Bài tập toán cao cấp
Tập 1

Nguyễn Thủy Thanh

NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006, 276 Tr.

Từ khoá: Số phức, Đa thức và hàm hữu tỷ, Ma Trận, Định thức, Hệ phương trình tuyến tính, Không gian Euclide, Dạng toàn phương.

NGUYỄN THUỶ THANH

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP

Tập 1
Đại số tuyến tính
và Hình học giải tích

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Hà Nội – 2006

Mục lục

Lời nói đầu

Giáo trình *Bài tập toán cao cấp* này được biên soạn theo *Chương trình Toán cao cấp* cho sinh viên các ngành Khoa học Tự nhiên của Đại học Quốc gia Hà Nội và đã được Đại học Quốc gia Hà Nội thông qua và ban hành.

Mục đích của giáo trình là giúp đỡ sinh viên các ngành Khoa học Tự nhiên nắm vững và vận dụng được các phương pháp giải toán cao cấp. Mục tiêu này quyết định toàn bộ cấu trúc của giáo trình. Trong mỗi mục, đầu tiên chúng tôi trình bày tóm tắt những cơ sở lý thuyết và liệt kê những công thức cần thiết. Tiếp đó, trong phần *Các ví dụ* chúng tôi quan tâm đặc biệt tới việc giải các bài toán mẫu bằng cách vận dụng các kiến thức lý thuyết đã trình bày. Sau cùng, là phần *Bài tập*. Ở đây, các bài tập được gộp thành từng nhóm theo từng chủ đề và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần về độ khó và mỗi nhóm đều có những chỉ dẫn về phương pháp giải. Chúng tôi hy vọng rằng việc làm quen với lời giải chi tiết trong phần *Các ví dụ* sẽ giúp người học nắm được các phương pháp giải toán cơ bản.

Giáo trình *Bài tập* này có thể sử dụng dưới sự hướng dẫn của giáo viên hoặc tự mình nghiên cứu vì các bài tập đều có đáp số, một số có chỉ dẫn và trước khi giải các bài tập này đã có phần *Các ví dụ* trình bày những chỉ dẫn về mặt phương pháp giải toán.

Tác giả giáo trình chân thành cảm ơn các thầy giáo: TS. Lê Đình Phùng và PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn đã đọc kỹ bản thảo và đóng

góp nhiều ý kiến quý báu về cấu trúc và nội dung và đã góp ý cho tác giả về những thiếu sót của bản thảo giáo trình.

Mới xuất bản lần đầu, Giáo trình khó tránh khỏi sai sót. Chúng tôi rất chân thành mong được bạn đọc vui lòng chỉ bảo cho những thiếu sót của cuốn sách để giáo trình ngày được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, Mùa thu 2004

Tác giả

Chương 1

Số phức

1.1 Định nghĩa số phức

Mỗi cặp số thực có thứ tự $(a; b)$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$ được gọi là một số phức nếu trên tập hợp các cặp đó quan hệ bằng nhau, phép cộng và phép nhân được đưa vào theo các định nghĩa sau đây:

(I) Quan hệ bằng nhau

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

(II) Phép cộng

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \overset{def}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$[1]

(III) Phép nhân

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) \overset{def}{=} (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Tập hợp số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$. Phép cộng (II) và phép nhân (III) trong $\mathbb{C}$ có tính chất giao hoán, kết hợp, liên hệ với nhau bởi luật phân bố và mọi phần tử $\neq (0,0)$ đều có phần tử nghịch đảo. Tập hợp $\mathbb{C}$ lập thành một trường (gọi là trường số phức) với phần tử không là cặp $(0;0)$ và phần tử đơn vị là cặp $(1;0)$. Áp dụng quy tắc (III) ta có: $(0;1)(0;1) = (-1,0)$. Nếu ký hiệu $i = (0,1)$ thì

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Đối với các cặp dạng đặc biệt $(a,0)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ theo (II) và (III) ta có

$$\begin{aligned}(a,0) + (b,0) &= (a+b,0),\\ (a,0)(b,0) &= (ab,0).\end{aligned}$$

Từ đó về mặt đại số các cặp dạng $(a,0)$, $a \in \mathbb{R}$ không có gì khác biệt với số thực $\mathbb{R}$: vì chúng được cộng và nhân như những số thực. Do vậy ta có thể đồng nhất các cặp dạng $(a;0)$ với số thực a:

$$(a;0) \equiv a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Đặc biệt là $(0;0) \equiv 0$; $(1;0) \equiv 1$.

Đối với số phức $z = (a,b)$:

1^+ Số thực a được gọi là phần thực $a = \operatorname{Re} z$, số thực b gọi là phần ảo và ký hiệu là $b = \operatorname{Im} z$.

2^+ Số phức $\overline{z} = (a,-b)$ gọi là số phức liên hợp với số phức z

[1]def. là cách viết tắt của từ tiếng Anh definition (định nghĩa)

1.2 Dạng đại số của số phức

Mọi số phức $z = (a; b) \in \mathbb{C}$ đều có thể viết dưới dạng

$$z = a + ib. \tag{1.1}$$

Thật vậy, $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$

Biểu thức (1.1) gọi là dạng đại số của số phức $z = (a, b)$. Từ (1.1) và định nghĩa số phức liên hợp ta có $\overline{z} = a - ib$.

Dưới dạng đại số các phép tính trên tập hợp số phức được thực hiện theo các quy tắc sau.

Giả sử $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Khi đó

(I) Phép cộng: $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$.

(II) Phép nhân: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

(III) Phép chia: $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + i\dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}\cdot$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. 1^+ Tính i^n. Từ đó chứng minh rằng

a) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$;

b) $i \cdot i^2 \cdots i^{99} \cdot i^{100} = -1$.

2^+ Tìm số nguyên n nếu:

a) $(1 + i)^n = (1 - i)^n$;

b) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

Giải. 1^+ Ta có $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ và giá trị lũy thừa bắt đầu lặp lại. Ta khái quát hóa. Giả sử $n \in \mathbb{Z}$ và $n = 4k + r$, $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r \leqslant 3$. Khi đó

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = (i^4)^k i^r = i^r$$

(vì $i^4 = i$). Từ đó, theo kết quả trên ta có

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 4k, \\ i & \text{nếu } n = 4k+1, \\ -1 & \text{nếu } n = 4k+2, \\ -i & \text{nếu } n = 4k+3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Từ (1.2) dễ dàng suy ra a) và b).
2^+ a) Từ hệ thức $(1+i)^n = (1-i)^n$ suy ra

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1.$$

Nhưng $\dfrac{1+i}{1-i} = i$ nên $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n = 1 \Rightarrow n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Từ đẳng thức $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ suy rằng $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n = -1$ và do đó $i^n = -1 \Rightarrow n = 4k+2,\ k \in \mathbb{Z}$. ▲

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu n là bội của 3 thì

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$$

và nếu n không chia hết cho 3 thì

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = -1.$$

Giải. 1^+ Nếu $n = 3m$ thì

$$\begin{aligned} S &= \left[\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^m + \left[\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^m \\ &= \left(\frac{-1+3i\sqrt{3}+9-3i\sqrt{3}}{8}\right)^m + \left(\frac{-1-3i\sqrt{3}+9+3i\sqrt{3}}{8}\right)^m \\ &= 1^m + 1^m = 2. \end{aligned}$$

2^+ Nếu $n = 3m+1$ thì

$$S = \Big[\Big(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^3\Big]^m\Big(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big) + \Big[\Big(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\Big)^3\Big]^m\Big(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big)$$
$$= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -1.$$

Tương tự nếu $n = 3m+2$ ta cũng có $S = -1$. ▲

Ví dụ 3. Tính biểu thức

$$\sigma = \Big(1+\frac{1+i}{2}\Big)\Big[1+\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^2\Big]\Big[1+\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^{2^2}\Big]\cdots\Big[1+\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^{2^n}\Big].$$

Giải. Nhân và chia biểu thức đã cho với $1 - \dfrac{1+i}{2}$ ta có

$$\sigma = \frac{1-\Big(\Big[\dfrac{1+i}{2}\Big]^{2^n}\Big)^2}{1-\dfrac{1+i}{2}} = \frac{1-\Big[\dfrac{1+i}{2}\Big]^{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1+i}{2}}\cdot$$

Ta cần tính

$$\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^{2^{n+1}} = \Big[\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^2\Big]^{2^n} = \Big(\frac{i}{2}\Big)^{2^n} = \frac{i^{2^n}}{2^{2^n}} = \frac{1}{2^{2^n}}\cdot$$

Do đó

$$\sigma = \frac{1-\dfrac{1}{2^{2^n}}}{1-\dfrac{1+i}{2}} = \frac{2\Big(1-\dfrac{1}{2^{2^n}}\Big)}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$$
$$= \Big(1-\frac{1}{2^{2^n}}\Big)(1+i) \quad ▲$$

Ví dụ 4. Biểu diễn số phức $\sqrt{4-3i}$ dưới dạng đại số.

Giải. Theo định nghĩa ta cần tìm số phức w sao cho $w^2 = 4-3i$. Nếu $w = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ thì

$$4-3i = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Từ đó

$$a^2 - b^2 = 4, \tag{1.3}$$

$$2ab = -3. \tag{1.4}$$

Từ (1.4) ta có $b = -\dfrac{3}{2a}$. Thế vào (1.3) ta thu được

$$4u^2 - 16u - 9 = 0, \quad u = a^2$$

$$\iff \left[\begin{aligned} u_1 &= \frac{8+\sqrt{100}}{4} = \frac{8+10}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}, \\ u_2 &= \frac{8-\sqrt{100}}{4} = \frac{8-10}{4} = -\frac{1}{2}\cdot \end{aligned}\right.$$

Vì $a \in \mathbb{R}$ nên $u \geqslant 0 \Rightarrow u = \dfrac{9}{2}$ và do vậy

$$a = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$$

Từ đó ta thu được

$$w_{1,2} = \pm\Big(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\Big) \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Biểu diễn số phức

$$z = \frac{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$$

với điều kiện là các phần thực của $\sqrt{5+12i}$ và $\sqrt{5-12i}$ đều âm.

Giải. Áp dụng phương pháp giải trong ví dụ 4 ta có

$$\sqrt{5+12i} = x + iy \Rightarrow 5 + 12i = x^2 - y^2 - 2xyi$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 5, \\ 2xy &= 12. \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm là $(3;2)$ và $(-3;-2)$. Theo điều kiện, phần thực của $\sqrt{5+12i}$ âm nên ta có $\sqrt{5+12i} = -3-2i$. Tương tự ta tìm được $\sqrt{5-12i} = -3+2i$. Như vậy

$$z = \frac{-3-2i-(-3+2i)}{-3-2i+(-3+2i)} = \frac{2}{3}i \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Giả sử $z = a+ib$, $z = \pm 1$. Chứng minh rằng $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2+b^2 = 1$.

Giải. Ta có

$$w = \frac{(a-1)+ib}{(a+1)+ib} = \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}\cdot$$

Từ đó suy rằng w thuần ảo khi và chỉ khi

$$\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} = 0 \Longleftrightarrow a^2+b^2 = 1. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính

1. $\dfrac{(1+i)^8-1}{(1-i)^8+1}\cdot$ (ĐS. $\dfrac{15}{17}$)

2. $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}\cdot$ (ĐS. $-\dfrac{11}{4}i$)

3. $\dfrac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \dfrac{(3+4i)(2+i)}{2-i}\cdot$ (ĐS. $-\dfrac{14}{5}$)

4. $\left(1+\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left[1+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\left[1+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2^2}\right]\cdots\left[1+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2^n}\right].$
(ĐS. 0)

Chỉ dẫn. Áp dụng cách giải ví dụ 3.

5. Chứng minh rằng

a) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$; b) $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$; c) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;

d) $\overline{z^n} = \overline{(z)}^n$; e) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$; g) $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}\, z$.

6. Với giá trị thực nào của x và y thì các cặp số sau đây là các cặp số phức liên hợp:

1) $y^2 - 2y + xy - x + y + (x + y)i$ và $-y^2 + 2y + 11 - 4i$;

2) $x + y^2 + 1 + 4i$ và $ixy^2 + iy^2 - 3$?

(ĐS. 1) $x_1 = 1$, $y_1 = 3$; $x_2 = 9$, $y_2 = 5$; 2) $x_{1,2} = -5$, $y_{1,2} = \pm 5$)

7. Chứng minh rằng z_1 và z_2 là những số phức liên hợp khi và chỉ khi $z_1 + z_2$ và $z_1 z_2$ là những số thực.

8. Tính:

1) $\sqrt{-5 - 12i}$. (ĐS. $\pm(2 - 3i)$)

2) $\sqrt{24 + 10i}$. (ĐS. $\pm(5 + i)$)

3) $\sqrt{24 - 10i}$. (ĐS. $\pm(5 - i)$)

4) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}}$. (ĐS. $\pm\sqrt{6}$, $\pm i\sqrt{2}$)

9. Chứng minh rằng

1) $1 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 16$;

2) $1 - C_9^2 + C_9^4 - C_9^6 + C_9^8 = 16$;

3) $C_9^1 - C_9^3 + C_9^5 - C_9^7 + C_9^9 = 16$.

Chỉ dẫn. Áp dụng công thức nhị thức Newton đối với $(1 + i)^8$ và $(1 + i)^9$.

1.3 Biểu diễn hình học. Môđun và acgumen

Mỗi số phức $z = a + ib$ có thể đặt tương ứng với điểm $M(a; b)$ của mặt phẳng tọa độ và ngược lại mỗi điểm $M(a; b)$ của mặt phẳng đều tương ứng với số phức $z = a + ib$. Phép tương ứng được xác lập là đơn trị một - một. Phép tương ứng đó cho phép ta xem các số phức như là *các điểm* của mặt phẳng tọa độ. Mặt phẳng đó được gọi là mặt phẳng phức. Trục hoành của nó được gọi là *Trục thực*, trục tung được gọi là *Trục ảo*. Thông thường số phức $z = a + ib$ có thể xem như vectơ $\overrightarrow{OM}$. Mỗi vectơ của mặt phẳng với điểm đầu $O(0,0)$ và điểm cuối tại điểm $M(a;b)$ đều tương ứng với số phức $z = a + ib$ và ngược lại.

Sự tương ứng được xác lập giữa tập hợp số phức $\mathbb{C}$ với tập hợp các điểm hay các vectơ mặt phẳng cho phép gọi các số phức là *điểm* hay *vectơ*.

Với phép biểu diễn hình học số phức, các phép toán cộng và trừ các số phức được thực hiện theo quy tắc cộng và trừ các vectơ.

Giả sử $z \in \mathbb{C}$. Khi đó độ dài của vectơ tương ứng với số phức z được gọi là *môđun* của nó.

Nếu $z = a + ib$ thì

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}.$$

Góc giữa hướng dương của trục thực và vectơ z (được xem là góc dương nếu nó có định hướng ngược chiều kim đồng hồ) được gọi là acgumen của số $z \neq 0$. Đối với số $z = 0$ acgumen không xác định. Khác với môđun, acgumen của số phức xác định không đơn trị, nó xác định với sự sai khác một số hạng bội nguyên của 2π và

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

trong đó $\arg z$ là *giá trị chính* của acgumen được xác định bởi điều kiện $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ hoặc $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Phần thực và phần ảo của số phức $z = a + ib$ được biểu diễn qua môđun và acgument của nó như sau

$$\begin{cases} a & = r\cos\varphi, \\ y & = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Như vậy, acgumen φ của số phức có thể tìm từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm môđun của số $z = \dfrac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}$ ·

Giải. Ta có

$$|z| = \frac{\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}}{\sqrt{(xy\sqrt{2})^2+(\sqrt{x^4+y^4})^2}} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta đều có:

(i) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$; (ii) $|z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$;

(iii) $|z_1+z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|$; (iv) $z_1-z_2| \geqslant |z_1|-|z_2$.

Giải. (i) Ta có

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2).$$

Vì $-|z_1z_2| \leqslant \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \leqslant |z_1z_2|$ nên

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

(ii) Vì $|z_2| = |-z_2|$ nên

$$|z_1-z_2| = |z_1+(-z_2)| \leq |z_1|+|-z_2| = |z_1|+|z_2|.$$

(iii) Áp dụng (ii) cho $z_1 = (z_1+z_2)-z_2$ và thu được

$$|z_1| \leqslant |z_1+z_2|+|z_2| \to |z_1+z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|.$$

(iv) $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \geq |z_1| - |-z_2| = |z_1| - |z_2|$. ▲

Nhận xét. Các bất đẳng thức (iii) và (iv) còn có thể viết dưới dạng

(iii)*. $|z_1 + z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$; (iv)*. $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$.

Thật vậy ta có $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$ và $|z_1 + z_2| \geqslant |z_2| - |z_1|$. Các vế phải khác nhau về dấu do đó nếu lấy vế phải dương thì thu được (iii)*. Bất đẳng thức (iv)* thu được từ (iii)* bằng cách thay z_2 bởi $-z_2$.

Ví dụ 3. Chứng minh đồng nhất thức

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Giải thích ý nghĩa hình học của hệ thức đã chứng minh.

Giải. Giả sử $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2), \\ z_1 - z_2 &= x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2), \\ |z_1 + z_2|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2, \\ |z_1 - z_2|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Từ đó thu được

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(x_1^2 + y_1)^2 + 2(x_2^2 + y_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Từ hệ thức đã chứng minh suy rằng trong mỗi hình bình hành tổng các bình phương độ dài của các đường chéo bằng tổng các bình phương độ dài của các cạnh của nó. ▲

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ thì

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}\cdot$$

Giải. Theo giả thiết, các điểm z_1, z_2 và z_3 nằm trên đường tròn nào đó với tâm tại gốc tọa độ. Ta xét các vectơ $z_3 - z_2$; $z_3 - z_1$, z_1 và z_2 (hãy vẽ hình).

Bằng những nguyên do hình học, dễ thấy rằng

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_3 - z_1)$$

và góc này nhìn cung tròn nối điểm z_1 và z_2 và góc ở tâm

$$\arg\frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1$$

cũng chắn chính cung tròn đó. Theo định lý quen thuộc của hình học sơ cấp ta có

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1+z_2+z_3 = 0$ thì các điểm z_1, z_2 và z_3 là các đỉnh của tam giác đều nội tiếp trong đường tròn đơn vị.

Giải. Theo giả thiết, ba điểm z_1, z_2 và z_3 nằm trên đường tròn đơn vị. Ta tìm độ dài của các cạnh tam giác.

1^+ Tìm độ dài $|z_1 - z_2|$. Ta có

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
&= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (2x_1x_2 + 2y_1y_2) \\
&= 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_2^2) - [(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2] \\
&= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - 2|z_1 + z_2|^2.
\end{aligned}$$

Nhưng $z_1 + z_2 = -z_3$ và $|z_1 + z_2| = |z_3|$. Do đó

$$|z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - |z_3|^2 = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 - 1 = 3$$

và từ đó

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{3}\,.$$

2^+ Tương tự ta có $|z_2 - z_3| = \sqrt{3}$, $|z_3 - z_1| = \sqrt{3}$. Từ đó suy ra tam giác với đỉnh z_1, z_2, z_3 là tam giác đều. $\blacktriangle$

Ví dụ 6. Với điều kiện nào thì ba điểm khác nhau từng đôi một z_1, z_2, z_3 nằm trên một đường thẳng.

Giải. 1^+ Nếu các điểm z_1, z_2, z_3 nằm trên đường thẳng cho trước thì vectơ đi từ z_2 đến z_1 có hướng như của vectơ đi từ điểm z_3 đến z_1 hoặc có hướng ngược lại. Điều đó có nghĩa là các góc nghiêng của các vectơ này đối với trục thực hoặc như nhau hoặc sai khác góc π. Nhưng khi đó ta có

$$\arg(z_1 - z_2) = \arg(z_1 - z_3) + k\pi, \quad k = \overline{0,1}.$$

Từ đó suy ra

$$\arg\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \arg(z_1 - z_2) - \arg(z_1 - z_3) = k\pi, \quad k = \overline{0,1}.$$

Như vậy số phức $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$ có acgumen bằng 0 hoặc bằng π, tức là số $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$ là số thực. Điều kiện thu được là điều kiện cần.

2^+ Ta chứng minh rằng đó cũng là điều kiện đủ. Giả sử

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $\operatorname{Im}\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = 0$. Hệ thức này tương đương với hệ thức

$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} \cdot \tag{1.5}$$

Phương trình đường thẳng qua điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) có dạng

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \tag{1.6}$$

Từ (1.5) và (1.6) suy ra điểm (x_3, y_3) nằm trên đường thẳng đó. ▲

Ví dụ 7. Xác định tập hợp điểm trên mặt phẳng phức thỏa mãn các điều kiện:

1) $|z-2|+|z+2|=5$;

2) $|z-2|-|z+2|>3$;

3) $\operatorname{Re} z \geqslant c$;

4) $\operatorname{Im} z < 0$.

Giải. 1) Đẳng thức $|z-2|+|z+2|=5$ xác định quỹ tích những điểm của mặt phẳng mà tổng khoảng cách từ đó đến hai điểm cho trước $F_1=-2$ và $F_2=+2$ là hằng số bằng 5. Theo định nghĩa trong hình học giải tích đó là đường ellip với bán trục lớn bằng $\dfrac{5}{2}$ và tiêu điểm ± 2.

2) Quỹ tích các điểm của mặt phẳng $\mathbb{C}$ thỏa mãn điều kiện $\big||z-2|-|z+2|\big|=3$ là đường hypecbôn. Đẳng thức

$$|z-2|-|z+2|=3$$

xác định nhánh bên trái của đường hypecbôn và bất đẳng thức $|z-2|-|z+2|>3$ xác định phần trong của nhánh đó.

3) $\operatorname{Re} z \geqslant c \Rightarrow x \geqslant c$. Đó là nửa mặt phẳng bên phải đường thẳng $x=c$ (kể cả đường thẳng $x=c$).

4) Vì $\operatorname{Im} z = y \Rightarrow \operatorname{Im} z < c \Rightarrow y < c$. Đó là nửa mặt phẳng dưới đường thẳng $y=c$ (không kể đường thẳng đó). ▲

Ví dụ 8. Xác định tập hợp điểm trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được cho bởi điều kiện:

1) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$;

2) $|z-1| \geqslant 2|z-i|$;

3) $|z-2+i|u^2 - 2|z-2+i|u + 1 > 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$.

4) $\log_3(2+|z^2+i|) + \log_{27}\dfrac{1}{(2+|z^2-i|)^3} = 0$.

Giải. 1) Giả sử $z = x+iy$. Khi đó từ điều kiện

$$|z| = \operatorname{Re} z + 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x+1 \Rightarrow y^2 = 2x+1.$$

Đó là phương trình parabôn với đỉnh tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ với trục đối xứng là tia

$$\gamma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geqslant -\frac{1}{2}, y = 0\right\}.$$

2) Giả sử $z = x + iy$. Khi đó từ điều kiện đã cho suy ra:

$$\begin{aligned}
&|x-1+iy| \geqslant 2|x+i(y-1)|\\
\Rightarrow&\sqrt{(x-1)^2+y^2} \geq 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}\\
\Rightarrow&\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{3}\right)^2 \leqslant \frac{8}{9}\cdot
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng điều kiện đã cho xác định hình tròn tâm $z_0 = -\frac{1}{3} + i\frac{4}{3}$ và bán kính $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3) Vì tam thức bậc hai (đối với u) ở vế trái của điều kiện đã cho dương $\forall\, u \in \mathbb{R}$ nên biệt số của nó âm, tức là

$$\begin{aligned}
&|z-2+i|^2 - |z-2+i| < 0\\
\Rightarrow&|z-2+i| < 1.
\end{aligned}$$

Đó là hình tròn với tâm tại $z_0 = 2 - i$ và bán kính bằng 1.

4) Từ điều kiện đã cho ta thu được

$$\begin{aligned}
&\log_3 \frac{2+|z^2+i|}{2+|z^2-i|} = 0\\
\Rightarrow&\frac{2+|z^2+i|}{2+|z^2-i|} = 1 \quad \text{và} \quad |z^2+i| = |z^2-i|.
\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng z^2 là số thực bất kỳ. Nhưng khi đó z là số thực bất kỳ hoặc số thuần ảo bất kỳ. Như vậy chỉ có các điểm nằm trên các trục tọa độ là thỏa mãn điều kiện đã cho. ▲

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2) $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

3) $|z_1 \pm z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$.

2. Xuất phát từ các biểu diễn hình học, chứng minh:

1) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leqslant |\arg z|$;

2) $|z - 1| \leqslant \big||z| - 1\big| + |z||\arg z|$.

3. Chứng minh rằng nếu giá trị chính $\arg z = \arg(a + ib)$ thỏa mãn điều kiện $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ thì nó được tính theo công thức

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{nếu } a > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0,\ b \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi & \text{nếu } a < 0,\ b < 0. \end{cases}$$

4. Chứng minh rằng nếu giá trị chính $\arg(a + ib)$ thỏa mãn điều kiện $0 \leqslant \arg(a + ib) < 2\pi$ thì

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{nếu } a > 0,\ b > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + 2\pi & \text{nếu } a > 0,\ b < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Chỉ dẫn. Lưu ý rằng giá trị chính của $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Chứng minh rằng $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 4|a|^2$ nếu $|a| = |b|$.

6. Chứng minh đồng nhất thức

$$|1 - \overline{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2, \quad a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}.$$

Chỉ dẫn. Sử dụng hệ thức $|z|^2 = z\overline{z}$.

7. Chứng minh đồng nhất thức

1) $|a+b|^2 = (|a|+|b|)^2 - 2\big[|a\overline{b}| - \mathrm{Re}(a\overline{b})\big]$.

2) $|a\overline{b}+1|^2 + |a-b|^2 = (|a|^2+1)(|b|^2+1)$.

8. Chứng minh rằng mọi số phức $z \neq -1$ và $|z| = 1$ đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$z = \frac{1+ti}{1-ti}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Chỉ dẫn. Biểu diễn t qua z và chứng minh $t = \overline{t}$.

9. Chứng minh rằng nếu $\mathrm{Re}a \geqslant 0$ thì $|1+a| \geqslant \dfrac{1+|a|}{\sqrt{2}}\cdot$

Chỉ dẫn. Có thể chứng minh bằng phản chứng.

10. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện

$$|z - 25i| \leqslant 15$$

hãy tìm số có acgument dương nhỏ nhất.

11. Tìm acgumen của các số phức sau đây

1) $\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot$ (*ĐS.* $-\dfrac{\pi}{6}$)

2) $-\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot$ (*ĐS.* $\dfrac{2\pi}{3}$)

3) $\cos\varphi - i\sin\varphi$. (ĐS. $-\varphi$)

4) $-\cos\varphi - i\sin\varphi$. (ĐS. $\pi + \varphi$)

5) $\sin\varphi + i\cos\varphi$. (ĐS. $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$)

6) $\sin\varphi - i\cos\varphi$. (ĐS. $\varphi - \dfrac{\pi}{2}$)

7) $-\sin\varphi - i\cos\varphi$. (ĐS. $\Big(-\dfrac{\pi}{2} - \varphi\Big)$)

1.4 Biểu diễn số phức dưới dạng lượng giác

Mọi số phức $z = a + ib \neq 0$ đều biểu diễn được dưới dạng

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.7}$$

trong đó $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ là một trong các acgumen của nó.

Phép biểu diễn đó được gọi là *dạng lượng giác* của số phức z. Để chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác ta chỉ cần tìm môđun và một trong các acgument của nó. Vì môđun và acgumen của tổng (hiệu) hai số phức khó có thể biểu diễn qua môđun và acgumen của các số hạng nên phép cộng và phép trừ dưới dạng lượng giác là không khả thi. Ngược lại, phép nhân, phép chia, phép nâng lên lũy thừa và khai căn được thực hiện rất tiện lợi dưới dạng lượng giác.

Giả sử $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Khi đó

1^+ $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

2^+ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, $r_2 \neq 0$.

3^+ $z^n = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

4^+ $w_k = \sqrt[n]{r}\Big[\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Từ 3^+ suy ra

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi]^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{1.8}$$

Công thức (1.8) được gọi là công thức Moivre.

Phép toán nâng số e lên luỹ thừa phức $z = x + iy$ được định nghĩa bởi công thức

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{def}{=} e^x(\cos y + i\sin y). \tag{1.9}$$

Chẳng hạn

$$\begin{aligned} e^{1+i} &= e(\cos 1 + i \sin 1), \\ e^{\pi i/2} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \\ e^{\pi i} &= \cos\pi + i\sin\pi = -1. \end{aligned}$$

Từ (1.9) khi $z = i\varphi$ ta thu được công thức

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \tag{1.10}$$

gọi là công thức Euler.

Mọi số phức $z \neq 0$ đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$z = re^{i\varphi}, \tag{1.11}$$

trong đó $r = |z|$, φ là một trong các acgumen của nó. Phép biểu diễn (1.11) được gọi là *dạng mũ của số phức*. Cũng như đối với dạng lượng giác ta có:

1/ nếu $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ thì

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.12}$$

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{1.13}$$

2/ nếu $z = re^{i\varphi}$ thì

$$z^n = r^ne^{in\varphi}, \tag{1.14}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \tag{1.15}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Biểu diễn các số phức sau đây dưới dạng lượng giác

1) $-1 + i\sqrt{3}$; 2) $2 + \sqrt{3} + i$.

Giải. 1) Tìm môđun và acgumen của số phức đã cho:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}\,.$$

Từ đó hoặc $\varphi = -\pi/3$, hoặc $\varphi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$. Vì số phức đã cho thuộc góc phần tư II nên ta chọn $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Từ đó $-1 + i\sqrt{3} = 2\Big[\cos\Big(\dfrac{2\pi}{3}\Big) i \sin\Big(\dfrac{2\pi}{3}\Big)\Big]$.

2) Tìm mođun và acgumen:

$$|2+\sqrt{3}+i| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Nếu $\varphi = \arg(2+\sqrt{3}+i)$ thì

$$\cos\varphi = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}} = \cos\frac{\pi}{12}\cdot$$

Từ đó suy rằng

$$2\sqrt{3}+i = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\Big] \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Biểu diễn các số phức dưới dạng lượng giác

1) $1+\cos\varphi + i\sin\varphi,\ \ -\pi < \varphi < \pi.$

2) $1+\cos\varphi + i\sin\varphi,\ \ \pi < \varphi < 2\pi.$

3) $w = \dfrac{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}{1+\cos\varphi - i\sin\varphi},\ \ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Giải. 1) Ta có

$$|z| = \sqrt{2(1+\cos\varphi)} = 2\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big| = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$

vì $-\pi < \varphi < \pi \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\varphi}{2} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{\varphi}{2} > 0.$

Giả sử $\alpha = \arg z$. Khi đó

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1+\cos\varphi}{2\cos\dfrac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}, \\ \sin\alpha &= \frac{\sin\varphi}{2\cos\dfrac{\varphi}{2}} = \sin\frac{\varphi}{2}\cdot \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\Big].$$

2) Trong trường hợp này ta có

$$r = |z| = \sqrt{2(1+\cos\varphi)} = 2\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big| = -2\cos\frac{\varphi}{2}$$

vì $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\varphi}{2} < \pi$. Giả sử $\alpha = \arg z$. Khi đó

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1+\cos\varphi}{-2\cos\dfrac{\varphi}{2}} = -\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\Big(\frac{\varphi}{2} - \pi\Big),\\ \sin\alpha &= \frac{\sin\varphi}{-2\cos\dfrac{\varphi}{2}} = -\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\Big(\frac{\varphi}{2} - \pi\Big).\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng

$$1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = -2\cos\frac{\varphi}{2}\Big[\cos\Big(\frac{\varphi}{2} - \pi\Big) + i\sin\Big(\frac{\varphi}{2} - \pi\Big)\Big].$$

3) Trước hết nhận xét rằng $|w| = 1$ vì tử số và mẫu số của nó có mođun bằng nhau. Ta tìm dạng lượng giác của tử số và mẫu số.

Xét tử số: $z_1 = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$

$$\begin{aligned}&|z_1| = \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,,\\ &\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big) = \frac{\varphi}{2} \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).\end{aligned}$$

Tương tự, đối với mẫu số

$$z_2 = 1 + \cos\varphi - i\sin\varphi$$

ta có

$$\begin{aligned}&|z_2| = \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,,\\ &\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg}\Big(\frac{-\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\Big)\\ &\quad = \operatorname{arctg}\Big(-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big) = \operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg}\Big(-\frac{\varphi}{2}\Big)\Big) = -\frac{\varphi}{2} \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).\end{aligned}$$

Từ đó thu được

$$z_2 = \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\Big[\cos\Big(-\frac{\varphi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\varphi}{2}\Big)\Big]$$

và do vậy

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} \times \frac{\Big(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\Big)}{\cos\Big(-\frac{\varphi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\varphi}{2}\Big)} \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 3. 1) Tính $(\sqrt{3}+i)^{126}$

2) Tính acgumen của số phức sau

$w = z^4 - \overline{z}^2$ nếu $\arg z = \varphi$ và $|z| = 1$.

Giải. 1) Ta có $\sqrt{3}+i = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big)$. Từ đó áp dụng công thức Moivre ta thu được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+i)^{126} &= 2^{126}\Big[\cos\frac{126\pi}{6} + i\sin\frac{126\pi}{6}\Big] \\ &= 2^{126}[\cos\pi + i\sin\pi] = -2^{126}. \end{aligned}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned} w = z^4 - \overline{z}^2 &= \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi - [\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi] \\ &= \cos 4\varphi - \cos 2\varphi + i(\sin 4\varphi + \sin 2\varphi) \\ &= -2\sin 3\varphi\sin\varphi + 2i\sin 3\varphi\cos\varphi \\ &= 2\sin 3\varphi[-\sin\varphi + i\cos\varphi]. \end{aligned}$$

(i) Nếu $\sin 3\varphi > 0$ (tức là khi $\frac{2k\pi}{3} < \varphi < \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$) thì

$$w = 2\sin 3\varphi\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{2}+\varphi\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\varphi\Big)\Big].$$

(ii) Nếu $\sin 3\varphi < 0$ (tức là khi $\frac{(2k-1)\pi}{3} < \varphi < \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$) thì

$$w = (-2\sin 3\varphi)[\sin\varphi - i\cos\varphi].$$

Ta tìm dạng lượng giác của $v = \sin\varphi - i\cos\varphi$. Hiển nhiên $|v| = 1$. Ta tính $\arg v$

$$\begin{aligned}\arg v &= \mathrm{arctg}\Big(\frac{-\cos\varphi}{\sin\varphi}\Big) = \mathrm{arctg}(-\mathrm{cotg}\varphi)\\ &= \mathrm{arctg}\Big[-\mathrm{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)\Big] = \mathrm{arctg}\Big[\mathrm{tg}\Big(\varphi - \frac{\pi}{2}\Big)\Big]\\ &= \varphi - \frac{\pi}{2}\cdot\end{aligned}$$

Như vậy nếu $\sin 3\varphi < 0$ thì

$$w = (-2\sin 3\varphi)\Big[\cos\Big(\varphi - \frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(\varphi - \frac{\pi}{2}\Big)\Big].$$

(iii) Nếu $\sin 3\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{k\pi}{3} \Rightarrow w = 0$.
Như vậy

$$\arg w = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2} + \varphi & \text{nếu } \dfrac{2k\pi}{3} < \varphi < \dfrac{(2k+1)\pi}{3},\\ \text{không xác định} & \text{nếu } \varphi = \dfrac{k\pi}{3},\\ \varphi - \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } \dfrac{(2k-1)\pi}{3} < \varphi < \dfrac{2k\pi}{3}\cdot\end{cases}$$ ▲

Ví dụ 4. Chứng minh rằng

1) $\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{3\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{7\pi}{9} = \dfrac{1}{2}$.

2) $\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \cdots + \cos(\varphi + n\alpha)$
$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\cos\Big(\varphi + \dfrac{n\alpha}{2}\Big)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cdot$$

Giải. 1) Đặt

$$\begin{aligned}S &= \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{7\pi}{9},\\ T &= \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{3\pi}{9} + \cdots + \sin\frac{7\pi}{9},\\ z &= \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$
\begin{aligned}
S + iT &= z + z^3 + z^5 + z^7 = \frac{z(1-z^8)}{1-z^2}\\
&= \frac{z - z^9}{1-z^2} = \frac{z+1}{1-z^2} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{\left(1-\cos\frac{\pi}{9}\right) - i\sin\frac{\pi}{9}}\\
&= \frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\frac{\pi}{9}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{9}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{9}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{\pi}{9}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{9}\right)}\cdot
\end{aligned}
$$

Do đó $S = \dfrac{1}{2}\cdot$

2) Tương tự như trong 1) ta ký hiệu

$$
\begin{aligned}
S &= \cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cdots + \cos(\varphi + n\alpha),\\
T &= \sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \cdots + \sin(\varphi + n\alpha),\\
z &= \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad c = \cos\varphi + i\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Khi đó

$$
\begin{aligned}
&S + iT = c + cz + \cdots + cz^n = \frac{c(1-z^{n+1})}{1-z}\\
&= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)[1 - \cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha]}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}\\
&= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\left[\cos\frac{(n+1)\alpha - \pi}{2} + i\sin\frac{(n+1)\alpha-\pi}{2}\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha-\pi}{2}\right]}\\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi + \frac{n\alpha}{2}\right.}{\sin\frac{\alpha}{2}}i.
\end{aligned}
$$

Từ đó so sánh phần thực và phần ảo ta thu được kết quả. ▲

Bằng phương pháp tương tự ta có thể tính các tổng dạng

$$
\begin{aligned}
&a_1\sin b_1 + a_2\sin b_2 + \cdots + a_n\sin b_n,\\
&a_1\cos b_1 + a_2\cos b_2 + \cdots + a_n\cos b_n
\end{aligned}
$$

nếu các acgumen $b_1, b_2, \dots, b_n$ lập nên cấp số cộng còn các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_n$ lập nên cấp số nhân.

Ví dụ 5. Tính tổng

1) $S_n = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \dots + a^n\cos n\varphi$;

2) $T_n = a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \dots + a^n\sin n\varphi$.

Giải. Ta lập biểu thức $S_n + iT_n$ và thu được

$$\begin{aligned}\Sigma = S_n + iT_n = 1 + a(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \dots\\ + a^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).\end{aligned}$$

Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ và áp dụng công thức Moivre ta có:

$$\begin{aligned}\Sigma &= 1 + az + a^2z^2 + \dots + a^nz^n = \frac{a^{n+1}z^{n+1} - 1}{az - 1}\\ &\quad\text{(nhân tử số và mẫu số với } \frac{a}{z} - 1)\\ &= \frac{a^{n+2}z^n - a^{n+1}z^{n+1} - \dfrac{a}{2} + 1}{a^2 - a\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) + 1}\\ &\quad\text{(do } z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi)\\ &= \frac{a^{n+2}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) - a^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi]}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}\\ &\quad + \frac{-a\cos\varphi + ai\sin\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}\\ &= \frac{a^{n+2}\cos n\varphi - a^{n+1}\cos(n+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1} +\\ &\quad + i\frac{a^{n+2}\sin n\varphi - a^{n+1}\sin(n+1)\varphi + a\sin\varphi}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}.\end{aligned}$$

Bằng cách so sánh phần thực và phần ảo ta thu được các kết quả cần được tính.

Ví dụ 6. 1) Biểu diễn tg5φ qua tgφ.

2) Biểu diễn tuyến tính $\sin^5\varphi$ qua các hàm sin của góc bội của φ.

3) Biểu diễn $\cos^4\varphi$ và $\sin^4\varphi\cdot\cos^3\varphi$ qua hàm cosin của các góc bội.

Giải. 1) Vì $\mathrm{tg}5\varphi = \dfrac{\sin 5\varphi}{\cos 5\varphi}$ nên ta cần biểu diễn $\sin 5\varphi$ và $\cos 5\varphi$ qua $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$. Theo công thức Moivre ta có

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 &= \sin^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi\\ &- 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi\\ &+ 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi.\end{aligned}$$

Tách phần thực và phần ảo ta thu được biểu thức đối với $\sin 5\varphi$ và $\cos 5\varphi$ và từ đó

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}5\varphi &= \frac{5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi}\\ &\qquad(\text{chia tử số và mẫu số cho } \cos^5\varphi)\\ &= \frac{5\mathrm{tg}\varphi - 10\mathrm{tg}^3\varphi + \mathrm{tg}^5\varphi}{1 - 10\mathrm{tg}^2\varphi + 5\mathrm{tg}^4\varphi}.\end{aligned}$$

2) Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Khi đó $z^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ và theo công thức Moivre:

$$z^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi, \quad z^{-k} = \cos k\varphi - i\sin k\varphi.$$

Do đó

$$\cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$
$$z^k + z^{-k} = 2\cos k\varphi, \quad z^k - z^{-k} = 2i\sin k\varphi.$$

Áp dụng các kết quả này ta có

$$\begin{aligned}\sin^5\varphi = \Big(\frac{z - z^{-1}}{2i}\Big)^5 &= \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i}\\ &= \frac{(z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})}{32i}\\ &= \frac{2i\sin 5\varphi - 10i\sin 3\varphi + 20i\sin\varphi}{32i}\\ &= \frac{\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi}{16}.\end{aligned}$$

3) Tương tự như trong phần 2) hoặc giải theo cách sau đây

$$1^+\quad \cos^4\varphi = \Big(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\Big)^4 = \frac{1}{16}\big[e^{4i\varphi}+4e^{2i\varphi}+6+4e^{-2i\varphi}+e^{-4i\varphi}\big]$$
$$= \frac{1}{8}\Big[\frac{e^{4\varphi i}+e^{-4\varphi i}}{2}\Big]+\frac{1}{2}\Big[\frac{e^{2\varphi i}+e^{-2\varphi i}}{2}\Big]+\frac{3}{8}$$
$$= \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi.$$

$$2^+\quad \sin^4\varphi\cos^3\varphi = \Big(\frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i}\Big)^4\Big(\frac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}}{2}\Big)^3$$
$$= \frac{1}{128}\big(e^{2\varphi i}-e^{-2\varphi i}\big)^3\big(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}\big)$$
$$= \frac{1}{128}\big[e^{6\varphi i}-3e^{2\varphi i}+3e^{-2\varphi i}-e^{-6\varphi i}\big]\big[e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}\big]$$
$$= \frac{1}{128}\Big[e^{7\varphi i}-e^{5\varphi i}-3e^{3\varphi i}+3e^{\varphi i}+3e^{-\varphi_i}-3e^{-3\varphi i}$$
$$-e^{-5\varphi i}+e^{-7\varphi i}\Big]$$
$$= \frac{3}{64}\cos\varphi-\frac{3}{64}\cos 3\varphi-\frac{1}{64}\cos 5\varphi-\frac{1}{64}\cos 7\varphi.\ \blacktriangle$$

Ví dụ 7. 1) Giải các phương trình

1^+ $(x+1)^n-(x-1)^n=0$

2^+ $(x+i)^n+(x-i)^n=0,\ \ n>1.$

2) Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình

$$\Big(\frac{1+ix}{1-ix}\Big)^n = \frac{1+ai}{1-ai},\qquad n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}$$

đều là nghiệm thực khác nhau.

Giải. 1) Giải phương trình

1^+ Chia hai vế của phương trình cho $(x-1)^n$ ta được

$$\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^n = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_k,$$
$$k=0,1,\dots,n-1.$$

Từ đó suy rằng

$$x + 1 = \varepsilon_k(x - 1) \Rightarrow x(\varepsilon_k - 1) = 1 + \varepsilon_k.$$

Khi $k = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 = 1$. Do đó với $k = 0$ phương trình vô nghiệm. Với $k = \overline{1, n-1}$ ta có

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1} = \frac{(\varepsilon_k + 1)(\overline{\varepsilon}_k - 1)}{\varepsilon_k - 1)(\overline{\varepsilon}_k - 1)} = \frac{\varepsilon_k\overline{\varepsilon}_k + \overline{\varepsilon}_k - \varepsilon_k - 1}{\varepsilon_k\overline{\varepsilon}_k - \varepsilon_k - \overline{\varepsilon}_k - 1} \\ &= \frac{-2i\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{2 - 2\cos\dfrac{2k\pi}{n}} = -i\frac{\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{1 - \cos\dfrac{2k\pi}{n}} = i\text{cotg}\frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

2^+ Cũng như trên, từ phương trình đã cho ta có

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = -1 \Longleftrightarrow \frac{x+i}{x-i} = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{n}$$

hay là

$$\begin{aligned} \frac{x+i}{x-i} &= \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \\ &= \cos\psi + i\sin\psi, \qquad \psi = \frac{(2k+1)\pi}{n}\cdot \end{aligned}$$

Ta biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned} &\frac{x+i}{x-i} - 1 = \cos\psi + i\sin\psi - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2i}{x-i} = 2i\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - 2\sin^2\frac{\psi}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x-i} = \sin\frac{\psi}{2}\Big[\cos\frac{\psi}{2} - \frac{1}{i}\sin\frac{\psi}{2}\Big] \\ &\qquad\quad = \sin\frac{\psi}{2}\Big[\cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\Big]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$x - i = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}\Big[\cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\Big]}$$
$$= \frac{\cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} = \mathrm{cotg}\frac{\psi}{2} - i.$$

Như vậy

$$x - i = \mathrm{cotg}\frac{\psi}{2} - i \Rightarrow x = \mathrm{cotg}\frac{\psi}{2} = \mathrm{cotg}\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

2) Ta xét vế phải của phương trình đã cho. Ta có

$$\Big|\frac{1+ai}{1-ai}\Big| = 1 \Rightarrow \frac{1+ai}{1-ai} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

và từ đó

$$\frac{1+xi}{1-xi} = \sqrt[n]{\frac{1+ai}{1-ai}} = \cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Từ đó nếu đặt $\psi = \dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$ thì

$$x = \frac{\cos\psi - 1 + i\sin\psi}{i[\cos\psi + 1 + i\sin\psi]} = \mathrm{tg}\frac{\psi}{2} = \mathrm{tg}\frac{\alpha+2k\pi}{2n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Rõ ràng đó là những nghiệm thực khác nhau. ▲

Ví dụ 8. Biểu diễn các số phức sau đây dưới dạng mũ:

1) $z = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)\Big(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\Big)}{1-i}$.

2) $z = \sqrt{\sqrt{3}+i}$.

Giải. 1) Đặt $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$, $z_3 = 1 - i$ và biểu diễn các số phức đó dưới dạng mũ. Ta có

$$\begin{aligned}
&z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i};\\
&z_2 = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} = \cos\Big(-\frac{\pi}{12}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{12}\Big) = e^{-\frac{\pi}{12}i};\\
&z_3 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.
\end{aligned}$$

Từ đó thu được

$$z = \frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i}\cdot e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{i\pi}.$$

2) Trước hết biểu diễn số phức $z_1 = \sqrt{3} + i$ dưới dạng mũ. Ta có

$$|z_1| = 2; \quad \varphi = \arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}\,,$$

do đó $\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$. Từ đó thu được

$$\begin{aligned}
w_k = \sqrt[4]{\sqrt{3} + i} &= \sqrt[4]{2}e^{i\frac{(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)}{4}}\\
&= \sqrt[4]{2}e^{i\frac{(12k+1)\pi}{24}}, \quad k = \overline{0,3}. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ví dụ 9. Tính các giá trị

1) căn bậc 3: $w = \sqrt[3]{-2 + 2i}$

2) căn bậc 4: $w = \sqrt[4]{-4}$

3) căn bậc 5: $w = \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{3} - i}{8 + 8i}}$.

Giải. Phương pháp tốt nhất để tính giá trị các căn thức là biểu diễn số phức dưới dấu căn dưới dạng lượng giác (hoặc dạng mũ) rồi áp dụng các công thức tương ứng.

1) Biểu diễn $z = -2 + 2i$ dưới dạng lượng giác. Ta có

$$r = |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; \quad \varphi = \arg(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4}\cdot$$

Do đó

$$w_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\Big[\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\Big], \quad k=\overline{0,2}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = 1+i,\\
w_1 &= \sqrt{2}\Big[\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\Big],\\
w_2 &= \sqrt{2}\Big[\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\Big].
\end{aligned}$$

2) Ta có

$$-4 = 4[\cos\pi + i\sin\pi]$$

và do đó

$$w_k = \sqrt[4]{4}\Big[\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\Big], \quad k=\overline{0,3}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = 1+i,\\
w_1 &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big) = -1+i,\\
w_2 &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\Big) = -1-i,\\
w_3 &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\Big) = 1-i.
\end{aligned}$$

3) Đặt

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{8+8i}\cdot$$

Khi đó $|z| = \dfrac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{64+64}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$. Ta tính $\arg z$. Ta có

$$\arg z = \arg(\sqrt{3}-i) - \arg(8+8i) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12}\cdot$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)}\left[\cos\frac{-\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{-\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi}{5}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{5}\right)\right], \quad k=\overline{0,4}. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ví dụ 10. 1) Tính tổng mọi căn bậc n của 1.

2) Tính tổng $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\cdots+n\varepsilon^{n-1}$, trong đó ε là căn bậc n của đơn vị.

3) Tính tổng các luỹ thừa bậc k của mọi căn bậc n của số phức α.

Giải. 1) Đầu tiên ta viết các căn bậc n của 1. Ta có

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k=\overline{0,n-1}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\\
&\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\\
&\quad = \left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \varepsilon^k, \quad k=1,2,\dots,n-1.
\end{aligned}$$

Như vậy mọi nghiệm của căn bậc n của 1 có thể viết dưới dạng

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\dots,\varepsilon^{n-1}.$$

Bây giờ ta tính

$$S = 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1} = \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\cdot$$

Nếu $n>1$ thì $\varepsilon^n=1$ và do đó

$$S = \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} = 0.$$

2) Ta ký hiệu tổng cần tính là S. Ta xét biểu thức

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)S = S - \varepsilon S &= 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}\\ &\quad - \varepsilon - 2\varepsilon^2 - \cdots - (n-1)\varepsilon^{n-1} - n\varepsilon^n\\ &= \underbrace{1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}}_{0(\varepsilon\neq 1)} - n\varepsilon^n = -n\end{aligned}$$

vì $\varepsilon^n = 1$.

Như vậy

$$(1-\varepsilon)S = -n \to S = \frac{-n}{1-\varepsilon} \quad \text{nếu } \varepsilon \neq 1.$$

Nếu $\varepsilon = 1$ thì

$$S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

3) Giả sử β_0 là một trong các giá trị căn của α. Khi đó (với $\alpha \neq 0$) mọi căn bậc n của α có thể biểu diễn dưới dạng tích $\beta_0\varepsilon_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, trong đó $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ là căn bậc n của 1.

Từ đó tổng cần tìm S bằng

$$\begin{aligned}S &= \beta_0^k + (\beta_0\varepsilon_1)^k + (\beta_0\varepsilon_2)^k + \cdots + (\beta_0\varepsilon_{n-1})^k\\ &= \beta_0^k(1 + \varepsilon_1^k + \varepsilon_2^k + \cdots + \varepsilon_{n-1}^k)\\ &\quad\left(\varepsilon_m^k = \left(\cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}\right)^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{mk}\right)\\ &= \beta_0^k\Big[1 + \varepsilon_1^k + \varepsilon_1^{2k} + \cdots + \varepsilon_1^{(n-1)k}\Big].\end{aligned}$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông là cấp số nhân. Nếu $\varepsilon_1^k \neq 1$, tức là k không chia hết cho n thì

$$S = \beta_0^k\frac{1-\varepsilon_1^{nk}}{1-\varepsilon_1^k} = \beta_0^k\frac{1-1}{1-\varepsilon_1^k} = 0 \quad (\text{vì } \varepsilon_1^n = 1).$$

Nếu $\varepsilon_1^k = 1$ tức là k chia hết cho n, $k = nq$ thì

$$S = \beta_0^{nq}[1 + 1 + \cdots + 1] = \beta_0^{nq} n = n\alpha^q \quad (\text{vì } \beta_0^n = \alpha).$$

Như vậy

$$S = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } n; \\ n\alpha^q & \text{nếu } k = nq,\ q \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

1. Biểu diễn các số phức sau đây dưới dạng lượng giác

1) $-1 + i\sqrt{3}$ (ĐS. $2\Big(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\Big)$)

2) $\sqrt{3} - i$ (ĐS. $2\Big(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\Big)$)

3) $-\sqrt{3} - i$ (ĐS. $2\Big(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\Big)$)

4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ (ĐS. $\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$)

5) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ (ĐS. $\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$)

6) $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ĐS. $\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}$)

7) $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ĐS. $\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$)

8) $2 + \sqrt{3} - i$ (ĐS. $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big[\cos\dfrac{23\pi}{12} + i\sin\dfrac{23\pi}{12}\Big]$)

9) $2 - \sqrt{3} - i$ (ĐS. $2\sqrt{2-\sqrt{3}}\Big[\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12}\Big]$)

2. Biểu diễn các số phức sau đây dưới dạng lượng giác

1) $-\cos\varphi + i\sin\varphi$ (ĐS. $\cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)$)

2) $-\sin\varphi + i\cos\varphi$ (ĐS. $\cos\Big(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\Big) + i\sin\Big(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\Big)$)

3) $\cos\varphi - i\sin\varphi$ (ĐS. $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$)

4) $-\cos\varphi - i\sin\varphi$ (ĐS. $\cos(\pi+\varphi) + i\sin(\pi+\varphi)$)

Bằng cách đặt $\alpha = \theta + 2k\pi$, trong đó $0 \leqslant \theta < 2\pi$, ta có:

5) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ (ĐS. $2\cos\dfrac{\theta}{2}\Big[\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\Big]$ với $0 \leqslant \theta < \pi$;

$-2\cos\dfrac{\theta}{2}\Big[\cos\dfrac{\theta+2\pi}{2} + i\sin\dfrac{\theta+2\pi}{2}\Big]$ với $\pi \leqslant \theta < 2\pi$)

6) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ (ĐS. $2\sin\dfrac{\theta}{2}\Big[\cos\dfrac{\pi-\theta}{2} + i\sin\dfrac{\pi-\theta}{2}\Big]$)

7) $\sin\alpha + i(1+\cos\alpha)$

(ĐS. $2\cos\dfrac{\theta}{2}\Big[\cos\dfrac{\pi-\theta}{2} + i\sin\dfrac{\pi-\theta}{2}\Big]$ với $0 \leqslant \theta < \pi$;

$-2\cos\dfrac{\theta}{2}\Big[\cos\dfrac{3\pi-\theta}{2} + i\sin\dfrac{3\pi-\theta}{2}\Big]$ với $\pi \leqslant \theta < 2\pi$)

8) $-\sin\alpha + i(1+\cos\alpha)$

(ĐS. $2\cos\dfrac{\theta}{2}\Big[\cos\dfrac{\pi+\theta}{2} + i\sin\dfrac{\pi+\theta}{2}\Big]$ với $0 \leqslant \theta < \pi$;

$-2\cos\dfrac{\theta}{2}\Big[\cos\dfrac{3\pi+\theta}{2} + i\sin\dfrac{3\pi+\theta}{2}\Big]$ với $\pi \leqslant \theta < 2\pi$)

3. Tính:

1) $\Big(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\Big)^{100}$ (ĐS. $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

2) $\Big(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\Big)^{12}$ (ĐS. 2^{12})

3) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{(-1+i)^8 - (1+i)^4}$ (ĐS. $-3, 2$)

4) $\dfrac{(-i-\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-i+\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$ (ĐS. $-64i$)

5) $\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}+(1+i)^{96}}$ (ĐS. -2)

6) $\dfrac{(1+i\mathrm{cotg}\varphi)^5}{1-i\mathrm{cotg}\varphi)^5}$ (ĐS. $\cos(\pi-10\varphi) + i\sin(\pi-10\varphi)$)

7) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$

(ĐS. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big[\cos\Big(6\varphi-\dfrac{\pi}{12}\Big) + i\sin\Big(6\varphi - \dfrac{\pi}{12}\Big)\Big]$)

8) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{3n}}{(1+i)^{4n}}$ (ĐS. 2)

4. Chứng minh rằng $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\varphi \Rightarrow z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

5. Hãy biểu diễn các hàm sau đây qua $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$

1) $\sin 3\varphi$ (ĐS. $3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$)

2) $\cos 3\varphi$ (ĐS. $\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$)

3) $\sin 4\varphi$ (ĐS. $4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$)

4) $\cos 4\varphi$ (ĐS. $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$)

6. Hãy biểu diễn các hàm sau qua $\mathrm{tg}x$

1) $\mathrm{tg}4\varphi$ (ĐS. $\dfrac{4\mathrm{tg}\varphi - 4\mathrm{tg}^3\varphi}{1 - 6\mathrm{tg}^2\varphi + \mathrm{tg}^4\varphi}$)

2) $\mathrm{tg}6\varphi$ (ĐS. $\dfrac{6\mathrm{tg}\varphi - 20\mathrm{tg}^3\varphi + 6\mathrm{tg}^5\varphi}{1 - 15\mathrm{tg}^2\varphi + 15\mathrm{tg}^4\varphi - \mathrm{tg}^6\varphi}$)

7. Chứng minh rằng

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot$$
$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot$$

Chỉ dẫn. Tính $(1+i)^n$ bằng cách sử dụng công thức Moivre và sử dụng công thức nhị thức Newton rồi so sánh phần thực và phần ảo các số thu được.

8. Chứng minh rằng

1) $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$

2) $\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$

3) $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}$

4) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$

5) $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{6\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = -\dfrac{1}{2}$

9. Giải phương trình

$$\left(\frac{i-x}{i+x}\right)^n = \frac{\mathrm{cotg}\alpha + i}{\mathrm{cotg}\alpha - i}, \quad n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$(\text{ĐS. } x = \mathrm{tg}\frac{\alpha + k\pi}{n}, \ \ k = \overline{0, n-1})$$

10. Chứng minh rằng nếu A là số phức có môđun $= 1$ thì mọi nghiệm của phương trình

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = A$$

đều là nghiệm thực và khác nhau.

11. Giải phương trình

$$x^n - nax^{n-1} - C_n^2 a^2 x^{n-2} - \cdots - a^n = 0.$$

$$(\text{ĐS. } x_k = \frac{a}{\varepsilon_k\sqrt{2} - 1}, \ \ k = \overline{0, n-1})$$

Chỉ dẫn. Dùng công thức nhị thức Newton để đưa phương trình về dạng $x^n = (x+a)^n - x^n$.

12. Giải phương trình

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

$$(\text{ĐS. } x_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}, \ \ k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

13. Giải phương trình

$$x^5 + \alpha x^4 + \alpha^2 x^3 + \alpha^3 x^2 + \alpha^4 x + \alpha^5 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0.$$

$$(\text{ĐS. } x_k = \alpha\Big[\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\Big], \ \ k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Chỉ dẫn. Vế trái là tổng cấp số nhân với công bội bằng $\dfrac{\alpha}{x}$.

14. Giả sử $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$. Giải các phương trình sau đây

1) $(x+c)^n - (x-c)^n = 0$ (ĐS. $x = -c\,\text{cotg}\dfrac{k\pi}{n}$, $k = \overline{1, n-1}$)

2) $(x+ci)^n - (x-ci)^n = 0$ (ĐS. $x = -ci\,\text{cotg}\dfrac{k\pi}{n}$, $k = \overline{1, n-1}$)

3) $(x+ci)^n + i(x-ci)^n = 0$

(ĐS. $x = -ci\,\text{cotg}\dfrac{(3+4k)\pi}{4n}$, $k = \overline{0, n-1}$)

4) $(x+ci)^n - (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x-ci)^n = 0$, $\alpha \neq 2k\pi$.

(ĐS. $x = -ci\,\text{cotg}\dfrac{\alpha + 2k\pi}{2n}$, $k = \overline{0, n-1}$)

15. Tính

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right].$$

$$(\text{ĐS. } D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}})$$

16. 1) Biểu diễn $\cos 5x$ và $\sin 5x$ qua $\cos x$ và $\sin x$.

2) Tính $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ và $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

(ĐS. 1) $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$,

$\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x$.

2) $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$)

Chỉ dẫn. Để tính $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ cần sử dụng biểu thức của $\sin 5x$.

Chương 2

Đa thức và hàm hữu tỷ

2.1 Đa thức

Đa thức một biến với hệ số thuộc trường số $\mathcal{P}$ được biểu diễn đơn trị dưới dạng tổng hữu hạn

$$Q(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{2.1}$$

trong đó z là biến, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số; và mỗi tổng dạng (2.1) đều là đa thức.

Ký hiệu: $Q(z) \in \mathcal{P}[z]$.

Nếu $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ thì người ta nói rằng $Q(z)$ là đa thức trên trường số phức: $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Nếu $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ thì $Q(z)$ là đa thức trên trường số thực: $Q(z) \in \mathbb{R}[z]$.

Nếu $Q(z) \neq 0$ thì bậc của nó (ký hiệu $\deg Q(z)$) là số mũ cao nhất của mọi luỹ thừa của các số hạng $\neq 0$ của đa thức và hệ số của số hạng có luỹ thừa cao nhất đó gọi là *hệ số cao nhất*.

Nếu $P(z)$ và $Q(z) \in \mathcal{P}[z]$ là cặp đa thức và $Q(z) \neq 0$ thì tồn tại cặp đa thức $h(z)$ và $r(z) \in \mathcal{P}[z]$ sao cho

1^+ $P = Qh + r$,

2^+ hoặc $r(z) = 0$, hoặc $\deg r < \deg Q$.

Định lý Bézout. *Phần dư của phép chia đa thức $P(z)$ cho nhị thức $z - \alpha$ là hằng $P(\alpha)$ $(r = P(\alpha))$.*

2.1.1 Đa thức trên trường số phức $\mathbb{C}$

Giả sử $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$. Nếu thay z bởi số α thì ta thu được số phức

$$Q(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n.$$

Định nghĩa 2.1.1. Nếu $Q(\alpha) = 0$ thì số $z = \alpha$ được gọi là *nghiệm* của đa thức $Q(z)$ hay của phương trình đại số $Q(z) = 0$.

Định lý Descate. *Đa thức $Q(z)$ chia hết cho nhị thức $z - \alpha$ khi và chỉ khi α là nghiệm của đa thức $P(z)$ (tức là $P(\alpha) = 0$).*

Định nghĩa 2.1.2. Số phức α là nghiệm bội m của đa thức $Q(z)$ nếu và chỉ nếu $Q(z)$ chia hết cho $(z - \alpha)^m$ nhưng không chia hết cho $(z - \alpha)^{m+1}$. Số m được gọi là *bội* của nghiệm α. Khi $m = 1$, số α gọi là *nghiệm đơn* của $Q(z)$.

Trong tiết 2.1.1 ta biết rằng tập hợp số phức $\mathbb{C}$ được lập nên bằng cách ghép thêm vào cho tập hợp số thực $\mathbb{R}$ một nghiệm ảo $x = i$ của phương trình $x^2 + 1 = 0$ và một khi đã ghép i vào thì mọi phương trình đa thức đều có *nghiệm phức thực sự*. Do đó không cần phải sáng tạo thêm các số mới để giải phương trình (vì thế $\mathbb{C}$ còn được gọi là trường đóng đại số).

Định lý Gauss (định lý cơ bản của đại số).

Mọi đa thức đại số bậc n $(n \geqslant 1)$ *trên trường số phức đều có ít nhất một nghiệm phức.*

Từ định lý Gauss rút ra các hệ quả sau.

1^+ Mọi đa thức bậc n $(n \geqslant 1)$ trên trường số phức đều có đúng n nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó, tức là

$$Q(x) = a_0(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\cdots(z-\alpha_k)^{m_k}, \tag{2.2}$$

trong đó $\alpha_i \neq \alpha_j \ \ \forall\, i \neq j$ và $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

Đa thức (2.1) với hệ số cao nhất $a_0 = 1$ được gọi là *đa thức thu gọn.*

2^+ Nếu z_0 là nghiệm bội m của đa thức $Q(z)$ thì số phức liên hợp với nó $\overline{z}_0$ là nghiệm bội m của đa thức liên hợp $\overline{Q}(z)$, trong đó đa thức $\overline{Q}(z)$ được xác định bởi

$$\overline{Q}(z) \overset{def}{=} \overline{a}_0 z^n + \overline{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1} z + \overline{a}_n. \tag{2.3}$$

2.1.2 Đa thức trên trường số thực $\mathbb{R}$

Giả sử

$$Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{2.4}$$

là đa thức quy gọn với hệ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Đa thức này có tính chất đặc biệt sau đây.

Định lý 2.1.1. *Nếu số phức α là nghiệm bội m của đa thức* (2.4) *với hệ số thực thì số phức liên hợp với nó $\overline{\alpha}$ cũng là nghiệm bội m của đa thức đó.*

Sử dụng định lý trên đây ta có thể tìm khai triển đa thức với hệ số thực $Q(z)$ thành tích các thừa số. Về sau ta thường chỉ xét đa thức với hệ số thực với biến chỉ nhận giá trị thực nên biến đó ta ký hiệu là x thay cho z.

Định lý 2.1.2. *Giả sử đa thức $Q(x)$ có các nghiệm thực $b_1, b_2, \dots, b_m$ với bội tương ứng $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ và các cặp nghiệm phức liên hợp a_1 và $\overline{a}_1$, a_2 và $\overline{a}_2, \dots, a_n$ và $\overline{a}_n$ với bội tương ứng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Khi đó*

$$\begin{aligned} Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1}(x - b_2)^{\beta_2} \cdots (x - b_m)^{\beta_m}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} \times \\ \times (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \cdots (x^2 + p_n x + q_b)^{\lambda_n}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Định lý 2.1.3. *Nếu đa thức $Q(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ với hệ số nguyên và với hệ số cao nhất bằng 1 có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó là số nguyên.*

Đối với đa thức với hệ số hữu tỷ ta có

Định lý 2.1.4. *Nếu phân số tối giản $\dfrac{\ell}{m}$ $(\ell, m \in \mathbb{Z}, m > 0)$ là nghiệm hữu tỷ của phương trình với hệ số hữu tỷ $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ thì ℓ là ước của số hạng tự do a_n và m là ước của hệ số cao nhất a_0.*

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$. Chứng minh rằng:

1^+ Nếu $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ thì $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$.

2^+ Nếu $P(z) \in \mathbb{R}[z]$ thì $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

Giải. 1^+ Áp dụng các tính chất của phép toán lấy liên hợp ta thu được

$$\begin{aligned} \overline{p(Z)} &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n} \\ &= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \dots + \overline{a_{n-1}z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a}_0(\overline{z})^n + \overline{a}_1(\overline{z})^{n-1} + \dots + \overline{a}_{n-1}\overline{z} + \overline{a}_n = \overline{P}(\overline{z}). \end{aligned}$$

2^+ Giả sử $P(z) \in \mathbb{R}[z]$. Khi đó

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n}\\ &= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}z} + \overline{a_n}\\ &= \overline{a}_0(\overline{z})^n + \overline{a}_1(\overline{z})^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1}\overline{z} + \overline{a}_n\\ &= a_0(\overline{z})^n + a_1(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\overline{z} + a_n = P(\overline{z}).\end{aligned}$$

Từ đó cũng thu được $P(z) = \overline{P(\overline{z})}$ vì $\overline{\overline{P(z)}} = P(z)$. ▲

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu a là nghiệm bội m của đa thức

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

thì số phức liên hợp $\overline{a}$ là nghiệm bội m của đa thức

$$\overline{P}(z) = \overline{a}_0 z^n + \overline{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1}z + \overline{a}_n$$

(gọi là đa thức liên hợp phức với đa thức $P(z)$).

Giải. Từ ví dụ 1 ta có

$$\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z}). \tag{2.6}$$

Vì a là nghiệm bội m của $P(z)$ nên

$$P(z) = (z-a)^m Q(z), \quad Q(a) \neq 0 \tag{2.7}$$

trong đó $Q(z)$ là đa thức bậc $n-m$. Từ (2.6) và (2.7) suy ra

$$\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{(z-a)^m Q(z)} = (\overline{z}-\overline{a})^m \overline{Q}(\overline{z}). \tag{2.8}$$

Ta còn cần chứng minh rằng $\overline{Q}(\overline{a}) \neq 0$. Thật vậy, nếu $\overline{Q}(\overline{a}) = 0$ thì bằng cách lấy liên hợp phức một lần nữa ta có

$$\overline{\overline{Q}(\overline{a})} = \overline{\overline{Q}}(\overline{\overline{a}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(a) = 0.$$

Điều này vô lý. Bằng cách đặt $t = \overline{z}$, từ (2.8) thu được

$$\overline{P}(t) = (t-\overline{a})^m \overline{Q}(t), \quad \overline{Q}(\overline{a}) \neq 0.$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng $t = \overline{a}$ là nghiệm bội m của đa thức $\overline{P}(t)$. ▲

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu a là nghiệm bội m của đa thức với hệ số thực $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ thì số phức liên hợp $\overline{a}$ cũng là nghiệm bội m của chính đa thức đó.

Giải. Từ ví dụ 1, 2^+ ta có

$$\overline{P(z)} = P(\overline{z}) \tag{2.9}$$

và do a là nghiệm bội m của nó nên

$$P(z) = (z-a)^m Q(z) \tag{2.10}$$

trong đó $Q(z)$ là đa thức bậc $n - m$ và $Q(a) \neq 0$.

Ta cần chứng minh rằng

$$P(z) = (z - \overline{a})^m Q(z), \quad Q(\overline{a}) \neq 0. \tag{2.11}$$

Thật vậy từ (2.9) và (2.10) ta có

$$\begin{aligned} P(z) &= \overline{(\overline{z}-a)^m Q(\overline{z})} = \overline{(\overline{z}-a)^m} \cdot \overline{Q(\overline{z})} \\ &= \left[\overline{(\overline{z}-a)}\right]^m \overline{Q(\overline{z})} = (z-\overline{a})^m Q(z) \end{aligned}$$

vì theo (2.9)

$$Q(\overline{z}) = \overline{Q(z)} \Rightarrow Q(z) = \overline{Q(\overline{z})}.$$

Ta còn cần chứng minh $Q(\overline{a}) \neq 0$. Thật vậy vì $Q(a) \neq 0$ nên $\overline{Q(a)} \neq 0$ và do đó $Q(\overline{a}) \neq 0$ vì đối với đa thức với hệ số thực thì $\overline{Q(t)} = Q(\overline{t})$. ▲

Ví dụ 4. Giải phương trình $z^3 - 4z^2 + 4z - 3 = 0$.

Giải. Từ định lý 4 suy rằng các nghiệm nguyên của phương trình với hệ số nguyên đều là ước của số hạng tự do $a = -3$. Số hạng tự do

$a = -3$ có các ước là ± 1, ± 3. Bằng cách kiểm tra ta thu được $z_0 = 3$ là nghiệm nguyên. Từ đó

$$\begin{aligned} z^3 - 4z^2 + 4z - 3 &= (z-3)(z^2 - z + 1) \\ &= (z-3)(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \end{aligned}$$

hay là phương trình đã cho có ba nghiệm là

$$z_0 = 3, \quad z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Biểu diễn đa thức $P_6(z) = z^6 - 3z^4 + 4z^2 - 12$ dưới dạng:

1^+ tích các thừa số tuyến tính;

2^+ tích các thừa số tuyến tính với tam thức bậc hai với hệ số thực.

Giải. Ta tìm mọi nghiệm của đa thức $P(z)$. Vì

$$z^6 - 3z^4 + 4z^2 - 12 = (z^2 - 3)(z^4 + 4)$$

nên rõ ràng là

$$\begin{aligned} &z_1 = -\sqrt{3}, \quad z_2 = \sqrt{3}, \quad z_3 = 1 + i, \\ &z_4 = 1 - i, \quad z_5 = -1 + i, \quad z_6 = -1 - i. \end{aligned}$$

Từ đó

1^+ $P_6(z) = (z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)$

2^+ Bằng cách nhân các cặp nhị thức tuyến tính tương ứng với các nghiệm phức liên hợp với nhau ta thu được

$$P_6(z) = (z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Tìm đa thức hệ số thực có luỹ thừa thấp nhất sao cho các số $z_1 = 3$, $z_2 = 2 - i$ là nghiệm của nó.

Giải. Vì đa thức chỉ có hệ số thực nên các nghiệm phức xuất hiện từng cặp liên hợp phức, nghĩa là nếu $z_2 = 2 - i$ là nghiệm của nó thì $\overline{z}_2 = 2 + i$ cũng là nghiệm của nó. Do đó

$$P(z) = (z-3)(z-2+i)(z-2-i) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15. \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Phân tích đa thức

$$(x+1)^n - (x-1)^n$$

thành các thừa số tuyến tính.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^n - (x-1)^n \\ &= [x^n + nx^{n-1} + \ldots] - [x^n - nx^{n-1} + \ldots] = 2nx^{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

Như vậy $P(x)$ là đa thức bậc $n-1$ với hệ số cao nhất bằng $2n$. Đối với đa thức này ta đã biết (§1) nghiệm của nó:

$$x_k = i\text{cotg}\frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} &(x+1)^n - (x-1)^n \\ &= 2n\Big(x - i\text{cotg}\frac{\pi}{n}\Big)\Big(x - i\text{cotg}\frac{2\pi}{n}\Big)\cdots\Big(x - i\text{cotg}\frac{(n-1)\pi}{n}\Big). \blacktriangle \end{aligned}$$

Khi phân tích đa thức trên trường $\mathcal{P}$ thành thừa số ta thường gặp những đa thức không thể phân tích thành tích hai đa thức có bậc thấp hơn trên cùng trường $\mathcal{P}$ đó. Những đa thức này được gọi là *đa thức bất khả quy.*

Chẳng hạn: đa thức $x^2 - 2$ là *khả quy* trên trường số thực vì:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

nhưng *bất khả quy* trên trường số hữu tỷ. Thật vậy, nếu

$$x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d); \quad a,b,c,d \in \mathbb{Q}$$

thì bằng cách đặt $x = -\dfrac{b}{a}$ ta có

$$\frac{b^2}{a^2} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \pm\frac{b}{a}$$

và $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ. Vô lý.

Ví dụ 8. Phân tích đa thức $x^n - 1$ thành tích các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}$.

Giải. Đầu tiên ta khai triển đa thức đã cho thành tích các thừa số tuyến tính

$$x^n - 1 = (x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}),$$
$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

và tách ra các nhị thức thực. Ta có

$$\varepsilon_k \in \mathbb{R} \quad \text{nếu} \quad \sin\frac{2k\pi}{n} = 0 \Rightarrow 2k \,\vdots\, n,\ 0 \leqslant k < n-1.$$

Từ đó

1^+ Nếu n là số lẻ thì điều đó ($2k \,\vdots\, n$) chỉ xẩy ra khi $k = 0$ (vì $k < n$) và khi đó $\varepsilon_0 = 1$.

2^+ Nếu n là số chẵn ($n = 2m$) thì nghiệm ε_k chỉ thực khi $k = 0$ và $k = m$. Do đó $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = -1$. Đối với các giá trị k còn lại ε_k không là số thực. Đối với các giá trị k này ta có

$$\sin\frac{2(n-k)\pi}{n} = \sin\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = -\sin\frac{2k\pi}{n}$$

và do đó

$$\overline{\varepsilon_{n-k}} = \varepsilon_k \Rightarrow \overline{\varepsilon}_1 = \varepsilon_{n-1}, \quad \overline{\varepsilon}_2 = \varepsilon_{n-2}, \ldots$$

Mặt khác

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_k) = x^2 - (\varepsilon_k + \overline{\varepsilon}_k)x + \varepsilon_k\overline{\varepsilon}_k = x^2 - x\cdot 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 1.$$

Do đó

$$x^n - 1 = \begin{cases} (x-1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\Big(x^2 - x\cdot 2\cos\dfrac{2k\pi}{n} + 1\Big) \text{ nếu } n \text{ là số lẻ,} \\ (x-1)(x+1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\Big(x^2 - x\cdot 2\cos\dfrac{2k\pi}{n} + 1\Big) \\ \qquad\qquad\qquad \text{nếu } n \text{ là số chẵn. } \blacktriangle \end{cases}$$

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng số $z_0 = 1 + i$ là nghiệm của đa thức

$$P_4(z) = 3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2.$$

Tìm các nghiệm còn lại.

(ĐS. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}$, $z_3 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$)

2. Chứng minh rằng số $z_0 = i$ là nghiệm của đa thức

$$P_4(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1.$$

Tìm các nghiệm còn lại.

(ĐS. $z_1 = -i$, $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $z_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$)

3. Xác định bội của nghiệm $z_0 = 1$ của đa thức

$$P_4(z) = z^4 - 5z^3 + 9z^2 - 7z + 2. \qquad \text{(ĐS. 3)}$$

4. Xác định bội của nghiệm $z_0 = 2$ của đa thức

$$P_5(z) = z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8. \qquad \text{(ĐS. 3)}$$

5. Tìm đa thức hệ số thực có luỹ thừa thấp nhất sao cho số $z_1 = i$ là nghiệm kép và $z_2 = -1 - i$ là nghiệm đơn của nó.

(ĐS. $z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2$)

6. Phân tích các đa thức đã cho thành tích các thừa số tuyến tính

1) $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$ (ĐS. $(z-1)(z-2)(z-3)$)

2) $6z^4 - 11z^3 - z^2 - 4$

(ĐS. $6(z-2)\Big(z+\dfrac{2}{3}\Big)\Big(z-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(z-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big)$.

3) $3z^4 - 23z^2 - 36$ (ĐS. $3(z-3)(z+3)\Big(z-i\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big)\Big(z+i\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big)$)

4) $z^n - 1$ (ĐS. $(z-\varepsilon_0)(z-\varepsilon_1)\cdots(z-\varepsilon_{n-1})$,

$\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$)

5) $z^4 + 4$ (ĐS. $(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)$)

6) $z^4 + 16$

(ĐS. $(z-\sqrt{2}(1+i))(z-\sqrt{2}(1-i))(z+\sqrt{2}(1+i))(z+\sqrt{2}(1-i))$)

7) $z^4 + 8z^3 + 8z - 1$

(ĐS. $(z-i)(z+i)(z+4-\sqrt{17})(z+4+\sqrt{17})$)

8) $z^3 + z + 2$ (ĐS. $(z+1)\Big(z-\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\Big)\Big(z-\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\Big)$)

7. Phân tích các đa thức trên trường số thực thành các đa thức bất khả quy trên cùng trường đó.

1) $x^3 + x + 2$ (ĐS. $(x+1)(x^2 - x + 2)$)

2) $x^4 + 16$ (ĐS. $(x^2 - 2x\sqrt{2} + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$)

3) $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$ (ĐS. $(x^2+1)(x+4-\sqrt{17})(x+4+\sqrt{17})$)

4) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3$

(ĐS. $\Big(x - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)\Big(x + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)(x^2 + x + 3)$)

5) $x^{10} - 2x^5 + 2$ (ĐS. $\prod\limits_{k=0}^{4}\big(x^2 - 2\sqrt[10]{2}\cos\dfrac{8k+1}{20}\pi + \sqrt[5]{2}\big)$)

6) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(ĐS. $\big(x^2 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x + 1\big)\big(x^2 + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x + 1\big)\big)$

Chỉ dẫn. Đặt x^2 làm thừa số chung rồi dùng phép đổi biến $y = x + \dfrac{1}{x}$

7) $x^{2n} - 1$ (ĐS. $(x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1))$

8) $x^{2n+1} - 1$ (ĐS. $(x-1)\prod\limits_{k=1}^{n}\big(x^2 - 2x\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1} + 1\big)\big)$

2.2 Phân thức hữu tỷ

Một hàm số xác định dưới dạng thương của hai đa thức đại số tại những điểm mà mẫu số không triệt tiêu gọi là phân thức hữu tỷ.

$$\mathcal{R}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0.$$

Nếu $\deg P < \deg Q$ thì $R(x)$ gọi là *phân thức hữu tỷ thực sự*. Nếu $\deg P \geqslant \deg Q$ thì $R(x)$ được gọi là *phân thức hữu tỷ không thực sự*.

Nếu $\deg P \geqslant \deg Q$ thì bằng cách thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta thu được

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \tag{2.12}$$

trong đó $W(x)$ là đa thức, còn $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ là phân thức hữu tỷ thực sự.

Về sau ta chỉ xét các phân thức hữu tỷ là thương của hai đa thức đại số với hệ số thực (phân thức như vậy được gọi là phân thức hữu tỷ với hệ số thực).

Phân thức thực đơn giản nhất (còn gọi là phân thức cơ bản) là những phân thức được biểu diễn tối giản bởi một trong hai dạng sau đây

$$I.\ \frac{A}{(x-\alpha)^m}; \quad II.\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}; \quad A, B, C, p, q \in \mathbb{R}.$$

Từ định lý Gauss và các hệ quả của nó ta có

Định lý. *Mọi phân thức hữu tỷ thực sự* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *hệ số thực với mẫu số có dạng*

$$\begin{aligned} Q(x) = (x-\alpha)^r(x-\beta)^s \cdots (x^2+p_1x+q_1)^m \times \\ \times (x^2+p_2x+q_2)^\ell \cdots (x^2+p_sx+q_s)^n \end{aligned} \tag{2.13}$$

đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng hữu hạn các phân thức cơ bản dạng I và II

$$\begin{aligned} &\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}} + \cdots + \frac{C}{x-\alpha} + \\ &+ \frac{D}{(x-\beta)^s} + \frac{E}{(x-\beta)^{s-1}} + \cdots + \frac{F}{x-\beta} + \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &+ \frac{Gx+H}{(x^2+p_1x+q_1)^m} + \frac{Ix+H}{(x^2+p_1x+q_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{Lx+M}{x^2+p_1x+q_1} + \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &+ \frac{Nx+P}{(x^2+p_sx+q_s)^n} + \frac{Qx+R}{(x^2+p_sx+q_s)^{n-1}} + \cdots + \frac{Sx+T}{x^2+p_sx+q_s}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

trong đó $A, B, \ldots$ *là những hằng số thực.*

Như vậy các phân thức cơ bản ở vế phải của (2.14) sắp xếp theo từng nhóm tương ứng với các thừa số ở vế phải của (2.13), trong đó số số hạng của mỗi nhóm bằng số mũ của luỹ thừa của thừa số tương ứng.

Cần lưu ý rằng khi khai triển phân thức cụ thể theo công thức (2.14) một số hệ số có thể bằng 0 và do đó số số hạng trong mỗi nhóm có thể bé hơn số mũ của thừa số tương ứng.

Trong thực hành, để tính các hệ số $A, B, \ldots$ ta sẽ sử dụng các phương pháp sau.

I. Giả sử đa thức $Q(x)$ chỉ có các nghiệm thực đơn, tức là

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - a_j), \quad a_i \neq a_j \ \forall\, i \neq j.$$

Khi đó

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{x - a_j} \cdot \tag{2.15}$$

Để xác định A_k ta nhân hai vế của (2.15) với $x - a_k$ và thu được

$$\frac{P(x)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x - a_j)} = A_k + \Big[\frac{A_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{x - a_{k-1}}$$

$$+ \frac{A_{k+1}}{x - a_{k+1}} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}\Big](x - a_k). \tag{2.16}$$

Thay $x = a_k$ vào (2.16) ta có

$$\boxed{A_k = \frac{P(a_k)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_k - a_j)} \cdot} \tag{2.17}$$

Như vậy để tính hệ số A_k của phân thức $\dfrac{A_k}{x - a_k}$ ta xóa thừa số $(x - a_k)$ khỏi mẫu số của $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ và tiếp theo là thay $x = a_k$ vào biểu thức còn lại. Vì vậy phương pháp này được gọi là *phương pháp xóa*.

II. Nếu $Q(x)$ có nghiệm bội thì công thức (2.17) không còn sử dụng được. Giả sử $Q(x) = g^m$, trong đó hoặc $g = x - \alpha$ hoặc g là tích các thừa số là tam thức bậc hai với hai biệt số âm. Trong trường hợp này ta cần khai triển $P(x)$ theo các luỹ thừa của g:

$$P(x) = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \ldots$$

trong đó $a_0, a_1, \dots$ là hằng số nếu $g = x - \alpha$ và là đa thức bậc không vượt quá 1 trong trường hợp thứ hai (trong trường hợp này ta cần thực hiện theo quy tắc phép chia có dư).

III. Đối với trường hợp tổng quát, ta nhân hai vế của (2.14) với đa thức $Q(z)$ và sắp xếp các số hạng ở vế phải đẳng thức thu được thành đa thức và thu được *đồng nhất thức* giữa hai đa thức: một đa thức là $P(x)$, còn đa thức kia là đa thức với hệ số $A, B, \dots$ chưa được xác định. Cân bằng các hệ số của các luỹ thừa cùng bậc ta thu được hệ phương trình tuyến tính với ẩn là $A, B, \dots$.

Giải hệ đó, ta tìm được các hệ số $A, B, \dots$ Phương pháp này gọi là *phương pháp hệ số bất định.*

Ta có thể xác định hệ số bằng cách khác là cho biến x trong đồng nhất thức những trị số tùy ý (chẳng hạn các giá trị đó là nghiệm thực của mẫu số).

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Khai triển các phân thức hữu tỷ sau thành tổng các phân thức cơ bản

$$1)\quad \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}, \qquad 2)\quad \frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

Giải. 1) Vì tam thức bậc hai x^2+x+1 không có nghiệm thực nên

$$R_1(x) = \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Quy đồng mẫu số ta có

$$\begin{aligned}&\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\\ &= \frac{B_1(x^3-1)+B_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.\end{aligned}$$

Cân bằng hệ số của x^0, x^1, x^2 và x^3 trong các tử số ta thu được hệ phương trình

$$\begin{array}{r|l} x^3 & B_1 + B_2 + N = 2, \\ x^2 & B_2 + M - 2N = 1, \\ x^1 & B_2 + N - 2M = 4, \\ x^0 & B_1 + M = 2. \end{array}$$

Giải hệ phương trình ta có $B_1 = 2$, $B_2 = 3$, $M = 0$, $N = 1$. Từ đó

$$R_1(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}\cdot$$

2) Ta có

$$R_2 = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}\cdot$$

Quy đồng mẫu số và cân bằng các tử số ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 2x = A_1(x-1)(x^2+1)^2 + A_2(x^2+1)^2 + (M_1x+N_1)(x-1)^2(x^2+1) \\ + (M_2x+N_2)(x-1)^2. \end{aligned}$$

So sánh các hệ số của các luỹ thừa cùng bậc ở hai vế ta thu được

$$\begin{array}{r|l} x^5 & A_1 + M_1 = 0, \\ x^4 & -A_1 + A_2 - 2M_1 + N_1 = 0, \\ x^3 & 2A_1 + 2M_1 - 2N_1 + M_2 = 0, \\ x^2 & -2A_1 + 2A_2 - 2M_1 + 2N_1 + 2N_1 - 2M_2 + N_2 = 1, \\ x^1 & A_1 + M_1 - 2N_1 + M_2 - 2N_2 = -2, \\ x^0 & -A_1 + A_2 + N_1 + N_2 = 0. \end{array}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{4}, \quad M_1 = -\frac{1}{2}, \\ N_1 = -\frac{1}{4}, \quad M_2 = -\frac{1}{2}, \quad N_2 = 1 \end{gathered}$$

và do vậy

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{2}x+1}{(x^2+1)^2}\cdot$$

Ví dụ 2. Cũng hỏi như trên

$$1)\quad R_1(x) = \frac{x^4}{x^4+5x^2+1}\,; \qquad 2)\quad R_2(x) = \frac{1}{x^4+1}\cdot$$

Giải. 1) $R_1(x)$ là phân thức hữu tỷ không thực sự nên đầu tiên cần thực hiện phép chia:

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = 1 + R_3(x).$$

Chú ý rằng $x^4+5x^2+4 = (x^2+1)(x^2+4)$, do đó

$$R_3 = -\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+4}\cdot$$

Quy đồng mẫu số và so sánh hai tử số ta thu được

$$-5x^2-4 = (M_1x+N_1)(x^2+4) + (M_2x+N_2)(x^2+1)$$

và tiếp theo là cân bằng các hệ số của các luỹ thừa cùng bậc của x ta thu được hệ phương trình

$$\begin{array}{l|l} x^3 & M_1+M_2=0, \\ x^2 & N_1+N_2=-5, \\ x^1 & 4M_1+N-2=0, \\ x^0 & 4N_1+N-2=-4 \end{array} \quad \Rightarrow M_1=M_2=0,\ N_1=\frac{1}{3}\,,\ N_2=-\frac{16}{3}\cdot$$

Vậy

$$R_1(x) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x^2+4}\cdot$$

2) Vì $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ nên

$$R_2=\frac{1}{x^4+1}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\cdot$$

Từ đồng nhất thức

$$1\equiv(M_1x+N_1)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(M+2x+N_2)(x^2+\sqrt{2}x+1),$$

tiến hành tương tự như trên ta có

$$M_1=-M_2=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad N_1=N_2=\frac{1}{2}\cdot$$

Do đó

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\cdot$$

Ví dụ 3. Tìm khai triển phân thức

$$1)\ R_1(x)=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)x};\ 2)\ R_2(x)=\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\cdot$$

Giải. 1) Vì mẫu số chỉ có nghiệm đơn $0,1,2$ nên

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}\cdot$$

Áp dụng công thức (2.17) ta được

$$A_1=\frac{x+1\big|_{x=0}}{(x-1)(x-2)\big|_{x=0}}=\frac{1}{2};$$
$$A_2=\frac{x+1}{x(x-2)}\Big|_{x=1}=-2,\quad A_3=\frac{x+1}{x(x-1)}\Big|_{x=2}=\frac{3}{2}\cdot$$

Vậy

$$R_1(x)=\frac{1}{2x}+\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{2(x-2)}\cdot$$

2) Tương tự ta có

$$R_2(x) = \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Vì mẫu số của $R_2(x)$ chỉ có nghiệm đơn nên

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2+2x+6}{(x-2)(x-4)}\Big|_{x=1} = 3, \\ B &= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-4)}\Big|_{x=2} = -7, \\ C &= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)}\Big|_{x=4} = 5. \end{aligned}$$

Do đó

$$R_2(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}\cdot$$

Nhận xét. Trong một số trường hợp đặc biệt, việc khai triển phân thức hữu tỷ có thể thu được đơn giản hơn và nhanh hơn. Chẳng hạn, để khai triển phân thức $\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$ thành tổng các phân thức cơ bản ta có thể thực hiện như sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} &= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Khai triển các phân thức hữu tỷ sau:

$$1)\quad \frac{x^4+5x^3+5x^2-3x+1}{(x+2)^5}; \quad 2)\quad \frac{x^5+3x^4+x^3-2x^2+2x+3}{(x^2+x+1)^3}\cdot$$

Giải. 1) Đặt $g = (x+2)$. Khi đó bằng cách khai triển tử số theo các luỹ thừa của $x+2$ bằng cách áp dụng công thức nhị thức Newton ta thu được

$$\frac{x^4+5x^3+5x^2-3x+1}{(x+2)^5}=$$
$$=\frac{[(x+2)-2]^4+5[(x+2)-2]^3+5[(x+2)-2]^2-3[(x+2)-2)]+1}{(x+2)^5}$$
$$=\frac{3+5g-g^2-3g^3+g^4}{g^5}=\frac{3}{g^5}+\frac{5}{g^4}-\frac{1}{g^3}-\frac{3}{g^2}+\frac{1}{g}$$
$$=\frac{3}{(x+2)^5}+\frac{5}{(x+2)^4}-\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{3}{(x+2)^3}+\frac{1}{x+2}\cdot$$

2) Đặt $g=x^2+x+1$. Đó là tam thức bậc hai không có nghiệm thực. Áp dụng thuật toán chia có dư ta có

$$\begin{aligned}P(x)&=x^5+3x^4+x^3-2x^2+2x+3\\&=(x^2+x+1)(x^3+2x^2-2x-2)+6x+5\end{aligned}$$

tức là

$$P=g\cdot q_1+r_1,\quad q_1=x^3+2x^2-2x-2,\quad r_1=6x+5.$$

Ta lại chia q_1 cho g và thu được

$$\begin{aligned}&q_1=gq_2+r_2,\quad \deg q_2<\deg(g)\\&q_2=x+1,\quad r_2=-4x-3.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}P=gq_1+r_1&=r_1+g(r_2+gq_2)\\&=r_1+r_2g+q_2g^2.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{P}{g^3}&=\frac{r_1}{g^3}+\frac{r_2}{g^3}+q_2\cdot\frac{1}{g}\\&=\frac{6x+5}{(x^2+x+1)^3}-\frac{4x+3}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\cdot\ \blacktriangle\end{aligned}$$

BÀI TẬP

Trong các bài toán sau đây, hãy khai triển phân thức hữu tỷ đã cho thành tổng hữu hạn các phân thức cơ bản thực.

1. $\dfrac{2x-3}{x(x^2-1)(x^2-4)}$

(ĐS. $-\dfrac{3}{4x} + \dfrac{1}{6(x-1)} + \dfrac{5}{6(x+1)} + \dfrac{1}{24(x-2)} - \dfrac{7}{24(x+2)}$)

2. $\dfrac{x+1}{x^3-1}$ (ĐS. $\dfrac{2}{3(x-1)} - \dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$)

3. $\dfrac{1}{x^3(x-1)^4}$

(ĐS. $\dfrac{10}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{10}{x-1} + \dfrac{6}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{(x-1)^4}$)

4. $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$ (ĐS. $-\dfrac{3}{16(x-1)} + \dfrac{1}{16(x-1)^2}$

$+\dfrac{3}{16(x+1)} + \dfrac{1}{16(x+1)^2} + \dfrac{1}{4(x^2+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)^2}$)

5. $\dfrac{2x-1}{(x+1)^3(x^2+x+1)}$

(ĐS. $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{3}{(x+1)^3} - \dfrac{2x-1}{x^2+x+1}$)

6. $\dfrac{1}{x(x^2+1)^3}$ (ĐS. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{(x^2+1)^3} - \dfrac{x}{(x^2+1)^2} - \dfrac{x}{x^2+1}$)

7. $\dfrac{x^2+3x+1}{x^4(x^2+1)}$ (ĐS. $\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3x}{x^2+1}$)

8. $\dfrac{x^5+3x^3-x^2+4x-2}{(x^2+1)^3}$ (ĐS. $\dfrac{2x-1}{(x^2+1)^3} + \dfrac{x-1}{(x^2+1)^2} + \dfrac{x}{x^2+1}$)

9. $\dfrac{x^5+2x^3-6x^2-3x-9}{(x^2+x+2)^3}$

(ĐS. $\dfrac{1}{(x^2+x+2)^3} + \dfrac{x-1}{(x^2+x+2)^2} + \dfrac{x-2}{x^2+x+2}$)

10. $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$

(ĐS. $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{6x+2}{x^2+x+1} - \dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$)

11. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2}$

(ĐS. $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+x+1} - \dfrac{x}{(x^2+x+1)^2}$)

12. $\dfrac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$

(ĐS. $\dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{1}{6}\dfrac{2x+1}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{2(x^2-x+1)}$)

Chương 3

Ma trận. Định thức

3.1 Ma trận

Giả sử $\mathcal{P}$ là trường số nào đó ($\mathcal{P} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

3.1.1 Định nghĩa ma trận

Ta xét bảng hình chữ nhật lập nên từ $m \times n$ số của $\mathcal{P}$:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Bảng số này được gọi là *ma trận* (hay chính xác hơn: *ma trận số*) kích thước $m \times n$. Các số a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ được gọi là *phần tử* của ma trận, trong đó i chỉ số hiệu hàng, j chỉ số hiệu cột của ma trận.

Ký hiệu: có thể dùng một trong các ký hiệu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hay}$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

hay ngắn gọn hơn

$$A = \|a_{ij}\|_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

Tập hợp mọi $(m \times n)$-ma trận được ký hiệu là $\mathcal{M}(m \times n)$.

Nếu $m = n$ thì ma trận $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ được gọi là *ma trận vuông cấp n* (thường ký hiệu: $A = \|a_{ij}\|_{n\times n} = \|a_{ij}\|_1^n$). Đối với ma trận vuông $A = \|a_{ij}\|_1^n$ các phần tử a_{ii}, $i = \overline{1,n}$ được gọi là *những phần tử đường chéo*. Các phần tử này lập thành đường chéo chính của ma trận vuông.

Ma trận vuông mà mọi phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0 (tức là $a_{ij} = 0\ \forall\, i \neq j$) gọi là *ma trận đường chéo*:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & \bigcirc & \\ & & \ddots & & \\ & \bigcirc & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}[d_1\ d_2\ \ldots\ d_n].$$

Nếu trong ma trận đường chéo A mọi phần tử $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$ thì ma trận đó được gọi là ma trận đơn vị cấp n và ký hiệu:

$$E_n = E = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \bigcirc & \\ & & \ddots & & \\ & \bigcirc & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Như vậy $E_n = \|\delta_{ij}\|_1^n$, trong đó $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j. \end{cases}$

Sau cùng, $(m \times n)$-ma trận dạng

$$\mathcal{O}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận - không kích thước $m \times n$. Nếu $m = n$ thì ký hiệu $\mathcal{O}_n$ hay $\mathcal{O}_1^n$.

Nhận xét. 1) Ta nhấn mạnh: ma trận $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ *không phải* là một số, nó là một *Bảng các số*.

2) Ma trận kích thước $(1 \times n)$ gọi là ma trận hàng

$$\begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{bmatrix}$$

còn ma trận $(m \times 1)$ gọi là ma trận cột

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

3.1.2 Các phép toán tuyến tính trên ma trận

Giả sử mọi ma trận được xét là trên cùng một trường $\mathcal{P}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Các phép toán tuyến tính trên tập hợp các ma trận là phép cộng các ma trận (*chỉ đối với các ma trận cùng kích thước*!) và phép nhân ma trận với một số và chúng được định nghĩa nhờ các phép toán trên các phần tử của chúng.

1. Cho $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$. Ma trận $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ được gọi là tổng của A và B nếu

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, i = \overline{1, m},\ \forall\, j = \overline{1, n}$$

và ký hiệu

$$C = A + B \quad \big([c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}],\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\big).$$

2. Giả sử $A = \big[a_{ij}\big]_{m\times n}$ và $\lambda \in \mathcal{P}$. Ma trận $C = \big[c_{ij}\big]_{m\times n}$ được gọi là tích của ma trận A với số λ nếu

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall\, i = \overline{1, m},\ \forall\, j = \overline{1, n}$$

và ký hiệu

$$C = \lambda A \quad \big(\lambda A = \big[\lambda a_{ij}\big]_{m\times n}\big).$$

Trường hợp đặc biệt khi $\lambda = -1$ ta viết $(-1)A = -A$ và gọi $-A$ là ma trận đối của ma trận A.

Các phép toán tuyến tính trên tập hợp ma trận $\mathcal{M}(m \times n)$ có các tính chất sau đây.

Giả sử $A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n)$ và $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$. Khi đó

I. $A + B = B + A$ (luật giao hoán).

II. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (luật kết hợp).

III. $A + \mathcal{O}_{m\times n} = A$.

IV. $A + (-A) = \mathcal{O}_{m\times n}$.

V. $1 \cdot A = A$.

VI. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ - luật kết hợp đối với phép nhân các số.

VII. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ - luật phân bố của phép nhân với một số đối với phép cộng ma trận.

VIII. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ - luật phân bố của phép nhân với ma trận đối với phép cộng các số.

Hiệu các ma trận $A - B$ có thể định nghĩa như sau

$$A - B \overset{def}{=} A + (-B).$$

3.1.3 Phép nhân các ma trận

Ma trận A được gọi là *tương thích* với ma trận B nếu số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B (từ sự tương thích của A với B nói chung không suy ra được rằng ma trận B tương thích với ma trận A).

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$. Ma trận $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times p}$ được gọi là tích của ma trận A với ma trận B nếu

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}. \tag{3.1}$$

Ký hiệu $C = AB$ và nói rằng "nhân bên phải ma trận A với ma trận B" hay "nhân bên trái ma trận B với ma trận A".

Từ (3.1) suy ra quy tắc tìm các số hạng của tích các ma trận: phần tử c_{ij} đứng ở vị trí giao của hàng thứ i và cột thứ j của ma trận $C = AB$ bằng tổng các tích của các phần tử hàng thứ i của ma trận A nhân với các phần tử tương ứng của cột thứ j của ma trận B.

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \boxed{a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \begin{bmatrix} b_{ij} \\ \vdots \\ b_{ij} \end{bmatrix} & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \vdots & c_{1p} \\ \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots \\ c_{m1} & \vdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Chú ý. 1) Nói chung phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

2) Tích hai ma trận khác 0 có thể bằng ma trận không.

3) Với điều kiện các phép toán được viết ra có nghĩa, phép nhân ma trận có các tính chất sau

I. $(AB)C = A(BC)$ - luật kết hợp.

II. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\alpha \in \mathcal{P}$.

III. $(A + B)C = AC + BC$ (luật phân bố phép nhân bên phải đối với phép cộng ma trận).

IV. $C(A+B) = CA + CB$ (luật phân bố phép nhân bên trái đối với phép cộng ma trận).

3.1.4 Phép chuyển vị ma trận

Phép toán trên các ma trận mà trong đó các hàng chuyển thành các cột còn các cột chuyển thành các hàng được gọi là *phép chuyển vị* ma trận.

Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$. Ma trận thu được từ ma trận A bằng phép chuyển vị ma trận được gọi là *ma trận chuyển vị* đối với ma trận A và được ký hiệu là A^T. Như vậy: A^T là $(n \times m)$-ma trận.

Ma trận vuông được gọi là *ma trận đối xứng* nếu $A^T = A$ và được gọi là *ma trận phản xứng* nếu $A^T = -A$. Như vậy nếu $A = \left[a_{ij}\right]_1^n$ là ma trận đối xứng thì $a_{ij} = a_{ji}\ \forall\, i, j = \overline{1, n}$ và nếu A phản xứng thì $a_{ij} = -a_{ji}$. Do đó các phần tử trên đường chéo chính của ma trận phản xứng là bằng 0.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. 1) Cộng các ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

2) Nhân ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ với số $\lambda = 3$.

Giải. 1) Hai ma trận đã cho có cùng kích thước nên có thể cộng với nhau. Theo định nghĩa phép cộng các ma trận ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

2) $\lambda A = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 3 & 2\cdot 3 & -1\cdot 3 \\ 4\cdot 3 & 0\cdot 3 & 1\cdot 3 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2. Trong trường hợp nào thì:

1) có thể nhân bên phải một ma trận hàng với một ma trận cột?

2) có thể nhân bên phải một ma trận cột với một ma trận hàng?

Giải. 1) Ma trận hàng là ma trận kích thước $(1 \times n)$ còn ma trận cột là ma trận kích thước $(m \times 1)$. Phép nhân ma trận hàng $(1 \times n)$ với ma trận cột $(m \times 1)$ chỉ có thể nếu $n = m$:

$$\boxed{1 \times n} \cdot \boxed{n \times 1} = \boxed{1 \times 1}$$

tức là kết quả phép nhân là một số, cụ thể là

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \end{bmatrix} = c.$$

2) Ma trận cột A

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

là ma trận kích thước $(m \times 1)$. Ma trận này tương thích với ma trận kích thước $(1 \times n)$, tức là ma trận hàng. Như vậy phép nhân đã nêu luôn luôn thực hiện được, cụ thể là

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính AB và BA nếu

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Giải. 1) Theo quy tắc nhân các ma trận ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Tích BA không tồn tại vì ma trận B không tương thích với ma trận A.

2) Ta có ma trận A tương thích với ma trận B. Do đó

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot(-2) + 4\cdot 1 + (-1)(-1) & 1\cdot 0 + 4\cdot 3 + (-1)\cdot 1 \\ 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (1)\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tương tự, ma trận B tương thích với ma trận A và

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. 1) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tìm mọi ma trận X giao hoán với A ($AX = XA$).

2) Tìm mọi ma trận giao hoán với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

3) Tính tích $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải. 1) Vì A là ma trận cấp 2 nên để các tích AX và XA xác định, ma trận X cũng phải là ma trận cấp 2. Giả sử $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Khi đó

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$XA = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Từ đó nếu $AX = XA \Rightarrow \gamma = 0$, $\alpha = \delta$. Do đó mọi ma trận hoán vị với ma trận đã cho đều có dạng

$$X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

2) Tương tự như trên, giả sử $X = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ là ma trận giao hoán

với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Khi đó

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+2u & y+2v \\ -x-u & -y-v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 2x-y \\ u-v & 2u-v \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2u & = x-y \\ -x-u & = u-v \\ y+2v & = 2x-y \\ -y-v & = 2u-v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = u-2v \\ y & = -2u \end{cases} ; \ u, v \text{ tùy ý.}$$

Vậy ta thu được

$$X = \begin{bmatrix} u-2v & -2u \\ u & v \end{bmatrix}, \ u, v \text{ tùy ý.}$$

3) Dễ dàng thấy rằng $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Từ ví dụ này suy ra rằng đối với các ma trận nếu $AB = \mathcal{O}$ thì không nhất thiết $A = \mathcal{O}$ hoặc $B = \mathcal{O}$. ▲

Ví dụ 5. Ma trận $S = \lambda E_n$, trong đó E_n là ma trận đơn vị cấp n và λ là một số được gọi là *ma trận vô hướng.* Chứng tỏ rằng ma trận vô hướng hoán vị với mọi ma trận vuông cùng cấp.

Giải. Áp dụng các tính chất của ma trận đơn vị ta có

$$SA = (\lambda E_n)A = \lambda(E_n A) = \lambda A;$$
$$AS = A(\lambda E_n) = \lambda(A E_n) = \lambda A,$$

tức là $AS = SA$ đối với mọi ma trận vuông A cấp n. ▲

Cho A là ma trận vuông, k là số tự nhiên lớn hơn 1. Khi đó tích k ma trận A được gọi là luỹ thừa bậc k của A và ký hiệu A^k. Theo định nghĩa $A^0 = E$. Như vậy

$$A^k \overset{def}{=} \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ lần}}$$

$$A^\circ = E.$$

Ví dụ 6. Tìm mọi luỹ thừa của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải. Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

và dễ thấy rằng

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Các lũy thừa tiếp theo của ma trận A đều bằng 0.

Ví dụ 7. Giả sử

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = E_{2\times 2}.$$

Chứng minh rằng

1) $J^2 = -E$.

2) Ma trận dạng $Z = \alpha E + \beta J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ được cộng và nhân với nhau tương tự như các số phức dạng

$$Z = \alpha + \beta i.$$

Giải. 1) Ta có

$$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E.$$

2) Xét $Z_1 = \alpha_1 E + \beta_1 J$, $Z_2 = \alpha_2 E + \beta_2 J$. Khi đó theo định nghĩa các phép toán tuyến tính trên ma trận cùng các tính chất của chúng, một mặt ta có

$$Z_1 + Z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)E + (\beta_1 + \beta_2)J$$

và mặt khác

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ -(\beta_1 + \beta_2) & \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)E + (\beta_1 + \beta_2)J. \end{aligned}$$

Đối với phép nhân sự lý giải cũng tương tự. ▲

Ví dụ 8. Tính A^n nếu:

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \qquad 2) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Giải. Dựa vào tính chất của ma trận vô hướng: ma trận vô hướng hoán vị với mọi ma trận cùng cấp, ta sẽ biểu diễn ma trận đã cho thành tổng ma trận vô hướng cộng với ma trận dạng đặc biệt mà phép nâng lên lũy thừa được thực hiện đơn giản hơn.

1)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B + \tilde{B},$$
$$B^m = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \quad \text{(xem bài 4. 3) dưới đây)},$$
$$\tilde{B}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, m \geqslant 2.$$

Tiếp theo do $B\tilde{B} = \tilde{B}B$ nên ta có thể áp dụng công thức
$$(B + \tilde{B})^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B^i \tilde{B}^{n-i} \tag{3.2}$$
(xem bài 5.3) dưới đây). Theo (3.2) ta có
$$\begin{aligned}
(B + \tilde{B})^n &= B^n + C_n^1 B^{n-1}\tilde{B} + C_n^2 B^{n-2}\tilde{B}^2 + \cdots + \tilde{B}^n \\
&= |\text{do } \tilde{B}^m = 0,\ m \geqslant 2| \\
&= B^n + C_1^n B^{n-1}\tilde{B} = B^n + nB^{n-1}\tilde{B} \\
&= \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n3^{n-1} & 0 \\ 0 & n3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n3^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

2) Tương tự như trên ta có
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B + \tilde{B}.$$
$$B^m = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$
$$\tilde{B}^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, m \geqslant 1 \tag{3.4}$$

Tiếp theo do $B\tilde{B} = \tilde{B}B$ nên ta có thể áp dụng công thức

$$A^n = (B+\tilde{B})^n = B^n + C_n^1 B^{n-1}\tilde{B} + C_n^2 B^{n-2}\tilde{B}^2 + \cdots + \tilde{B}^n. \quad (3.5)$$

Ta tính $C_n^k B^{n-k}\tilde{B}^k$. Theo (3.3) và (3.4) ta có

$$C_n^k \begin{bmatrix} 3^{n-k} & 0 \\ 0 & 3^{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C_n^k \begin{bmatrix} 3^{n-k} & 3^{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n^k 3^{n-k} & C_n^k 3^{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Từ (3.6), (3.3) và (3.5) ta thu được

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} C_n^k 3^{n-k} & C_n^k 3^{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3^n + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k 3^{n-k} & 0 + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k 3^{n-k} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vì $3^n + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k 3^{n-k} = (3+1)^n = 4^n$ và $0 + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k 3^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 3^{n-k} - 3^n = 4^n - 3^n$, do vậy

$$A^n = \begin{bmatrix} 4^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

1. Tính $A+B$, AB và BA nếu

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & i \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.

(ĐS. 1) $A+B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 4+i\end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix}4 & -4+2i\\ 12 & -12+4i\end{bmatrix}$,

$$BA=\begin{bmatrix}-8 & -8\\ 3 & 4i\end{bmatrix};$$

2) $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 5 & 6\\ 5 & -4 & 9\end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -3\\ -2 & 3 & 16\\ -2 & -7 & 15\end{bmatrix}$,

$$BA=\begin{bmatrix}6 & 1 & 5\\ 23 & -1 & 14\\ -17 & -12 & 11\end{bmatrix})$$

2. Tính tích các ma trận

1) $\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 3\\ 6 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & -4 & -5\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 10 & 9\\ -5 & 0 & -7\end{bmatrix}$)

2) $\begin{bmatrix}3 & 4 & 9\\ 2 & -1 & 6\\ 5 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6 & 4\\ 8 & 9 & 7\\ -4 & -5 & -3\end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix}11 & 9 & 13\\ -22 & -27 & -17\\ 29 & 32 & 26\end{bmatrix}$)

3) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 5\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 4 & 6 & 6\\ 12 & -3 & 20\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$)

4) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 3\\ 9\end{bmatrix}$)

5) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

6) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$)

3. Tính các tích AB và BA nếu

1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. (ĐS. Tích AB không tồn tại vì ma trận A không tương thích với ma trận B; $BA = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{bmatrix}$)

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. (ĐS. Tích AB không tồn tại vì A không tương thích với B; $BA = \begin{bmatrix} 11 & -1 \end{bmatrix}$)

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $AB = \begin{bmatrix} 28 & 27 & 8 \\ 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$, tích BA không tồn tại)

4) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$.

(ĐS. $AB = BA = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & = \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$)

4. Tính các luỹ thừa của ma trận A^n nếu:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

Chỉ dẫn. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học

2) $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. (ĐS. $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}$)

3) $A = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & \bigcirc & \\ & & \ddots & \\ & \bigcirc & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$. (ĐS. $A^n = \text{diag}\begin{bmatrix} d_1^n & d_2^n & \dots & d_n^n \end{bmatrix}$)

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 2 & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$)

5. Chứng minh rằng nếu $AB = BA$ thì

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

3) $(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + C_n^2 A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n$.

Chỉ dẫn. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

Giả sử cho đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a + kx^k$. Khi đó ma trận vuông

$$P(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_kA^k, \quad x = A$$

được gọi là giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = A$ và biểu thức

$P(A) = a_0E + a_A + \cdots + a_kA^k$ gọi là đa thức của ma trận A.

6. Giả sử $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức với hệ số $\in \mathcal{P}$ và A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng

1) $\varphi(x) = P(x) + Q(x) \Rightarrow \varphi(A) = P(A) + Q(A)$.
2) $\psi(x) = P(x)Q(x) \Rightarrow \psi(A) = P(A)Q(A)$.
3) $P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$.

7. Tìm giá trị của đa thức ma trận

1) $P(x) = x^2 - 5x + 3,\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

2) $P(x) = 3x^2 - 2x + 5,\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$)

3) $P(x) = 3x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 7,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$)

4) Chứng minh rằng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

là nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

5) Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

là nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

8. Chứng minh rằng nếu A là ma trận đường chéo cấp n với các phần tử trên đường chéo chính là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ thì với mọi đa thức $P(x)$ ma trận $P(A)$ cũng là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính là $P(\lambda_1)$, $P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)$. Hãy xét trường hợp khi A là ma trận vuông cấp 3.

9. Chứng minh rằng $(A^n)^T = (A^T)^n$.

Chỉ dẫn. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp và sử dụng hệ thức $(AB)^T = B^T A^T$.

10. Chứng minh rằng mọi ma trận vuông A đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng một ma trận đối xứng và một ma trận phản xứng.

Chỉ dẫn. Đặt $P = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$, $Q = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$, $A = P + Q$.

3.2 Định thức

3.2.1 Nghịch thế

Mọi cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp số $J = \{1, 2, \dots, n\}$ được gọi là một hoán vị của n phần tử đó. Số các hoán vị có thể có của n phần tử của J là $n!$. Hai số trong một hoán vị lập thành một nghịch thế nếu số lớn hơn đứng trước số bé hơn. Số nghịch thế của hoán vị $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ được ký hiệu là

$$\mathrm{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

đó chính là số cặp lập thành nghịch thế trong hoán vị.

Hoán vị $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ được gọi là *hoán vị chẵn* nếu số nghịch thế của nó là chẵn và gọi là *hoán vị lẻ* nếu số nghịch thế là lẻ.

3.2.2 Định thức

Mỗi ma trận vuông cấp n (và chỉ có ma trận vuông!) đều tương ứng với một số - gọi là *định thức* của nó.

Giả sử cho ma trận vuông cấp n trên trường $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

$$A = \|a_{ij}\|_1^n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Định thức của ma trận A là một số thu được từ các phần tử của ma trận theo quy tắc sau đây:

1) định thức cấp n bằng tổng đại số của $n!$ số hạng;

2) mỗi số hạng của định thức là tích

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{3.8}$$

của n phần tử của ma trận mà cứ mỗi hàng và mỗi cột đều có đúng một phần tử trong tích này;

3) số hạng $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ của định thức có dấu cộng nếu hoán vị lập nên bởi các số hiệu hàng $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ và hoán vị lập nên bởi các số hiệu cột $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ là cùng chẵn hoặc cùng lẻ và có dấu trừ ("$-$") trong trường hợp ngược lại.

Ký hiệu: Định thức của ma trận A được ký hiệu là

$$\det A, |A| \text{ hay } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nhận xét. 1) Như vậy, để xác định dấu của số hạng định thức ta cần tính

$$s = \text{inv}(i_1, \dots, i_n)$$
$$\sigma = \text{inv}(j_1, \dots, j_n)$$

và khi đó dấu của số hạng định thức là dấu của thừa số $(-1)^{s+\sigma}$.

2) Nếu ta viết các thừa số của tích (3.8) theo thứ tự tăng dần của số hiệu hàng:

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$$

thì

$$\det A = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\operatorname{inv}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}. \tag{3.9}$$

trong đó tổng lấy theo mọi hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ của các số $1, 2, \dots, n$.

Trong ma trận vuông (3.7) ta cố định k ($k < n$) hàng và k cột nào đó. Giả sử đó là các hàng với số hiệu $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ và các cột với số hiệu $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. Từ các phần tử nằm trên giao của hàng và các cột được chọn ta có thể lập định thức cấp k

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

Định thức này được gọi là *định thức con cấp k* của ma trận A. Ký hiệu $\overline{M}^{i_1i_2\dots i_k}_{j_1j_2\cdots j_k}$.

Nếu ta bỏ đi các hàng thứ $i_1, i_2, \dots, i_k$ và các cột thứ $j_1, j_2, \dots, j_k$ thì các phần tử còn lại của ma trận A sẽ tạo thành một ma trận vuông cấp $n-k$. Định thức của ma trận vuông này là định thức con cấp $n-k$ của ma trận A và được gọi là *phần bù* (*hay định thức con bù*) của định thức con $\overline{M}^{i_1i_2\cdots i_k}_{j_1j_2\cdots j_k}$ và được ký hiệu là $M^{i_1i_2\cdots i_k}_{j_1j_2\cdots j_k}$.

Định thức con bù với dấu

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$$

được gọi là *phần bù đại số* của định thức con $\overline{M}^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}$.

Trường hợp đặc biệt: định thức con bù M_{ij} của định thức con cấp 1 là $\|a_{ij}\|$ của A được gọi là phần bù của phần tử a_{ij} của A và số $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

3.2.3 Tính chất của định thức

Định thức có các tính chất sau

I. Qua phép chuyển vị ma trận, định thức của nó không đổi, tức là $\det A = \det A^T$.

Từ tính chất bình đẳng này giữa các hàng và các cột của định thức suy ra rằng một điều khẳng định nào đó đã đúng với hàng thì nó cũng đúng với cột. Do đó các tính chất tiếp theo đây chỉ cần phát biểu cho hàng.

II. Nếu đổi chỗ hai hàng cho nhau thì định thức đổi dấu.

III. Thừa số chung của mọi phần tử của một hàng của định thức có thể đưa ra ngoài dấu định thức.

IV. Định thức có một hàng bằng 0 là bằng 0.

V. Định thức có hai hàng giống nhau là bằng 0.

VI. Nếu định thức có hai hàng tỷ lệ với nhau thì nó bằng 0.

VII. Nếu các phần tử của hàng thứ i của định thức D có dạng $a_{ij} = b_{ij} + c_{iJ}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ thì định thức D bằng tổng hai định thức $D_1 + D_2$, trong đó định thức D_1 có hàng thứ i là $(b_{i1}b_{i2}\cdots b_{in})$ và định thức D_2 có hàng thứ i là $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$ còn các hàng khác là các hàng tương ứng của D.

VIII. Nếu định thức có một hàng là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác thì định thức bằng 0.

IX. Định thức không đổi nếu thêm vào một hàng nào đó một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác.

X. Định thức bằng tổng các tích của các phần tử của một hàng nào đó với phần bù đại số tương ứng.

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{3.10}$$

Nhận xét. Người ta cũng dùng tính chất X này để làm định nghĩa định thức.

XI. Tổng các tích của các phần tử của một hàng nào đó với phần bù đại số tương ứng của các phần tử của hàng khác là bằng 0:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \quad \forall\, k \neq i;\ i,k = \overline{1,n}.$$

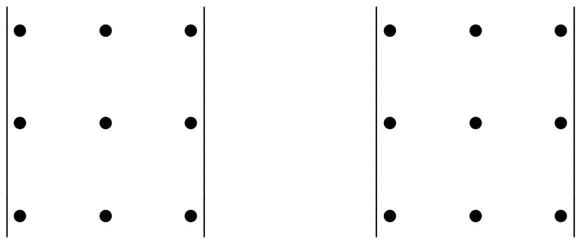
Nhận xét. Các tính chất I-III là những tính chất cơ bản. Các tính chất sau là những hệ quả của ba tính chất ấy.

3.2.4 Phương pháp tính định thức

I. Định thức cấp 1, cấp 2 và cấp 3 được tính theo các công thức

$$\begin{aligned}
|a_{11}| &= a_{11};\\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \qquad (3.11)\\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.
\end{aligned}$$

Khi tính định thức cấp 3 ta có thể sử dụng quy tắc Surrus "dạng tam giác" hoặc "dạng đường song song" sau đây



(+) (−)

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}$$

$\ominus$ $\ominus$ $\ominus$ $\oplus$ $\oplus$ $\oplus$

II. Tính định thức cấp n

1^+ Khai triển định thức theo các phần tử của một hàng hoặc một cột (tính chất XI, (3.10)).

2^+ Sử dụng các tính chất của định thức để biến đổi định thức đã cho thành định thức mới sao cho ngoại trừ một phần tử $a_{i_0j_0} \neq 0$, tất cả các phần tử còn lại của hàng thứ i_0 (hoặc cột j_0) đều bằng 0. Khi đó

$$\det A = (-1)^{i_0+j_0} a_{i_0j_0} M_{i_0j_0}.$$

Tiếp theo là lặp lại quá trình đó đối với $M_{i_0j_0}$ là định thức cấp thấp hơn một đơn vị.

3^+ Sử dụng các tính chất của định thức để biến đổi định thức đã cho thành định thức tam giác (tức là định thức mà mọi phần tử ở một phía của đường chéo chính đều bằng 0). Khi đó định thức bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

4^+ Phương pháp truy hồi: biến đổi, khai triển định thức theo hàng hoặc theo cột sao cho định thức đã cho có thể biểu diễn qua các định thức cùng dạng nhưng cấp thấp hơn.

5^+ Biểu diễn định thức đã cho dưới dạng tổng các định thức cùng cấp.

6^+ Dùng định lý Laplace: Giả sử trong ma trận vuông A cấp n ta chọn một cách tùy ý m hàng (hay m cột) $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Khi đó định thức $\det A$ bằng tổng các tích của mọi định thức con cấp m nằm trên các hàng được chọn nhân với phần bù đại số tương ứng của chúng.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. 1) Tính số nghịch thế trong hoán vị $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Với những giá trị nào của i và j thì số hạng $a_{51}a_{1i}a_{2j}a_{43}a_{32}$ của định thức cấp 5 có dấu trừ.

Giải. 1) Để tính số nghịch thế tiện lợi hơn cả là tiến hành như sau: (i) đầu tiên, tính có bao nhiêu số đứng trước số 1 (giả sử có k_1 số) rồi gạch bỏ số 1 khỏi hoán vị; (ii) tiếp đến tính xem có bao nhiêu số đứng trước số 2 (giả sử k_2) rồi gạch bỏ số 2 khỏi hoán vị; v.v... Khi đó

$$\text{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Bằng phương pháp vừa nêu dễ thấy là

$$\text{inv}(531642) = 2 + 4 + 1 + 2 = 9.$$

2) Các chỉ số i và j chỉ có thể nhận các giá trị sau đây: (a) $i = 4$, $j = 5$; hoặc (b) $i = 5$ và $j = 4$ vì với các giá trị khác của i và j tích đã cho chứa ít nhất hai phần tử của cùng một cột. Để xác định dấu của số hạng ta sắp xếp các thừa số của tích theo thứ tự tăng của chỉ số thứ nhất rồi tính số nghịch thế của hoán vị các chỉ số thứ hai. Ta có

$$a_{1i}a_{2j}a_{32}a_{43}a_{51}$$

+) Giả sử $i = 4$, $j = 5 \Rightarrow \text{inv}(45231) = 8$. Do vậy với $i = 4$, $j = 5$ số hạng đã cho có dấu (+).

+) Giả sử $i = 5$, $j = 4 \Rightarrow \text{inv}(54231) = 9$. Do đó số hạng đã cho có dấu trừ. Vậy số hạng đã cho chỉ có dấu trừ khi $i = 5$, $j = 4$. ▲

Ví dụ 2. Tính các định thức sau đây

$$1) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Giải. 1) Có thể tính Δ_1 bằng cách sử dụng tính chất X.

$$\Delta_1 = (-1)^{1+4}a_{14}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{1+4}a_{14}(-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

Kết quả này cũng có thể thu được nhờ định nghĩa định thức. Theo định nghĩa Δ_1 là tổng đại số của $4! = 24$ số hạng, trong đó chỉ có số hạng

$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

là khác 0. Vì hoán vị của các chỉ số thứ hai chẵn nên số hạng có dấu cộng. Từ đó ta thu được $\Delta_1 = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

2) Áp dụng tính chất XI ta có thể khai triển định thức theo cột thứ nhất

$$\Delta_2 = 1\begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0.$$

Ở đây mọi định thức cấp 3 đều có hai cột tỷ lệ với nhau, nên chúng bằng 0. ▲

Ví dụ 3. Tính các định thức

$$1)\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}, \quad 2)\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Giải. Ta biến đổi các định thức để thu được các số 0 trong một hàng (cột). Ta quy ước các ký hiệu: $h_2 - h_1 \to h_2'$ có nghĩa là lấy hàng thứ hai trừ đi hàng thứ nhất để thu được hàng thứ hai mới. Tương tự như vậy ta ký hiệu các phép biến đổi theo cột.

1) Ta có

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ h_2 - h_1 \to h_2' \\ h_3 - 2h_1 \to h_3' \\ h_4 - 3h_1 \to h_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} h_2 - h_1 \to h_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1.$$

2) Để tính Δ_2 ta thực hiện phép biến đổi: $c_1 - 2c_3 \to c_1'$; $c_4 - 3c_3 \to c_4'$; $c_5 - c_3 \to c_5'$ và thu được

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Đối với định thức cấp 4 vừa thu được ta cũng tiến hành tương tự:

$c_1 + 5c_4 \to c_1'$; $c_2 - c_4 \to c_2'$; $c_3 + 4c_4 \to c_3'$ và thu được

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 26 & -1 & 19 & 5 \\ -9 & 2 & -12 & -1 \\ 13 & 0 & 14 & 2 \end{vmatrix} = a_{14}A_{14} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 26 & -1 & 19 \\ -9 & 2 & -12 \\ 13 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

Như vậy ta đã đưa việc tính định thức cấp 5 về tính định thức cấp 3. Để tính định thức cấp 3 này ta có thể dùng quy tắc Sarrus hoặc tiện hơn cả là biến đổi nó theo hàng: $h_2 + 2h_1 \to h_2'$ và có

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} 26 & -1 & 19 \\ 43 & 0 & 26 \\ 13 & 0 & 14 \end{vmatrix} = -a_{12}A_{12} = -(-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 43 & 26 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} = -264.$$

Ví dụ 4. Tính các định thức

$$1)\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}, \quad 2)\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Giải. Ta sẽ tính các định thức đã cho bằng phương pháp đưa về định thức tam giác.

1) Ta có

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ h_2 - h_1 \to h_2' \\ h_3 + h_1 \to h_3' \\ h_4 - 2h_1 \to h_4' \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Vì định thức tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính nên

$$\Delta_1 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12.$$

2)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ h_4 - 2h_2 \to h_4' \\ h_5 - h_1 \to h_5' \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Ví dụ 5. Tính các định thức

$$1) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix};$$

$$2) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$3) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Giải. 1) Khai triển Δ_{n+1} theo hàng cuối (hàng thứ $n+1$) ta có

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Định thức thứ nhất ở vế phải là định thức tam giác ($= (-1)^n$), định thức thứ hai là định thức cùng dạng với Δ_1 nhưng cấp n. Do vậy định thức Δ_{n+1} có thể biểu diễn bởi hệ thức truy hồi sau đây:

$$\Delta_{n+1} = a_n(-1)^n(-1)^n + x\Delta_n.$$

Để thu được biểu thức tổng quát của Δ_{n+1} ta xét Δ_1 và Δ_2:

$$\Delta_1 = a_0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0x - a_1.$$

Như vậy Δ_1 là đa thức bậc 0 với hệ số a_0, còn Δ_2 là đa thức bậc nhất với hệ số a_0 và a_1.

Ta chứng tỏ rằng Δ_{n+1} có dạng tương tự:

$$\Delta_{n+1} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Giả sử đã chứng minh $\Delta_n = a_0x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= a_n + x\Delta_n = a_n + x(a_0x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}) \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

2) Khai triển định thức theo hàng thứ nhất ta thu được hệ thức truy hồi:

$$\begin{aligned} \Delta_n = 7\Delta_{n-1} - 12\Delta_{n-2} \Rightarrow \Delta_n - 3\Delta_{n-1} &= 4\Delta_{n-1} - 3\cdot 4\Delta_{n-2} \\ &= 4[\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\Delta_n - 3\Delta_{n-1} = 4^{n-2}(\Delta_2 - \Delta_1)$$
$$\Delta_1 = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 37$$

và do đó

$$\Delta_n - 3\Delta_{n-1} = 4^{n-2}[37 - 21] = 4^{n-2} \cdot 4^2 = 4^n.$$

Nếu từ hệ thức truy hồi ta biến đổi cách khác thì thu được

$$\begin{aligned}\Delta_n - 4\Delta_{n-1} &= 3[\Delta_{n-1} - 4\Delta_{n-2}] = \cdots = 3^{n-2}(\Delta_2 - \Delta_1) \\ &= 3^{n-2} \cdot 3^2 = 3^n.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\left.\begin{aligned}\Delta_n - 3\Delta_{n-1} = 4^n \\ \Delta_n - 4\Delta_{n-1} = 3^n\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta_{n-1} = 4^n - 3^n$$

và do đó

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} + 4^n = 4^{n+1} - 3^{n+1}.$$

3) Ta biểu diễn cột thứ nhất dưới dạng các tổng hai số hạng $\alpha + \beta$,

$1+0,\ 0+0, \ldots, 0+0$ và viết định thức dưới dạng tổng hai định thức

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}}_{D_1}$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}}_{D_2}$$

$$= D_1 + D_2.$$

Tính D_1. Lấy cột thứ hai trừ đi cột thứ nhất nhân với β, lấy cột thứ ba trừ đi cột thứ hai vừa thu được nhân với β, v.v... Kết quả ta thu được định thức tam giác

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^n.$$

Tính D_2. Khai triển D_2 theo cột thứ nhất ta thu được:

$$D_2 = \beta \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \beta\Delta_{n-1}.$$

Như vậy ta thu được công thức truy hồi $\Delta_n = \alpha^n + \beta\Delta_{n-1}$.

Ta tính một vài định thức đầu tiên

$$\Delta_1 = \alpha+\beta = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^4 = \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}; \quad \dots\dots\dots\dots\dots$$

Ta sẽ chứng minh rằng hệ thức

$$\Delta_m = \frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\cdot \qquad (*)$$

đúng với $m \in \mathbb{N}$ bất kỳ. Ta áp dụng phương pháp quy nạp toán học.

Giả sử $(*)$ đúng với $m = n-1$. Ta chứng minh nó đúng với $m = n$. Khi $m = n-1$ ta có

$$\Delta_{n-1} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \Rightarrow$$

$$\Delta_n = \alpha^n + \beta\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^n\beta+\alpha^n\beta-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\cdot$$

Như vậy hệ thức $(*)$ đúng $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Do đó

$$\Delta_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \cdot \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

1. Xác định số nghịch thế trong các hoán vị.

1) (1 3 5 7 9 2 4 6 8). (ĐS. 10)
2) (9 8 7 6 5 4 3 2 1). (ĐS. 36)
3) (2 5 8 1 4 7 3 6 9). (ĐS. 12)
4) (7 5 4 6 1 2 3 9 8). (ĐS. 17)

2. Chọn k và ℓ sao cho hoán vị

1) (7 4 3 k ℓ 8 5 2) là hoán vị lẻ. (ĐS. $k = 6$, $\ell = 1$)
2) (k 3 4 7 ℓ 2 6 5) là hoán vị chẵn. (ĐS. $k = 8$, $\ell = 1$)
3) (4 8 k 2 5 ℓ 1 7) là hoán vị chẵn. (ĐS. $k = 6$, $\ell = 3$)
4) (6 3 4 k 7 ℓ 2 1) là hoán vị lẻ. (ĐS. $k = 5$, $\ell = 8$)

3. Xác định số nghịch thế trong các hoán vị.

1) $n\ n-1\ n-2 \dots 2\ 1$. (ĐS. $\dfrac{n(n-1)}{2}$)
2) $1\ 3\ 5\ 7 \dots 2n-1\ 2\ 4\ 6 \dots 2n$. (ĐS. $\dfrac{n(n-1)}{2}$)
3) $2\ 4\ 6 \dots 2n\ 1\ 3\ 5 \dots 2n-1$. (ĐS. $\dfrac{n(n+1)}{2}$)
4) $2n-1\ 2n-3 \dots 5\ 3\ 1\ 2n\ 2n-2 \dots 6\ 4\ 2$. (ĐS. $\dfrac{3n(n-1)}{2}$)

4. Trong các tích sau đây, tích nào là số hạng của định thức cấp 7; xác định dấu của số hạng đó.

1) $a_{43}a_{53}a_{63}a_{15}a_{23}a_{34}a_{71}$. (ĐS. Không phải)
2) $a_{23}a_{67}a_{54}a_{16}a_{35}a_{41}a_{72}$. (ĐS. Số hạng có dấu cộng)
3) $a_{15}a_{28}a_{74}a_{36}a_{61}a_{43}$. (ĐS. Không phải)
4) $a_{72}a_{16}a_{33}a_{55}a_{27}a_{61}a_{44}$. (ĐS. Số hạng có dấu cộng)

5. Trong các tích sau đây, tích nào là số hạng của định thức cấp tương ứng xác định dấu của số hạng đó.

1) $a_{43}a_{61}a_{52}a_{13}a_{25}a_{34}$. (ĐS. Không phải)

2) $a_{27}a_{63}a_{14}a_{56}a_{35}a_{41}a_{72}$. (ĐS. Là số hạng của định thức cấp 7 với dấu +)

3) $a_{15}a_{28}a_{75}a_{36}a_{81}a_{43}$. (ĐS. Không phải)

4) $a_{n1}a_{n-1\,2}\dots a_{1n}$.

(ĐS. Là số hạng của định thức cấp n với dấu $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$)

5) $a_{12}a_{23}\dots a_{k,k+1}\dots a_{n-1,n}a_{n1}$.

(ĐS. Là số hạng của định thức cấp n với dấu $(-1)^{n-1}$)

6) $a_{13}a_{24}a_{35}\dots a_{n-2,n}a_{n-1,1}a_{n2}$.

(ĐS. Số hạng của định thức cấp n với dấu "+")

6. Xác định các số k và ℓ sao cho trong định thức cấp 6:

1^+ Các tích sau là số hạng của nó với dấu "−":

1) $a_{62}a_{35}a_{k3}a_{44}a_{\ell 6}a_{21}$. (ĐS. $k=5$, $\ell=1$)

2) $a_{1k}a_{25}a_{44}a_{6\ell}a_{52}a_{31}$. (ĐS. $k=6$, $\ell=3$)

2^+ Các tích sau là số hạng có dấu +:

3) $a_{63}a_{16}a_{5\ell}a_{45}a_{2k}a_{31}$. (ĐS. $k=2$, $\ell=4$)

4) $a_{k5}a_{21}a_{34}a_{13}a_{\ell 6}a_{62}$. (ĐS. $k=5$, $\ell=4$)

7. Trong định thức cấp n

1) tích các phần tử của đường chéo chính là số có dấu gì ?

(ĐS. +)

2) tích các phần tử của đường chéo phụ có dấu gì ?

(ĐS. Có dấu "+" nếu $n=4k$ hoặc $n=4k+1$; và có dấu "−" nếu $n=4k+2$ hoặc $n=4k+3$)

8. Tính các định thức cấp hai:

1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$; $i^2 - 1$.

7) $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

(ĐS. 1) 0; 2) $-2b^3$; 3) 1; 4) $\sin(\alpha - \beta)$; 5) 0; 6) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; 7) -1; 8) -1)

9. Tính các định thức cấp ba

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

4) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$; $i^2 = -1$, 5) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix}$, $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

8) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

(ĐS. 1) 8; 2) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$; 3) 1; 4) -2; 5) $1 + a^2 + b^2 + c^2$; 6) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)$; 7) -3; 8) 0)

10. Tính định thức Vandermonde [1]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

(ĐS. $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$)

Chỉ dẫn. Lấy các cột trừ đi cột thứ nhất rồi khai triển định thức thu được theo hàng thứ nhất và tiếp tục như vậy đối với định thức cấp ba.

11. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

(ĐS. $(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_4-x_3)$)

Chỉ dẫn. Dùng định lý Laplace cho hàng thứ nhất và thứ hai và chỉ dẫn cho bài 10.

12. Tính định thức bằng cách khai triển (theo các phần tử của hàng hoặc cột):

1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$ (ĐS. $abcd$)

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix}$ theo các phần tử cột thứ tư.

[1] A. T. Vandermonde (1735-1796) là nhà toán học Pháp.

(ĐS. $4a - c - d$)

3) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ theo các phần tử của cột thứ nhất.

(ĐS. $2a + b - c + d$)

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ theo các phần tử của hàng thứ ba.

(ĐS. $-5a - 5b - 5c - 5d$)

5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ theo các phần tử hàng thứ hai.

(ĐS. -2858)

6) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ theo các phần tử hàng thứ nhất

(ĐS. -264)

13. Dùng định nghĩa để tính các định thức sau

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. (ĐS. 1)

2) $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \log_a b \end{vmatrix}$. (ĐS. 1)

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$. (ĐS. 4)

4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. (ĐS. -21)

5) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}$. (ĐS. a_1^n)

6) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \dots & -3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. (ĐS. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!$)

7) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$. (ĐS. $n!$)

8) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$. (ĐS. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \dots a_n$)

9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$. (ĐS. 0)

10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. (ĐS. 0)

14. Giải các phương trình

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 5 \\ -7 & -7 & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0.$ (ĐS. $x_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \pm 3$)

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2-x & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 4+x & 12 \\ -4 & x-14 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$ (ĐS. $x_1 = 6$; $x_2 = 5$)

3) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0.$ (ĐS. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$)

15. Tính các định thức cấp n

1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. (ĐS. $n!$)

Chỉ dẫn. Thêm hàng thứ nhất vào mọi hàng của định thức bắt đầu từ hàng thứ hai.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$. (ĐS. $-2(n-2)!$)

Chỉ dẫn. Lấy mọi hàng (kể từ hàng thứ ba) trừ đi hàng thứ hai, sau đó lấy hàng thứ hai trừ đi hàng thứ nhất nhân với 2.

3) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$. (ĐS. $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$)

Chỉ dẫn. Lấy tất cả các cột của định thức trừ đi cột cuối cùng nhân tương ứng với $a_1, a_2, \dots, a_n$.

4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$. (ĐS. $(-1)^{n-1}(n-1)$)

Chỉ dẫn. Thêm cho cột thứ nhất tất cả các cột còn lại; sau đó lấy mọi hàng kể từ hàng thứ hai trừ đi hàng thứ nhất.

5) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$. (ĐS. $(-1)^n n!$)

Chỉ dẫn. Lấy các hàng thứ nhất, thứ hai, ... thứ $n-1$ trừ đi hàng thứ n.

6) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$. (ĐS. $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$)

Chỉ dẫn. Nhân hàng thứ nhất với (-1) rồi cộng với tất cả các hàng còn lại.

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$. (ĐS. $(n-1)!$)

Chỉ dẫn. Nhân hàng thứ nhất với (-1) rồi cộng với tất cả các hàng còn lại.

8) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$. (ĐS. $a^n + (-1)^{n+1}b^n$)

9) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$.

(ĐS. $a_0x_1x_2\cdots x_n + a_1y_1x_2\cdots x_n + a_2y_1y_2x_3\cdots x_n + \cdots + a_ny_1y_2\cdots y_n$)

Chỉ dẫn. Khai triển định thức theo cột cuối để thu được hệ thức truy hồi.

10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

(ĐS. $\Delta_n = x\Delta_{n-1} + n$, $\Delta_n = x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + (n-1)x + n$)

Chỉ dẫn. Khai triển định thức theo cột cuối.

3.3 Hạng của ma trận

3.3.1 Định nghĩa

Số nguyên $r > 0$ được gọi là *hạng* của ma trận A nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

(i) Ma trận A có ít nhất một định thức con khác 0 cấp r.

(ii) Mọi định thức con cấp $r+1$ và cấp cao hơn (nếu có) của ma trận A đều bằng 0.

Hạng của ma trận A thường được ký hiệu là $r(A)$, r_A hoặc $\text{rank}(A)$.

Từ định nghĩa suy ra:

a) Đối với $(m \times n)$-ma trận A ta có: $0 \leqslant r(A) \leqslant \min(m; n)$.

b) $r = r(A) = 0$ khi và chỉ khi mọi phần tử của ma trận đều bằng 0.

c) Đối với ma trận vuông cấp n ta có $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

3.3.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

Phương pháp I (phương pháp định thức bao) dựa trên định nghĩa hạng của ma trận, gồm các bước sau đây

(i) Tìm một định thức con nào đó khác 0; giả sử đó là định thức $\Delta_r \neq 0$.

(ii) Tính tiếp các định thức con Δ_{r+1} cấp $r+1$ bao định thức Δ_r (tức là định thức con Δ_{r+1} chứa định thức con Δ_r) nếu chúng tồn tại.

+) Nếu tất cả các định thức con cấp $r+1$ đều bằng 0 thì kết luận $r(A) = r$.

+ Nếu có một định thức con cấp $r+1$ khác 0 ($\Delta_{r+1} \neq 0$) thì tính tiếp các định thức con cấp $r+2$ bao định thức Δ_{r+1} đó (nếu chúng tồn tại). Nếu mọi định thức cấp $r+2$ đều bằng 0 thì $r(A) = r+1$, còn nếu có một định thức con cấp $r+2$ khác 0 thì quy trình lại tiếp tục.

Phương pháp II dựa trên các phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên ma trận đã cho.

Định nghĩa. Các phép biến đổi sau đây trên ma trận được gọi là các phép biến đổi sơ cấp:

1^+ Đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) cho nhau.

2^+ Nhân tất cả các phần tử của một hàng (hoặc cột) với một số khác 0.

3^+ Cộng vào một hàng của ma trận một hàng khác sau khi nhân với một số tùy ý $\neq 0$.

Định lý. *Hạng của ma trận là bất biến qua các phép biến đổi sơ cấp.*

Khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận ta luôn quy ước rằng dấu $A \sim B$ có nghĩa là một ma trận thu được từ ma trận kia bởi các phép biến đổi sơ cấp và $r(A) = r(B)$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm hạng $r(A)$ nếu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải. Ta tìm hạng của ma trận đã cho theo phương pháp I. Hiển nhiên ma trận A có định thức con

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ta tính các định thức con Δ_3 bao Δ_2. Ta có

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Như vậy có một định thức bao $\Delta_3^{(2)} \neq 0$. Ta tính định thức bao của $\Delta_3^{(2)}$. Ta có

$$\delta_4^{(1)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(tại sao ?). Từ đó suy ra $r(A) = 3$. ▲

Ví dụ 2. Tìm hạng $r(A)$ nếu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Giải. Ta giải theo phương pháp I. Hiển nhiên ma trận A có định thức con

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Tất cả các định thức con bao Δ_2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & -15 & -7 \end{vmatrix};$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -15 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

đều bằng 0. Do đó $r(A) = 2$. ▲

Ví dụ 3. Bằng các phép biến đổi sơ cấp, tính hạng của các ma trận

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}; \quad 2)\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải. 1) Ta thực hiện phép biến đổi sơ cấp theo hàng và thu được

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ h_2 - 3h_1 \to h_2' \\ h_3 - 5h_1 \to h_3' \end{matrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h_3 - h_2 \to h_3' \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Đó là ma trận hình thang và hiển nhiên nó có hạng bằng 2. Do đó $r(A) = 2$.

2) Ta có

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h_3 + h_1 \to h_3' \\ h_5 + 4h_1 \to h_4' \\ h_5 + 3h_1 \to h_5' \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h_3 - h_2 \to h_3' \\ h_4 - 2h_2 \to h_4' \\ h_5 - h_2 \to h_5' \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ h_5 - h_3 \to h_5' \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đó thu được $r(B) = 3$. ▲

Ví dụ 4. Tính hạng của các ma trận

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \end{bmatrix}; \quad 2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Giải. 1) Ta thực hiện các phép biến đổi sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ -0 & -1 & -7 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó suy rằng $r(A) = 2$.

2) Ta thực hiện các phép biến đổi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó suy rằng $r(B) = 3$. ▲

BÀI TẬP

Tìm hạng của các ma trận:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 2$)

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 1$)

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 1$)

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 2$)

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 2$)

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 2$)

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 2$)

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 1$)

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 3$)

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp để tìm hạng của ma trận:

10. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 2$)

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 3$)

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ (ĐS. $r(A) = 4$)

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 12 & -4 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 3$)

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & -9 & -5 & -2 & 9 & -5 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & -4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 4$)

Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp định thức bao:

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 5$)

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 3$)

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ĐS. $r(A) = 2$)

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 10 & 3 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 2$)

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 12 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $r(A) = 4$)

20. Với giá trị nào của λ thì ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

có hạng bằng 1 ? (ĐS. $\lambda = -\dfrac{1}{2}$)

21. Với giá trị nào của λ thì hạng $r(A) = 2$, nếu

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}? \qquad (\text{ĐS. } \lambda = \frac{7}{9})$$

22. Với giá trị nào của λ thì hạng $r(A) = 3$ nếu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}? \qquad (\text{ĐS. } \lambda \neq 2)$$

23. Với giá trị nào của λ thì hạng $r(A) = 3$ nếu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}? \qquad (\text{ĐS. } \forall\, \lambda \in \mathbb{R})$$

24. Với giá trị nào của λ thì hạng: 1) $r(A) = 1$; 2) $r(A) = 2$; 3) $r(A) = 3$ nếu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}?$$

(ĐS. 1) $\lambda = \dfrac{1}{2}$; 2) $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$; 3) Không tồn tại)

3.4 Ma trận nghịch đảo

3.4.1 Định nghĩa

Nếu A là ma trận vuông cấp n thì ma trận vuông B cấp n thỏa mãn điều kiện

$$AB = BA = E_n$$

trong đó E_n là ma trận đơn vị cấp n được gọi là *ma trận nghịch đảo* đối với ma trận A và được ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Như vậy theo định nghĩa

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n.$$

Định lý. *Ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo khi và chỉ khi ma trận A không suy biến (tức là khi* $\det A \neq 0$*) và khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, P_A, \tag{3.12}$$

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ của ma trận A. Ma trận P_A được gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A.

Tính chất

1^+ Nếu ma trận A có ma trận nghịch đảo và $m \neq 0$ thì ma trận mA cũng có ma trận nghịch đảo và

$$(mA)^{-1} = \frac{1}{m}A^{-1}.$$

2^+ Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và đều có ma trận nghịch đảo thì

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3^+ Nếu A có ma trận nghịch đảo A^{-1} thì A^{-1} cũng có ma trận nghịch đảo và

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

3.4.2 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp I gồm các bước sau

Bước 1. Tính $\det A$

+ Nếu $\det A = 0$ thì A không có ma trận nghịch đảo.

+ Nếu $\det A \neq 0$ thì chuyển sang bước 2.

Bước 2. Tìm ma trận phụ hợp P_A. Từ đó áp dụng công thức (3.12) ta thu được ma trận A^{-1}.

Phương pháp II (phương pháp Gauss-Jordan)

Đầu tiên ta viết ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận A vào bên phải ma trận A và thu được ma trận

$$M = \left[A|E_n\right]. \tag{3.13}$$

Tiếp theo thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận M để đưa khối ma trận A về ma trận đơn vị E_n còn khối E_n trong (3.13) thành ma trận B:

$$\left[A|E_n\right] \longrightarrow \left[E_n|B\right].$$

Khi đó $B = A^{-1}$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm ma trận nghịch đảo đối với các ma trận sau:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & -3\end{bmatrix};\qquad 2)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & -7\\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Giải. 1) Ta có $\det A = 10 \neq 0$. Do đó ma trận A trong 1) có ma trận nghịch đảo. Phần bù đại số của các phần tử của nó bằng: $A_{11} = -5$; $A_{12} = 15$; $A_{13} = 25$; $A_{21} = 1$; $A_{22} = 3$; $A_{23} = 9$; $A_{31} = 4$; $A_{32} = -8$; $A_{33} = -14$.

Từ đó theo công thức (3.12) ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-5 & 1 & 4\\ 15 & 3 & -8\\ 25 & 9 & -14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{10} & -\frac{4}{5}\\ \frac{5}{2} & \frac{9}{10} & -\frac{7}{5}\end{bmatrix}.$$

2) Ta tính $\det A$. Lấy hàng thứ ba cộng vào hàng thứ nhất ta có

$$\det A = \begin{vmatrix}2 & 6 & 5 & 9 & 2\\ -5 & 4 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 2 & 6 & 5 & 9 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$$

vì trong ma trận thu được có hàng thứ nhất và thứ tư giống nhau. Như vậy ma trận A trong 2) là ma trận suy biến, do đó nó không có ma trận nghịch đảo.

Ví dụ 2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp tìm ma trận nghịch đảo đối với ma trận

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad 2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Giải. 1) Ta lập ma trận

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Nhân hàng thứ nhất với $\dfrac{1}{2}$ ta thu được

$$M \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} h_2 - h_1 \to h_2' \\ h_3 + h_1 \to h_3' \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2(-1) \to h_2'} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] h_3 - 2h_2 \to h_3' \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{array}\right] h_3 \times (-\tfrac{1}{3}) \to h_3' \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[h_2 - 4h_3 \to h_2']{h_1 - 2h_3 \to h_1'} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Từ đó suy rằng

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2) Ta lập ma trận

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp

$$M \xrightarrow[h_3 - h_1 \to h_3']{h_2 - h_1 \to h_2'} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 - h_2 \to h_3']{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{h_1 - h_3 \to h_1' \\ h_2 - h_3 \to h_2'}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_1 - h_2 \to h_1'} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{h_2(\frac{1}{3}) \to h_2' \\ h_3(\frac{1}{4}) \to h_4'}]{h_1(\frac{1}{2}) \to h_1'} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{array}\right]$$

Từ đó suy rằng

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3. Chứng minh các tính chất sau đây của định thức

1) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

2) Nếu A và B không suy biến thì tích AB cũng không suy biến và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3) $\big(A^{-1}\big)^{-1} = A$.

4) $\big(A^{T}\big)^{-1} = \big(A^{-1}\big)^{T}$.

Giải. 1) Ta sẽ áp dụng công thức tính định thức của tích hai ma trận vuông cùng cấp A và B:

$$\boxed{\det AB = \det A \cdot \det B}$$

Ta có

$$\begin{aligned} AA^{-1} = E \Rightarrow & \det(AA^{-1}) = \det E = 1 \\ & \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow (\det A)^{-1} = \det(A^{-1}). \end{aligned}$$

2) Ta có

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E$$

và từ đó suy ra $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. Tương tự $B^{-1}A^{-1}(AB) = E$ và do đó ma trận $B^{-1}A^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận AB.

3) Ta thấy $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ là ma trận duy nhất mà tích của nó nhân với A^{-1} bằng E. Nhưng ma trận A cũng có tính chất đó. Như vậy 3) được chứng minh.

4) Để chứng minh $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ ta xét đẳng thức $AA^{-1} = E$. Từ đó áp dụng tính chất của ma trận chuyển vị ta có

$$(AA^{-1})^T = E \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = E \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

theo định nghĩa ma trận nghịch đảo. ▲

Ví dụ 4. 1) Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông thỏa mãn điều kiện $A^2 - 3A + E = \mathcal{O}$ thì $A^{-1} = 3E - A$.

2) Chứng minh rằng $(E - A)^{-1} = E + A + A^2$ nếu $A^3 = \mathcal{O}$.

Giải. 1) Từ điều kiện đã cho ta có

$$E = 3A - A^2 = A(3E - A).$$

Do vậy

$$\det A \cdot \det(3E - A) = \det E = 1$$

và do đó $\det A \neq 0$, tức là A có ma trận nghịch đảo. Do

$$\begin{aligned} E = A(3E - A) \to A^{-1}E &= A^{-1}A(3E - A) \\ \Rightarrow A^{-1} &= 3E - A. \end{aligned}$$

2) Ta có thể nhân ma trận $E - A$ với $E + A + A^2$. Nếu chúng là ma trận nghịch đảo nhau thì kết quả là ma trận đơn vị. Ta có

$$(E - A)(E + A + A^2) = E - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = E - A^3 = E$$

vì theo giả thiết $A^3 = \mathcal{O}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. ▲

Ví dụ 5. Tìm ma trận nghịch đảo đối với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Giải. Để tồn tại ma trận nghịch đảo ta cần giả thiết rằng $\det A = \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Với giả thiết đó ta tìm các phần bù đại số: $A_{11} = \delta$; $A_{12} = -\gamma$; $A_{21} = -\beta$; $A_{22} = \alpha$. Do đó

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Từ ví dụ này ta rút ra quy tắc tìm ma trận nghịch đảo với ma trận cấp 2:

> Ma trận nghịch đảo của ma trận cấp hai bằng tích của một số là nghịch đảo của định thức của nó nhân với ma trận mà đường chéo chính là hoán vị của hai phần tử của đường chéo chính của nó và các phần tử của đường chéo thứ hai cũng chính là các phần tử của đường chéo thứ hai của ma trận đã cho nhưng với dấu ngược lại.

Chẳng hạn, nếu $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ thì

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 6. 1) Giả sử A là ma trận không suy biến. Hãy giải các phương trình ma trận:

$$AX = B, \quad YA = B.$$

2) Giải các phương trình trong 1) nếu

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Giải. Nhân bên trái hai vế của phương trình $AX = B$ với A^{-1} và thực hiện các phép tính đại số tương ứng ta có

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Tương tự

$$YAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow YE = BA^{-1} \Rightarrow Y = BA^{-1}.$$

Rõ ràng là nếu A^{-1} và B không giao hoán thì $X \neq Y$.

2) Với

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Từ đó

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -11 \end{bmatrix},$$

$$Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận đã cho (nếu chúng tồn tại)

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$)

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$)

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\frac{1}{41}\begin{bmatrix} -9 & 11 & -5 \\ 7 & -4 & 13 \\ 19 & -5 & 6 \end{bmatrix}$)

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. (ĐS. Không tồn tại)

5. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{25}\begin{bmatrix} 13 & 15 & -12 \\ 17 & 10 & -8 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$)

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$)

7. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -11 & 2 \\ 0 & -5 & +2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$)

8. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$)

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$)

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$)

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 3 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$)

12. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$)

13. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$)

14. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 17 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 13 & 12 & -1 \end{bmatrix}$)

15. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. (ĐS. Không tồn tại)

16. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$)

17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$)

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{bmatrix}$)

19. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$)

20. $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $a_{11}a_{12}\cdots a_{nn} \neq 0$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$)

21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \end{bmatrix}$)

22. $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$)

23. Với giá trị nào của λ thì các ma trận sau đây có ma trận nghịch đảo:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

(ĐS. 1) $\lambda \neq \dfrac{9}{4}$; 2) $\lambda \neq 0$, $\lambda = \pm\sqrt{5}$)

24. Tìm ma trận X thỏa mãn các phương trình

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$)

2) $X\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}$)

3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$)

4) $AX + B = 2C$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ĐS. $\begin{bmatrix} -5 & 16 & -8 \\ 4 & -7 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$)

5) $XA - 2B = E$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(ĐS. $\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} -21 & 45 & -156 \\ -21 & 15 & -21 \\ 51 & 20 & -79 \end{bmatrix}$)

25. Giả sử A là ma trận cấp n và $(E + A)^k = \mathcal{O}$ với số tự nhiên k nào đó. Chứng minh rằng ma trận A không suy biến.

26. Chứng minh rằng các ma trận $A+E$ và $A-E$ không suy biến và nghịch đảo nhau nếu $A^2 = \mathcal{O}$.

27. Chứng minh rằng ma trận $A+E$ và A^2+E-A không suy biến và nghịch đảo nhau nếu $A^3 = \mathcal{O}$.

28. Chứng minh rằng nếu A, B, C là những ma trận không suy biến thì ABC và $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ là nghịch đảo nhau.

29. *Ma trận vuông A cấp n được gọi là đồng dạng với ma trận vuông cùng cấp B nếu tồn tại ma trận khả nghịch T sao cho $B = T^{-1}AT$.* Chứng minh các tính chất sau của ma trận đồng dạng:

1^+ Mọi ma trận đều đồng dạng với chính nó.

2^+ Nếu A đồng dạng với B thì B đồng dạng với A.

3^+ Nếu A đồng dạng với B, còn B đồng dạng với C thì A đồng dạng với C.

Chỉ dẫn. 1^+ Áp dụng hệ thức $E^{-1} = E$. 2^+ Nhân bên phải hệ thức $B = T^{-1}AT$ với T^{-1} và nhân bên trái với T. 3^+ Áp dụng định nghĩa.

30. *Ma trận vuông được gọi là ma trận trực giao nếu $AA^T = A^TA = E$, nghĩa là ma trận chuyển vị A^T bằng ma trận nghịch đảo A^{-1} của A.* Chứng minh các tính chất sau của ma trận trực giao:

1^+ Nếu A trực giao thì A^{-1} trực giao.

2^+ Tích các ma trận trực giao cùng cấp là ma trận trực giao.

3^+ Nếu A là ma trận trực giao thì A^T cũng là ma trận trực giao.

4^+ Định thức của ma trận trực giao là bằng ± 1.

Chỉ dẫn 4^+. Xuất phát từ $AA^T = E$ và áp dụng định lý $\det(AB) = \det A \det B$.

Chương 4

Hệ phương trình tuyến tính

4.1 Hệ n phương trình với n ẩn có định thức khác 0

Hệ phương trình tuyến tính trên trường số $\mathcal{P}$ được gọi là *hệ Cramer*[1] nếu số phương trình bằng số ẩn và định thức của ma trận cơ bản (ma trận hệ số) của hệ là khác không.

[1] G. Cramer (1704-1752) là nhà toán học Thụy Sĩ.

Hệ Cramer có dạng

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = h_n \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

hay dưới dạng ma trận

$$AX = H \tag{4.2}$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

hoặc

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

4.1.1 Phương pháp ma trận

Vì $\det A \neq 0$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}. Khi đó từ (4.2) ta thu được

$$A^{-1}AX = A^{-1}H \Rightarrow EX = X = A^{-1}H.$$

Vậy hệ nghiệm duy nhất là

$$X = A^{-1}H. \tag{4.3}$$

Tuy nhiên việc tìm ma trận nghịch đảo nói chung là rất phức tạp nếu cấp của ma trận A lớn.

4.1.2 Phương pháp Cramer

Nghiệm duy nhất của hệ Cramer được xác định theo công thức Cramer:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det A}, \quad j = \overline{1, n} \tag{4.4}$$

trong đó A_j là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bởi cột các hệ số tự do H, và các cột khác giữ nguyên.

4.1.3 Phương pháp Gauss

Nội dung chủ yếu của phương pháp Gauss (hay thuật toán Gauss) là khử liên tiếp các ẩn của hệ. Thuật toán Gauss dựa trên các phép *biến đổi sơ cấp* hệ phương trình. Đó là các phép biến đổi:

1^+ Nhân một phương trình nào đó của hệ với một số khác 0.

2^+ Thêm vào một phương trình nào đó của hệ một phương trình khác nhân với một số tùy ý.

3^+ Đổi chỗ hai phương trình của hệ.

Định lý. *Mọi phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên hệ phương trình* (4.1) *đều đưa đến một hệ phương trình mới tương đương.*

Việc thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trìnnh (4.1) thực chất là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận mở rộng của hệ.

Do đó sau một số bước biến đổi ta thu được hệ (4.1) tương đương với hệ tam giác

$$\left.\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n &= \overline{h}_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n &= \overline{h}_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad &\cdots \\ b_{nn}x_n &= \overline{h}_n \end{aligned}\right\}$$

Từ đó rút ra $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận

$$1)\qquad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 4,\\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4,\\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2.\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$2)\qquad \left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,\\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3.\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Giải. 1) Ta ký hiệu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix} 4\\ 4\\ 2\end{bmatrix}.$$

Khi đó phương trình (4.5) có dạng

$$AX = H.$$

Vì $\det A = 2 \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo và do vậy hệ (4.5) có nghiệm duy nhất:

$$X = A^{-1}H.$$

Dễ dàng thấy rằng

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1\\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

và do đó

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1\\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\\ 4\\ 2\end{bmatrix}.$$

Thực hiện phép nhân ma trận ở vế phải ta thu được

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\cdot 4 - 3\cdot 4 + 1\cdot 2 = 2,\\ x_2 &= -\frac{5}{2}\cdot 4 + 4\cdot 4 - \frac{3}{2}\cdot 2 = 3,\\ x_3 &= \frac{1}{2}\cdot 4 - 1\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2 = -1. \end{aligned}$$

2) Viết ma trận A của hệ và tìm A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy rằng

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8\\ 12\\ -1 \end{bmatrix}$$

tức là

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = -1. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Áp dụng quy tắc Cramer, giải các hệ phương trình

$$1) \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6,\\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2,\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

$$2) \qquad \left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6,\\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 7,\\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 9,\\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 &= -7. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Giải. 1) Áp dụng công thức (4.4)

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det A}, \quad j = \overline{1,3}$$

trong đó

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 \neq 0; \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 30; \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 30.$$

Từ đó suy ra

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

2) Tính định thức của hệ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 35.$$

Vì $\det A \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất và nghiệm được tìm theo công thức (4.4). Ta tính các định thức

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 & -1 \\ -7 & 3 & -4 & 4 \\ 9 & 1 & -2 & -2 \\ -7 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 70,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & -7 & -4 & 4 \\ 3 & 9 & -2 & -2 \\ 1 & -7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -35,$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(A_4) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -3 & 7 & -7 \end{vmatrix} = -70.$$

Do đó

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A} = 2, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A} = -1,$$
$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det A} = 0, \quad x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det A} = -2. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Áp dụng phương pháp Gauss giải các hệ phương trình

1)

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - 2x_3 &= -3, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 11, \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -4. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 9. \end{aligned}$$

Giải. 1) Lập ma trận mở rộng và thực hiện các phép biến đổi:

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 5 & -4 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h_2 + 2h_1 \to h_2' \\ h_3 + h_1 \to h_3' \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & -7 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \\ h_3 - 5h_2 \to h_3' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -16 & -32 \end{array}\right].$$

Từ đó suy ra

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 \qquad - 2x_3 & = -3 \\ x_2 + 2x_3 & = 5 \\ -16x_3 & = -32 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$$

2) Lập ma trận mở rộng và thực hiện các phép biến đổi sơ cấp:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} h_1 \to h_2' \\ h_2 \to h_1' \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \longrightarrow \\ h_2 - 2h_1 \to h_2' \\ h_3 - 3h_1 \to h_3' \\ h_4 - 5h_1 \to h_4' \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & -9 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & -7 & 11 & -22 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h_2 \to h_3' \\ h_3 \to h_2' \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -9 & 11 \\ 0 & -7 & 11 & -22 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ h_3 - 3h_2 \to h_3' \\ h_4 - 7h_2 \to h_4' \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & -24 & 41 & -7 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ h_4 - 3h_3 \to h_4' \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

Từ đó suy ra rằng $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. ▲

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

1. $$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 11, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 11, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 24. \end{aligned}\right\}.$$ (ĐS. $x_1 = 9$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$)

2. $$\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11. \end{aligned}\right\}.$$ (ĐS. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$)

3. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}.$$ (ĐS. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$)

4. $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \quad = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \quad = 10. \end{array}\right\}.$ (ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$)

5. $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 \quad = 0, \\ \qquad 3x_2 + 4x_3 \quad = -6, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \quad = 1. \end{array}\right\}.$ (ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$)

6. $\left.\begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 \quad = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 \quad = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 \quad = 0. \end{array}\right\}.$ (ĐS. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$)

7. $\left.\begin{array}{r} x_2 + 3x_3 + 6 \quad = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \quad = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x \quad = 13. \end{array}\right\}.$ (ĐS. $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$)

8. $\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \quad = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \quad = 4, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 6x_4 \quad = -6. \end{array}\right\}.$

(ĐS. $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = -\dfrac{2}{3}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \dfrac{4}{3}$)

9. $\left.\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \quad = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \quad = 19, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \quad = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \quad = -2. \end{array}\right\}.$

(ĐS. $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}$, $x_4 = 3$)

10. $\left.\begin{array}{r} x_1 \qquad - x_3 + x_4 \quad = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \quad = 2, \\ 5x_1 \qquad\qquad - 3x_4 \quad = -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad = 2. \end{array}\right\}.$

(ĐS. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$)

11. $$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+8x_4&=0,\\ x_2-x_3+3x_4&=0,\\ x_3+2x_4&=1,\\ x_1+x_4&=-24\end{aligned}\right\}.$$

(ĐS. $x_1=-19,\ x_2=26,\ x_3=11,\ x_4=-5$)

12. $$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3+x_4&=0,\\ 2x_1+3x_2-x_4&=0,\\ x_1+5x_2-3x_3&=7,\\ 3x_2+2x_3+x_4&=2,\end{aligned}\right\}.$$

(ĐS. $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=1$)

13. $$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-4x_4-x_5&=13,\\ x_1+2x_2+3x_3-5x_4&=15,\\ x_2-2x_3+x_4+3x_5&=-7,\\ x_1-7x_3+8x_4-x_5&=-30,\\ 3x_1-x_2-5x_5&=4.\end{aligned}\right\}.$$

(ĐS. $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-2,\ x_5=0$)

14. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+4x_3+x_4-x_5&=2,\\ x_1-2x_2-2x_3+3x_5&=0,\\ 4x_2+3x_3-2x_4+2x_5&=2,\\ 2x_1-x_3+3x_4-2x_5&=-2,\\ 3x_1+2x_2-5x_4+3x_5&=3.\end{aligned}\right\}.$$

(ĐS. $x_1=\dfrac{2}{5},\ x_2=-\dfrac{3}{5},\ x_3=\dfrac{4}{5},\ x_4=0,\ x_5=0$)

4.2 Hệ tùy ý các phương trình tuyến tính

Ta xét hệ tùy ý các phương trình tuyến tính gồm m phương trình với n ẩn

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad &\dots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

với *ma trận cơ bản*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

và *ma trận mở rộng*

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Hiển nhiên rằng $r(A) \leqslant r(\widetilde{A})$ vì mỗi định thức con của A đều là định thức con của $\widetilde{A}$ nhưng không có điều ngược lại. Ta luôn luôn giả thiết rằng các phần tử của ma trận A không đồng thời bằng 0 tất cả.

Người ta quy ước gọi định thức con khác 0 của một ma trận mà cấp của nó bằng hạng của ma trận đó là *định thức con cơ sở* của nó.

Giả sử đối với ma trận đã cho ta đã chọn một định thức con cơ sở. Khi đó các hàng và các cột mà giao của chúng lập thành định thức con cơ sở đó được gọi là *hàng, cột cơ sở*.

Định nghĩa. 1^+ Bộ có thứ tự n số $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ được gọi là nghiệm của hệ (4.9) nếu khi thay $x = \alpha_1, x = \alpha_2, \dots, x = \alpha_n$ vào các phương trình của (4.9) thì hai vế của mỗi phương trình của (4.9) trở thành đồng nhất.

2+ Hệ (4.9) được gọi là *tương thích* nếu có ít nhất một nghiệm và gọi là *không tương thích* nếu nó vô nghiệm.

3$^+$ Hệ tương thích được gọi là *hệ xác định* nếu nó có nghiệm duy nhất và gọi là *hệ vô định* nếu nó có nhiều hơn một nghiệm.

Định lý Kronecker-Capelli.[2] *Hệ phương trình tuyến tính* (4.9) *tương thích khi và chỉ khi hạng của ma trận cơ bản bằng hạng của ma trận mở rộng của hệ, tức là* $r(A) = r(\widetilde{A})$.

Đối với hệ tương thích người ta gọi các ẩn mà hệ số của chúng lập nên định thức con cơ sở của ma trận cơ bản là *ẩn cơ sở*, các ẩn còn lại được gọi là *ẩn tự do*.

Phương pháp chủ yếu để giải hệ tổng quát là:

1. Áp dụng quy tắc Kronecker-Capelli.
2. Phương pháp khử dần các ẩn (phương pháp Gauss).

Quy tắc Kronecker-Capelli gồm các bước sau.

1$^+$ Khảo sát tính tương thích của hệ. Tính hạng $r(\widetilde{A})$ và $r(A)$

a) Nếu $r(\widetilde{A}) > r(A)$ thì hệ không tương thích.

b) Nếu $r(\widetilde{A}) = r(A) = r$ thì hệ tương thích. Tìm định thức con cơ sở cấp r nào đó (và do vậy r ẩn cơ sở tương ứng xem như được chọn) và thu được hệ phương trình tương đương gồm r phương trình với n ẩn mà $(r \times n)$-ma trận hệ số của nó chứa các phần tử của định thức con cơ sở đã chọn. Các phương trình còn lại có thể bỏ qua.

2$^+$ Tìm nghiệm của hệ tương đương thu được

a) Nếu $r = n$, nghĩa là số ẩn cơ sở bằng số ẩn của hệ thì hệ có nghiệm duy nhất và có thể tìm theo công thức Cramer.

b) Nếu $r < n$, nghĩa là số ẩn cơ sở bé hơn số ẩn của hệ thì ta chuyển $n - r$ số hạng có chứa ẩn tự do của các phương trình sang vế phải để thu được hệ Cramer đối với các ẩn cơ sở. Giải hệ này ta thu được các biểu thức của các ẩn cơ sở biểu diễn qua các ẩn tự do.

---

[2]L. Kronecker (1823-1891) là nhà toán học Đức,
A. Capelli (1855-1910) là nhà toán học Italia.

Đó là nghiệm tổng quát của hệ. Cho $n-r$ ẩn tự do những giá trị cụ thể tùy ý ta tìm được các giá trị tương ứng của ẩn cơ sở. Từ đó thu được nghiệm riêng của hệ.

Tiếp theo ta trình bày nội dung của phương pháp Gauss.

Không giảm tổng quát, có thể cho rằng $a_{11} \neq 0$. Nội dung của phương pháp Gauss là như sau.

1^+ Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các phương trình của hệ để thu được hệ tương đương mà bắt đầu từ phương trình thứ hai mọi phương trình đều *không chứa ẩn* x_1. Ký hiệu hệ này là $S^{(1)}$.

2^+ Cũng không mất tổng quát, có thể cho rằng $a'_{22} \neq 0$. Lại thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các phương trình của hệ $S^{(1)}$ (trừ ra phương trình thứ nhất được giữ nguyên!) như đã làm trong bước 1^+ ta thu được hệ tương đương mà bắt đầu từ phương trình thứ ba mọi phương trình đều không chứa ẩn x_2,...

3^+ Sau một số bước ta có thể gặp một trong các trường hợp sau đây.

a) Thấy ngay được hệ không tương thích.

b) Thu được một hệ "tam giác". Hệ này có nghiệm duy nhất.

c) Thu được một "hệ hình thang" dạng

$$\left.\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \dots \quad + a_{1n}x_n & = & h_1, \\
b_{22}x_2 + \quad \dots \quad + b_{2n}x_n & = & \overline{h}_2, \\
\dots \quad \dots \quad \dots & & \dots \\
b_{rr}x_r + \cdots + b_{rn}x_n & = & \overline{h}_r, \\
0 & = & \overline{h}_{r+1}, \\
\dots & & \dots \\
0 & = & \overline{h}_m.
\end{array}\right\}$$

Nếu các số $\overline{h}_{r+1}, \dots, \overline{h}_m$ khác 0 thì hệ vô nghiệm. Nếu $\overline{h}_{r+1} = \cdots = \overline{h}_m = 0$ thì hệ có nghiệm. Cho $x_{r+1} = \alpha, \dots, x_m = \beta$ thì thu được hệ Cramer với ẩn là $x_1, \dots, x_r$. Giải hệ đó ta thu được nghiệm $x_1 = \overline{x}_1$; $x_2 = \overline{x}_2, \dots, x_r = \overline{x}_r$ và nghiệm của hệ đã cho là $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_r, \alpha, \dots, \beta)$.

Lưu ý rằng việc giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss thực chất là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận mở rộng của hệ đưa nó về dạng tam giác hay dạng hình thang.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6,\\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= 12,\\ 2x_1 + 4x_2 \qquad &= -6,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3,\\ 5x_1 \qquad + 4x_3 &= 9. \end{aligned}\right\}$$

Giải. 1. Tìm hạng của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 6\\ 1 & -5 & 1 & 12\\ 2 & 4 & 0 & -6\\ 2 & 1 & 3 & 3\\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

Ta thu được $r(\widetilde{A}) = r(A) = 3$. Do đó hệ tương thích.

Ta chọn định thức con cơ sở là

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

vì $\Delta = 36 \neq 0$ và $r(A) = 3$ và các ẩn cơ sở là x_1, x_2, x_3.

2. Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 12,\\ 2x_1 + 4x_2 \quad &= -6,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Số ẩn cơ sở bằng số ẩn của hệ nên hệ có nghiệm duy nhất là $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_4 = 1$. ▲

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 7,\\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2,\\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 11. \end{aligned}\right\}$$

Giải. Tìm hạng của các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4\\ 2 & 4 & 5 & -1\\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7\\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2\\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{array}\right]$$

Ta thu được $r(\widetilde{A}) = r(A) = 2$. Do đó hệ tương thích.

Ta có thể lấy định thức con cơ sở là

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3\\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

vì $\Delta = 22 \neq 0$ và cấp của định thức $= r(A) = 2$. Khi chọn Δ làm định thức con, ta có x_2 và x_3 là ẩn cơ sở.

Hệ đã cho tương đương với hệ

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2$$

hay

$$2x_2 - 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4,$$
$$4x_2 + 5x_3 = 2 - 2x_1 + x_4.$$

2. Ta có thể giải hệ theo quy tắc Cramer. Đặt $x_1 = \alpha$, $x_4 = \beta$ ta có

$$\begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 &= 7 - \alpha - 4\beta,\\ 4x_2 + 5x_3 &= 2 - 2\alpha + \beta. \end{aligned}$$

Theo công thức Cramer ta tìm được

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7-\alpha-4\beta & -3 \\ 2-2\alpha+\beta & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{41 - 11\alpha - 17\beta}{22},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7-\alpha-4\beta \\ 4 & 2-2\alpha+\beta \end{vmatrix}}{22} = \frac{-24 + 18\beta}{22}.$$

Do đó tập hợp các nghiệm của hệ có dạng

$$\Big\{\alpha; \frac{41 - 11\alpha - 17\beta}{22}; \frac{9\beta - 12}{11}; \beta \Big| \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\Big\} \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Bằng phương pháp Gauss hãy giải hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7,\\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2,\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 11,\\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Giải. Trong hệ đã cho ta có $a_{11} = 4 \neq 0$ nên để cho tiện ta đổi chỗ hai phương trình đầu và thu được hệ tương đương

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -2,\\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7,\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 11,\\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Tiếp theo ta biến đổi ma trận mở rộng

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h_2 - 4h_1 \to h_2' \\ h_3 - 2h_1 \to h_3' \\ h_4 - 4h_1 \to h_4' \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ h_4 - h_3 \to h_4' \end{array} \to$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h_2 \times 5 \to h_2' \\ h_3 \times 6 \to h_3' \\ \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 30 & -15 & 75 \\ 0 & 30 & -30 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \ h_3 - h_2 \to h_3' \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 30 & -15 & 75 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Từ đó thu được hệ tương đương

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 30x_2 - 15x_3 &= 75 \\ -15x_3 &= 15 \end{aligned}\right\}$$

và do đó thu được nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= -1, \\ 2x_1 + 2x_2 \quad\;\; + 3x_4 + x_5 &= 1, \\ 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1, \\ -2x_3 + 4x_4 - 3x_5 &= 7, \\ 6x_3 + 3x_4 - x_5 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Giải. 1) Bằng các phép biến đổi sơ cấp (chỉ thực hiện trên các hàng!) ma trận mở rộng $\widetilde{A}$ được đưa về ma trận bậc thang

$$A \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

2) Ma trận này tương ứng với hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= -1, \\ -2x_3 + x_4 - x_5 &= 3, \\ 3x_4 - 2x_5 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

hệ này tương đương với hệ đã cho và có x_1, x_3, x_4 là ẩn cơ sở, còn x_2, x_5 là ẩn tự do.

3) Chuyển các số hạng chứa ẩn tự do sang vế phải ta có

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= -1 - x_2 - x_5, \\ -2x_3 + x_4 &= 3 + x_5, \\ 3x_4 &= 4 + 2x_5. \end{aligned}\right\}$$

4) Giải hệ này (từ dưới lên) ta thu được nghiệm tổng quát

$$x_1 = \frac{-3 - 3x_2 - x_5}{2},$$
$$x_3 = \frac{-5 - x_5}{6}, \quad x_4 = \frac{4 + 2x_5}{3}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Giải. Ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận mở rộng:

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h_2 - h_1 \to h_2' \\ h_3 - 2h_1 \to h_3' \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ h_3 + h_2 \to h_3' \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Từ đó suy rằng $r(\widetilde{A}) = 3$; $r(A) = 2$ và do vậy $r(\widetilde{A}) > r(A)$ và hệ đã cho không tương thích. ▲.

Ví dụ 6. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số λ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1, \\ z_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Giải. Ta có

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = D,$$

tiếp theo dễ dàng thu được

$$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = (\lambda - 1)^2.$$

1^+ Nếu $D \neq 0$, tức là nếu $(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$ và $\lambda \neq 1$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất và theo các công thức Cramer ta có

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}\cdot$$

2^+ Nếu $\lambda = -2$ thì $D = 0$ và ta có

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \right),$$

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các ma trận $\widetilde{A}$ ta thu được $r(\widetilde{A}) = 3$.

Do đó với $\lambda = -2$ thì $r(\widetilde{A}) > r(A)$ và hệ vô nghiệm.

3^+ Nếu $\lambda = 1$ thì $\det A = 0$ và dễ thấy rằng $r(\widetilde{A}) = r(A) = 1 < 3$ (số ẩn của hệ là 3). Từ đó suy ra hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. ▲

Ví dụ 7. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2. \end{aligned}\right\}$$

Giải. Định thức của hệ bằng

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq -2$ thì hệ có nghiệm duy nhất. Ta tính

D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2,$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$

Từ đó theo công thức Cramer ta thu được

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\cdot$$

Ta còn xét giá trị $\lambda = 1$ và $\lambda = -2$.

Khi $\lambda = 1$ hệ đã cho trở thành

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Hệ này có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số. Nếu đặt $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ thì

$$\begin{gathered} x_1 = 1 - \alpha - \beta, \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \end{gathered}$$

và như vậy tập hợp nghiệm có thể viết dưới dạng $(1 - \alpha - \beta; \alpha; \beta; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Khi $\lambda = -2$ thì hệ đã cho trở thành

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_2 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Bằng cách cộng ba phương trình lại với nhau ta thấy ngay hệ đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 8. Xét hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 3,\\ 3x_1 - x_2 - \lambda x_3 &= 2,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= \mu. \end{aligned}\right\}$$

Với giá trị nào của các tham số λ và μ thì

1) hệ có nghiệm duy nhất ?

2) hệ vô nghiệm ?

3) hệ có vô số nghiệm ?

Giải. Ta viết các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 3 & -1 & -\lambda \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 3 \\ 3 & -1 & -\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 3 & \mu \end{array}\right]$$

Ta có

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 3 & -1 & -\lambda \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\lambda - 21.$$

Từ đó

1^+ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{21}{2}, \quad \mu \text{ tùy ý.}$$

2^+ Để hệ vô nghiệm đầu tiên nó phải thỏa mãn

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{21}{2}\cdot$$

Khi $\lambda = \dfrac{21}{2}$ thì $\det A = 0$ và do vậy

$$r(A) < 3.$$

Vì định thức $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ nên:

$$r(A) = 2 \quad \text{khi} \quad \lambda = \frac{21}{2} \cdot$$

Theo định lý Kronecker-Capelli hệ đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$r(\widetilde{A}) > r(A) = 2.$$

Ta tìm điều kiện để hệ thức này thỏa mãn. Cụ thể là tìm $r(\widetilde{A})$ khi $\lambda = \dfrac{21}{2}$. Ta có

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{21}{2} & 3 \\ 3 & -1 & -\frac{21}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 3 & \mu \end{array}\right] \begin{array}{l} h_1 \times 2 \to h_1' \\ h_2 \times 2 \to h_2' \longrightarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 6 & -2 & -21 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & \mu \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h_2 - 3h_1 \to h_2' \longrightarrow \\ h_3 - h_1 \to h_3' \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & -14 & -84 & -14 \\ 0 & -3 & -18 & \mu - 6 \end{array}\right] h_2 \times \left(\frac{-1}{14}\right) \to h_2' \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & -18 & \mu - 6 \end{array}\right] h_3 + 3h_1 \to h_3' \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 3 \end{array}\right]$$

Từ kết quả biến đổi ta thu được

$$r(\widetilde{A}) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } \mu = 3, \\ 3 & \text{nếu } \mu \neq 3, \end{cases}$$

Vì $r(A) = 2$ nên hệ đã cho vô nghiệm nếu

$$\lambda = \frac{21}{2} \quad \text{và} \quad \mu \neq 3.$$

3^+ Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$r(\widetilde{A}) = r(A) = r < 3$$

tức là khi hạng của A và $\widetilde{A}$ bằng nhau nhưng bé hơn số ẩn của hệ là 3. Từ lập luận trên suy rằng hệ có vô số nghiệm nếu

$$r(\widetilde{A}) = r(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = \dfrac{21}{2}, \\ \mu & = 3. \end{cases}$$

Khi đó hệ đã cho tương đương với hệ

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 6 - 21\alpha, \\ 6x_1 - 2x_2 &= 4 + 21\alpha. \end{aligned}\right\} \alpha = x_3,$$

và nghiệm của nó là $\left(1 + \dfrac{3}{2}\alpha, 1 - 6\alpha, \alpha \middle| \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\right)$. ▲

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình tuyến tính

1. $$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_2 = -\dfrac{7}{5}$, $x_3 = \dfrac{18 - 15x_1}{10}$, x_1 tùy ý)

2. $$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \dfrac{4 + 2x_3}{3}$, $x_2 = \dfrac{7 - x_3}{3}$, x_3 tùy ý)

3. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3+x_4 &= 1,\\ x_1-2x_2\quad -x_4 &= -2.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_3 = \dfrac{1}{2}(-2x_1+x_2-1)$, $x_4 = x_1-2x_2+2$,
x_1, x_2 tùy ý)

4. $$\left.\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3+3x_4 &= 1,\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4 &= 0,\\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4 &= 1.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = -\dfrac{14}{11}x_3+\dfrac{2}{11}x_4+\dfrac{1}{11}$, $x_2 = -\dfrac{6}{11}x_3-\dfrac{7}{11}x_4+\dfrac{2}{11}$,
x_3, x_4 tùy ý)

5. $$\left.\begin{aligned} 3x_1+5x_2+2x_3+4x_4 &= 3,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 &= 1,\\ 5x_1+9x_2-2x_3+2x_4 &= 9.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ vô nghiệm)

6. $$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 14,\\ 3x_1+2x_2+x_3 &= 10,\\ x_1+x_2+x_3 &= 6,\\ 2x_1+3x_2-x_3 &= 5,\\ x_1+x_2 &= 3.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$)

7. $$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3+x_4+x_5 &= 1,\\ x_1+3x_2-x_3+3x_4+2x_5 &= 3,\\ x_1+3x_2-3x_3-x_4 &= 2.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ vô nghiệm)

8. $$\left.\begin{aligned} 5x_1+x_2-3x_3 &= -6,\\ 2x_1-5x_2+7x_3 &= 9,\\ 4x_1+2x_2-4x_3 &= -7,\\ 5x_1-2x_2+2x_3 &= 1.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{6}$, $x_3 = \dfrac{3}{2}$)

9. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1,\\ x_1+x_2-2x_3-x_4 &= 0,\\ x_1+x_2-4x_3+3x_4 &= 2,\\ x_1+x_2+7x_3+5x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \dfrac{2-3x_2-2x_4}{3}$, $x_3 = \dfrac{1-2x_4}{3}$, x_2, x_4 tùy ý)

10. $$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 5,\\ x_2+2x_3+3x_4 &= 1,\\ x_1 \quad +3x_3+4x_4 &= 2,\\ x_1+x_2+5x_3+6x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \dfrac{15}{4}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $x_3 = -\dfrac{13}{4}$, $x_4 = 2$)

11. $$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 30,\\ -x_1+2x_2-3x_3+4x_4 &= 10,\\ x_2-x_3+x_4 &= 3,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 10. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$)

12. $$\left.\begin{aligned} 5x_1+x_2-3x_3 &= -6,\\ 2x_1-5x_2+7x_3 &= 9,\\ 4x_1+2x_2-4x_3 &= -7,\\ 5x_1-2x_2+2x_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{6}$, $x_3 = \dfrac{3}{2}$)

13. $$\left.\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-x_4 &= 4,\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 &= 8,\\ 2x_1+4x_2+5x_3+10x_4 &= 20,\\ 2x_1-4x_2+x_3-6x_4 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 6-\dfrac{3}{2}x_3-x_4$, $x_2 = 2-\dfrac{1}{2}x_3-2x_4$, x_3 và x_4 tùy ý)

14. $$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2,\\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= -3,\\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 5,\\ 3x_1 \qquad + 3x_3 - 10x_4 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ vô nghiệm)

15. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1,\\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5,\\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = -\dfrac{43}{18}$, $x_3 = \dfrac{13}{9}$, $x_4 = -\dfrac{7}{18}$)

16. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 1,\\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 &= -1,\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5,\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5$, $x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2$, x_3, x_4 tùy ý)

17. $$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3,\\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1,\\ x_1 \qquad - 7x_3 + 2x_4 &= -5,\\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ vô nghiệm)

18. $$\left\{\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5,\\ x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 &= -4,\\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 &= 12,\\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad &= 5. \end{aligned}\right.$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$)

Khảo sát tính tương thích của các hệ phương trình sau đây

19. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0,\\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ không tương thích)

20. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0,\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ tương thích)

21. $$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1,\\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ tương thích)

22. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2,\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23,\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ tương thích)

23. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1,\\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2,\\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1,\\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ không tương thích)

24. $$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1,\\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2,\\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3,\\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ không tương thích)

25. $$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 8x_5 + 3x_6 &= 1,\\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 7x_5 - 9x_6 &= 2,\\ 7x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 - 5x_5 - 8x_6 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Hệ tương thích)

Khảo sát tính tương thích và giải các hệ phương trình (nếu hệ tương thích)

26.
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3,\\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0,\\ 4x_1 - x_2 + x_4 &= 3,\\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 &= -6. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$)

27.
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1,\\ 2x_1 - x_2 \quad - 3x_4 &= 2,\\ 3x_1 \quad - x_3 + x_4 &= -3,\\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$)

28.
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5,\\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7,\\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 14. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$)

29.
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0,\\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 &= -3,\\ 6x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \frac{7}{2} - \frac{3x_2}{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$, x_2 tùy ý)

30.
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= -1,\\ 6x_1 + x_2 \quad - 2x_4 &= -2,\\ 6x_1 - 7x_2 + 21x_3 + 4x_4 &= 3,\\ 9x_1 + 4x_2 \quad + 2x_4 &= 3,\\ 12x_1 - 6x_2 + 21x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \frac{7}{5}$, $x_2 = -4$, $x_3 = -\frac{11}{5}$, $x_4 = \frac{16}{5}$)

31. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1,\\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4,\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$)

32. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6,\\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$)

33. $$\left.\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5,\\ x_1 \quad - 2x_3 + 3x_4 &= -4,\\ 3x_1 + 2x_2 \quad - 5x_4 &= 12,\\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \quad &= 5. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$)

34. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1,\\ x_1 \quad - x_3 + 2x_4 &= 6,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$)

35. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 0,\\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 \quad &= 2,\\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \quad &= -2,\\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$)

36. $$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 \qquad + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 \qquad - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad = 1. \end{array}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$)

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính theo tham số

37. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1,\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3,\\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= \lambda. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. a) Nếu $\lambda = 4$ nghiệm tổng quát là $x_1 = 5 + x_3$,

$x_2 = \dfrac{-7 - 4x_3}{2}$, x_3 tùy ý;

b) Nếu $\lambda \neq 4$ hệ không tương thích)

38. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 &= 0,\\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -3,\\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. a) Nếu $\lambda \neq 1$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{-5\lambda - 11}{3(\lambda - 1)}, \quad x_2 = \frac{2\lambda - 22}{3(\lambda - 1)}, \quad x_3 = \frac{4}{\lambda - 1};$$

b) Nếu $\lambda = 1$ hệ không tương thích)

39. $$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. a) Nếu $\lambda \neq -2$, 1 hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\lambda + 2}$

b) Nếu $\lambda = -2$ hệ không tương thích;

c) Nếu $\lambda = 1$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số và $x_1 + x_2 + x_3 = 1$)

40. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3,\\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= a,\\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= a^2. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. a) Nếu $a = -1$ hoặc $a = 3$ hệ tương thích và $x_1 = 5$,

$x_2 = -8 - 2x_3$, x_3 tùy ý;

b) Nếu $a \neq -1$, $a \neq 3$ thì hệ không tương thích)

41. $$\left.\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda,\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^2. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. a) Nếu $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, \quad x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, \quad x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}\cdot$$

b) Nếu $\lambda = 0$ hoặc $\lambda = -3$ hệ không tương thích)

42. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= -1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. a) Khi $\lambda \neq -3$ và $\lambda \neq 1$ hệ có nghiệm duy nhất;

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{1}{\lambda-1}, \quad x_4 = \frac{1}{\lambda-1}\cdot$$

b) Khi $\lambda = -3$ nghiệm tổng quát là

$$x_1 = \frac{1}{4} + x_4; \quad x_2 = \frac{1}{4} + x_4, \quad x_3 = \frac{1}{2} + x_4; x_3 \text{ tùy ý};$$

c) Khi $\lambda = 1$ hệ không tương thích)

4.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là *hệ thuần nhất* nếu số hạng tự do của mỗi phương trình đều bằng 0.

Hệ thuần nhất có dạng

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0,\\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots &\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Hệ phương trình thuần nhất luôn luôn tương thích vì nó có ít nhất là nghiệm-không. Nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường*.

Định lý. 1^+ *Hệ* (4.10) *có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi hạng của ma trận của hệ bé hơn số ẩn của hệ đó.*

2^+ *Hệ thuần nhất n phương trình với n ẩn có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức D của hệ bằng 0.*

Giả sử $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ là nghiệm không tầm thường nào đó của hệ (4.10). Nghiệm này có thể xem như một hàng gồm n phần tử

$$e_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Khi đó theo định nghĩa, hàng $\lambda e_1 = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)$ cũng là nghiệm của (4.10). Giả sử hàng

$$e_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

là một nghiệm khác của (4.10). Khi đó hàng tổ hợp tuyến tính

$$\lambda e_1 + \mu e_2 \overset{def}{=} \big(\lambda_1\alpha_1 + \mu\beta_1, \lambda_1\alpha_2 + \mu\beta_2, \dots, \lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$$

cũng là nghiệm của (4.10). Từ đó: mọi tổ hợp tuyến tính các nghiệm của hệ thuần nhất (4.10) cũng là nghiệm của nó.

Định nghĩa 1. 1^+ Các hàng $e_1, e_2, \dots, e_m$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu có thể tìm được các số $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ *không đồng thời bằng 0* sao cho

$$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_m e_m = 0. \tag{4.11}$$

2^+ Nếu các số γ_i, $i = \overline{1, m}$ như vậy không tồn tại (tức là đẳng thức (4.11) chỉ thỏa mãn khi $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 0$) thì người ta nói rằng $e_1, e_2, \dots, e_m$ *độc lập tuyến tính*.

Định nghĩa 2. Hệ độc lập tuyến tính các nghiệm

$$e_1, e_2, \dots, e_m$$

của hệ phương trình (4.10) được gọi là *hệ nghiệm cơ bản* của nó nếu mỗi nghiệm của hệ (4.10) đều là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Định lý (về sự tồn tại hệ nghiệm cơ bản). *Nếu hạng của ma trận của hệ* (4.10) *bé hơn số ẩn thì hệ* (4.10) *có hệ nghiệm cơ bản.*

Phương pháp tìm hệ nghiệm cơ bản

1) Đầu tiên cần tách ra hệ ẩn cơ sở (giả sử đó là $x_1, \dots, x_r$) và thu được hệ

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{array}\right\} \tag{4.12}$$

2) Giả sử hệ (4.12) có nghiệm là

$$x_i = \big(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_r^{(i)}; x_{r+1}, \dots, x_n)\big); \quad i = \overline{1, r}.$$

Cho các ẩn tự do các giá trị

$$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

ta thu được

$$e_1 = \big(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_r^{(1)}; 1, 0, \dots, 0\big)$$

Tương tự, với $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = 0, \dots, x_n = 0$ ta có

$$e_2 = \big(\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_r^{(2)}; 0, 1, 0, \dots, 0\big), \dots$$

và sau cùng với $x_{r+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n = 1$ ta thu được

$$e_k = (\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_r^{(k)}, 0, \dots, 1), \quad k = n - r.$$

Hệ các nghiệm $e_1, e_2, \dots, e_k$ vừa thu được là hệ nghiệm cơ bản.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

$$\left.\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = 0. \end{array}\right\}$$

Giải. 1) Vì số phương trình bé hơn số ẩn nên tập hợp nghiệm của hệ là vô hạn.

Hiển nhiên hạng của ma trận của hệ bằng 2 vì trong các định thức con cấp 2 có định thức con

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Do vậy hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= -x_1 - x_4, \\ 4x_1 + x_3 &= -2x_2 + 3x_4. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$x_1 = \frac{-3x_2 + 2x_4}{6}, \qquad x_3 = \frac{5}{3}x_4. \tag{4.13}$$

Do đó tập hợp nghiệm của hệ có dạng

$$\left\{\frac{-3\alpha + 2\beta}{6}; \alpha; \frac{5}{3}\beta; \beta \middle| \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \tag{*}$$

2) Nếu trong (4.13) ta cho các ẩn tự do bởi các giá trị lần lượt bằng các phần tử của các cột định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\neq 0)$$

thì thu được các nghiệm

$$e_1 = \left(-\frac{1}{2}; 1; 0; 0\right) \quad \text{và} \quad e_2 = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{5}{3}; 1\right).$$

Đó là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình đã cho và nghiệm tổng quát của hệ đã cho có thể biểu diễn dưới dạng

$$X = \lambda e_1 + \mu e_2 = \lambda\left(-\frac{1}{2}; 1; 0; 0\right) + \mu\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{5}{3}; 1\right)$$

trong đó λ và μ là các hằng số tùy ý:

$$X = \Big(\frac{-3\lambda + 2\mu}{6}; \lambda; \frac{5}{3}\mu; \mu \Big| \ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\Big).$$

Khi cho λ và μ các giá trị số khác nhau ta sẽ thu được các nghiệm riêng khác nhau. ▲

Ví dụ 2. Giải hệ

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \quad &= 0,\\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \quad &= 0,\\ 7x_1 + 14x_2 - 7x_3 \quad &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Giải. Hệ đã cho tương đương với phương trình

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là:

$$\begin{aligned} &x_1 = -2x_2 + x_3,\\ &x_2 = x_2,\\ &x_3 = x_3; \quad x_2 \text{ và } x_3 \text{ tùy ý}, \end{aligned}$$

hay dưới dạng khác

$$e = (-2x_2 + x_3; x_2; x_3).$$

Cho $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ ta có

$$e_1 = (-2; 1; 0),$$

lại cho $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ ta thu được

$$e_2 = (1, 0, 1).$$

Hai hàng e_1 và e_2 là độc lập tuyến tính và mọi nghiệm của hệ đều có dạng

$$X = \lambda e_1 + \mu e_2 = (-2\lambda + \mu; \lambda; \mu)$$

trong đó λ và μ là các số tùy ý. ▲

Ví dụ 3. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0,\\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 &= 0,\\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0,\\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Giải. Bằng các phép biến đổi sơ cấp, dễ dàng thấy rằng hệ đã cho có thể đưa về hệ bậc thang sau đây

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0,\\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0,\\ x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ta sẽ chọn x_1, x_2 và x_4 làm ẩn cơ sở; còn x_3 và x_5 làm ẩn tự do. Ta có hệ

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_4 &= -3x_3 - 4x_5,\\ x_2 + x_4 &= -2x_3 - 3x_5,\\ x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Giải hệ này ta thu được nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 + 5x_5,\\ x_2 &= -2x_3 - 3x_5,\\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Cho các ẩn tự do lần lượt các giá trị bằng $x_3 = 1$, $x_5 = 0$ (khi đó $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$) và cho $x_3 = 0$, $x_5 = 1$ (khi đó $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$) ta thu được hệ nghiệm cơ bản

$$\begin{aligned} e_1 &= (3; -2; 1; 0; 0),\\ e_2 &= (5; -3; 0; 0; 1). \end{aligned}$$

Từ đó nghiệm tổng quát có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} X &= \lambda(3; -2; 1; 0; 0) + \mu(5; -3; 0; 0; 1) \\ &= (3\lambda + 5\mu; -2\lambda - 3\mu; \lambda; 0; \mu); \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bằng cách cho λ và μ những giá trị số khác nhau ta thu được các nghiệm riêng khác nhau. Đồng thời, mọi nghiệm riêng có thể thu được từ đó bằng cách chọn các hệ số λ và μ thích hợp. ▲

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình thuần nhất

1. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0,\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0.\end{aligned}\right\}.$$

(ĐS. $x_1 = \alpha$, $x_2 = -2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$)

2. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0.\end{aligned}\right\}.$$ (ĐS. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$)

3. $$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 &= 0,\\ 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \dfrac{4\alpha - \beta}{3}$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_4 = 0$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tùy ý)

4. $$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 6x_4 &= 0,\\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \dfrac{-\alpha + 4\beta}{3}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tùy ý)

5. $$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0,\\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0,\\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = -\dfrac{1}{4}\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \dfrac{3}{4}\alpha$, $x_4 = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý)

6. $$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0,\\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0,\\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = -\dfrac{\alpha}{4}$, $x_2 = \dfrac{5\alpha}{4} + \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tùy ý)

7. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0,\\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0,\\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. $x_1 = \dfrac{\alpha}{7}$, $x_2 = \dfrac{9\alpha}{7}$, $x_3 = \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý)

Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của các hệ phương trình

8. $$\left.\begin{aligned} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 &= 0,\\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Nghiệm tổng quát: $x_1 = -\frac{7}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3$, $x_4 = 0$.

Hệ nghiệm cơ bản $e_1 = (-7, 3, 0, 0)$, $e_2 = (5, 0, 3, 0)$)

9. $$\left.\begin{aligned} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 &= 0,\\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 &= 0,\\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Nghiệm tổng quát: $x_3 = 2x_1 + 5x_2 - 9x_3$.

Hệ nghiệm cơ bản: $e_1 = (1, 0, 2, 0)$; $e_2 = (0, 1, 5, 0)$; $e_3 = (0, 0, -9, 1)$)

10. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad - 3x_5 &= 0,\\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Nghiệm tổng quát: $x_1 = 2x_3 + 8x_4$, $x_2 = -x_2 - 2x_4$; $x_5 = 0$.

Hệ nghiệm cơ bản: $e_1 = (2, -1, 1, 0, 0)$; $e_2 = (8, -2, 0, 1, 0)$

11. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0,\\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Nghiệm tổng quát: $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$.

Hệ nghiệm cơ bản: $e_1 = (8, -6, 1, 0)$, $e_2 = (-7, 5, 0, 1)$)

12. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0,\\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0,\\ 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Nghiệm tổng quát $x_1 = -2x_2$, $x_4 = 2x_3$.

Hệ nghiệm cơ bản: $e_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 2)$)

13.
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0,\\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 &= 0,\\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

(ĐS. Nghiệm tổng quát $x_1 = x_3 + 15x_5$, $x_2 = -2x_3 - 12x_5$, $x_4 = x_5$. Hệ nghiệm cơ bản: $e_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $e_2 = (15, -12, 0, 1, 1)$)

Chương 5

Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$

5.1 Định nghĩa không gian n-chiều và một số khái niệm cơ bản về vectơ

1°. Giả sử $n \in N$. Tập hợp mọi bộ có thể có $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gồm n số thực (phức) được gọi là *không gian thực (phức) n-chiều* và được ký hiệu là $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$). Mỗi bộ số đó được chỉ bởi

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

và được gọi là *điểm* hay *vectơ* của $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$). Các số $x_1, \ldots, x_n$ được gọi là *tọa độ* của điểm (của vectơ) x hay các thành phần của vectơ x.

Hai vectơ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, \ldots, y_n)$ của $\mathbb{R}^n$ được xem là bằng nhau nếu các tọa độ tương ứng của chúng bằng nhau

$$x_i = y_i \quad \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Các vectơ $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ có thể cộng với nhau và có thể nhân với các số $\alpha, \beta, \ldots$ là số thực nếu không gian được xét là không gian thực và là số phức nếu không gian được xét là không gian phức.

Theo định nghĩa: 1^+ tổng của vectơ x và y là vectơ

$$x + y \stackrel{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{5.1}$$

2^+ tích của vectơ x với số α hay tích số α với vectơ x là vectơ

$$\alpha x = x\alpha \stackrel{def}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \tag{5.2}$$

Hai phép toán 1^+ và 2^+ thỏa mãn các tính chất (tiên đề) sau đây
I. $x + y = y + x,\ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$),
II. $(x + y) + z = x + (y + z)\ \ \forall\, x, y, z \in= \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$),
III. Tồn tại vectơ- không $\theta = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}) \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$x + \theta = \theta + x = x,$$

IV. Tồn tại vectơ đối $-x = (-1)x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ sao cho

$$x + (-x) = \theta,$$

V. $1 \cdot x = x$,

VI. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$),

VII. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

VIII. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

trong đó α và β là các số, còn $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Định nghĩa 5.1.1. 1^+ Giả sử $\mathcal{V}$ là tập hợp không rỗng tùy ý với các phần tử được ký hiệu là $x, y, z, \dots$ Tập hợp $\mathcal{V}$ được gọi là không gian *tuyến tính (hay không gian vectơ)* nếu $\forall\, x, y \in \mathcal{V}$ xác định được phần tử $x + y \in \mathcal{V}$ (gọi là tổng của x và y) và $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) và $\forall\, x \in \mathcal{V}$ xác định được phần tử $\alpha x \in \mathcal{V}$ (gọi là tích của số α với phần tử x) sao cho các tiên đề I-VIII được thỏa mãn.

Không gian tuyến tính với phép nhân các phần tử của nó với các số thực (phức) được gọi là không gian tuyến tính thực (tương ứng: phức).

Không gian $\mathbb{R}^n$ có thể xem như một ví dụ về không gian tuyến tính, các ví dụ khác sẽ được xét về sau. Và trong giáo trình này ta luôn giả thiết rằng các không gian được xét là *những không gian thực.*

2°. Cho hệ gồm m vectơ n-chiều

$$x^1, x^2, \dots, x^m. \tag{5.3}$$

Khi đó vectơ dạng

$$y = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m; \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

được gọi là *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ đã cho hay vectơ *y biểu diễn tuyến tính được* qua các vectơ (5.3).

Định nghĩa 5.1.2. 1^+ Hệ vectơ (5.3) được gọi là *hệ độc lập tuyến tính* (đltt) nếu từ đẳng thức vectơ

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_m x^m = \theta \tag{5.4}$$

kéo theo $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

2^+ Hệ (5.3) gọi là hệ *phụ thuộc tuyến tính* (pttt) nếu tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho đẳng thức (5.4) được thỏa mãn.

Số nguyên dương r được gọi là hạng của hệ vectơ (5.3) nếu

a) Có một tập hợp con gồm r vectơ của hệ (5.3) lập thành hệ đltt.

b) Mọi tập con gồm nhiều hơn r vectơ của hệ (5.3) đều phụ thuộc tuyến tính.

Để tìm hạng của hệ vectơ ta lập ma trận các tọa độ của nó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Định lý. *Hạng của hệ vectơ* (5.3) *bằng hạng của ma trận* A *các tọa độ của nó.*

Từ đó, để kết luận hệ vectơ (5.3) đltt hay pttt ta cần lập ma trận tọa độ A của chúng và tính $r(A)$:

1) Nếu $r(A) = m$ thì hệ (5.3) độc lập tuyến tính.

2) Nếu $r(A) = s < m$ thì hệ (5.3) phụ thuộc tuyến tính.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hệ vectơ $a_1, a_2, \dots, a_m$ $(m > 1)$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ít nhất một trong các vectơ của hệ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Giải. 1^+ Giả sử hệ $a_1, a_2, \dots, a_m$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m = \theta.$$

Giả sử $\alpha_m \neq 0$. Khi đó

$$a_m = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{m-1} a_{m-1}, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_m}$$

tức là a_m biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại.

2^+ Ngược lại, chẳng hạn nếu vectơ a_m biểu diễn tuyến tính qua $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$

$$a_m = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{m-1} a_{m-1}$$

thì ta có

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{m-1} a_{m-1} + (-1) a_m = \theta.$$

Do đó hệ đã cho phụ thuộc tuyến tính vì trong đẳng thức trên có hệ số của a_m là khác 0 (cụ thể là $= -1$). ▲

Ví dụ 2. Chứng minh rằng mọi hệ vectơ có chứa vectơ-không là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Vectơ- không luôn luôn biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vectơ $a_1, a_2, \dots, a_m$:

$$\theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_m$$

Do đó theo định nghĩa hệ $\theta, a_1, \dots, a_m$ phụ thuộc tuyến tính (xem ví dụ 1). ▲

Ví dụ 3. Chứng minh rằng mọi hệ vectơ có chứa hai vectơ bằng nhau là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Giả sử trong hệ $a_1, a_2, \dots, a_n$ có hai vectơ $a_1 = a_2$. Khi đó ta có thể viết

$$a_1 = 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \cdots + 0 \cdot a_m$$

tức là vectơ a_1 của hệ có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại. Do đó hệ phụ thuộc tuyến tính (ví dụ 1). ▲

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu hệ m vectơ $a_1, a_2, \dots, a_m$ độc lập tuyến tính thì mọi hệ con của hệ đó cũng độc lập tuyến tính.

Giải. Để cho xác định ta xét hệ con $a_1, a_2, \dots, a_k$, $k < m$ và chứng minh rằng hệ con này độc lập tuyến tính.

Giả sử ngược lại: hệ con $a_1, a_2, \dots, a_k$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó ta có các đẳng thức vectơ

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \theta$$

trong đó có ít nhất một trong các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ khác 0. Ta viết đẳng thức đó dưới dạng

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \cdots + \alpha_m a_m = \theta$$

trong đó ta giả thiết $\alpha_{k+1} = 0, \dots, \alpha_m = 0$. Đẳng thức sau cùng này chứng tỏ hệ $a_1, a_2, \dots, a_m$ phụ thuộc tuyến tính. Mâu thuẫn. ▲

Ví dụ 5. Chứng minh rằng hệ vectơ của không gian $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \quad \dots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

là độc lập tuyến tính.

Giải. Từ đẳng thức vectơ

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \theta$$

suy ra rằng

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

và do đó hệ $e_1, e_2, \dots, e_n$ độc lập tuyến tính. ▲

Ví dụ 6. Chứng minh rằng mọi hệ gồm $n+1$ vectơ của $\mathbb{R}^n$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Giả sử $n+1$ vectơ của hệ là:

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\ a_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n+1} &= (a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \dots, a_{n,n+1}). \end{aligned}$$

Khi đó từ đẳng thức vectơ

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n + x_{n+1}a_{n+1} = \theta$$

suy ra

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n+1}x_{n+1} &= 0,\\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad &\ \ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn+1}x_{n+1} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Đó là hệ thuần nhất n phương trình với $(n+1)$ ẩn nên hệ có nghiệm không tầm thường và

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$

Do đó theo định nghĩa hệ đã xét là phụ thuộc tuyến tính. ▲

Ví dụ 7. Tìm hạng của hệ vectơ trong $\mathbb{R}^4$

$$a_1 = (1,1,1,1); \quad a_2 = (1,2,3,4);$$
$$a_3 = (2,3,2,3); \quad a_4 = (2,4,5,6).$$

Giải. Ta lập ma trận các tọa độ và tìm hạng của nó. Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ h_2 - h_1 \to h_2'\\ h_3 - 2h_1 \to h_3'\\ h_4 - 3h_1 \to h_4' \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ h_3 - h_2 \to h_3'\\ h_4 - h_2 \to h_4' \end{array} \to$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy rằng $r(A) = 3$. Theo định lý đã nêu hạng của hệ vectơ bằng 3. ▲

Ví dụ 8. Khảo sát sự phụ thuộc tuyến tính giữa các vectơ của $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = (1, 4, 1, 1); \quad a_2 = (2, 3, -1, 1);$$
$$a_3 = (1, 9, 4, 2); \quad a_4 = (1, -6, -5, -1).$$

Giải. Lập ma trận mà các hàng của nó là các vectơ đã cho và tìm hạng của nó

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Do đó hạng của hệ vectơ bằng 2. Vì các phần tử của định thức con

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

nằm ở hai hàng đầu nên a_1 và a_2 độc lập tuyến tính, còn a_3 và a_4 biểu diễn tuyến tính qua a_1 và a_2. [Lưu ý rằng mọi cặp vectơ của hệ đều độc lập tuyến tính vì ta có các định thức con cấp hai sau đây $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}.]$$

Ta tìm các biểu thức biểu diễn a_3 và a_4 qua a_1 và a_2.

Ta viết

$$a_3 = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$$

hay là

$$(1, 9, 4, 2) = \xi_1 \cdot (1, 4, 1, 1) + \xi_2 \cdot (2, 3, -1, 1)$$
$$\Rightarrow (1, 9, 4, 2) = (\xi_1 + 2\xi_2, 4\xi_1 + 3\xi_2, \xi_1 - \xi_2, \xi_1 + \xi_2)$$

và thu được hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &= 1,\\ 4\xi_1 + 3\xi_2 &= 9,\\ \xi_1 - \xi_2 &= 4,\\ \xi_1 + \xi_2 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Ta hạn chế hai phương trình đầu. Định thức của các hệ số của hai phương trình này chính là định thức Δ chuyển vị. Vì $\Delta \neq 0$ nên hệ hai phương trình

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &= 1\\ 4\xi_1 + 3\xi_2 &= 9 \end{aligned}$$

có nghiệm duy nhất là $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = -1$. Do đó

$$a_3 = 3a_1 - a_2.$$

Tương tự ta có

$$a_4 = 2a_2 - 3a_1. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng trong không gian $\mathbb{R}^3$:

1) Vectơ (x, y, z) là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

2) Vectơ $x = (7, 2, 6)$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $a_1 = (-3, 1, 2)$, $a_2 = (-5, 2, 3)$, $a_3 = (1, -1, 1)$.

2. Hãy xác định số λ để vectơ $x \in \mathbb{R}^3$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ nếu:

1) $x = (1, 3, 5)$; $a_1 = (3, 2, 5)$; $a_2 = (2, 4, 7)$; $a_3 = (5, 6, \lambda)$.

(ĐS. $\lambda \neq 12$)

2) $x = (7, -2, \lambda)$; $a_1 = (2, 3, 5)$; $a_2 = (3, 7, 8)$; $a_3 = (1, -6, 1)$.

(ĐS. $\lambda = 15$)

3) $x = (5, 9, \lambda)$; $a_1 = (4, 4, 3)$; $a_2 = (7, 2, 1)$; $a_3 = (4, 1, 6)$.

(ĐS. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$)

3. Chứng minh rằng trong không gian $\mathbb{R}^3$:

1) Hệ ba vectơ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ là hệ đltt.

2) Nếu thêm vectơ $x \in \mathbb{R}^3$ bất kỳ vào hệ thì hệ

$$\{e_1, e_2, e_3, x\}$$

là phụ thuộc tuyến tính.

3) Hệ gồm bốn vectơ bất kỳ của $\mathbb{R}^3$ là pttt.

4. Các hệ vectơ sau đây trong không gian $\mathbb{R}^3$ là đltt hay pttt:

1) $a_1 = (1, 2, 1)$; $a_2 = (0, 1, 2)$; $a_3 = (0, 0, 2)$. (ĐS. Đltt)

2) $a_1 = (1, 1, 0)$; $a_2 = (1, 0, 1)$; $a_3 = (1, -2, 0)$. (ĐS. Đltt)

3) $a_1 = (1, 3, 3)$; $a_2 = (1, 1, 1)$; $a_3 = (-2, -4, -4)$. (ĐS. Pttt)

4) $a_1 = 1, -3, 0)$; $a_2 = (3, -3, 1)$; $a_3 = (2, 0, 1)$. (ĐS. Pttt)

5) $a_1 = (2, 3, 1)$; $a_2 = (1, 1, 1)$; $a_3 = (1, 2, 0)$. (ĐS. Pttt)

5. Giả sử v_1, v_2 và v_3 là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh rằng hệ sau đây cũng là đltt:

1) $a_1 = v_1 + v_2$; $a_2 = v_1 + v_3$; $a_3 = v_1 - 2v_2$.

2) $a_1 = v_1 + v_3$; $a_2 = v_3 - v_1$; $a_3 = v_1 + v_2 - v_3$.

6. Chứng minh rằng các hệ vectơ sau đây là phụ thuộc tuyến tính. Đối với hệ vectơ nào thì vectơ b là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại ?

1) $a_1 = (2, 0, -1)$, $a_2 = (3, 0, -2)$, $a_3 = (-1, 0, 1)$, $b = (1, 2, 0)$.

(ĐS. b không là tổ hợp tuyến tính)

2) $a_1 = (-2, 0, 1)$, $a_2 = (1, -1, 0)$, $a_3 = (0, 1, 2)$; $b = (2, 3, 6)$.

(ĐS. b là tổ hợp tuyến tính)

7. Tìm số cực đại các vectơ đltt trong các hệ vectơ sau đây

1) $a_1 = (2, 3, -1, 4)$; $a_2 = (-1, 1, 2, 0)$; $a_3 = (0, 0, 1, 1)$;
$a_4 = (1, 4, 1, 4)$; $a_5 = (2, 3, 0, 5)$. (ĐS. $= 3$)

2) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$; $a_2 = (0, 1, 0, 0)$; $a_3 = (0, 0, 1, 0)$
$a_4 = (0, 0, 0, 1)$; $a_5 = (1, 2, 3, 4)$. (ĐS. $= 4$)

3) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$; $a_2 = (1, 1, 1, 0)$; $a_3 = (1, 1, 0, 0)$;
$a_4 = (1, 0, 0, 0)$; $a_5 = (1, 2, 3, 4)$. (ĐS. $= 4$)

Chỉ dẫn. Lập ma trận các tọa độ mà mỗi cột của nó là tọa độ của vectơ của hệ rồi tính hạng của ma trận.

8. Các hệ vectơ sau đây trong không gian $\mathbb{R}^4$ là đltt hay pttt

1) $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (1, 2, 3, 4)$. (ĐS. Pttt)

2) $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (1, -2, -3, -4)$. (ĐS. Pttt)

3) $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (3, 6, 9, 12)$. (ĐS. Pttt)

4) $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $(a_2 = (1, 2, 3, 5)$. (ĐS. Đltt)

5) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$
và a là vectơ tùy ý của $\mathbb{R}^4$. (ĐS. Pttt)

6) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$.
(ĐS. Đltt)

7) $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (3, 6, 9, 12)$, $a_3 = (1, 2, 3, 6)$. (ĐS. Pttt)

9. Các hệ vectơ sau đây đltt hay pttt. Trong trường hợp pttt hãy chỉ ra một sự pttt. Hãy chỉ ra một hệ con cực đại nào đó là đltt.

1) $a_1 = (2, 1, -2, -1)$, $a_2 = (-9, 5, -6, 21)$, $a_3 = (2, -5, -1, 3)$,
$a_4 = (-1, -1, -1, 5)$, $a_5 = (-1, 2, -3, 4)$.
(ĐS. $a_1 + a_2 + a_3 - 3a_4 - 2a_5 = \theta$; a_1, a_2, a_3, a_4)

2) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 0, 1, -1)$, $a_3 = (3, -4, 0, -1)$,
$a_4 = (13, -10, 3, -2)$. (ĐS. $2a_1 + a_2 + 3a_3 - a_4 = \theta$; a_1, a_2, a_3)

3) $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $a_2 = (2, 0, 1, -1)$, $a_3 = (3, -1, 1, -1)$,
$a_4 = (4, -2, 1, -2)$. (ĐS. Hệ độc lập tuyến tính)

4) $a_1 = (1, 2, -2, -1)$, $a_2 = (-1, 0, 2, 1)$, $a_3 = (0, 1, 0, 1)$,
$a_4 = (3, 6, 0, 4)$. (ĐS. Hệ độc lập tuyến tính)

10. Tính hạng r của hệ vectơ và chỉ rõ hệ đã cho là pttt hay đltt:

1) $a_1 = (1, -2, 2, -8, 2)$, $a_2 = (1, -2, 1, 5, 3)$, $a_3 = (1, -2, 4, -7, 0)$. (ĐS. $r = 3$, hệ độc lập tuyến tính)

2) $a_1 = (2, 3, 1, -1)$, $a_2 = (3, 1, 4, 2)$, $a_3 = (1, 2, 3, -1)$, $a_4 = (1, -4, -7, 5)$. (ĐS. $r = 3$, hệ pttt)

3) $a_1 = (2, -1, -3, 2, -6)$, $a_2 = (1, 5, -2, 3, 4)$, $a_3 = (3, 4, -1, 5, 7)$, $a_4 = (3, -7, 4, 1, -7)$, $a_5 = (0, 11, -5, 4, -4)$. (ĐS. $r = 3$ hệ pttt)

4) $a_1 = (2, 1, 4, -4, 17)$, $a_2 = (0, 0, 5, -7, 9)$, $a_3 = (2, 1, -6, 10, -11)$,
$a_4 = (8, 4, 1, 5, 11)$, $a_5 = (2, 2, 9, -11, 10)$. (ĐS. $r = 5$, hệ đltt)

5.2 Cơ sở. Đổi cơ sở

Định nghĩa 5.2.1. Hệ vectơ $E_1, E_2, \dots, E_n$ gồm n vectơ của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ được gọi là một cơ sở của nó nếu

1) hệ $E_1, E_2, \dots, E_n$ là hệ đltt;

2) mọi vectơ $x \in \mathbb{R}^n$ đều biểu diễn tuyến tính được qua các vectơ của hệ $E_1, \dots, E_n$.

Chú ý rằng cơ sở của $\mathbb{R}^n$ là một *hệ có thứ tự* bất kỳ gồm n vectơ độc lập tuyến tính của nó.

Điều kiện 2) có nghĩa rằng $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$$x = x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_nE_n, \tag{5.5}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là tọa độ của vectơ x trong cơ sở $E_1, E_2, \dots, E_n$ và (5.5) gọi là *khai triển vectơ* x theo cơ sở $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Ý nghĩa cơ bản của khái niệm cơ sở là: các phép toán tuyến tính trên các vectơ trong cơ sở cho trước chuyển thành các phép toán trên các số là tọa độ của chúng.

Định lý 5.2.1. *Trong không gian* $\mathbb{R}^n$*:*

1) *Tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở là duy nhất.*

2) *Mọi hệ đltt gồm n vectơ đều lập thành cơ sở của không gian* $\mathbb{R}^n$.

Ta xét vấn đề: Khi cơ sở thay đổi thì tọa độ của một vectơ trong không gian $\mathbb{R}^n$ thay đổi thế nào ?

Giả sử trong không gian $\mathbb{R}^n$ có hai cơ sở

$$\mathcal{E} : \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n \text{ - “cơ sở cũ”} \tag{5.6}$$

$$E : E_1, E_2, \dots, E_n \text{ - “cơ sở mới”} \tag{5.7}$$

Vì $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathbb{R}^n$ nên

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= t_{11}\varepsilon_1 + t_{21}\varepsilon_2 + \cdots + t_{n1}\varepsilon_n,\\ E_2 &= t_{12}\varepsilon_1 + t_{22}\varepsilon_2 + \cdots + t_{n2}\varepsilon_n,\\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ E_n &= t_{1n}\varepsilon_1 + t_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + t_{nn}\varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Có thể nói rằng cơ sở $E_1, \dots, E_n$ thu được từ cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ nhờ ma trận

$$T_{\mathcal{E}E} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n}\\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

trong đó cột thứ i của ma trận (5.9) chính là các tọa độ của vectơ E_i trong cơ sở (5.6).

Ma trận $T = T_{\mathcal{E}E}$ trong (5.9) được gọi là *ma trận chuyển* từ cơ sở (5.6) đến cơ sở (5.7). Định thức của ma trận chuyển $\det T \neq 0$ vì trong trường hợp ngược lại thì các vectơ cột (và do đó các vectơ $E_1, \dots, E_n$) là phụ thuộc tuyến tính.

Như vậy để tìm ma trận chuyển từ cơ sở cũ sang cơ sở mới đầu tiên ta cần khai triển các vectơ của cơ sở mới theo cơ sở cũ. Tiếp đó ta lập ma trận mà cột thứ i của nó là các tọa độ của vectơ thứ i của cơ sở mới trong cơ sở cũ. Đó chính là ma trận chuyển.

Giả sử vectơ $a \in \mathbb{R}^n$ và

$$a = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$
$$a = y_1E_1 + y_2E_2 + \cdots + y_nE_n.$$

Khi đó quan hệ giữa các tọa độ của cùng một vectơ đối với hai cơ sở khác nhau (5.6) và (5.7) được mô tả như sau

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \cdots + t_{1n}y_n, \\ x_2 & = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \cdots + t_{2n}y_n, \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n & = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \cdots + t_{nn}y_n. \end{array}\right\} \tag{5.10}$$

hay là

$$X = T_{\mathcal{E}E}Y, \tag{5.11}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Từ đó cũng suy ra

$$Y = T^{-1}_{\mathcal{E}E}X. \tag{5.11*}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ hệ các vectơ $\mathcal{E}_1(1,0,0)$, $\mathcal{E}_2(0,2,0)$, $\mathcal{E}_3(0,0,3)$ là cơ sở của nó.

Giải. 1) Hệ vectơ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ là hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, đẳng thức vectơ

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathcal{E}_1 + \alpha_2\mathcal{E}_2 + \alpha_3\mathcal{E}_3 &= (0,0,0) \\ \Leftrightarrow \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,2,0) + \alpha_3(0,0,3) &= (0,0,0) \\ \Leftrightarrow (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3) &= (0,0,0) \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

2) Giả sử $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Khi đó

$$\begin{aligned} x &= \xi_1(1,0,0) + \frac{\xi_2}{2}(0,2,0) + \frac{\xi_3}{3}(0,0,3) \\ &= \xi_1\mathcal{E}_1 + \frac{\xi_2}{2}\mathcal{E}_2 + \frac{\xi_3}{3}\mathcal{E}_3 \end{aligned}$$

tức là x là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. ▲

Ví dụ 2. Chứng minh rằng trong không gian $\mathbb{R}^3$ các vectơ $\mathcal{E}_1 = (2,1,1)$, $\mathcal{E}_2 = (1,3,1)$, $\mathcal{E}_3 = (-2,1,3)$ lập thành một cơ sở. Tìm tọa độ của vectơ $x = (-2,-4,2)$ theo cơ sở đó.

Giải. 1) Hệ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ là đltt. Thật vậy giả sử $\alpha_1\mathcal{E}_1 + \alpha_2\mathcal{E}_2 + \alpha_3\mathcal{E}_3 = \theta \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Hệ này có $\det A \neq 0$ và là hệ thuần nhất nên nó chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ và do đó $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ độc lập tuyến tính. Theo định lý 1 (phần 2) các vectơ này lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2) Để khai triển vectơ $x = (-2,-4,2)$ theo cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ ta đặt

$$x = \lambda_1\mathcal{E}_1 + \lambda_2\mathcal{E}_2 + \lambda_3\mathcal{E}_3$$

và từ đó

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &= -2, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= -4, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Hệ này có nghiệm là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$. Vậy trong cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ vectơ x có tọa độ là $(1,-2,1)$. ▲

Ví dụ 3. Chứng minh rằng ba vectơ $\mathcal{E}_1 = (1,0,-2)$, $\mathcal{E}_2 = (-4,-1,5)$, $\mathcal{E}_3 = (1,3,4)$ lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. Ta có thể tìm hạng của hệ ba vectơ đã cho. Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 13 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy ra rằng hạng của hệ vectơ đã cho bằng 3 và do vậy hệ đó là độc lập tuyến tính. Theo định lý 1 nó lập thành một cơ sở. ▲

Ví dụ 4. Giả sử trong cơ sở $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ vectơ x có tọa độ là $1; -2$. Tìm tọa độ của vectơ đó trong cơ sở $E_1 = \mathcal{E}_1$, $E_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$.

Giải. Đầu tiên ta viết ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ đến E_1, E_2. Ta có

$$E_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$
$$E_2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2.$$

Do đó

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng công thức (11*) ta có

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Do đó $y_1 = 3$, $y_2 = -2$. ▲

Ví dụ 5 (phép quay trục tọa độ). Hãy dẫn ra công thức biến đổi các tọa độ của vectơ trong $\mathbb{R}^2$ trong một cơ sở thu được từ cơ sở chính tắc $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ sau phép quay trục tọa độ góc φ.

Hình 5.1

Giải. Từ hình vẽ suy ra rằng vectơ e_1^* lập với các vectơ e_1 và e_2 các góc tương ứng bằng φ và $\varphi - \dfrac{\pi}{2}$. Do đó tọa độ của e_1^* trong cơ sở e_1, e_2 là $\cos\varphi$ và $\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$:

$$e_1^* = \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\varphi \cdot e_2$$

Vectơ e_2^* lập với e_1 và e_2 các góc tương ứng bằng $\dfrac{\pi}{2} + \varphi$ và φ. Do đó tọa độ của nó trong cơ sở e_1, e_2 là $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$ và $\cos\varphi$:

$$e_2^* = -\sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2.$$

Như vậy

$$\begin{aligned} e_1^* &= \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\varphi \cdot e_2, \\ e_2^* &= -\sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2. \end{aligned}$$

và từ đó

$$T_{ee^*} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$T_{ee^*}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Do vậy các tọa độ của vectơ trong cơ sở cũ và mới liên hệ bởi các hệ thức

$$\left.\begin{aligned} x &= x^*\cos\varphi - y^*\sin\varphi, \\ y &= x^*\sin\varphi + y^*\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y^* &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Giả sử $x = (3, -1, 0)$ là vectơ của $\mathbb{R}^3$ với cơ sở $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở

$$E_1 = 2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + 3\mathcal{E}_3,$$
$$E_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3,$$
$$E_3 = -\mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3.$$

Giải. Từ các khai triển E_1, E_2 và E_3 theo cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ ta có ma trận chuyển

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

từ cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ sang cơ sở E_1, E_2, E_3.

Ta ký hiệu x_1, x_2, x_3 là tọa độ của x trong cơ sở E_1, E_2, E_3. Ta có

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vì $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ nên

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Vậy trong cơ sở mới E_1, E_2, E_3 ta có

$$x = (5, -7, -4). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ và các vectơ $E_1 = e_1 - 2e_2$, $E_2 = 2e_1 + e_2$, $x = 3e_1 - 4e_2$.

1^+ Chứng minh rằng E_1, E_2 lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

2^+ Tìm tọa độ vectơ x trong cơ sở E_1, E_2.

3^+ Tìm tọa độ của vectơ x trong cơ sở E_2, E_1.

Giải. 1^+ Ta lập ma trận các tọa độ của E_1 và E_2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5 \neq 0.$$

Do đó hệ hai vectơ E_1, E_2 là đltt trong không gian 2-chiều $\mathbb{R}^2$ nên nó lập thành cơ sở.

2^+ Trong cơ sở đã cho vectơ x có tọa độ là $(3, -4)$. Giả sử trong cơ sở E_1, E_2 vectơ x có tọa độ (x_1, x_2). Ta lập ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ đến cơ sở E_1, E_2:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Vậy $x_1 = \dfrac{11}{5}$, $x_2 = \dfrac{+2}{5}$.

3^+ Vì E_1, E_2 là cơ sở của $\mathbb{R}^2$ nên E_2, E_1 cũng là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ đến cơ sở E_2, E_1 có dạng

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{*-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Do đó $x_1 = \dfrac{2}{5}$, $x_2 = \dfrac{11}{5}$ trong cơ sở E_2, E_1.

Ví dụ 8. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ nào đó và trong cơ sở đó các vectơ E_1, E_2, E_3 và x có tọa độ là $E_1 = (1, 1, 1)$; $E_2 = (1, 2, 2)$, $E_3 = (1, 1, 3)$ và $x = (6, 9, 14)$.

1^+ Chứng minh rằng E_1, E_2, E_3 cũng lập thành cơ sở trong $\mathbb{R}^3$.

2^+ Tìm tọa độ của x trong cơ sở E_1, E_2, E_3.

Giải. 1^+ tương tự như trong ví dụ 7, hạng của hệ ba vectơ E_1, E_2, E_3 bằng 3 nên hệ vectơ đó độc lập tuyến tính trong không gian 3-chiều nên nó lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2+ Để tìm tọa độ của x trong cơ sở E_1, E_2, E_3 ta có thể tiến hành theo hai phương pháp sau.

(I) Vì E_1, E_2, E_3 lập thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$ nên

$$x = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$$
$$\Rightarrow (6, 9, 14) = x_1(1, 1, 1) + x_2(1, 2, 2) + x_3(1, 1, 3)$$

và do đó x_1, x_2, x_3 là nghiệm của hệ

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6,\\ x_1 + 2x + x_3 &= 9,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14.\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 3,\ x_3 = \frac{5}{2}\cdot$$

(II) Lập ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ sang cơ sở E_1, E_2, E_3:

$$T_{\mathcal{E}E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow T_{\mathcal{E}E}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Do đó

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = T_{\mathcal{E}E}^{-1}\begin{bmatrix} 6\\ 9\\ 14\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1\\ 6\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\\ 3\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

và thu được kết quả như tronng (I). ▲

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các hệ vectơ sau đây là những cơ sở trong không gian $\mathbb{R}^4$:

1) $e_1 = (1,0,0,0)$; $e_2 = (0,1,0,0)$; $e_3 = (0,0,1,0)$; $e_4 = (0,0,0,1)$.

2) $\mathcal{E}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathcal{E}_2 = (0,1,1,1)$; $\mathcal{E}_3 = (0,0,1,1)$; $\mathcal{E}_4 = (0,0,0,1)$.

2. Chứng minh rằng hệ vectơ đơn vị:

$e_1 = (1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-1})$; $e_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots,e_n = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1},1)$

lập thành cơ sở trong $\mathbb{R}^n$. Cơ sở này được gọi là *cơ sở chính tắc*.

3. Chứng minh rằng hệ vectơ

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1 = (1,0,\dots,0),\\
&\mathcal{E}_2 = (1,1,\dots,0),\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\\
&\mathcal{E}_n = (1,1,\dots,1)
\end{aligned}$$

là một cơ sở trong $\mathbb{R}^n$.

4. Chứng minh rằng hệ vectơ

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1 = (1,2,3,\dots,n-1,n),\\
&\mathcal{E}_2 = (1,2,3,\dots,n-1,0),\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
&\mathcal{E}_n = (1,0,0,\dots,0,0)
\end{aligned}$$

lập thành cơ sở trong không gian $\mathbb{R}^n$.

5. Hãy kiểm tra xem mỗi hệ vectơ sau đây có lập thành cơ sở trong không gian $\mathbb{R}^4$ không và tìm các tọa độ của vectơ $x = (1,2,3,4)$ trong mỗi cơ sở đó.

1) $a_1 = (0,1,0,1)$; $a_2 = (0,1,0,-1)$; $a_3 = (1,0,1,0)$;
$a_4 = (1,0,-1,0)$. (ĐS. $3,-1,2,-1$)

2) $a_1 = (1,2,3,0)$; $a_2 = (1,2,0,3)$; $a_3 = (1,0,2,3)$;

$a_4 = (0,1,2,3)$. (ĐS. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 1$)

3) $a_1 = (1,1,1,1)$; $a_2 = (1,-1,1,-1)$; $a_3 = (1,-1,1,1)$;

$a_4 = (1,-1,-1,-1)$. (ĐS. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1$)

4) $a_1 = (1,-2,3,-4)$; $a_2 = (-4,1,-2,3)$; $a_3 = (3,-4,1,-2)$;

$a_4 = (-2,3,-4,1)$. (ĐS. $-\frac{13}{10}, -\frac{7}{10}, -\frac{13}{10}, -\frac{17}{10}$)

Nhận xét. Ta nhắc lại rằng các ký hiệu $e_1, e_2, \dots, e_n$ được dùng để chỉ các vectơ đơn vị của trục x_i $(i = 1,2,\dots,n)$:

$$e_i = (1, \underbrace{0,\dots,0}_{n-1}), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}, 1)$$

6. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3 đến cơ sở e_2, e_3, e_1.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$)

7. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3, e_4 đến cơ sở e_3, e_4, e_2, e_1.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

8. Cho ma trận $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2 đến cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Tìm tọa độ của vectơ $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$.

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = (-1,2)$; $\mathcal{E}_2 = (1,0)$)

9. Giả sử

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3 đến cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Tìm tọa độ của vectơ $\mathcal{E}_2$ trong cơ sở e_1, e_2, e_3. (ĐS. $\mathcal{E}_2 = (2, 1, 0)$)

10. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3 đến cơ sở
$\mathcal{E}_1 = 2e_1 - e_3 + e_2$; $\mathcal{E}_2 = 3e_1 - e_2 + e_3$; $\mathcal{E}_3 = e_3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$)

11. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3 đến cơ sở
$\mathcal{E}_1 = e_2 + e_3$; $\mathcal{E}_2 = -e_1 + 2e_3$; $\mathcal{E}_3 = e_1 + e_2$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$)

12. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3, e_4 đến cơ sở
$\mathcal{E}_1 = 2e_2 + 3e_3 + e_4$; $\mathcal{E}_2 = e_1 - 2e_2 + 3e_3 - e_4$; $\mathcal{E}_3 = e_1 + e_4$;
$\mathcal{E}_4 = 2e_1 + e_2 - e_3 + e_4$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$)

13. Cho

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2 đến cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Tìm tọa độ của các vectơ e_1, e_2 trong cơ sở $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$.

(ĐS. $e_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. $e_2 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$)

Chỉ dẫn. Từ ma trận đã cho tìm khai triển $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ theo cơ sở e_1, e_2. Từ đó tìm khai triển e_1, e_2 theo cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$.

14. Cho ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3 đến cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Tìm tọa độ vectơ e_2 trong cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$.

(ĐS. $e_2 = \left(\frac{11}{41}, -\frac{4}{41}, -\frac{5}{41}\right)$)

15. Cho ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3 đến cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Tìm tọa độ các vectơ e_1, e_2, e_3 trong cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$.

(ĐS. $e_1 = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$, $e_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $e_3 = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$)

16. Trong cơ sở e_1, e_2 vectơ x có tọa độ là $(1; 2)$. Tìm tọa độ của vectơ đó trong cơ sở $\mathcal{E}_1 = e_1 + 2e_2$; $\mathcal{E}_2 = -e_1 + e_2$.

(ĐS. $x = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$)

17. Trong cơ sở e_1, e_2 vectơ x có tọa độ là $(-3; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ đó trong cơ sở $\mathcal{E}_1 = -2e_1 + e_2$; $\mathcal{E}_2 = e_2$.

(ĐS. $x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$)

18. Trong cơ sở e_1, e_2, e_3 vectơ x có tọa độ là $(-1; 2; 0)$. Tìm tọa độ của vectơ đó trong cơ sở $\mathcal{E}_1 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, $\mathcal{E}_2 = -3e_1 + e_2 - 2e_3$; $\mathcal{E}_3 = 4e_2 + 5e_3$. (ĐS. $(-0,68; -0,12; 0,36)$)

19. Trong cơ sở e_1, e_2, e_3 vectơ x có tọa độ là $(1, -1, 0)$. Tìm tọa độ của vectơ đó trong cơ sở: $\mathcal{E}_1 = 3e_1 + e_2 + 6e_3$, $\mathcal{E}_2 = 5e_1 - 3e_2 + 7e_3$, $\mathcal{E}_3 = -2e_1 + 2e_2 - 3e_3$.

(ĐS. $x = (-0,6; 1,2; 1,6)$)

20. Trong cơ sở e_1, e_2, e_3 vectơ x có tọa độ là $(4, 0, -12)$. Tìm tọa độ của vectơ đó trong cơ sở $\mathcal{E}_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\mathcal{E}_2 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$, $\mathcal{E}_3 = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3$.

(ĐS. $x = (-4, -8, 8)$)

21. Trong không gian với một cơ sở là e_1, e_2, e_3 cho các vectơ $\mathcal{E}_1 = e_1 + e_2$, $\mathcal{E}_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $\mathcal{E}_3 = e_2 - e_3$.

1) Chứng minh rằng $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ lập thành cơ sở.

2) Tìm tọa độ của vectơ $x = e_1 + 8e_2 - 5e_3$ trong cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$.

(ĐS. $x = (3, -1, 4)$)

22. Trong cơ sở e_1, e_2, e_3 cho các vectơ $a = (1, 2, 3)$, $b = (0, 3, 1)$, $c = (0, 0, 2)$, $d = (4, 3, 1)$. Chứng minh rằng các vectơ a, b, c lập thành cơ sở và tìm tọa độ của vectơ d trong cơ sở đó.

(ĐS. $d\Big(4, -\dfrac{5}{3}, -\dfrac{14}{3}\Big)$)

5.3 Không gian vectơ Euclid. Cơ sở trực chuẩn

Không gian tuyến tính thực $\mathcal{V}$ được gọi là không gian Euclid nếu trong $\mathcal{V}$ được trang bị một tích vô hướng, tức là nếu với mỗi cặp phần tử $x, y \in \mathcal{V}$ đều tương ứng với một số thực (ký hiệu là $\langle x, y\rangle$) sao cho $\forall\, x, y, z \in \mathcal{V}$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$ phép tương ứng đó thỏa mãn các tiên đề sau đây

(I) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

(II) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

(III) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

(IV) $\langle x, x\rangle > 0$ nếu $x \neq \theta$.

Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ đối với cặp vectơ $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ thì quy tắc tương ứng

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{5.12}$$

sẽ xác định một tích vô hướng của hai vectơ a và b.

Như vậy không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng xác định theo công thức (5.12) trở thành không gian Euclid. Do đó khi nói về không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ ta luôn luôn hiểu là tích vô hướng trong đó xác định theo (5.12).

Giả sử $x \in \mathbb{R}^n$. Khi đó số $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ được gọi là *độ dài* (hay *chuẩn*) của vectơ x và được ký hiệu là $\|x\|$. Như vậy

$$\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{5.13}$$

Vectơ x với độ dài $= 1$ được gọi là *được chuẩn hóa* hay *vectơ đơn vị*. Để chuẩn hóa một vectơ khác θ bất kỳ ta chỉ cần nhân nó với số $\lambda = \dfrac{1}{\|x\|}$.

Độ dài có các tính chất

1^+ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

2^+ $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|,\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

3^+ $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\ \|y\|$ (bất đẳng thức Cauchy-Bunhiakovski)

4^+ $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác hay bất đẳng thức Minkovski).

Từ bất đẳng thức 3^+ suy rằng với hai vectơ khác θ bất kỳ $x, y \in \mathbb{R}^n$ ta đều có

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\ \|\cos y\|} \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} \leqslant 1.$$

Số $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$ có thể xem như cosin của góc φ nào đó. Góc φ mà

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}\,, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \tag{5.14}$$

được gọi là *góc giữa hai vectơ x và y.*

Hai vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *vuông góc* hay *trực giao* nếu tích vô hướng của chúng bằng 0: $\langle x, y\rangle = 0$.

Hệ vectơ $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *hệ trực giao* nếu chúng trực giao từng đôi một, tức là nếu $\langle a_i, a_j\rangle = 0\ \forall i \neq j$.

Hệ vectơ $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *hệ trực giao* và *chuẩn hóa* (hay *hệ trực chuẩn*) nếu

$$\langle a_i, a_i\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Định lý 5.3.1. *Mọi hệ trực giao các vectơ khác không đều là hệ độc lập tuyến tính.*

Hệ gồm n vectơ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *cơ sở trực giao* nếu nó là một cơ sở gồm các vectơ trực giao từng đôi một.

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ tồn tại những cơ sở đặc biệt tiện lợi được gọi là những cơ sở *trực chuẩn* (vai trò như cơ sở Đêcác vuông góc trong hình học giải tích).

Hệ gồm n vectơ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một *cơ sở trực chuẩn* của $\mathbb{R}^n$ nếu các vectơ này từng đôi một trực giao và độ dài của mỗi vectơ của hệ đều bằng 1, tức là

$$(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_k) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq k, \\ 1 & \text{nếu } i = k. \end{cases}$$

Định lý 5.3.2. *Trong mọi không gian Euclid n-chiều đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.*

Để có điều đó ta có thể sử dụng phép trực giao hóa Gram-Smidth đưa một cơ sở về cơ sở trực chuẩn. Nội dung của thuật toán đó như sau

Giả sử $\mathcal{E}_1 = a_1$. Tiếp đó phép dựng được tiến hành theo quy nạp.

Nếu $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_i$ đã được dựng thì $\mathcal{E}_{i+1}$ có thể lấy

$$\mathcal{E}_{i+1} = a_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_j a_j,$$

trong đó

$$\alpha_j = -\frac{\langle a_{i+1}, \mathcal{E}_j \rangle}{\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_j \rangle}, \quad j = \overline{1, i}$$

được tìm từ điều kiện $\mathcal{E}_{i+1}$ trực giao với mọi vectơ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_i$.

CÁC VÍ DỤ

1. Trong các phép toán dưới đây phép toán nào là tích vô hướng của hai vectơ $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

1) $\langle x, y \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2$;

2) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$;

3) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$.

Giải. 1) Phép toán này không là tích vô hướng vì nó không thỏa mãn tiên đề III của tích vô hướng:

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha^2 x_1^2 y_1^2 + \alpha^2 x_2^2 y_2^2 + \alpha^2 x_3^2 y_3^2 \neq \alpha(x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2)$$

2) Phép toán này là tích vô hướng. Thật vậy, hiển nhiên các tiên đề I và II thỏa mãn. Ta kiểm tra các tiên đề III và IV.

Giả sử $x' = (x_1', x_2', x_3')$, $x'' = (x_1'', x_2'', x_3'') \in \mathbb{R}^3$. Khi đó

$$\begin{aligned}\langle x' + x'', y \rangle &= (x_1' + x_1'')y_1 + 2(x_2' + x_2'')y_2 + 3(x_3' + x_3'')y_3 \\ &= (x_1' y_1 + 2x_2' y_2 + 3x_3' y_3) + (x_1'' y_1 + 2x_2'' y_2 + 3x_3'' y_3) \\ &= \langle x', y \rangle + \langle x'', y \rangle.\end{aligned}$$

Tiếp theo ta xét

$$\begin{aligned}&\langle x, x \rangle = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \geqslant 0 \text{ và} \\ &\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow x = \theta. \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tìm độ dài các cạnh và góc trong tại A của tam giác với đỉnh $A(2,1,-2,-3)$, $B(2,-1,2,1)$ và $C(6,5,-2,-1)$.

Giải. Ta tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$. Ta có $\overrightarrow{AB}(0,-2,4,4)$, $\overrightarrow{AC}(4,4,0,2)$, $\overrightarrow{BC}(4,6,-4,-2)$.

Áp dụng định nghĩa độ dài vectơ trong cơ sở trực chuẩn ta có

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

và tương tự $\|\overrightarrow{AC}\| = 6$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 6\sqrt{2}$. Theo công thức (5.14) ta có

$$\cos A = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|AB\| \cdot \|AC\|} = \frac{0 \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{6 \cdot 6} = 0.$$

Do đó $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$. ▲

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong bất đẳng thức Cauchy-Bunhiakovski $|\langle a, b\rangle| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ dấu bằng "=" đạt được khi và chỉ khi a và b phụ thuộc tuyến tính.

Giải. 1) Nếu $a = \lambda b$ thì

$$|\langle a, b\rangle| = |\langle \lambda b, b\rangle = |\lambda|\, \|b\|^2 = \|\lambda b\| \cdot \|b\| = \|a\|\, \|b\|.$$

Ngược lại, nếu $|\langle a, b\rangle| = \|a\|\, \|b\|$ thì

$$\left\langle a - \frac{\langle a, b\rangle}{\|b\|^2} b, a - \frac{\langle a, b\rangle}{\|b\|^2} b \right\rangle = \|a\|^2 - 2\frac{\langle a, b\rangle}{\|b\|^2}\langle a, b\rangle + \frac{\langle a, b\rangle^2}{\|b\|^4}\|b\|^2 =$$

$$= \|a\|^2 - 2\frac{\|a\|^2\|b\|^2}{\|b\|^2} + \frac{\|a\|^2\|b\|^2\|b\|^2}{\|b\|^4} = 0.$$

Nhưng tích vô hướng $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$. Từ đó suy ra rằng $a = \dfrac{\langle a, b\rangle}{\|b\|^2} b$, tức là a, b phụ thuộc tuyến tính. ▲

Ví dụ 4. Hệ các vectơ đơn vị trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng (5.12)

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

là một ví dụ về cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{R}^n$. Cơ sở này gọi là *cơ sở chính tắc* trong $\mathbb{R}^n$.

Giải. Hiển nhiên $\langle e_i, e_j\rangle = 0\ \forall\, i \neq j$, $\|e_j\| = 1\ \forall\, j = \overline{1,n}$. Từ đó thu được điều cần chứng minh. ▲

Ví dụ 5. Tọa độ của vectơ $a \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ đối với cơ sở trực chuẩn bằng tích vô hướng của vectơ đó với vectơ cơ sở tương ứng.

Giải. Giả sử $a \in \mathbb{R}^n$ và $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{E}_i.$$

Nhân vô hướng đẳng thức này với $\mathcal{E}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ ta thu được

$$\langle a, \mathcal{E}_k\rangle = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Do đó

$$a = \sum_{i=1}^{n} \langle a, \mathcal{E}_i\rangle \mathcal{E}_i \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^n.$$

Số $\lambda_k = \langle a, \mathcal{E}_k\rangle$ $k = 1, 2, \dots, n$ chính là tọa độ của vectơ $a \in \mathbb{R}^n$ theo cơ sở trực chuẩn đã cho. ▲

Ví dụ 6. 1) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng (5.12) cho cơ sở $\mathcal{E}_1 = (1, 2, 1)$; $\mathcal{E}_2 = (1, 1, 0)$; $\mathcal{E}_3 = (2, 0, 0)$. Hãy dùng phương pháp trực giao hóa để tìm cơ sở trực giao trong $\mathbb{R}^3$ từ cơ sở đã cho.

2) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng (5.12) cho cơ sở $\mathcal{E}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathcal{E}_2 = (2, -3, 4)$, $\mathcal{E}_3 = (2, 2, 6)$. Hãy dựng cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{R}^3$ theo cơ sở đã cho.

Giải. 1) Trước hết ta chọn $E_1 = \mathcal{E}_1 = (1, 2, 1)$. Tiếp theo đặt $E_2 = \mathcal{E}_2 + \lambda E_1$ sao cho $\langle E_2, E_1\rangle = 0$, tức là

$$\langle E_2, E_1\rangle = \langle E_1, \mathcal{E}_2\rangle + \lambda\langle E_1, E_1\rangle = 0.$$

Nhưng $\langle E_1, E_1\rangle \neq 0$ (cụ thể là > 0) vì $E_1 = \mathcal{E}_1 \neq \theta$. Do đó

$$\lambda = -\frac{\langle E_1, \mathcal{E}_2\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} = -\frac{\langle (1,2,1),(1,1,0)\rangle}{1^2+2^2+1^2} = -\frac{1}{2}\cdot$$

Do đó

$$E_2 = (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,2,1) = \Big(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\Big).$$

Tiếp theo đặt

$$E_3 = \mathcal{E}_3 + \alpha E_1 + \beta E_2$$

sao cho $\langle E_3, E_1\rangle = \langle E_3, E_2\rangle = 0$. Tương tự như trên, từ điều kiện $\langle E_3, E_1\rangle = 0$ ta có $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ và từ điều kiện $\langle E_3, E_2\rangle = 0$ ta có $\beta = -2$. Do đó

$$E_3 = \mathcal{E}_3 - \frac{1}{3}E_1 - 2E_2 = \Big(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big)$$

và thu được cơ sở trực giao

$$E_1 = (1,2,1),\quad E_2 = \Big(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\Big),\quad E_3 = \Big(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big).$$

2) Tương tự như phần 1), đầu tiên ta đặt

$$E_1 = \mathcal{E}_1 = (1,-1,1)$$
$$E_2 = \mathcal{E}_2 + \lambda E_1$$

sao cho $\langle E_2, E_1\rangle = 0$. Từ đó thu được

$$\lambda = -\frac{\langle E_1, \mathcal{E}_2\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} = -\frac{2+3+4}{3} = -3,$$

và do đó

$$E_2 = (-1,0,1).$$

Tiếp theo ta tìm

$$E_3 = \mathcal{E}_3 + \alpha E_1 + \beta E_2$$

sao cho $\langle E_3, E_1\rangle = 0$, $\langle E_3, E_2\rangle = 0$ và từ đó thu được

$$\alpha = -\frac{\langle E_1, \mathcal{E}_3\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} = -2; \quad \beta = -\frac{\langle E_2, \mathcal{E}_3\rangle}{\langle E_2, E_2\rangle} = -2.$$

Như vậy

$$E_3 = (2, 4, 2).$$

Sau cùng ta chuẩn hóa các vectơ E_1, E_2, E_3 và thu được cơ sở trực chuẩn

$$e_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \quad e_2 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big),$$
$$e_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Hãy bổ sung cho hệ trực giao gồm ba vectơ trong $\mathbb{R}^4$:

$$b_1 = (1,1,1,1), b_2 = (2,2,-2,-2), b_3 = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\Big)$$

để thu được cơ sở trực giao trong không gian đó.

Giải. Ta có thể bổ sung bằng hai cách

1^+ Vì số vectơ của hệ đã cho nhỏ hơn 4 (là số chiều của không gian $\mathbb{R}^4$) nên trong không gian $\mathbb{R}^4$ ta có thể chọn vectơ a_4 sao cho hệ vectơ b_1, b_2, b_3, a_4 độc lập tuyến tính và sau đó áp dụng phép trực giao hóa Gram-Smidth.

2^+ Ta có thể chọn vectơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ đồng thời trực giao với các vectơ b_1, b_2, b_3, tức là thu được hệ phương trình

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0,\\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Chẳng hạn, từ hệ đó ta có $x = (7, -7, -1, 1)$. ▲

Ví dụ 8. 1^+ Chứng tỏ rằng các vectơ $x_1 = (1, 1, 1, 2)$ và $x_2 = (1, 2, 3, -3)$ là trực giao với nhau.

2^+ Hãy bổ sung cho hệ hai vectơ đó để thu được cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$.

Giải. 1^+ Ta có

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Do đó chúng trực giao.

2^+ Giả sử $x_3 = (\alpha, \beta, \gamma, 0)$, trong đó α, β, γ được xác định từ các điều kiện $\langle x_3, x_1 \rangle = 0$, $\langle x_3, x_2 \rangle = 0$ tức là

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Từ đó $x_3 = (1, -2, 1, 0)$.

Bây giờ ta sẽ bổ sung thêm cho hệ vectơ x_1, x_2, x_3 một vectơ nữa. Giả sử $x_4 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, trong đó các tọa độ α, β, γ, δ được xác định từ các đẳng thức:

$$\langle x_4, x_1 \rangle = 0, \quad \langle x_4, x_2 \rangle = 0, \quad \langle x_4, x_2 \rangle = 0.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + 2\delta &= 0, \\ \alpha + \beta + 3\gamma - 3\delta &= 0, \\ \alpha - 2\beta + \gamma \quad\;\; &= 0. \end{aligned}$$

Từ đó thu được $x_4 = (-25, -4, 17, 6)$. Như vậy ta đã bổ sung thêm hai vectơ x_3, x_4 và thu được hệ vectơ trực giao x_1, x_2, x_3, x_4 trong không gian 4-chiều. Đó là cơ sở trực giao. ▲

BÀI TẬP

1. Giả sử $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ là những vectơ tùy ý của $\mathbb{R}^2$. Trong các quy tắc sau đây, quy tắc nào xác định tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$:

1) $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$.
2) $\langle a, b\rangle = ka_1b_1 + \ell a_2b_2$, $k, \ell \neq 0$.
3) $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1$.
4) $\langle a, b\rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$.
5) $\langle a, b\rangle = 3a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2$.

(ĐS. 1), 2) và 4) xác định tích vô hướng
3) và 5) không xác định tích vô hướng).

2. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^4$, xác định góc giữa các vectơ:

1) $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (3, 5, 1, 1)$. (ĐS. $\arccos\frac{5}{6}$)
2) $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (3, -5, 1, 1)$. (ĐS. $\frac{\pi}{2}$)
3) $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (-3, -3, -3, -3)$. (ĐS. π)

3. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$, tìm độ dài của các cạnh và các góc của tam giác lập bởi các vectơ $a, b, a + b$ nếu

1) a và b như trong 2.1)
2) a và b như trong 2.2)
3) $a = (2, -1, 2, 4)$, $b = (2, -1, 2, -4)$.

(ĐS. 1) $\|a\| = 2$, $\|b\| = 6$, $\|a + b\| = 2\sqrt{15}$, $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{5}{6}$, $\cos(\widehat{a, a+b}) = \frac{7}{2\sqrt{15}}$; $\cos(\widehat{b, a+b}) = \frac{13}{6\sqrt{15}}$; 2) $\|a\| = 2$, $\|b\| = 6$, $\|a + b\| = 2\sqrt{10}$, $\cos(\widehat{a, b}) = 0$, $\cos(\widehat{a, a+b}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos(\widehat{b, a+b}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\|a\| = 5$, $\|b\| = 5$, $\|a + b\| = 6$, $\cos(\widehat{a, b}) = -\frac{7}{25}$, $\cos(\widehat{a, a+b}) = \frac{4}{5}$, $\cos(\widehat{b, a+b}) = \frac{4}{15}$)

4. Chứng minh rằng trong không gian Euclide

1) $a \perp a \Leftrightarrow a = \theta$.

2) Nếu vectơ $a \perp b_i$ $\forall i = \overline{1, s}$ thì a trực giao với mọi tổ hợp tuyến tính của $b_1, \dots, b_s$.

3) Hệ các vectơ khác không và trực giao với nhau từng đôi một là hệ độc lập tuyến tính.

5. Giả sử một tam giác trong không gian Euclide được lập nên bởi các vectơ $a, b, a+b$. Chứng minh:

1) định lý Pithago: Nếu $a \perp b \Rightarrow \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

2) định lý đảo của định lý Pithago: Nếu $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \Rightarrow a \perp b$.

3) định lý hàm cosin:

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\,\|b\|\cos(\widehat{a,b}).$$

4) bất đẳng thức tam giác

$$\|a\| - \|b\| \leqslant \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Chỉ dẫn. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunhiakovski.

6. Chứng minh rằng trong hình bình hành dựng trên hai vectơ a và b tổng các bình phương độ dài của các đường chéo bằng tổng các bình phương độ dài các cạnh

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.$$

7. Chứng minh rằng nếu các vectơ $a_1, a_2, \dots, a_m$ của không gian Euclide là từng đôi một trực giao thì

$$\|a_1 + a_2 + \cdots + a_m\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_m\|^2.$$

Chỉ dẫn. Xét tích vô hướng

$$\langle a_1 + a_2 + \cdots + a_m, a_1 + a_2 + \cdots + a_m\rangle$$

8. Áp dụng quá trình trực giao hóa đối với các hệ vectơ sau đây của $\mathbb{R}^n$:

1) $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 0, -1)$, $a_3 = (5, -3, -7)$.

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = a_1 = (1,-2,2)$; $\mathcal{E}_2 = \Big(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\Big)$; $\mathcal{E}_3 = (6,-3,-6)$)

2) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (3,3,-1,-1)$, $a_3 = (-2,0,6,8)$.

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = a_1 = (1,1,1,1)$; $\mathcal{E}_2 = (2,2,-2,-2)$, $\mathcal{E}_3 = (-1,1,-1,1)$)

3) $a_1 = (1,1,1,1)$; $a_2 = (3,3,-1,-1)$; $a_3 = (-1,0,3,4)$.

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = a_1 = (1,1,1,1)$, $\mathcal{E}_2 = (2,2,-2,-2)$, $\mathcal{E}_3 = \Big(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}\Big)$)

9. Trực chuẩn hóa các hệ vectơ sau đây của không gian $\mathbb{R}^4$:

1) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,-3,-3)$, $a_3 = (4,3,0,-1)$.

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = \Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$, $\mathcal{E}_2 = \Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big)$, $\mathcal{E}_3 = \Big(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big)$)

2) $a_1 = (1,2,2,0)$, $a_2 = (1,1,3,5)$, $a_3 = (1,0,1,0)$.

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = \Big(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 0\Big)$, $\mathcal{E}_2 = \Big(0, -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{5}{3\sqrt{3}}\Big)$,

$$\mathcal{E}_3 = \Big(\frac{6}{\sqrt{78}}, -\frac{17}{3\sqrt{78}}, \frac{8}{3\sqrt{78}}, -\frac{5}{3\sqrt{78}}\Big))$$

10. Chứng tỏ rằng các hệ vectơ sau đây trong $\mathbb{R}^4$ là trực giao và bổ sung cho các hệ đó để trở thành cơ sở trực giao:

1) $a_1 = (1,-2,1,3)$, $a_2 = (2,1,-3,1)$

(ĐS. Chẳng hạn, các vectơ $a_3 = (1,1,1,0)$, $a_4 = (-1,1,0,1)$)

2) $a_1 = (1,-1,1,-3)$, $a_2 = (-4,1,5,0)$.

(ĐS. Chẳng hạn, các vectơ $a_3 = (2,3,1,0)$ và $a_4 = (1,-1,1,1)$)

11. Chứng tỏ rằng các vectơ sau đây trong $\mathbb{R}^4$ là trực giao và bổ sung cho các hệ đó để trở thành cơ sở trực giao và chuẩn hóa các cơ sở đó

1) $a_1 = (1,-1,1,-1)$, $a_2 = (1,1,1,1)$.

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = \Big(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big)$, $\mathcal{E}_2 = \Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$, $\mathcal{E}_3 = \Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big)$,

$\mathcal{E}_4 = \Big(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big))$

2) $a_1 = (1, -1, -1, 3)$, $a_2 = (1, 1, -3, -1)$

(ĐS. $\mathcal{E}_1 = \Big(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)$, $\mathcal{E}_2 = \Big(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\Big)$,

$\mathcal{E}_3 = \Big(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\Big)$, $\mathcal{E}_4 = \Big(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big))$

5.4 Phép biến đổi tuyến tính

5.4.1 Định nghĩa

Ánh xạ $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ biến không gian $\mathbb{R}^n$ thành chính nó được gọi là một *phép biến đổi tuyến tính* (bdtt) của không gian $\mathbb{R}^n$ nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau đây

(i) Với hai vectơ a và $b \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ

$$\mathcal{L}(a+b) = \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b). \tag{5.15}$$

(ii) Với vectơ $a \in \mathbb{R}^n$ bất kỳ và $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ ta có

$$\mathcal{L}(\lambda a) = \lambda \mathcal{L}(a). \tag{5.16}$$

Hai điều kiện (5.15) và (5.16) tương đương với điều kiện:

$$\mathcal{L}(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = \lambda_1 \mathcal{L}(a) + \lambda_2 \mathcal{L}(b).$$

Từ định nghĩa suy ra: nếu hệ vectơ $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ là pttt thì hệ các vectơ ảnh $f(a_1), \dots, f(a_m)$ cũng là pttt.

5.4.2 Ma trận của phép bdtt

Giả sử trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta cố định một cơ sở $(\mathcal{E})$ nào đó:

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n\}. \tag{5.17}$$

Khi đó $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ta có khai triển

$$x = x_1\mathcal{E}_1 + x_2]_2 + \cdots + x_n\mathcal{E}_n.$$

Mọi ma trận vuông $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$ đều xác định phép bđtt $\mathcal{L}$ theo công thức

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Nói cách khác: để thu được tọa độ ảnh $y = \mathcal{L}(x)$ ta cần nhân ma trận A với cột tọa độ của x. Viết ra chi tiết ta có

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Ngược lại, trong cơ sở đã chọn (5.17) mỗi phép bđtt $\mathcal{L}$ đều tương ứng với một ma trận $A = \|a_{ij}\|$ cấp n và sự tác động của phép bđtt được thực hiện theo công thức (5.18) hay (5.19).

Việc tìm ma trận của phép bđtt được tiến hành như sau

1^+ Tác động $\mathcal{L}$ lên các vectơ cơ sở của (5.17) và thu được ảnh $\mathcal{L}(\mathcal{E}_i)$, $i = \overline{1, n}$.

2^+ Khai triển các ảnh $\mathcal{L}(\mathcal{E}_i)$ theo cơ sở (5.17):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{E}_1) &= a_{11}\mathcal{E}_1 + a_{21}\mathcal{E}_2 + \cdots + a_{n1}\mathcal{E}_n, \\ \mathcal{L}(\mathcal{E}_2) &= a_{12}\mathcal{E}_1 + a_{22}\mathcal{E}_2 + \cdots + a_{n2}\mathcal{E}_n, \\ \dots & \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mathcal{L}(\mathcal{E}_\backslash) &= a_{1n}\mathcal{E}_1 + a_{2n}\mathcal{E}_2 + \cdots + a_{nn}\mathcal{E}_n. \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Từ các tọa độ trong (5.20) ta lập ma trận A sao cho tọa độ của vectơ

$\mathcal{L}(\mathcal{E}_i)$, $i = \overline{1, n}$ là cột thứ i của A, tức là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Đó là ma trận của phép bđtt.

Ta lưu ý rằng khi thay đổi cơ sở thì ma trận của phép biến đổi tuyến tính sẽ thay đổi. Giả sử ma trận chuyển từ cơ sở $(\mathcal{E})$ đến cơ sở $(\mathcal{E}')$ được ký hiệu là $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$, trong đó

$$\mathcal{E}' = \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \dots, \mathcal{E}'_n\}$$

và A là ma trận phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L}$ theo cơ sở (5.17). Khi đó, ma trận B của $\mathcal{L}$ theo cơ sở $(\mathcal{E}')$ liên hệ với ma trận A của nó theo cơ sở (5.17) bởi công thức

$$B = T^{-1}_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} A T_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \tag{5.21}$$

hay là

$$A = T_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} B T^{-1}_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \tag{5.22}$$

5.4.3 Các phép toán

Giả sử $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai phép bđtt của không gian $\mathbb{R}^n$ với ma trận tương ứng là $A = \|a_{ij}\|$ và $B = \|b_{ij}\|$ tùy ý.

1^+ Tổng $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ là phép biến đổi $\mathcal{C}$ sao cho

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

với ma trận tương ứng là $C = A + B = \|a_{ij}\| + \|b_{ij}\|$.

2^+ Tích các phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{A}$ với số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ là phép biến đổi $\alpha\mathcal{A}$ sao cho

$$(\alpha\mathcal{A})(x) = \alpha\mathcal{A}(x)$$

với ma trận là $\alpha\|a_{ij}\|$.

3^+ Tích $\mathcal{AB}$ là phép biến đổi

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$$

với ma trận là $C = A \cdot B$.

5.4.4 Vectơ riêng và giá trị riêng

Vectơ khác không $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *vectơ riêng* của phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L}$ nếu tìm được số λ sao cho đẳng thức sau thỏa mãn

$$\mathcal{L}(x) = \lambda x. \tag{5.23}$$

Số λ được gọi là *giá trị riêng* của phép bđtt $\mathcal{L}$ tương ứng với vectơ riêng x.

Các tính chất của vectơ riêng

1^+ Mỗi vectơ riêng chỉ có một giá trị riêng.

2^+ Nếu x^1 và x^2 là các vectơ riêng của phép bđtt $\mathcal{L}$ với cùng một giá trị riêng λ thì tổng $x^1 + x^2$ cũng là vectơ riêng của $\mathcal{L}$ với giá trị riêng λ.

3^+ Nếu x là vectơ riêng của $\mathcal{L}$ với giá trị riêng λ thì mọi vectơ αx ($\alpha \neq 0$) cũng là vectơ riêng của $\mathcal{L}$ với giá trị riêng λ.

Nếu trong không gian $\mathbb{R}^n$ đã chọn một cơ sở xác định thì (5.23) có thể viết dưới dạng ma trận

$$AX = \lambda X \tag{5.24}$$

và khi đó: mọi cột khác không thỏa mãn (5.24) được gọi là *vectơ riêng* của ma trận A tương ứng với giá trị riêng λ.

Vì $\lambda X = \lambda EX$, trong đó E là ma trận đơn vị nên (5.24) có thể viết dưới dạng

$$(A - \lambda E)X = 0$$

và dưới dạng tọa độ ta thu được

$$\left.\begin{array}{ll} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n & = 0. \end{array}\right\} \tag{5.25}$$

Để tìm các vectơ riêng, trước hết cần tìm nghiệm khác 0 của hệ (5.25). Nghiệm khác 0 của hệ (5.25) tồn tại khi và chỉ khi định thức của nó bằng 0, tức là

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.26}$$

Phương trình (5.26) được gọi là *phương trình đặc trưng* của ma trận A, còn các nghiệm của nó gọi là các *số đặc trưng* hay *giá trị riêng* của ma trận A. Sau khi tìm được các số đặc trưng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ta cần thay giá trị λ_i vào (5.25) để tìm các tọa độ $x_1, \dots, x_n$ của vectơ riêng tương ứng.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a_1, a_2) \longmapsto \mathcal{L}(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1).$$

1^+ Chứng minh rằng $\mathcal{L}$ là phép biến đổi tuyến tính.

2^+ Tìm ma trận của $\mathcal{L}$ theo cơ sở chính tắc $e = \{e_1, e_2\}$.

Giải. 1^+ Giả sử $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Khi đó

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

và do đó

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) &= \mathcal{L}(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)\\ &= \big[\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, 2(\alpha x_1 + \beta y_1)\big]\\ &= \big[\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2), \alpha 2x_1 + \beta 2y_1\big]\\ &= \big(\alpha(x_1 + x_2), \alpha 2x_1\big) + \big(\beta(y_1 + y_2), \beta 2y_1\big)\\ &= \alpha(x_1 + x_2, 2x_1) + \beta(y_1 + y_2, 2y_1)\\ &= \alpha\mathcal{L}(x_1, x_2) + \beta\mathcal{L}(y_1, y_2)\\ &= \alpha\mathcal{L}(x) + \beta\mathcal{L}(y).\end{aligned}$$

Như vậy $\mathcal{L}$ là phép bđtt.

2^+ Để tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L}$ ta khai triển ảnh $\mathcal{L}(e_1)$ và $\mathcal{L}(e_2)$ theo cơ sở chính tắc. Ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e_1) &= \mathcal{L}(1, 0) = (1, 2\cdot 1) = \mathcal{L}(1, 2) = 1\cdot e_1 + 2\cdot e_2,\\ \mathcal{L}(e_2) &= \mathcal{L}(0, 1) = (1, 2\cdot 0) = \mathcal{L}(1, 0) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2.\end{aligned}$$

Từ đó thu được

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Xét không gian $\mathbb{R}^3$ với cơ sở $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathcal{E}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathcal{E}_3 = (0, 0, 1)$ và phép biến đổi $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi đẳng thức

$$\mathcal{L}[(u_1, u_2, u_3)] = (u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_1) \quad \forall\, u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1^+ Chứng minh rằng $\mathcal{L}$ là phép bđtt.

2^+ Tìm ma trận của $\mathcal{L}$ trong cơ sở đã chọn.

Giải. 1^+ Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{L}\big[\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)\big]\\
&= \mathcal{L}\big[(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)\big]\\
&= \big(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2 - \alpha x_1 - \beta y_1, \alpha x_3 + \beta y_3 - \alpha x_1 - \beta y_1\big)\\
&= \big(\alpha x_1, \alpha(x_2 - x_1), \alpha(x_3 - x_1)\big) + \big(\beta y_1, \beta(y_2 - y_1), \beta(y_3 - y_2)\big)\\
&= \alpha(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_1) + \beta(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_1)\\
&= \alpha\mathcal{L}(x) + \beta\mathcal{L}(y).
\end{aligned}$$

Vậy $\mathcal{L}$ là phép biến đổi phân tuyến tính.

2^+ Để tìm ma trận của $\mathcal{L}$ đối với cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ ta có

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{L}(1,1,1) = (1, 1-1, 1-1) = (1,0,0) = \mathcal{E}_1 + 0\cdot\mathcal{E}_2 + 0\cdot\mathcal{E}_3,\\
&\mathcal{L}(\mathcal{E}_2) = \mathcal{L}(0,1,1) = (0,1,1) = 0\cdot\mathcal{E}_1 + 1\cdot\mathcal{E}_2 + 1\cdot\mathcal{E}_3,\\
&\mathcal{L}(\mathcal{E}_3) = \mathcal{L}(0,0,1) = (0,0,1) = 0\cdot\mathcal{E}_1 + 0\cdot\mathcal{E}_2 + 1\cdot\mathcal{E}_3.
\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng ma trận của $\mathcal{L}$ đối với cơ sở đã cho là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Trong không gian R^3 cho cơ sở chính tắc $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ và $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$, $\mathcal{E}_1 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, $\mathcal{E}_2 = e_1 + e_3$, $\mathcal{E}_3 = -e_2 + 2e_3$ là một cơ sở khác và giả sử $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ được xác định theo cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ như sau

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = (x, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

1^+ Tìm tọa độ của vectơ $x = 3e_1 - e_2 = (3, -1, 0)$ đối với cơ sở $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$.

2^+ Chứng minh rằng $\mathcal{L}$ là phép bđtt.

3^+ Tìm ma trận của $\mathcal{L}$ theo cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ và $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$.

Giải. 1^+ Ma trận chuyển từ cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ đến cơ sở $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ là:

$$T_{e\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T_{e\mathcal{E}}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giả sử (x_1^*, x_2^*, x_3^*) là tọa độ của x đối với cơ sở $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$. Khi đó

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = T_{e\mathcal{E}}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Vậy tọa độ của x đối với cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ là $(5, -7, -4)$ và do đó $x = 5\mathcal{E}_1 - 7\mathcal{E}_2 - 4\mathcal{E}_3$.

2^+ Việc chứng minh $\mathcal{L}$ là phép bđtt được tiến hành tương tự như ví dụ 2.

3^+ Giả sử $f(x) = (y_1, y_2, y_3)$. Khi đó áp dụng (5.18) ta có

$$f(x_1, x_2, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (y_1, y_2, y_3).$$

Do vậy trong cơ sở chính tắc ta có

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

và do đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giả sử B là ma trận của $\mathcal{L}$ theo cơ sở $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Khi đó

$$\begin{aligned} B = T_{e\mathcal{E}}^{-1} A T_{e\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 10 & 7 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Giả sử $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ và $\mathcal{L}^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là hai phép biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^3$, trong đó

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) &= (x_2 + x_3, -2x_1, x_1 + x_2), \\ \mathcal{L}^*(x_1, x_2, x_3) &= (c_1 - x_2, 2x_3, 2x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Tìm $\mathcal{L} + \mathcal{L}^*$, $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}^* \circ \mathcal{L}$ và ma trận của chúng.

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} 1) \quad (\mathcal{L} + \mathcal{L}^*)(x_1, x_2, x_2) &= \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{L}^*(x_1, x_2, x_3) \\ &= (x_2 + x_3, -2x_1, x_1 + x_3) + (x_1 - x_2, 2x_3, 2x_2 + x_3) \\ &= (x_1 + x_3, -2(x_1 - x_3), x_1 + 3x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Từ đó phép biến đổi $\mathcal{L} + \mathcal{L}^*$ có thể được cho bởi công thức

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_3, \\ y_2 &= -2x_1 + 2x_3, \\ y_3 &= x_1 + 3x_2 + x_3 \end{aligned}$$

và ma trận $A_{\mathcal{L}+\mathcal{L}^*}$ của $\mathcal{L} + \mathcal{L}^*$ có dạng

$$A_{\mathcal{L}+\mathcal{L}^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta lưu ý rằng từ các công thức cho $\mathcal{L}$ và $\mathcal{L}^*$ ta có

$$A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{L}^*} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

và thu được $A_{\mathcal{L}+\mathcal{L}^*}$ bằng phép cộng $A_{\mathcal{L}}$ với $A_{\mathcal{L}^*}$.

2) Ta có

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*)(x) &= \mathcal{L}[\mathcal{L}^*(x)] = \mathcal{L}\big(x_1 - x_2, 2x_3, 2x_2 + x_3\big) \\ &= \big(\underbrace{2x_3} + \underbrace{2x_2 + x_3}, -2(x_1 - x_2), \underbrace{x_1 - x_2} + \underbrace{2x_3}\big) \\ &= (2x_2 + 3x_3, -2x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 + 2x_3)\end{aligned}$$

và tương tự như trên ta có

$$A_{\mathcal{L}\circ\mathcal{L}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(Lưu ý rằng $A_{\mathcal{L}\circ\mathcal{L}^*} = A_{\mathcal{L}} \times A_{\mathcal{L}^*}$).

3) Trường hợp $\mathcal{L}^* \circ \mathcal{L}$ được giải tương tự 2). ▲

Ví dụ 5. 1) Chứng minh rằng trong cơ sở $e = \{e_1, e_2\}$ của không gian $\mathbb{R}^2$ vectơ $x = e_1 - 3e_2$ là vectơ riêng của phép bđtt $\mathcal{L}$ có ma trận trong cơ sở e là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

và với giá trị riêng $\lambda = -1$.

2) Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của phép bđtt xác định bởi các phương trình $y_1 = 5x_1 + 4x_2$, $y_2 = 8x_1 + 9x_2$.

Giải. 1) Trước hết ta lưu ý rằng vectơ $x \neq \theta$.

Ta cần chứng tỏ $\mathcal{L}(x) = -x$. Thật vậy, ta có

$$\mathcal{L}(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = -x.$$

Như vậy $\mathcal{L}(x) = -x$ và do đó x là vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$.

2) 1^+ Ta có ma trận của phép biến đổi là

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 13. \end{array}\right.$$

2^+ Cả hai giá trị $\lambda = 1$ và $\lambda = 13$ đều là các giá trị riêng.

3^+ Để tìm tọa độ của các vectơ riêng ta có hai hệ phương trình tuyến tính

$$(I) \begin{cases} (5-\lambda_1)\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_1)\xi_2 &= 0. \end{cases} \quad (II) \begin{cases} (5-\lambda_2)\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_2)\xi_2 &= 0. \end{cases}$$

i) Vì $\lambda_1 = 1$ nên hệ (I) có dạng

$$\begin{aligned} 4\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\xi_2 = -\xi_1$, do đó nghiệm của hệ này có dạng $\xi_1 = \alpha_1$, $\xi_2 = -\alpha_1$, trong đó α_1 là đại lượng tùy ý. Vì vectơ riêng khác không nên các vectơ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ là các vectơ $u(\alpha_1, -\alpha_1)$, trong đó $\alpha_1 \neq 0$ là tùy ý.

ii) Tương tự khi $\lambda_2 = 13$ hệ (II) trở thành

$$\begin{aligned} -8\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 &= 0, \end{aligned}$$

tức là $\xi_2 = 2\xi_1$. Đặt $\xi_1 = \beta \Rightarrow \xi_2 = 2\beta$. Vậy hệ (II) có nghiệm là $\xi_1 = \beta$, $\xi_2 = 2\beta$. Vì vectơ riêng khác không nên các vectơ riêng ứng với giá trị $\lambda_2 = 13$ là các vectơ $v(\beta, 2\beta)$. ▲

Ví dụ 6. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L}$ với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Giải. Đa thức đặc trưng của phép biến đổi $\mathcal{L}$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$$

Nó có hai nghiệm thực $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$. Các vectơ đặc trưng được tìm từ hai hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)\xi_1 + 2\xi_2 &= 0, \\ 5\xi_1 + (4-\lambda_i)\xi_2 &= 0, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Vì định thức của hệ $= 0$ nên mỗi hệ chỉ thu về một phương trình.

1^+ Với $\lambda_1 = 6$ ta có $5\xi_1 - 2\xi_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{\xi_1}{\xi_2} = \dfrac{2}{5}$ và do đó ta có thể lấy vectơ riêng tương ứng là $u = (2, 5)$ (hoặc mọi vectơ αu, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$)

2^+ Với $\lambda_2 = -1$ ta có $\xi_1 + \xi_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{\xi_1}{\xi_2} = -1$ và vectơ riêng tương ứng là $v = (1, -1)$ (hay mọi vectơ dạng βv, $\beta \neq 0$). ▲

Ví dụ 7. Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L}$ trên $\mathbb{R}^3$ với ma trận theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Giải. Ta có đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

và

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= 3. \end{aligned}\right.$$

Giả sử $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ. Khi đó x là nghiệm của hệ thuần nhất

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - \lambda\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + (5-\lambda)\xi_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

1^+ Khi $\lambda = 1$ ta có

$$(*) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \xi_2 + 4\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - \xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát là $(0, -4\alpha, \alpha)$, $\alpha \neq 0$ tùy ý.

Vậy với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ ta có các vectơ riêng ứng với nó là $(0, -4\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

2^+ Khi $\lambda = 2$ ta có

$$(*) \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 + 4\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 + 3\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm tổng quát là $(\beta, \beta, 0)$, $\beta \neq 0$ và do đó vectơ riêng ứng với $\lambda = 2$ là $(\beta, \beta, 0)$, $\beta \neq 0$.

3^+ Khi $\lambda = 3$, thực hiện tương tự như ở 1^+ và 2^+ ta thu được vectơ riêng tương ứng $(2\gamma, 0, \gamma)$, $\gamma \neq 0$ tùy ý. ▲

Ví dụ 8. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của phép bđtt với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}.$$

Giải. Phương trình đặc trưng

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

có nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -1$. Các vectơ đặc trưng được xác định từ hai hệ phương trình

$$\begin{aligned} (7-\lambda_i)\xi - 12\eta + 6\zeta &= 0, \\ 10\xi - (19+\lambda_i)\eta + 10\zeta &= 0, \\ 12\xi - 24\eta + (13-\lambda_i)\zeta &= 0; \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

1^+ Khi $\lambda = 1$ ta có

$$\begin{aligned} 6\xi - 12\eta + 6\zeta &= 0, \\ 10\xi - 20\eta + 10\zeta &= 0, \\ 12\xi - 24\eta + 12\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Hạng của ma trận (gọi là ma trận đặc trưng) $(A - \lambda_1 E)$ của hệ này là bằng $r = 1$. Do đó hệ tương đương với một phương trình

$$\xi - 2\eta + \zeta = 0.$$

Từ đó suy rằng hệ có hai nghiệm độc lập tuyến tính, chẳng hạn

$$\begin{aligned} u &= (4, 5, 6), \\ v &= (3, 5, 7). \end{aligned}$$

2^+ Khi $\lambda_2 = -1$ ta có

$$\begin{aligned} 8\xi - 12\eta + 6\zeta &= 0,\\ 10\xi - 18\eta + 10\zeta &= 0,\\ 12\xi - 24\eta + 14\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Hạng của ma trận $(A-\lambda_3 E)$ của hệ bằng $r = 2$. Do đó hệ tương đương với hệ hai phương trình. Nghiệm riêng của nó có dạng $w = (3, 5, 6)$. Như vậy u, v, w là các vectơ riêng của phép bđtt đã cho.

Ví dụ 9. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L}$ tương ứng với ma trận đó.

Giải. Giả sử $x = ae_1 + be_2$ là vectơ tùy ý của mặt phẳng. Để tìm phép biến đổi tuyến tính ta cần chỉ rõ ảnh $y = Ax$. Ta có

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\\ a \end{bmatrix} = be_1 + ae_2.$$

Như vậy phép biến đổi $\mathcal{L}$ có tính chất là: thay đổi vai trò của các tọa độ của mỗi vectơ $x \in \mathbb{R}^2$. Từ đó suy rằng $\mathcal{L}$ là phép phản xạ gương đối với đường phân giác thứ nhất. ▲

BÀI TẬP

Trong các bài toán (1 - 11) hãy chứng tỏ phép biến đổi đã cho là phép bđtt và tìm ma trận của chúng theo cơ sở chính tắc.

1. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là phép quay mọi vectơ của mặt phẳng xOy xung quanh gốc tọa độ một góc φ ngược chiều kim đồng hồ.

(ĐS. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$)

2. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là phép quay không gian thực ba chiều một góc φ xung quanh trục Oz.

(ĐS. $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$)

3. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là phép chiếu vuông góc vectơ $a \in \mathbb{R}^3$ lên mặt phẳng xOy.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

4. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là tích vectơ $y = [a, x]$, trong đó $a = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ là vectơ cố định của $\mathbb{R}^3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$)

Chỉ dẫn. Sử dụng phép biểu diễn tích vectơ dưới dạng định thức.

5. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là phép biến đổi đồng nhất trong không gian n-chiều $\mathbb{R}^n$ trong mọi cơ sở.

(ĐS. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$)

6. $\mathcal{L}$ là phép biến đổi đồng dạng $\mathcal{L}(x) = \alpha x$ trong không gian n-chiều.

(ĐS. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}$)

7. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ có dạng $\mathcal{L}(x) = x_2e_1 + x_3e_2 + x_4e_3 + x_1e_4$ trong đó $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

8. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là phép chiếu vuông góc không gian 3-chiều lên trục Δ lập với các trục tọa độ những góc bằng nhau, tức là $(\widehat{Ox, \Delta}) = (\widehat{Oy, \Delta}) = (\widehat{Oz, \Delta}) = \alpha$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$)

Chỉ dẫn. Sử dụng tính chất của cosin chỉ phương của góc bất kỳ $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

9. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là phép chiếu $\mathbb{R}^3$ theo phương song song với mặt phẳng vectơ e_2, e_3 lên trục tọa độ của vectơ e_1

(ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

10. Phép biến đổi $\mathcal{L}$ là phép quay $\mathbb{R}^3$ một góc $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ xung quanh đường thẳng cho trong $\mathbb{R}^3$ bởi phương trình $x_1 = x_2 = x_3$.

(ĐS. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ nếu quay từ e_1 đến e_2,

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nếu quay từ e_2 đến e_1)

Trong các bài toán (12-22) cho hai cơ sở $(e) : e_1, e_2, \dots, e_n$ và $(\mathcal{E}) : \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ của không gian $\mathbb{R}^n$ và ma trận $A_{\mathcal{L}}$ của phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L}$ trong cơ sở (e). Tìm ma trận của $\mathcal{L}$ trong cơ sở $(\mathcal{E})$. Phương pháp chung là: (i) tìm ma trận chuyển T từ cơ sở (e) đến cơ sở $(\mathcal{E})$; (ii) Tìm ma trận T^{-1}; (iii) Tìm $B_{\mathcal{L}} = T^{-1}AT$.

11. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathcal{E}_1 = e_1 - 2e_2$, $\mathcal{E}_2 = 2e_1 + e_2$). (ĐS. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$)

12. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{E}_1 = e_2$, $\mathcal{E}_2 = e_1 + e_2$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$)

13. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{E}_1 = e_2 - 2e_1$, $\mathcal{E}_2 = 2e_1 - 4e_2$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$)

14. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathcal{E}_1 = 3e_1 + 2e_2$, $\mathcal{E}_2 = 2e_1 + 2e_2$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$)

15. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{E}_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $\mathcal{E}_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$,

$\mathcal{E}_3 = -e_1 + 2e_2 + 5e_3$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}$)

16. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathcal{E}_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $\mathcal{E}_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$,

$\mathcal{E}_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$)

17. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\mathcal{E}_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$, $\mathcal{E}_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$,

$\mathcal{E}_3 = 3e_1 + e_3$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{bmatrix}$)

18. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $e_1 = 3\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $e_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$)

19. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $e_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, $e_2 = 2\mathcal{E}_1$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$)

20. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $e_1 = \mathcal{E}_1$, $e_2 = 3\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, $e_3 = 2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} -1 & 18 & -3 \\ -1 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$)

21. $A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e_1 = 2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$, $e_2 = 2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3$,

$e_3 = 3\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 3 & -10 & -8 \\ -1 & 8 & 5 \\ 2 & -13 & -7 \end{bmatrix}$)

22. Trong các phép biến đổi sau đây từ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ phép biến đổi nào là tuyến tính (giả thiết $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$)

1) $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$;

2) $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 4, 5x_3; 6x_1 + 7x_2 + 9x_3; 10, 5x_1 + 12x_2 + 13x_3)$

3) $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$.

4) $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$.

5) $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

6) $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$.

7) $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_3, x_2)$.

(ĐS. 1), 2), 3), 5), 7) là phép bđtt; 4), 6) - không)

23. Tìm *phương trình đặc trưng* và *số đặc trưng* của phép bđtt $\mathcal{L}$ nếu

1) $\mathcal{L}(e_1) = 2e_1$; $\mathcal{L}(e_2) = 5e_1 + 3e_2$; $\mathcal{L}(e_3) = 3e_1 + 4e_2 - 6e_3$, trong đó e_1, e_2, e_3 là cơ sở của không gian. (ĐS. $(\lambda+6)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$)

2) $\mathcal{L}(e_1) = -e_1$, $\mathcal{L}(e_2) = 2e_1 + 5e_2$, $\mathcal{L}(e_3) = 2e_1 - e_2 + 3e_3 + 5e_4$, $\mathcal{L}(e_4) = e_1 + 7e_2 + 4e_3 + 6e_4$, trong đó e_1, e_2, e_3, e_4 là cơ sở của không gian.

(ĐS. $(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda^2 - 9\lambda - 2) = 0$)

3) $\mathcal{L}(e_1) = 2e_1 + 2e_3$, $\mathcal{L}(e_2) = 2e_1 + 2e_2$, $\mathcal{L}(e_3) = -2e_2 + 2e_3$; e_1, e_2, e_3 là cơ sở của không gian. (ĐS. $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda = 0$)

24. Giả sử trong cơ sở $e = \{e_1, e_2\}$ phép bđtt $\mathcal{L}$ có ma trận là

$$A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

còn trong cơ sở $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, $\mathcal{E}_1 = e_1 - e_2$, $\mathcal{E}_2 = e_1 + 2e_2$ phép bđtt $\mathcal{L}^*$ có ma trận

$$A_{\mathcal{L}^*} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận của các phép biến đổi:

1) $\mathcal{L} + \mathcal{L}^*$ trong cơ sở e_1, e_2;

2) $\mathcal{L} + \mathcal{L}^*$ trong cơ sở $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$.

(ĐS. 1) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -3 & 23 \end{bmatrix}$)

25. Giả sử trong cơ sở $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ phép bđtt $\mathcal{L}$ có ma trận

$$A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

còn trong cơ sở $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$, $\mathcal{E}_1 = e_1 + 2e_2$, $\mathcal{E}_2 = e_1 - e_3$, $\mathcal{E}_3 = e_2 + e_3$ phép bđtt $\mathcal{L}^*$ có ma trận

$$A_{\mathcal{L}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận của phép biến đổi:

1) $\mathcal{L} + \mathcal{L}^*$ trong cơ sở e. (ĐS. $\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 16 & -6 & 7 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$)

2) $\mathcal{L} + \mathcal{L}^*$ trong cơ sở $\mathcal{E}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & 12 & -8 \\ 8 & 17 & -7 \end{bmatrix}$)

26. Giả sử trong cơ sở $e = \{e_1, e_2\}$ phép bđtt $\mathcal{L}$ có ma trận

$$A_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

còn trong cơ sở $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, $\mathcal{E}_1 = 2e_1 + e_2$, $\mathcal{E}_2 = e_1 - e_2$ phép bđtt $\mathcal{L}^*$ có ma trận

$$A_{\mathcal{L}^*} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận của các phép biến đổi

1) $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*$ trong cơ sở e. (ĐS. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$)

2) $\mathcal{L}^* \circ \mathcal{L}$ trong cơ sở e. (ĐS. $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$)

3) $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*$ trong cơ sở $\mathcal{E}$. (ĐS. $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$)

4) $\mathcal{L}^* \circ \mathcal{L}$ trong cơ sở $\mathcal{E}$. (ĐS. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$)

27. Giả sử phép bđtt $\mathcal{L}$ có ma trận $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ trong cơ sở $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, $\mathcal{E}_1 = (-3, 7)$, $\mathcal{E}_2 = (1, -2)$ và trong cơ sở $\mathcal{E}^* = \{\mathcal{E}_1^*, \mathcal{E}_2^*\}$, $\mathcal{E}_1^* = (-6, -7)$, $\mathcal{E}_2^* = (-5, 6)$ phép bđtt $\mathcal{L}^*$ có ma trận là $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận của $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*$ trong cơ sở mà các vectơ trên được cho.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{bmatrix}$)

Chỉ dẫn. Tìm các ma trận chuyển cơ sở T_{ea}, T_{eb} và áp dụng công thức (5.22) để tìm ma trận $A_{\mathcal{L}}$ và $A_{\mathcal{L}^*}$ trong cơ sở e. Từ đó $A_{\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^*} = A_{\mathcal{L}} \cdot A_{\mathcal{L}^*}$.

Trong các bài toán (28-31) hãy xác định trong các vectơ đã cho vectơ nào là vectơ riêng của phép bđtt với ma trận đã cho (trong cơ sở nào đó).

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. (ĐS. x_2 và x_3)

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$; $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
(ĐS. x_1 và x_3)

30. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (ĐS. x_3)

31. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. x_2)

Trong các bài toán (32-35) hãy tìm các vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính được cho trong một cơ sở nào đó bởi ma trận A.

32. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}\alpha$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\beta$ với $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ bất kỳ)

33. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\beta$ với $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ bất kỳ)

34. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\beta$, $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}\gamma$,
$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ bất kỳ)

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\beta$; $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ bất kỳ)

36. Cho phép biến đổi tuyến tính $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ như sau

$$\mathcal{L} : (x_1, x_2) \longrightarrow (5x_1 + 4x_2, 8x_1 + 9x_2).$$

Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của $\mathcal{L}$.

(ĐS. $\lambda_1 = 1$, $u = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha \neq 0$; $\lambda_2 = 13$, $v = (\beta, 2\beta)$, $\beta \neq 0$)

37. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ĐS. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $u = (\alpha, \alpha)$, $\alpha \neq 0$; $\lambda_3 = 3$, $v = (\beta, -\beta)$, $\beta \neq 0$) .

Chương 6

Dạng toàn phương và ứng dụng để nhận dạng đường và mặt bậc hai

6.1 Dạng toàn phương

Đa thức đẳng cấp bậc hai của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là dạng toàn phương của n biến đó:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{6.1}$$

Đó là phép tương ứng đặt tương ứng mỗi vectơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ với số $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Nếu đặt

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

thì thu được

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX. \tag{6.2}$$

Định lý. *Nếu C là ma trận của phép bđtt thực hiện trên các biến của dạng toàn phương* (6.1) *với ma trận A thì dạng toàn phương mới thu được có ma trận là C^TAC.*

Dạng toàn phương dạng

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 \tag{6.3}$$

không chứa các số hạng với tích của các biến khác nhau (và do đó nó có ma trận đường chéo) được gọi là *dạng toàn phương chéo* hay *dạng chính tắc.*

Tiếp theo ta trình bày nội dung của các phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

6.1.1 Phương pháp Lagrange

Định lý Lagrange. *Bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến đối với các biến $x_1, \dots, x_n$ mọi dạng toàn phương đều đưa được về dạng chính tắc.*

Tinh thần cơ bản của phương pháp Lagrange là như sau.

1^+ Ít nhất một trong các hệ số a_{ii} khác không.

Không giảm tổng quát, có thể cho rằng $a_{11} \neq 0$ (nếu không thì đánh số lại). Khi đó bằng phép trích một bình phương đủ từ cụm tất cả các số hạng chứa x_1 ta có

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot) &= \alpha y_1^2 + \varphi_2(x_2, x_3, \dots, x_n) \\ y_1 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \end{aligned}$$

trong đó $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các hằng số, $\varphi_2(x_2, \dots, x_n)$ là dạng toàn phương chỉ còn $n-1$ biến (không còn x_1). Đối với $\varphi_2(x_2, \dots, x_n)$ ta lại thực hiện thuật toán như vừa trình bày,...

2^+ Trường hợp $a_{ii} = 0\ \forall\, i = \overline{1,n}$ những $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$ được đưa về trường hợp trên bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến

$$x_j = y_j + y_i$$
$$x_k = y_k, k \neq j$$

Ví dụ 1. Đưa dạng toàn phương

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

về dạng chính tắc.

Giải. Nhóm các số hạng có chứa x_1 thành một cụm và trích từ cụm đó một bình phương đủ ta có

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot) &= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3\\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3\\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3.\end{aligned}$$

Nhóm các số hạng có chứa x_2 rồi trích bình phương ta có

$$\varphi(\cdot) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3(x_2 + \frac{2}{3}x_3)^2 - \frac{5}{3}x_3^2.$$

Dùng phép biến đổi tuyến tính không suy biến

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 2x_3\\ y_2 &= \qquad\ \ x_2 + \frac{2}{3}x_3\\ y_3 &= \qquad\qquad\quad x_3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= y_1 - 2y_2 - \frac{2}{3}y_3\\ x_2 &= \qquad\ \ y_2 - \frac{2}{3}y_3\\ x_3 &= \qquad\qquad\quad y_3\end{aligned}$$

ta thu được

$$\varphi(\cdot) = y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2. \ \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Đưa dạng toàn phương

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

về dạng chính tắc.

Giải. Vì $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ nên đầu tiên thực hiện phép biến đổi sơ bộ không suy biến thu được số hạng có bình phương:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_1 + y_2 \\ x_3 &= \qquad\quad y_3 \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

và thu được

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot) &= y_1(y_1 + y_2) + 2y_1y_3 + 4(y_1 + y_2)y_3 \\ &= y_1^2 + y_1y_2 + 6y_1y_3 + 4y_2y_3. \end{aligned}$$

Xuất phát từ dạng toàn phương mới thu được, tương tự như trong ví dụ 1 ta có

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot) &= \Big(y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 3y_3\Big)^2 - \Big(\frac{1}{2}y_2 + 3y_3\Big)^2 + 4y_2y_3 \\ &= \Big(y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 3y_3\Big)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y_2y_3 - 9y^3. \end{aligned}$$

Thực hiện phép biến đổi không suy biến

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 3y_3, \\ z_2 &= \qquad\ y_2, \\ z_3 &= \qquad\qquad\quad y_3 \end{aligned}$$

với phép biến đổi ngược

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_1 - \frac{1}{2}z_2 - 3z_3, \\ y_2 &= \qquad\ z_2, \\ y_3 &= \qquad\qquad\quad z_3 \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

ta thu được

$$\varphi(\cdot) = z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + z_2z_3 - 9z_3^2.$$

Nhóm các số hạng có chứa z_2 ta có

$$\varphi(\cdot) = z_1^2 - \frac{1}{4}(z_2 - 2z_3)^2 - 8z_3^2.$$

Thực hiện phép biến đổi không suy biến

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= z_1, \\ u_2 &= \quad z_2 - 2z_3, \\ u_3 &= \qquad\quad z_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1 &= u_1, \\ z_2 &= \quad u_2 + 2u_3, \\ z_3 &= \qquad\quad u_3 \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Sau ba phép biến đổi liên tiếp (6.4)-(6.6) dạng đã cho có dạng đường chéo

$$\varphi(\cdot) = u_1^2 - \frac{1}{4}u_2^2 - 8u_3^2.$$

Để tìm ma trận của phép biến đổi hợp ta cần nhân các ma trận của (6.4), (6.5) và (6.6). Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

Do phép biến đổi không suy biến đưa dạng φ về dạng chính tắc là

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1 - \frac{1}{2}u_2 - 4u_3, \\ x_2 &= u_1 + \frac{1}{2}u_2 - 2u_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad\quad u_3. \end{aligned}\right\}$$

Để kiểm tra ta tính tích C^TAC. Ta có

$$C^TAC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Đó là ma trận của dạng chính tắc thu được. ▲

6.1.2 Phương pháp Jacobi

Phương pháp này chỉ áp dụng được khi mọi định thức con chính của ma trận A của dạng toàn phương đều khác 0, tức là khi

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6.7}$$

Cụ thể ta có

Định lý. *Nếu dạng toàn phương*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

thỏa mãn điều kiện vừa nêu: $\Delta_i \neq 0\ \forall\, i = \overline{1, n}$ *thì tồn tại phép biến đổi tuyến tính không suy biến từ các biến* $x_1, \dots, x_n$ *đến các biến* $y_1, \dots, y_n$ *sao cho*

$$\varphi(\cdot) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2, \quad \Delta_0 \equiv 1.$$

Phép biến đổi nêu trong định lý Jacobi có dạng

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 & = y_1 + \alpha_{21} y_2 + \alpha_{31} y_3 + \dots + \alpha_{n1} y_n, \\ x_2 & = \qquad\quad y_2 + \alpha_{32} y_3 + \dots + \alpha_{n2} y_n, \\ \dots & \qquad\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n & = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y_n \end{array}\right\} \tag{6.8}$$

trong đó các hệ số α_{ji} của phép bđtt (6.8) được xác định theo các công thức

$$\alpha_{ij} = (-1)^{j+i} \frac{D_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}} \tag{6.9}$$

ở đây Δ_{j-1} là định thức con chính trong (6.7), còn $D_{j-1,i}$ là định thức con của ma trận A lập nên bởi các phần tử nằm trên giao của các hàng thứ $1, 2, \dots, j-1$ và các cột thứ $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j$

Ví dụ 3. Đưa dạng toàn phuwơng

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

về dạng chính tắc.

Giải. Ma trận của dạng đã cho có dạng

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

với các định thức con chính

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 2, \quad \Delta_3 = 1.$$

Khi đó dạng toàn phương đã cho đưa được về dạng chính tắc

$$\varphi(\cdot) = 2y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2. \tag{6.10}$$

Ta tìm phép bđtt đưa dạng toàn phương đã cho về dạng (6.10). Nó có dạng

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3, \\ x_2 &= \qquad\quad y_2 + \alpha_{32}y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad y_3. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Ta tìm các hệ số của (6.11) theo công thức (6.9). Ta có

$$\alpha_{21} = (-1)^3\frac{D_{1,1}}{\Delta_1} = -\frac{-2}{2} = 1,$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4\frac{D_{2,1}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_{32} = (-1)^5\frac{D_{2,2}}{\Delta_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 0.$$

Như vậy

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_2 &= \qquad y_2, \\ x_3 &= \qquad\qquad y_3. \end{aligned}\right\}$$

Ví dụ 4. Đưa dạng toàn phương

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$$

về dạng chính tắc.

Giải. Ta có ma trận của φ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

với các định thức con chính bằng

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = -\frac{1}{4}, \quad \Delta_3 = -\frac{17}{4} \cdot$$

Khi đó theo định lý Jacobi ta thu được dạng chính tắc là

$$\varphi(\cdot) = 2y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 + 17y^3$$

nhờ phép biến đổi

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3, \\ x_2 &= \qquad y_2 + \alpha_{32}y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad y_3 \end{aligned}\right\}$$

với các hệ số được xác định theo (6.9). Áp dụng (6.9) ta thu được

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \frac{D_{1,1}}{\Delta_1} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4},$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4 \frac{D_{2,1}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-\frac{1}{4}} = 8,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^4 \frac{D_{2,2}}{\Delta_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix}}{-\frac{1}{4}} = -12.$$

Vậy phép biến đổi là

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{3}{4}y_2 + 8y_3, \\ x_2 &= \qquad\quad y_2 - 12y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad y_3 \end{aligned}\right\} . \blacktriangle$$

6.1.3 Phương pháp biến đổi trực giao

Vì ma trận A của dạng toàn phương là ma trận đối xứng, thực nên bài toán đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc có thể quy về bài toán đưa ma trận đối xứng A về dạng đường chéo. Các nghiệm của phương trình đặc trưng $|A - \lambda E| = 0$ là các *số đặc trưng*, còn các vectơ riêng tương ứng với các số đặc trưng đó là các *hướng chính* của dạng toàn phương (Lưu ý rằng hai vectơ riêng tương ứng với các giá trị riêng khác nhau của ma trận đối xứng là trực giao với nhau). Mặt khác vì A là ma trận đối xứng thực nên nó có n số đặc trưng thực (nếu mỗi số được tính một số lần bằng bội của nó).

Từ đó tìm được đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính. Bằng phép trực chuẩn hóa ta thu được một cơ sở gồm từ các vectơ riêng của A.

Ma trận T chuyển từ cơ sở trực chuẩn (e) đến cơ sở trực chuẩn $(\mathcal{E})$ lập nên từ các vectơ riêng của phép biến đổi đối xứng (với ma trận A) là ma trận trực giao vì cả hai cơ sở đều trực chuẩn.

Như vậy đối với mọi ma trận đối xứng thực A có thể tìm một ma trận trực giao T cùng cấp sao cho $B = T^{-1}AT$ là ma trận chéo. Đó cũng chính là ma trận của dạng toàn phương đã cho trong cơ sở $(\mathcal{E})$. Từ đó ta có quy tắc tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

1) Viết ma trận A của dạng toàn phương và tìm các số đặc trưng của nó.

2) Tìm hệ vectơ riêng trực chuẩn của A.

3) Lập phép biến đổi trực giao.

Ví dụ 5. Đưa dạng toàn phương

$$\varphi(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_3^2$$

về dạng chính tắc.

Giải. 1^+ Viết ma trận A của dạng

$$A = \begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lập phương trình đặc trưng

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 27 - \lambda & -5 \\ -5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0.$$

Giải phương trình đặc trưng ta có $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 28$.

2^+ Tìm các vectơ riêng chuẩn tắc. Để tìm tọa độ của các vectơ riêng ta lần lượt giải các hệ phương trình

$$\begin{aligned} (27 - \lambda_i)\xi_1 - 5\xi_2 &= 0, \\ -5\xi_1 + (3 - \lambda_i)\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

khi $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 28$.

a) Nếu $\lambda_1 = 2$ thì ta có hệ

$$\begin{aligned} 25\xi_1 - 5\xi_2 &= 0, \\ -5\xi_1 + \xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Do đó $\xi_2 = 5\xi_1$. Đặt $\xi_1 = \alpha$. Khi đó $\xi_2 = 5\alpha$ và do đó vectơ riêng có dạng

$$u = \alpha e_1 + 5\alpha e_2.$$

b) Nếu $\lambda_2 = 28$ thì ta giải hệ

$$\begin{aligned} -\xi_1 - 5\xi_2 &= 0, \\ -5\xi_1 - 25\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

và thu được $\xi_1 = -5\xi_2$. Đặt $\xi_2 = \beta$ thì $\xi_1 = -5\beta$ và thu được vectơ riêng

$$v = -5\beta e_1 + \beta e_2.$$

Từ đó thu được các vectơ riêng chuẩn hóa

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}e_1 + \frac{5}{\sqrt{26}}e_2, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{5}{\sqrt{26}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}e_2.$$

3^+ Lập phép biến đổi trực giao.

Trước hết ta lập ma trận chuyển T từ cơ sở (e) sang cơ sở $(\mathcal{E})$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{26}} & -\dfrac{5}{\sqrt{26}} \\ \dfrac{5}{\sqrt{26}} & \dfrac{1}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}$$

Vì (e) và $(\mathcal{E})$ đều là những cơ sở trực chuẩn nên T là ma trận trực giao. Nó tương ứng với phép biến đổi trực giao của các biến x_1 và x_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{26}}x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}x_2', \\ x_2 &= \frac{5}{\sqrt{26}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}X_2'. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\varphi(\cdot) = 27\Big(\frac{1}{\sqrt{26}}x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}x_2'\Big)^2 - 10\Big(\frac{1}{\sqrt{26}}x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}x_2'\Big)\Big(\frac{5}{\sqrt{26}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}x_2'\Big)$$
$$+ 3\Big(\frac{5}{\sqrt{26}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}x_2'\Big)^2 = 2{x_1'}^2 + 28{x_2'}^2.\blacktriangle$$

Nhận xét. Hệ thức cuối cùng có thể thu được bằng cách tìm ma trận B của dạng toàn phương trong cơ sở trực chuẩn $(\mathcal{E})$. Ta có

$$B = T^{-1}AT = T^TAT = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

và do đó

$$\varphi(\cdot) = 2{x_1'}^2 + 28{x_2'}^2.$$

Ví dụ 6. Đưa dạng toàn phương

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

về dạng chính tắc.

Giải. 1^+ Lập và giải phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 5.$$

2^+ Để tìm tọa độ các vectơ riêng ta lần lượt giải các hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} (3-\lambda_i)\xi_1 + 2\xi_2 + 0\cdot\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 + (2-\lambda_i)\xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ 0\cdot\xi_1 + 2\xi_2 + (1-\lambda_i)\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

với $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ và $\lambda_3 = 5$.

a) Giả sử $\lambda_1 = 2$. Hạng của ma trận

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

của hệ phương trình thuần nhất

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 \qquad &= 0, \\ 2\xi_1 \qquad + 2\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_2 - \xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

bằng 2 nên hệ nghiệm cơ bản của hệ (6.13) chỉ gồm một nghiệm. Từ (6.13) suy rằng $\xi_1 = 2\alpha$, $\xi_2 = -\alpha$, $\xi_3 = -2\alpha$. Do đó vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 2$ là

$$u_1(2\alpha, -\alpha, -2\alpha)$$

và sau khi chuẩn hóa ta thu được

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3$$

trong đó e_1, e_2, e_3 là cơ sở mà dạng toàn phương có ma trận là A.

b) Giả sử $\lambda = -1$. Hạng của ma trận

$$A + E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

của hệ phương trình thuần nhất

$$\left.\begin{aligned} 4\xi_1 + 2\xi_2 \qquad &= 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

bằng 2 nên hệ nghiệm cơ bản của nó chỉ gồm một nghiệm. Từ (6.14) suy rằng $\xi_1 = \beta$, $\xi_2 = -2\beta$, $\xi_3 = 2\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Do đó vectơ riêng tương ứng với $\lambda_2 = -1$ sẽ là

$$u_2(\beta, -2\beta, 2\beta)$$

và sau khi chuẩn hóa ta thu được

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3.$$

c) Giả sử $\lambda_3 = 5$. Tương tự như trên, từ hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} -2\xi_1 + 2\xi_2 \qquad &= 0,\\ 2\xi_1 - 3\xi_2 + 2\xi_3 &= 0,\\ 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ta có $\xi_1 = 2\gamma$, $\xi_2 = 2\gamma$, $\xi_3 = \gamma$ và vectơ riêng tương ứng có dạng

$$u_3(2\gamma, 2\gamma, \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

và sau khi chuẩn hóa ta có

$$\mathcal{E}_3 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3.$$

Từ các khai triển của $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ suy rằng chúng lập thành một cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^3$.

Ma trận của phép biến đổi trực giao có dạng

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

với các công thức biến đổi tọa độ

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}x_1' + \frac{1}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3',\\ x_2 &= -\frac{1}{3}x_1' - \frac{2}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3',\\ x_3 &= -\frac{2}{3}x_1' + \frac{2}{3}x_2' + \frac{1}{3}x_3'. \end{aligned}$$

Với phép biến đổi đó ta có

$$\varphi(\cdot) = 2{x'_1}^2 - {x'_2}^2 + 5{x'_3}^2. \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Giải. 1^+ Lập và giải phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = -2.$$

2^+ Để tìm tọa độ của các vectơ riêng ta cần giải các hệ phương trình thuần nhất

$$\left.\begin{aligned} (6-\lambda_i)\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_4 &= 0, \\ 2\xi_1 + (3-\lambda_i)\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 + (3-\lambda_i)\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

lần lượt với $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$.

a) Giả sử $\lambda = 7$. Hạng của ma trận $A - 7E$ của hệ

$$\left.\begin{aligned} -\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

là bằng 1 nên hệ có hai nghiệm cơ bản. Hệ (6.15) được đưa về một phương trình

$$\xi_1 = 2\xi_2 + 2\xi_3.$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ (6.15) có dạng $\xi_1 = 2\alpha + 2\beta$, $\xi_2 = \alpha$, $\xi_3 = \beta$:

$$(2\alpha + 2\beta, \alpha, \beta), \tag{6.16}$$

tức là họ các vectơ riêng phụ thuộc hai tham số α và β.

Ta lấy ra hai vectơ trực giao nào đó của họ $u = 2(\alpha+\beta)e_1+\alpha e_2+\beta e_3$. Chẳng hạn đặt $\alpha = 0$, $\beta = 1$ thì thu được vectơ riêng

$$u_1(2, 0, 1)$$

và sau khi chuẩn hóa ta được

$$\mathcal{E}_1 = \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big).$$

Để có vectơ thứ hai u_2 ta cần chọn α và β sao cho $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ tức là

$$2\cdot 2(\alpha+\beta)+\beta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 5\beta = 0.$$

Ta có thể chọn $\alpha = 5$, $\beta = -4$ và từ (6.16) ta có

$$u_2(2, 5, -4)$$

và sau khi chuẩn hóa ta có

$$\mathcal{E}_2 = \Big(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{-4}{3\sqrt{5}}\Big).$$

b) Giả sử $\lambda = -2$. Ta có

$$\left.\begin{aligned} 8\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 &= 0,\\ 2\xi_1 + 5\xi_2 - 4\xi_3 &= 0,\\ 2\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Hạng của ma trận của hệ bằng 2 nên hệ cơ bản chỉ gồm một nghiệm. Chẳng hạn giải hai phương trình cuối ta có $\xi_2 = \xi_3$ và $\xi_1 = -\dfrac{\xi_2}{2}$ và do đó $\xi_1 = -\dfrac{\xi_1}{2} = -\dfrac{\xi_3}{2}$.

Đặt $\xi_1 = \alpha$ ta có họ vectơ riêng phụ thuộc một tham số

$$u_3(\alpha, -2\alpha, -2\alpha), \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

và sau khi chuẩn hóa ta được

$$\mathcal{E}_3 = \Big(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\Big).$$

Rõ ràng là $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^3$ và ma trận chuyển về cơ sở mới này là ma trận trực giao dạng

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Từ đó thu được dạng toàn phương trong cơ sở mới $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ là

$$B = T^T A T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

tức là

$$\varphi(\cdot) = 7{x'_1}^2 + 7{x'_2}^2 - 2{x'_3}^2,$$

trong đó

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}}x'_1 + \frac{2}{3\sqrt{5}}x'_2 + \frac{1}{3}x'_3, \\ x_2 &= \phantom{\frac{2}{\sqrt{5}}x'_1 + } \frac{\sqrt{5}}{3}x'_2 - \frac{2}{3}x'_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}x'_1 - \frac{4}{3\sqrt{5}}x'_2 - \frac{2}{3}x'_3. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$$

về dạng chính tắc.

Giải. 1^+ Ma trận của dạng toàn phương là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -9,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 9$$

2^+ Tìm các vectơ riêng

Để tìm tọa độ của các vectơ riêng ta cần giải các hệ phương trình thuần nhất

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda_i)\xi_1 - 4\xi_2 - 8\xi_3 &= 0, \\ -4\xi_1 + (7-\lambda_i)\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ -8\xi_1 - 4\xi_2 + (1-\lambda_i)\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

lần lượt với $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$.

a) Giả sử $\lambda_1 = -9$. Khi đó từ (6.17) ta có

$$\left.\begin{aligned} 10\xi_1 - 4\xi_2 - 8\xi_3 &= 0, \\ -4\xi_1 + 16\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ -8\xi_1 - 4\xi_2 + 10\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

hay là

$$\left.\begin{aligned} 5\xi_1 - 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ \xi_1 - 4\xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 - 5\xi_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Vì hạng của ma trận của hệ bằng 2 nên hệ có nghiệm khác 0. Ta giải hệ hai phương trình đầu

$$\begin{aligned} 5\xi_1 - 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0, \\ \xi_1 - 4\xi_2 + \xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

và thu được nghiệm tổng quát là

$$u(2\alpha, \alpha, 2\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Đó là họ vectơ riêng (phụ thuộc một tham số) ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -9$. Sau khi chuẩn hóa ta thu được

$$\mathcal{E}_1 = \Big(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big).$$

b) Giả sử $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$. Khi đó từ (6.17) thu được hệ phương trình thuần nhất

$$\left.\begin{aligned} -8\xi_1 - 4\xi_2 - 8\xi_3 &= 0,\\ -4\xi_1 - 2\xi_2 - 4\xi_3 &= 0,\\ -8\xi_1 - 4\xi_2 - 8\xi_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

hay là

$$\left.\begin{aligned} 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0,\\ 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0,\\ 2\xi_2 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Hạng của ma trận của hệ bằng 1 nên hệ nghiệm cơ bản của nó gồm hai nghiệm. Nghiệm tổng quát của hệ có dạng

$$v(\alpha, -2\alpha - 2\beta, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \tag{6.18}$$

Từ nghiệm tổng quát này ta rút ra hai vectơ riêng trực giao v_1 và v_2 tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$. Để có v_1 ta cho $\alpha = 1$, $\beta = 0$ và thu được

$$v_1 = (1, -2, 0). \tag{6.19}$$

Để tìm v_2 ta cần xác định α và β trong (6.18) sao cho thỏa mãn điều kiện trực giao giữa v_1 và v_2, tức là $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Từ (6.18) và (6.19) ta có

$$\alpha + 4\alpha + 4\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{4}{5}\beta.$$

Do vậy, ta có thể lấy $\beta = 5$ và khi đó từ (6.18) suy ra

$$v_2 = (-4, -2, 5).$$

Sau khi chuẩn hóa v_1 và v_2 ta thu được

$$\mathcal{E}_{\in} = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\Big)$$
$$\mathcal{E}_3 = \Big(\frac{-4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\Big).$$

(Lưu ý rằng $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_3$ vì $\mathcal{E}_1$ và $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ là các vectơ riêng tương ứng với hai giá trị riêng khác nhau nên chúng trực giao với nhau).

3^+ Xác định phép biến đổi trực giao. Trong cơ sở trực chuẩn vừa thu được $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ dạng toàn phương đã cho được đưa về dạng chính tắc

$$\varphi(\cdot) = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$$

nhờ ma trận trực giao

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

với phép biến đổi tương ứng là

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{4}{3\sqrt{5}}y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{2}{3\sqrt{5}}y_3, \\ x_3 &= \frac{2}{3}y_1 \qquad\qquad + \frac{\sqrt{5}}{3}y_3. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Trong các bài toán sau đây hãy viết ma trận của dạng toàn phương có biểu thức tọa độ sau trong không gian $\mathbb{R}^3$ (1-4) và trong $\mathbb{R}^4$ (5-6).

1. $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$. (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

2. $2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$)

3. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$)

4. $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$)

5. $4x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - x_1x_2 + 8x_1x_4 - 5x_2x_4$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -\frac{5}{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$)

6. $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$)

Trong các bài toán 7-8, tìm ma trận của mỗi dạng toàn phương

7. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (ĐS. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 5 \end{bmatrix}$)

8. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. (ĐS. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$)

9. Cho các dạng toàn phương sau đây được viết dưới dạng ma trận. Hãy viết các dạng toàn phương đó dưới dạng thông thường

1) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(ĐS. $3x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$)

2) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

(ĐS. $4x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$)

10. Viết các dạng toàn phương sau đây dưới dạng ma trận.

1) $3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$. (ĐS. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$)

2) $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$)

3) $2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$.

(ĐS. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$)

Trong các bài toán sau đây (11-14) tìm dạng toàn phương thu được từ dạng đã cho bởi phép biến đổi đã chỉ ra

11. $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$; $x_1 = 2y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$.
(ĐS. $\varphi_1(y_1, y_2) = 19y_1^2 - 2y_2^2 - 10y_1y_2$)

12. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2$;
$x_1 = -y_1 + 2y_2$; $x_2 = 3y_1 + y_2 + y_3$; $x_3 = -2y_1 - y_2$.
(ĐS. $\varphi_1(y_1, y_2, y_3) = 22y_1^2 + 12y_2^2 + 3y_3^2 + 11y_1y_2 + 17y_1y_3 + 8y_2y_3$)

13. $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$;
$x_1 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 - y_2 + y_3$, $x_3 = y_3 + y_2$.
(ĐS. $\varphi_1(y_1, y_2, y_3) = 7y_2^2 + 9y_3^2 - 3y_1y_2 + 5y_1y_3)$)

14. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$;
$x_1 = y_1 + 2y_2$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_2 - y_3$.
(ĐS. $\varphi_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 7y_2^2 + y_3^2$)

Dùng phương pháp Lagrange đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc (15-19)

15. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.
(ĐS. $\varphi = 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 + \frac{5}{2}(x_2 - \frac{3}{5}x_3)^2 + \frac{11}{10}x_3^2$
$\Rightarrow \varphi_1(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{11}{10}y_3^2$)

16. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

(ĐS. $\varphi(\cdot) = (3x_1 - x_2 - x_3)^2 + 5(x_2 + x_3)^2$
$\Rightarrow \varphi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 5y_2^2 + 0 \cdot y_3^2$)

17. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

(ĐS. $\varphi = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2$
$\Rightarrow \varphi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 4y_2^2 - 8y_3^2$)

18. $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

(Chỉ dẫn và Đáp số: Dùng phép biến đổi phụ

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_1 + y_2 \\ x_3 &= \qquad\quad y_3 \end{cases}$$

và thu được dạng có chứa bình phương

$$\varphi(\cdot) = (y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 3y_3)^2 - \frac{1}{4}(y_2 - 2y_3)^2 - 8y_3^2 \Rightarrow \varphi_1 = z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 - 8z_3^2)$$

19. $4x_1x_2 - 5x_2x_3$

(Chỉ dẫn và Đáp số: Dùng phép biến đổi phụ

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_3 &= \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

và thu được

$$\varphi(\cdot) = \left(y_1 - \frac{5}{4}y_3\right)^2 - \left(y_2 + \frac{5}{4}y_3\right)^2 = z_1^2 - z_2^2 + 0 \cdot z_3^2)$$

Dùng phương pháp Jacobi để đưa các dạng toàn phương về dạng chính tắc (20-25)

20. $3x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$.

(ĐS. $\varphi(\cdot) = 3y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2 + \frac{11}{2}y_3^2$ nhờ phép biến đổi

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - \frac{2}{3}y_2, \\ x_2 &= \quad y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 &= \qquad y_3.) \end{cases}$$

21. $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

(ĐS. $\varphi(\cdot) = 5y_1^2 + \frac{24}{5}y_2^2 + y_3^2$ nhờ phép biến đổi

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + \frac{1}{5}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_2 &= \quad y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 &= \qquad y_3.) \end{cases}$$

22. $x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_2^3 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

(ĐS. $\varphi(\cdot) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ nhờ phép biến đổi:

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - 2y_2 - y_3, \\ x_2 &= \quad y_2, \\ x_3 &= \qquad y_3.) \end{cases}$$

23. $5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(ĐS. $\varphi(\cdot) = \frac{1}{5}y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2$ nhờ phép biến đổi

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - \frac{2}{5}y_2 - y_3, \\ x_2 &= \quad y_2 + 3y_3, \\ x_3 &= \qquad y_3.) \end{cases}$$

24. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

(ĐS. $\varphi(\cdot) = y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$ nhờ phép biến đổi

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 &= \quad\; y_2, \\ x_3 &= \qquad\; y_3.) \end{cases}$$

25. $3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + 4x_2x_3$

(ĐS. $\varphi(\cdot) = 3y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 17y_3^2$ nhờ phép biến đổi

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - \frac{1}{3}y_2 - 2y_3, \\ x_2 &= \quad\; y_2 + 7y_3, \\ x_3 &= \qquad\; y_3.) \end{cases}$$

Trong các bài toán sau đây (26-35) tìm phép biến đổi trực giao đưa mỗi dạng toàn phương đã cho về dạng chính tắc và viết dạng chính tắc đó.

26. $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 \\ x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\cdot) = y_1^2 + 6y_2^2$)

27. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\cdot) = 3y_1^2 - y_2^2$)

28. $5x_1^2 + 12x_1x_2$.

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{\sqrt{13}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{13}}y_2, \\ x_2 &= \frac{2}{\sqrt{13}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\cdot) = 9y_1^2 - 4y_2^2$)

29. $7x_1^2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{5}x_1x_2$.

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{\sqrt{14}}y_1 + \sqrt{\frac{5}{14}}y_2 \\ x_2 &= \sqrt{\frac{5}{14}}y_1 - \frac{3}{\sqrt{14}}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\cdot) = 12y_1^2 - 2y_2^2$)

30. $2x_1^2 - 4\sqrt{5}x_1x_2 + 3x_2^2$.

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}y_2 \\ x_2 &= -\frac{\sqrt{5}}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\cdot) = 7y_1^2 - 2y_2^2$)

31. $\varphi(x_1, x_2) = 4x_1x_2$

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(y_1, y_2) = 2y_1^2 - 2y_2^2$)

32. $3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$.

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\cdot) = 6y_1^2$)

33. $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

(ĐS. $\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 &= -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 &= \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\cdot) = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$)

34. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}x_2x_3$.

(ĐS. $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}y_3$, $x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$;
$\varphi(\cdot) = 2y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$)

35. $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

(ĐS. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$,
$x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$; $\varphi(\cdot) = y_1^2 + 7y_2^2 + y_3^2$)

6.2 Đưa phương trình tổng quát của đường bậc hai và mặt bậc hai về dạng chính tắc

1° Xét phương trình tổng quát của đường bậc hai

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (6.20)$$

Tổng của ba số hạng đầu tiên

$$\varphi(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \qquad (6.21)$$

là dạng toàn phương của các biến x và y và được gọi là *dạng toàn phương ứng với phương trình* (6.20). Ma trận của dạng toàn phương này có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

1^+ Nếu $\det A > 0$ thì (6.20) là phương trình của đường dạng eliptic.

2^+ Nếu $\det A < 0$ thì (6.20) là phương trình đường dạng hypecbolic.

3^+ Nếu $\det A = 0$ thì (6.20) là phương trình đường dạng parabolic.

Trong trường hợp khi $\det A \neq 0$ thì (6.20) xác định đường có tâm điểm. Nếu $\det A = 0$ thì (6.20) là phương trình đường không có tâm điểm. Hướng của các vectơ riêng trực giao của ma trận dạng toàn phương tương ứng với phương trình (6.20) gọi là *hướng chính* của đường xác định bởi phương trình (6.20).

Người ta chứng minh rằng tồn tại hệ tọa độ Đêcác vuông góc mà trong đó phương trình tổng quát (6.20) của đường bậc hai có dạng chính tắc.

Để tìm hệ tọa độ đó ta tiến hành như sau.

1^+ Tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương tương ứng với phương trình đã cho về dạng chính tắc.

2^+ Dựa theo phép biến đổi này ta tìm các hướng chính của đường, tức là tìm các vectơ riêng trực chuẩn $\mathcal{E}_1$ và $\mathcal{E}_2$ của ma trận dạng toàn phương (6.21).

3^+ Tìm phương trình của đường đã cho trong hệ tọa độ $O\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$.

4^+ Trong phương trình thu được ta bổ sung để thu được bình phương đủ rồi tìm các tọa độ của điểm O' là gốc của hệ tọa độ cần tìm. Trong hệ tọa độ tìm được $O'\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ phương trình của đường đã cho có dạng chính tắc.

2°. Xét phương trình tổng quát của mặt bậc hai

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + bx + by + ez + f = 0, \tag{6.22}$$

trong đó ít nhất một hệ số $a_{ij} \neq 0$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$.

Tổng của sáu số hạng đầu của phương trình

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \tag{6.23}$$

là dạng toàn phương ba biến x, y, z và được gọi là *dạng toàn phương tương ứng với phương trình* (6.22). Ma trận của dạng là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Trong mục trước đã chứng tỏ tồn tại phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương (6.23) về dạng chính tắc. Do vậy việc khảo sát và dựng mặt bậc hai xác định bởi phương trình (6.22) được tiến hành tương tự như trong 1°.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Đưa phương trình

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$$

về dạng chính tắc và dựng đường xác định bởi phương trình đó.

Giải. 1^+ Dạng toàn phương

$$\varphi(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2$$

tương ứng với phương trình đã cho có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Nó có các số đặc trưng là $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5$. Ta tìm tọa độ các vectơ riêng của A bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} (17 - \lambda_i)\xi_1 + 6\xi_2 &= 0, \\ 6\xi_1 + (8 - \lambda_i)\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

lần lượt với $\lambda_1 = 20$ và $\lambda_2 = 5$.

Với $\lambda_1 = 20$ ta có

$$\left.\begin{aligned} -3\xi_1 + 6\xi_2 &= 0 \\ 6\xi_1 - 12\xi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi_1 = 2\xi_2.$$

Do đó vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 20$ có dạng

$$u(2\alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

và sau khi chuẩn hóa ta được

$$\mathcal{E}_1 = \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big).$$

Với $\lambda_2 = 5$ ta có

$$\left.\begin{aligned} 12\xi_1 + 6\xi_2 &= 0, \\ 6\xi_1 + 3\xi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \to \xi_2 = -2\xi_1.$$

Do đó vectơ riêng tương ứng với $\lambda_2 = 5$ có dạng

$$v(\beta, -2\beta)$$

và sau khi chuẩn hóa ta thu được vectơ riêng chuẩn của ma trận A:

$$\mathcal{E}_2 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big).$$

Từ đó thu được ma trận chuyển về cơ sở mới (ma trận của phép biến đổi trực giao) có dạng

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

và do vậy phép biến đổi trực giao cần tìm có dạng

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

Nó đưa dạng toàn phương φ về dạng chính tắc

$$\varphi_1 = 20x'^2 + 5y'^2.$$

2^+ Các vectơ cơ sở $\mathcal{E}_1$ và $\mathcal{E}_2$ thu được từ các vectơ cơ sở e_1, e_2 bằng phép biến đổi trực giao được cho bởi công thức

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}e_2, \\ \mathcal{E}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}e_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

3^+ Thay (6.24) vào phương trình đã cho ta thu được phương trình của đường trong hệ tọa độ $O\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$:

$$20{x'}^2 + 5{y'}^2 + 40x' - 20y' + 20 = 0$$

và từ đó

$$\frac{(x'+1)^2}{1} + \frac{(y'-2)^2}{4} = 1 \tag{6.26}$$

4^+ Thực hiện phép dời hệ tọa độ $O\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ theo vectơ $\overrightarrow{OO'} = -\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2$ ta thu được hệ tọa độ $O'\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ và trong hệ đó phương trình (6.26) có dạng

$$\frac{{x''}^2}{1} + \frac{{y''}^2}{4} = 1. \tag{6.27}$$

Như vậy phương trình đã cho xác định elip (hình 6.1)

Hình 6.1

Từ lời giải và hình vẽ trình bày suy ra cách dựng elip (6.27) trong hệ $O'\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$. Đầu tiên dựng hệ tọa độ $O\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ (thay cho $\mathcal{E}_1$ và $\mathcal{E}_2$ có thể dựng các vectơ $\overrightarrow{OM_1'} = 2e_1 + e_2$, $\overrightarrow{OM_2'} = -e_1 + 2e_2$); tiếp đến thực hiện phép tịnh tiến song song hệ đó một vectơ $\overrightarrow{OO'} = -e_1 + 2e_2$ đến O'. Sau cùng là dựng elip (6.27).

Ví dụ 2. Đưa phương trình đường cong

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

về dạng chính tắc và dựng đường cong đó.

Giải. Dạng toàn phương tương ứng với phương trình đã cho

$$\varphi(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$$

có ma trận là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lập phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay là} \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Từ đó $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Ta tìm tọa độ của các vectơ riêng của A bằng cách giải hệ phương trình

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda_i)\xi_1 - \xi_2 &= 0, \\ -\xi_1 + (1-\lambda_i)\xi_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

lần lượt với $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 0$.

Với $\lambda_1 = 2$ ta có

$$\left.\begin{aligned} -\xi_1 - \xi_2 &= 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi_1 = -\xi_2$$

và do đó hướng chính tương ứng với $\lambda_1 = 2$ được xác định bởi vectơ riêng

$$u = (\alpha, -\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

và sau khi chuẩn hóa ta có

$$\mathcal{E}_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Tương tự với $\lambda_2 = 0$ ta có $\xi_1 - \xi_2 = 0$, $-\xi_1 + \xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$ và hướng chính ứng với $\lambda_2 = 0$ xác định bởi vectơ riêng

$$v(\beta, \beta), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

và chuẩn hóa ta được

$$\mathcal{E}_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Như vậy ta đã chuyển từ cơ sở e_1, e_2 đến cơ sở trực chuẩn $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, trong đó

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\\ \mathcal{E}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\end{aligned}$$

bởi ma trận chuyển

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

và phép biến đổi trực giao tương ứng

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y',\\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

Để tìm dạng của phương trình đường đã cho trong hệ tọa độ $O\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ ta thay (6.28) vào phương trình tổng quát đã cho và thu được

$$2x'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{16}{\sqrt{2}}y' + 25 = 0 \tag{6.29}$$

hay là

$$\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Sau phép tịnh tiến song song các trục tọa độ đến gốc mới $O' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, phương trình (6.29) trong hệ tọa độ $O'XY$ có dạng chính tắc $X^2 = 4\sqrt{2}Y$. Sự sắp xếp của parabon được chỉ ra trên hình 6.2.

Hình 6.2

Ví dụ 3. Đưa phương trình tổng quát của mặt bậc hai

$$9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + 4 = 0$$

về dạng chính tắc và dựng mặt đó.

Giải. Dạng toàn phương tương ứng với phương trình đã cho có dạng

$$\varphi(x, y, z) = 9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz$$

với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}.$$

Ma trận này có ba số đặc trưng là $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 40$, $\lambda_3 = 0$. Do đó dạng chính tắc của dạng toàn phương $\varphi(\cdot)$ là

$$\varphi_1(\cdot) = 9x'^2 + 40y'^2.$$

Ta cần tìm phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương tương ứng với phương trình đã cho về dạng chính tắc. Tọa độ của các vectơ riêng được tìm từ hệ phương trình

$$\begin{aligned}(9-\lambda_i)\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + 0\cdot\xi_3 &= 0,\\ 0\cdot\xi_1 + (20-\lambda_i)\xi_2 - 20\xi_3 &= 0,\\ 0\cdot\xi_1 - 20\xi_2 + (20-\lambda_i)\xi_3 &= 0\end{aligned}$$

với $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 40$, $\lambda_3 = 0$.

a) Với $\lambda_1 = 9$ ta có

$$\begin{aligned}0\cdot\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + 0\cdot\xi_3 &= 0,\\ 0\cdot\xi_1 + 11\xi_2 - 20\xi_3 &= 0,\\ 0\cdot\xi_1 - 20\xi_2 + 11\xi_3 &= 0.\end{aligned}$$

Từ đó thu được vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 9$ là

$$u(\alpha, 0, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

và sau khi chuẩn hóa ta được

$$\mathcal{E}_1 = (1, 0, 0).$$

b) Với $\lambda_2 = 40$ ta có

$$\begin{aligned}31\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + 0\cdot\xi_3 &= 0,\\ 0\cdot\xi_1 - 20\xi_2 - 20\xi_3 &= 0,\\ 0\cdot\xi_1 - 20\xi_2 - 20\xi_3 &= 0\end{aligned}$$

và từ đó thu được vectơ riêng ứng với $\lambda_2 = 40$:

$$v(0, \beta, -\beta), \quad \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$$

và sau khi chuẩn hóa ta được

$$\mathcal{E}_2 = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big).$$

c) Với $\lambda_3 = 0$ ta có vectơ riêng tương ứng là

$$w(0, \gamma, \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0$$

và sau khi chuẩn hóa ta có

$$\mathcal{E}_3 = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Ma trận chuyển từ cơ sở e_1, e_2, e_3 đến cơ sở trực chuẩn $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ có dạng

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Như vậy phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương tương ứng với phương trình đã cho về dạng chính tắc có dạng

$$\left.\begin{aligned} x &= x', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z', \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

Phép biến đổi này biến các vectơ cơ sở e_1, e_2, e_3 thành

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= e_1, \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \\ \mathcal{E}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3. \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

Để tìm phương trình của đường đã cho trong hệ tọa độ mới $O\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3$ ta thế (6.30) vào phương trình tổng quát đã cho và thu được

$$9x'^2 + 40y'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0$$

hay là

$$\frac{(x'-2)^2}{3,6} + \frac{(y'-0,1)^2}{0,81} = 1.$$

Tiếp theo ta thực hiện phép tịnh tiến song song hệ tọa độ $O\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3$ một vectơ $\overrightarrow{OO'} = 2\mathcal{E}_1 + 0,1\mathcal{E}_2$ và thu được hệ $O'\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3$, trong hệ đó phương trình đã cho có dạng

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \quad a = \sqrt{3,6}, b = 0,9.$$

Phương trình này (và do đó phương trình đã cho) xác định mặt trụ eliptic với đường sinh $\parallel \mathcal{E}_3$.

Dựng mặt trụ eliptic: cùng với hệ tọa độ $Oe_1e_2e_3$ ta dựng hệ tọa độ $O'\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3$, trong đó thay cho việc dựng các vectơ (6.31) ta có thể dựng các vectơ

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM_1} &= e_1,\\
\overrightarrow{OM_2} &= e_2 - e_3,\\
\overrightarrow{OM_3} &= e_2 + e_3.
\end{aligned}$$

Sự sắp xếp của mặt đã cho được chỉ rõ trên hình 6.3

Hình 6.3

BÀI TẬP

Đưa phương trình tổng quát của các đường bậc hai về dạng chính tắc và nhận dạng chúng.

1. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

(ĐS. Đường elip, phương trình chính tắc $\frac{32}{3}x'^2 + \frac{16}{3}y'^2 = 1$)

2. $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

(ĐS. Đường hypecbôn, phương trình chính tắc $2\sqrt{2}y'^2 - 2\sqrt{2}x'^2 = 1$)

3. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.

(ĐS. Đường parabôn, phương trình chính tắc $2y'^2 - \sqrt{2}x' = 0$)

4. $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

(ĐS. Đường hypecbôn, phương trình chính tắc $\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{8/3})^2} = 1$)

5. $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 9 = 0$.

(ĐS. Đường elip, phương trình chính tắc $\frac{x'^2}{(3/\sqrt{7})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$)

6. $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$.

(ĐS. Đường hypecbôn, phương trình chính tắc $\frac{x'^2}{(\sqrt{3}/2)^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$)

7. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 24 = 0$.

(ĐS. Đường elip, phương trình chính tắc $\frac{x'^2}{(\sqrt{24})^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$)

8. $x^2 - 8xy + 7y^2 - 36 = 0$.

(ĐS. Đường hypecbôn, phương trình chính tắc $\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{6^2} = 1$)

Đưa phương trình tổng quát của các mặt bậc hai về dạng chính tắc và nhận dạng chúng.

9. $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0.$

(ĐS. Đường paraboloid một tầng; $\dfrac{x'^2}{(\sqrt{5/4})^2} + \dfrac{y'^2}{(\sqrt{5/8})^2} - \dfrac{z'^2}{(\sqrt{5/2})^2} = 1$)

10. $4x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xy - 4yz + 4x - 2y - 4z - 3 = 0.$

(ĐS. Mặt trụ eliptic; $\dfrac{x'^2}{(\sqrt{2})^2} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$)

11. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 8y + 18z - 54 = 0.$

(ĐS. Hypecboloid 1-tầng; $\dfrac{x'^2}{36} + \dfrac{y'^2}{18} - \dfrac{Z'^2}{12} = 1$)

12. $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz = 0.$

(ĐS. Mặt nón, $\dfrac{x'^2}{4} + z'^2 = \dfrac{y'^2}{2}$)

13. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$

(ĐS. Mặt parabôloid eliptic, $2x'^2 + 5y'^2 - 5\sqrt{2}z' = 0$)

14. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 2yz - 16 = 0$

(ĐS. Mặt elipxoid, $\dfrac{x'^2}{4^2} + \dfrac{y'^2}{(2\sqrt{2})^2} + \dfrac{z'^2}{2^2} = 1$)