $\theta \in \mathbb{R}$ không lập thành tập hợp bị chặn đều trong hình tròn đơn vị $\{|z| < 1\}$ nhưng lại là tập hợp bị chặn đều trên từng compắc của hình tròn ấy.

Định lý 7.2.1. *Ánh xạ $f \mapsto f'$ không gian $\mathcal{H}(D)$ vào chính nó biến tập hợp bị chặn đều thành tập hợp bị chặn đều.*

Chứng minh. Giả sử $S = \{|z - z_0| < r\}$ là hình tròn bất kỳ nằm trọn trong D và $V = \{|z - z_0| < r', r' > r\}$ cũng là hình tròn nằm trọn trong D. Đối với $f \in M(D)$ bất kỳ ta có

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta, \quad z \in V.$$

Bây giờ giả sử $z \in S$. Khi đó với mọi $\zeta \in \partial V$ ta có

$$|\zeta - z| > r' - r.$$

Và từ tính chất bị chặn của $M(D)$ ta có

$$|f'(z) \leqslant \frac{r'}{(r'-r)^2}\sigma(V) = \sigma_1(S)$$

và do đó $|f'(z)|$ bị chặn trong các hình tròn $S \subset D$.

Mỗi tập hợp compắc $K \subset D$ bất kỳ đều có thể phủ bởi các hình tròn S, nằm trọn trong D. Do đó theo định lý Heine-Borel ta có thể chọn phủ con hữu hạn $\{S_\nu\}_{\nu=1}^{k}$ phủ K. Giả sử

$$\sigma_1(K) = \max_\nu\{\sigma_1(S_\nu)\}.$$

Khi đó với mọi $z \in K$ và mọi $f \in M(D)$ ta sẽ có

$$|f'(z)| \leqslant \sigma_1(K)$$

và định lý được chứng minh. □

7.2.2 Tập hợp liên tục đồng bậc

Định nghĩa 7.2.2. Tập hợp $M(D)$ các hàm được gọi là *tập hợp liên tục đồng bậc* trên từng compắc $K \subset D$ nếu

$$\begin{aligned}\forall\,\varepsilon > 0,\ \forall\,K \subset D,\ \exists\,\delta(\varepsilon, K) : \forall\,z', z'' \in K(|z' - z''| < \delta)\\ \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon, \quad \forall\,f \in M(D).\end{aligned}$$

Ta có

Định lý 7.2.2. *Nếu $M(D)$ là tập hợp bị chặn đều trên từng compắc thì nó là liên tục đồng bậc trên từng compắc $K \subset D$.*

Chứng minh. Giả sử compắc $K \subset D$ và $4d$, $d > 0$ là khoảng cách giữa K và biên ∂D của miền D. Tập hợp các điểm mà khoảng cách từ đó đến K không vượt quá $2d$ được ký hiệu là B. Vì $B \subset D$ và B là tập hợp đóng nên do tính bị chặn đều của $M(D)$ tìm được số $M = M(B) > 0$ sao cho trên B ta có $|f| \leqslant M$, $\forall f \in M(D)$.

Ta sẽ chứng minh rằng với $\varepsilon > 0$ bất kỳ và với cặp điểm $z_1, z_2 \in K$ bất kỳ mà $|z_1 - z_2| < \delta$, $\delta = \min\left\{d, \dfrac{d}{M}\varepsilon\right\}$ ta sẽ có

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Thật vậy, theo công thức Cauchy áp dụng cho $f(z)$ trong hình tròn $Q = \{z : |z - z_1| < 2d\} \subset B$ (kể cả biên) ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial Q} \frac{f(t)}{t - z}dt.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial Q} f(t)\frac{z_1 - z_2}{(t - z_1)(t - z_2)}dt\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}M\frac{|z_1 - z_2|}{2d \cdot d}2\pi \cdot 2d \\
&= \frac{M}{d}|z_1 - z_2| < \frac{M}{d}\delta \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Như vậy $M(D)$ là tập hợp liên tục đồng bậc. □

7.2.3 Nguyên lý compắc

Định nghĩa 7.2.3. 1) Họ hàm $M(D) \subset \mathcal{H}(D)$ được gọi là *họ compắc trong miền D* nếu từ mỗi dãy hàm $\{f_n(z)\} \subset M(D)$ đều có thể chọn dãy con f_{n_k} hội tụ đều trên từng compắc $K \subset D$.

2. Họ compắc các hàm $M(D)$ được gọi là *họ compắc trong nó* nếu hàm giới hạn của mỗi dãy $f_n \subset M(D)$ hội tụ đều trên từng compắc $K \subset D$ đều thuộc $M(D)$.

Ví dụ 1. Giả sử $U = \{|z| < 1\}$. Tập hợp hàm $M(U) = \{\alpha z : 0 < \alpha \leqslant 1\}$ là tập hợp compắc nhưng không compắc trong nó (dãy $\left\{\dfrac{z}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên từng compắc của U đến hàm $f \equiv 0$ không thuộc $M(U)$).

Bổ đề 7.2.1. *Giả sử:* 1) $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$; $f_n \in \mathcal{H}(D)$ *là dãy bị chặn đều trên từng compắc;* 2) *dãy* f_n *hội tụ trên tập hợp* $E \subset D$ *nào đó trù mật khắp nơi trong* D. *Khi đó dãy* f_n *hội tụ đều trên từng compắc* $K \subset D$.

Chứng minh. Ta cố định $\varepsilon > 0$ và tập hợp $K \subset D$. Vì dãy f_n bị chặn đều nên theo định lý vừa chứng minh trong tiết trước nó là dãy liên tục đồng bậc. Bằng cách sử dụng tính liên tục đồng bậc và bằng cách chọn phép chia D thành các hình vuông với các cạnh song song với các trục tọa độ trong mặt phẳng z bé đến mức sao cho với các điểm z' và z'' $(\in K)$ bất kỳ thuộc cùng một hình vuông và với $f \in \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bất kỳ ta có

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \tag{7.8}$$

Tập hợp K được phủ bởi một số hữu hạn các hình vuông Q_p, $p = 1, 2, \dots, P$. Vì E trù mật khắp nơi nên trong mỗi hình vuông Q_p tìm được điểm $z_p \in E$. Vì f_n hội tụ trên E nên $\exists\, N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{aligned} &|f_m(z_p) - f_n(z_p)| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ &\forall\, m, n > N, z_p, p = 1, 2, \dots, P. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Bây giờ giả sử z là điểm tùy ý của K. Khi đó tìm được điểm z_p nằm trong cùng một hình vuông với z và $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ từ (7.9) ta có

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leqslant |f_m(z) - f_m(z_p)| + |f_m(z_p) - f_n(z_p)| \\ &\quad + |f_n(z_p) - f_n(z)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Từ đó theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy ta kết luận rằng dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đối với mọi $z \in K$ và sự hội tụ đó là đều trên K. Vì K là cố định tùy ý nên dãy đã cho hội tụ đều trên từng compắc $K \subset D$. □

Bây giờ ta chứng minh định lý chủ yếu của tiết này

Định lý Montel (nguyên lý compắc). *Giả sử:* 1) *D là miền của $\mathbb{C}$;* 2) *$M(D)$ là họ hàm chỉnh hình trong miền D. Khi đó hai điều kiện sau đây là tương đương với nhau.*

(I) *Họ $M(D)$ là compắc.*

(II) *Họ $M(D)$ bị chặn đều trên từng compắc.*

Chứng minh. 1. Ta chứng minh rằng từ các điều kiện 1) - 2) và (I) suy ra (II). Giả sử ngược lại. Khi đó trong D tồn tại compắc $K \subset D$ mà trên đó môđun của các hàm thuộc $M(D)$ nhận giá trị lớn bao nhiêu tùy ý. Do đó: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in M(D) : |f_n(z_n)| > n$ tại điểm $z_n \in K$ nào đó. Vì $M(D)$ là compắc nên từ dãy $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ có thể chọn dãy con $\{f_{n_k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên từng compắc mà đặc biệt là hội tụ đều trên K đến hàm chỉnh hình f nào đó. Nghĩa là đối với $\varepsilon = 1$, $\exists N = N(K) : \forall k > N$, $\forall z \in K \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < 1$.

Do đó

$$|f_n(z)| \leqslant 1 + \max_{z\in K} |f(z)| = 1 + \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \max_{z\in K} |f|.$$

Nhưng hệ thức này lại mâu thuẫn với điều là $f_{n_k}(z_{n_k}) \to \infty$ khi $k \to \infty$. Phần thứ nhất của định lý được chứnh minh.

2. Bây giờ ta chứng minh rằng từ 1) - 2) và (II) suy ra (I). Để chứng minh (I) ta cần chứng minh rằng mọi dãy hàm $f_n \in M(D)$ đều chứa dãy con hội tụ đều trên từng compắc $K \subset D$. Nhưng theo bổ đề đã chứng minh trên, ta chỉ cần chứng minh rằng từ dãy $f_n \in M(D)$ bất kỳ có thể chọn dãy con hội tụ tại mọi điểm của tập hợp $E \subset D$ nào đó trù mật khắp nơi là đủ.

Ta lấy tập hợp E là tập hợp các điểm $z = x + iy \in D$, trong đó x và y đều là hữu tỷ. Tập hợp E trù mật khắp nơi trong D. Mặt khác E là tập hợp đếm được. Do đó ta có thể sắp xếp và đánh số nó thành dãy $\{\alpha_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

Dãy

$$f_1(\alpha_1), f_2(\alpha_1), \ldots, f_n(\alpha_1), \ldots \tag{7.10}$$

lập thành tập hợp điểm bị chặn. Do đó từ (7.10) có thể chọn dãy con

$$f^1_{n_1}(\alpha_1), f^1_{n_2}(\alpha_1), \ldots, f^1_{n_p}(\alpha_1), \ldots$$

hội tụ đến giới hạn hoàn toàn xác định. Như vậy từ dãy hàm $f_n(z)$ có thể chọn dãy con

$$f^1_{n_1}(z), f^1_{n_2}(z), \ldots, f^1_{n_p}(z), \ldots \tag{7.11}$$

hội tụ tại điểm $z = \alpha_1$.

Dãy

$$f^1_{n_1}(\alpha_2), f^1_{n_2}(\alpha_2), \ldots, f^1_{n_p}(\alpha_2), \ldots$$

thỏa mãn mọi điều kiện như dãy (7.10), do đó có thể chọn từ dãy đó một dãy con

$$f^2_{n_1}(\alpha_2), f^2_{n_2}(\alpha_2), \ldots, f^2_{n_p}(\alpha_2), \ldots$$

hội tụ đến giới hạn hữu hạn hoàn toàn xác định. Như vậy dãy hàm

$$f^2_{n_1}(z), f^2_{n_2}(z), \ldots, f^2_{n_p}(z), \ldots$$

hội tụ khi $z = \alpha_2$. Và vì các số hạng của dãy này cũng là của dãy (7.11) nên nó hội tụ cả khi $z = \alpha_1$.

Tiếp tục quá trình này ta thu được tập hợp các dãy

$$\left.\begin{array}{c} f^1_{n_1}(z), f^1_{n_2}(z), \ldots, f^1_{n_p}(z), \ldots, \\ f^2_{n_1}(z), f^2_{n_2}(z), \ldots, f^2_{n_p}(z), \ldots, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f^q_{n_1}(z), f^q_{n_2}(z), \ldots, f^q_{n_p}(z), \ldots, \end{array}\right\} \tag{7.12}$$

trong đó mỗi dãy của (7.2.5) là dãy con của dãy đứng trước nó và dãy với số hiệu q hội tụ tại mỗi điểm

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q.$$

Bằng cách áp dụng phương pháp đường chéo của Cantor, ta có thể chọn dãy đường chéo

$$f^1_{n_1}(z), f^2_{n_2}(z), \dots, f^p_{n_p}(z), \dots \tag{7.13}$$

Dãy này hội tụ tại mọi điểm của tập hợp E vì theo cách xây dựng mọi số hạng của dãy (7.13), bắt đầu từ số hạng nào đó đều được chọn từ dãy (7.2.5) với số hiệu q (q là số cho trước tùy ý).

Như vậy theo bổ đề đã chứng minh, dãy (7.13) hội tụ đều trên từng compắc. □

Nhận xét 7.2.1. Nếu miền $D \ni \infty$ thì dãy (7.13) hội tụ đều trên mọi tập đóng thuộc D.

Thật vậy, ta dựng đường tròn $\gamma(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ với bán kính đủ lớn sao cho $\gamma(R) \subset D$. Giả sử $\mathcal{K}'$ là tập hợp đóng tùy ý của D và

$$\mathcal{K} = \{z \in \mathcal{K}' : |z| \leqslant R\} \cup \gamma(R).$$

Theo định lý Montel, dãy (7.13) hội tụ đều trên $\mathcal{K}$ và do đó hội tụ đều trên $\gamma(R)$. Bằng cách áp dụng nguyên lý môđun cực đại, ta có thể kết luận rằng dãy (7.13) hội tụ đều trong $\overline{U(R)} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geqslant R\}$. Như vậy dãy (7.13) hội tụ đều trên $K \cup \overline{U(R)} \supset \mathcal{K}'$ và do đó trên mọi tập hợp đóng của D.

7.2.4 Phiếm hàm liên tục

Định nghĩa 7.2.4. 1. Giả sử cho họ hàm $\{f\}$ xác định trong miền D. Khi đó ánh xạ

$$I(f) : \{f\} \to \mathbb{C}$$

được gọi là *một phiếm hàm* trên f.

2. Phiếm hàm $I(f)$ được gọi là *liên tục tại điểm* f_0 nếu $\forall\, f_n \in \{f\}$ hội tụ đều đến $f_0 \in \{f\}$ trên từng compắc $K \subset D$, ta có

$$\lim_n I(f_n) = I(f_0).$$

3. Phiếm hàm $I(f)$ được gọi là *liên tục trên họ* $\{f\}$ nếu $I(f)$ liên tục tại mọi điểm $f \in \{f\}$.

Ví dụ 2. Ta xét họ hàm chỉnh hình $\mathcal{H}(D)$ và điểm a tùy ý của miền D. Khi đó

$$c_p(f) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$$

là hệ số thứ p trong khai triển Taylor của hàm f tại lân cận điểm a. Đó là phiếm hàm trên họ $\mathcal{H}(D)$. Phiếm hàm $c_p(f)$ là phiếm hàm liên tục.

Thật vậy nếu $f_n \to f_0$ là đều trên từng compắc $K \subset D$ thì lấy đường tròn $\gamma(r) = \{|z-a| = r\} \subset D$ làm K, với $\varepsilon > 0$, $\exists\, N : |f_n(z) - f_0(z)| < \varepsilon$, $\forall\, n > N$, $\forall\, z \in \gamma(r)$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$|c_p(f_n) - c_p(f_0)| < \frac{\varepsilon}{r^p} \quad \forall\, n > N.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $c_p(f)$ liên tục.

Ta có

Định lý 7.2.3. *Mọi phiếm hàm liên tục trên họ compắc trong nó* $\{f\}$ *đều bị chặn và đạt cận trên của nó, nghĩa là*

$$\exists\, f_0 \in \{f\} : |I(f_0)| \geqslant |I(f)|, \quad \forall\, f \in \{f\}.$$

Chứng minh. Giả sử $A = \sup\limits_{f\in\{f\}} |I(f)|$, đó là số hữu hạn và cũng có thể bằng ∞. Theo định nghĩa cận trên, tìm được dãy $f_n \in \{f\}$, $n = 1, 2, \ldots$ sao cho $|I(f_n)| \to A$.

Vì $\{f\}$ là compắc trong nó nên tồn tại dãy con f_n hội tụ đều trên từng compắc $K \subset D$ đến hàm $f_0 \in \{f\}$ nào đó. Vì $I(f)$ liên tục nên

$$|I(f_0)| = \lim_n |I(f_n)| = A.$$

Từ đó ta kết luận được, thứ nhất là $A < \infty$, và thứ hai $|I(f_0)| \geqslant |I(f)|$, $\forall f \in \{f\}$. □

7.2.5 Đơn giản hóa cách đặt bài toán Riemann

Như đã nói ở trên, sự khảo sát của ta chủ yếu là liên quan đến các miền đơn liên (và đơn diệp!). Do đó bài toán cơ bản được đặt ra có thể đơn giản hóa mà không làm mất tính tổng quát của nó.

Ta có thể cho rằng *một trong hai miền được xét là hình tròn*, nghĩa là đối với mọi miền đơn liên D với biên có ít nhất là hai điểm luôn luôn tồn tại ánh xạ bảo giác lên hình tròn $\{|w| < R\}$. Thật vậy, nếu

$$\begin{aligned} w &= f(z) : D \to U = \{|w| < R\} \\ w' &= f(z') : D^* \to U^* = \{|w'| < R'\} \end{aligned}$$

thì hàm $w' = \dfrac{R'}{R}w$ sẽ ánh xạ bảo giác U lên U^* và hàm $z' = F^{-1}(w')$ ánh xạ $\{|w'| < R'\}$ lên D^*. Do đó $z' = F^{-1}\Big(\dfrac{R'}{R}f(z)\Big)$ ánh xạ D lên D^*. Vì vậy định lý Riemann có thể phát biểu dưới dạng:

Mọi miền đơn liên D trong mặt phẳng $\mathbb{C}$ ($D \not\equiv \mathbb{C}$) với biên có ít nhất là hai điểm đều đẳng cấu với hình tròn mở $\{|w| < 1\}$.

Tiếp theo, miền D trong phát biểu của định lý vừa nêu có thể giả thiết là miền bị chặn. Điều đó dựa trên cơ sở định lý sau đây.

Định lý 7.2.4. *Giả sử D là miền đơn liên với biên có ít nhất là hai điểm trong mặt phẳng $\mathbb{C}$, $D \not\equiv \mathbb{C}$. Khi đó tồn tại đẳng cấu biến miền D lên miền bị chặn nào đó của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.*

Chứng minh. 1. Nếu miền D bị chặn thì phép đẳng cấu cần tìm có thể lấy là $f(z) = z$.

2. Giả sử miền D không bị chặn. Ta cần phân biệt hai trường hợp

a) Miền D có điểm ngoài a, tức là miền D không chứa các điểm của hình tròn $S(a, r)$ với tâm a và bán kính r. Trong trường hợp này hàm

$$w = f(z) = \frac{1}{z - a}$$

ánh xạ miền D lên miền D' nằm trong hình tròn $\left\{|w| < \dfrac{1}{r}\right\}$, tức là D' là miền bị chặn. Đó là đẳng cấu muốn tìm.

b) Miền D không có một điểm ngoài nào cả, tức là phần bù của miền D đối với cả mặt phẳng không chứa một hình tròn nào. Theo giả thiết biên của miền D có ít nhất là hai điểm khác nhau α và β. Do tính đơn liên miền D sẽ có một tập hợp biên liên thông nối α với β. Ta xét hàm

$$w = F(z) = \sqrt{\frac{z - \alpha}{z - \beta}}\cdot$$

Hàm này thác triển được trong miền đơn liên D theo mọi tuyến, và do đó theo định lý Monodromic có thể tách nhánh đơn trị $F(z)$ (vì biểu thức dưới căn không triệt tiêu cũng như không bằng ∞ trong D).

Hàm $F(z)$ là đơn diệp trong D. Thật vậy từ hệ thức

$$\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} = \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta}$$

và tính đơn diệp của ánh xạ phân tuyến tính suy ra rằng $z_1 = z_2$. Do đó F đơn diệp và nó ánh xạ đơn diệp miền D lên miền D^*.

Miền D^* có tính chất là: nếu điểm $w_0 \in D^*$ thì điểm $(-w_0)$ là điểm ngoài của D^* vì cặp điểm w_0, $-w_0$ tùy ý luôn luôn tương ứng với một điểm z. Như vậy miền D^* có điểm ngoài. Tiếp theo ta áp dụng lý luận trong phần a) cho miền D^*. Định lý được chứng minh. □

Như vậy, về sau ta sẽ cho rằng miền D trong định lý Riemann là miền bị chặn. Hơn thế nữa, trong trường hợp cần thiết bằng phép tịnh tiến và đồng dạng ta có thể giả thiết *miền $f(D)$ nằm trong hình tròn đơn vị* và hàm ánh xạ $w = f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(a) = 0, \quad f'(a) > 0, \quad a \in D.$$

Do đó để chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác ta chỉ cần chứng minh rằng:

Mọi miền đơn liên bị chặn D đều đẳng cấu với hình tròn mở $\{|w| < 1\}$.

7.2.6 Định lý Riemann

Tư tưởng chủ đạo của phép chứng minh định lý Riemann là như sau:

1. Đầu tiên ta xét họ $S(f; D)$ các hàm chỉnh hình và đơn diệp trong D sao cho

a) $|f(z)| \leqslant 1 \ \ \forall f \in S(f; D), \forall z \in D$;

b) $f(a) = 0, \ \ f'(a) > 0$.

do tính đơn diệp của f trong D nên $f'(z) \neq 0 \, \forall z \in D$. Hiển nhiên $S(f; D) \neq \emptyset$. Thật vậy, vì D bị chặn nên $D \subset \{|z - a| < R, a \in D, R < \infty\}$. Do đó ta có thể lấy hàm f là

$$\begin{aligned} &f(z) = \frac{z-a}{R}, \quad z \in D \Rightarrow |f(z)| \leqslant 1, \quad \forall z \in D, \\ &f(a) = 0, \quad f'(a) > 0. \end{aligned}$$

2. Tiếp theo, hàm ánh xạ cần tìm $w = f(z)$ sẽ được xác định từ các hàm của họ $S(f; D)$ bởi một tính chất cực trị sau đây. Từ họ hàm $S(f; D)$ hãy tìm hàm $f_0 \in S(f; D)$ sao cho

$$|f_0'(a)| \geqslant |f'(a)|, \quad \forall f \in S(f; D),$$

nghĩa là đại lượng độ giãn $|f'(a)|$ đạt cực đại khi $f = f_0$.

3. Hàm f_0 - lời giải của bài toán cực trị sẽ là đẳng cấu muốn tìm; nó ánh xạ miền D lên hình tròn đơn vị chứ không phải vào hình tròn đơn vị như đối với các hàm còn lại của $S(f; D)$.

Bây giờ ta chuyển sang chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác - định lý Riemann.

Định lý Riemann. *Mọi miền đơn liên D trong mặt phẳng $\mathbb{C}$ và $D \not\equiv \mathbb{C}$ đều đẳng cấu với hình tròn mở $\{|w| < 1\}$.*

Chứng minh. I. Theo định lý vừa chứng minh cuối tiết trước và nhận xét sau chứng minh định lý đó, mọi miền D thỏa mãn các giả thiết của định lý Riemann đều đẳng cấu với một miền nào đó nằm trong hình tròn đơn vị. Ta xét họ $S(f;D)$ tất cả những hàm chỉnh hình đơn diệp trong D sao cho môđun của chúng bị chặn bởi 1 và $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$, trong đó a là điểm cố định nào đó của D. Đó là họ tất cả những hàm ánh xạ bảo giác miền D vào hình tròn đơn vị U. Theo định lý vừa nhắc đến trên đây, họ $S(f;D) \neq \emptyset$, và theo định lý Montel $S(f;D)$ là họ compắc.

II. Bây giờ từ họ $S(f;D)$ ta sẽ tìm hàm f_0 sao cho độ giãn $|f_0'(a)|$ là cực đại. Ta xét tập hợp con $S_1(f;D) \subset S(f;D)$:

$$S_1(f;D) = \{f \in S(f;D) : |f'(a)| \geqslant |f_1'(a)| > 0\},$$

trong đó f_1 là hàm cố định nào đó của $S(f;D)$. Ta sẽ chứng minh rằng $S_1(f;D)$ là compắc trong nó. Giả sử dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in S_1(f;D)$, $\forall n$ hội tụ đều trên từng compắc của miền D đến hàm giới hạn f_0. Hàm f_0 thỏa mãn các tính chất sau đây.

1. Hàm $f_0 \in \mathcal{H}(D)$, $|f_0| \leqslant 1$. Thật vậy, vì $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $\forall n$ nên theo định lý Weierstrass hàm $f_0 \in \mathcal{H}(D)$. Vì $|f_n| \leqslant 1$ $\forall n$ nên $|f_0| \leqslant 1$ trong D.

2. $f_0(a) = 0$, $f_0'(a) > 0$. Thật vậy, ta có

$$f_0(a) = \lim_n f_n(a) = 0.$$

Tiếp theo, vì $f_n \in \mathcal{H}(D)$ $\forall n$ và f_n hội tụ đều trên từng compắc của D nên theo định lý Weierstrass dãy các đạo hàm f_n' cũng hội tụ đều trên từng compắc của D đến f_0' và

$$f_0'(a) = \lim_n f_n'(a) \geqslant f_1'(a) > 0.$$

Như vậy hàm $f_0(z)$ không phải là hằng số trong D.

3. Hàm f_0 đơn diệp trong D. Thật vậy vì f_0 là giới hạn của dãy hàm đơn diệp trong D và f_0 không phải là hằng số nên f_0 đơn diệp trong D (xem định lý 7.1.7).

Như vậy hàm $f_0 \in S_1(f; D)$ và do đó $S_1(f; D)$ là compắc trong nó.

Bây giờ ta xét ánh xạ

$$I(f) : f \mapsto |f'(a)|.$$

Đó là phiếm hàm liên tục như đã chứng minh trong tiết 4° của mục này. Ta biết rằng hàm liên tục trên tập hợp compắc thì đạt giá trị lớn nhất của nó. Nghĩa là $\exists\, f_0 \in S_1(f; D)$ thỏa mãn điều kiện

$$|f'(a)| \leqslant |f_0'(a)| \quad \forall\, f \in S_1(f; D).$$

Như vậy sự tồn tại lời giải của bài toán cực trị được chứng minh.

III. Bây giờ ta chứng minh rằng f_0 ánh xạ miền D lên toàn bộ hình tròn U. Vì f_0 chỉnh hình đơn diệp trong D nên nó ánh xạ bảo giác D lên $f_0(D)$. Vì $|f_0(z)| \leqslant 1\ \forall\, z \in D$ nên ảnh $f_0(D)$ nằm trong hình tròn đơn vị $\{|w| < 1\}$. Ta chứng minh rằng từ tính cực trị của f_0 suy ra rằng $f_0(D) \equiv U = \{|w| < 1\}$.

Giả sử ngược lại. Ta giả thiết tồn tại điểm b ($|b| < 1$) không thuộc ảnh $f_0(D)$, $b \notin f_0(D)$. Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $\exists\, h(z) \in S(f; D)$ sao cho

$$|h'(a)| > |f_0'(a)|$$

và như vậy mâu thuẫn với tính cực trị của hàm f_0.

Vì $f_0(a) = 0 \Rightarrow b \neq 0$. Khi đó điểm $b^* = \dfrac{1}{b}$ cũng không thuộc ảnh $f_0(D)$ vì $|b^*| > 1$.

Ta xét hàm

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}\,\cdot$$

Hàm $\psi(z)$ chỉnh hình đơn diệp trong D. Thật vậy vì giá trị của hàm f_0 nằm trong hình tròn đơn vị nên giá trị của biểu thức dưới căn cũng nằm trong hình tròn đơn vị (xem định lý 9.9). Vì miền D đơn liên nên theo định lý Monodromie ta có thể tách nhánh đơn trị của căn thức. Nhánh này đơn diệp trong D, điều đó được kiểm tra hệt như trong chứng minh định lý 7.2.4 ở tiết trước. Hiển nhiên $|\psi| < 1\ \forall\, z \in D$.

Bây giờ ta xét hàm

$$h(z) = e^{i\theta}\frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)}\psi(z)}, \quad -\pi < 0 \leqslant \pi.$$

Hàm $h(z)$ có các tính chất sau đây:

1. $h(z) \in S(f; D)$. Thật vậy, $h(z)$ chỉnh hình và đơn diệp trong D; $h(a) = 0$ và $|h| \leqslant 1\ \forall\, z \in D$.

$$h'(a) = e^{i\theta}\frac{\psi'(a)}{1 - |\psi(a)|^2} = e^{i\theta}\frac{1 + |b|}{2\sqrt{-b}}f_0'(a).$$

Với $\theta = \arg\sqrt{-b}$ ta có

$$h'(a) = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}}f_0'(a) \Rightarrow h(z) \in S(f; D).$$

2. $h'(a) > f_0'(a)$. Thật vậy, ta có

$$1 + |b| > 2\sqrt{|b|}.$$

Do đó $\dfrac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} > 1$. Từ đó suy ra $h'(a) > f_0'(a)$.

Điều này trái với tính chất cực trị của hàm $f_0(z)$. Định lý Riemann được chứng minh. □

Nhận xét 7.2.2. Nhược điểm cơ bản của chứng minh vừa trình bày là ở chỗ nó chỉ thuần túy chứng minh sự tồn tại mà chưa đưa ra một phương pháp có tính chất kiến thiết để xây dựng hàm ánh xạ. Phép chứng minh có tính chất kiến thiết định lý này, xin mời xem các sách giáo khoa [2], [6], [14] và [20].

Hệ quả 7.2.1. *Nếu các điều kiện của định lý Riemann được thỏa mãn thì tồn tại duy nhất $F(z)$ chỉnh hình trong D, được chuẩn hóa tại điểm $z_0 \in D$, $z_0 \neq \infty$ bởi các điều kiện $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$ và ánh xạ bảo giác D lên hình tròn với tâm tại điểm $w = 0$.*

Chứng minh. Nếu f_0 là hàm được chỉ ra trong định lý Riemann thì hàm $F(z) = \dfrac{f_0(z)}{f_0'(z_0)}$. Hàm F ánh xạ D lên hình tròn $\{|w| < R\}$, $R = 1/f'(z_0)$. Nếu còn tồn tại một hàm $F_1(z)$ nữa thỏa mãn điều khẳng định của hệ quả và ánh xạ D lên hình tròn $\{|w| < R_1\}$ nào đó thì $\dfrac{F_1(z)}{R_1} = f_0(z)$ sẽ là hàm được chỉ ra trong định lý Riemann. Từ đó suy ra

$$\frac{1}{R_1} = f_0'(z_0), \quad F_1(z) = \frac{f_0(z)}{f_0'(z_0)} = F(z).$$

□

Số $R = \dfrac{1}{f_0'(z_0)}$ được gọi là *bán kính bảo giác* của miền D tại điểm $z_0 \in D$.

Hệ quả 7.2.2. *Hai miền đơn liên tùy ý D_1 và D_2 trong mặt phẳng $\mathbb{C}$ và $\neq \mathbb{C}$ đều đẳng cấu với nhau.*

Chứng minh. Theo định lý Riemann tồn tại đẳng cấu

$$f_j : D_j \to \{|w| < 1\}, \quad j = 1, 2$$

biến các miền đó lên hình tròn đơn vị. Nhưng khi đó

$$f = f_2^{-1} \circ f_1$$

sẽ là đẳng cấu biến D_1 lên D_2. □

Hệ quả 7.2.3. *Hai miền đơn liên tùy ý D_1 và D_2 trong mặt phẳng $\mathbb{C}$ là đồng phôi với nhau.*

Chứng minh. 1. Nếu D_1 và D_2 không trùng với $\mathbb{C}$ thì hệ quả này được suy từ hệ quả 7.2.1.

2. Nếu một trong hai miền trùng với $\mathbb{C}$ thì hệ quả được rút ra từ chỗ là mặt phẳng $\mathbb{C}$ và hình tròn $\{|z| < 1\}$ đồng phôi với nhau. □

Hệ quả 7.2.4. *Nếu hàm $w = f(z)$ chỉnh hình trong $\mathbb{C}$ và không nhận những giá trị nằm trên cung l nào đó của mặt phẳng thì hàm đó là hằng số.*

Chứng minh. Giả sử $\omega = \varphi(w)$ ánh xạ bảo giác phần ngoài l lên phần trong hình tròn đơn vị (nó tồn tại theo định lý Riemann). Ta xét hàm

$$\omega = \varphi[f(z)] = \Phi(z).$$

Hàm $\omega = \Phi(z)$ chỉnh hình trong $\mathbb{C}$ và bị chặn. Do đó, theo định lý Liouville $\Phi(z) \equiv \text{const}$. Nhưng $\varphi(z) \neq \text{const}$ nên $f(z) = \text{const}$. □

7.2.7 Định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác

Trong n°6 mục trước ta đã bàn đến các điều kiện để chuẩn hóa ánh xạ. Ở đấy ta đã nêu ra ba cách đặt điều kiện chuẩn tương đương với nhau.

Bây giờ ta chứng minh định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác.

Định lý 7.2.5. *Nếu miền D đẳng cấu với hình tròn đơn vị $U = \{|w| < 1\}$ thì tập hợp mọi ánh xạ bảo giác D lên U phụ thuộc ba tham số thực và tồn tại ánh xạ bảo giác duy nhất f biến D lên U được chuẩn hóa bởi các điều kiện*

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \theta, \tag{7.14}$$

trong đó z_0 là điểm tùy ý thuộc D, còn θ là số thực tùy ý.

Chứng minh. Điều khẳng định thứ nhất được suy từ định lý 7.1.10 vì nhóm Aut$U$ phụ thuộc tham số thực: hai tọa độ của điểm a và số α trong định lý 7.1.13.

Để chứng minh điều khẳng định thứ hai ta giả thiết rằng có hai ánh xạ f_1 và f_2 biến miền D lên U được chuẩn hóa bởi điều kiện (7.14). Khi đó

$$\varphi = f_1 \circ f_2^{-1}$$

sẽ là một tự đẳng cấu của U và $\varphi(0) = 0$, $\arg \varphi'(0) = 0$. Từ định lý 7.1.13 suy ra rằng $a = 0$ và $\alpha = 0$ và do đó $\varphi \equiv z$ hay là $f_1(z) \equiv f_2(z)$. □

7.2.8 Sự tương ứng giữa các biên và công thức Christoffel-Schwarz

Nếu hàm chỉnh hình được định nghĩa như ánh xạ miền này lên miền kia thì ánh xạ đó luôn luôn phải được hiểu là sự tương ứng một - một giữa các điểm trong của các miền. Vì các điểm biên không được liệt vào điểm của miền nên để nghiên cứu sự tương ứng giữa các điểm biên ta cần nghiên cứu vấn đề khó khăn hơn - dáng điệu của hàm ánh xạ khi dần đến biên của miền. Thế nhưng, trong nhiều vấn đề ta cần phải biết một số tính chất của hàm ánh xạ ở gần biên của miền.

Trong phạm vi giáo trình, ta thường sử dụng kết quả sau đây của Caratheodory - gọi là nguyên lý tương ứng biên.

Định lý 7.2.6. (Caratheodory) *Giả sử miền D và D^* được giới hạn bởi các đường cong Jordan ∂D và ∂D^* và*

$$f : D \to D^*$$

là ánh xạ bảo giác miền D lên miền D^*.

Khi đó

1) *hàm $f(z)$ có thể thác triển liên tục ra miền đóng $\overline{D}$,*

2) *hàm đã được thác triển đó xác lập một phép đồng phôi giữa các miền đóng $\overline{D}$ và $\overline{D}^*$.*

Ta sẽ không dừng lại để chứng minh kết quả này mà xin mời bạn đọc nào quan tâm đến vấn đề dáng điệu của ánh xạ bảo giác ở trên biên hãy tìm xem cuốn sách của C. Caratheodory "Conformal Representation" hoặc cuốn sách của A. Hurwitz và R. Courant "Теория функций" M., 1968.

Bây giờ ta sẽ trình bày công thức cho phép tìm ánh xạ bảo giác nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên đa giác trong mặt phẳng w.

Không đi sâu vào chi tiết, ở đây ta sẽ trình bày những kết quả cơ bản trong việc xây dựng biểu thức giải tích đối với hàm $w = f(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên

$$P = \{\operatorname{Im} z > 0\}$$

lên đa giác Δ_n trong mặt phẳng w.

Ở đây ta sử dụng các ký hiệu sau: A_k là các đỉnh liên tiếp của đa giác Δ_n, $k = 1, 2, \dots, n$; $\pi\alpha_k$ là độ lớn của góc tại đỉnh A_k tương ứng trong đó $0 < \alpha_k \leqslant 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$ (định lý về tổng các góc trong của đa giác); các điểm a_k, $k = \overline{1, n}$ nằm trên trục thực của mặt phẳng z

$$a_k < a_{k+1} \quad \forall\, k = \overline{1, n-1}$$

là nghịch ảnh của A_k qua ánh xạ $w = f(z)$, tức là $f(a_k) = A_k$.

Từ định lý Riemann suy ra hàm $w = f(z)$ tồn tại. Từ nguyên lý tương ứng biên trong ánh xạ bảo giác cũng suy được rằng hàm này liên tục trong nửa mặt phẳng đóng $\overline{P} = \big\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\big\}$ và hàm ngược của nó liên tục trong đa giác đóng $\overline{\Delta}_n$.

Có thể chứng minh

Định lý 7.2.7. (Christoffel-Schwarz) *Giả sử:*

1) *a_k và α_k, $k = \overline{1, n}$ là những số thực thỏa mãn các điều kiện*

$$-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < +\infty$$
$$0 < \alpha_k \leqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2.$$

2) *Hàm $w = f(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $P = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ lên đa giác bị chặn Δ_n với các đỉnh liên tiếp $A_1, A_2, \dots, A_n$ sao cho $f(a_k) = A_k$, $k = \overline{1, n}$. Khi đó ta có công thức Christoffel-Schwarz*

$$w = f(z) = A\int\limits_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + B \qquad (7.15)$$

trong đó tích phân được lấy theo đường cong nằm trong nửa mặt phẳng trên; A, B là các hằng số.

Ta xét hai trường hợp đặc biệt sau đây.

I. Giả sử một trong các đỉnh của đa giác là ảnh của điểm vô cùng, chẳng hạn là ảnh của $a_n = \infty$. Ta thực hiện phép biến đổi tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$ bởi $\zeta = -\dfrac{1}{z} + a'_n$ nếu $a_k \neq 0$ hoặc bởi $\zeta = \dfrac{-1}{z-a} + a'_n$ nếu có một $a_k = 0$ (trong đó $a \neq a_k$ $\forall\, k = \overline{1,n}$) biến các điểm $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = \infty$ thành các điểm hữu hạn $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Khi đó theo (7.15) và hệ thức $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$ ta có

Hệ quả 7.2.5. *Giả sử hàm $w = f(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên đa giác bị chặn Δ_n sao cho $a_k \neq \infty$ với $k = \overline{1, n-1}$ và $a_n = \infty$. Khi đó ta có công thức*

$$w = f(z) = A_1 \int\limits_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + B_1. \tag{7.16}$$

Từ (7.16) ta thấy rằng trong công thức Christoffel-Schwarz thừa số liên quan đến đỉnh tương ứng với $a_n = \infty$ là không hiện diện. Điều đó đưa đến việc công thức (7.16) thường được sử dụng nhiều hơn.

II. Xét trường hợp khi đa giác Δ_n có một hay một số đỉnh nằm tại ∞. Trong trường hợp này ta sẽ xem góc giữa hai cạnh với đỉnh tại ∞ được xác định như là góc tại giao điểm hữu hạn giữa hai cạnh đó với dấu ngược lại. Với quy ước đó công thức (7.15) và (7.16) vẫn có hiệu lực, tức là ta có

Định lý 7.2.8. (Christoffel-Schwarz) *Ánh xạ bảo giác $w = f(z)$ biến nửa mặt phẳng trên lên đa giác Δ_n được thực hiện bởi*

1) *hàm* (7.15) *nếu $a_k \neq \infty \;\; \forall\, k = \overline{1,n}$;*

(2) *hàm* (7.16) *nếu $a_k \neq \infty$, $k = \overline{1, n-1}$, $a_n = \infty$.*

Công thức Christoffel-Schwarz cho phép ta tìm hàm $w = f(z)$ ánh xạ bảo giác nửa mặt phẳng $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên đa giác Δ_n đã được cho (tức là cho các đỉnh A_k và các góc $\pi\alpha_k$, $k = \overline{1,n}$) thì bài toán tìm hàm $w = f(z)$ được đưa về tìm các điểm a_k, $k = \overline{1,n}$ và các hằng số A, B. Ba điểm bất kỳ trong số các điểm a_k $k = \overline{1, n}$ được cho tùy ý (**7.1.8**), các điểm a_k còn lại và các hằng số A, B sẽ được xác định đơn trị vì các đỉnh $A_k = f(a_k)$ đã cho. Tuy nhiên việc xác định các hằng số này (gọi là *các hằng số Christoffel-Schwarz*) trong thực tế là cực kỳ phức tạp. Bạn đọc muốn tìm hiểu sâu vấn đề này xin mời xem cuốn sách М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., “Наука”, 1973. Ch II, còn bây giờ ta sẽ nêu một vài ví dụ đơn giản để minh họa việc xác định các hằng số Christoffel-Schwarz.

Ví dụ 3. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên băng nằm ngang

$$\{0 < \operatorname{Im} w < h\}.$$

Hình VII. 1

Giải. Băng nằm ngang đã cho (hình VII. 1) là một “nhị giác” với các đỉnh là $A_1 = +\infty$ và $A_2 = -\infty$ với các góc đỉnh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Vì để chuẩn hóa ánh xạ ta cần cho trước sự tương ứng của ba điểm, nên ta bổ sung cho “nhị giác” đã cho một đỉnh nữa là $A_3 = 0$ với góc đỉnh bằng π (hiển nhiên điều đó không ảnh hưởng gì đến hình dạng của “nhị giác”).

Để tiện lợi, ta ghi các số liệu đã biết thành bảng sau đây

a_k	A_k	α_k
∞	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
1	0	1

Để ý đến bảng vừa lập dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này tích phân Christofell-Schwarz có dạng

$$w = A\int_1^z \frac{dz}{z} + B.$$

Vì điểm $a_3 = 1$ tương ứng với đỉnh $A_3 = 0$ nên

$$0 = A\int_1^1 \frac{dz}{z} + B,$$
$$B = 0.$$

Do đó

$$w = A\int_1^z \frac{dz}{z} = A\ln z,$$

trong đó hằng số A được xác định bởi độ rộng và hướng của băng đã cho.

Vì bán trục dương của mặt phẳng z được ánh xạ lên trục thực của mặt phẳng w nên hằng số A là một số thực.

Ta xác định hằng số A.

Để làm việc đó, thông thường ta sử dụng định lý sau đây của (R. Courant).

Giả sử γ_r là nửa đường tròn với bán kính vô cùng bé r và với tâm tại điểm $z = a$ và giả sử qua ánh xạ bảo giác $w = f(z)$ điểm $z = a$ biến thành điểm $w = \infty$. Khi đó, với sự sai khác một vô cùng bé bậc cao hơn so với r, ảnh của nửa đường tròn γ_r sẽ là một đoạn thẳng. (xem Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексного переменного М-Л, 1934).

Áp dụng định lý vừa phát biểu, ta thấy rằng ảnh của nửa đường tròn

$$\gamma_r = \{|z| = r,\ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$$

là đoạn thẳng nối các tia A_1A_2 với A_2A_3 và thẳng góc với các tia ấy. Do đó với sự sai khác vô cùng bé $\theta(r)$, khi vòng qua điểm $z = 0$ theo nửa đường tròn γ_r (theo chiều kim đồng hồ), gia số Δw_0 của $w = A\ln z$ sẽ bằng hiệu các giá trị của phần thực của w lần lượt trên A_2A_3 và A_1A_2, nghĩa là

$$\Delta w_0 = -hi + 0(r), \quad r \to 0.$$

Nhưng mặt khác ta lại có

$$\Delta w_0 = A\int\limits_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = Ai\int\limits_{\pi}^{0} d\theta = -A\pi i \quad (r \to 0).$$

Từ đó suy ra

$$A = \frac{h}{\pi}, \quad \text{và} \quad w = \frac{h}{\pi}\ln z.$$

Ví dụ 4. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên nửa băng $\Big\{-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} w > 0\Big\}$ là một "tam giác" với các đỉnh (hình VII. 2)

$$A_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad A_2 = \frac{\pi}{2}, \quad A_3 = \infty.$$

Giải. Tam giác $A_1A_2A_3$ có các góc tương ứng là

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 0$$

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\,!)$. Các số liệu đã cho có thể ghi thành bảng sau đây

a_k	A_k	α_k
-1	$-\pi/2$	$1/2$
1	$\pi/2$	$1/2$
∞	∞	0

Hình VII. 2

Tích phân Christofell-Schwarz có dạng

$$
\begin{aligned}
W &= A\int\limits_0^z (z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}dz + B \\
&= A'\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + B \\
&= A'\text{arc } \sin z + B.
\end{aligned}
$$

Sử dụng sự tương ứng giữa các điểm đã ghi trên bảng ta có

$$-\frac{\pi}{2} = -A'\frac{\pi}{2} + B, \quad \frac{\pi}{2} = A'\frac{\pi}{2} + B,$$

và từ đó

$$B = 0, \quad A' = 1.$$

Như vậy

$$W = \arcsin z.$$

7.3 Bài tập

1. Hàm thực $G(z, z_0, D)$, trong đó z_0 là điểm thuộc D bất kỳ, được gọi là hàm Green đối với miền D nếu nó thỏa mãn các điều kiện:

1. $G(z, z_0, D)$ là hàm điều hòa theo z trong $D \setminus \{z_0\}$;

2. $G(z, z_0, D) \to +\infty$ khi $z \to z_0$;
3. $G(z, z_0, D) \to 0$ khi $z \to \partial D$.

Chứng minh rằng

$$G(z, z_0, D) = G(z_0, z, D).$$

2. Chứng minh rằng hàm Green đối với miền đơn liên D có thể biểu diễn qua hàm ánh xạ bảo giác D lên hình tròn đơn vị theo công thức

$$G(z, z_0, D) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - w(z_0)}{1 - \overline{w(z_0)}w(z)} \right|, \qquad (*)$$

trong đó $w(z)$ là ánh xạ bảo giác D lên hình tròn đơn vị

$$U = \{|w| < 1\}.$$

3. Áp dụng công thức (*) để viết công thức biểu diễn hàm Green đối với các hình tròn $S = \{|z| < R\}$ và nửa mặt phẳng trên.

4. Chứng minh rằng nếu D và D^* là những miền đơn liên và f là ánh xạ bảo giác nào đó biến D^* lên D thì hàm Green đối với miền D và D^* liên hệ với nhau theo công thức

$$G(z, z_0, D^*) = G(f(z), f(z_0), D).$$

5. Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$, $f'(z) \neq 0\ \forall z \in D$. Khi đó miền D có thể phân hoạch thành tập hợp hữu hạn hoặc đếm được miền mà trong mỗi miền đó hàm $f(z)$ đơn diệp.

6. Tìm hàm ánh xạ nửa mặt phẳng trên lên chính nó sao cho $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ $(\operatorname{Im} a > 0, \operatorname{Im} b > 0)$.

(Trả lời: $\dfrac{w-b}{w-\overline{b}} = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$.)

7. Tìm hàm ánh xạ nửa mặt phẳng trên lên nửa mặt phẳng dưới sao cho $w(a) = \overline{a}$, $\arg w'(a) = -\dfrac{\pi}{2}$. $(\operatorname{Im} a > 0)$.

(Trả lời: $\dfrac{w-\overline{a}}{w-a} = i\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$)

8. Ánh xạ hình tròn $S = \{z : |z| < 2\}$ lên nửa mặt phẳng $P = \{z : \mathrm{Re}w > 0\}$ sao cho

$$w(0) = 1, \quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

(Trả lời : $w = -\dfrac{z-2i}{z+2i}$)

9. Ánh xạ hình tròn $S = \{z : |z - 4i| < 2\}$ lên nửa mặt phẳng $P = \{w : \mathrm{Im}w > \mathrm{Re}w\}$ sao cho tâm của hình tròn chuyển thành điểm $w = -4$ và điểm $z = 2i$ của đường tròn biến thành gốc tọa độ.

(Trả lời: $w = -4\dfrac{zi+2}{z-2-4i}$)

10. Ánh xạ hình tròn $S(R_1) = \{z : |z| < R_1\}$ lên hình tròn $S(R_2) = \{z : |z| < R_2\}$ sao cho $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ ($|a| < R_1, |b| < R_2$).

(Trả lời: $R_2\dfrac{w-b}{R_2^2 - \bar{b}w} = e^{i\alpha}R_1\dfrac{z-a}{R_1^2 - \overline{a}z}$)

11. Tìm hàm ánh xạ nửa hình tròn $S = \{z : |z| < 1, \mathrm{Im}z > 0\}$ lên hình tròn $S^* = \{w : |w| < 1\}$ sao cho $w(\pm 1) = \pm 1$, $w(0) = -i$.

(Trả lời: $w = \dfrac{z^2+2iz+1}{iz^2+2z+i}$)

Tài liệu tham khảo

A - HÀM MỘT BIẾN PHỨC

1. Ahlors L. V., Complex analysis, New York, 1953.
2. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного, “Наука”, 1969
3. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теорий функций комплексного перемемного, “Наука” 1975.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, “Наука”, 1966.
5. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высщей математике. Том 2. М., 1958.
6. Гурвиц А;, Курант Р., Теория функций, “Наука”, 1968.
7. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, “Мир”, 1964. (có bản dịch tiếng Việt của NXB Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, Hà Nội 1973).
8. Евграфов М. А. Аналитические функции “Наука”, 1968.
9. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Щабунин М. И., Бежанов К. А. Сборник задач по теории аналитических функций, “Наука”, 1969.

10. Картан А., Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. И. Л., Москва, 1973.

11. Компенфелс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений И. Л., 1963.

12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, "Наука", 1973.

13. Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям "Наукова Думка", Киев 1970.

14. Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функций комплексного переменного с элементами операционного исчисления, М., 1958.

15. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Том 1 (1967), Том 2 (1968), "Наука".

16. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного репеменного, М., 1960. (Bản dịch tiếng Việt của NXB Giáo dục, Hà Nội, 1964).

17. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного, "Наука", 1974.

18. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Том 3 (часть 2), "Наука", 1974.

19. Спрингер Дж., Введение в теорию римановых, поверхностей И. Л., 1960.

20. Стойлов С. И. Теория функций комплексного переменного, том 1, 2, И. Л., 1962. 2. Лекции по топологических принципах теории аналитических функций, "Наука", 1964.

21. Титчмарш Е., Теория функций, М., 1980.

22. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа Том 1, Л., 1963.

23. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. M., 1959 (Bản dịch tiếng Việt của NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 1969).

24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. "Наука", Часть I, 1976. (Có bản dịch của NXB Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, 1974).

25. Шварц Л., Анализ. Том II, "Мир", 1972.

26. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функций одного переменного, Часть 1-2. "Наука", 1969.

27. Nguyễn Thủy Thanh. Hướng dẫn giải bài tập hàm biến phức NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.

B - HÀM NHIỀU BIẾN PHỨC

28. Ганнинг Р., Россй Ж., Аналитические функции многих комплексных переменных, "Мир" M. 1969.

29. Хёрмандер Л., Введение в теорию Функций нескольких комплексных переменных "Мир", 1968.

30. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ. Часть II, "Наука", 1975.

31. Ронкин Л. И., Элементы теории аналитических функции многих переменных "Наука Думка" Киев, 1977.