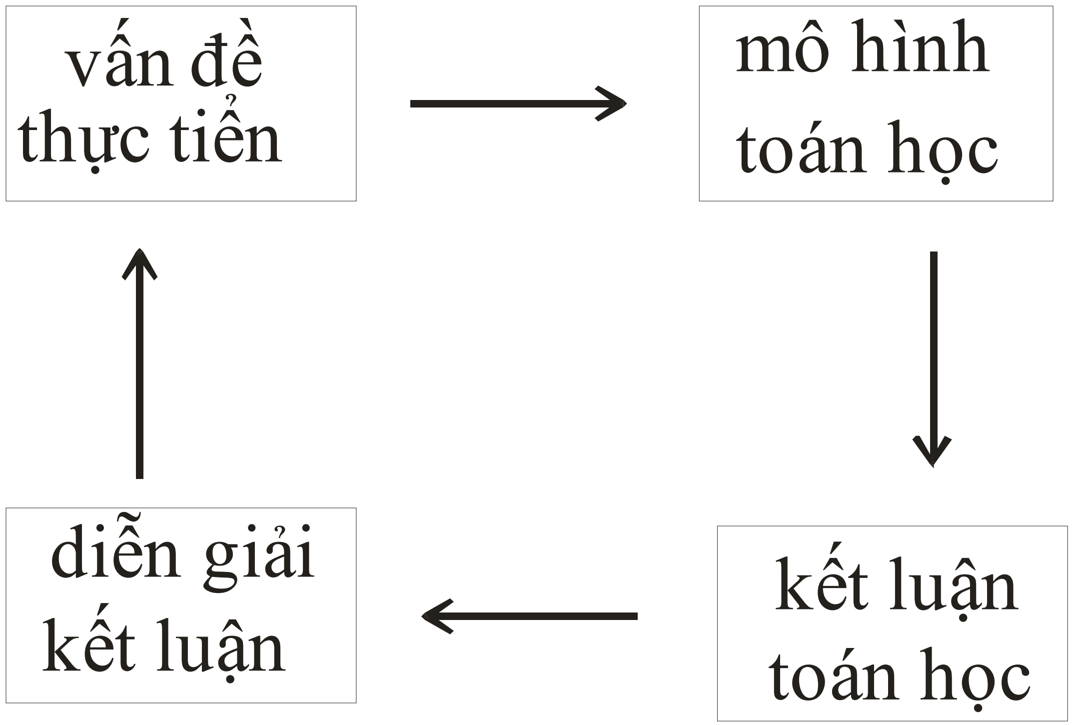
TOÁN GIẢI TÍCH 1

DƯƠNG MINH ĐỨC

Đây là các slides bài giảng môn Toán Giải Tích 1 dành cho sinh viên năm thứ nhất Khoa Toán-Tin, trường Đại học Khoa Học, Đại học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh, niên học 2007-2008. Bài giảng này được soạn theo quyển : Giáo Trình Toán Giải Tích 1, của GS Dương Minh Đức, Nhà xuất bản Thống Kê, 2006.

CHƯƠNG MỘT

TẬP HỢP VÀ LÝ LUẬN CƠ BẢN



TOÁN HỌC VÀ THỰC TIỄN

Một vấn đề có thể giải quyết bằng các bước sau :

- dùng toán để mô hình vấn đề : làm rõ và gọn hơn,
- dùng các phương pháp toán để giải quyết bài toán trong mô hình.
- diễn giải kết quả toán học bằng ngôn ngử thực tiển

Thí dụ1. Giá một cuốn tập là 3.000\$, quĩ tài trơ chỉ có 3.500.000\$, hỏi có thể mua được bao nhiêu tập cho học sinh nghèo?

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau: số tập mua là một số nguyên lớn hơn hay bằng 1, số tiền có thể chi trả chỉ có thể là các số từ 1 đến 3.500.000, nếu số tập mua được là n thì số tiền phải trả là $3.000\times n$.

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau: số tập mua là một số nguyên lớn hơn hay bằng 1, số tiền có thể chi trả chỉ có thể là các số từ 1 đến 3.500.000, nếu số tập mua được là n thì số tiền phải trả là $3000 \times n$.

Chúng ta thấy trong mô hình này không còn các vấn đề rắc rối như : quĩ từ thiện, tập vở, tiền bạc và học sinh nghèo.

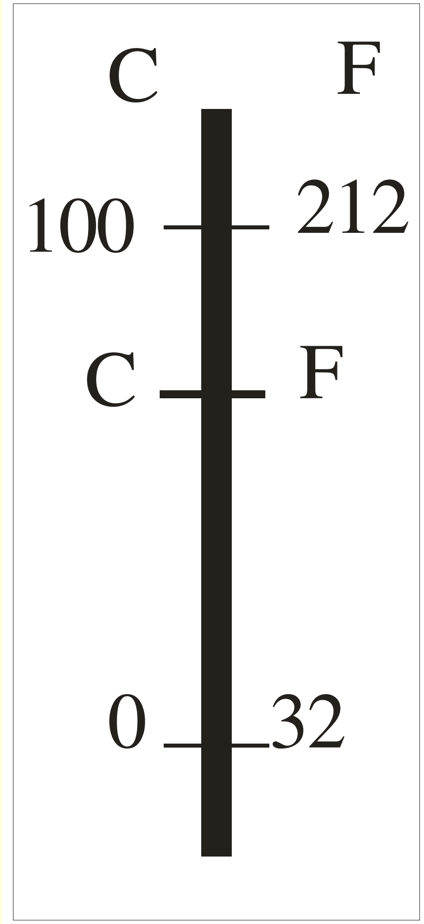
Và vấn đề biến thành : tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $3000 \times n \le 3500000$.

Dùng kỹ thuật làm toán thông thường, bài toán trở thành tìm số n lớn nhất sau cho $n \le 1166{,}66$.

Vậy ta có lời giải là 1166 quyển sách.

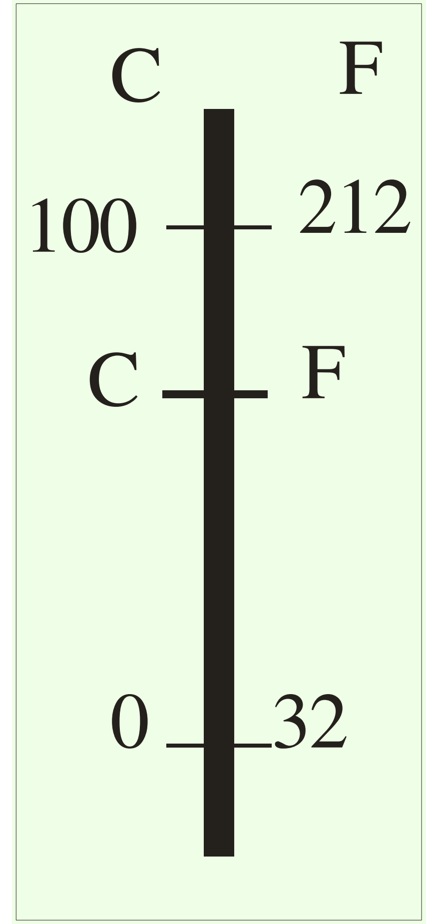
Thí dụ 2. Chúng ta có hai hệ thống đo nhiệt độ : Celcius và Fahrenheit. Nhiệt độ để nước đóng băng là 0^o C và 32^o F, và Nhiệt độ nước lúc bắt đầu sôi là 100^oC và 212^oF.

Để làm một nhiệt kế dùng trong nhà, chúng ta phải lập bảng kê các số đo trong hệ Fahrenheit tương ứng với các số đo từ -20 đến 70 của hệ Celcius,



Đặt *C* và *F* là số đo nhiệt độ của một vật trong hệ Celcius và hệ Fahrenheit. Ta biết: $C=0$ khi $F=32$, và $C=100$ khi . Ta phải tính *F* tương ứng với các trị giá *C* từ -20 đến 70.

Đặt C và F là số đo nhiệt độ của một vật trong hệ Celcius và hệ Fahrenheit. Ta biết: C=0 khi F=32, và C=100 khi . Ta phải tính F tương ứng với các trị giá C từ -20 đến 70.



Ta để ý $$\frac{C-0}{100-0}=\frac{F-32}{212-32}$$

Vậy $\dfrac{F-32}{180}=\dfrac{C}{100}$ hay $F=\frac{18}{10}C+32$

C	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35
F	-4	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95

C	40	45	50	55	60	65	70
F	104	113	122	131	140	149	158

A. TẬP HỢP

Trong việc mô hình như ở các thí dụ trên, chúng ta cần quan tâm đến một vài số nguyên (chứ không phải tất cả các số nguyên). Trong các vấn đề khác cũng vậy, ta phải quan tâm đến một số sự vật có chung vài tính chất nào. Một tập thể một số các sự vật như trên được gọi là một *tập hợp*, và các sự vật đó được gọi chung một tên là "*phần tử*" của tập hợp đó .

Thí dụ : trong bài tính số cây phải trồng dọc theo các con đường, ta phải tìm lời giải trong tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}$

Thí dụ : Trong các bài toán về các chuyển động chúng ta quan tâm đến các yếu tố thời gian, vận tốc và khoảng đường di chuyển, các yếu tố này buộc chúng ta phải xét tập hợp các số thực.

Cho một tập hợp E và một phần tử x của E (ở đây x có thể là một số, một điểm hoặc một dữ liệu), lúc đó ta nói $x \in E$.

Dùng lý thuyết tập hợp chúng ta có thể diễn tả dễ dàng một số sự việc trong toán học. Ngoài ra chúng ta có thể khảo sát cùng một lúc một số vấn đề khác biệt nhau bằng cách sử dụng các khái niệm về tập hợp và ánh xạ.

Thí dụ. Để xét các nghiệm của phương trình

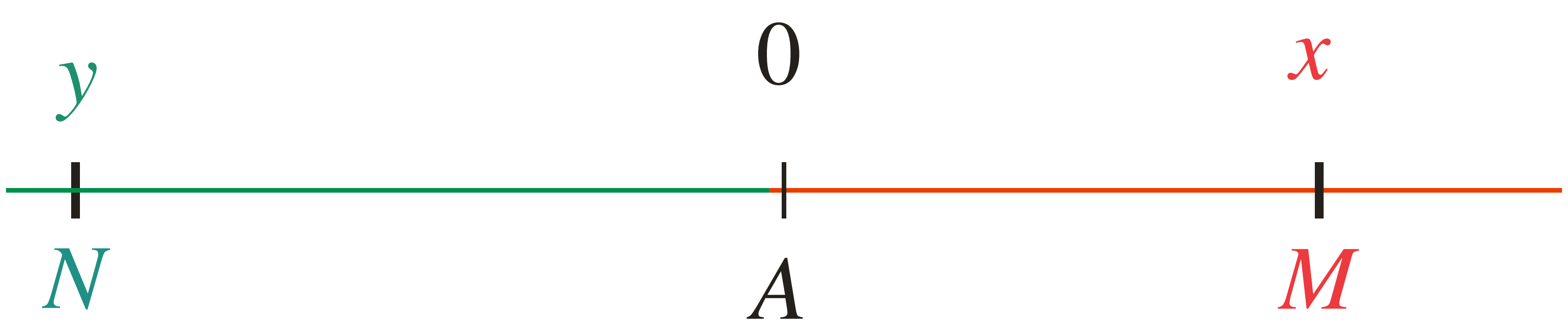
$$x^3 + 4x^2 - 5 = 0,$$

Ta xác định tập hợp $E = \{x : x^3 + 4x^2 - 5 = 0\}$.

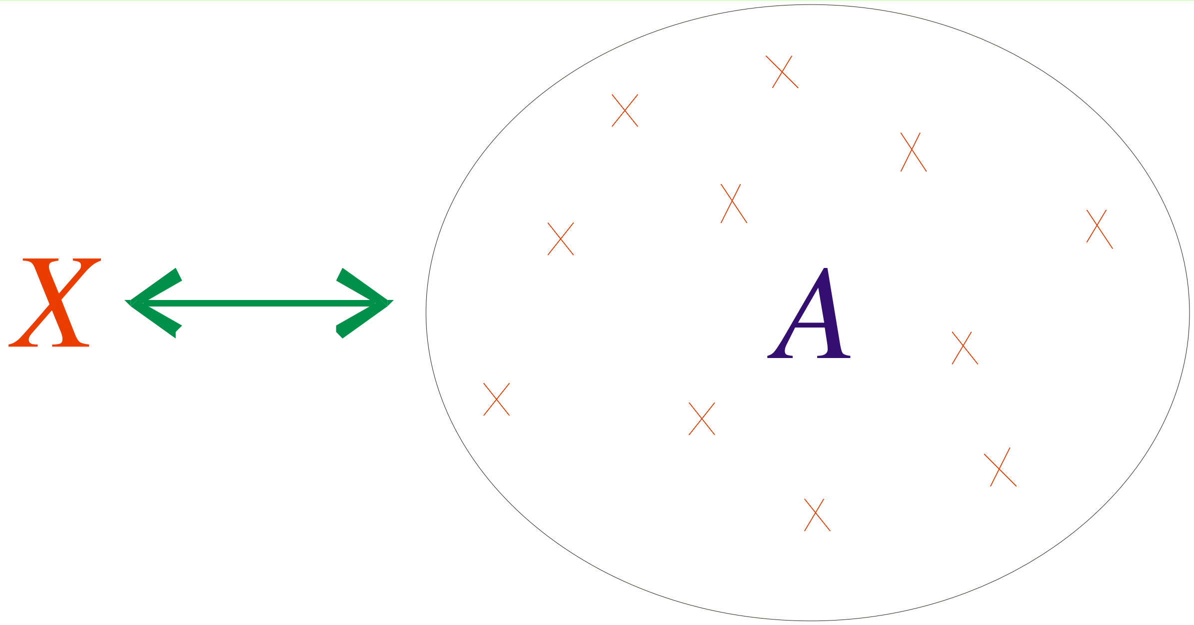
Ta có các tập hợp thông dụng như

- tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ và } n \in \mathbb{N}\}$,
- tập hợp các số thực $\mathbb{R}$,
- tập hợp các số phức $\mathbb{C} = \{x + iy : x \text{ và } y \text{ trong } \mathbb{R}\}$,
- tập hợp trống ϕ là tập hợp không chứa phần tử nào cả

Ta thường mô hình tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ như là tập hợp các điểm ở trên một đường thẳng D. Số 0 được gán cho một điểm A trên đường D, một số thực dương x được gán cho một điểm M nằm phía bên phải A trên đường D với khoảng cách $AM = x$, và một số thực âm y được gán cho một điểm N nằm phía bên trái A trên đường D với khoảng cách $NA = -y$



Năm 1881, ông John Venn (nhà toán học người Anh) đề xuất việc mô hình một tập hợp *X* như một phần *A của* mặt phẳng giới hạn bởi một đường cong.



Ta gán các phần tử của *X* như là các điểm được đánh dấu trong miền *A* . Tuy nhiên nhiều lúc ta cứ mô hình *X* như miền A, mà không cần đánh dấu các điểm được gán trong *A* .

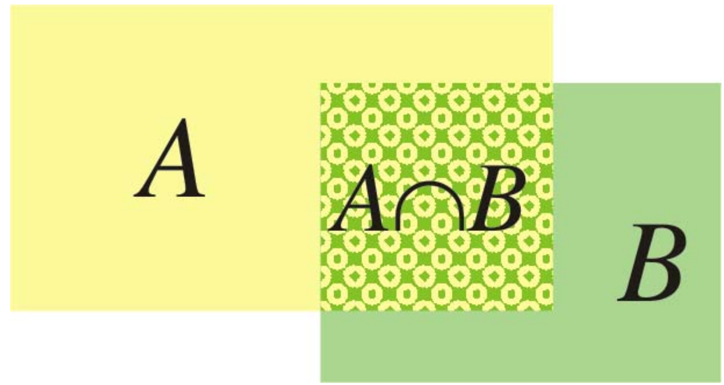
Mô hình tập hợp như ông Venn làm giản đơn nhiều bài toán, thí dụ một miền *A* trong mặt phẳng có thể mô hình một tập hợp *X* có vài phần tử hoặc tập hợp có rất nhiều phần tử như $\mathbb{R}$.

Ở đây chúng ta thấy toán học nhìn sự vật theo nhiều cách, nếu theo một cách nào đó, *X* và $\mathbb{R}$ chỉ được nhìn theo ý nghĩa tập hợp, thì chúng có thể được đối sữ như nhau và mô hình như nhau!

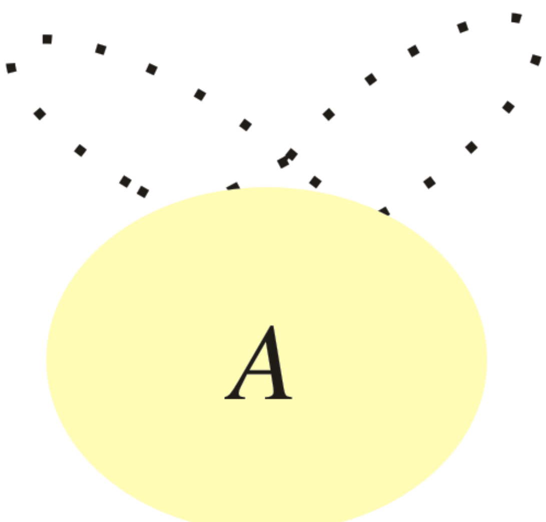
Chúng ta sẽ thấy nhờ tính đồng nhất hóa những sự việc khác nhau như vậy, trong toán có thể có các khái niệm chung cho các sự vật đó như : phần giao, phần hội của các tập hợp .

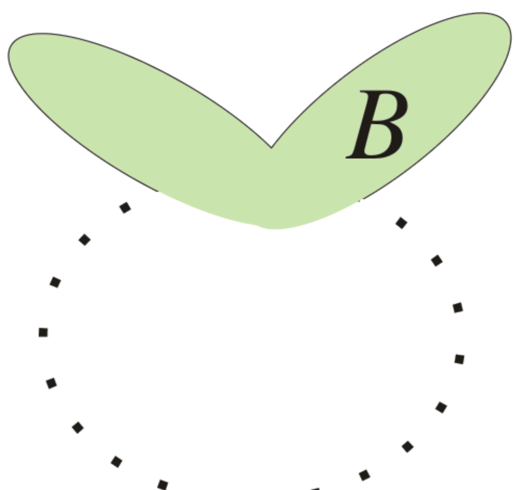
Cho hai tập hợp A và B. Ta đặt

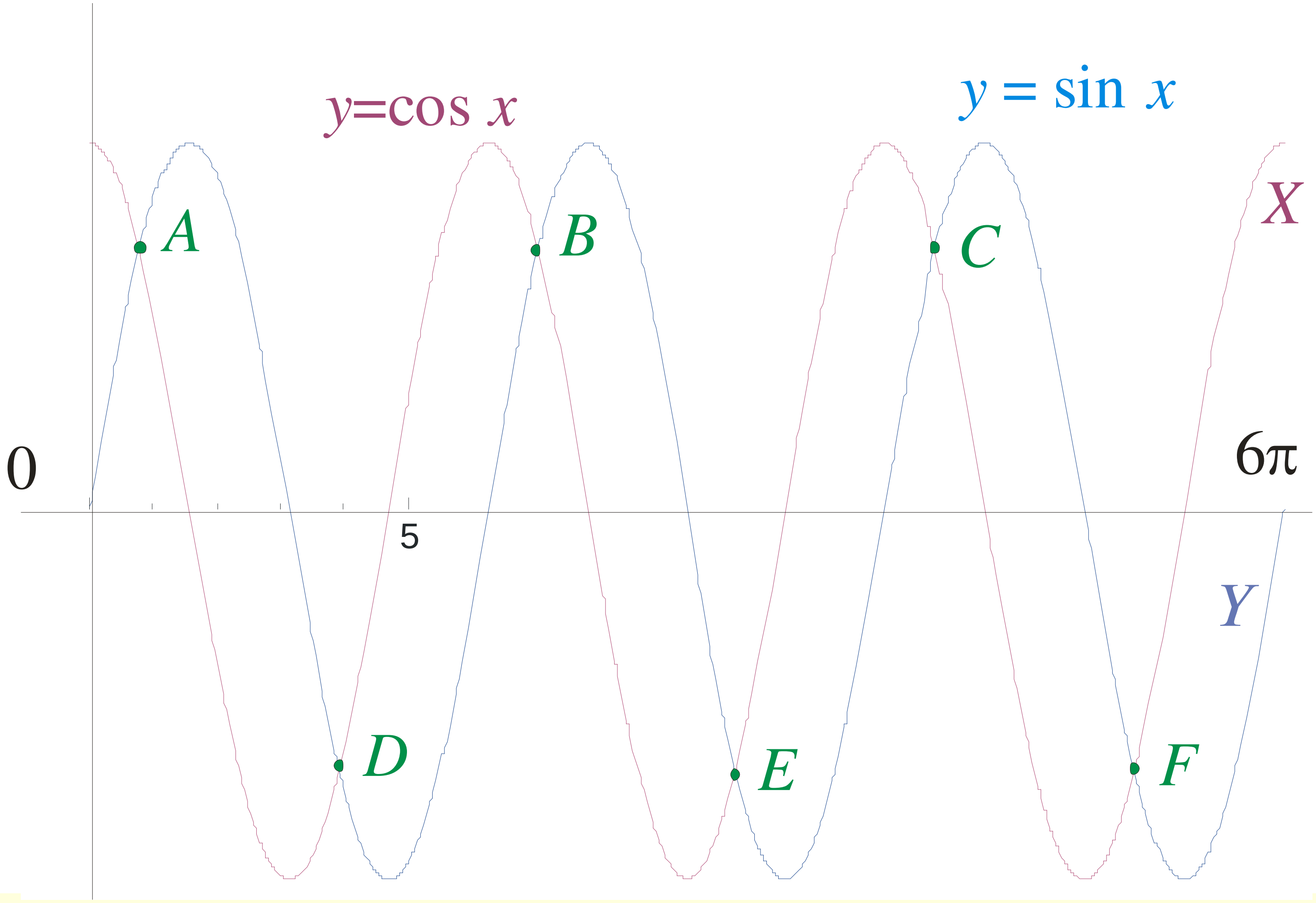
$E = \{x : x \in A$ và $x \in B\}$,
E là phần giao của A và B
và ký hiệu là $A \cap B$



$F = \{x : x \in A$ hoặc $x \in B\}$,
F là phần hợp của A và B và ký hiệu là $A \cup B$.







Đặt X và Y là các đồ thị của các hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$, với $x \in [0, 6\pi]$. Lúc đó $X \cap Y$ là tập hợp gồm các điểm A, B, C, D, E và F. Các điểm chung của các đường thường được gọi là giao điểm.

Thi dụ : Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x\pi = 0\}$ và
$B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x - 1 = 0\}$.

- $A \cap B$ là tập hợp các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x\pi = 0, \\ 2x^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$$

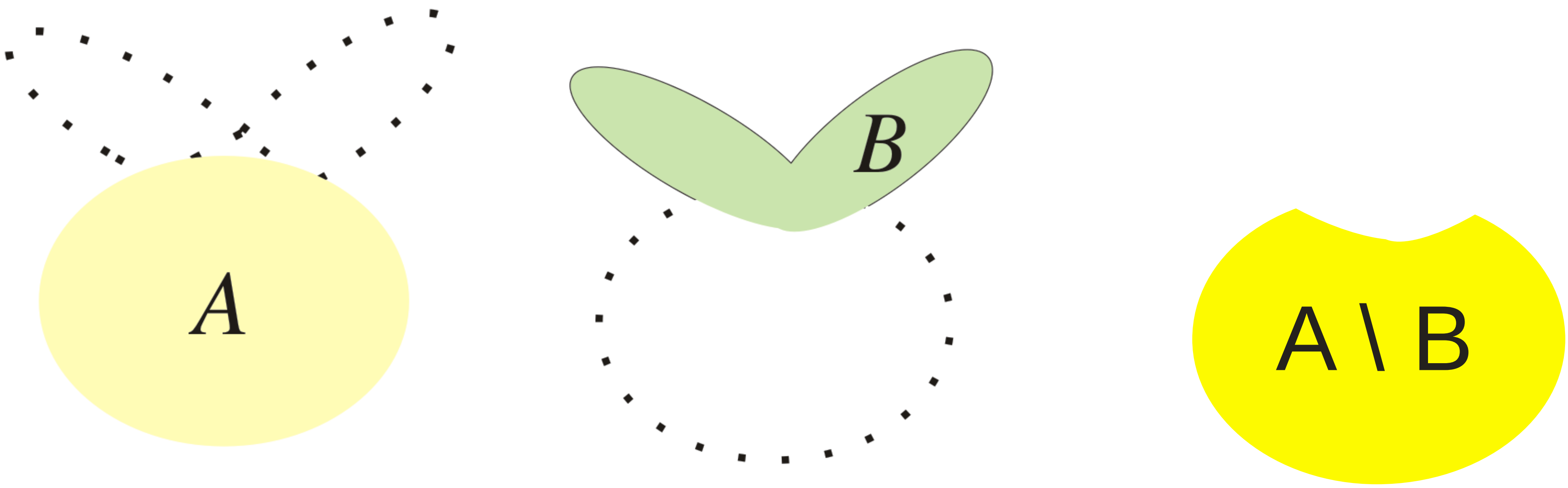
- $A \cup B$ là tập hợp các nghiệm của phương trình

$$(2x^2 + x - 1)\sin x\pi = 0$$

Cho hai tập hợp A và B. Ta đặt

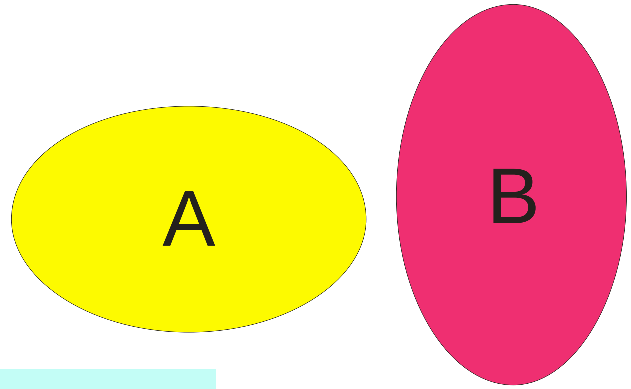
$$G = \{x : x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Ta ký hiệu G là $A \setminus B$.

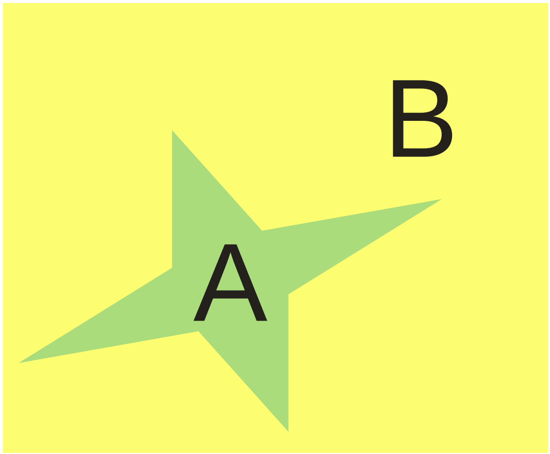


Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Ta nói

• A và B rời nhau nếu và chỉ nếu $A \cap B = \phi$,

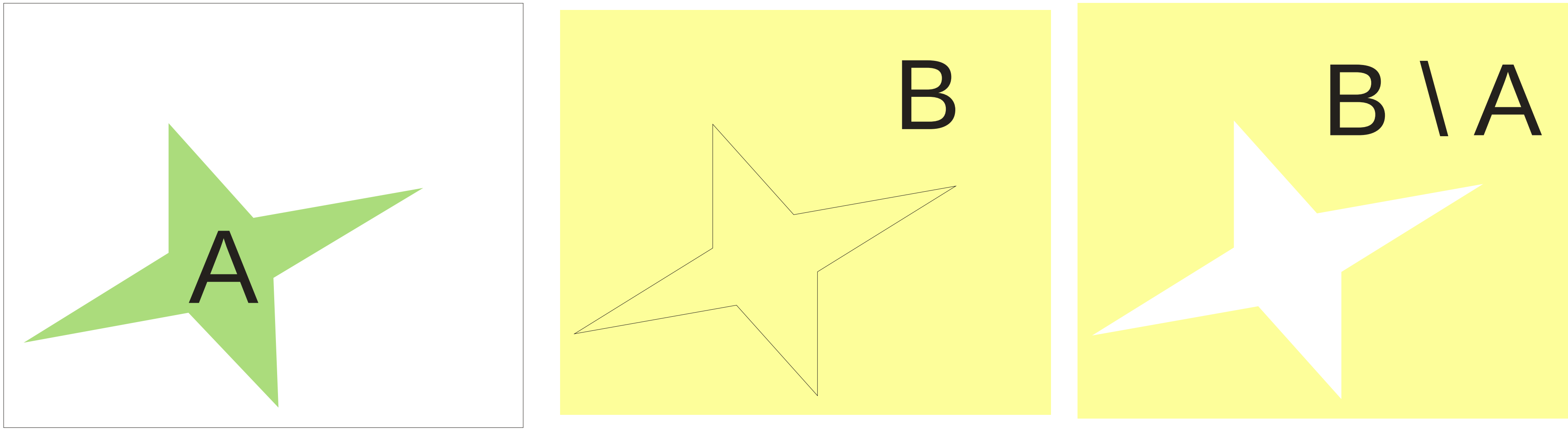


• A chứa trong B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A đều thuộc B (lúc đó ta nói A là tập con của B và ký hiệu $A \subset B$)



•A bằng B nếu và chỉ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, lúc đó ta ký hiệu $A = B$.

Nếu $A \subset B$, ta gọi $B \setminus A$ là phần bù của A trong B.



Cho A là một tập hợp, ta đặt $\mathscr{P}(A)$ là tập hợp tất cả các tập hợp con của A.

Thí dụ : $A = \{\ 2\ ,\ a\ ,\ \bullet\ \}$, lúc đó

$\mathscr{P}(A) = \{\phi\ ,\{2\},\{a\},\{\bullet\},\{2,a\},\{2,\ \bullet\},\ \{a,\ \bullet\},\{2,a,\ \bullet\}\}$

Thí dụ . Gọi A là tập hợp tất cả các linh kiện trong một cửa hàng máy tính trong một ngày nào đó. Một máy tính được lắp ráp bằng các linh kiện này có thể coi như một tập con của A, hay là một phần tử trong $\mathscr{P}(A)$. Đặt $\mathfrak{M}$ là tập hợp các máy tinh được lắp ráp và bán ra trong ngày hôm đó. Lúc đó $\mathfrak{M}$ là một tập con của $\mathscr{P}(A)$.

Thí dụ. Đặt $A = \{0,1,2, . . .,9\}$. Lúc đó $\{1,9,2,4\}$ là một tập con của A, nhưng số 1924 không phải là một tập con của A.

Để khảo sát thiết kế hệ thống máy lạnh trong giảng đường này, chúng ta đo nhiệt độ tại một số vị trí trong giãng đường này (gọi A là tập hợp các vị trí đó) tại một số thời điểm từ 7.00 giờ sáng đến 6.00 giờ chiều trong một ngày nào đó. Lúc đó chúng ta quan tâm cùng một lúc đến hai tập hợp : A và $[6,18]$ (các thời điểm mà ta đo nhiệt độ). Ta mô hình việc này bằng toán như sau.

Định nghĩa. Cho A và B là hai tập hợp, ta đặt tích của A và B là họ tất cả các cặp (x,y) với mọi $x \in A$ và $y \in B$ và ký hiệu nó là $A\times B$.

Thí dụ: $A = \{ 2 , \bullet \}$ và $B = \{@,\#,\&\}$, lúc đó

$A\times B = \{(2, @), (2, \#), (2, \&), (\bullet, @), (\bullet, \#), (\bullet, \&)\}$

$B\times A = \{(@, 2), (@, \bullet), (\#, 2), (\#, \bullet), (\&, 2), (\&, \bullet) \}$

Thí dụ: $A = \{ 2 , \bullet \}$ và $B = \{ @, \#, \& \}$, lúc đó

$A \times B = \{(2, @), (2, \#), (2, \&), (\bullet, @), (\bullet, \#), (\bullet, \&)\}$

$B \times A = \{(@, 2), (@, \bullet), (\#, 2), (\#, \bullet), (\&, 2), (\&, \bullet) \}$

B \ A	2	•
&	(2,&)	(•,&)
#	(2,#)	(•,#)
@	(2,@)	(•,@)

A \ B	@	#	&
•	(@,•)	(#,•)	(&,•)
2	(@,2)	(#,2)	(&,2)

Thí dụ: C = { m , n } và D = {a,i,ô}, lúc đó

$D \times C$ = {(a,m), (a, n), (i, m), (i,n), (ô,m), (ô,n) }

$C \times D$ = {(m,a), (m,i), (m,ô), (n,a), (n,i), (n,ô)}

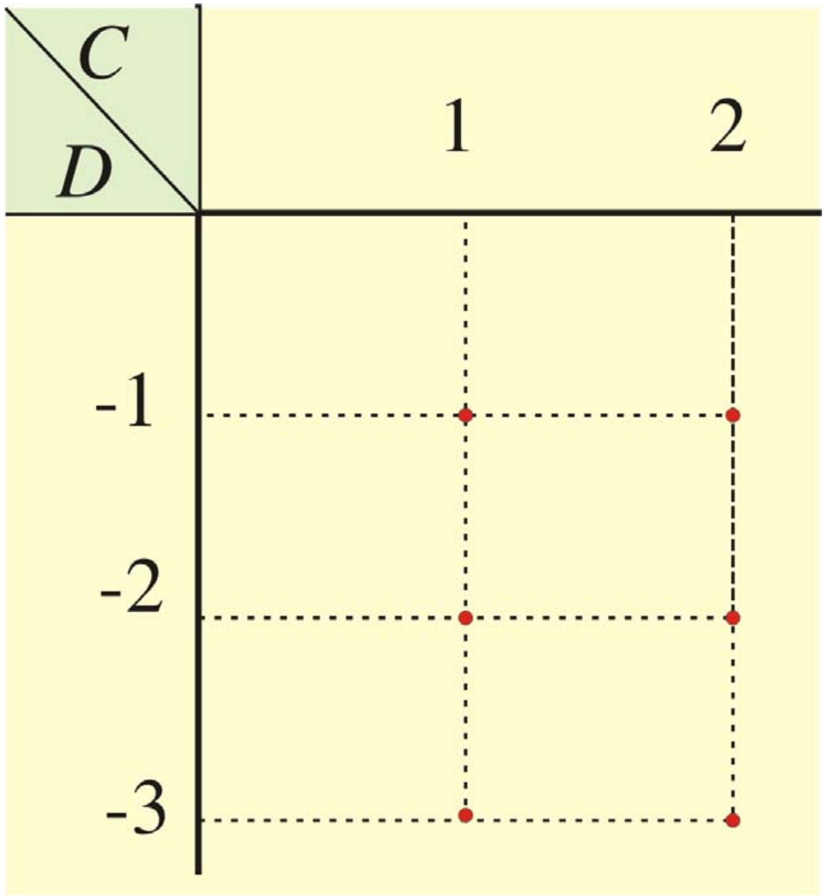
D \ C	a	i	ô
m	am	im	ôm
n	an	in	ôn

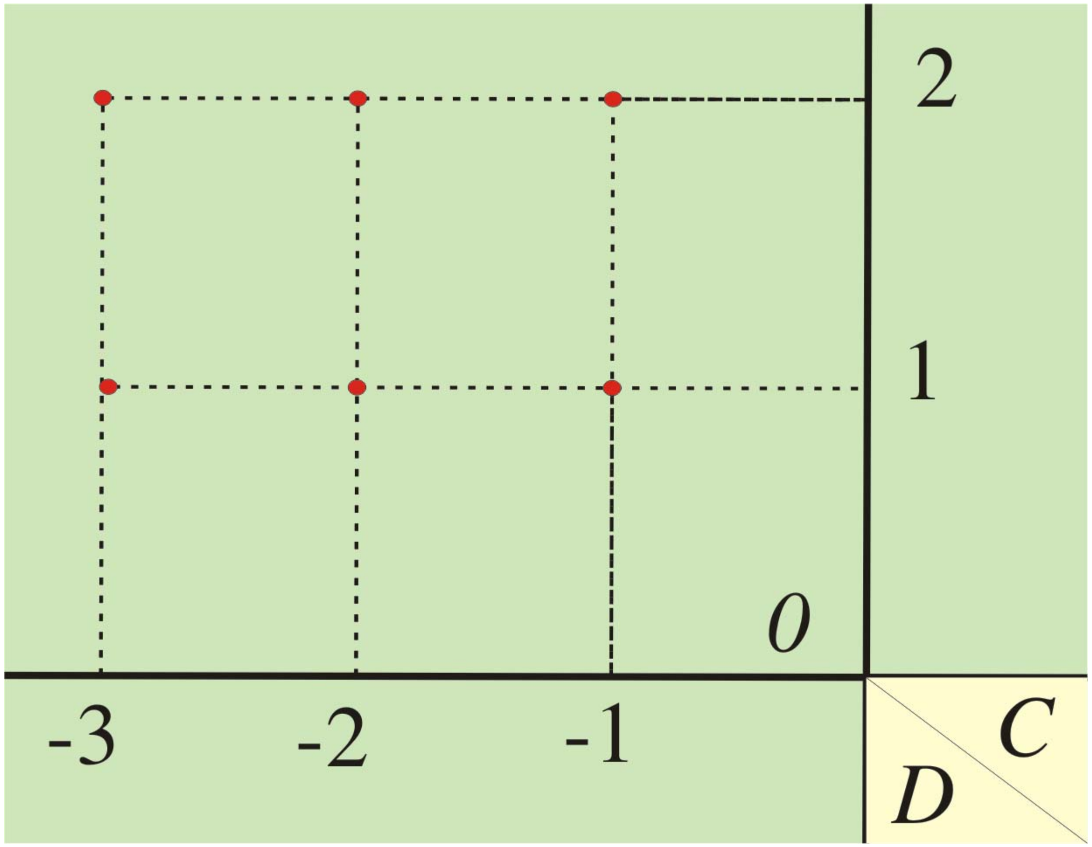
C \ D	m	n
a	ma	na
i	mi	ni
ô	mô	nô

Thí dụ: $C = \{ 1 , 2 \}$ và $D = \{-1,-2,-3\}$, lúc đó

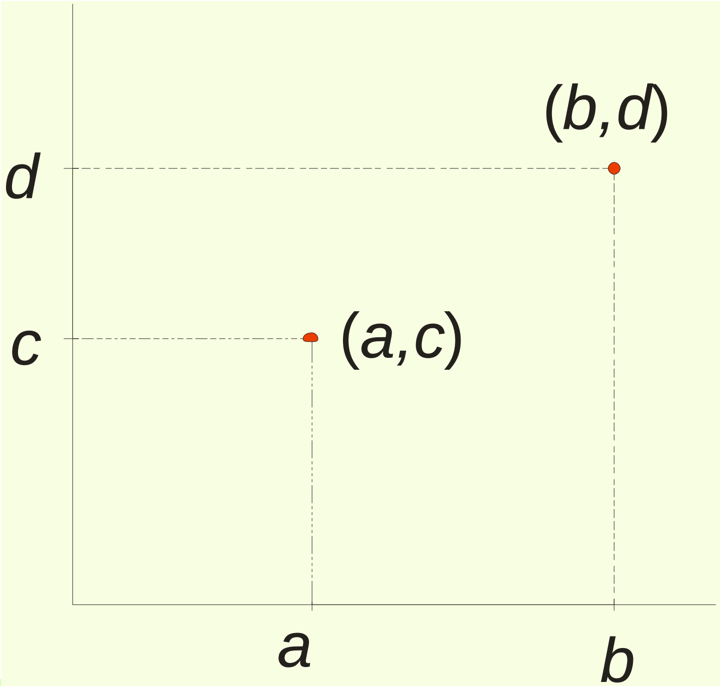
$C{\times}D = \{(1,-1), (1,-2), (1,-3), (2,-1), (2,-2), (2,-3)\}$

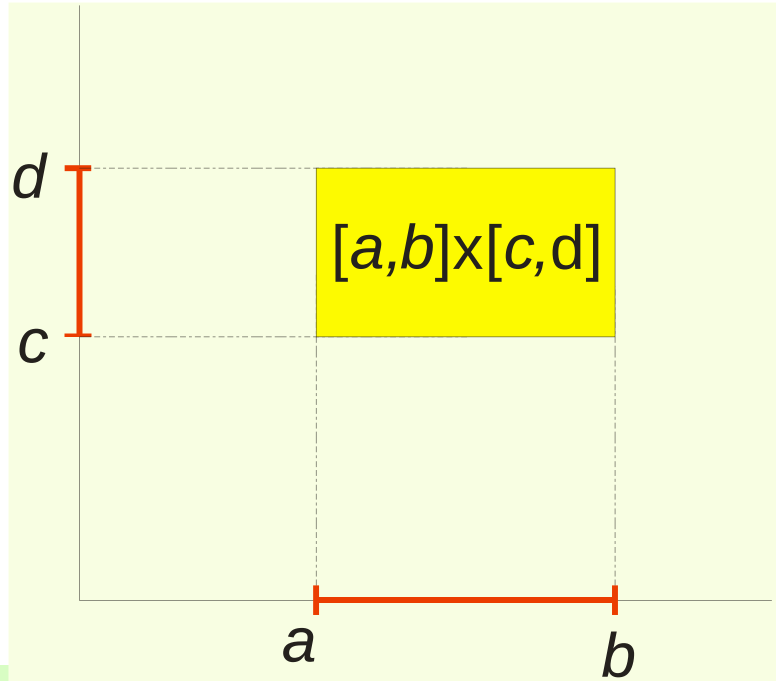
$D{\times}C = \{(-1, 1), (-1,2), (-2,1), (-2,2), (-3,1), (-3,2) \}$



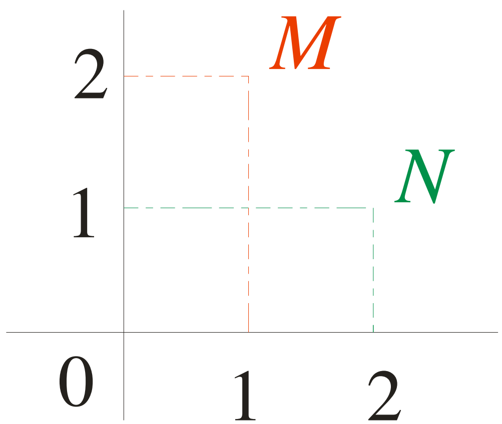


Dùng biểu diễn theo tích Descartes





Nếu $B = A$, ta thường ký hiệu $A \times A$ là A^2. Lúc đó A^2 là họ tất cả các cặp (x,y) với mọi $x \in A$ và $y \in A$, ta phải lưu ý trong trường hợp này là (x,y) có thể khác (y,x), thí dụ như $M = (1,2)$ khác $N = (2,1)$ trong $\mathbb{R}^2$.



Có hai bài toán cơ bản liên quan đến tập hợp : xác định một tập hợp và chứng minh tập hợp này chứa trong một tập hợp khác. Chúng ta xem các phương pháp thông dụng sau đây dùng để giải quyết các vấn đề này .

A.1. Xác định một tập hợp

Để xác định một tập hợp *E* ta có các phương pháp sau :

- **Liệt kê tất cả các phần tử của *E***
- **Định nghĩa lại tập hợp *E* một cách giản dị hơn**
- **Dùng đồ họa để diễn tả tập hợp *E***

- **Liệt kê tất cả các phần tử của *E***

<u>Thí dụ</u>. Xác định các tập hợp :

$$F = \{ x \in \mathbb{N} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$G = \{x \in \mathbb{Z} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$H = \{x \in \mathbb{Q} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$K = \{x \in \mathbb{R} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \}.$$

$$4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = x(x - 1)(2x - 1)(2x + 1)$$

Phương trình $4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0$ có các nghiệm $x = 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

$F = \{1\}$, $G = \{0, 1\}$,
$H = \{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ và $K = \{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$.

- Định nghĩa lại tập hợp E một cách giản dị hơn

Thí dụ. *Cho A và B là hai điểm trong một mặt phẳng P. Xác định tập hợp* $E = \{M \in P : \widehat{AMB} = 90^o\}$.

Đặt O là trung điểm của AB. Dùng các kết quả trong hình học phẳng ta thấy E là đường tròn tâm O bán kính OA ở trong P hay $E = \{M \in P : OM = OA\}$.

Thí dụ. *Xác định tập hợp* $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 < 0\}$

Dùng phương pháp xét dấu của tam thức bậc hai ta có $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

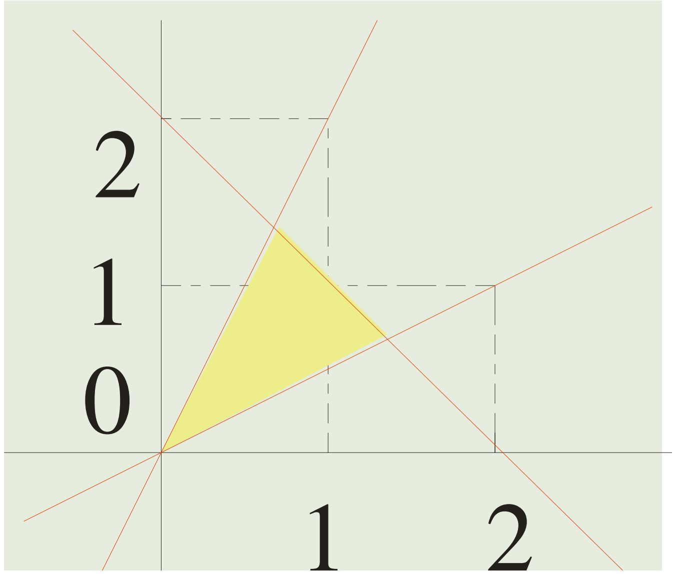
Vậy E là khoảng mở $(-2, 1)$

• Dùng đồ họa để diễn tả tập hợp *E*

Thí dụ. Xác định tập hợp

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : 2x > y > \frac{x}{2} \ \text{ và } y - 2 < -x \}$$

Dùng phương pháp giải hệ bất phương trình bậc một ở chương trình trung học ta thấy *E* là miền tam giác được tô màu vàng trong hình vẽ.



A.2. Chứng minh tập hợp *A* chứa trong tập hợp *B*

Cho hai tập hợp E và F, để chứng minh $E \subset F$, ta có thể làm như sau

Cho x trong E , chứng minh x thuộc F

<u>Bài toán 1</u>. *Cho A, B và C là ba tập hợp sao cho $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng minh $A \subset C$.*

Cho x trong A , chứng minh x thuộc C

Cho x trong A , ta có x thuộc B

Cho x trong B , ta có x thuộc C

Với A={ông Socrate}, B là tập hợp tất cả loài người, và C là tập hợp các sinh vật có đời sống hữu hạn. Chứng minh trên là mẫu của tam đoạn luận Aristot.

B.QUAN HỆ TRONG MỘT TẬP HỢP

Trong các động cơ nhiệt hay động cơ nổ chúng ta cần các hệ thống piston và cylinder, kích cở của piston phải tương thích với kích cở của cylinder : kích cở của piston phải nhỏ hơn hẵn kích cở của cylinder, để piston có thể chuyển động với ma sát nhỏ trong vận tốc nhanh trong cylinder, nhưng không được quá nhỏ để có thể tạo lực nén trong cylinder. Ta có thể mô hình toán học như sau: gọi r là đường kính của lòng trong cylinder và s đường kính của piston, ta phải có $0{,}998r \leq s \leq 0{,}999r$.

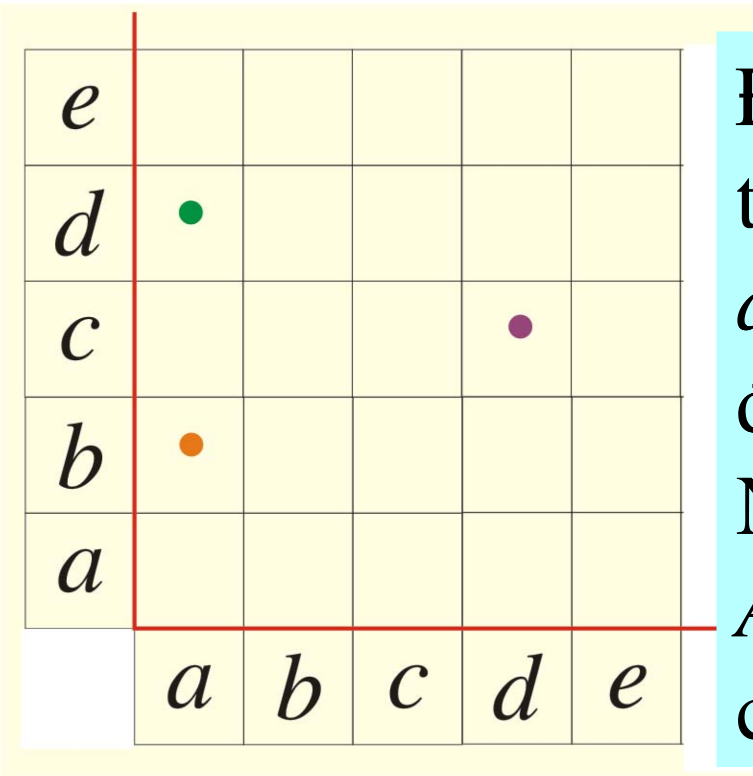
Như vậy chúng ta cần một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$.

Trong nông lâm ngư nghiệp chúng ta thấy công việc thường tùy vào thời vụ, thí dụ không thể trồng lúa vào các mùa quá khô hạn được. Để mô hình các vấn đề này chúng có thể làm như sau: nếu lấy đơn vị là tháng, và m và n là hai tháng cho khởi sự một loại thời vụ, ta phải có một số nguyên (dương hay âm k sao cho $n - m = 12k$.

Như vậy chúng ta phải xét một quan hệ tương đương trên tập hợp $\mathbb{N}$:

$n \sim m$ nếu và chỉ nếu có $k \in \mathbb{Z}$ để cho $n - m = 12k$

Cho A là một tập thể nho nhỏ nào đó của loài người. Trong tập hợp A có thể có các mối liên hệ khác nhau, có thể cô x và anh y trong tập thể A này có dính dáng với nhau trong mối liên hệ này nhưng chẳng dính dáng với nhau trong quan hệ khác.

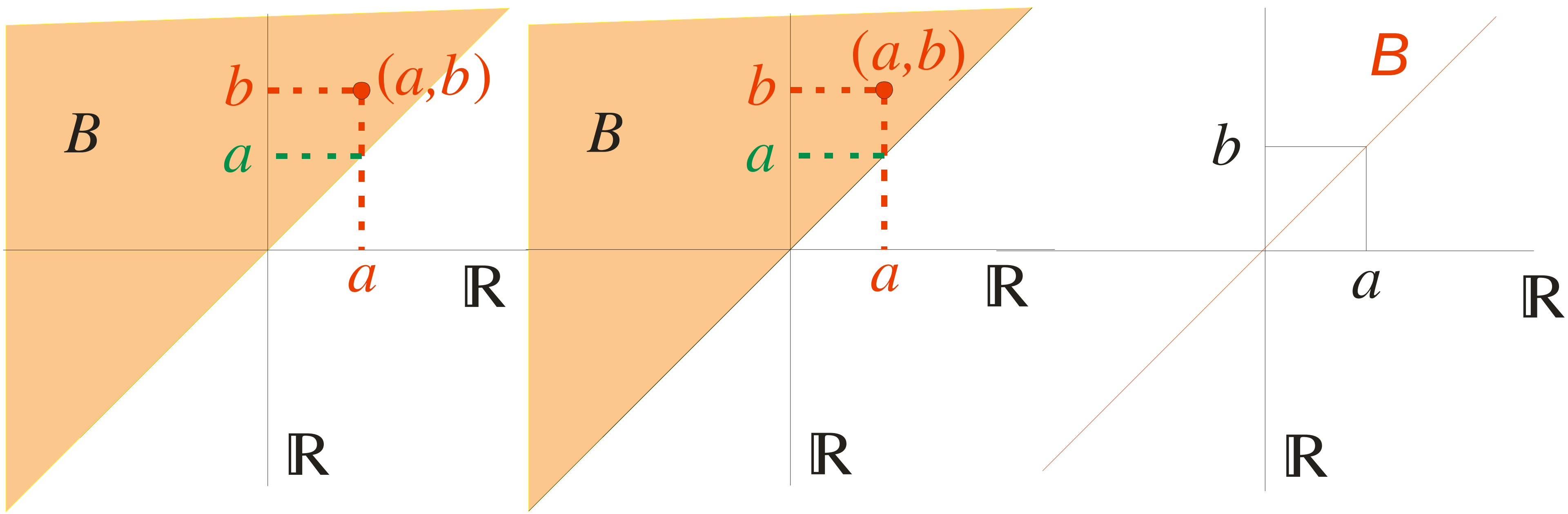


Để mô hình một mối liên hệ trong tập A, ta làm như sau: nếu a và b liên hệ với nhau, ta chấm điểm (a,b) lên trên tập tích $A\times$A. Như vậy một mối liên hệ trong A có thể mô hình bằng một tập con trong $A\times$A

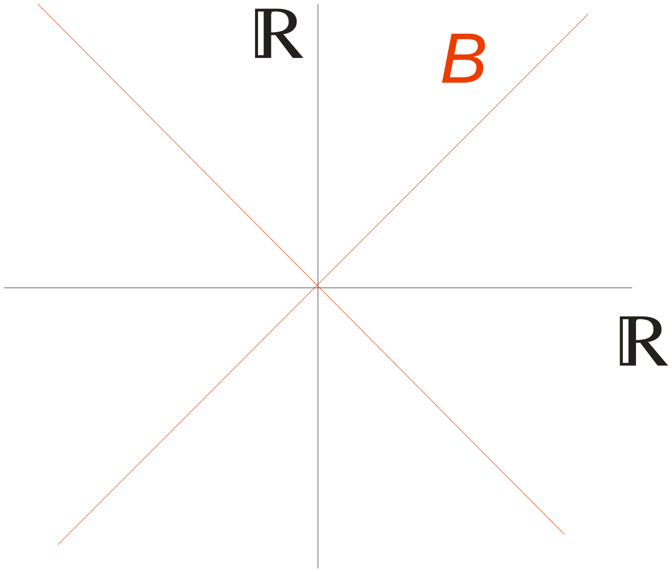
Định nghĩa. Cho một tập hợp A khác trống và cho B là một tập con khác trống trong $A \times A$. Ta nói

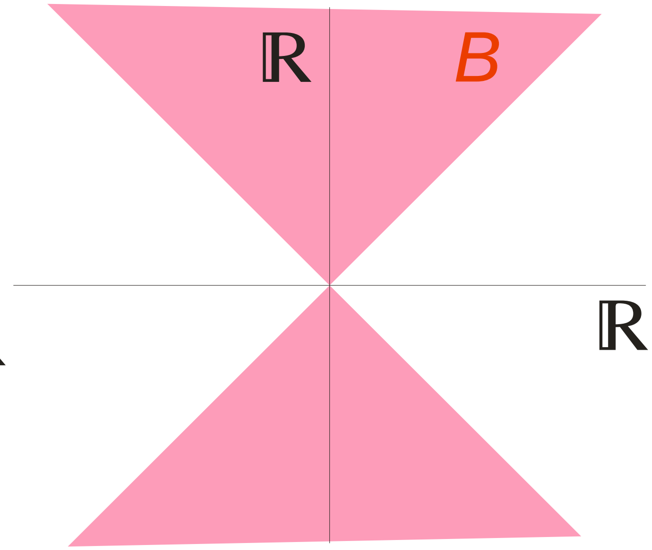
$$x \mathscr{R} y \quad \text{nếu và chỉ nếu} \quad (x,y) \in B.$$

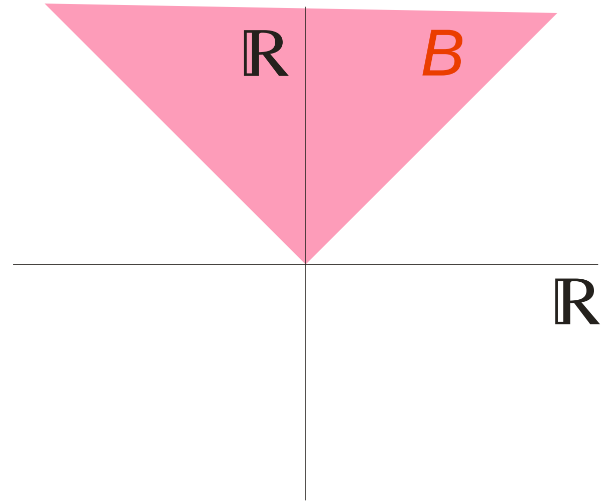
Lúc đó ta gọi $\mathscr{R}$ là một quan hệ trong A.



$B=\{(x,y) : x<y\}$ $a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a < b$	$B=\{(x,y) : x\leq y\}$ $a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \leq b$	$B=\{(x,y) : x= y\}$ $a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a = b$



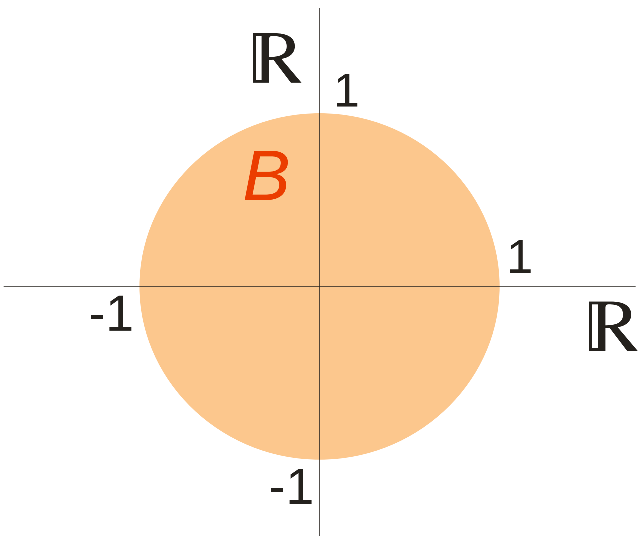


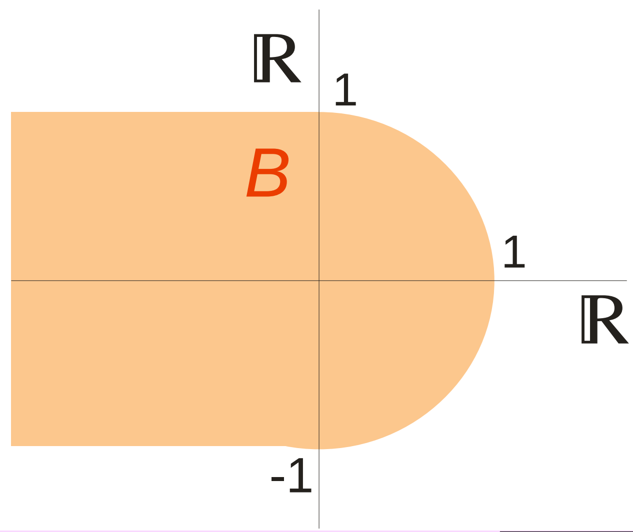


$$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

$$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow |a| < |b|$$

$$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow |a| < b$$





$$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow |a| < \sqrt{1-b^2}$$

$$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow a < \sqrt{1-b^2}$$

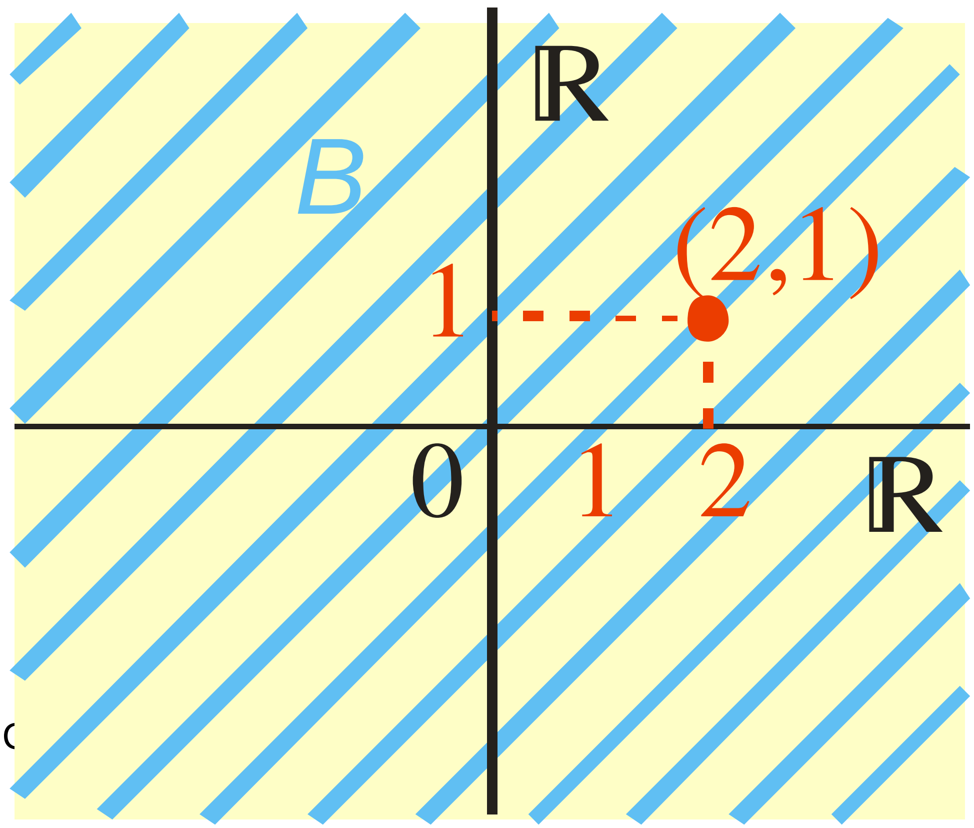
Trong thực tế ta hầu như không nhắc đến tập B khi định nghĩa một quan hệ. Thí dụ cho X là một tập hợp khác trống. Đặt A là $\mathscr{P}(X)$, họ các tập hợp con của X. Ta có thể đặt quan hệ sau đây : $C \mathscr{R} D \Leftrightarrow C \subset D$

Quan hệ $\mathscr{R}$ tương ứng tập $B = \{(C,D) \in A\times A : C \subset D\}$

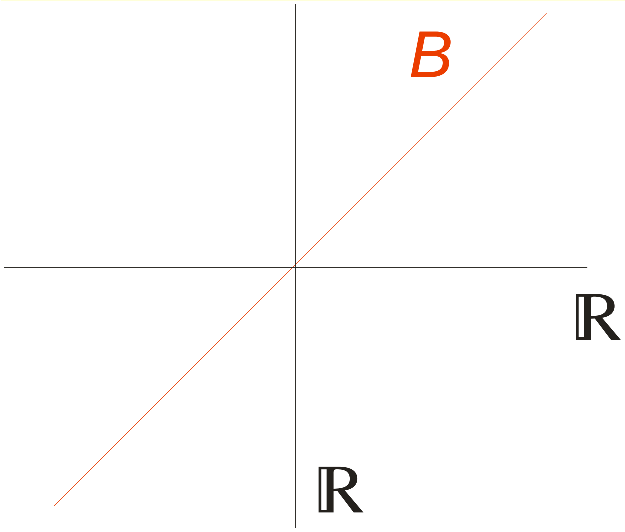
Tuy nhiên, với định nghĩa quan hệ bằng các tập hợp B trong $A\times A$, ta có các quan hệ không thông thường.

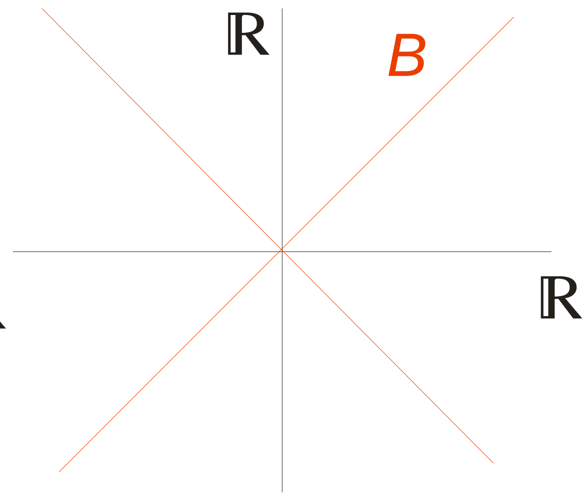
$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow$$

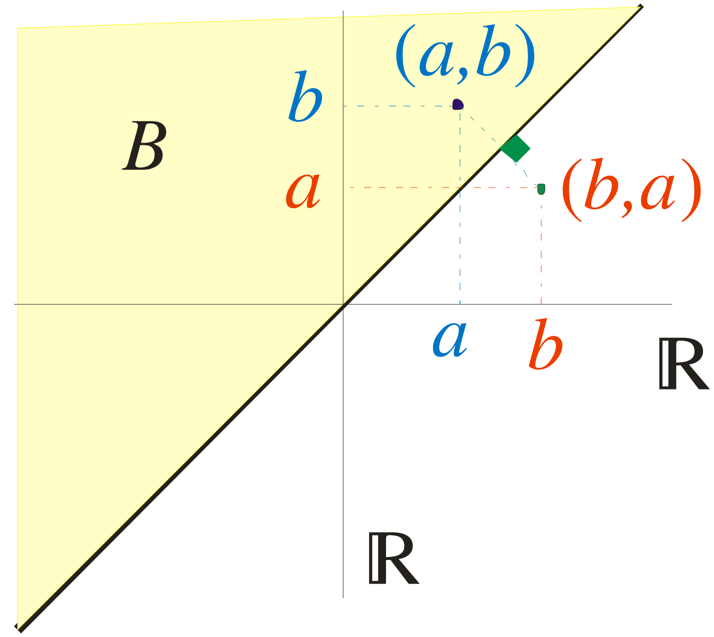
$$\exists\, m \in \mathbb{Z},\ a = b + m$$



- Quan hệ $\mathscr{R}$ đối xứng nếu và chỉ nếu "$x \mathscr{R} y$ *thì* $y \mathscr{R} x$"







$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a = b$
đối xứng

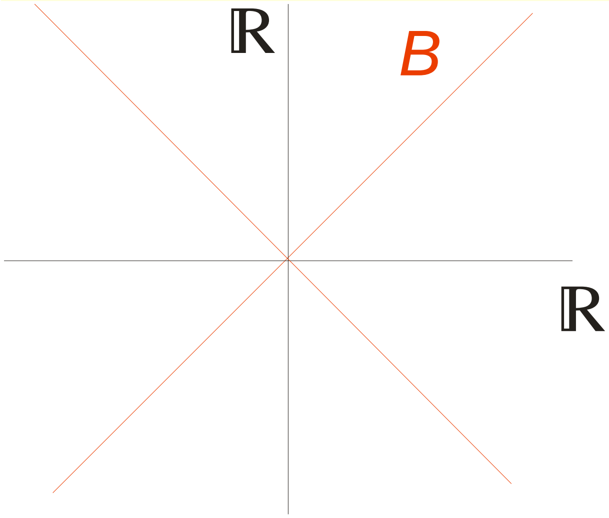
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a| = |b|$
đối xứng

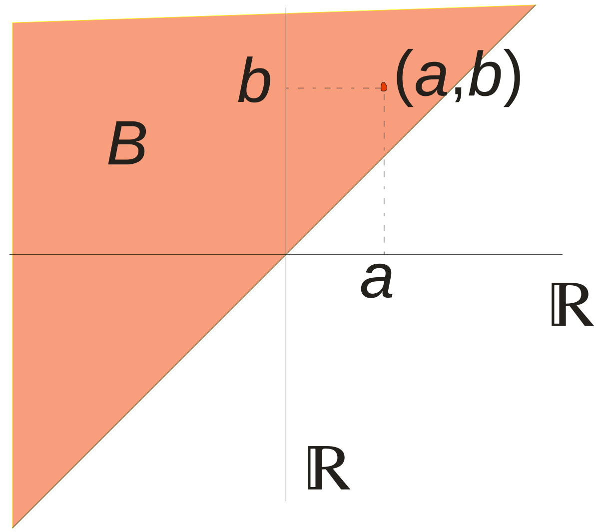
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \le b$
không đối xứng

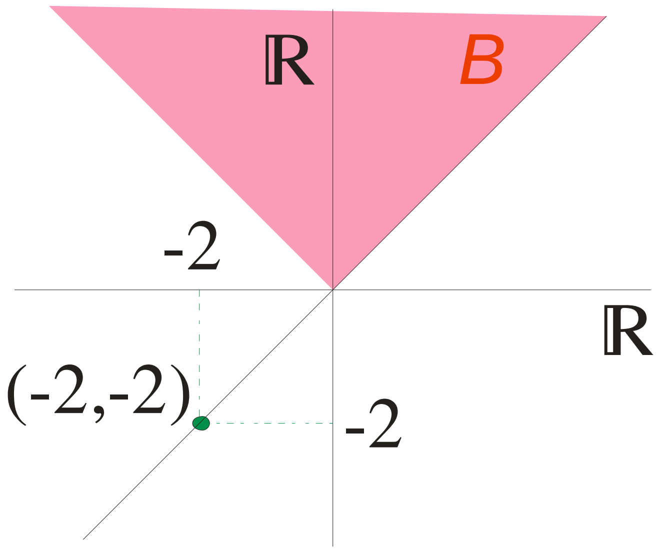
Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ đối xứng, ta thấy B phải đối xứng qua đường chéo của $A \times A$.

• Quan hệ $\mathscr{R}$ phản xạ nếu và chỉ nếu

"$x \mathscr{R} x$ với mọi $x \in A$"





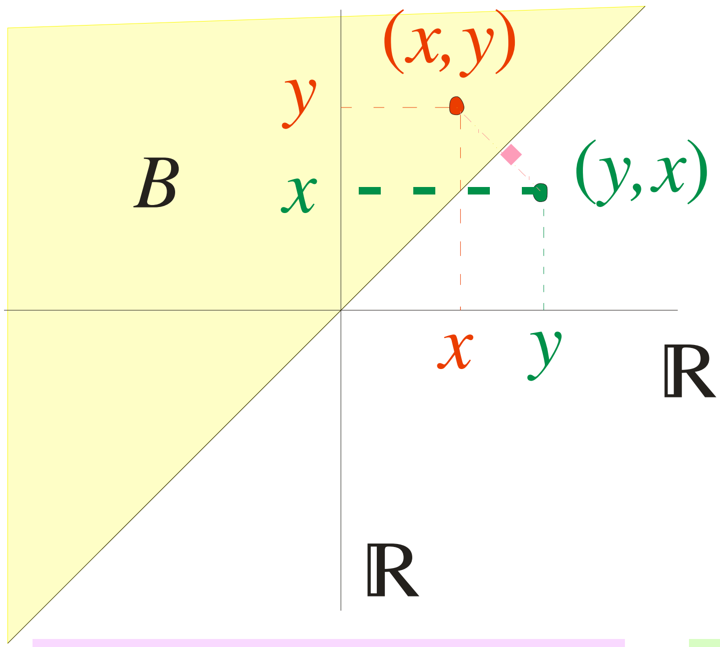


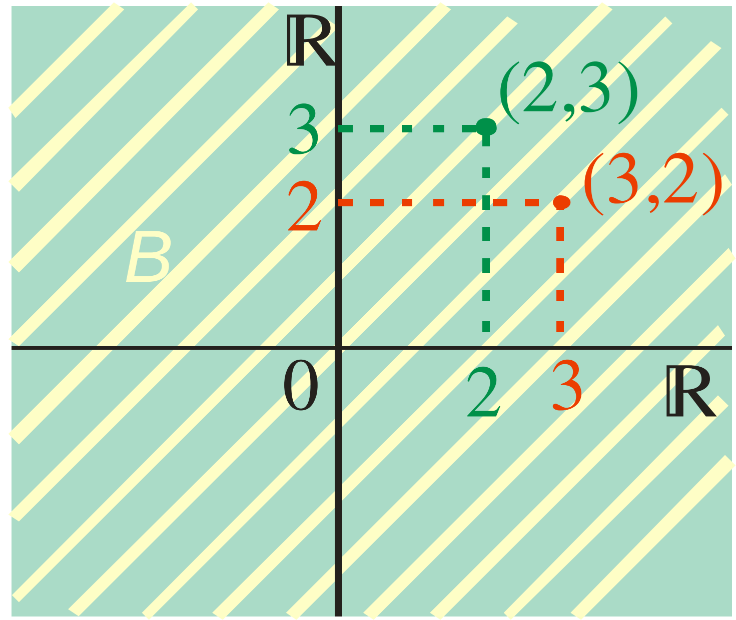
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \lvert a\rvert = \lvert b\rvert$ phản xạ	$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \leq b$ phản xạ	$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \lvert a\rvert < b$ không phản xạ

Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ phản xạ , ta thấy B phải chứa đường chéo của $A \times A$.

•Quan hệ $\mathscr{R}$ phản đối xứng nếu và chỉ nếu

"$x\mathscr{R}y$ và $y\,\mathscr{R}\,x$ thì $x = y$"





$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow a \le b$

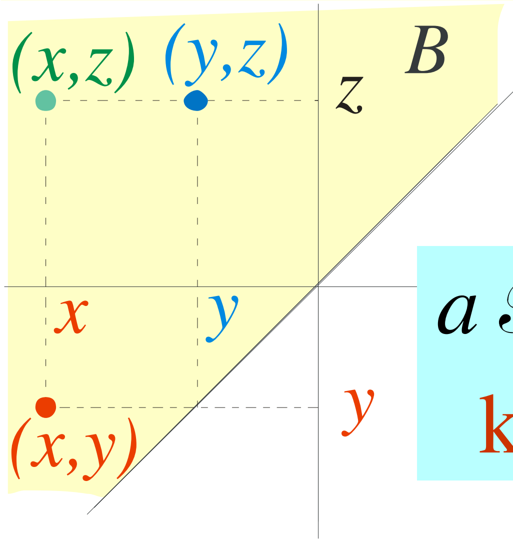
phản đối xứng

$a\,\mathscr{R}\,b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z},\quad a = b + m$

không phản đối xứng

Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ phản đối xứng , ta thấy $B \cap B'$ phải chứa trong đường chéo của $A \times A$, ở đây B' là đối xứng của B qua đường chéo của $A \times A$.

• Quan hệ $\mathscr{R}$ truyền nếu và chỉ nếu
"$x \mathscr{R} y$ và $y \mathscr{R} z$ thì $x \mathscr{R} z$"

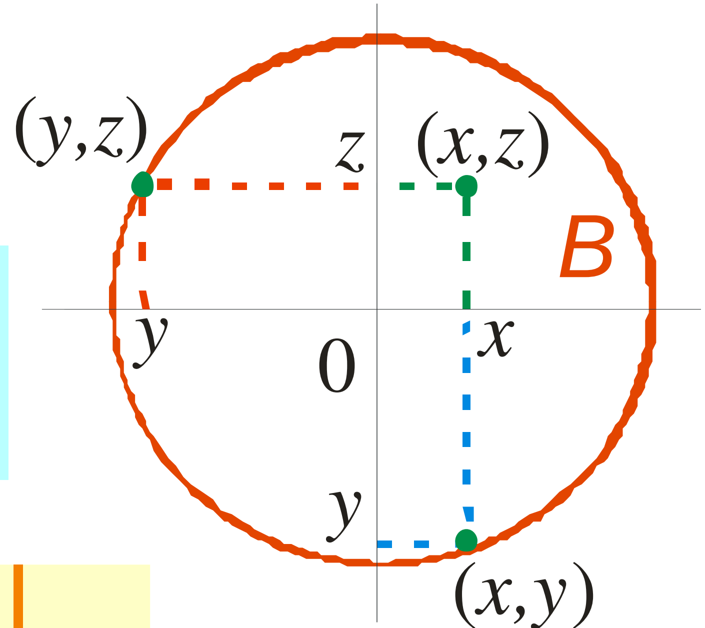


$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \le b$

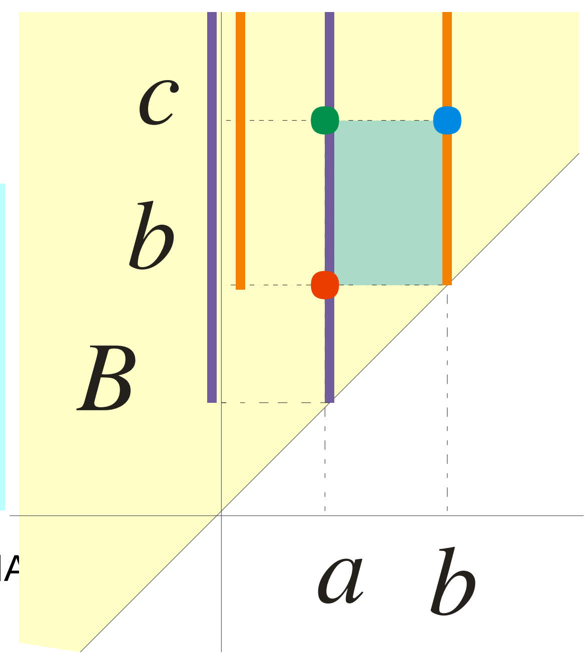
truyền

$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a| = \sqrt{1-b^2}$

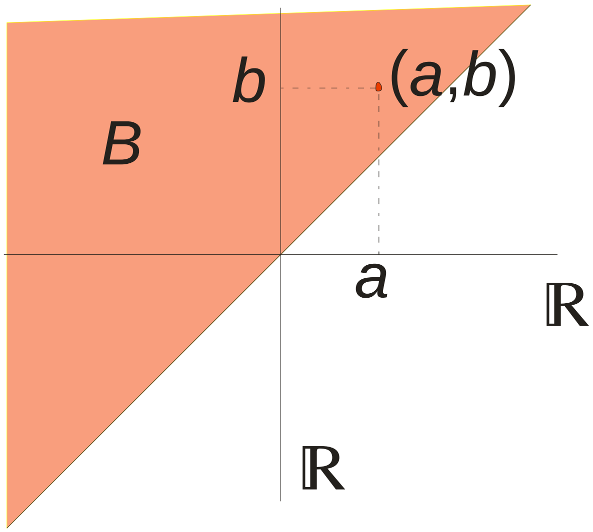
không truyền

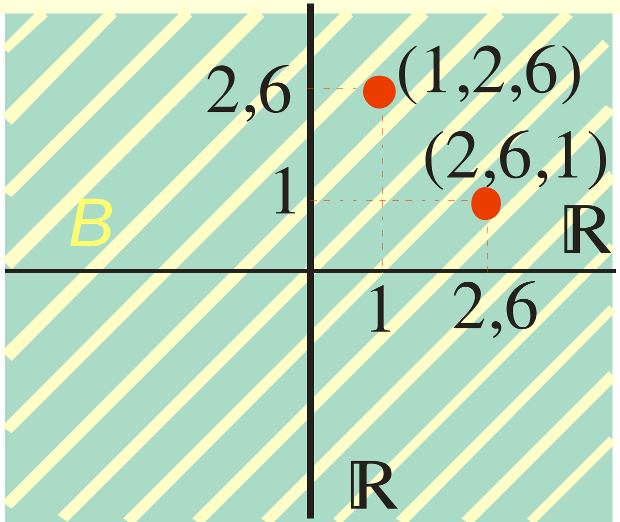


$\mathscr{R}$ truyền trong trường hợp B có tính chất như sau



• Quan hệ $\mathscr{R}$ toàn phần nếu và chỉ nếu " với mọi x và y trong A thì hoặc $x \mathscr{R} y$ hoặc $y \mathscr{R} x$"





$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \leq b$

toàn phần

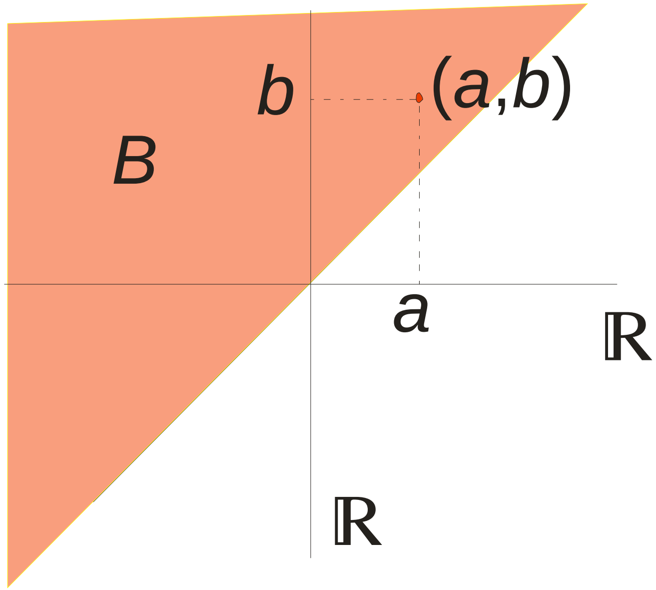
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$,

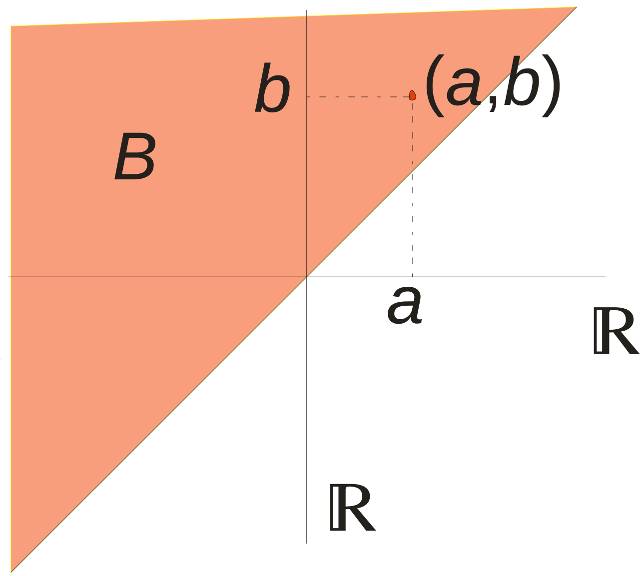
$a = b + m$

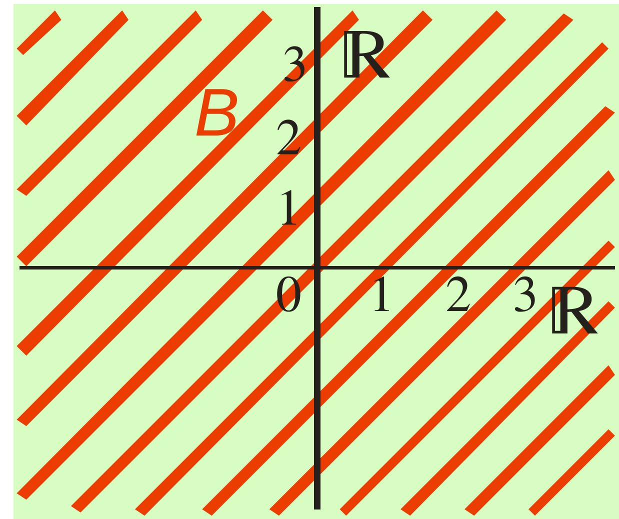
không toàn phần

Để cho quan hệ $\mathscr{R}$ toàn phần , ta thấy $B \cup B'$ phải bằng $A \times A$, ở đây B' là đối xứng của B qua đường chéo của $A \times A$.

Quan hệ $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự nếu và chỉ nếu $\mathscr{R}$ phản xạ, phản đối xứng và truyền.







$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a < b$

không là

quan hệ thứ tự

$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \leq b$

là

quan hệ thứ tự

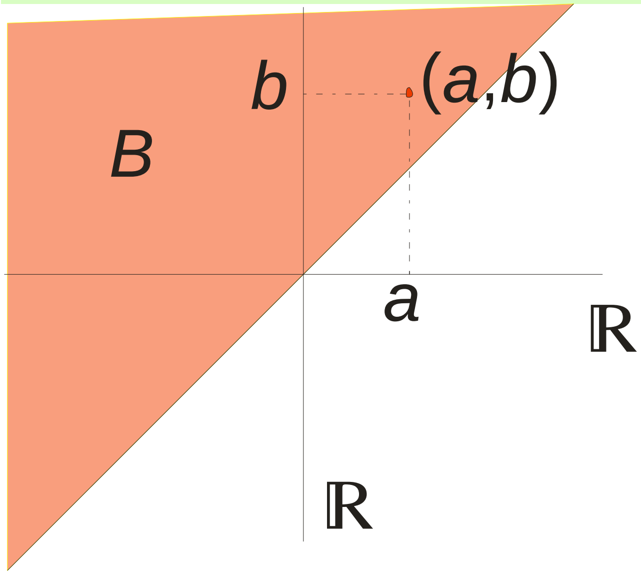
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}$

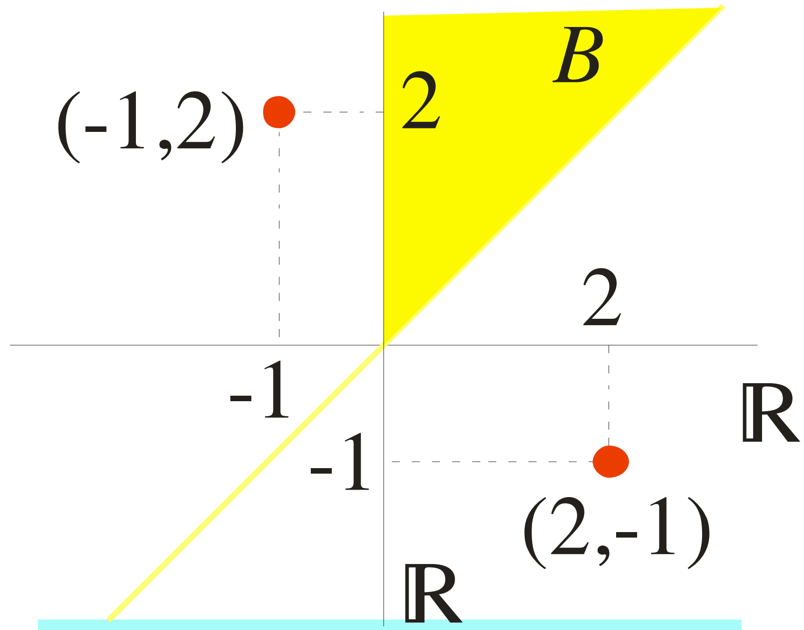
$a = b + m$

không là

quan hệ thứ tự

Quan hệ $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự toàn phần nếu và chỉ nếu $\mathscr{R}$ phản xạ, phản đối xứng, truyền và toàn phần.





$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a \le b$

là

quan hệ thứ tự toàn phần

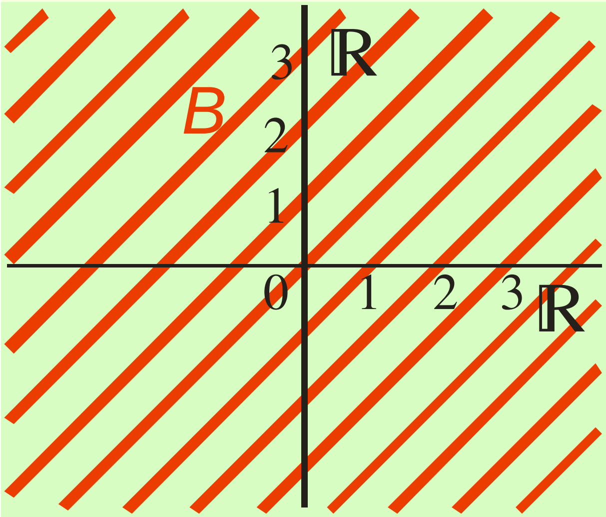
$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a = b$

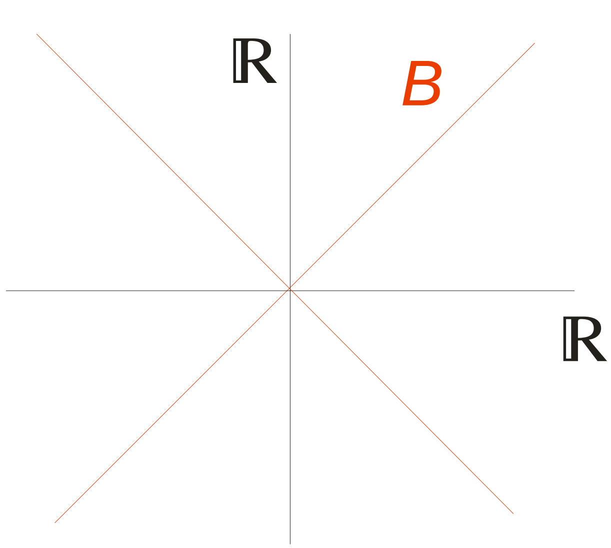
hoặc $0 \le a \le b$ là

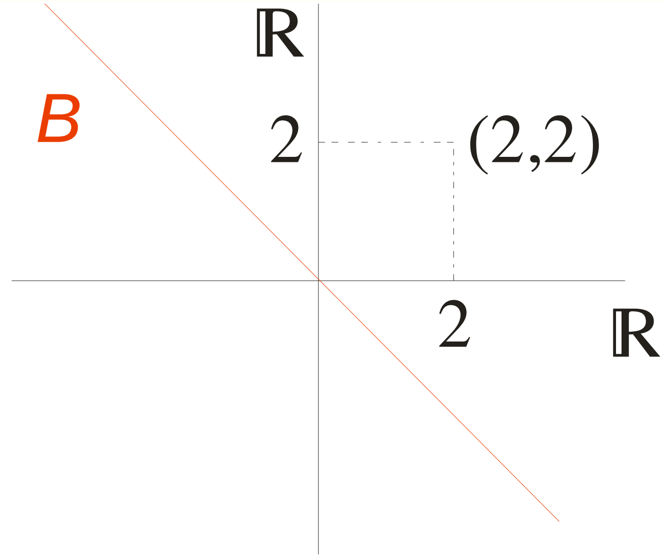
quan hệ thứ tự

không toàn phần

Quan hệ $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương nếu và chỉ nếu $\mathscr{R}$ phản xạ, đối xứng và truyền







$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow$
$\exists\, m \in \mathbb{Z}$,
$a = b + m$
là một quan hệ tương đương

$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow |a| = |b|$
là một quan hệ tương đương

$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a = -b$
không là một quan hệ tương đương

C. Mệnh Đề toán học

Sau khi mô hình toán học, chúng phải rời bỏ khung trời thực tiển và bước vào thế giới toán học, ở đó chúng ta phải dùng ngôn ngữ đặc thù toán học.

Một mệnh đề P có ý nghĩa *toán học* nếu và chỉ nếu hoặc là P đúng hoặc là P sai (nghĩa là không có trường hợp P vừa đúng vừa sai cũng như không có trường hợp P vừa không đúng vừa không sai)

Cho $x \in \mathbb{R}$ và đặt P là "$x^7 + x + 7 = 0$", thì P là một mệnh đề toán học.

Cho ε là một số thực dương, cho x và y trong $\mathbb{R}$ và đặt P là "$|y - x| < \varepsilon$", thì P là một mệnh đề toán học.

Xét mệnh đề R là "Tôi nói dối".

Mệnh đề R không thể đúng (vì nếu đúng thì tôi đang nói một sự thật, làm sao mà nói dối được)

Mệnh đề R cũng không sai (vì nếu nó sai, thì tôi không nói dối, và câu nói "Tôi nói dối" phải là sự thật và phải đúng).

Nếu P là một mệnh đề toán học thì mệnh đề "P sai" cũng là một mệnh đề toán học và ta ký hiệu nó là $\sim P$.

Ta gọi $\sim P$ là *phủ định* của P.

Cho A là một tập hợp. Ta ký hiệu

- "*với mọi phần tử x trong A*" là "$\forall x \in A$",
- "*có một phần tử x trong A*" là "$\exists\ x \in A$".

Ta thử xem tác động của phủ định đến $\forall$ và $\exists$:

Q : "$\forall x \in A$ thì P đúng đối với x".

$\sim Q$: "$\exists x \in A$ sao cho $\sim P$ đúng đối với x".

Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và P là "≤ 4"

Q : "$\forall x \in A$ thì $x \leq 4$".

$\sim Q$: "$\exists x \in A$ sao cho $x > 4$".

R : “ $\exists\, x \in A$ sao cho P đúng đối với x ”

$\sim R$: “ $\forall\, x \in A$ thì $\sim P$ đúng đối với x ”

Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và P là “ < 4 “

R : “ $\forall\, x \in A$ thì $x < 4$ ”.

$\sim R$: “$\exists\, x \in A$ sao cho $x \geq 4$ ”.

S : " $\exists\, x \in A$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z , $\forall z \in B$ "

Ở đây $P(x)$ là một mệnh đề được xác định tùy theo các giá trị của x

$\sim S$:" $\forall\, x \in A$ $\exists\, z \in B$ sao cho $\sim P(x)$ đúng đối với z"

Cho B là một tập khác trống trong $\mathbb{R}$, $A = [0 , 1]$ và

$P(x)$ là " $< x$ "

S : " $\exists\, x \in A$ sao cho $z < x$, $\forall z \in B$ "

$\sim S$: " $\forall\, x \in A$ $\exists\, z \in B$ sao cho $z \geq x$ "

T : "$\forall x \in A$, $\exists y \in B$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z ,

$\forall z \in C(y)$ "

Ở đây $C(y)$ là một tập hợp được xác định tùy theo các giá trị của y

$\sim T$:" $\exists x \in A$ sao cho $\forall y \in B$, $\exists z \in C(y)$ để cho $\sim P(x)$ đúng đối với z ."

Cách viết một mệnh đề U thành dạng cơ bản

■ Để ý đến các cụm từ *"với mọi"* và *"có một" ở trong* U, và viết chúng thành một trong bốn dạng nêu trên. Nếu cần ta đặt thêm các tập hợp mới.

Cho các tập hợp C, D, E, F và G, ta đặt

$A = C \times D$ và $B = E \times F \times G$ và viết

- "$\forall x \in C, \forall y \in D$" thành "$\forall (x,y) \in A$".
- "$\exists u \in E, \exists v \in F$ và $\exists t \in G$" thành "$\exists (u,v,t) \in B$"

■ Gom các mệnh đề toán còn lại trong U thành một mệnh đề P.

■ Viết U thành các dạng cơ bản ở trên.

Cách phủ định các mệnh đề ở dạng cơ bản

- đổi $\exists$ thành $\forall$

- đổi $\forall$ thành $\exists$

- đổi P thành $\sim P$

- để nguyên "$\in$"

- để nguyên " *đúng với* "

Bài toán 2. Viết mệnh đề sau đây ra dạng cơ bản :

“ với mọi số thực dương ε có một số nguyên N sao cho

$| a_m - a_n| < \varepsilon$ với mọi số nguyên dương m và $n \geq N$ ”

Từ đó suy ra phủ định của câu trên.

$\forall \ \varepsilon \in (0, \infty).\ \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \forall m$ và $n \geq N$

$P(\varepsilon)$ là : “$| a_m - a_n | < \varepsilon$ ”

$\forall \ \varepsilon \in (0, \infty), \ \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với mọi $m, \ n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$

$P(\varepsilon)$ là : "$| a_m - a_n | < \varepsilon$"

$\forall \ \varepsilon \in (0, \infty), \ \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với mọi $m, n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$

$$C(N) = \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\} \times \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$$

$\forall \ \varepsilon \in (0, \infty), \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với (m, n) $\quad \forall \ (m, n) \in C(N)$

$\exists \ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall \ N \in \mathbb{N}, \ \exists \ (m, n) \in C(N)$

để cho $\sim P(\varepsilon)$ đúng với (m, n)

$P(\varepsilon)$ là : "$|a_m - a_n| < \varepsilon$"

$\exists\ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\exists\ (m, n) \in C(N)$

để cho $\sim P(\varepsilon)$ đúng với (m, n)

$\sim P(\varepsilon)$ là "$|a_m - a_n| \geq \varepsilon$"

$\exists\ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\exists\ (m, n) \in C(N)$

để cho $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$

có một số thực dương ε sao cho với mọi số nguyên dương N có m và $n \geq N$ để cho

$$|a_m - a_n| \geq \varepsilon$$

Bài toán 3. Viết mệnh đề sau đây ra dạng cơ bản :

" *có một số thực dương M sao cho với mọi* $x \in A$ *ta có* $x \le M$ ".

Suy ra phủ định của nó.

$P(M)$ là "$x \le M$ "

$\exists\, M \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\, x \in A$ thì $P(M)$ đúng đối với x

$\forall\, M \in (0,\infty)$, $\exists\, x \in A$ để cho $\sim P(M)$ đúng đối với x

$\sim P(M)$ là "$x > M$ "

$\forall\, M \in (0, \infty)$, $\exists\, x \in A$ để cho $x > M$

Các mệnh đề có "và" hay "hoặc" và phủ định của chúng

P là "R *và* S"

$\sim P$ là "$\sim R$ *hoặc* $\sim S$"

Q là "R *hoặc* S"

$\sim Q$ là "$\sim R$ *và* $\sim S$"

P *là* "$x < 5$ *và* $y \geq 9$"

$\sim P$ *là* "$x \geq 5$ *hoặc* $y < 9$"

Các tương quan suy luận $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$

giả sử P đúng thì Q phải đúng

nếu P đúng thì Q phải đúng

Q đúng khi P đúng

Tất cả các câu này đều có cùng một nghĩa

$$P \Rightarrow Q$$

$$Q \Leftarrow P$$

Nếu "$P \Rightarrow Q$" và "$Q \Rightarrow P$" ta nói P và Q *tương đương* với nhau

$$P \Leftrightarrow Q$$

Phản chứng

để chứng minh "P đúng". ta chỉ cần chứng minh $\sim P$ không thể nào đúng được

- Giả sử $\sim P$ đúng, coi như đây là một giả thiết của bài toán. Giả thiết mới này thường được gọi là *giả thiết phản chứng*.

- Kết hợp giả thiết mới với các giả thiết cho sẵn của bài toán chúng ta cố tìm ra một điều mâu thuẫn với các giả thiết cho sẵn của bài toán hoặc mâu thuẫn với các định nghĩa hoặc các kết quả có từ trước.

Bài tập. Cho A là một tập hợp . Chứng minh $\emptyset \subset A$

Ta dùng phản chứng. Giả sử "$\emptyset \subset A$" sai

Ta phủ định "$\emptyset \subset A$"

"$\emptyset \subset A$" $\Leftrightarrow$ "$\forall x \in \emptyset : x \in A$"

Phủ định "$\emptyset \subset A$" $\Leftrightarrow$ "$\exists x \in \emptyset : x \notin A$"

Vậy giả thiết phản chứng của chúng ta là : có $x \in \emptyset$ sao cho $x \notin A$.

Việc $x \in \emptyset$ mâu thuẫn với định nghĩa của tập trống

Vậy giả thiết phản chứng không thể đúng, nó phải sai, do đó $\emptyset \subset A$

Chứng minh bằng đảo đề

Để chứng minh "$P \Rightarrow Q$" ta có thể chứng minh

"$\sim Q \Rightarrow \sim P$"

Cho a và b là hai số thực dương sao cho $a < b$.

Chứng minh $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

P là "$a < b$ " và

Q là " $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ "

"$P \Rightarrow Q$

$\sim Q \Rightarrow \sim P$

$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Rightarrow a \geq b$

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \quad \Rightarrow \quad a \geq b$$

Đặt $c = \sqrt{a}$ và $d = \sqrt{b}$.

$a = c^2$ và $b = d^2$

$$c \geq d \quad \Rightarrow \quad c^2 \geq d^2$$

$c^2 \geq cd$ $\quad$ $cd \geq d^2$

CHƯƠNG HAI

ÁNH XẠ

Trong nhiều mô hình các vấn đề thực tiển, chúng ta thường thấy có các đại lượng thay đổi theo một hoặc nhiều đại lượng khác. Chúng ta hãy xem cách mô hình của toán cho việc này.

Nếu trong kỹ thuật chúng ta phải có một hình tròn có diện tích định trước, chúng ta mô hình bài toán bằng công thức sau :

Diện tích một hình tròn có bán kính $r = \pi r^2$

Như vậy đại lượng "diện tích" thay đổi tùy theo đại lượng "bán kính"

Chúng ta đầu tư xây dựng một công trình với số vốn là *a*, ước lượng mỗi năm tốn chi phí bảo quản là *b*, dự kiến sẽ cho thuê hàng năm là với giá *c* (sau khi trừ thuế). Vậy nên định *c* bao nhiêu để sau 10 năm chúng ta thu hồi vốn.

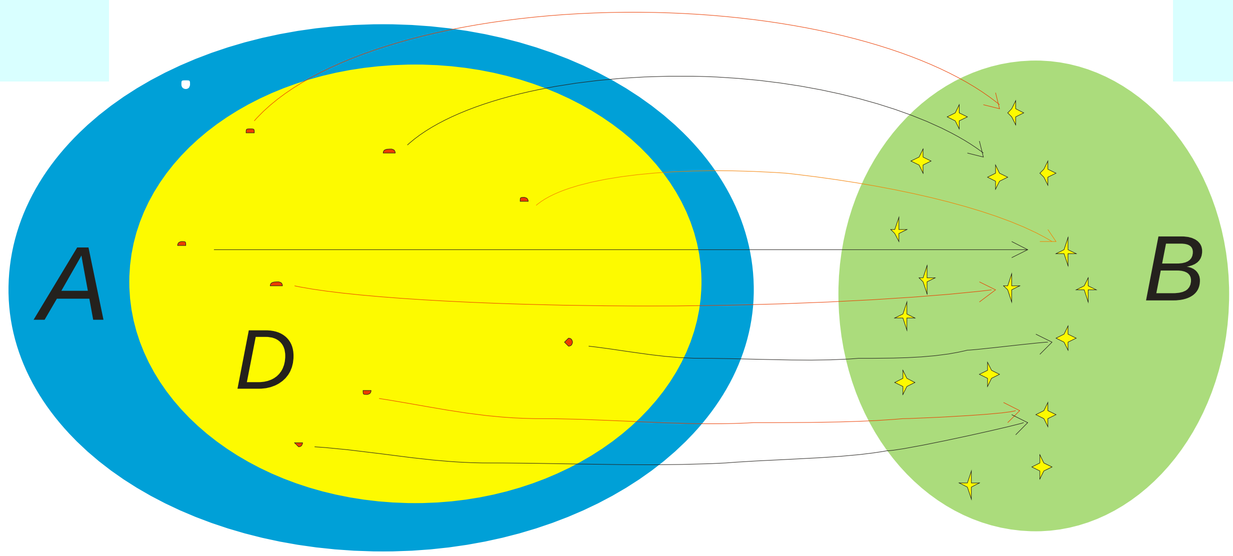
Dùng mô hình bài toán như sau : xét công thức sau : "Tiền thu được đến cuối năm thứ *t*" $= (c - b)t$

Trong hai thí dụ trên, chúng ta mới mô hình toán học nữa vời. Chúng ta thấy "diện tích một hình tròn có bán kính *r*" và "Tiền thu được cuối năm thứ *t*" có chung một tính cơ bản là các lượng thay đổi theo một lượng khác , và ta sẽ ký hiệu chung là $f(r)$ hoặc $f(t)$.

Theo cách này chúng ta mô hình được sự thay đổi của một lượng nào đó theo một lượng khác.

A. XÁC ĐỊNH MỘT ÁNH XẠ

Định nghĩa. Cho A và B là hai tập hợp khác trống và D là một tập con khác trống trong A. Giả sử với mọi x trong D ta định nghĩa được một phần tử $f(x)$ trong B, ta nói ta xác định được một ánh xạ f từ D vào B.



Thí dụ**.** Diện tích một hình tròn có bán kính r là πr^2. Ta thấy $r \to f(r) = \pi r^2$ là một ánh xạ từ tập hợp các số thực dương $(0,\infty)$ vào chính nó.

Thí dụ. Nhiệt độ tại một vị trí nào đó trong giảng đường này tại thời điểm t trong buổi sáng hôm nay, là một ánh xạ từ [6,12] vào [20, 50].

Thí dụ. Cố định một thời điểm t trong buổi sáng hôm nay, nhiệt độ tại mỗi vị trí trong giảng đường này là một ánh xạ từ tập hợp A vào [20, 50], với A là tập hợp các vị trí trong giảng đường này.

Thí dụ. Để khảo sát thiết kế hệ thống máy lạnh trong giảng đường này, chúng ta đo nhiệt độ tại một số vị trí trong giãng đường này (gọi B là tập hợp các vị trí đó) từ 7.00 giờ sáng đến 6.00 giờ chiều trong một ngày nào đó . Gọi $f(x,t)$ là nhiệt độ tại vị trí x ở thời điểm t. Lúc đó f là một ánh xạ từ $B\times[7,18]$ vào tập [20,50].

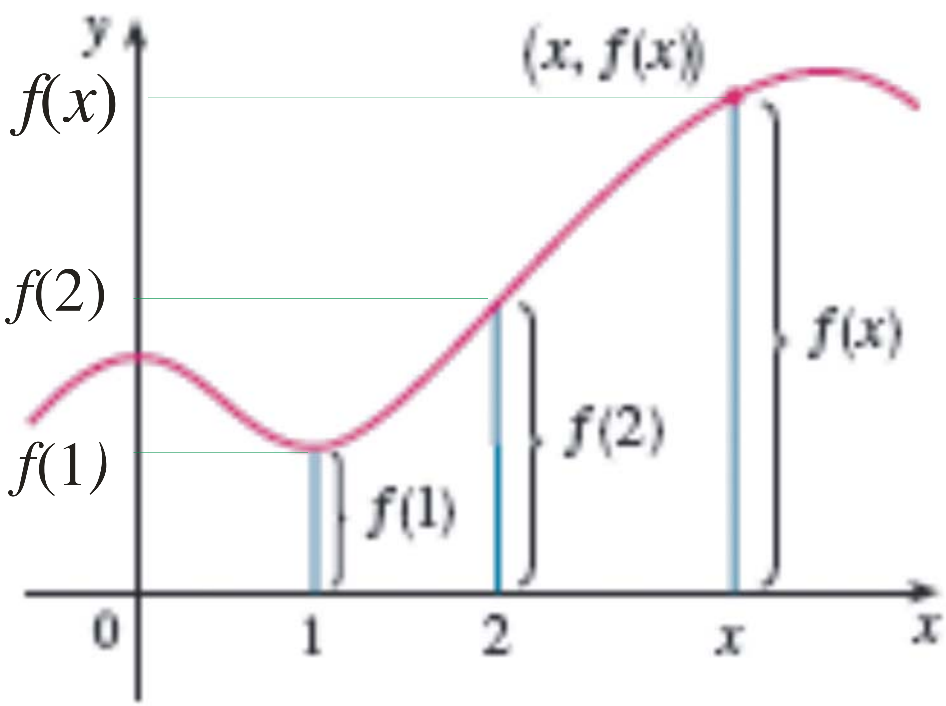
Thí dụ. Tổng trị giá xuất khẩu của Việt Nam trong từng tháng của năm 2007 là một ánh xạ từ tập {1,2, . . ., 12} vào tập [1,20] nếu chúng ta lấy đơn vị là tỉ USD. Nhưng ánh xạ này được coi là từ {1,2, . . ., 12} vào [16, 340] nếu đơn vị tính tiền là một ngàn tỉ đồng Việt Nam.

Ta có thể mô hình các ánh xạ qua đồ thị của chúng.

Định nghĩa. Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp A vào một tập hợp B. Ta đặt

$$\Gamma = \{(x,y) \in A\times B : \ y = f(x) \}.$$

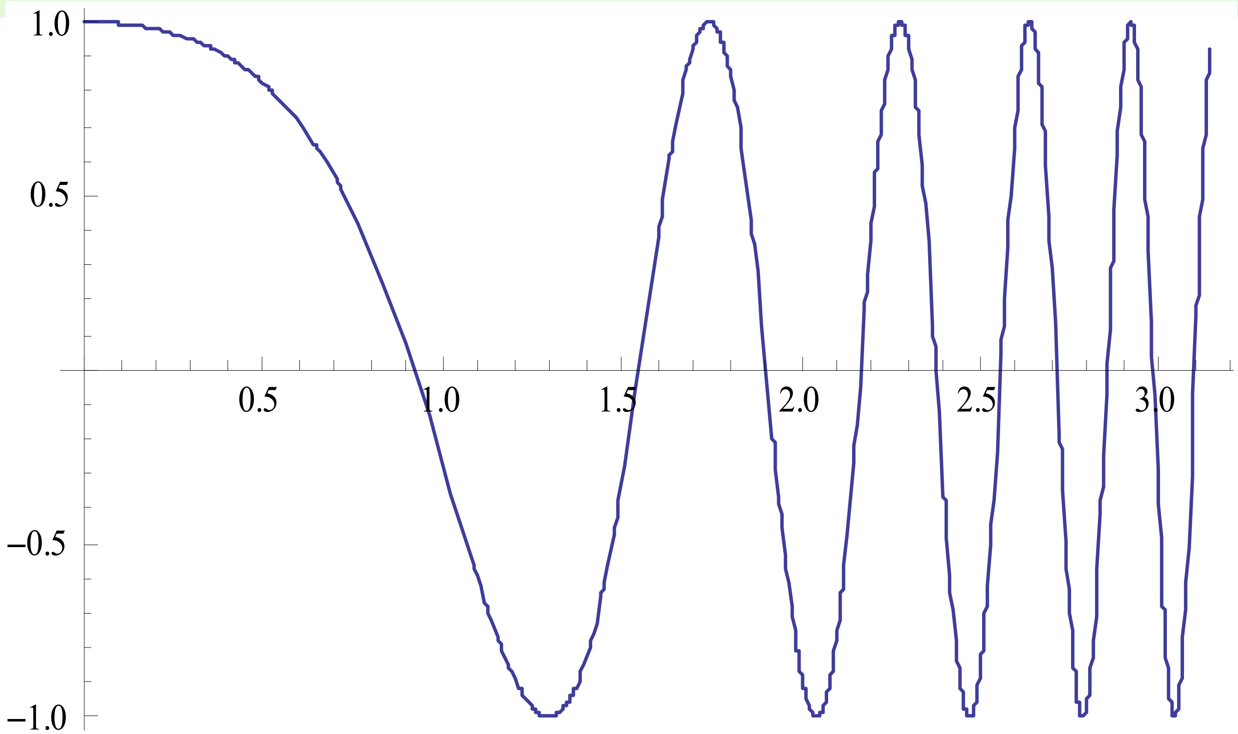
Ta gọi Γ là đồ thị của f.



Để vẽ đđồ thị của một ánh xạ *f* từ một khoảng [*a*,*b*] vào ℝ, ta có thể dùng Mathematica với lện

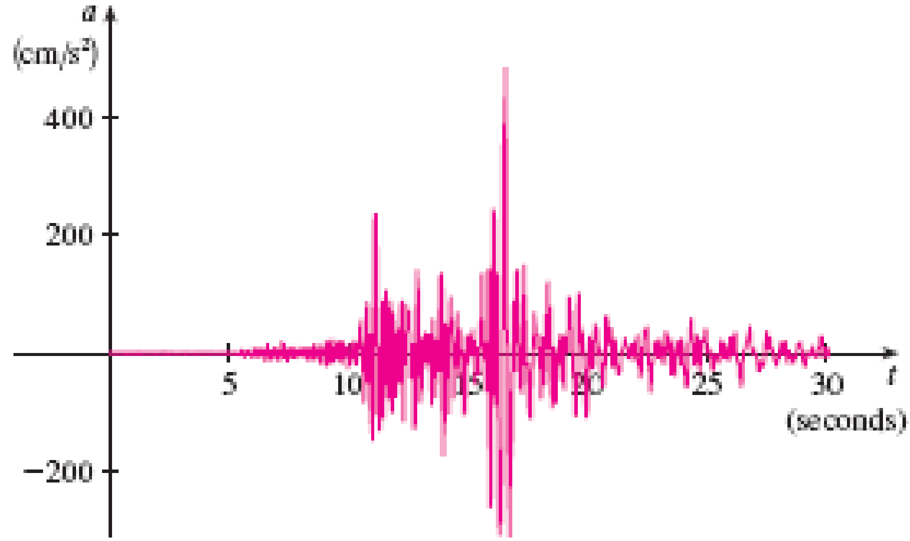
Plot[*f*,{*x*,*xmin*,*xmax*}]

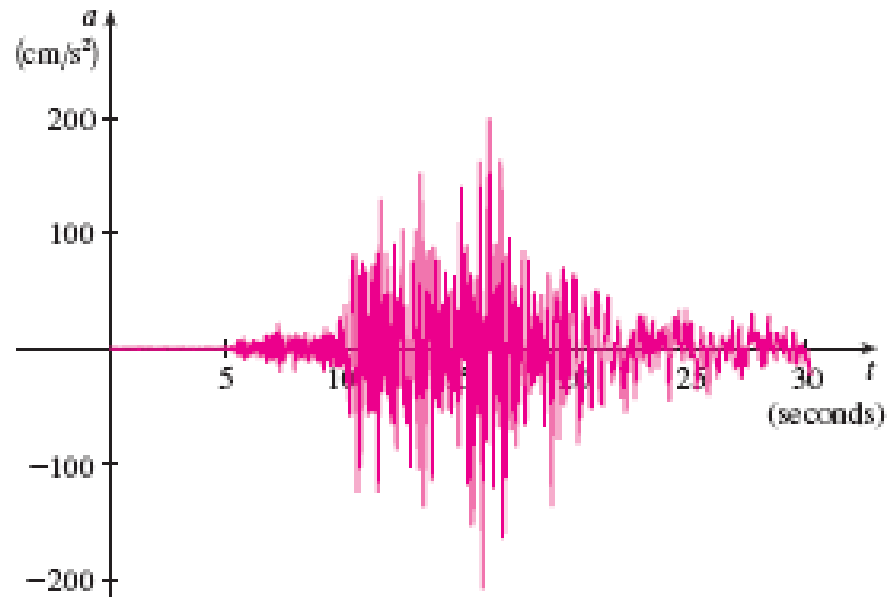
Thí dụ. Dùng lệnh Plot[Cos[x^3+Sin [x]],{x,0,π}] ta có đồ thị của ánh xạ $f(x) = \cos(x^3+\sin x)$ trên khoảng [0, π] như sau.



Tuy nhiên chúng ta cũng có các đồ thị của ánh xạ do các thiết bị ghi chứ không phải vẽ từ định nghĩa của ánh xạ đó.

Hai đồ thị bên cạnh do địa chấn kế ghi lại các gia tốc chuyển động mặt đất của một vị trí theo các hướng bắc-nam và đông-tây trong một trận động đất ở Northridge.





Theo tư liệu của Calif. Dept. of Mines and Geology ("Stewart, Calculus- concepts and contexts" tr.15)

Khi đi xe taxi , chúng ta phải trả một số tiền khởi đầu là a và một khoảng tiền theo giá mỗi km chúng ta đi. Như vậy giá tiền trung bình mỗi km trong một chuyến đi là bao nhiêu.

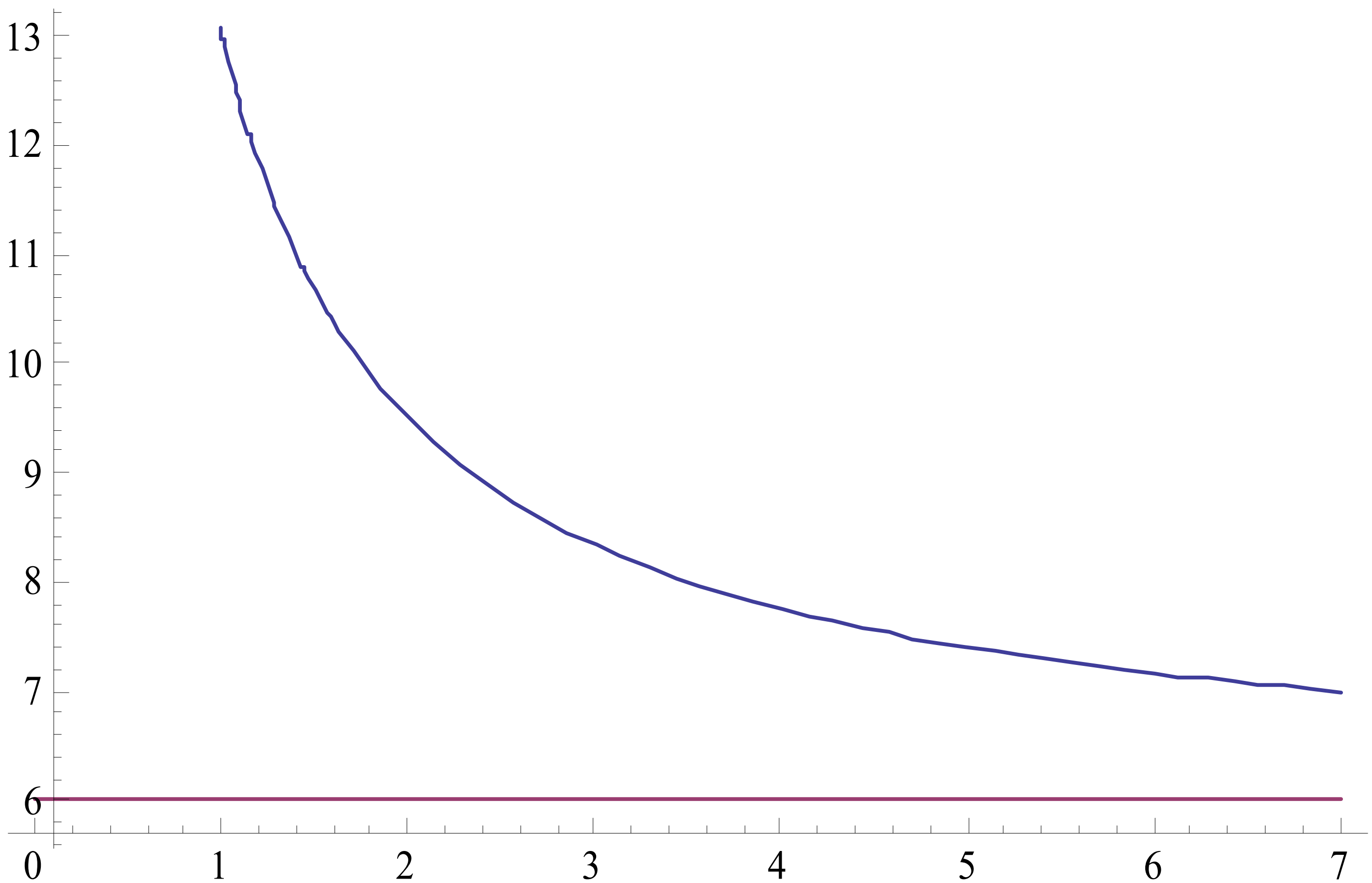
Chúng ta mô hình bài toán như sau : goi x là số km của chuyến đi và b là giá tiền mỗi km, và t là số tiền đi chuyến xe đó, và y là giá tiền trung bình mỗi km trong chuyến đi đó; ta có các công thức sau

$$t = a + bx \quad \text{và} \quad y = \frac{t}{x} = \frac{a+bx}{x} = \frac{a}{x} + b$$

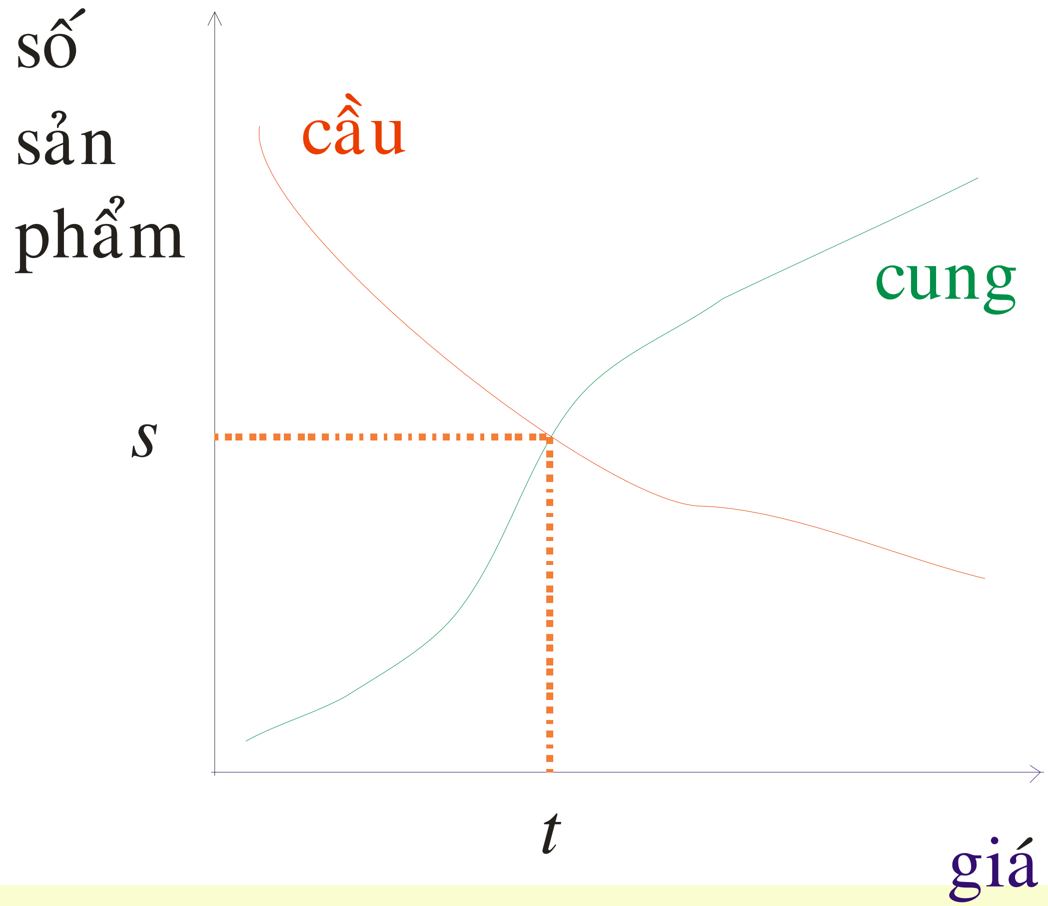
Như vậy giá tiền trung bình y mỗi km làm một ánh xạ tùy thuộc vào khoảng đường đi. Dùng Mathematica ta có đồ thị của y như sau

Plot[{7/x+6,6},{x,1,1000},AxesOrigin→{1,5.99}]

Theo đồ thị này, giá tiền trung bình mỗi km trong một chuyến đi giãm dần theo độ xa của chuyến đi



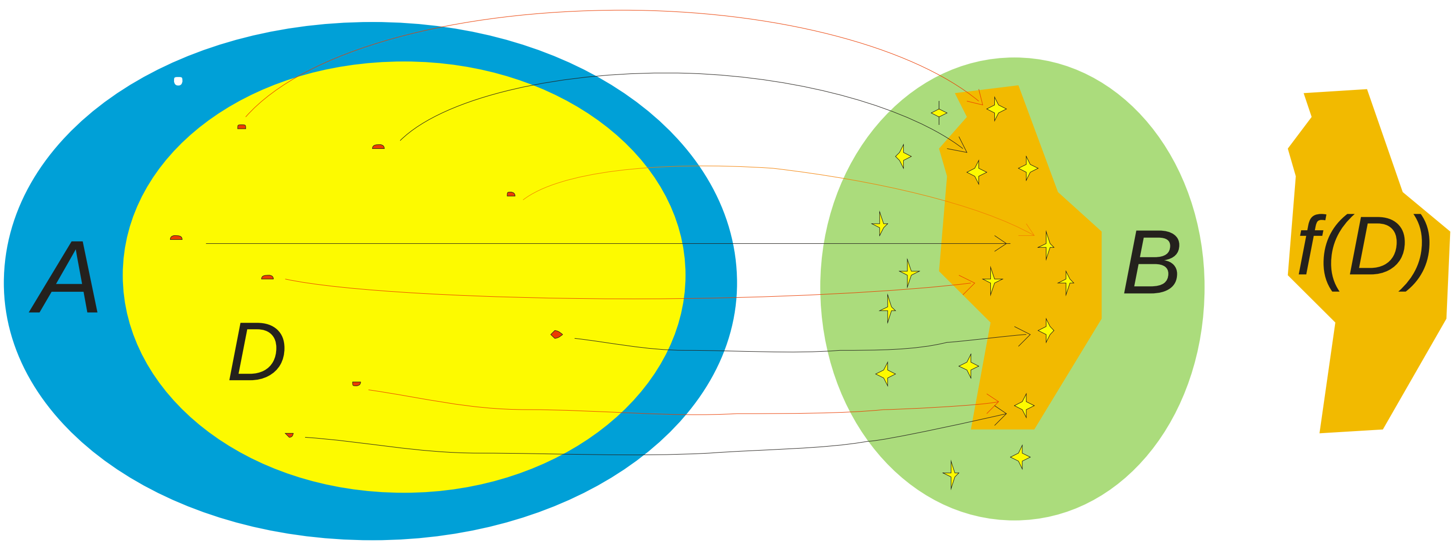
Trong việc điều chỉnh giá một mặt hàng nào đó sẽ dẫn theo hệ quả số người mua và số lượng sản xuất mặt hàng đó sẽ thay đổi.



Nếu cầu và cung không tương đối bằng nhau, chúng ta sẽ có hai tình hình kinh tế bất ổn : hoặc hàng tồn kho quá lớn, hoặc thiếu hụt hàng hóa.

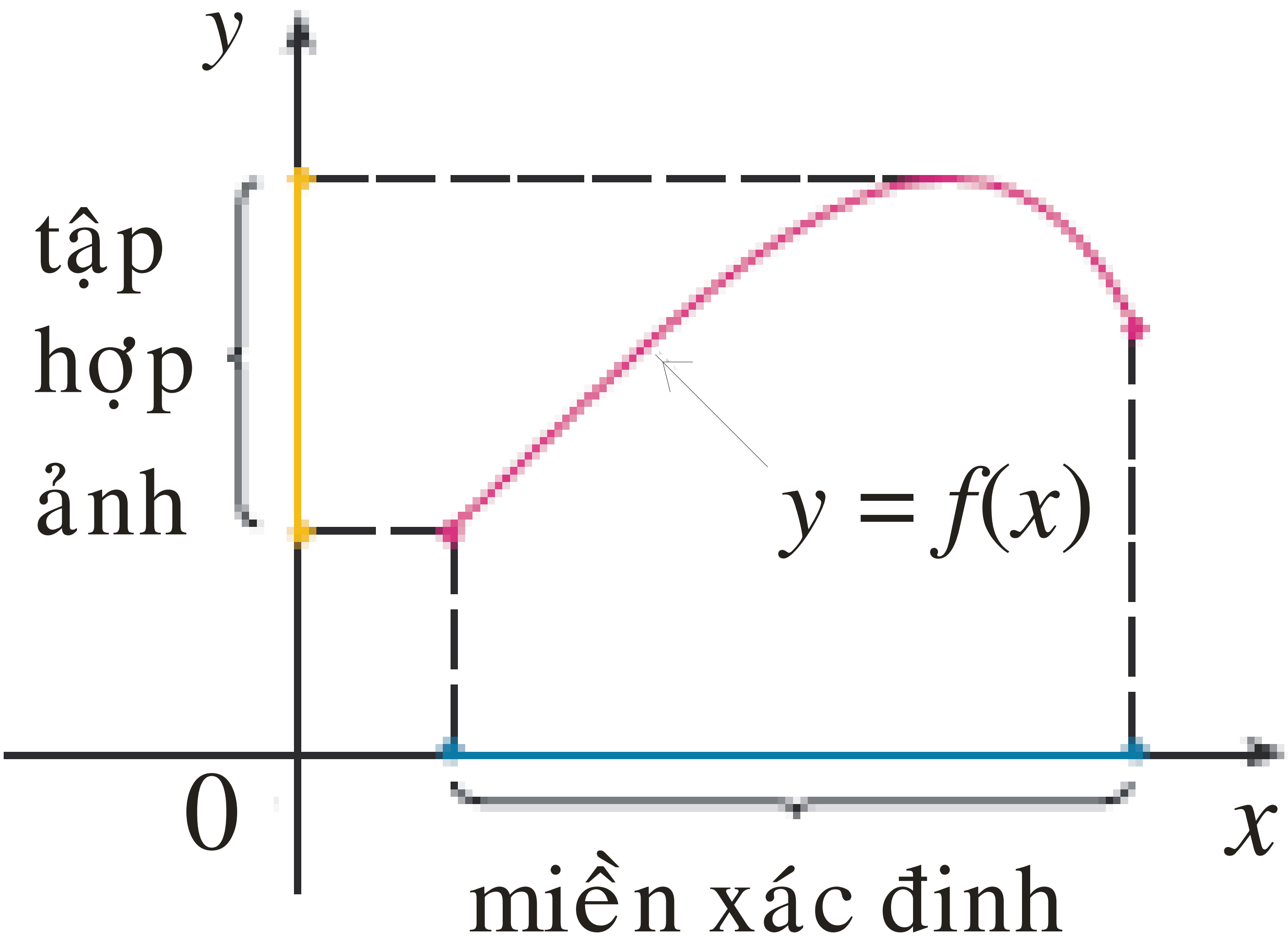
Dùng đồ thị bên trên chúng ta có thể thấy định giá mặt hàng là t làm cho kinh tế ổn định.

Cho D là một tập con khác trống trong một tập A và f là một ánh xạ từ D vài một tập B. Lúc đó D được gọi là miền xác định của ánh xạ f và tập hợp $f(D) = \{y = f(x) : x \in D\}$ được gọi là tập hợp ảnh của f.



Thí dụ. Cho D là một khoảng mở (a,b) trong $\mathbb{R}$, với x trong D ta đặt $f(x) = \dfrac{b-x}{x-a}$. Lúc đó f là một ánh xạ có miền xác định là D và tập hợp ảnh là $(0, \infty)$

Đôi khi chúng ta dùng đồ thị để có hình ảnh của miền xác định và tập ảnh của một ánh xạ.



Nhiều khi chúng ta định nghĩa một ánh xạ bằng một mệnh đề toán học, lúc đó chúng ta phải tìm miền xác định của f.

Bài toán 4. Với mọi số thực x ta đặt $f(x) = y$ sao cho $y(x - 1) = 1$. Tìm miền xác định của f.

Đặt $D = \{x \in \mathbb{R} : f(x)$ xác định duy nhất $\}$. Ta chứng minh $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset D$

$D \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Nếu $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ta thấy $(x - 1) \neq 0$, vậy ta có thể chọn $y = (x - 1)^{-1}$, suy ra $x \in D$. Do đó

$$\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset D.$$

$D \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Chứng minh " $x \in D$ thì $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ "

Chứng minh đảo đề "$x \notin \mathbb{R} \setminus \{1\}$ thì $x \notin D$".

Ta chọn cách sau vì $x \notin \mathbb{R} \setminus \{1\}$ cho ta $x = 1$: bài toán đơn giản hơn

Chứng minh "$x = 1$ thì $x \notin D$".

$D = \{x \in \mathbb{R} : f(x)$ xác định duy nhất $\}$

Có duy nhất y sao cho y sao cho $y = f(1)$

$f(x) = y$ sao cho $y(x - 1) = 1$.

Khi $x = 1$, ta có $(x - 1) = 0$ và không có số thực y nào để cho $y(x - 1) = 1$, vậy $x \notin D$.

Trong một kỳ tuyển sinh, chúng ta chọn các thí sinh có tổng số điểm thi ≥ 18. Ta mô hình việc tuyển chọn như sau: xác định tập hợp

{ thí sinh : có điểm thi ≥ 18}.

Mô hình tốt hơn như sau : đặt X là tập hợp các thí sinh, $f(x)$ là điểm thi của thí sinh x, lúc đó tập hợp các thí sinh được tuyển là $\{x \in X : f(x) \geq 18\}$.

Với giá hiện nay của một sản phẩm nào đó chúng ta có n khách hàng. Nay chúng ta muốn tăng giá đó lên thêm một mức là T, vấn đề nên chọn T sao cho số khách hàng tuy giãm nhưng cũng còn hơn 90% số khách hàng hiện nay.

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau : gọi c là hệ số giảm số lượng khách hàng nếu tăng giá một đơn vị tiền tệ và $F(T)$ là số lượng khách hàng khi chúng ta tăng giá sản phẩm thêm T. Lúc đó

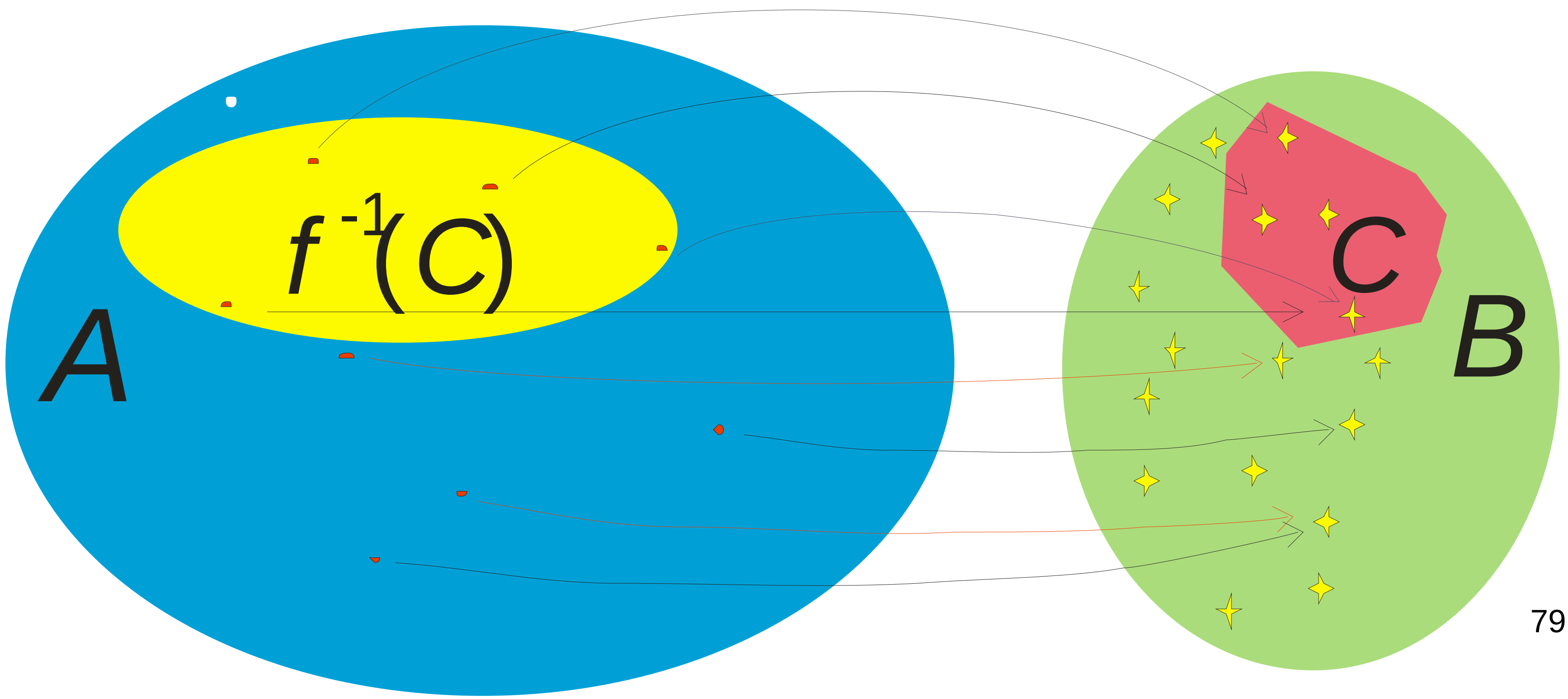
$$F(T) = -cT + n$$

Vậy các mức tăng giá có thể chấp nhận được là

$$\{T \ : \ F(T) \geq 0,9n \}$$

Mô hình chung cho các vấn đề này có thể làm như sau.

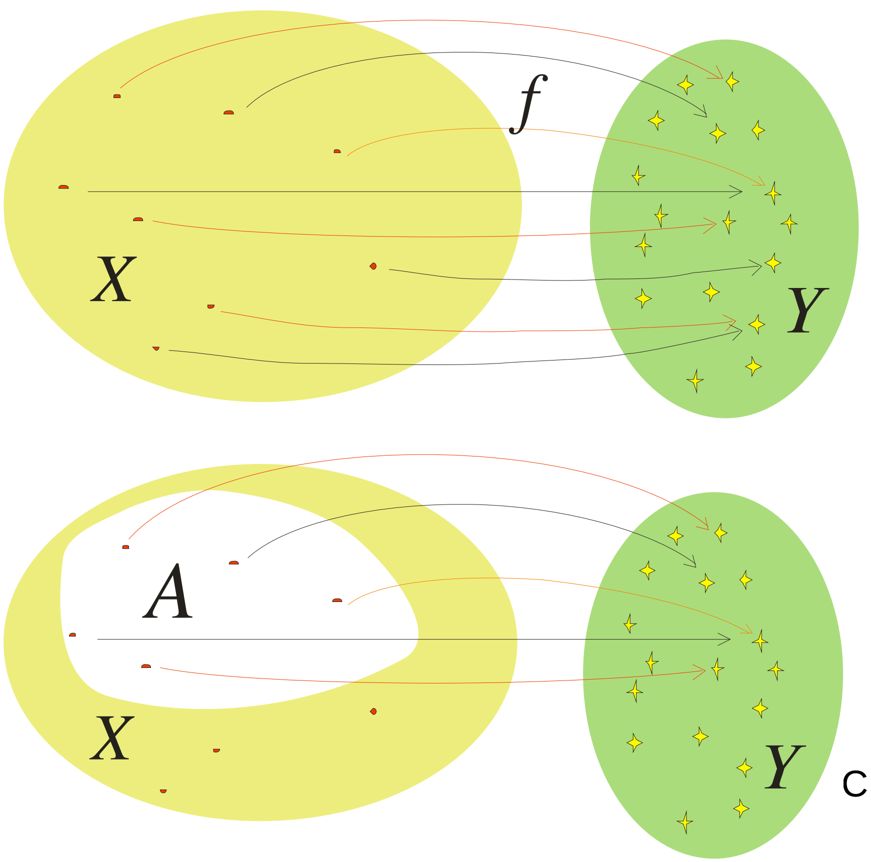
Định nghĩa. Cho A và B là hai tập hợp khác trống và C là một tập con khác trống trong B. Cho một ánh xạ f từ A vào B. Ta đặt $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$ và gọi $f^{-1}(C)$ *là ảnh ngược của C* qua f

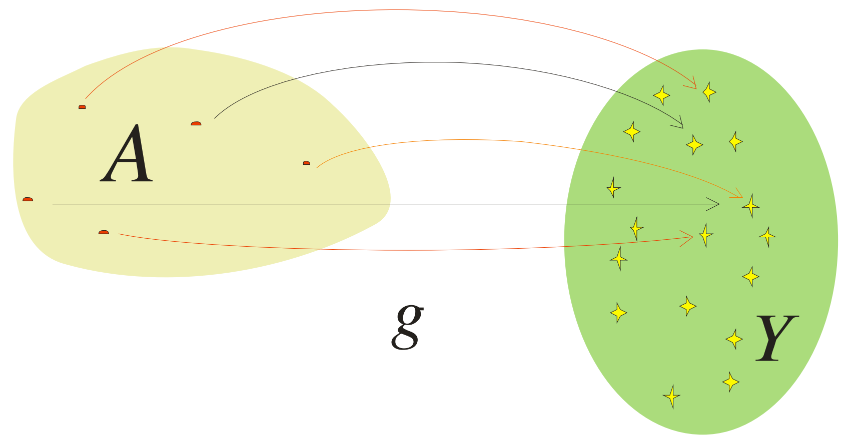


Nhiều lúc chúng ta muốn thu hẹp vấn đề, lúc đó chúng ta phải có các cách mô hình việc thu hẹp này. Trong một số vấn đề việc thu hẹp này còn giúp chúng ta bớt số tính toán và có kết quả nhanh hơn trước.

Vì các sự vật phải quan sát được bớt đi, một số mô hình cũng được "thu nhỏ" lại. Chúng ta dùng ngôn ngữ toán học diễn đạt sư việc này như sau.

Định nghĩa. Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp X vào một tập hợp Y, và A là một tập hợp con của X. Với mọi $x \in A$ ta đặt $g(x) = f(x)$, lúc đó g là một ánh xạ từ A vào Y và ta nói g là ánh xạ thu hẹp của ánh xạ f trên A và ký hiệu g là $f_{|A}$.

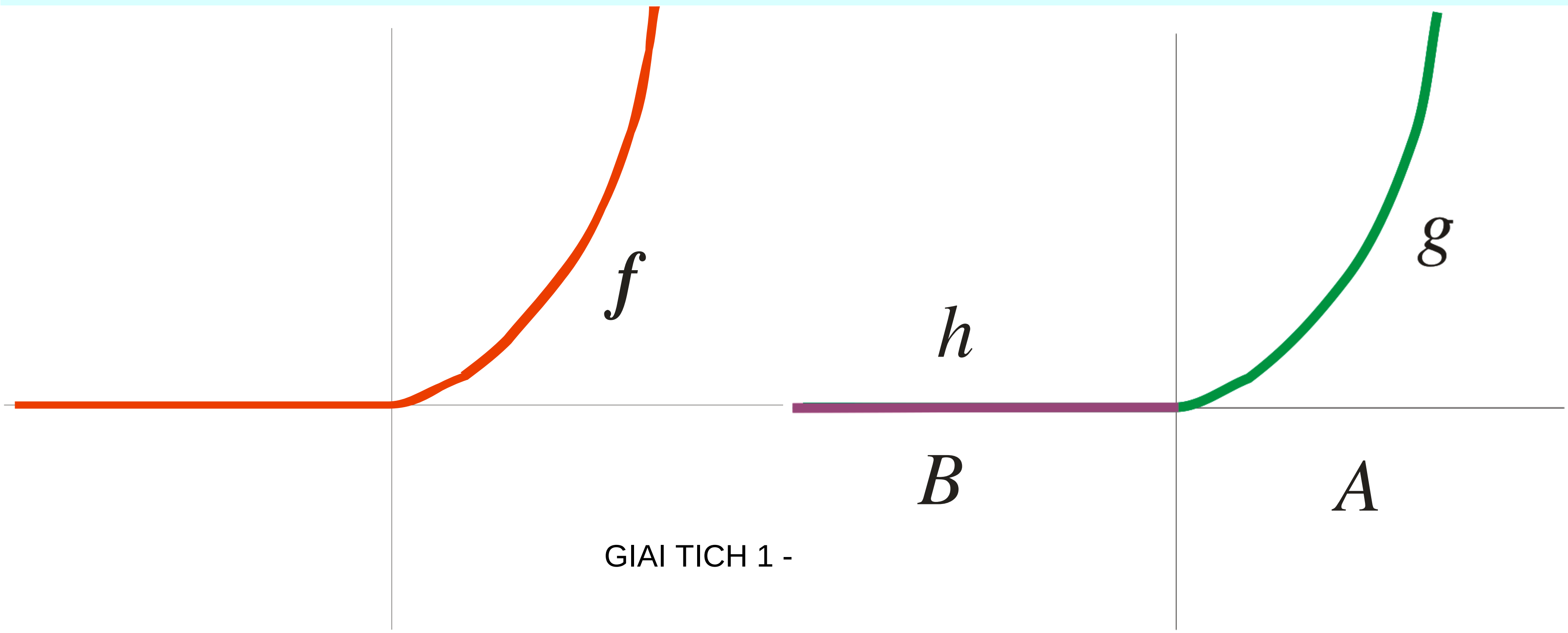




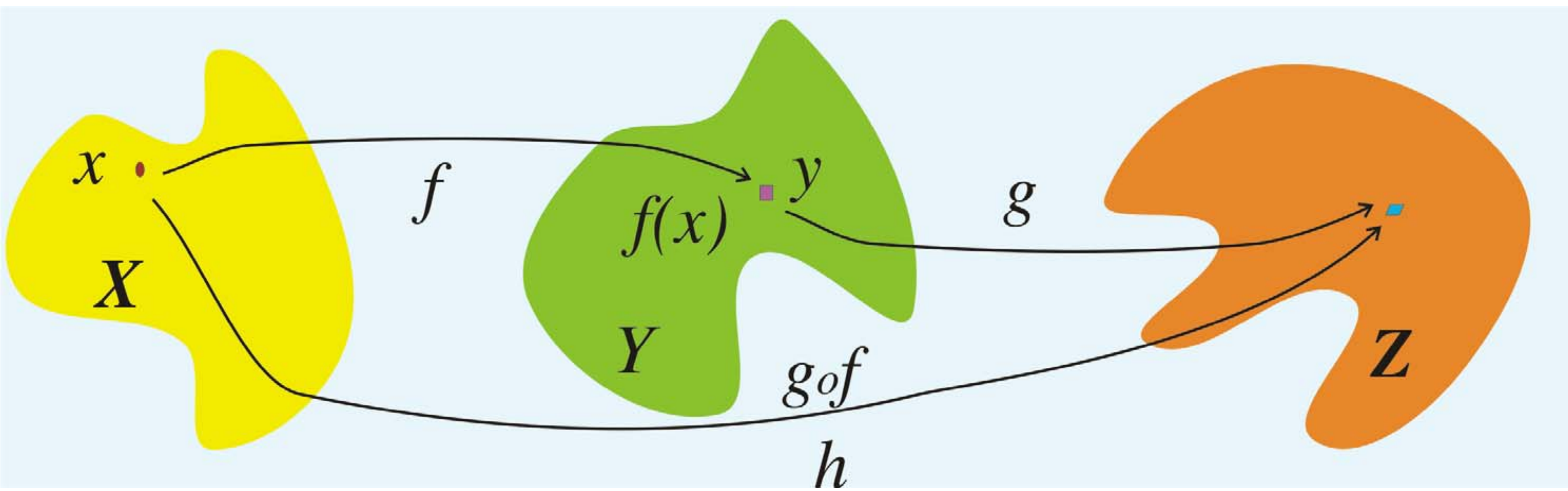
Thí dụ. *Cho* $A = (0, \infty)$, $B = (-\infty, 0)$ *và f là một ánh xạ từ* $\mathbb{R}$ *vào* $\mathbb{R}$ *xác định như sau*

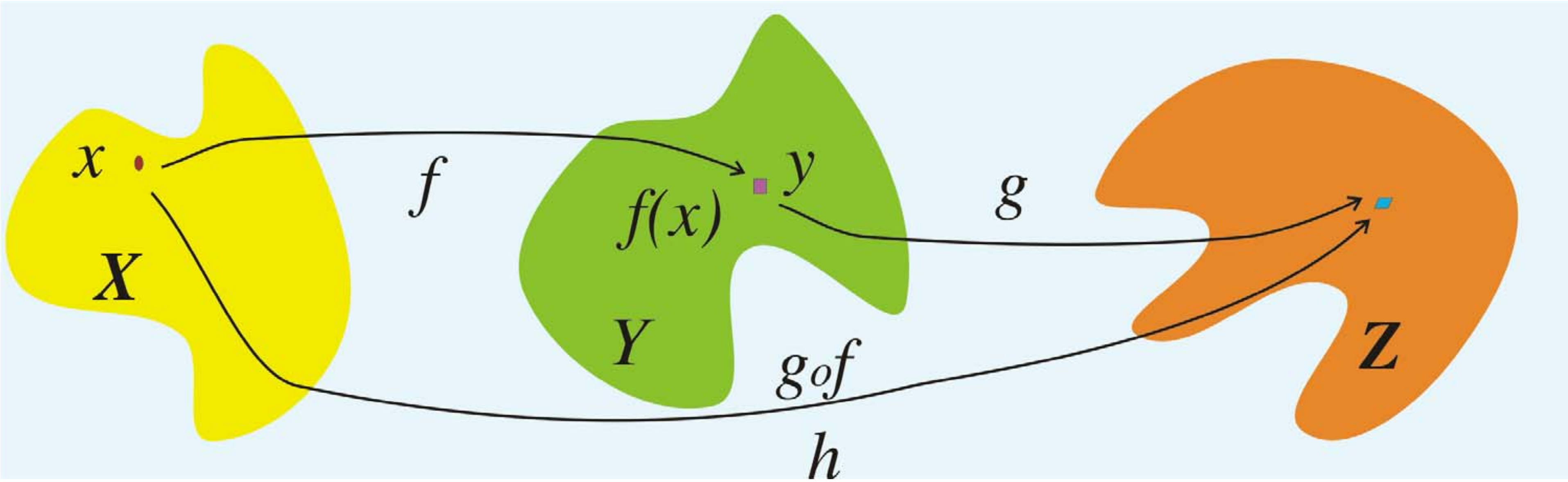
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & khi\ x > 0, \\ 0 & khi\ x \le 0. \end{cases}$$

Đặt $g = f|_A$ *và* $h = f|_B$. *Ta có* $g(x) = x$ *với mọi x trong A và* $h(x) = 0$ *với mọi x trong B.*

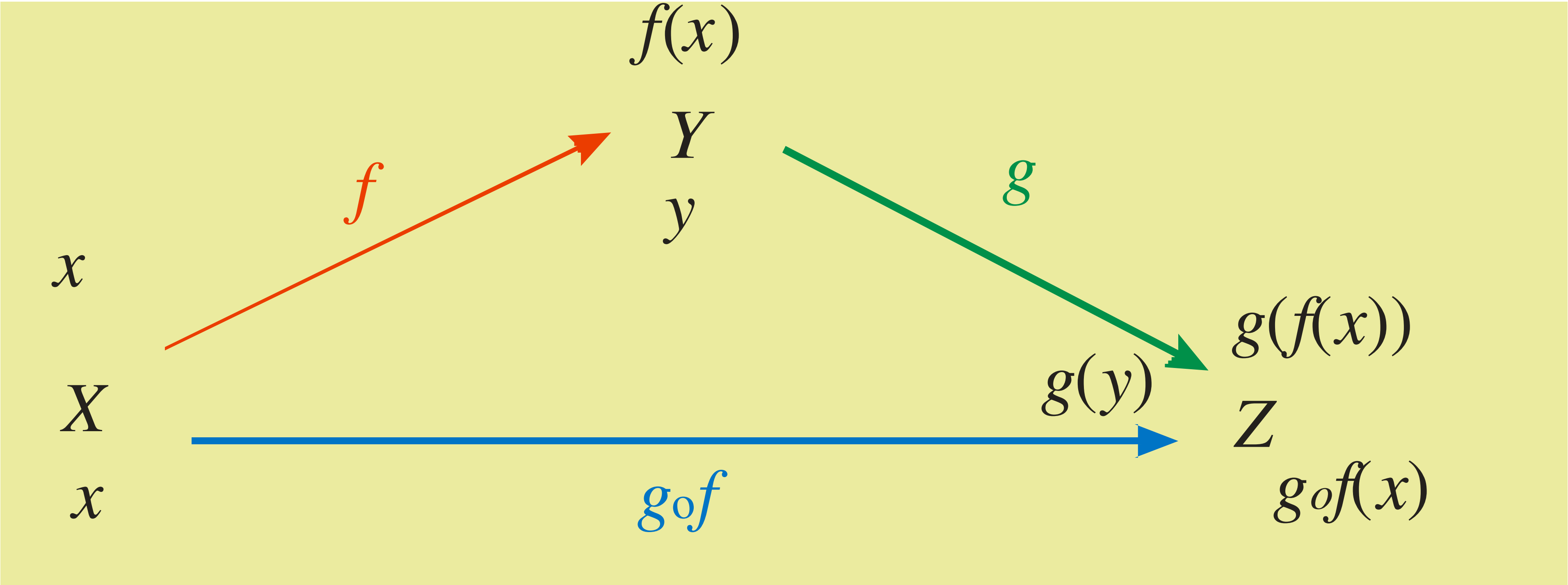


Định nghĩa. Cho X, Y và Z là ba tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y, và g là một ánh xạ từ Y vào Z. Ta đặt $h(x) = g(f(x))$ với mọi x trong X. Lúc đó h là một ánh xạ từ X vào Z và được gọi là *ánh xạ hợp* của f và g và được ký hiệu là gof.

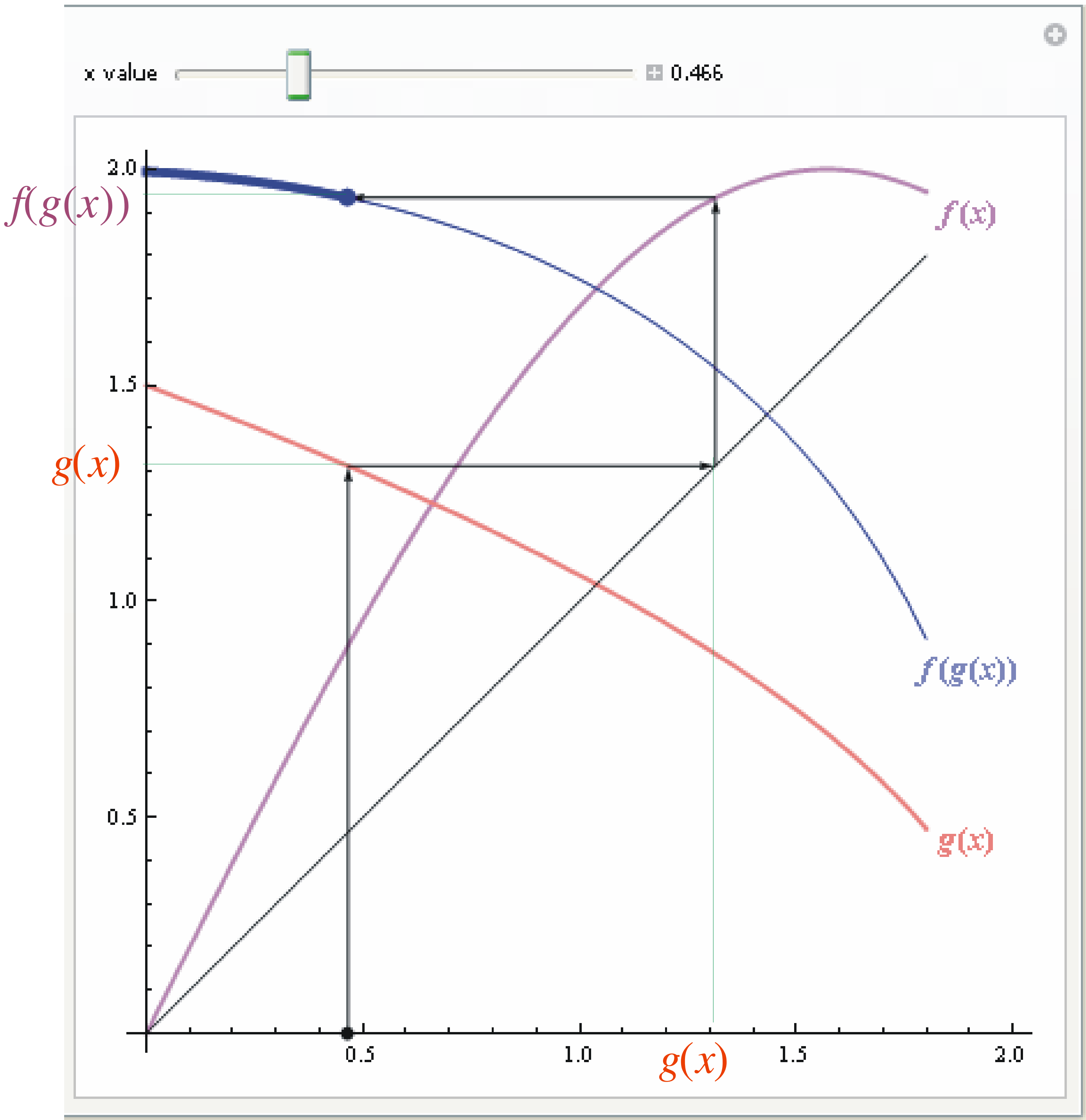


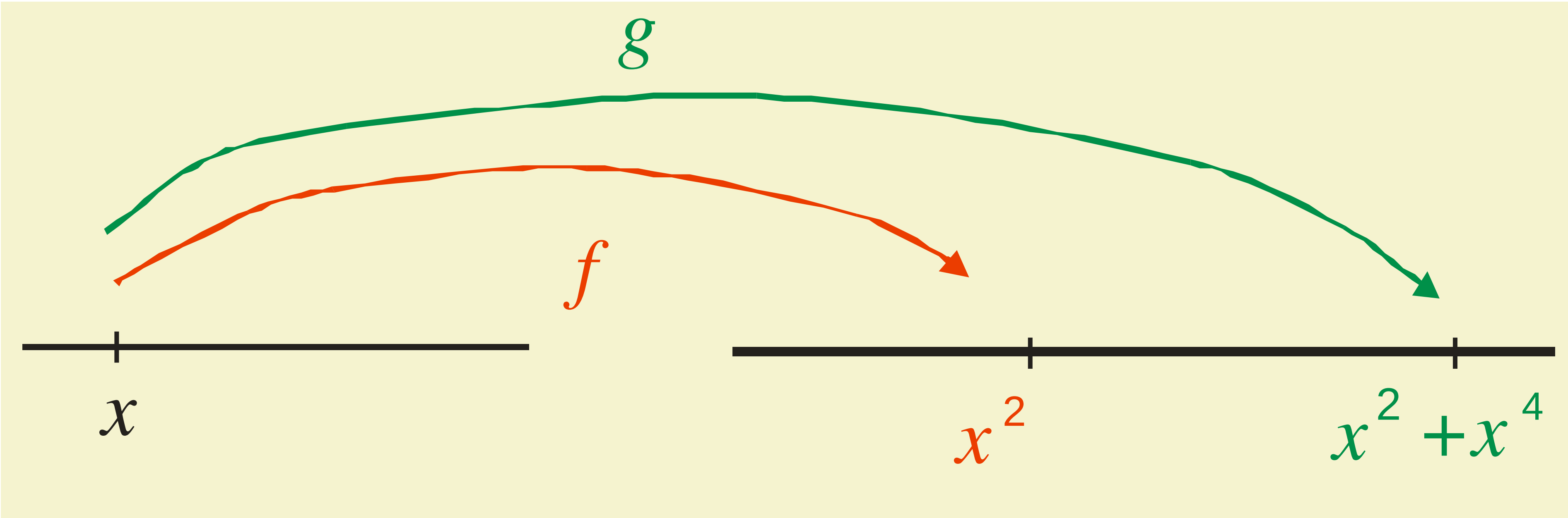


x
f
y
f(x)
g
X
Y
gof
Z
h



f(x)
Y
f
g
y
x
g(f(x))
X
g(y)
Z
x
gof
gof(x)

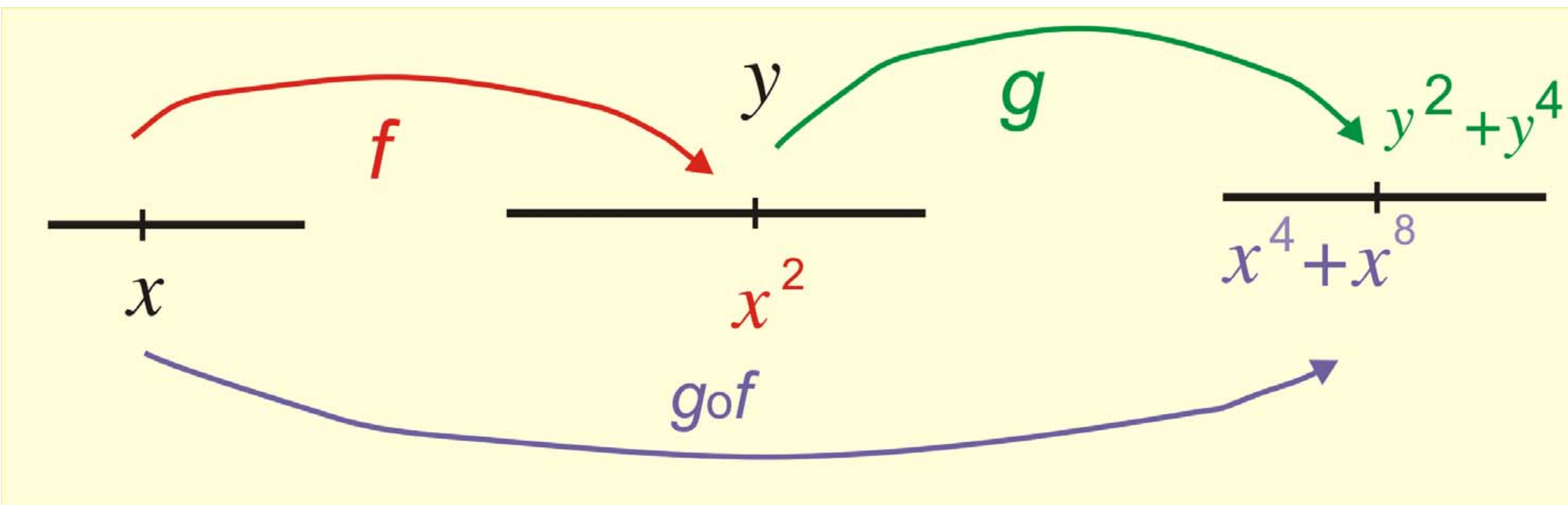

x value
0.466
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
f(g(x))
g(x)
g(x)
f(x)
f(g(x))
g(x)

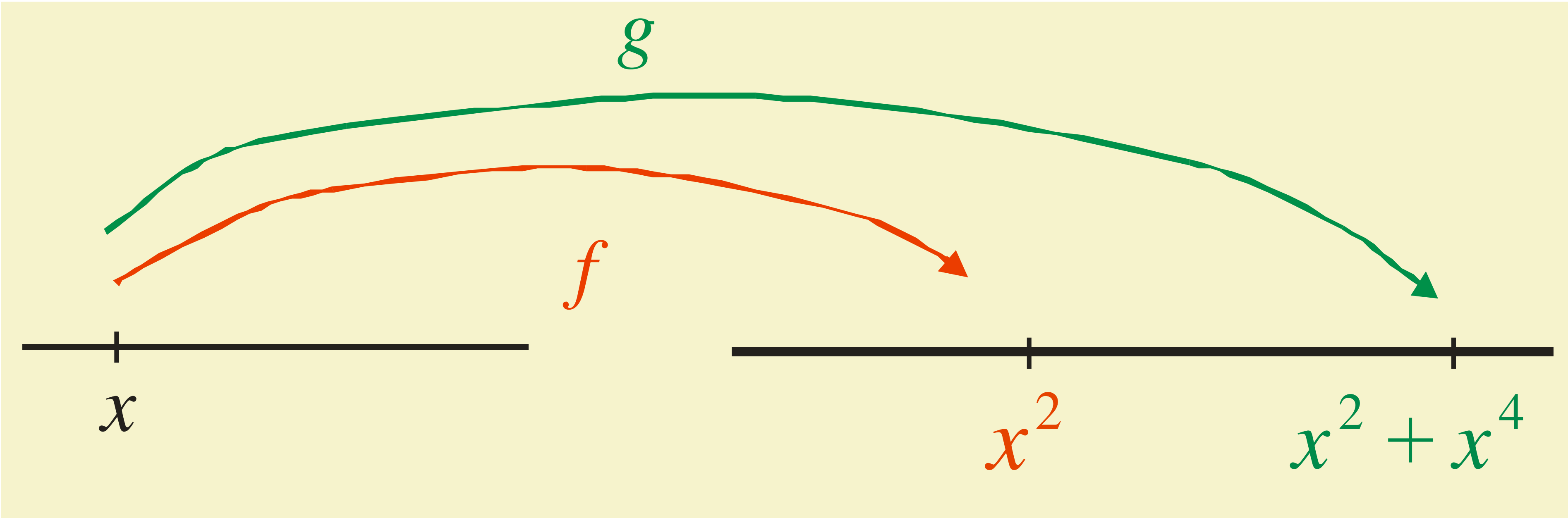


$f(x) = x^2$

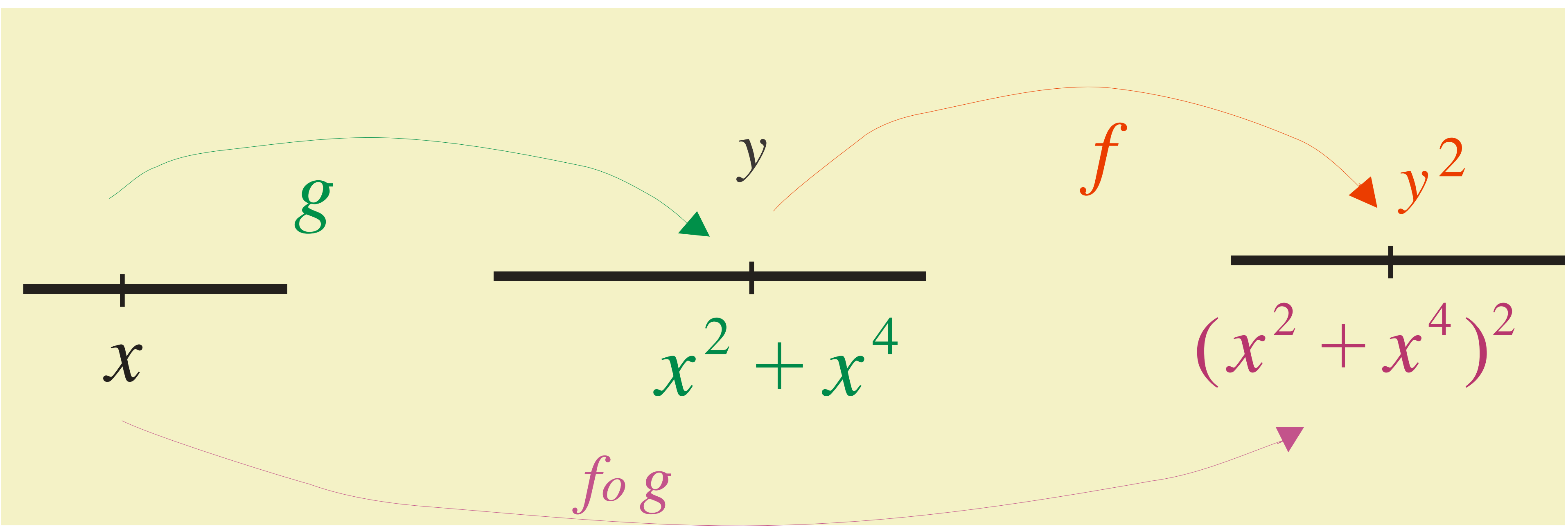
$g(x) = x^2 + x^4$

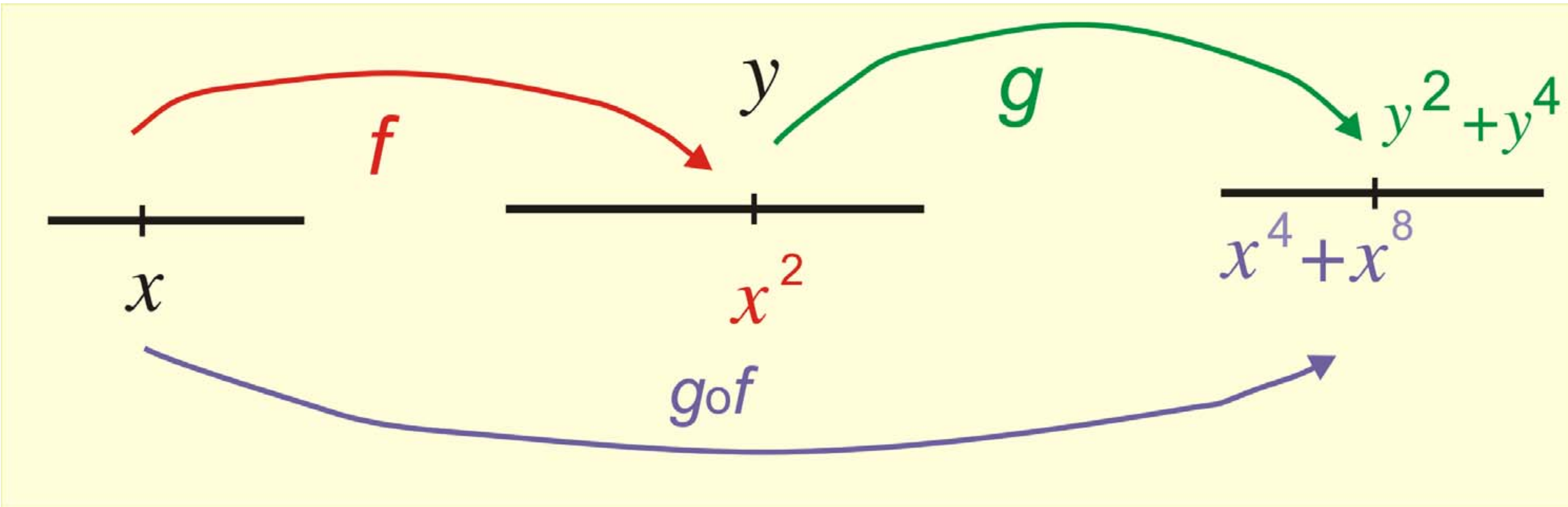
$g \circ f(x) = x^4 + x^8$



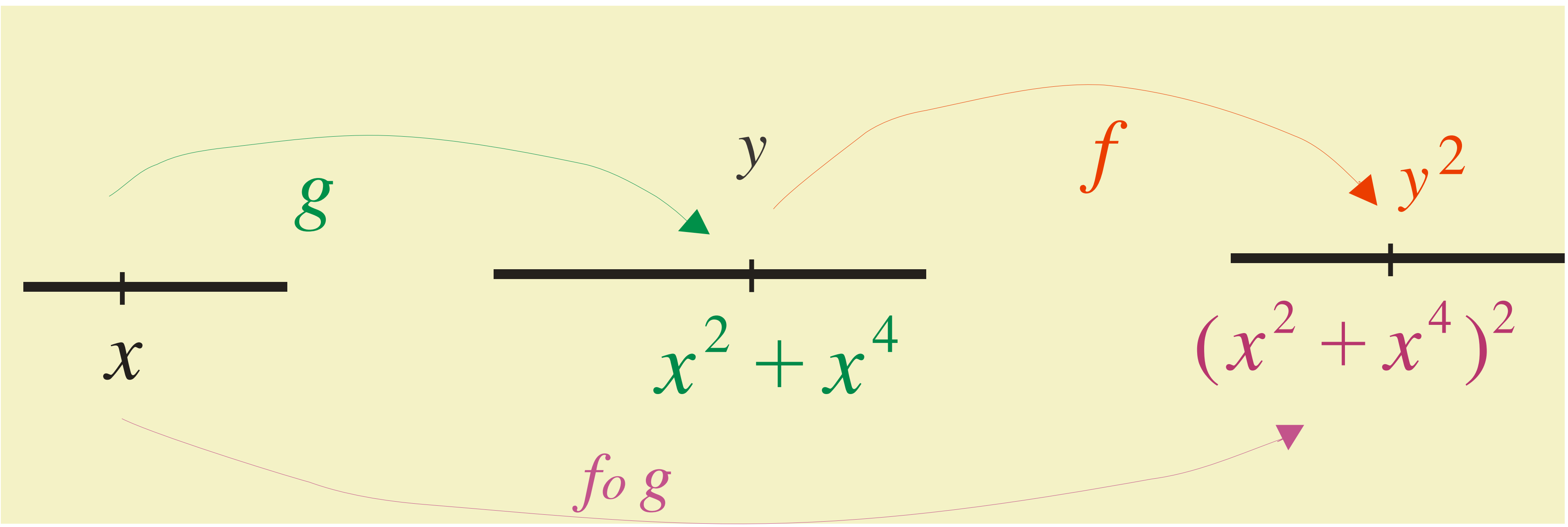


$f(x) = x^2$ $\quad$ $g(x) = x^2 + x^4$ $\quad$ $f \circ g(x) = (x^2 + x^4)^2$





$f(x) = x^2$ $\quad$ $g(x) = x^2+x^4$ $\quad$ $g \circ f(x) = x^4+x^8$ $\quad$ $f \circ g(x) = (x^2 + x^4)^2$



B. XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ HỢP

Để xác định ánh xạ hợp *gof* ta làm như sau : với mọi x trong X tính $y = f(x)$, rồi thay y bằng giá trị đó vào công thức $z = g(y)$, từ đó xác định được

Thí dụ. *Cho* $X = \mathbb{R}$, $Y = [-3, \infty)$ *và* $Z = [-5, 4]$, *cho* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ *với mọi* x *trong* X *và* $g(y) = \dfrac{1-y^2}{1+y^4}$ *với mọi* y *trong* Y. *Xác định* *gof.*

Với mọi x trong X ta đặt $y = f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Ta có

$$gof(x) = g[f(x)] = g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^4} = \frac{1-(\sqrt{1+x^2})^2}{1+(\sqrt{1+x^2})^4}$$

Vậy $gof\,(x) = \dfrac{-x^2}{x^4+2x^2+2}$ với mọi x trong X.

Việc đặt $y = f(x) = \sqrt{1+x^2}$ mới xem rất tầm thường, nhưng nó giúp ta làm nhanh và ít sai trong tính toán về sau : nó tránh cho chúng ta khỏi lầm lẫn các x trong $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ và $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^4}$ (thường người ta viết g như một hàm số theo x chứ không theo y)

Có thể dùng Mathematica để giải thí dụ trên như sau

In[1]:= f[x_] := Sqrt[1 + x^2]

In[2]:= g[x_] := $\dfrac{1-x^2}{1+x^4}$

In[3]:= g[f[x]]

Out[3]:= $\dfrac{-x^2}{1+(1+x^2)^2}$

In[1]:= f[x_] := Sqrt[1 + x^2]

In[2]:= g[x_] := $\dfrac{1-x^2}{1+x^4}$

In[3]:= g[f[x]]

Out[3] := $\dfrac{-x^2}{1+(1+x^2)^2}$

Trong In[1] và In[2] ta định nghĩa f và g và trong In[3] ta ra lệnh tính $gof\,(x)$

Nay để tính $f\,og\,(x)$ bằng Mathematica, ta làm thêm phần trên như sau

In[4]:= f[g[x]]

Out[4]:= Sqrt[1 + $\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^4)^2}$]

In[5]:= Expand[%]

Out[5]:= $Sqrt$[$\dfrac{2-2x^2+3x^4+x^8}{(1+x^4)^2}$]

Vậy $fog\,(x) = \sqrt{\dfrac{2-2x^2+3x^4+x^8}{(1+x^4)^2}}$ với mọi x trong Y.

Thí dụ. *Cho* $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 6x^3 - 15x + 8$ *và* $g(x) = \dfrac{x^3 + 4x + 5}{x^2 + 7}$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$. *Tính* fog

Bài này có số lượng tính toán khá lớn ta nên dùng máy tính, ở đây ta dùng Mathematica

$In[1]{:=}\ f[x\_] := x^4 + 6x^3 - 15x + 8$

$In[2]{:=}\ g[x\_] := \dfrac{x^3 + 4x + 5}{x^2 + 7}$

$In[3]{:=}\ f[g[x]]$

$$\text{Out}[3] := 8 - \frac{15(5 + 4x + x^3)}{7 + x^2} + \frac{6(5 + 4x + x^3)^3}{(7 + x^2)^3} + \frac{(5 + 4x + x^3)^4}{(7 + x^2)^4}$$

C. PHÂN TÍCH ÁNH XẠ THÀNH CÁC ÁNH XẠ ĐƠN GIẢN

Cho tập hợp con A trong $\mathbb{R}$ và một ánh xạ f từ A vào $\mathbb{R}$. Với mỗi x trong A ta tính cẩn thận $f(x)$, từ đó suy ra cách phân tích f thành các ánh xạ đơn giản.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$*. Phân tích f thành các ánh xạ đơn giản.*

Với mỗi x trong $\mathbb{R}$ quá trình tính $f(x)$ như sau :

- với x ta tính được x^2 đặt $g(x) = x^2$,
- với $z = x^2$ ta tính được $1+x^2 = 1+z$: đặt $h(z) = 1 + z$,
- với $w = 1 + x^2$ ta tính được $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{w}$: đặt $u(w) = \sqrt{w}$.

$f(x) = u(h(g(x)))$ với mọi x trong $\mathbb{R}$ hay $f = u \circ h \circ g$.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = \sin(3x + \cos x)$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$. *Phân tích f thành các ánh xạ đơn giản.*

Với mỗi x trong $\mathbb{R}$ quá trình tính $f(x)$ như sau :

- với x ta tính được $3x$ và $\cos x$: đặt

$$g(x) = 3x \text{ và } h(x) = \cos x,$$

- với $z = 3x + \cos x$ ta tính được $\sin(3x + \cos x) = \sin z$: đặt

$$u(z) = \sin z.$$

Vậy $f(x) = u((h + g)(x))$ $\forall x \in \mathbb{R}$ hay $f = u \circ (h+g)$

Khi đặt các z và w, ta thấy hình như là ta đang làm việc vô ích, nhưng việc này sẽ giúp ta làm toán nhanh và tránh các sai lầm không đáng có về sau.

Việc phân tích *f* thành hợp của các ánh xạ đơn giản rất hữu ích khi ta đưa các bài toán phức tạp về các bài toán đơn giản, nhất là khi ta gặp các vấn đề về liên tục và khả vi của một ánh xa phức tạp.

Trong một túi có 10 viên bi có kính cở như nhau nhưng có các màu sắc khác nhau. Chúng ta chọn ba viên bi trong túi này theo hai cách sau :

* Lấy một lần ba viên bi.

** Lấy một viên bi, ghi màu sắc của nó rồi bỏ lại vào túi; lấy một viên bi, ghi màu sắc của nó rồi bỏ lại vào túi; và lấy thêm một viên bi nữa.

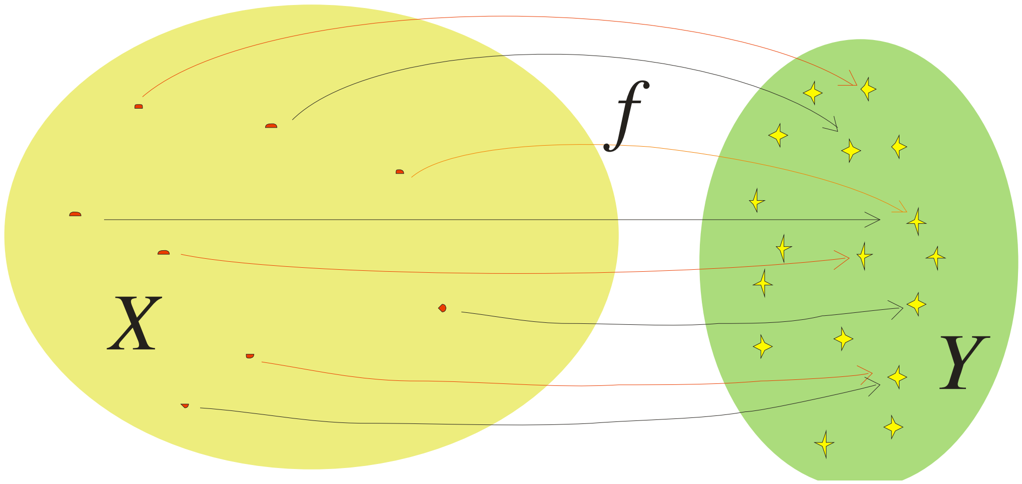
Chúng ta thấy sự khác biệt giữa hai cách chọn trên : ta có ba viên bi khác nhau trong cách thứ nhất, còn trong cách thứ hai chúng ta có thể có cùng một viên bi trong nhiều lần lấy bi từ túi.

Ta thử mô hình toán học hai cách chọn trên. Mô hình các lần chọn như tập hợp $A = \{1,2,3\}$ và các viên bi như tập hợp $B = \{1,2,3, \ldots,10\}$.

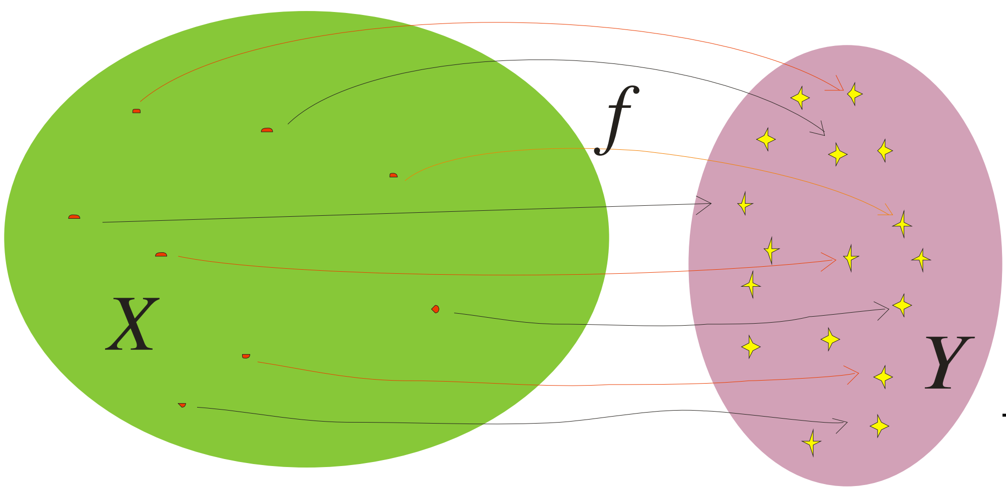
Cách chọn thứ hai tương ứng với mọi ánh xạ f từ A vào B. Cách chọn thứ nhất tương ứng với các ánh xạ f từ A vào B có tính chất sau : $f(x) \neq f(y)$ nếu $x \neq y$.

Nếu xem một con người như là một phức hợp thể chất, tinh thần và các yếu tố khác biến đổi theo thời gian t ký hiệu là $f(t)$, thì mỗi con người là một ánh xạ từ một khoảng $[a, b]$ vào tập hợp B những "con người tức thời" (một con người ở đúng một thời điểm nào đó). Ánh xạ này cũng có tính chất $f(x) \neq f(y)$ nếu $x \neq y$.

Định nghĩa . Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một đơn ánh nếu và chỉ nếu $f(a) \neq f(b)$ khi $a \neq b$,



f không là đơn ánh



f là đơn ánh

D. CHỨNG MINH f LÀ MỘT ĐƠN ÁNH

Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp X vào tập hợp Y, để chứng minh f đơn ánh ta có thể dùng các phương pháp sau

- Dùng định nghĩa : *cho x và y trong X sao cho $x \neq y$, chứng minh $f(x) \neq f(y)$.*

Thí dụ. *Cho $f(x) = x^3$ với mọi x trong $\mathbb{R}$. Chứng minh f là một đơn ánh.*

Cho x và y thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $x \neq y$. Ta có

$$f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) =$$

$$= (x-y)\,[\,(x^2 + y^2) + (x + y)^2]/2.$$

Vì $x \neq y$, ta có $(x-y) \neq 0$ và $(x^2 + y^2) + (x + y)^2 > 0$.

Vậy $f(x) - f(y) \neq 0$ hay $f(x) \neq f(y)$. Do đó f là đơn ánh.

• Dùng đảo đề : *cho x và y trong X sao cho* $f(x) = f(y)$*, chứng minh* $x = y$.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = x^5 - x^4 + 2x$ *với mọi x trong* $[1, \infty)$. *Khảo sát sự đơn ánh của f.*

Ở đây ta chưa rõ phải chứng minh f là đơn ánh hay phải chứng minh f không là một đơn ánh.

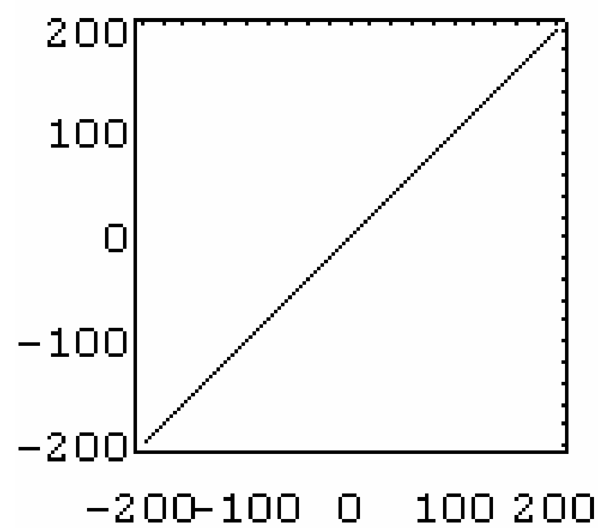
Chúng ta dùng máy tính để định hướng giải toán. Ta dùng Mathematica để xác định các (x,y) sao cho $x^5 - x + 2x = y^5 - y + 2y$: ta vẽ đường mức 0 (level curve 0) của hàm số

$$h(x,y) = x^5 - x^4 + 2x - y^5 + y^4 - 2y$$

Ta dùng Mathematica để xác định các (x,y) sao cho $x^5-x^4+2x = y^5-y^4+2y$: ta vẽ đường mức 0 (level curve 0) của hàm số $h(x,y) = x^5 - x^4 + 2x - y^5 + y^4 - 2y$

In[1]:= ContourPlot[x^5 - x^4 + 2x - y^5 + y^4 - 2y, {x,-200,200},{y,-200,200},Contours->{0}, PlotPoints-> 60, ContourShading->False]

Out[1]:= -Graphics-



Vậy phương trình

$x^5 - x^4 + 2x = y^5 - y^4 + 2y$

hình như chỉ có các nghiệm $x = y$.

Từ đây ta vững lòng để cố gắng chứng minh f là một đơn ánh.

Cho x và y trong $[1, \infty)$ sao cho $f(x) = f(y)$. Ta sẽ chứng minh $x = y$. Ta dùng Mathematica

In[1]:= Factor[$x^5 - x^4 + 2x - y^5 + y^4 - 2y$]

Out[1]:=$(-x+y)\ (-2+x^3-x^4+ x^2y -x^3y+xy^2-x^2y^2+y^3-xy^3-y^4\ )$

Vậy ta có

$0 = x^5 - x^4 + 2x - y^5 + y^4 - 2y$

$=(-x+y)\ (-2+x^3-x^4+x^2y -x^3y + xy^2 -x^2y^2 + y^3 - xy^3 - y^4\ )$

$= (x-y)[2+x^3(x -1) + x^2y(x -1) + xy^2(x -1) + y^3(x -1) + y^4]$

Vì x và y trong $[1, \infty)$ nên

$[2 + x^3(x-1) + x^2y(x-1) + xy^2(x-1) + y^3(x-1) + y^4] > 0$

Suy ra $x = y$ và f là một đơn ánh.

CHỨNG MINH f KHÔNG LÀ ĐƠN ÁNH

Để chứng minh f không là một đơn ánh ta phải tìm x và y trong A sao cho $x \neq y$ và $f(x) = f(y)$. Thông thường ta đoán ra x và y.

Nếu không thấy ngay, ta nên giải phương trình $f(x) - f(y) = 0$ và nên lưu ý : phương trình này có một nghiệm là $x = y$, nên ta để ý là $f(x) - f(y)$ có thể phân tách thành thừa số trong đó có $(x - y)$.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = x^2 + 2x + 3$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$. *Khảo sát sự đơn ánh của* f.

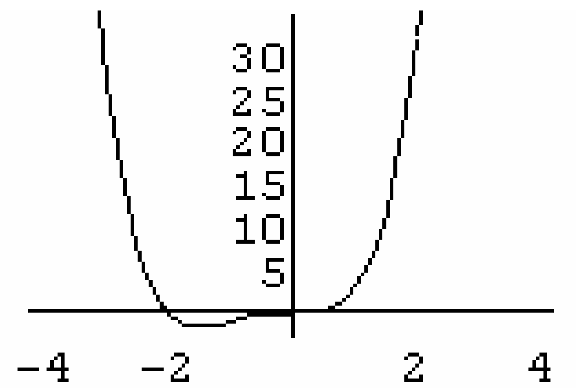
$$f(x) - f(y) = x^2 + 2x - y^2 - 2y = (x^2 - y^2) + 2(x - y)$$
$$= (x - y)(x + y + 2).$$

Từ đó ta thấy $f(0) = f(-2)$ và f không đơn ánh.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = x^4 + 2x^3$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$. *Khảo sát sự đơn ánh của f.*

Ta dùng Mathematica để đoán hướng giải bài toán như sau

In[1]:= Plot[$x^4 + 2x^3$, {x, -4, 4}]



Từ đây ta thấy *f* không là một đơn ánh.Tuy nhiên, ta không thể chỉ nhìn trên đồ thị mà nói được. Ta tiếp tục dùng Mathematica như sau

In[2]:= Solve[$x^4 + 2x^3$ == 0, x]

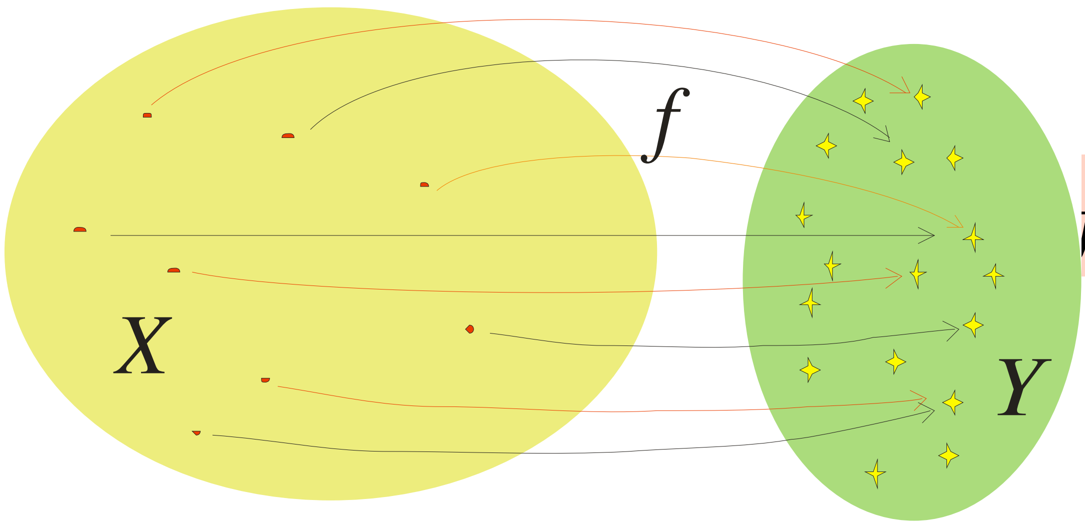
Out[2]:= {{ x -> -2 }, {x -> 0}, {x -> 0 }, {x -> 0}}

Vậy phương trình $x^4+2x^3= 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và x =-2, do đó $f(0)= f(-2)= 0$ và f không đơn ánh.

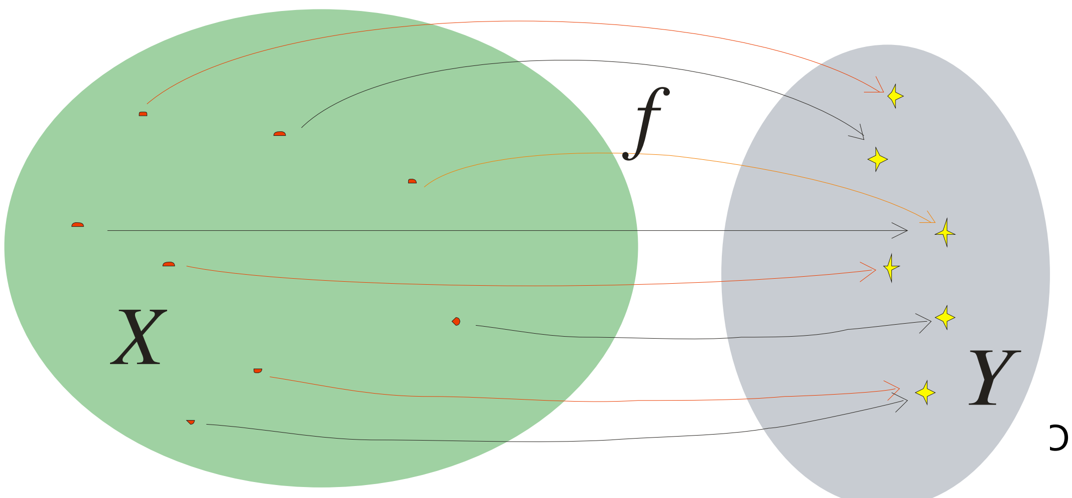
Một công ty du lịch định hướng tìm các tours du lịch thích hợp với một số đối tượng có khả năng chi cho du lịch những mức khác nhau.

Các mức chi tiêu có thể có của các đối tượng mà công ty lưu tâm được mô hình là một con B của tập hợp các số nguyên dương. Các tours du lịch có giá tiền được liệt kê trong B được mô hình như một tập hợp A . Vấn đề được mô hình như sau : nếu $f(x)$ là giá của một tour x, thì ta phải tìm tập A sao cho với mọi y trong B đều có một x trong A sao cho $f(x) = y$.

Định nghĩa . Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một toàn ánh nếu và chỉ nếu $f(X) = Y$,



f không là toàn ánh

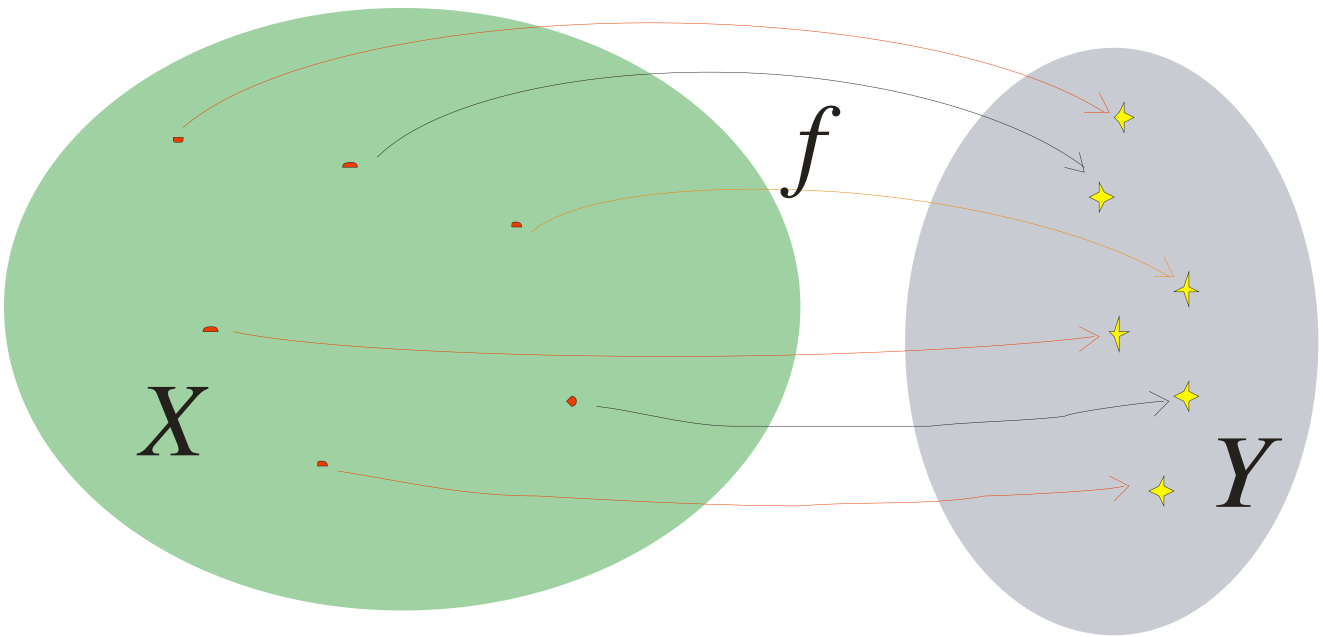


f là toàn ánh

Trong một thử nghiệm người ta quan sát số virus trong một môi trường theo thời từng thời gian định trước. Mặt khác chúng ta cũng muốn xác định các thời điểm để số lượng virus trong môi trường đó đạt đến các số lượng định trước.

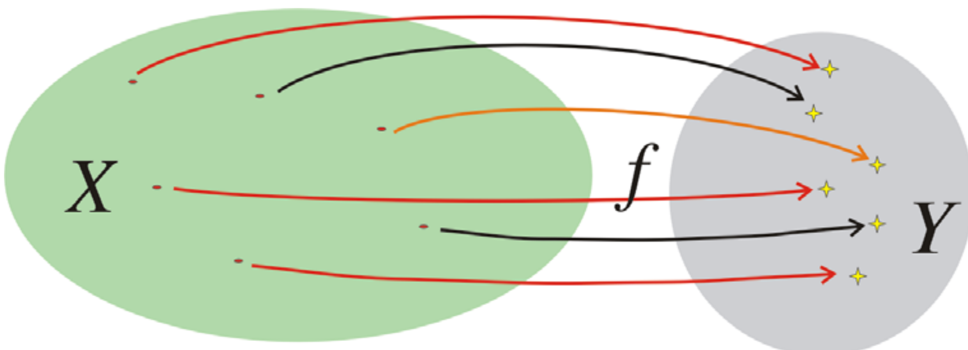
Chúng ta mô hình các việc trên như sau, mô hình thời gian quan sát như một khoảng $A = [c, d]$, và số virus được quan sát là một tập hợp B các số nguyên dương $\{n_0, n_0 +1, . . . , N\}$. Việc quan sát số virus trong một môi trường theo thời từng thời gian được mô hình như một ánh xạ f từ A vào B. Việc quan sát thời điểm có một số nào đó lượng virus trong môi trường được mô hình như một ánh xạ g từ B vào A.

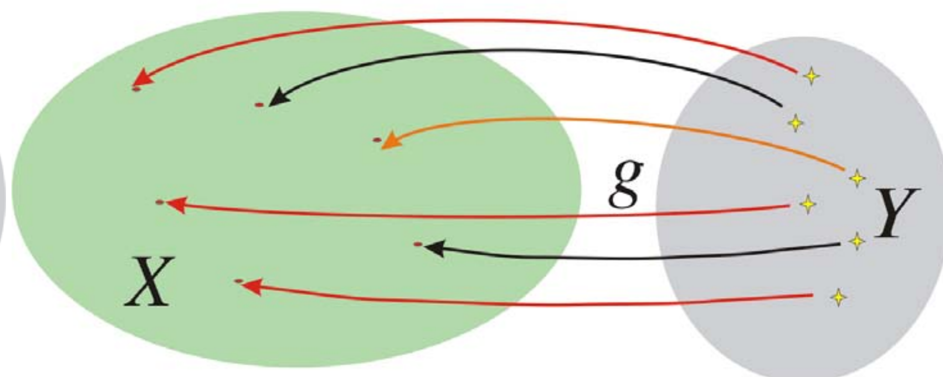
Định nghĩa . Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một song ánh nếu và chỉ nếu f đơn ánh và toàn ánh.

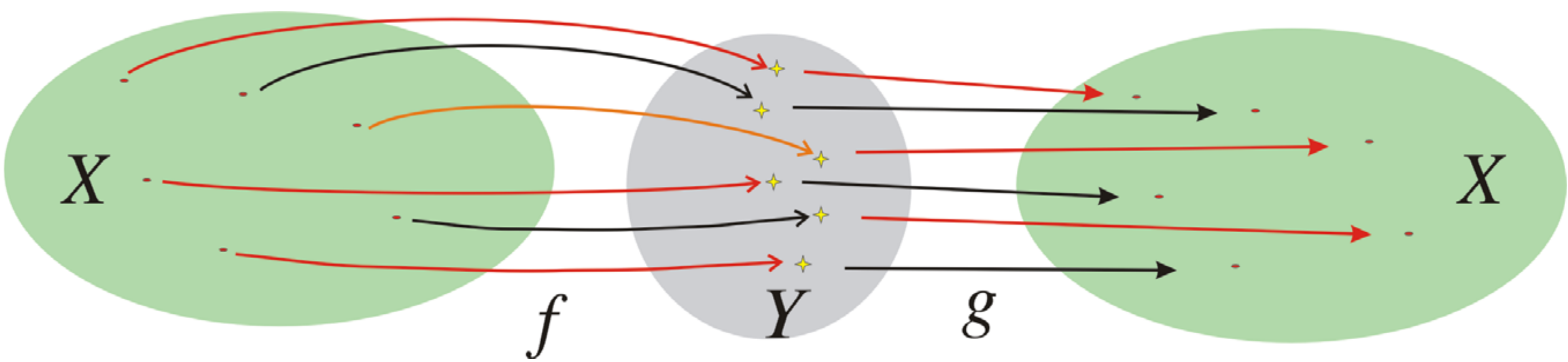


f là song ánh

Định nghĩa. Cho f là một song ánh từ X vào Y. Với mọi $y \in Y$ ta có duy nhất một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, đặt $g(y) = x$. Ta thấy g là một ánh xạ từ Y vào X có tính chất sau : $gof\,(x) = x$ và $fog(y) = y$ với mọi $x \in X$ và với mọi $y \in Y$. Ta nói g là ánh xạ ngược của f và thường ký hiệu là f^{-1}.







CHƯƠNG BA

SỐ NGUYÊN VÀ SỐ HỮU TỈ

A. SỐ NGUYÊN - PHÉP CỘNG

Ta xét các bài toán sau: tạo ra lịch cho năm sau (danh sách các ngày và các thứ tương ứng, liên kết ngày dương lịch và ngày âm lịch), tính số cửa sổ để xây một căn nhà, số ngày hoc sinh đến trường hằng năm, số cá có thể nuôi trong một diện tích nào đó, chỉ tiêu tuyển sinh của một đại học. . .

Để mô hình các bài toán bên trên, chúng ta cần một tập hợp con số. Ta không thể có khái niệm : nửa con cá, nửa sinh viên, ta cần khái niệm “nguyên”.

Tập hợp các con số nguyên này gồm có các phần tử nào đó. Tùy theo địa phương nó có nhiều tên, thí dụ có một phần tử được gọi bằng nhiều cách : hai, nhi, dzì, deux, two, ni, ... Chúng còn được ký hiệu theo nhiều cách còn được ký hiệu bằng nhiều cách, thí dụ một phần tử trong tập đó có các ký sau : 12, XII, 1100 (cơ sở nhị phân) . . .

Có thể đồng nhất tập số nguyên với các số đếm hay không? Nếu chúng ta đếm tất cả các sự vật mà chúng ta biết, gọi số đó là M, thì số $M+1$ tuy không là số chúng ta đã dùng để đếm, nhưng nó rõ ràng là một số nguyên! Như vậy khó mà để tìm tập hợp tất cả số nguyên trong thiên nhiên.

Chúng ta chạm đến một hình ảnh diển tả rất khéo câu sau đây của Lảo tử :

" Đạo khả đạo, phi thường đạo; danh khả danh, phi thường danh"

"Đạo mà diển giải được thì không phải đạo vĩnh cửu bất biến, tên mà có thể đặt ra để gọi nó [đạo] thì không phải tên vĩnh cửu bất biến ".

(Nguyễn Hiến Lê dịch)

Ở đây chúng ta thấy sức mạnh trí tuệ loài người, đặt ra một cái gì đó (tập hợp các số nguyên) không có sẵn trong tự nhiên, dùng cái đó để giải quyết các vấn đề có thực trong tự nhiên : dùng các tiền đề để định nghĩa tập các số nguyên.

Ông Peano định nghĩa tập số nguyên dựa vào tính thực tiển của các số (cách đếm sự vật, phải có một số đầu tiên, sự nối tiếp các số đếm) và "một tính chất không dể chấp nhận lắm" (tiên đề IV).

Các tiên đề Peano về tập các số nguyên dương :

Có một tập hợp $\mathbb{N}$ cùng với các tính chất sau

I. Với mỗi phần tử x trong $\mathbb{N}$ có một phần tử đươc ký hiệu là $S(x)$ trong $\mathbb{N}$, được gọi là phần tử kế tiếp của x.

II. Cho x và y là hai phần tử trong $\mathbb{N}$ sao cho

$$S(x) = S(y) \text{ thì } x = y.$$

III. Có một phần tử trong $\mathbb{N}$ đươc ký hiệu là 1 sao cho 1 không là phần tử kế tiếp của một phần tử nào trong $\mathbb{N}$.

IV. Cho U là một tập hợp con của $\mathbb{N}$ sao cho $1 \in U$ và $S(x) \in U$ với mọi $x \in U$. Lúc đó $U = \mathbb{N}$.

Tập hợp $\mathbb{N}$ *duy nhất theo nghĩa sau : nếu có tập* $\mathbb{N}$' *thỏa bốn tiên đề Peano với phần tử đầu tiên là* 1', *thì có một song ánh* f *từ* $\mathbb{N}$ *vào* $\mathbb{N}$' sao cho $f(1) = f(1')$ *và* $S(f(n)) = f(S(n))$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa. Với bốn tiên đề này ta xác định số 2 như là $S(1)$, số 3 như là $S(2)$, số 4 như là $S(3)$,... ta sẽ có mọi số thường dùng để đếm

Định nghĩa. Ta có phép cộng trên $\mathbb{N}$ như sau :

$n + 1 = S(n)$, $n + 2 = S(n+1)$, $n + 3 = S(n+2)$,.... $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Định nghĩa. Ta xác định phép nhân trên $\mathbb{N}$ như sau :

$1.n = n$, $2.n = n + n$, $3.n = 2.n + n$,..... $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ông Peano đã đóng góp một ý toán rất quan trọng : $\mathbb{N}$ không chỉ là một tập hợp chứa các số nguyên dương, mà trong $\mathbb{N}$ còn có một cấu trúc logic "*phần tử kế tiếp*". Chính cấu trúc logic này xác định các phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{N}$ và quan hệ thứ tự sau đây trên $\mathbb{N}$.

Định nghĩa. Ta có một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$ như sau : cho m và n trong $\mathbb{N}$, ta nói

- $n > m$ (hay $m < n$) nếu và chỉ nếu $n = m + r$ với một r nào đó trong $\mathbb{N}$,
- $n \geq m$ (hay $m \leq n$) nếu và chỉ nếu $n = m$ hoặc $n > m$.

Định lý. *Định nghĩa các phép* $+$ *và* $.$ *và quan hệ* $\geq$ *trong* $\mathbb{N}$ *như trên. Ta có với mọi* m, n, p *và* q *trong* $\mathbb{N}$

(i) $m+n = n+m$, $n.m = m.n$ *và* $m.(n+p) = m.n + m.p$,

(ii) $\geq$ *là một quan hệ thứ tự toàn phần trên* $\mathbb{N}$.

(iii) *nếu* $m \geq n$ và $p \geq q$, *thì*

$$m+p \geq n+q \quad \text{và} \quad mp \geq np.$$

(iv) *Cho* A *là một tập con khác trống trong* $\mathbb{N}$, *lúc đó có* z *trong* A *sao cho* $n \geq z$ *với mọi* n *trong* A (*ta nói* A *có cực tiểu*).

Các tiên đề của Peano (tương đối khá tự nhiên) giúp chúng ta sẽ làm toán cộng và toán nhân có lý luận chặc chẽ hơn! Ngoài ra các tiên đề này còn cho ta một cách chứng minh đặc biệt : *qui nạp toán học*.

Định lý. *Cho* $A \subset \mathbb{N}$ *và* $p \in A$. *Giả sử* $S(n) \in A$ *nếu* $n \in A$. *Lúc đó* $\{m \in \mathbb{N} : m \geq p\} \subset A$.

B. PHÉP QUI NẠP TOÁN HỌC

Khi ta quan sát không phải một hiện tượng, một tính chất mà cả một dãy hiện tượng hoặc một dãy tính chất $\{P_n\}$ với n là các số nguyên dương, ta có thể dùng phép qui nạp toán học để chứng minh P_n đúng với mọi $n \geq N$ chỉ cần hai bước như sau :

- Chứng minh P_n đúng với $n = N$,
- Cho k là một số nguyên dương $k \geq N$. Giả sử P_k đúng, chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

Nếu làm được hai điều trên, ta kết luận P_n đúng với mọi $n \geq N$.

Bài toán 5. *Cho* $n \in \mathbb{N}$. *Đặt* $X_n = 1 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Chứng minh $X_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Đặt $P(n)$ là " $X_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ". Ta thấy $P(1)$ đúng

Giả sử $P(k)$ đúng với một $k \geq 1$, ta có $X_k = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

$$X_{k+1} = X_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)^2[k^2 + 4k + 4] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Vậy theo qui nạp toán học $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$.

Bài toán 6. *Cho m và n là hai số nguyên dương. Giả sử có một đơn ánh f từ* $\{1, . . . ,m\}$ *vào* $\{1, . . . ,n\}$. *Chứng minh* $m \leq n$.

Nếu $m = 1$. Ta có $m \leq n$ (thật ra không cần giả thiết về f)

Giả sử kết quả đúng khi $m = k$.

Nếu có một đơn ánh f từ $\{1, . . . , k\}$ *vào* $\{1, . . . , n\}$.
Thì $k \leq n$

Giả sử có một đơn ánh f từ $\{1,. . . , k+1\}$ *vào* $\{1,. . . , n\}$. *Chứng minh* $k+1\leq n$.

Giả sử có một đơn ánh g từ $\{1,. . . , k+1\}$ *vào* $\{1,. . . , p\}$. *Chứng minh* $k+1\leq p$.

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,\ldots, k\}$ *vào* $\{1,\ldots,n\}$. *Thì* $k \leq n$

Giả sử có một đơn ánh g *từ* $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k+1 \leq p$.

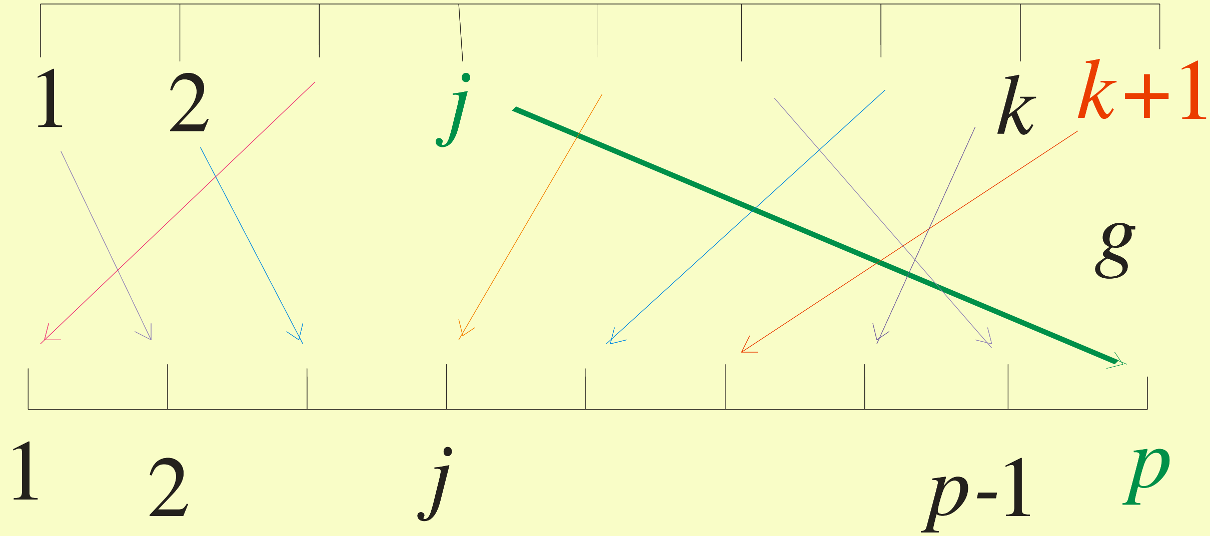
Giả sử có một đơn ánh g *từ* $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k \leq p - 1$.

• $g(\{1,\ldots,k\}) \subset \{1,\ldots, p-1\}$ dùng giả thiết qui nạp

•• $g(\{1, \ldots, k\})$ không chứa trong $\{1, \ldots, p - 1\}$.

•• $\exists\, j \in \{1,\ldots, k\}$

sao cho $g(j) = p$

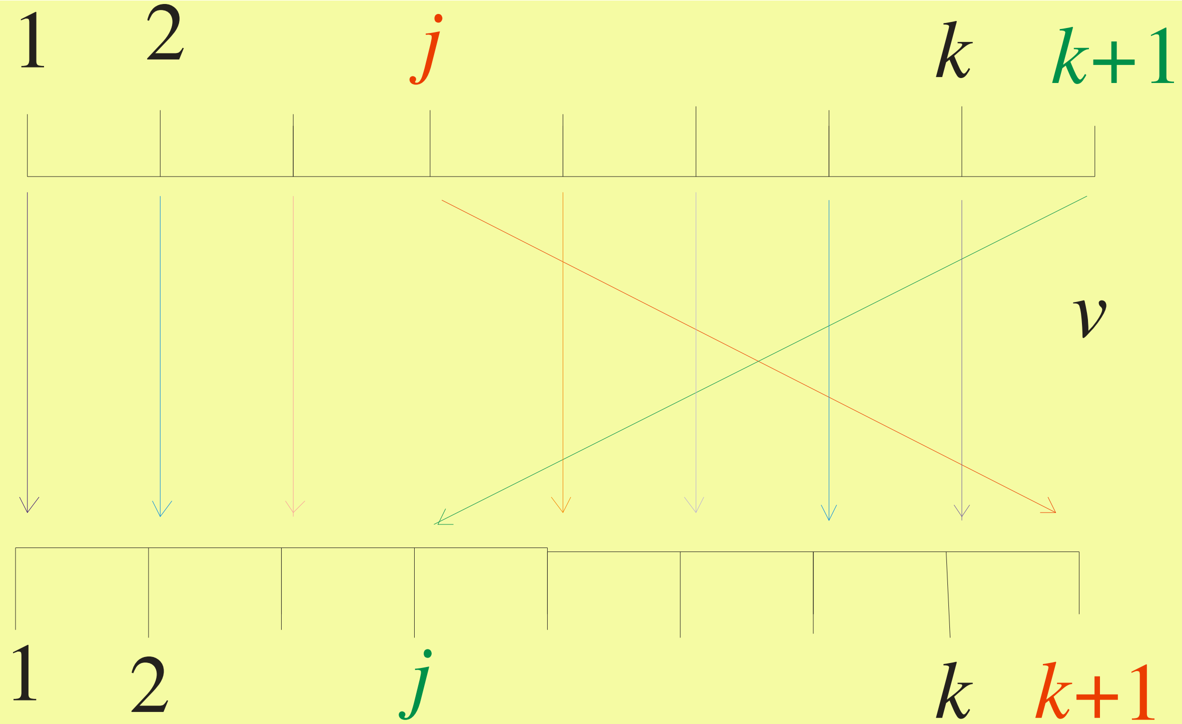


Nếu có một đơn ánh f từ $\{1, \ldots, k\}$ *vào* $\{1, \ldots, n\}$ *.*
Thì $k \le n$

Giả sử có một đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$ *. Chứng minh* $k \le p - 1$.

• • $\exists\, j \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho $g(j) = p$

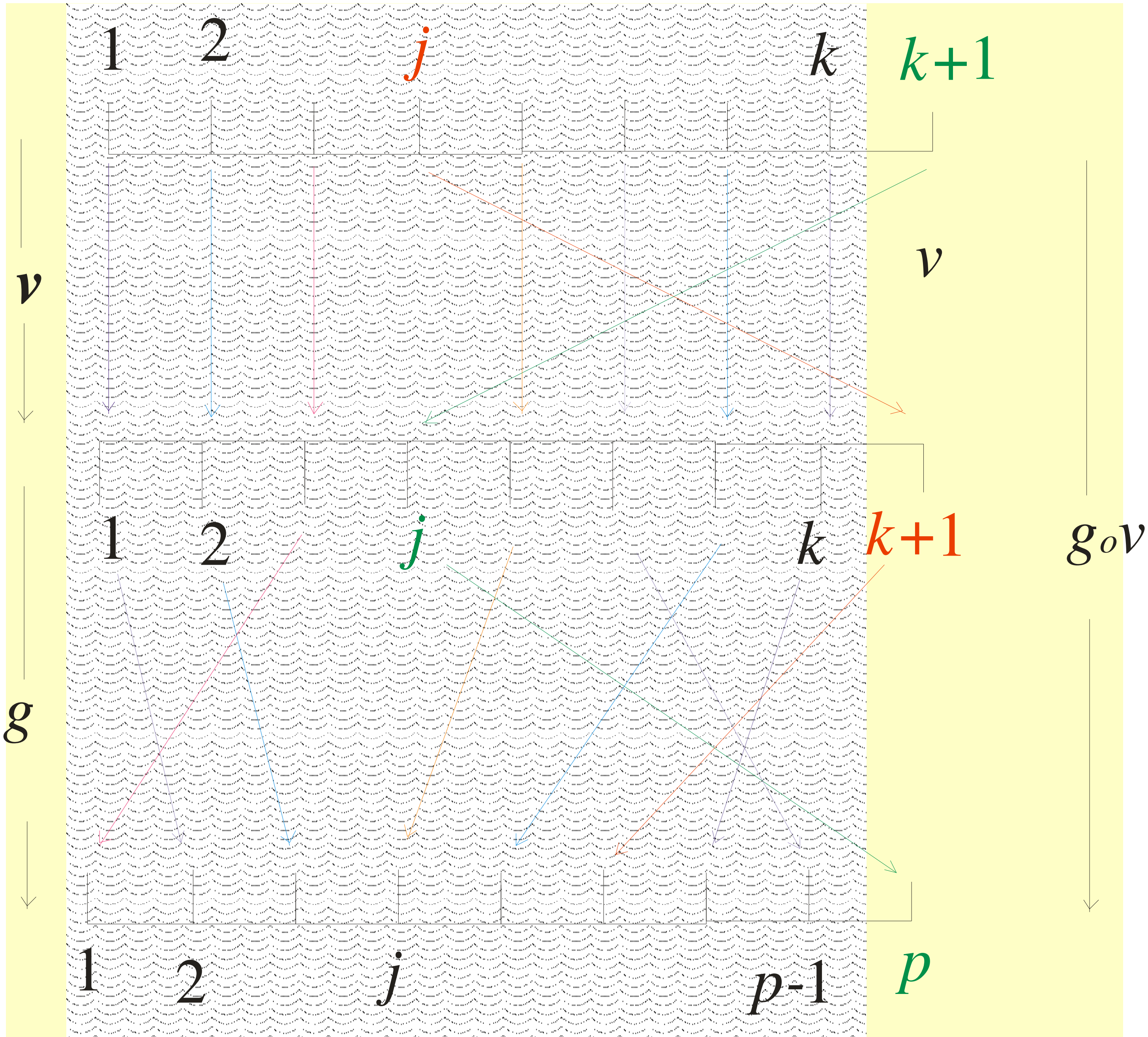
Để đưa về trường hợp • , ta đặt ánh xạ v như trong hình vẽ



Ta có :

$g \circ v(k+1) = p$

$g \circ v$ là một đơn ánh



Do đó

$g \circ v(i) \leq p-1 \quad \forall\, i \leq k$

Thay thế g bằng $g \circ \boldsymbol{v}$, ta đưa về trường hợp đã xét.

Bài toán 7. *Cho m và n là hai số nguyên dương. Giả sử có một song ánh f từ* $\{1, . . . , m\}$ *vào* $\{1, . . . , n\}$*. Chứng minh* $m = n$.

f *là một đơn ánh từ* $\{1, . . . , m\}$ *vào* $\{1, . . . , n\}$*. Do đó* $m \leq n$

f^{-1} *là một đơn ánh từ* $\{1, . . . , n\}$ *vào* $\{1, . . . , m\}$*. Do đó* $n \leq m$

Dùng kết quả này, ta có thể định nghĩa "hữu hạn"

Dùng kết quả này, ta có thể định nghĩa “hữu hạn”

Định nghĩa. Cho A là một tập hợp khác trống, ta nói A có *m phần tử* nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ tập hợp $\{1, 2, 3, \cdots, m\}$ vào A. Lúc đó ta nói tập hợp A *có hữu hạn phần tử*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, shift left, "g^{-1}"] & \\ \{1,\dots,m\} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g^{-1}\circ f"'] & & \{1,\dots,n\} \arrow[ul, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

Định nghĩa. Cho A là một tập hợp khác trống, ta nói

- A có *n phần tử* nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ tập hợp $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ vào A. Lúc đó ta nói tập hợp A *có* hữu hạn phần tử.

- A là một tập hợp vô hạn đếm được (hoặc vắn tắt là đếm được) nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào A.

- A là một tập hợp quá lắm đếm được nếu và chỉ nếu A *có* hữu hạn phần tử hoặc vô hạn đếm được .

- A là một tập hợp vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A không hữu hạn và không vô hạn đếm được .

Bài toán 8. Đặt $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ là họ tất cả các tập hợp con của $\mathbb{N}$. Chứng minh $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ là một tập vô hạn không đếm được.

A là một tập hợp vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A không hữu hạn và không vô hạn đếm được .

Dùng phản chứng

A *không* là tập hợp vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A hữu hạn hoặc A vô hạn đếm được .

$\mathscr{P}(\mathbb{N}) \supset \{ \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \ldots\}$: không hữu hạn

Giả thiết phản chứng : $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ vô hạn đếm được .

Giả sử $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ vô hạn đếm được

A là một tập hợp vô hạn đếm được nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào A.

Có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào $\mathscr{P}(\mathbb{N})$

Đặt $f(n) = A_n$

$\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$

Để dễ xử lý các tập con của $\mathbb{N}$, ta tương ứng mỗi tập con B của $\mathbb{N}$ bằng một hàm số sau

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in B, \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{N} \setminus B. \end{cases}$$

$$B' = B \Leftrightarrow \chi_{B'} = \chi_B$$

χ_B được gọi là hàm đặc trưng của B

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } x \in B, \\ 0 & \textit{nếu } x \in \mathbb{N} \setminus B. \end{cases}$$

$$B' = B \Leftrightarrow \chi_{B'} = \chi_B$$

Vậy có một song ánh từ $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ vào $F = \{\chi_B \ : \ B \subset \mathbb{N}\}$

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \arrow[dr, "\chi_{A_n}"] & \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "A_n"] \arrow[rr, "n"'] & & F \end{tikzcd}$$

$$E = \{\chi_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$E = F$$

$$\text{Đặt } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \chi_{A_n}(n) = 1, \\ 1 & \text{nếu } \chi_{A_n}(n) = 0. \end{cases}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : g(n) = 1\}$$

$$g = \chi_B \in F$$

$$g \neq \chi_{A_n} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

$$g \notin E = \{\chi_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$E \neq F$$

C. CÁC TẬP HỢP $\mathbb{Z}$ VÀ $\mathbb{Q}$

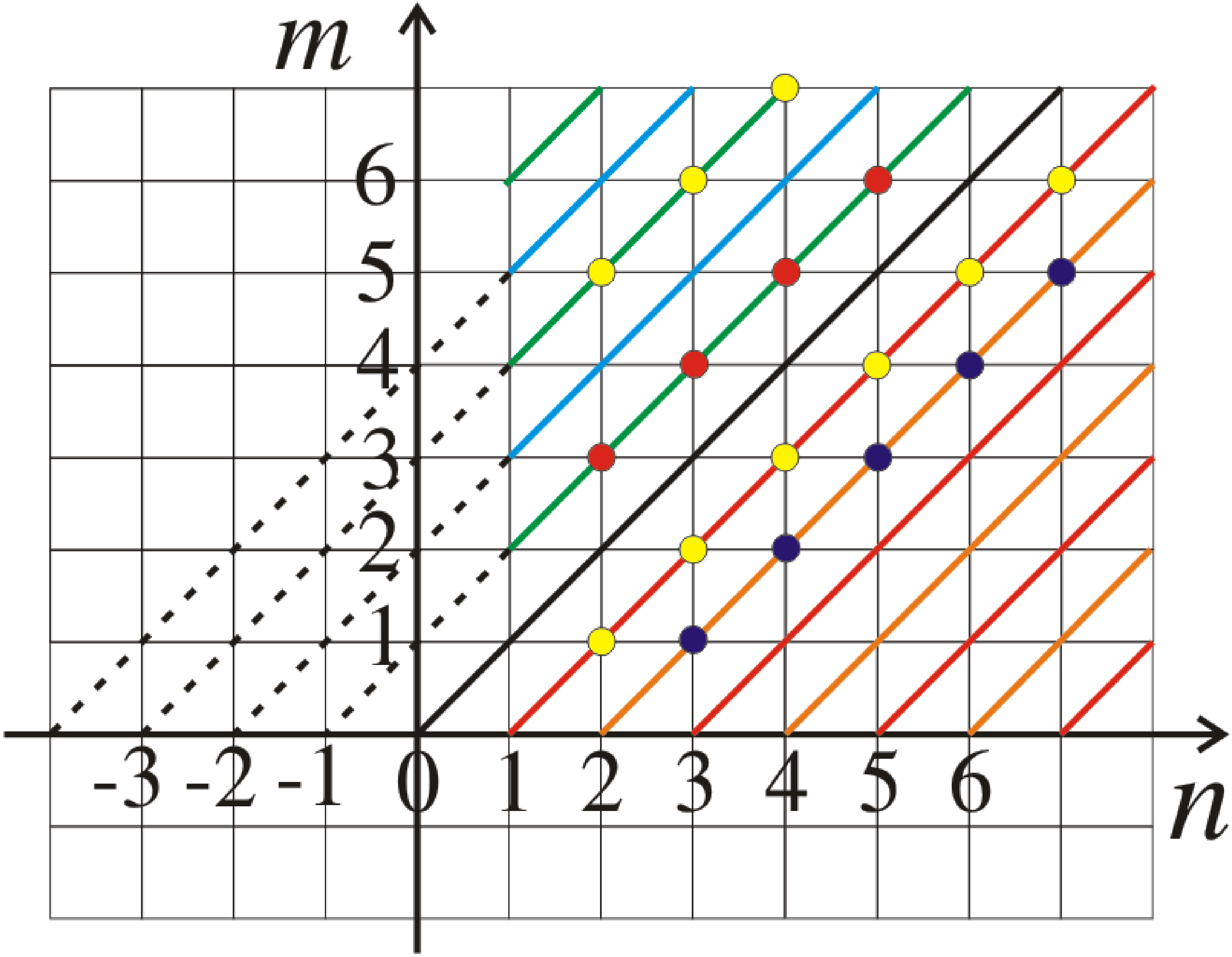
Cho m và n trong $\mathbb{N}$, xét phương trình $n = x + m$.

• $n > m$: theo định nghĩa ta có một số nguyên r sao cho $n = m + r$. Vậy ta chọn $x = r$.

• $n < m$: theo định nghĩa ta có một số nguyên s sao cho $m = n + s$. Vậy "m bớt đi s" $= n$. Trong toán học ta ký hiệu "bớt đi s" là $-s$.

Phương trình này làm nảy sinh tập hợp các số nguyên âm $\{-q : q \in \mathbb{N}\}$

Đặt $\mathbb{Z} = \{-q : q \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ và gọi $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên.



$3 = x + 1$

$4 = x + 2$

$5 = x + 3$

$6 = x + 4$

$7 = x + 5$

$2 = z + 5$ $3 = z + 6$ $4 = z + 7$

Nếu $m \in \{-q : q \in \mathbb{N}\}$ ta nói m là *một số nguyên âm* và viết $m < 0$, nếu $m \in \mathbb{N}$ ta nói m là *một số nguyên dương* và viết $m > 0$.

Với số nguyên m ta đặt $\mathrm{sign}(m)$ như sau và gọi đó là dấu của m

$$\mathrm{sign}(m) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } m > 0 , \\ 0 & \text{nếu } m = 0 , \\ -1 & \text{nếu } m < 0 . \end{cases}$$

Đặt $0.m = m.0 = 0$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$

Mọi số nguyên m có thể viết thành $\mathrm{sign}(m)\, m'$ với một m' trong $\mathbb{N}$.

Trên $\mathbb{Z}$ ta có các định nghĩa sau đây : với mọi m, n, p và q trong $\mathbb{Z}$

- $-m = -\operatorname{sign}(m)|m|$, $m + (-m) = 0$, $0 + m = m$
- $m+n = \operatorname{sign}(m)[|m| + |n|]$ nếu $\operatorname{sign}(m) = \operatorname{sign}(n)$
- $m+n = \operatorname{sign}(m)[|m|-|n|]$ nếu $\operatorname{sign}(m) \neq \operatorname{sign}(n)$, $|m| \geq |n|$
- $m+n = \operatorname{sign}(n)[|n|-|m|]$ nếu $\operatorname{sign}(m) \neq \operatorname{sign}(n)$, $|n| \geq |m|$
- $0.m = 0$
- $n.m = |m|.|n|$ nếu $\operatorname{sign}(m) = \operatorname{sign}(n)$
- $n.m = -|m|.|n|$ nếu $\operatorname{sign}(m) \neq \operatorname{sign}(n)$
- $m > n$ nếu và chỉ nếu $m - n \in \mathbb{N}$
- $m \geq n$ nếu và chỉ nếu $m = n$ hoặc $m > n$.

Định lý. *Định nghĩa các phép cộng* + và nhân. và quan hệ $\geq$ trong $\mathbb{Z}$ *như trên*. Ta có với mọi m, n, p, *và* q *trong* $\mathbb{Z}$.

(i) $m+n = n+m$, $n.m = m.n$ *và* $m.(n + p) = m.n + m.p$,

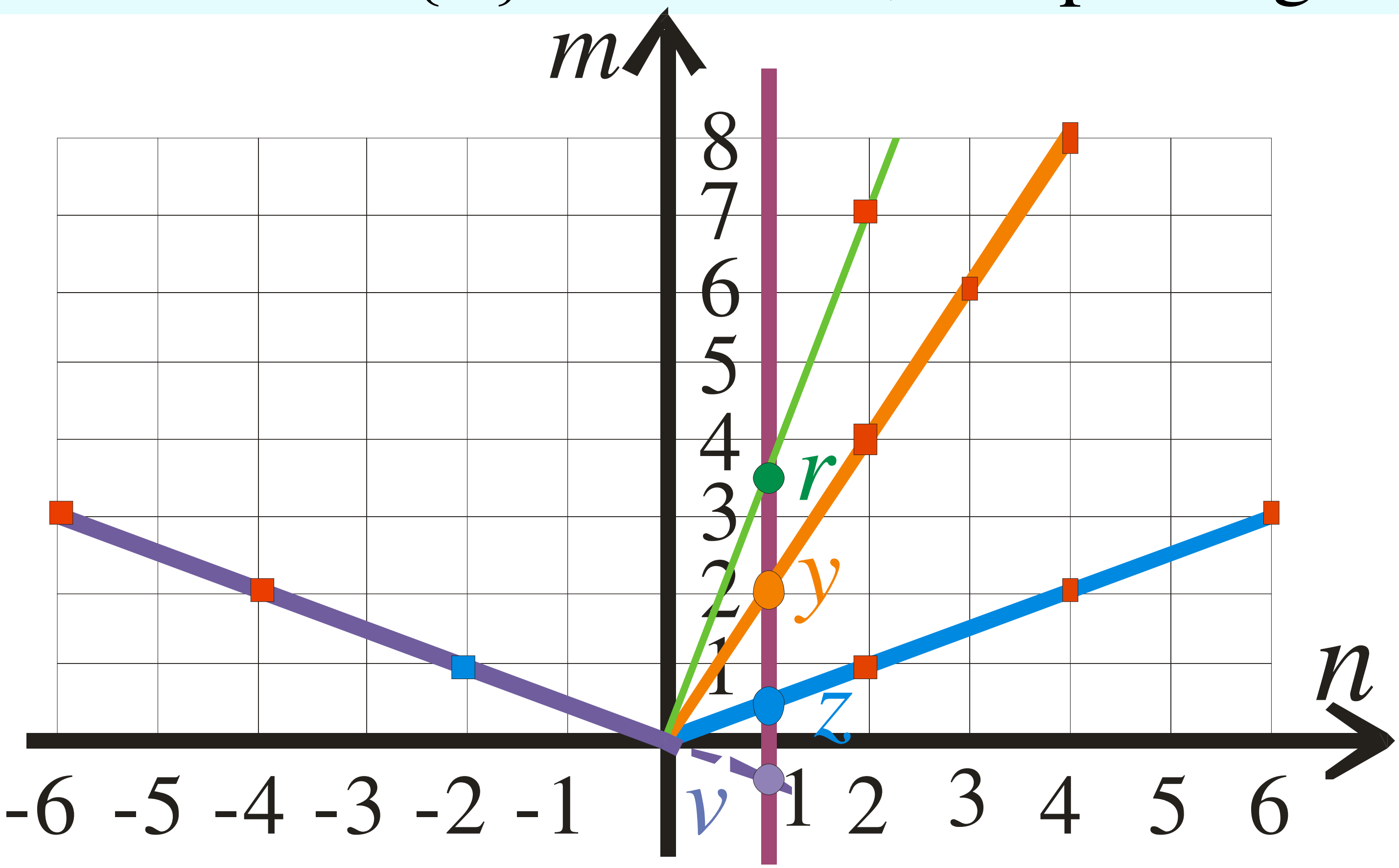
(ii) $\geq$ *là một quan hệ thứ tự toàn phần trên* $\mathbb{Z}$.

(iii) *nếu* $m \geq n$, $p \geq q$ và $r \geq 0$, thì

$$m + p \geq n + q \text{ và } mr \geq nr.$$

(iv) $|m| \geq m$

Cho $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và $m \in \mathbb{Z}$, xét phương trình $nx = m$.



$-6.p = 3$

$-4.p = 2$

$1.q = 2$

$2q = 4$

$4.r = 2$

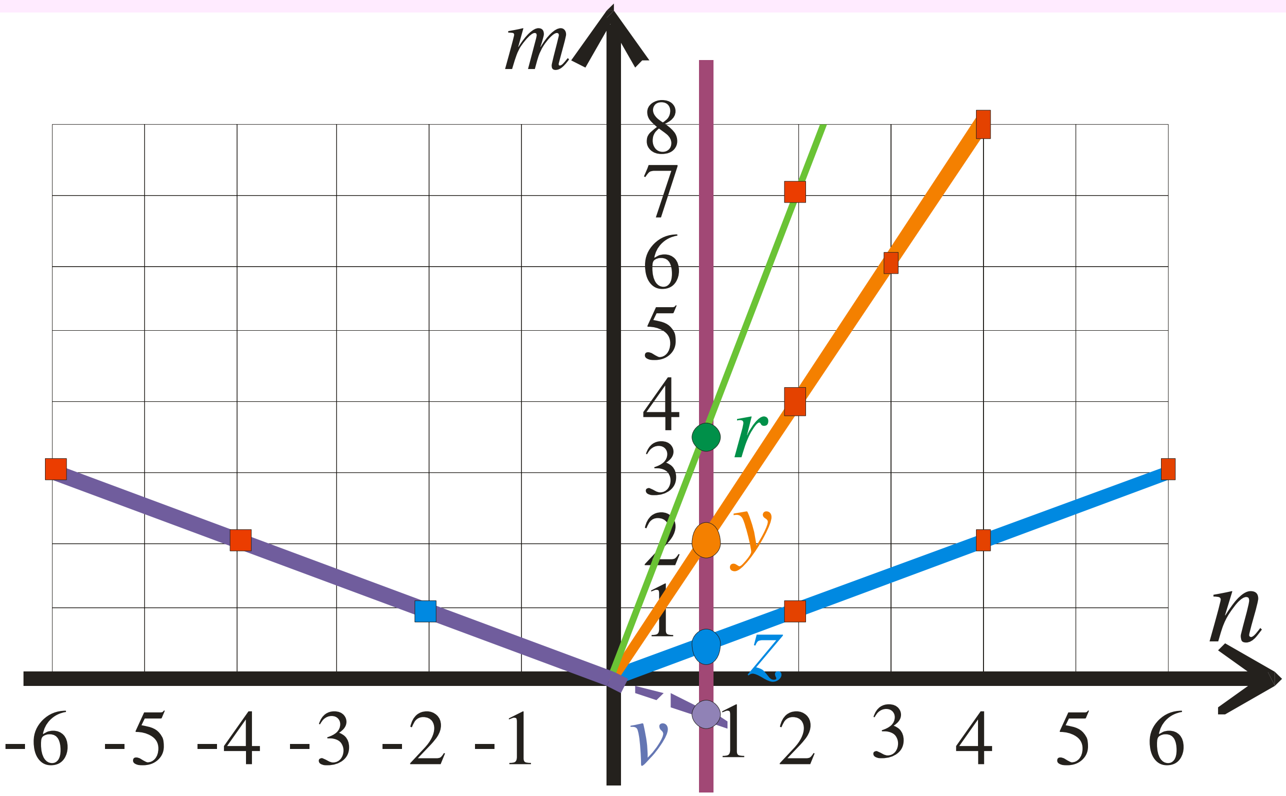
$6.r = 3$

Phương trình này có thể không có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ (thí dụ $4x = 2$). Nhưng ta có thể coi (n,m) như là một nghiệm của nó và xét tập hợp $\mathbb{Q}$ xác định như sau

Xét $X = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\times\mathbb{Z} = \{(n,m) : n\in\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và $m\in\mathbb{Z}\}$

Trên X ta định nghĩa quan hệ R như sau $(n,m)\mathcal{R}(n',m') \Leftrightarrow n.m' = n'.m$

Ta chứng minh được $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương. Ta đặt Q là tập thương $X/\mathcal{R}$.



Ta ký hiệu lớp tương đương của (n,m) là $\dfrac{m}{n}$ và ta gọi đó là một số hữu tỉ.

$-6.x = 3$

$-4.x = 2$

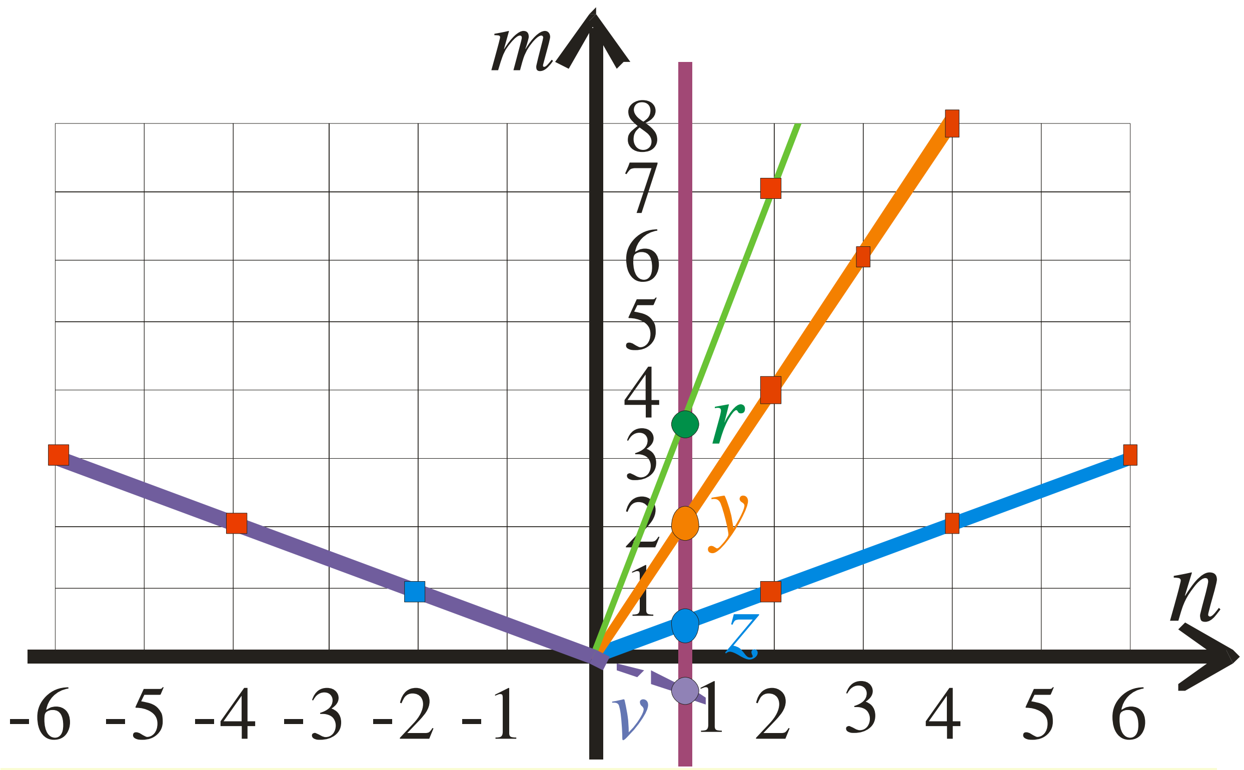
$2.y = 2$

$4.y = 4$

CH

$4.z = 2$

$6.z = 3$



Vì 2.6 =3.4 nên $(4,2)\mathscr{R}(6,3)$. Do đó $\dfrac{2}{4}$ và $\dfrac{3}{6}$ chỉ là một số hữu tỉ z.

$$r = \frac{3}{2}\ ,\ \ y = 2\ ,\ \ z = \frac{1}{2}\ ,\ \ v = -\frac{1}{2}$$

Như vậy một số hữu tỉ có thể được viết ra nhiều dạng khác nhau, mỗi dạng của nó là một *phân số* $\dfrac{m}{n}$, trong đó m được gọi là tử số và n được gọi là mẫu số.

- $\dfrac{m}{n} = \dfrac{km}{kn}$ với mọi số hữu tỉ và với mọi $k \in \mathbb{N}$.
- đồng nhất m với $\dfrac{m}{1}$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$, ta có $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- nếu $p = \dfrac{m}{n} \neq 0$ thì $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và ta có thể

xét số hữu tỉ $\dfrac{n}{m}$, ta ký hiệu $\dfrac{n}{m}$ là p^{-1}.

- vì $(n,m)\,\mathscr{R}\,(|n|, \mathrm{sign}(n)\, m)$, ta có thể viết các số

hữu tỉ ở dạng $\dfrac{r}{s}$ với $s \in \mathbb{N}$ và $r \in \mathbb{Z}$.

Định nghĩa . Cho các số hữu tỉ $\dfrac{m}{n}$ và $\dfrac{r}{s}$ với n và $s \in \mathbb{N}$ và m và $r \in \mathbb{Z}$. Ta định nghĩa

$$\frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{ms+nr}{ns} \quad , \quad \frac{m}{n}.\frac{r}{s}=\frac{mr}{ns}$$

$$\left|\frac{m}{n}\right|=\frac{|m|}{|n|}$$

$\dfrac{m}{n}>\dfrac{r}{s}$ nếu và chỉ nếu $ms > nr$

$\dfrac{m}{n}\geq\dfrac{r}{s}$ nếu và chỉ nếu $ms \geq nr$

Định lý . *Định nghĩa các phép cộng* + *và nhân*. *và quan hệ* $\geq$ *trong* $\mathbb{Q}$ *như trên. Ta có với mọi* m, n, p *và* q *trong* $\mathbb{Q}$ *và* $p \neq 0$

(i) $m + n = n + m$ *và* $m.(n + p) = m.n + m.p$,

(ii) $n.m = m.n$ *và* $p.p^{-1} = 1$,

(iii) *nếu* $m \geq n$ *và* $n \geq m$, *thì* $m = n$,

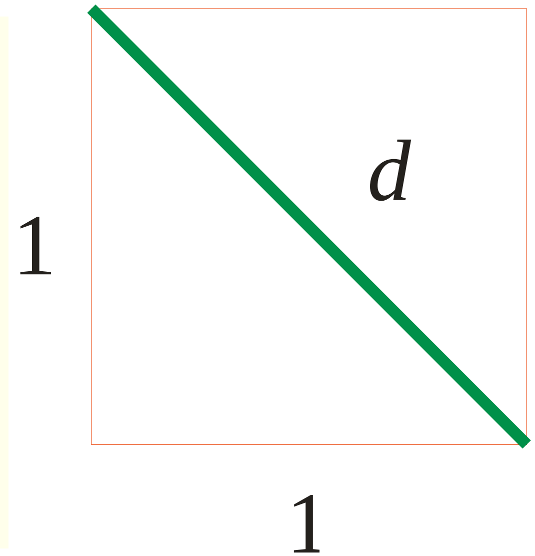
(iv) *nếu* $m \geq n$, $p \geq q$ *và* $r \geq 0$, thì $m + p \geq n + q$ và $mr \geq nr$. Nếu $m > n$ *và* $r > 0$, thì $mr > nr$.

(v) $|m| \geq m$.

CHƯƠNG BỐN

SỐ THỰC

Nếu chúng ta qui hoạch một con đường màu xanh trên một khu đất hình vuông có chiều dài mỗi cạnh là 1 km. Hỏi chúng ta nên ghi chiều dài d của con đường này là bao nhiêu trong dự án ?



Theo định lý Pythagore $d^2 = 2$. Trong các chương trước, chúng ta đã thấy không có số hữu tỉ nào bằng d cả. Con số d này có thực ngoài đời nhưng không thể tiếp cận bằng các lý luận bình thường ngoài đời như đếm số, chia phần (số nguyên và số hữu tỉ).

Trong Phụ lục A của quyễn “Giáo Trình Toán Giải Tích 1”, NXB Thống Kê, dùng khái niệm dãy Cauchy, chúng ta xây dựng được tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực *d* dựa vào tập các số nguyên như sau.

Định nghĩa. $\mathbb{R}$ *là một tập hợp trên đó ta xác định được*: *phép cộng* $(x,y) \to x+y$ *và phép nhân* $(x,y) \to xy$ *(đây là các ánh xạ từ* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *vào* $\mathbb{R}$) *và một quan hệ thứ tự toàn phần có các tính chất sau : với mọi* x, y, z và u trong $\mathbb{R}$

(R1) $x + y = y + x$,

(R2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(R3) có một phần tử 0 trong $\mathbb{R}$ sao cho $0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

(R4) có một phần tử $-x$ trong $\mathbb{R}$ sao cho $x + (-x) = 0$, (R1) $x + y = y + x$,

(R2) $x + (y + z) = (x+ y) + z$,

(R3) có một phần tử 0 trong ℝ sao cho $0 + x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(R4) có một phần tử $-x$ trong ℝ sao cho $x + (-x) = 0$,

(R5) $xy = yx$,

(R6) $x(yz) = (xy)z$,

(R7) có một phần tử 1 trong $\mathbb{R}$ sao cho $1x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(R8) nếu $x \neq 0$ có một phần tử x^{-1} trong ℝ sao cho $x^{-1}.x = 1$,

(R9) $x(y + z) = xy + xz$,

Bài toán 1 . Cho δ và η là hai số thực sao cho

$$x + \delta = x \quad \text{và} \quad x + \eta = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh $\delta = \eta$.

$x + \delta = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$x + \eta = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\delta = \eta$

$\delta = \delta + \eta = \eta + \delta = \eta$

Vậy phần tử 0 duy nhất

Bài toán 2 . Cho δ và η là hai số thực sao cho

$$\delta . x = x \quad \text{và} \quad \eta . x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh $\delta = \eta$.

$\delta . x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\eta . x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\delta = \eta$

$\delta = \delta . \eta = \eta . \delta = \eta$

Vậy phần tử 1 duy nhất

BÀI TOÁN 3 . Cho hai số thực x và y . Chứng minh

$$x + y = x \Rightarrow y = 0 .$$

$\boxed{x} + y = x$ $\boxed{}$ $y = 0$

$[x + y] + (-x) = x + (-x) = 0$

$0 = x + [y + (-x)] = x + [(-x) + y] = [x + (-x)] + y = 0 + y = y$

BÀI TOÁN 4. Cho một số thực x . Chứng minh $0.x = 0$

$0.x = (0).x = (0 + 0).x = 0.x + 0.x$ $0.x = 0$

BÀI TOÁN 5. Cho hai số thực x và y. Giả sử $x \neq 0$.
Chứng minh $x . y = 0 \Rightarrow y = 0$.

$y = (x^{-1}).(x . y) = (x^{-1}). 0 = 0.(x^{-1})$ $y = 0$

BÀI TOÁN 6. Cho một số thực x . Chứng minh

$$(-1).x = -x$$

(R4) $x + (-x) = 0$,

$$x + (-1).x = 1.x + (-1).x$$

$$1.x + (-1).x = [1 + (-1)].x = 0.x$$

Định nghĩa . Cho hai số thực x và y . Ta đặt

$$y - x = y + (-x)$$

(R10) $"x \le y$ và $y \le z" \Rightarrow "x \le z"$,

(R11) $"x \le y$ và $y \le x" \Rightarrow "x = y"$,

(R12) $x \le y$ hoặc $y \le x$,

(R13) $"x \le y$ và $z \le u" \Rightarrow "x + z \le y + u"$,

(R14) $"x \le y$ và $0 \le u" \Rightarrow "xu \le yu"$.

BÀI TOÁN 7 . Cho hai số thực x và y . Chứng minh

$$x \le y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le y - x$$

$x \le y \Rightarrow 0 \le y - x$ $\qquad$ $0 \le y - x \Rightarrow x \le y$

$\boxed{x} \le \boxed{y}$ $\qquad$ $\boxed{0} \le \boxed{y - x}$

$x + (-x) \le y + (-x)$ (Dùng (R13))

$0 \le y - x$

BÀI TOÁN 8 . Cho hai số thực x và y . Chứng minh

$$x \le y \quad \Rightarrow \quad -y \le -x$$

(1) $\boxed{x} \le y$

$\boxed{-y} \le -x$

$x \to -y \quad : \quad -y = x + (-x - y)$

(1) và (R13) : $x + (-x - y) \le y + (-x - y)$

Định nghĩa . Cho hai số thực x và y ta sẽ dùng các ký hiệu sau :

$x \ge y$ nếu và chỉ nếu $y \le x$,

$x > y$ nếu và chỉ nếu " $y \le x$ và $x \ne y$ ",

$x < y$ nếu và chỉ nếu " $y \ge x$ và $x \ne y$ ".

Định nghĩa . Cho hai số thực a và b , sao cho $a \le b$.
Ta đặt $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}$

Định nghĩa . Cho hai số thực a và b , sao cho $a < b$.
Ta đặt

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x < b \}$$

$$(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}$$

$$(a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \}$$

$$[a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \}$$

$$(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} : x \le b \}$$

Cho một số thực a ta đặt

$$|a| = \begin{cases} a & khi \ a \geq 0, \\ -a & khi \ a < 0. \end{cases}$$

Ta gọi $|a|$ là trị giá tuyệt đối của a.

BÀI TOÁN 9. Cho một số thực x. Chứng minh

$$x \leq |x|$$

- Nếu $x \geq 0$: $|x| = x$.

- Nếu $x \leq 0$: $|x| = -x$

Bài toán trở thành : nếu $\boxed{x \leq 0}$ chứng minh $x \leq -x$

Dùng bài toán 8 : $x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x$

BÀI TOÁN 10 . Cho một số thực x . Chứng minh

$$-|x| \leq x$$

- Nếu $x \geq 0$: $|x| = x$

Bài toán trở thành : nếu $\boxed{0 \leq x}$ chứng minh $-x \leq x$

Dùng bài toán 8 : $0 \leq x \Rightarrow -x \leq 0$

- Nếu $x \leq 0$: $|x| = -x$

Bài toán trở thành : nếu $x \leq 0$ chứng minh $-(-x) \leq x$

BÀI TOÁN 11 . Cho một số thực x . Chứng minh

$$\pm x \leq |x|$$

$$x \leq |x| \quad \text{và} \quad -x \leq |x|$$

BÀI TOÁN 12. Cho hai số thực x và y. Chứng minh

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

- Nếu $0 \leq x + y$: $|x+y| = x + y$

Bài toán trở thành : nếu $0 \leq x + y$ chứng minh

$$x + y \leq |x| + |y|$$

- Nếu $x + y \leq 0$: $|x+y| = -(x+y) = -x - y$

Bài toán trở thành : nếu $x + y \leq 0$ chứng minh

$$-x - y \leq |x| + |y|$$

Dùng bài toán 8 , bài toán 9 và (R13)

$-x \leq |-x| = |x|$

$-y \leq |-y| = |y|$

(R15) $\mathbb{R}$ chứa tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}$ và các số nguyên dương n chính là $1 + \cdots + 1$ (n lần).

(R16) Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} \equiv \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ chứa trong $\mathbb{R}$.

(R17) Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q} \equiv \{n^{-1}m : n \in \mathbb{N} \text{ và } m \in \mathbb{Z}\}$ chứa trong $\mathbb{R}$.

(R18) (*Tính chất Archimède*) Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương n sao cho

$$y < nx \quad . \quad (\text{hay } n^{-1}y < x)$$

(R19) (Tính trù mật của $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$) với mọi số thực x và mọi số thực dương ε ta tìm được p và q trong $\mathbb{Q}$ và r và s trong $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho

$$x - \varepsilon < p < x < q < x + \varepsilon \quad \text{và}$$

$$x - \varepsilon < r < x < s < x + \varepsilon.$$

Định nghĩa . Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$. Ta nói

• A là một tập *bị chặn trên* *nếu có một số thực* α sao cho

$$x \leq \alpha \qquad \forall x \in A ,$$

lúc đó α được gọi là một *chặn trên* của A .

• A là một tập *bị chặn dưới* *nếu có một số thực* β sao cho

$$\beta \leq x \qquad \forall x \in A ,$$

lúc đó β được gọi là một *chặn dưới* của A

• A là một tập *bị chặn* *nếu* A là một tập *bị chặn trên* và *bị chặn dưới*

Thí dụ 1 . Cho hai số thực a và b, sao cho $a < b$. Ta thấy

$(-\infty, b)$ là một tập bị chặn trên ,

(a, ∞) là một tập bị chặn dưới ,

$[a, \infty)$ là một tập bị chặn dưới

$(-\infty, b]$ là một tập bị chặn trên ,

(a, b) là một tập bị chặn ,

$[a, b)$ là một tập bị chặn ,

$(a, b]$ là một tập bị chặn .

(R20) Nếu A là một tập con khác trống và *bị chặn trên* trong $\mathbb{R}$, lúc đó có một số thực m_0 sao cho

(i) $x \leq m_0 \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì

$$m_0 \leq b$$

Lúc đó ta gọi m_0 là chặn trên nhỏ nhất của A và ký hiệu m_0 là $\sup A$.

(R21) Nếu A là một tập con khác trống và *bị chặn dưới* trong $\mathbb{R}$, lúc đó có một số thực k_0 sao cho

(i) $$k_0 \le x \qquad \forall\ x \in A,$$

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $b \le x$ với mọi $x \in A$, thì

$$b \le k_0$$

Lúc đó ta gọi k_0 là chặn dưới lớn nhất của A và ký hiệu k_0 là $\inf A$.

Bài toán 13 . Cho A là khoảng (0,1). Chứng minh

$$\sup A = 1$$

(i) $x \leq m_0 \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $m_0 \leq b$

Lúc đó ta gọi m_0 là chặn trên nhỏ nhất của A và ký hiệu m_0 là $\sup A$.

(i) $x \leq 1 \quad \forall x \in (0 , 1)$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in (0 , 1)$, thì $1 \leq b$

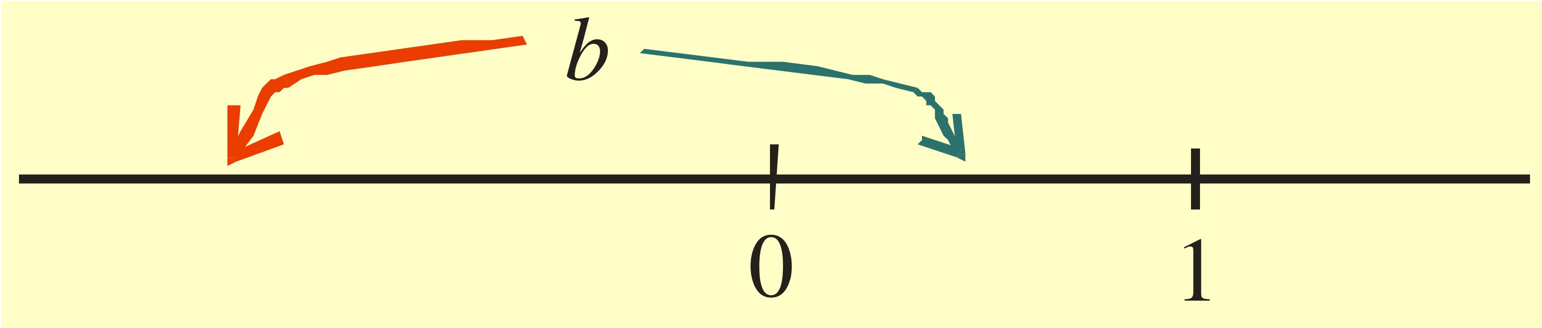
(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \le b$ với mọi $x \in (0, 1)$, thì $1 \le b$

$x \le b \quad \forall \ x \in (0, 1) \Rightarrow 1 \le b$

Đảo đề : " $P \Rightarrow Q$ " $\Leftrightarrow$ " $\sim Q \Rightarrow \sim P$ "

$b < 1 \Rightarrow \exists \ x \in (0, 1)$ sao cho $b < x$

$b < 1 \Rightarrow$ Tìm một $x \in (0, 1)$ sao cho $b < x$



• $b \in (0, 1)$: chọn $x = 2^{-1}(1 + b)$

• $b \in (-\infty, 0]$: chọn $x = 2^{-1}$

0

Bài toán 14 . Cho A là tập hợp $\{ n^{-1} : n \in \mathbb{N} \}$. Chứng minh

$$\inf A = 0$$

(i) $k_0 \leq x \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $b \leq k_0$

Lúc đó ta gọi k_0 là chận dưới lớn nhất của A và ký hiệu k_0 là $\inf A$.

(i) $0 \leq x \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $b \leq x$ với mọi $x \in A$, thì $b \leq 0$

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $b \leq x$ với mọi $x \in A$, thì $b \leq 0$

$$b \leq n^{-1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad b \leq 0$$

Đảo đề : " $P \Rightarrow Q$ " $\Leftrightarrow$ " $\sim Q \Rightarrow \sim P$ "

$$0 < b$$

$$\Rightarrow \quad \exists\ n \in \mathbb{N} \quad n^{-1} < b$$

(R18) (*Tính chất Archimède*) Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương n sao cho

$$y < nx \quad . \quad (\text{hay } n^{-1}y < x)$$

Cho A là một tập bị chận trên trong $\mathbb{R}$ và $M \in \mathbb{R}$.
Để chứng minh $\sup A \le M$, ta có thể làm như sau

Chứng minh $x \le M \quad \forall x \in A$.

Bài toán 15 . Cho c là một số thực dương và B là một tập con bị chặn trên khác trống của $\mathbb{R}$. Đặt $cB = \{cy : y \in B\}$. Chứng minh

$$\sup cB = c \sup B$$

Đặt $A = cB$ và $M = c \sup B$. Ta phải chứng minh

- $\sup A \le M$
- $M \le \sup A$

$cB = \{cy : y \in B\}$. Chứng minh $\sup cB = c \sup B$

Đặt $A = cB$ và $M = c \sup B$. Ta phải chứng minh

- $\sup A \le M$
- $M \le \sup A$

Chứng minh $\sup A \le M$

Chứng minh $x \le c \sup B \quad \forall x \in A = cB$.

Chứng minh $cy \le c \sup B \quad \forall y \in B$.

$$y \le \sup B \qquad \forall y \in B.$$

$$c\,y \le c\sup B = M \qquad \forall y \in B.$$

$cB = \{cy : y \in B\}$. Chứng minh $\sup cB = c \sup B$

Đặt $A = cB$ và $M = c \sup B$. Ta phải chứng minh

$$M \le \sup A$$

Ta phải chứng minh $c \sup B \le \sup cB$

Ta đã chứng minh $\sup cB \le c \sup B$

Đặt $E = cB$ và $d = c^{-1}$. Ta có $B = dE$

$$\sup dE \le d \sup E$$

Bài toán 16. Cho A là một tập khác trống và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ và $c = sup\, A$. Cho ε là một số thực dương. Chứng minh $c - \varepsilon$ không là một chặn trên của A.

(i) $x \leq m_0 \quad \forall\ x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $m_0 \leq b$

Lúc đó $m_0 = \sup A$.

(i) $x \leq c \quad \forall\ x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $c \leq b$

nếu $c - \varepsilon$ là một chặn trên của A : $c \leq c - \varepsilon$

Bài toán 17. Cho A là một tập khác trống và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ và c là một chặn trên của A. Giả sử với mọi số thực dương ε ta có một $x \in A$ sao cho $c - \varepsilon < x$. Chứng minh $c = sup\, A$

(i) $x \leq m_0 \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $m_0 \leq b$

Lúc đó $m_0 = \sup A$.

(i) $x \leq c \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $c \leq b$

(ii) Nếu b là một chặn trên của A, thì $c \leq b$

b là một chặn trên của A

$\Rightarrow$ $c \leq b$

Đảo đề : " $P \Rightarrow Q$ " $\Leftrightarrow$ " $\sim Q \Rightarrow \sim P$ "

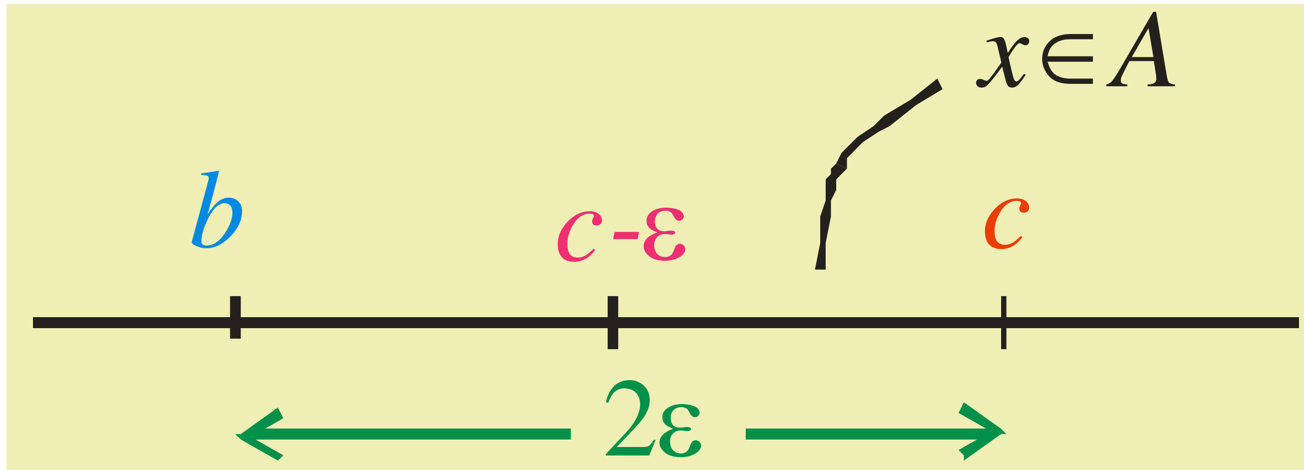
$b < c$ $\Rightarrow$ b không là một chặn trên của A

$b < c$ $\Rightarrow$ Tìm một $x \in A$ sao cho $b < x$

$$b < c$$

$\Rightarrow$ Tìm một $x \in A$ sao cho $\boxed{b < x}$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(c - b)$$



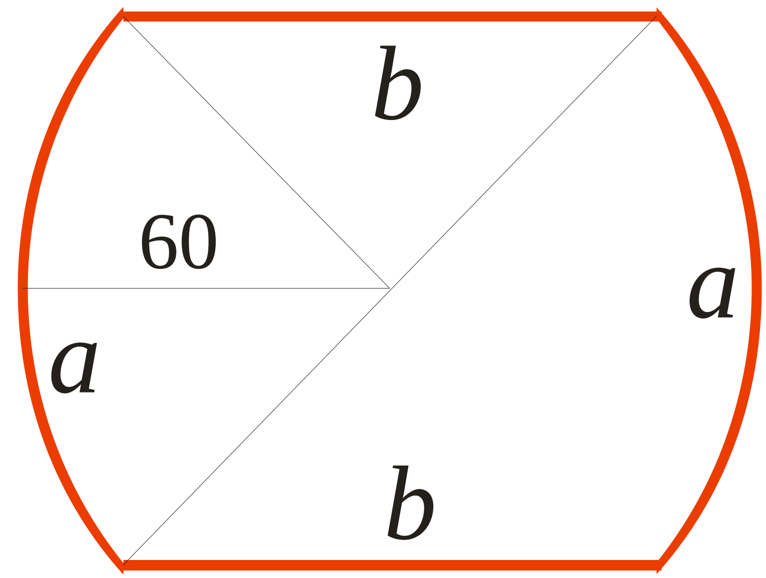
$\forall\, \varepsilon > 0$ ta có một $x \in A$ sao cho $\boxed{c - \varepsilon < x}$

b không còn là một chặn trên của A

CHƯƠNG NĂM

DÃY VÀ CHUỖI SỐ THỰC

Để xây dựng một rào ngăn khán giả tràn vào sân thi đấu bóng đá, ta cần tính chu vi p của một hình như bên cạnh. Hình này gồm hai cung tròn và hai đoạn thẳng, mỗi cung là một phần tư của một đường tròn có bán kính 60 mét.



Dùng các công thức đơn giản ta tính được

$$p = (60\pi + 120\sqrt{2}) \text{ mét}$$

Nếu bạn học toán để đạt huy chương Field, thì công thức trên quá tốt. Nhưng khi đưa vào các đề án thi công thực tế, chúng ta phải dùng một trong các giá trị của p như sau

$$p = 60\times3,14 + 120\times1,41 \;;$$
$$p = 60\times3,141 + 120\times1,414 \;;$$
$$p = 60\times3,1416 + 120\times1,4142 \;.$$

Như vậy trong thực tế, một số số thực thường được thay thế bằng các giá trị xấp xĩ của chúng.

Thí dụ , người thường đồng nhất π với một trong các số $\{3,14;\ 3,141;\ 3,1416\}$, và $\sqrt{2}$ với một trong các số $\{1,41;\ 1,414;\ 1,4142\}$

Nay ta xem cách mô hình ý tưởng trên của các nhà toán học .

Định nghĩa . Cho f là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$, đặt $a_n = f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta nói $\{a_n\}$ là một dãy số thực.

Thí dụ 1. $\{ sin(n^3 + 2n) \}$ là một dãy số thực

Thí dụ 2. Đặt $a_1 = 3{,}14$, $a_2 = 3{,}141$, $a_3 = 3{,}1415$,

$a_4 = 3{,}14159$, $a_5 = 3{,}141592$, $a_6 = 3{,}1415926$,

$a_7 = 3{,}14159265$, $a_8 = 3{,}141592653$, $a_9 = 3{,}1415926535$, ... Đây là dãy số giúp chúng ta chọn các giá trị gần đúng của số π theo các sai số cho phép trong các tính toán cụ thể .

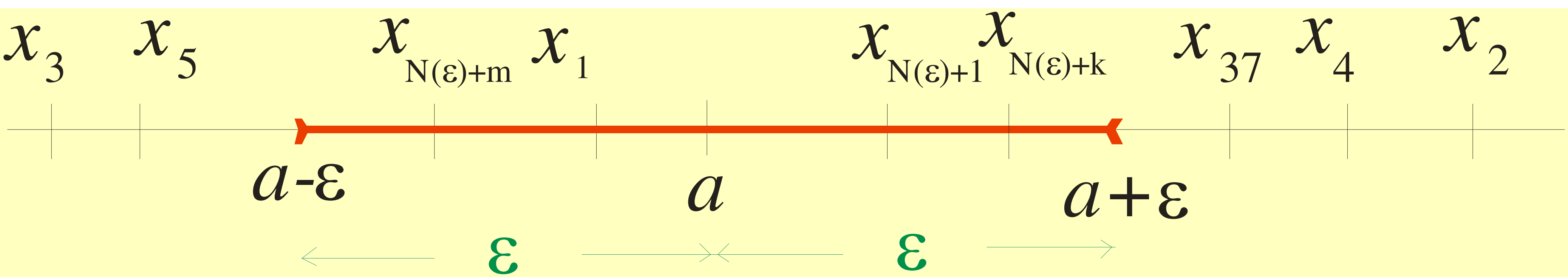
Ta xem mô hình toán học của ý tưởng đồng nhất một số thực a với một dãy các giá tri xấp xĩ của nó như sau

Định nghĩa . Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và một số thực a.

Ta nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ về a nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho}$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$



Bài toán 18. Chứng minh $\{n^{-1}\}$ hội tụ về 0 .

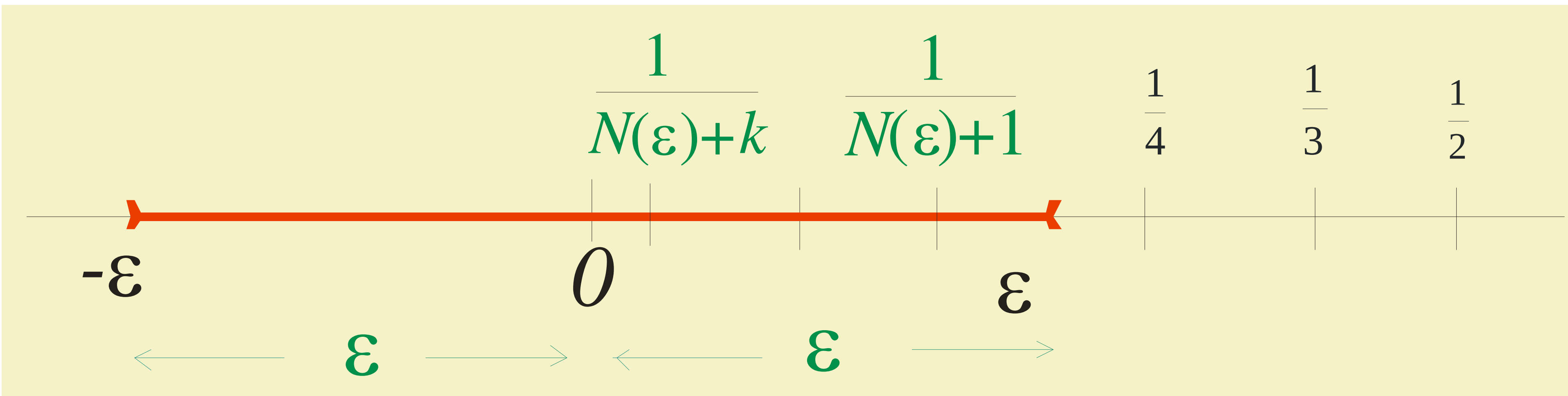
Chúng ta nên mô hình toán học như sau : đặt $x_n = n^{-1}$ với mọi số nguyên dương, và chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về 0.

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$



Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

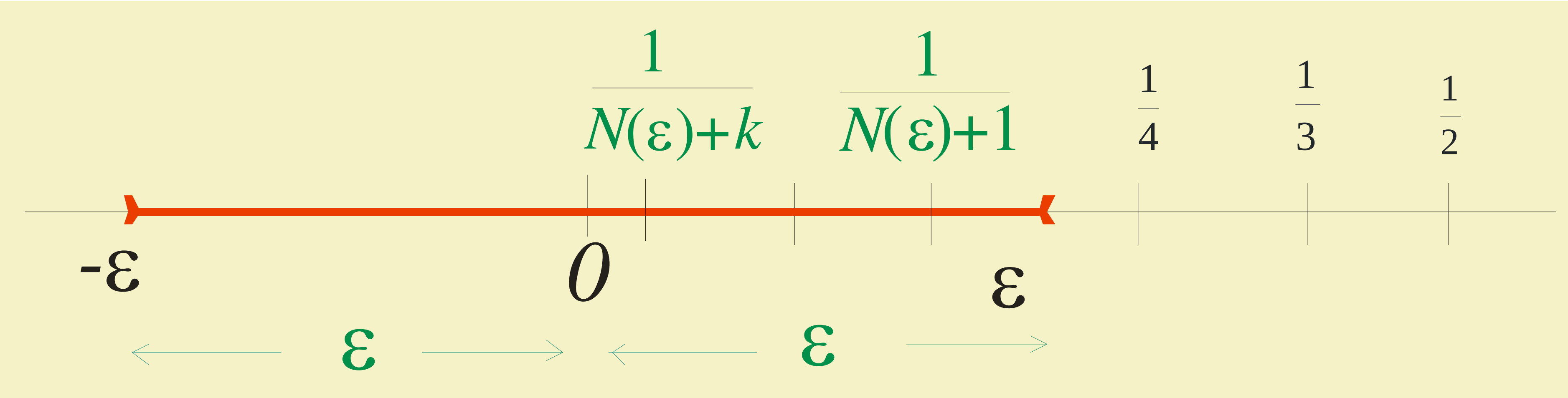
$$|n^{-1} - 0| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1} < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1} < n \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$



Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1} < n \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

(R18) (*Tính chất Archimède*) Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương N sao cho

$$y < Nx \quad . \qquad (\text{hay } N^{-1}y < x\ )$$

$y = \varepsilon^{-1}$ và $x = 1$

Có một số nguyên dương $N(\varepsilon)$: $\varepsilon^{-1} < N(\varepsilon)\,.1$

$$\varepsilon^{-1} < N(\varepsilon)\,.1 < n \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1} < n \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Bài toán 19. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực sao cho có một số thực dương C để cho

$$|x_n| \le n^{-1}C \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về 0.

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - 0| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1}C < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1}C < n \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Bài toán 20. Chứng minh $\{2^{-n}\}$ hội tụ về 0.

Chúng ta mô hình toán học như sau : đặt

$$x_n = 2^{-n} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về 0.

Chứng minh có một số thực C sao cho

$$|\,x_n\,| \le n^{-1} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

P_n : $n \le 2^n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ $\quad (\, 2^{-n} \le n^{-1}\ ;\ \ 2^{-k-n} \le 2^{-k}.n^{-1}\ )$

P_1 : $1 \le 2^1 = 2$ đúng

P_n đúng : $\boxed{n} \le 2^n$

P_{n+1} : $\boxed{n+1} \le 2^{n+1}$

$$n+1 = (\,n\,) + 1 \le 2^n + 1 \le 2^n + 2^n \le 2.\,2^n = 2^{n+1}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$

$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| \le \varepsilon \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$

$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

$\forall \varepsilon' > 0, \exists\ M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| \le \varepsilon' \quad \forall\ n > M(\varepsilon')$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$\forall \varepsilon' > 0\ \exists\ M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| \le \varepsilon' \quad \forall\ n > M(\varepsilon')$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow$

$\forall \varepsilon' > 0\ \exists\ M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| \le \varepsilon' \quad \forall\ n > M(\varepsilon')$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

$\Leftarrow$

$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists\ M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| \le \varepsilon' \ \forall n > M(\varepsilon')$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có một $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \le \varepsilon' \qquad \forall n > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có một $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \boxed{\leq \varepsilon'} \quad \forall\ n > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \boxed{< \varepsilon} \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$$

$$\boxed{} < \eta \quad \leftrightarrow \quad \boxed{} \leq \tfrac{1}{2}\eta$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$$

Cho ε, đặt $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$, ta có $M(\varepsilon')$, đặt

$$N(\varepsilon) = M(\varepsilon') = M\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, \boxed{n > N(\varepsilon)}$

$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

$\forall \varepsilon' > 0\ \exists\, M(\varepsilon') \in$ sao cho $|x_n - a| < \varepsilon' \quad \forall\, \boxed{n \geq M(\varepsilon')}$

$n > N(\varepsilon) \Leftrightarrow n \geq N(\varepsilon) + 1$

Bài tập tự làm

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

$\overset{?}{\Leftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$

Định nghĩa . Cho g là một ánh xạ từ tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$. Đặt

$$n_k = g(k) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Ta dùng $\{n_k\}$ thay cho $\{x_n\}$ vì ta thường ký hiệu các số nguyên dương là n

$g(k) = 12 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $n_k = 12 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

$g(k) = k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $n_k = k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

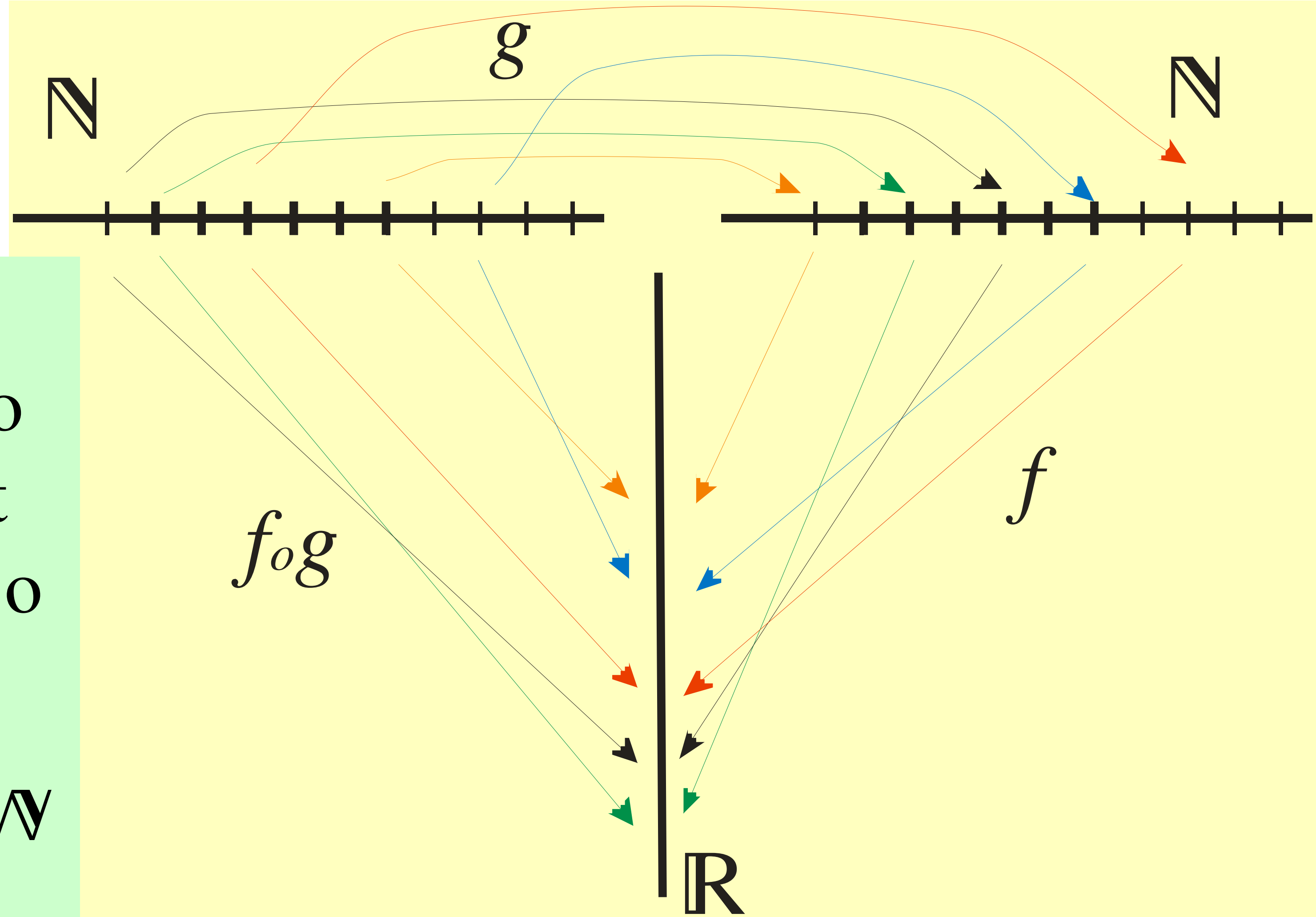
$g(k) = 3k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $n_k = 3k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

$g(k) = k^2 - 8k+100\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $n_k = k^2 -8k + 100\ \forall\ k \in \mathbb{N}$

Cho g là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ và f là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$. Đặt

$x_n = f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$b_k = fog(k) \ \forall k \in \mathbb{N}$



Ta thấy fog cũng là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$.

Vậy $\{x_n\}$ và $\{b_k\}$ là các dãy số thực.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và một số thực a. Ta nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ về a nếu và chỉ nếu

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho g là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ và f là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$. Đặt

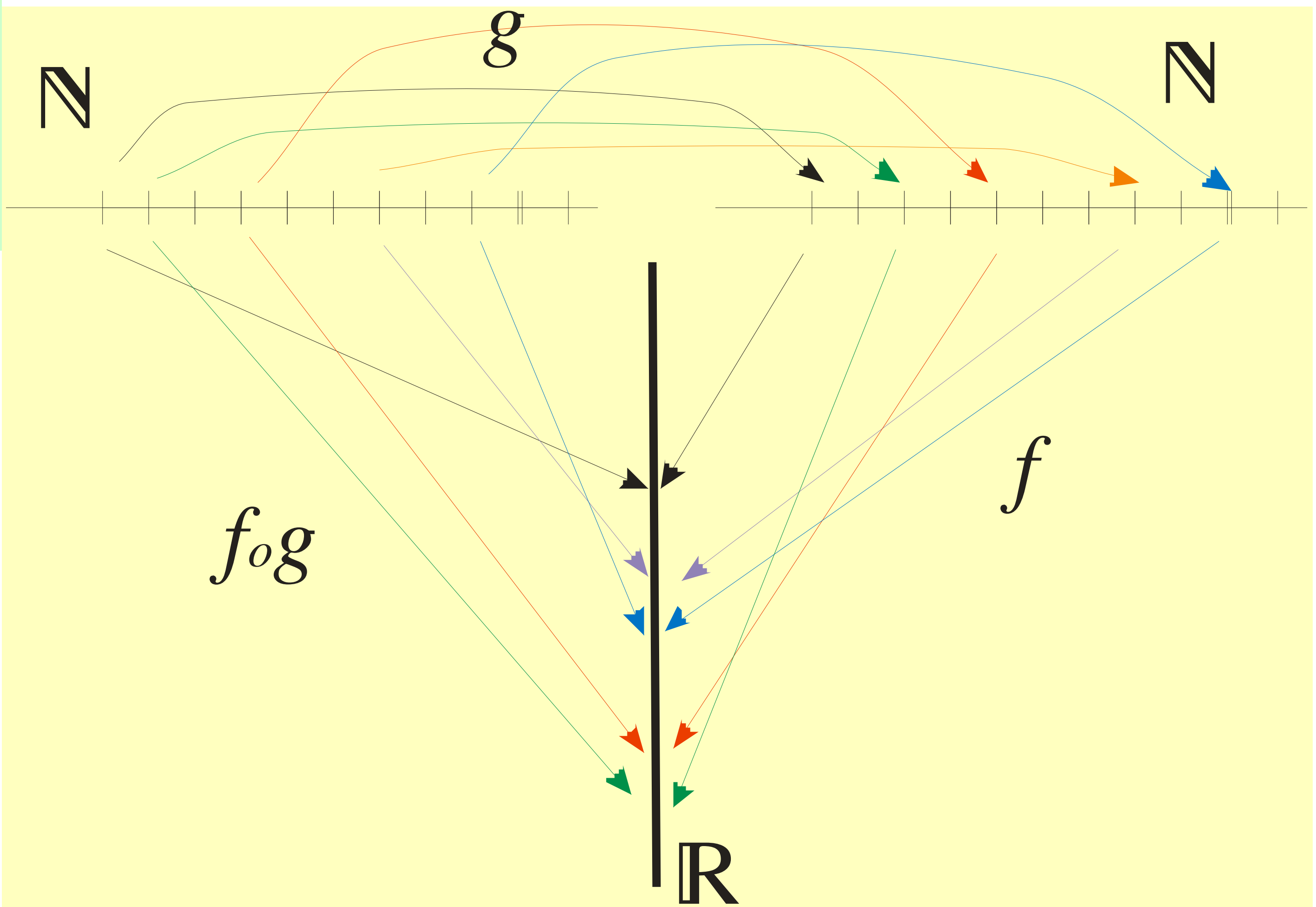
$$x_n = f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_k = fog(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$b_k = x_{g(k)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$k \leq g(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Nếu g tăng nghiêm cách thì $k \leq g(k) \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$



Ta nói $\{b_k\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$ nếu g tăng nghiêm cách. Lúc đó ta ký hiệu

$$b_k = x_{n_k}$$

$$(\;b_n = fog(n) = b_n = f(g(n)) = f(n_k)\;)$$

Nếu $g(n) = 2n$ ta ký hiệu x_{n_k} là x_{2n}

Nếu $g(n) = 2n+1$ ta ký hiệu x_{n_k} là x_{2n+1}

Nếu $g(n) = 5n+3$ ta ký hiệu x_{n_k} là x_{5n+3}

Bài toán 21. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Chứng minh ba điều sau đây tương đương

(1) $\{a_n\}$ hội tụ về a trong $\mathbb{R}$.

(2) $\{a_n - a\}$ hội tụ về 0 trong $\mathbb{R}$.

(3) $\{|a_n - a|\}$ hội tụ về 0 trong $\mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(x_m - a) - 0| < \varepsilon \qquad \forall m > M(\varepsilon')$$

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$||x_k - a| - 0| < \varepsilon \qquad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

$\forall\, \varepsilon' > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(x_m - a) - 0| < \varepsilon \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$$

$\forall\, \varepsilon'' > 0 \quad \exists\, K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$||x_k - a| - 0| < \varepsilon \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

$\forall\, \varepsilon' > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(x_m - a)| = |x_m - a| < \varepsilon \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$$

$\forall\, \varepsilon'' > 0 \quad \exists\, K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$||x_k - a|| = |x_k - a| < \varepsilon \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$$

Để tính $s = \pi + \sqrt{2}$ chúng ta thường làm như sau

$s = 3,14 + 1,41$ hoặc

$s = 3,141 + 1,414$ hoặc

$s = 3,1416 + 1,4142$ . . .

Ta thử mô hình toán học cho việc làm thông thường này như sau.

Đặt $a_1 = 3,14$, $a_2 = 3,141$, $a_3 = 3,1415$, $a_4 = 3,14159$, $a_5 = 3,141592$, $a_6 = 3,1415926$, $a_7 = 3,14159265$, $a_8 = 3,141592653$, $a_9 = 3,1415926535$, ...,

$b_1 = 1.41$, $b_2 = 1.414$, $b_3 = 1.4142$, $b_4 = 1.41421$, $b_5 = 1.414213$, $b_6 = 1.4142135$, $b_7 = 1.41421356$, $b_8 = 1.414213562$, $b_9 = 1.4142135623$, ..., Ta thấy các dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ lần lượt là các dãy các số xấp xỉ π và $\sqrt{2}$, hay $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ lần lượt hội tụ π và $\sqrt{2}$

Nay ta đặt

$$s_1 = a_1 + b_1 \,,$$
$$s_2 = a_2 + b_2 \,,$$
$$s_3 = a_3 + b_3 \,,$$
$$s_4 = a_4 + b_4 \,,$$
$$s_5 = a_5 + b_5 \,,$$
$$\ldots$$

Theo cách làm thông thường, chúng ta chấp nhận $\{s_n\}$ là dãy số thực xấp xỉ cho số $s = \pi + \sqrt{2}$. Chúng ta sẽ chứng minh việc chấp nhận này là đúng theo bài toán sau.

Bài toán 22. Cho hai số thực a và b và hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a và $\{b_n\}$ hội tụ về b. Đặt $c = a + b$ và $c_n = a_n + b_n$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về c.

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|a_n - a|} < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|b_m - a|} < \varepsilon' \qquad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|c_k - c|} < \varepsilon'' \qquad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon'' \qquad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$\boxed{|a_n - a|} < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$\boxed{|b_m - b|} < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$\boxed{|(a_k + b_k) - (a + b)|} < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$

$$(a_k + b_k) - (a + b) = (a_k - a) + (b_k - b)$$

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| \leq |a_k - a| + |b_k - b|$$

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall k > \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| \boxed{< \varepsilon''} \quad \forall \boxed{k > K(\varepsilon'')}$$

$$|(a_k + b_k) - (a+b)| < \boxed{\varepsilon + \varepsilon'} \ \forall k > \boxed{\max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')}\}$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$, chọn

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon'' \quad \text{và} \quad K(\varepsilon'') = \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$$

Bài toán 23. Cho hai số thực a và b và hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a và $\{b_n\}$ hội tụ về b. Đặt $c = a.b$ và $c_n = a_n.b_n$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về c.

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|a_n - a|} < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|b_m - a|} < \varepsilon' \qquad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|c_k - c|} < \varepsilon'' \qquad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_k.b_k - a.b| < \varepsilon'' \qquad \forall k > K(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| b_m - b | < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| a_k . b_k - a.b | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$$

$$a_k . b_k - a.b = (a_k - a) b_k + a(b_k - b)$$

$$|a_k . b_k - a.b| \leq | a_k - a ||b_k| + |a|| b_k - b |$$

$$|a_k . b_k - a.b| < \varepsilon |b_k| + |a|\varepsilon' \quad \forall\, k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Xử lý $|b_k|$ $\quad |b_k| \leq | b_k - b| + |b| < \varepsilon' + |b| \quad \forall\, k > M(\varepsilon')$

$$|a_k . b_k - a.b| < \varepsilon\, \varepsilon' + \varepsilon |b| + |a|\varepsilon' \quad \forall\, k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| b_m - b | < \varepsilon' \qquad \forall m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| a_k . b_k - a.b | < \varepsilon'' \qquad \forall k > K(\varepsilon'')$$

$$|a_k . b_k - a.b| < \varepsilon \varepsilon' + \varepsilon|b| + |a|\varepsilon' \quad \forall k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Giải phương trình $x^2 + (|b| + |a|)x = \varepsilon''$

$$\text{Đặt} \quad \varepsilon = \varepsilon' = x = \frac{\sqrt{(|a| + |b|)^2 + 4\varepsilon''} - |a| - |b|}{2} > 0$$

$$|a_k . b_k - a.b| < \varepsilon'' \qquad \forall k > K(\varepsilon'') = \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$$

Bài toán 23b. Cho số thực a khác không và dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho a_n khác không với mọi n. Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a. Đặt $c_n = a_n^{-1}$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về a^{-1}.

Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > N(\varepsilon)$

Cho ε' > 0, tìm M(ε')∈ ℕ sao cho $|c_m - a^{-1}| < \varepsilon' \ \forall\ m$

$$c_m - a^{-1} = \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_m}{a_m a}$$

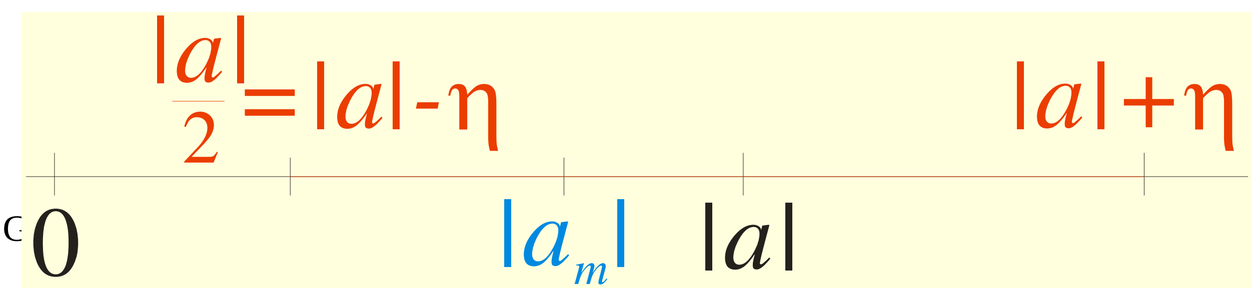
Xử lý $\dfrac{1}{a_m a}$

Đặt $\eta = \dfrac{|a|}{2}$

Có N(η) ∈ ℕ sao cho $|a_n - a| < \eta \quad \forall\ n > N(\eta)$

$|a_n| \geq |a| - |a - a_n| > |a| - \eta = 2^{-1}|a|$

$\forall\ n > N(\eta)$



Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon)$

Cho ε' > 0, tìm M(ε')∈ ℕ sao cho $|c_m - a^{-1}| < \varepsilon' \, \forall\, m$

$$c_m - a^{-1} = \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_m}{a_m a}$$

Xử lý $\dfrac{1}{a_m a}$

Đặt $\eta = \dfrac{|a|}{2}$

Có N(η) ∈ ℕ sao cho $|a_n - a| < \eta \quad \forall\, n > N(\eta)$

$$|a_n| \geq |a| - |a - a_n| > |a| - \eta = 2^{-1}|a| \qquad \forall\, n > N(\eta)$$

$$|c_m - a^{-1}| = \left|\frac{a - a_m}{a_m a}\right| < \frac{2|a - a_n|}{|a|^2} < \frac{2\varepsilon}{|a|^2} \quad \forall m > \max\{N(\varepsilon), N(\eta)\}$$

Bài toán 24. Cho một số thực a và ba dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ và $\{x_n\}$. Giả sử

(i) $a_n \leq x_n \leq b_n$ với mọi số nguyên dương n .

(ii) $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ về a .

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a .

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| b_m - a | < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - a | < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{| a_n - a |} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

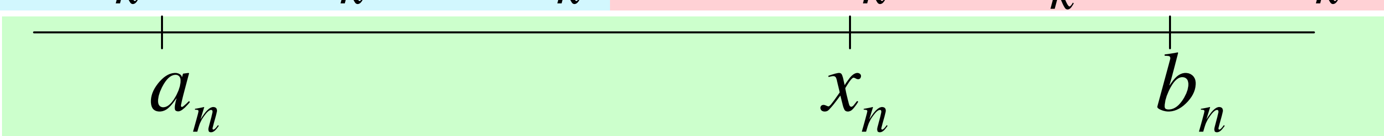
$$\boxed{| b_m - a |} < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{| x_k - a | < \varepsilon''} \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$$

$$|x_k - a| = |x_k - a_k + a_k - a| \le | x_k - a_k | + | a_k - a |$$

(i) $a_k \le x_k \le b_k \Rightarrow | x_k - a_k | \le | b_k - a_k |$



$$|x_k - a| \le | b_k - a_k | + | a_k - a | \le | b_k - a | + | a_k - a | + | a_k - a |$$

$$|x_k - a| < \varepsilon' + 2\varepsilon \qquad \forall\, k > N(\varepsilon) \text{ và } k > M(\varepsilon')$$

Bài toán 25. Cho hai tập con khác trống A và B trong $\mathbb{R}$. Giả sử $x \leq y \quad \forall x \in A, \forall y \in B$.

Chứng minh $\sup A \leq \inf B$

Chứng minh $x \leq \inf B \quad \forall x \in A$

$\forall x \in A$, chứng minh $x \leq y \quad \forall y \in B$.

Bài toán 26. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n.$$

Chứng minh $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} b_n$

Chứng minh $a_n \leq b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Chứng minh $a_n \le b_m \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$

$$[a_n , b_n] \subset [a_m , b_m] \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n .$$

$$[a_s , b_s] \subset [a_r , b_r] \quad \forall\, r, s \in \mathbb{N},\ r \le s .$$

- $m \le n$: $r = m$ và $s = n$ $\quad [a_n , b_n] \subset [a_m , b_m]$

$a_n \in [a_n , b_n] \Rightarrow a_n \in [a_m , b_m]$. Vậy $a_n \le b_m$

- $n \le m$: $r = n$ và $s = m$ $\quad [a_m , b_m] \subset [a_n , b_n]$

$b_m \in [a_m , b_m] \Rightarrow b_m \in [a_n , b_n]$. Vậy $a_n \le b_m$

Bài toán 27. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \; m \le n.$$

Chứng minh $[\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n] \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k]$

Chứng minh $[\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n] \subset [a_k, b_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$x \in [\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n] \overset{?}{\Rightarrow} x \in [a_k, b_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \le x \le \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n \overset{?}{\Rightarrow} a_k \le x \le b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Bài toán 28. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

(i) $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \le n.$

(ii) $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0.$

Chứng minh $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$

$$0 \le \inf_{m\in\mathbb{N}} b_m - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \le b_k - a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_n - a_n - 0| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$0 \le \inf_{m\in\mathbb{N}} b_m - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \le \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Nếu $0 < \inf_{m\in\mathbb{N}} b_m - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, đặt $\varepsilon = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} b_m - \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} a_m$

Bài toán 29. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

(i) $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \le n.$

(ii) $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0$

Chứng minh $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|b_n - a_n - 0| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n| < \varepsilon' \qquad \forall n > M(\varepsilon')$

$|a_n - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n| < |b_n - a_n| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$

Bài toán 30. Cho ba dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ và $\{x_n\}$ sao cho

(i) $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n,$

(ii) $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0,$

(iii) $x_n \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \text{(bài toán 29)}$$

$$a_n \le x_n \le b_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$$a_n \le x_n \le b_n$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Cho J là một tập con trong $\mathbb{N}$ và J có vô hạn phần tử .

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$$n_1 = \min J$$

$$n_2 = \min J \setminus [0, n_1]$$

$$n_3 = \min J \setminus [0, n_2]$$

$$n_{k+1} = \min J \setminus [0, n_k] \qquad \forall \; k \in \mathbb{N}$$

Ta thấy $\{n_k\}$ là một dãy đơn điệu tăng trong $\mathbb{N}$

Vậy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$

Bài toán 31. Cho một ánh xạ f từ $\mathbb{N}$ vào tập $\{1,2, . . . , 9\}$ Đặt $x_n = f(n)$ với mọi số nguyên dương n. Tìm một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ .

Đặt $I_m = \{n \in \mathbb{N} : x_n = m\}$ với mọi $m \in \{1,2, . . . , 9\}$.

$$I_1 \bigcup I_2 \bigcup \cdots \bigcup I_9 = \mathbb{N}$$

Có $r \in \{1,2, . . . , 9\}$ sao cho I_r là tập có vô hạn phần tử

Đặt $J = I_r$ và lập dãy $\{x_{n_k}\}$ tương ứng với J .

Vì $n_k \in J = I_r$, $x_{n_k} = r$ với mọi số nguyên dương k .

Cho $\varepsilon > 0$, ta thấy : $|x_{n_k} - r| = 0 < \varepsilon \quad \forall \ k \geq 1.$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = r$$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Cho $\{J_n\}$ là một họ đếm được các tập con trong $\mathbb{N}$. Giả sử J_n có vô hạn phần tử và $J_{n+1} \subset J_n$ với mọi số nguyên dương n.

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$$n_1 = \min J_1$$

$$n_2 = \min J_2 \setminus [0, n_1]$$

$$n_3 = \min J_3 \setminus [0, n_2]$$

$$n_{k+1} = \min J_{k+1} \setminus [0, n_k] \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$$

Ta thấy $\{n_k\}$ là một dãy đơn điệu tăng trong $\mathbb{N}$

Vậy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$

Định lý 6.1 (Bolzano- Weierstrass) *Cho a và b là hai số thực và* $\{x_n\}$ *là một dãy số thực. Giả sử* $a < b$ *và* $x_n \in [a,b]$ *với mọi số nguyên* n. *Lúc đó có một dãy con* $\{x_{n_k}\}$ *của dãy* $\{x_n\}$ *sao cho* $\{x_{n_k}\}$ *hội tụ về* $x \in [a, b]$.

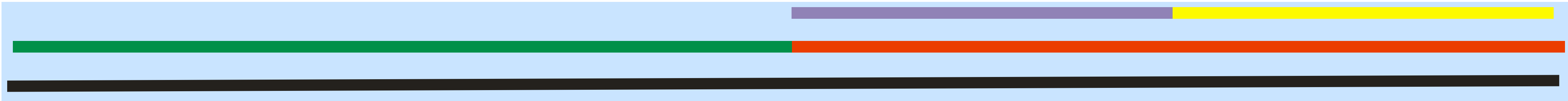
Định lý (Bolzano- Weierstrass) *Cho a và b là hai số thực và $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử $a < b$ và $x_n \in [a, b]$ với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$. Lúc đó có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về x* trong $[a, b]$.

$J'_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \quad \}$

$J''_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \quad \}$

Vì $J'_1 \cup J''_1 = \mathbb{N}$. Nên một trong hai tập J'_1 và J''_1 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J'_2 có vô hạn phần tử.

Đặt $[a_1, b_1] =$, ta có $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ và $(b_1 - a_1) = 2^{-1}(b - a)$



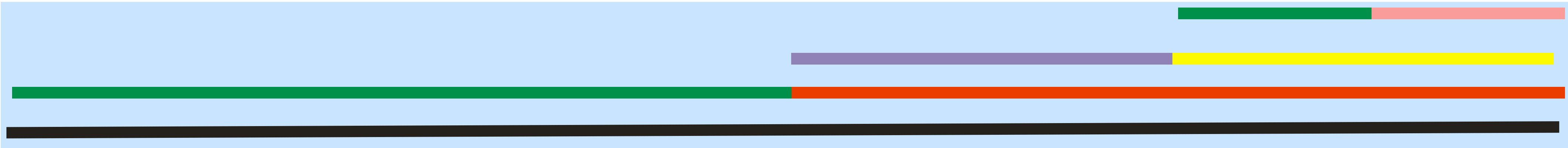
$J'_1 = \{ \ n \in \mathbb{N} : x_n \in \ \}$ $\quad$ $J''_1 = \{ \ n \in \mathbb{N} : x_n \in \ \}$

$J'_2 = \{ \ n \in J'_1 : \ x_n \in \ \}$ $\quad$ $J''_2 = \{ \ n \in J'_1 : \ x_n \in \ \}$

Vì $J'_2 \cup J''_2 = J''_1$. Nên một trong hai tập J'_2 và J''_2 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J''_2 có vô hạn phần tử . Và đặt $J_2 = J''_2$.

Đặt $[a_2, b_2] =$

Ta có : $J_2 \subset J_1$, $[a_2 , b_2] \subset [a_1 , b_1]$, và $(b_2 - a_2) = 2^{-2} (b - a)$



$J'_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \quad \}$ $\qquad$ $J''_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \quad \}$

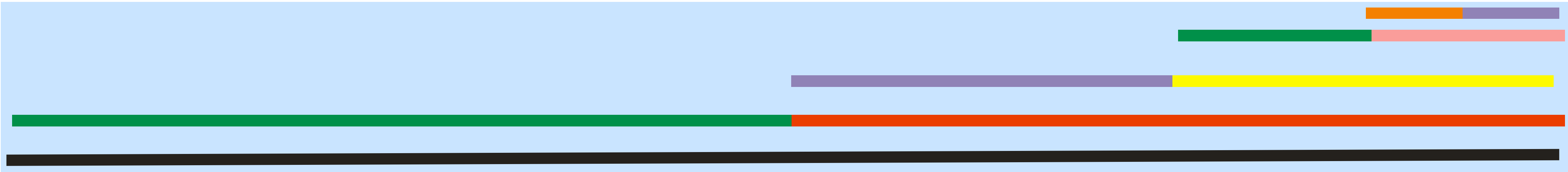
$J_3' = \{ n \in J_2'' : x_n \in \quad \}$ $\qquad$ $J_3'' = \{ n \in J_2'' : x_n \in \quad \}$

Vì $J'_3 \cup J''_3 = J''_2$. Nên một trong hai tập J'_3 và J''_3 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J''_3 có vô hạn phần tử . Và đặt $J_3 = J''_3$.

Đặt $[a_3, b_3] =$

Ta có : $J_3 \subset J_2 \subset J_1$, $[a_3 , b_3] \subset [a_2 , b_2] \subset [a_1 , b_1]$, và

$$(b_3 - a_3) = 2^{-3} (b - a)$$



$J_3' = \{n \in J_2'' : x_n \in \quad \}$ $J_3'' = \{n \in J_2'' : x_n \in \quad \}$

$J_4' = \{n \in J_3'' : x_n \in \quad \}$ $J_4'' = \{n \in J_3'' : x_n \in \quad \}$

Vì $J'_4 \cup J''_4 = J''_3$. Nên một trong hai tập J'_4 và J''_4 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J'_4 có vô hạn phần tử . Và đặt $J_4 = J'_4$.

Đặt $[a_4, b_4] =$

Ta có : $J_4 \subset J_3 \subset J_2 \subset J_1$,

$[a_4 , b_4] \subset [a_3 , b_3] \subset [a_2 , b_2] \subset [a_1 , b_1]$, và

$(b_4 - a_4) = 2^{-4}(b - a)$

$x_n \in [a, b]$ *với mọi số nguyên* $n \in \mathbb{N}$. *Lúc đó có một dãy con* $\{x_{n_k}\}$ *của dãy* $\{x_n\}$ *sao cho* $\{x_{n_k}\}$ *hội tụ về* x trong $[a, b]$.

Dùng qui nạp toán học, ta tìm được các số thực $a_1, \ldots,$ $a_n, \ldots, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ sao cho $a_n < b_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ và

- $[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$
- $(b_n - a_n) = 2^{-n}(b - a) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$,
- Nếu đặt $J_n = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a_n, b_n]\}$, thì J_n có vô hạn phần tử và $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots$

Lúc đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Chọn dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $n_k \in J_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Ta có $a_k \le x_{n_k} \le b_k$. Vậy $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Định nghĩa . Cho $\{ x_n \}$ là một dãy số thực . Ta nói dãy $\{ x_n \}$ là một dãy Cauchy nếu và chỉ nếu

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - x_m | < \varepsilon \qquad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

Bài toán 32. Cho $\{ x_n \}$ là một dãy số thực hội tụ về a. Chứng minh $\{ x_n \}$ là một dãy Cauchy .

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - a | < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - x_m | < \varepsilon \qquad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - x_m | < \varepsilon' \qquad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ về a. Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy .

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\ n > N(\varepsilon)$$

$\forall\ \varepsilon' > 0 \quad \exists\ M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall\ n > m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\ n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall\ n > m > M(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|x_n - x_m| < \varepsilon'} \qquad \boxed{\forall n > m > M(\varepsilon')}$$

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m|$$

$$\boxed{|x_n - x_m| < \varepsilon + \varepsilon} \qquad \boxed{\forall n, m > N(\varepsilon)}$$

$$\boxed{\varepsilon + \varepsilon \rightleftarrows \varepsilon'} \qquad \boxed{M(\varepsilon') \rightleftarrows N(\varepsilon)}$$

Cho một $\varepsilon' > 0$, ta chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$ và $M(\varepsilon') = N(\varepsilon)$

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon' \qquad \forall n > m > M(\varepsilon')$$

Bài toán 33. Cho $\{ x_n \}$ là một dãy số thực Cauchy . Chứng minh $A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$

Tìm một số thực M sao cho $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$-M \leq x_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|x_n - x_m|} < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq \mathrm{N}(\varepsilon)$$

Tìm một số thực M sao cho $\boxed{|x_n| \leq M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < \varepsilon + |x_m| \qquad \forall n > m \geq \mathrm{N}(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = 1 ,\; m = \mathrm{N}(1) : \quad |x_n| < 1 + |x_{\mathrm{N}(1)}| \qquad \forall n > \mathrm{N}(1)$$

Đặt : $M = \max \{ |x_1| , |x_2| , \ldots , |x_{\mathrm{N}(1)-1}| , 1 + |x_{\mathrm{N}(1)}| \}$

Bài toán 34. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy và a là một số thực. Giả sử $\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a.

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\, n > m > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $M(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon'' \qquad \forall\, n > M(\varepsilon'')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|x_n - x_m|} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|x_{n_k} - a|} < \varepsilon' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $M(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\boxed{|x_m - a|} < \varepsilon'' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon'')$$

$$|x_m - a| \leq |x_m - x_n| + |x_n - a| < \varepsilon + |x_n - a| \quad \forall\, n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

$$|x_m - a| < \varepsilon + |x_{n_m} - a| \qquad \forall\, m \geq N(\varepsilon)$$

$$|x_m - a| < \varepsilon + \varepsilon' \qquad \forall\, m \geq N(\varepsilon),\ m > K(\varepsilon')$$

Cho một $\varepsilon'' > 0$. Đặt

$$\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''/2 \qquad \text{và} \qquad M(\varepsilon'') = \max\{N(\varepsilon), K(\varepsilon')\}$$

Bài toán 35. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.

Có một số thực dương M sao cho

$$|x_n| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Có một số thực dương M sao cho

$$x_n \in [-M, M] \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a.

$\{x_n\}$ hội tụ về a.

Bài toán 36. Cho n là một số nguyên dương . Đặt

$$x_n = (2!)^{-1} + (4!)^{-1} + (6!)^{-1} + \ldots + (2n!)^{-1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ .

Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\ n > m > N(\varepsilon)$$

$$x_n - x_m = [(2!)^{-1} + \ldots + (2m!)^{-1} + (2(m+1)!)^{-1} + \ldots + (2n!)^{-1}]$$
$$- [(2!)^{-1} + \ldots + (2m!)^{-1}] = (2(m+1)!)^{-1} + \ldots + (2n!)^{-1}$$

$$|x_n - x_m| \le 2^{-m-1} + \ldots + 2^{-n} + \ldots + \le 2^{-m} \quad \forall\ n > m$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $2^{-m} < \varepsilon\ \forall\ n > m > N(\varepsilon)$

```
In[1]:= N[Sum[1/((2*i)!), {i, 1, 11}]]

Out[1]= 0.543081
```

```
In[2]:= N[Sum[1/((2*i)!), {i,1,∞}], 13]

Out[2]= 0.543081
```

```
In[4]:=N[Sum[1/((2*i)!),{i,1,∞}], 140]

Out[4]=0.54308063481524377847790562
07570616826015291123658637047374022
14710769063049223698964264726435
5430355870468586044235275650321946947095862907 6
```

```
In[4]:=N[Sum[1/((2*i)!),{i,1,Infinity}], 25]
Out[4]=0.5430806348152437784779056
```

```
In[2]:= Sum[1/((2*i)!),{i, 1, ∞}]
Out[2]={(Sqrt[2/π]-2 E Sqrt[2/ π] + E² Sqrt[2/ π]) Sqrt[π/2]}/(2E)
```

```
In[3]:=Simplify[(Sqrt[2/π]-2E Sqrt[2/π]+E²Sqrt[2/π])Sqrt[π/2]}/(2E)]
Out[3]=[ 2(-1 + E)]/ 2E
```

Bài toán 37. *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực đơn điệu tăng và bị chặn trên* . Đặt $A = \{\, a_n : n \in \mathbb{N} \,\}$.

Lúc đó $\{a_n\}$ *sẽ hội tụ về* $a = \sup A$

$$a_m \le a_n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\quad m \le n$$

$$a = \sup A$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

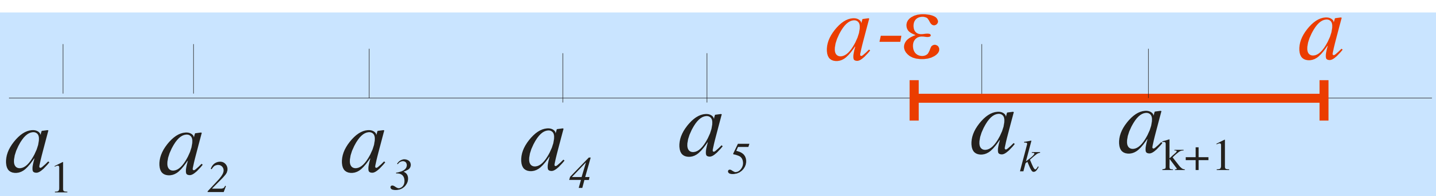
$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 \le a - a_n < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon < a_n \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$



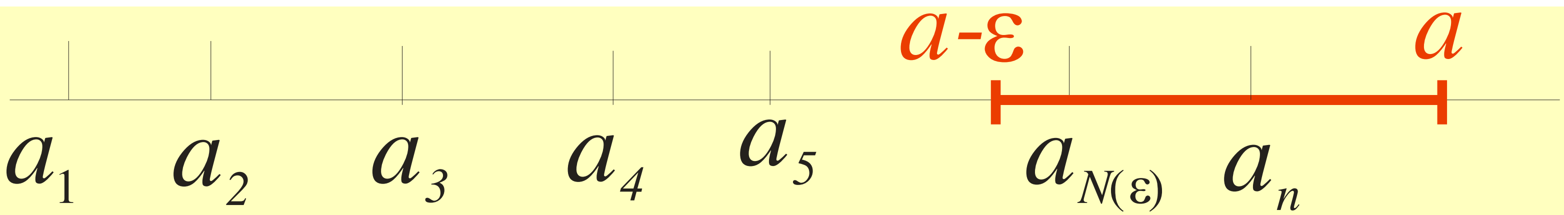
$a_m \leq a_n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ , \quad m \leq n$ $\qquad a = \sup A$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

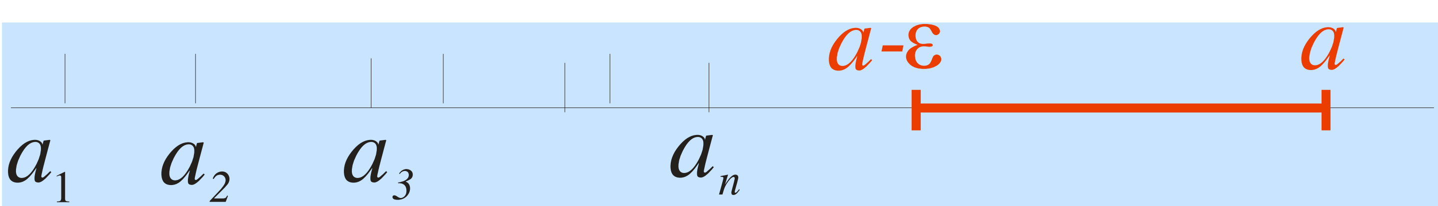
$$a - \varepsilon < a_n \qquad \forall\ n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a_n \qquad \forall\ n > N(\varepsilon)$$



Giả sử $\qquad a_m \leq a - \varepsilon \qquad \forall\ m \in \mathbb{N}$



$a - \varepsilon$ là một chặn trên của A

Bài toán 38. *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực đơn điệu tăng và không bị chặn trên . Lúc đó* $\{a_n\}$ *sẽ hội tụ về* ∞

$$a_m \leq a_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ m \leq n$$

$\forall M \in \mathbb{R}$ ta có một $n \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \geq M$

$\forall M > 0$ ta tìm một $N \in \mathbb{N}$ sao cho $a_m \geq M \quad \forall\ m \geq N.$

Bài toán 39. *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực đơn điệu giãm và bị chặn dưới* . Đặt $A = \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$.

Lúc đó $\{a_n\}$ *sẽ hội tụ về* $a = \inf A$

Bài toán 40. *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực đơn điệu giãm và không bị chặn dưới . Lúc đó* $\{a_n\}$ *sẽ hội tụ về* $-\infty$.

limsup

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_m : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_n \supset A_m \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m$$

- Nếu A_1 không bị chặn trên . Đặt

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_m : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_n \supset A_m \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\; n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn trên . Đặt

$$b_m = \sup A_m$$

$$b_1 \geq b_m \geq b_n \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\; n \geq m$$

• Nếu $\{b_n\}$ không bị chặn dưới , đặt

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_m : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N},\ n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn trên . Đặt

$$b_m = \sup A_m$$

$$b_1 \geq b_m \geq b_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N},\ n \geq m$$

• Nếu $\{b_n\}$ bị chặn dưới , đặt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \left(= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} a_n \right) \right)$$

Cho $a_n = (-1)^n n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m m : m \geq n\}$

$A_n = \{(-1)^m m : m \geq n\} \supset \{2k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$

A_1 không bị chặn trên $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$

Cho $a_n = -n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{-m : m \geq n\} \subset (-\infty, 0]$

A_1 bị chặn trên

$b_n = \sup A_n = \sup\{-k : k \geq n\} = -n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{b_n\} = \{-m : m \in \mathbb{N}\}$ không bị chặn dưới

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Cho $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m : m \geq n\} = \{1, -1\}$

A_1 bị chặn trên

$b_m = \sup A_m = \sup\{1,-1\} = 1$

$\{b_n\}$ bị chặn dưới $\Rightarrow$ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

Ta thấy $\{a_m\}$ không hội tụ nhưng vẫn có

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$$

liminf

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$x \in A_n \Leftrightarrow \exists k \geq n$ sao cho $x = a_k$

$n \geq m :\ x \in A_n \Leftrightarrow \exists k \geq n \geq m$ sao cho $x = a_k$

$\exists k \geq m$ sao cho $x = a_k \Leftrightarrow x \in A_m$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ n \geq m$$

- Nếu A_1 không bị chặn dưới . Đặt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn dưới. Đặt

$$c_m = \inf A_m$$

$c_m \leq a_k \quad \forall\ k \geq m$

$n \geq m : c_m \leq a_k \quad \forall\ k \geq m$

$c_n = \inf A_n$

$$c_1 \leq c_m \leq c_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m$$

• Nếu $\{c_n\}$ không bị chặn trên, đặt

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_k = \{a_k : m \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ \ n \geq m$$

■ Nếu A_1 bị chặn dưới . Đặt

$$c_m = \inf A_m$$

$$c_1 \leq c_m \leq c_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ \ n \geq m$$

• Nếu $\{c_n\}$ bị chặn trên , đặt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \left(= \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{n\geq m} a_n\right)\right)$$

Cho $a_n = (-1)^n n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m m : m \geq n\}$

$A_1 = \{(-1)^m m : m \geq 1\} \supset \{-2k-1 : k \geq 1\}$

A_1 không bị chặn dưới $\Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Cho $a_n = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{m : m \geq n\} \subset [n, \infty]$

A_1 bị chặn dưới

$c_n = \inf A_n = \inf\{k : k \geq n\} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{c_n\} = \mathbb{N}$ không bị chặn trên

$\Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Cho $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$A_n = \{a_m : m \geq n\} = \{(-1)^m : m \geq n\} = \{-1, 1\}$

A_1 bị chặn dưới

$c_m = \inf A_m = \inf \{-1, 1\} = -1$

$\{c_n\}$ bị chặn trên $\Rightarrow$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = -1$

Ta thấy $\{a_m\}$ không hội tụ nhưng vẫn có

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$. Mặt khác $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Trong trường hợp này $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \neq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Bài toán 41. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Giả sử $\limsup_{n\to\infty} a_n$ và $\liminf_{n\to\infty} a_n$ đều là các số thực . Chứng minh

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m \qquad c_m = \inf A_m$$

$$b_m \geq a_m \geq c_m$$

$$\lim_{m\to\infty} b_m \geq \lim_{m\to\infty} c_m$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Bài toán 42. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Giả sử : $\liminf_{n\to\infty} a_n$ và $\limsup_{n\to\infty} a_n$ đều là các số thực và bằng nhau. Chứng minh $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$b_m = \sup A_m$

$c_m = \inf A_m$

$c_m \leq a_m \leq b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$c_n \leq a_n \leq b_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{m\to\infty} c_m = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Bài toán 43. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ hội tụ về a. Chứng minh $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| \le \varepsilon \quad \forall n \ge N(\varepsilon)$

$A_m = \{a_n :\ n \ge m\}$ $\quad b_m = \sup A_m$ $\quad c_m = \inf A_m$

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty} b_m$ $\qquad \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty} c_m$

$|a_n - a| \le \varepsilon$ $\qquad -\varepsilon \le a_n - a \le \varepsilon$ $\qquad a - \varepsilon \le a_n \le a + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) :\ a - \varepsilon \le a_n \le a + \varepsilon \quad \forall\, n \ge m \ge N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) :\ a - \varepsilon \le c_m \le b_m \le a + \varepsilon \quad \forall\, m \ge N(\varepsilon)$

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|c_m - a| \le \varepsilon \quad \forall m \ge N(\varepsilon)$

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|b_n - a| \le \varepsilon \quad \forall m \ge N(\varepsilon)$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ hội tụ về a. Chứng minh

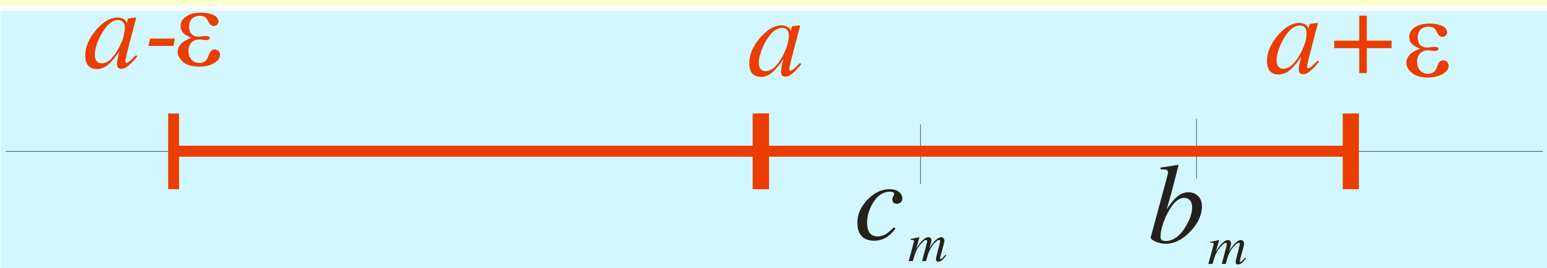
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| \le \varepsilon \quad \forall n \ge N(\varepsilon)$

$A_m = \{a_n :\ n \ge m\}$ $\quad b_m = \sup A_m$ $\quad c_m = \inf A_m$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} b_m \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} c_m$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) :\ a - \varepsilon \le c_m \le b_m \le a + \varepsilon \quad \forall\ m \ge N(\varepsilon)$



$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|c_m - a| \le \varepsilon \quad \forall m \ge N(\varepsilon)$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|b_n - a| \le \varepsilon \quad \forall m \ge N(\varepsilon)$

Bài toán 44. Cho A là một tập khác rỗng bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh B bị chặn dưới và $\sup A = -\inf B$

$\sup A \le -\inf B$?

$\sup A \ge -\inf B$?

$\sup A \le -\inf B$?

$x \le -\inf B \quad \forall x \in A$

$-x \ge \inf B \quad \forall x \in A$

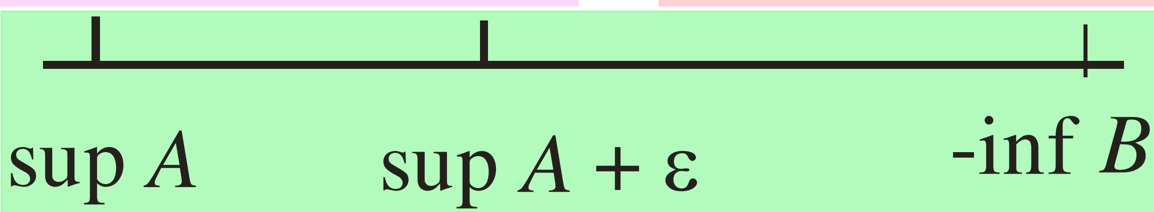
$y = -x \ge \inf B \quad \forall x \in A$

$B = \{-x : x \in A\}$.

$y \ge \inf B \quad \forall y \in B$

$\sup A \ge -\inf B$?

$\sup A < -\inf B$?



$\exists\, \varepsilon > 0 : \sup A + \varepsilon < -\inf B$

$\exists\ \varepsilon > 0 : \sup A + \varepsilon < -\inf B$

$\exists\ \varepsilon > 0 : \sup A < -\varepsilon - \inf B$

$x < -\varepsilon - \inf B \quad \forall x \in A$

$B = \{-x : x \in A\}.$ $\quad -x > \varepsilon + \inf B \quad \forall x \in A$

$y = -x > \varepsilon + \inf B \quad \forall x \in A$

$y > \varepsilon + \inf B \qquad \forall y \in B$

$\varepsilon + \inf B$ là một chặn dưới của B

Bài toán 45. Cho A là một tập khác rỗng bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$. Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh B bị chặn trên và $\inf A = -\sup B$

Bài toán 46 . Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt $b_n = -a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty} b_n$

$A_m = \{a_n : n \geq m\}$

$B_m = \{b_n = -a_n : n \geq m\}$

$d_m = \sup A_m$

$t_m = \inf B_m$

$t_m = -\sup A_m = -d_m$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} d_m$

$\liminf_{n\to\infty} b_n = \lim_{m\to\infty} t_m$

Bài toán 47. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt $b_n = -a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} b_n$

Cho $\{x_m\}$ là một dãy số thực. Với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$ ta đặt

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad .$$

Ta gọi s_n là tổng riêng phần thứ n của dãy $\{x_m\}$.

■ Nếu dãy số thực $\{s_n\}$ hội tụ về một số thực s ta có thể coi s như là "tổng số" của các số trong dãy $\{x_m\}$.

Lúc đó ta gọi s là *chuỗi số* của các số trong dãy $\{x_m\}$ và ký hiệu s là $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ và nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

■ Nếu dãy số thực $\{s_n\}$ phân kỳ, ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ phân kỳ.

Bài toán 48. Chứng minh chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}$ hội tụ và

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1 .$$

Đặt $x_m = 2^{-m}$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$ và $s_n = 2^{-1} + \ldots + 2^{-n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$s_n = 2^{-1}(1 + \ldots + 2^{-n+1}) = 1 - 2^{-n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (qui nạp toán học)

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

Bài toán 49. Cho $c \in (0\,,\,1)$. Chứng minh chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} c^m$ hội tụ và $\sum_{m=1}^{\infty} c^m = \dfrac{c}{1-c}$

Đặt $x_m = c^m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$ và $s_n = c + \ldots + c^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$s_n = c + \cdots + c^n = c(1 + \cdots + c^{n-1}) = c\,\frac{1-c^{n+1}}{1-c} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \frac{c}{1-c}$$

Bài toán 49. Chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m$ phân kỳ .

Đặt $x_m = (-1)^m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và

$$s_n = (-1)^1 + \ldots + (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$s_n = -1$ nếu n lẻ và $s_n = 0$ nếu n chẳn .

$\{s_n\}$ không là một dãy Cauchy

$\{s_n\}$ không hội tụ

Chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m$ phân kỳ .

Định lý (Tiêu chuẩn Cauchy). *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực. Lúc đó chuỗi số* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hội tụ nếu và chỉ nếu với mọi số thực* ε > 0, *có một số nguyên dương* $N(\varepsilon)$ *sao cho*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

$$s_r = \sum_{k=1}^{r} a_k \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}$$

$$s_n - s_m = \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \forall\, n \geq m$$

Cho ε > 0, có một số nguyên dương $N(\varepsilon)$ sao cho

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq m \geq N(\varepsilon)\ .$$

$\{s_n\}$ Cauchy

$\{s_n\}$ hội tụ

HUONG

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ

Định lý . *Cho* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *và* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *là hai chuỗi số thực hội tụ. Lúc đó* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *hội tụ và*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Đặt

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

$$s_n = u_n + v_n$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

Bài toán 50. Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ .Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ về 0.

Với mọi số thực ε > 0, có một số nguyên dương $N(\varepsilon)$ sao cho

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon \qquad \forall \; n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

Với mọi số thực ε' > 0, tìm một số nguyên dương $K(\varepsilon')$ sao cho

$$| a_k - 0 | \leq \varepsilon' \qquad \forall \; k \geq K(\varepsilon')$$

$$|a_k - 0| = |a_k| = \left|\sum_{i=k}^{k} a_i\right| < \varepsilon \qquad \forall \, k \geq N(\varepsilon)$$

Định lý (Tiêu chuẩn so sánh) *Cho một dãy số thực không âm* $\{a_n\}$. *Giả sử chuỗi* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hội tụ. Cho một dãy số thực* $\{b_n\}$ *sao cho có* $N \in \mathbb{N}$ *để cho*

$$|b_n| \le a_n \qquad \forall\ n \ge N.$$

Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *hội tụ.*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| \le \sum_{k=m}^{n} |b_k| \le \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \forall\ n \ge m$$

Định lý (Tiêu chuẩn căn số) *Cho một dãy số thực* $\{b_n\}$. *Giả sử có một số thực dương* $c \in (0, 1)$ *và một số nguyên* N *sao cho* $|b_n|^{1/n} \le c \quad \forall\, n \ge N$.

Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *hội tụ.*

Đặt $a_n = c^n \quad \forall\, n \ge N$

$$|\, b_n \,| \le a_n \qquad \forall\, n \ge N$$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn tỉ số) *Cho một dãy số thực khác không* $\{a_n\}$, *một số thực dương* $c \in (0, 1)$ *và một số nguyên N. Giả sử*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c \qquad \forall\ n \geq N$$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ*

Qui nạp toán học : $|a_n| \leq c^{n-N}|a_N| \qquad \forall\ n \geq N$

Đặt $b_n = c^{n-N}|a_N|$

Định lý (Tiêu chuẩn tỉ số) *Cho một dãy số thực* $\{a_n\}$ *và một số nguyên N. Giả sử*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \forall \; n \geq N$$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Qui nạp toán học : $|a_n| \geq |a_N| > 0 \qquad \forall \; n \geq N$

Suy ra ta không có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Định lý (Tiêu chuẩn Leibnitz) Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho $\{|a_n|\}$ là một dãy đơn điệu giảm hội tụ về 0 và

$$a_m \,.\, a_{m+1} \le 0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Lúc đó $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý (Tiêu chuẩn tích phân) Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho có một số nguyên N và một hàm số f đơn điệu giảm từ $[N, \infty)$ vào $[0,\infty)$ sao cho

$$a_n = f(n) \qquad \forall \quad n \geq N.$$

Lúc đó chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu

$$\int_N^{\infty} f(t)dt < \infty$$

CHƯƠNG SÁU

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Chúng ta đã biết nếu $\{a_n\}$ là một dãy hội tụ về a, theo lý thuyết về dãy số chúng ta có thể dùng $\{a_n^2\}$ để xấp xỉ a^2. Nay chúng ta đặt $f(t) = t^2$ với mọi số thực t. Ta có thể diễn tả việc trên như là "có thể dùng dãy số thực $\{f(a_n)\}$ để xấp xỉ $f(a)$".

Chúng ta sẽ xét một mô hình toán học về các ánh xạ f có tính chất sau: nếu $\{a_n\}$ là một dãy hội tụ về a, thì $\{f(a_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(a)$. Đó là khái niệm hàm số liên tục.

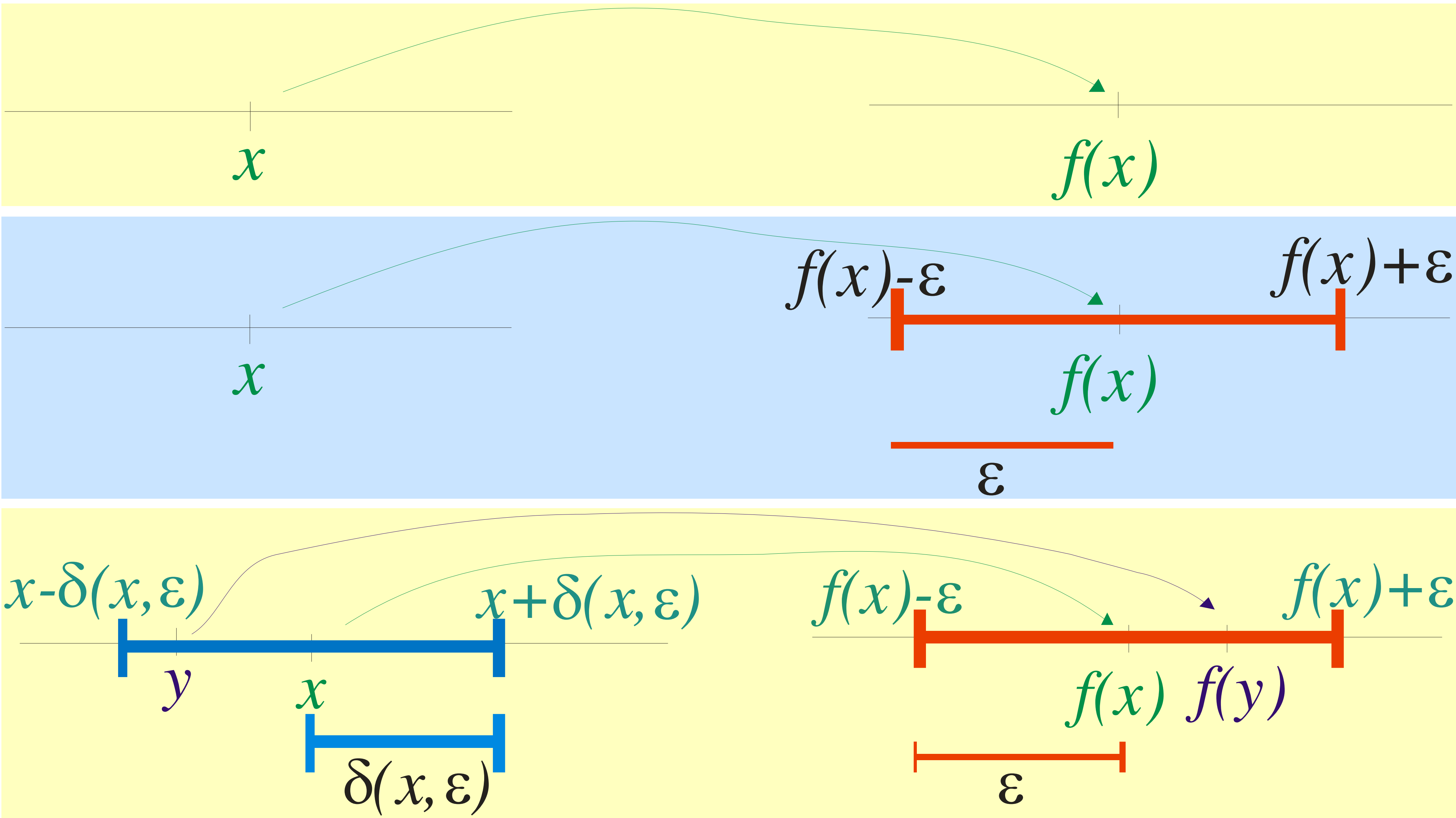
Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$, ta nói f là một hàm số thực trên A.

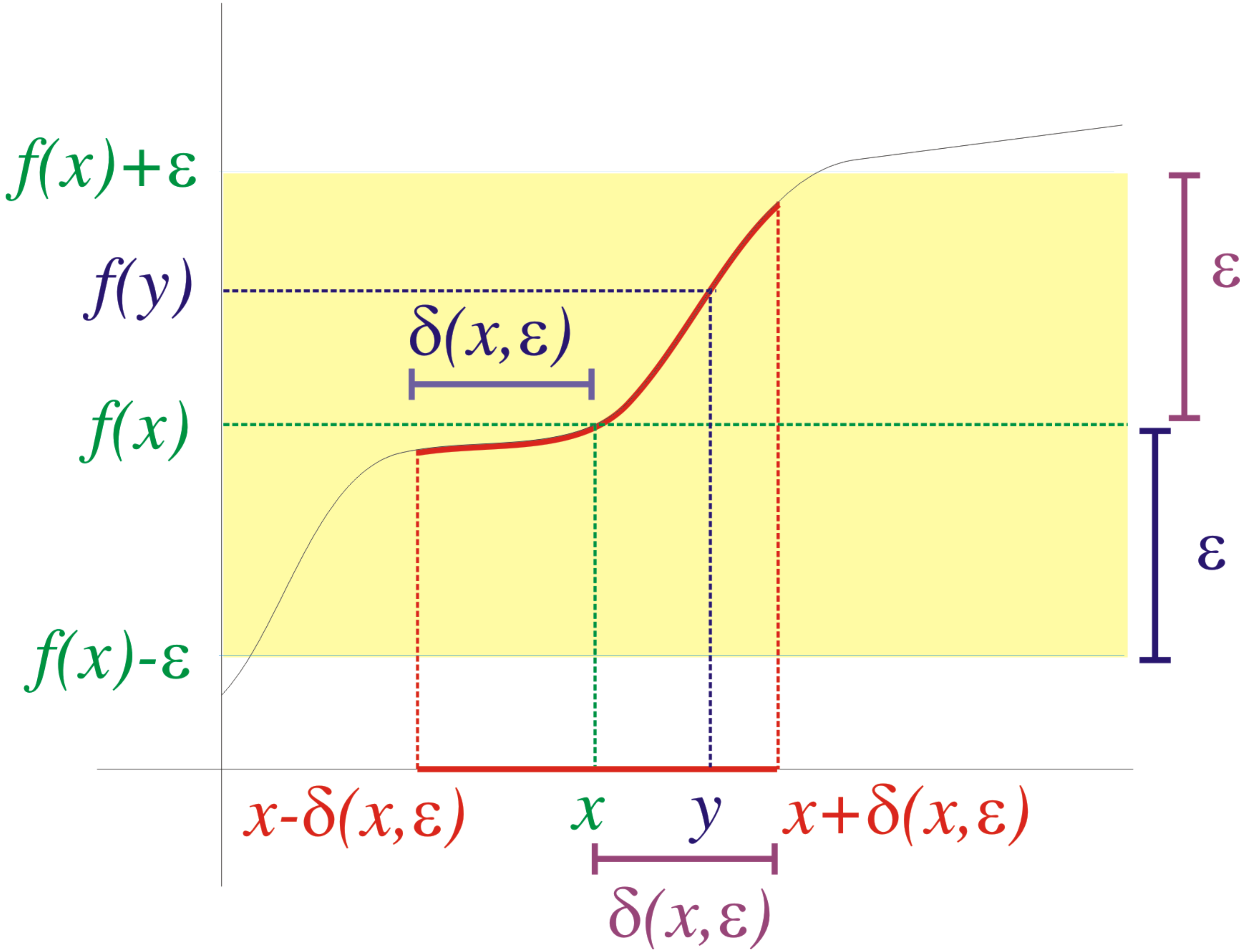
Cho một hàm số thực f trên một tập hợp con khác trống A của $\mathbb{R}$ và $x \in A$, ta nói f liên tục tại x nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương $\delta(x, \varepsilon)$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A \text{ với } |y - x| < \delta(x, \varepsilon).$$

Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in A$ ta nói f liên tục trên A

Với mọi số dương ε ta tìm được một số dương $\delta(x,\varepsilon)$ sao cho $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall\, y \in A$ với $|y - x| < \delta(x,\varepsilon)$.





f(x)+ε
f(y)
δ(x,ε)
f(x)
f(x)-ε
ε
ε
x-δ(x,ε)
x
y
x+δ(x,ε)
δ(x,ε)

Bài toán 51. Cho c là một số thực và đặt $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh f liên tục tại mọi x trong $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$$

$$|f(y) - f(x)| = |c - c| = 0$$

$$\delta(x, \epsilon) = 1$$

$$|f(y) - f(x)| = 0 < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$$

Bài toán 52. Cho c là một số thực dươn , đặt $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh f liên tục tại mọi x trong $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$$

$$|f(y) - f(x)| = |cy - cx| = c|y - x|$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$$c|y - x| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon) \quad (*)$$

Thay $|y - x|$ bằng $\delta(x, \epsilon)$ trong "$c|y - x| < \epsilon$"

$c\,\delta(x, \epsilon) = \epsilon$ | $\delta(x, \epsilon) = c^{-1}\epsilon$ | ta có $(*)$

Bài toán 53. Đặt $f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh f liên tục tại mọi x trong $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

$|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = |(y+x)(y-x)| = |y+x|.|y - x|$

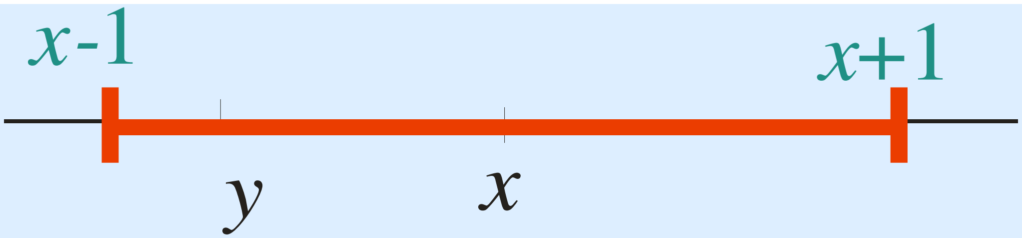
Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|y + x|.|y - x| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists\, \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|y + x|.|y - x| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Cách xử lý $|y + x|$



Nếu $|y - x| < 1$, ta có:

$|y+x| \le |y- x+ 2x| \le$

$\le |y-x| + 2|x| < 1+2|x|$

$|y + x|.|y - x| \le (1+ 2|x|)|y - x| \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y-x| < 1$

Thay $|y - x|$ bằng $\delta(x, \epsilon)$ trong "$(1+ 2|x|)|y - x|$"

$(1+ 2|x|)|y - x| < (1+ 2|x|)\, \delta(x, \epsilon) < \epsilon \; \forall y \in \mathbb{R}, |y-x| < 1$

$(1+ 2|x|)\, \delta(x, \epsilon) \le \epsilon \Leftrightarrow \delta(x, \epsilon) \le (1+ 2|x|)^{-1}\epsilon$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $\epsilon > 0$, đặt $\delta(x, \epsilon) = \min\{1,(1+2|x|)^{-1} \epsilon\} > 0$

$|y+x|.|y-x| \le (1+2|x|)|y-x| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y-x| < \delta(x, \epsilon)$

Bài toán 53. Cho một hàm số thực f trên một tập hợp con A của $\mathbb{R}$ và $x \in A$. Giả sử f liên tục tại x. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong A *(nghĩa là* $x_n \in A$ với mọi n) và $\{x_n\}$ hội tụ về x. Chứng minh dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$

Cho $\epsilon > 0$, có $\exists\, \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$$| f(y) - f(x) | < \epsilon \qquad \forall y \in A, | y - x | < \delta(x, \epsilon)$$

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - x | < \epsilon' \qquad \forall n \geq N(\epsilon') .$$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| f(x_m) - f(x) | < \epsilon'' \qquad \forall m \geq M(\epsilon'') .$$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$\boxed{|f(x_m) - f(x)| < \epsilon''}$ $\forall\, m \geq M(\epsilon'')$.

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$\boxed{|x_n - x| < \epsilon'}$ $\forall\, n \geq N(\epsilon')$.

Cho một $\epsilon > 0$ ta có $\delta(x,\epsilon) > 0$ sao cho

$\boxed{|f(y) - f(x)| < \epsilon}$ $\forall\, y \in A$ với $\boxed{|y - x| < \delta(x,\epsilon)}$

$\epsilon'' \rightleftarrows \epsilon$ | $x_m \rightleftarrows y$ | $\delta(x,\epsilon) \rightleftarrows \epsilon'$ | $M(\epsilon'') \rightleftarrows N(\epsilon')$

Cho $\epsilon'' > 0$ đặt $\epsilon = \epsilon''$ | Với ϵ có $\delta(x,\epsilon)$ | đặt $\epsilon' = \delta(x,\epsilon)$ | Với ϵ' có $N(\epsilon')$ | đặt $M(\epsilon'') = N(\epsilon')$

$m \geq M(\epsilon'') = N(\epsilon')$ $\Rightarrow$ $|x_n - x| < \epsilon' = \delta(x,\epsilon)$ $\Rightarrow$ $|f(x_m) - f(x)| < \epsilon''$

Bài toán 54. Cho một hàm số thực f trên một tập hợp con A của $\mathbb{R}$ và $x \in A$. Giả sử với mọi dãy $\{x_n\}$ trong A (nghĩa là $x_n \in A$ với mọi $n \in \mathbb{N}$) và $\{x_n\}$ hội tụ về x, thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$. Lúc đó f liên tục tại x.

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq N(\epsilon)$$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon' \qquad \forall\, n \geq M(\epsilon').$$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $\delta(x,\epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon''$ $\quad \forall\, y \in A$ với $|y - x| < \delta(x,\epsilon'')$

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $|y_\delta - x| < \delta$ sao cho $|f(y_\delta) - f(x)| \geq \epsilon''$

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - x | < \epsilon \quad \forall\, n \geq N(\epsilon)$.

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| f(x_n) - f(x) | < \epsilon' \quad \forall\, n \geq M(\epsilon')$.

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $| y_\delta - x | < \delta$ sao cho $| f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon''$

Tìm các thành tố có vẽ mâu thuẫn với nhau

$| f(x_n) - f(x) | < \epsilon' \quad \rightleftarrows \quad | f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon''$

$y_\delta \rightleftarrows x_n$ $\qquad | y_\delta - x | < \delta \rightleftarrows | x_n - x | < \epsilon$

Chọn $\delta = n^{-1}$ và $x_n = y_{1/n}$

$| x_n - x | < n^{-1}$ và $| f(x_n) - f(x) | = | f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon'' \quad \forall\, n$

Bài toán 55. *Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và hai hàm số thực f và g trên A liên tục tại x. Đặt*

$$h(z) = f(z) + g(z) \qquad \forall z \in A.$$

Lúc đó h liên tục tại x.

Cho một $\epsilon > 0$ ta có $\delta(x,\epsilon) > 0$ sao cho

$| f(y) - f(x) | < \epsilon \quad \forall y \in A$ với $| y - x | < \delta(x,\epsilon)$

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có $\eta(x,\epsilon') > 0$ sao cho

$| g(y) - g(x) | < \epsilon' \quad \forall y \in A$ với $| y - x | < \eta(x,\epsilon')$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $\mu(x,\epsilon'') > 0$ sao cho

$| h(y) - h(x) | < \epsilon'' \quad \forall y \in A$ với $| y - x | < \mu(x,\epsilon'')$

Cho một $\epsilon > 0$ ta có $\delta(x,\epsilon) > 0$ sao cho

$\boxed{| f(y) - f(x) | < \epsilon}$ $\quad \forall y \in A$ với $| y - x | < \delta(x,\epsilon)$

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có $\eta(x,\epsilon') > 0$ sao cho

$\boxed{| g(y) - g(x) | < \epsilon'}$ $\quad \forall y \in A$ với $| y - x | < \eta(x,\epsilon')$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $\mu(x,\epsilon'') > 0$ sao cho

$\boxed{| h(y) - h(x) | < \epsilon''}$ $\quad \forall y \in A$ với $| y - x | < \mu(x,\epsilon'')$

$| h(y) - h(x) | = | (f(y) + g(y)) - (f(x) + g(x)) |$

$= | f(y) - f(x) + g(y) - g(x) | \leq | f(y) - f(x) | + | g(y) - g(x) |$

$| h(y) - h(x) | < \epsilon + \epsilon'$ $\forall y \in A$ với $|y - x| < \delta(x,\epsilon)$, $|y - x| < \eta(x,\epsilon')$

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon''$$

$$\mu(x,\epsilon'') = \min \{ \delta(x,\epsilon), \eta(x,\epsilon') \}$$

Bài toán 55. *Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và hai hàm số thực f và g trên A liên tục tại x. Đặt $h(z) = f(z) + g(z)$ $\forall z \in A$.*

Chứng minh h liên tục tại x.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $h(x)$

$$h(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$$

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$f(x_n) + g(x_n) = h(x_n)$$

$$f(x) \qquad g(x) \qquad f(x) + g(x)$$

Bài toán 56. *Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và hai hàm số thực f và g trên A liên tục tại x. Đặt $h(z) = f(z)g(z)$ $\forall z \in A$.*

Chứng minh h liên tục tại x.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $h(x)$

$$h(x_n) = f(x_n)g(x_n)$$

$$h(x) = f(x)g(x)$$

$$f(x_n) \,.\, g(x_n) = h(x_n)$$

$$f(x) \qquad g(x) \qquad f(x).g(x)$$

Bài toán 57. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và f_1 , ..., f_n là các hàm số thực trên A liên tục tại x. Đặt $h(z) = f_1(z) +. . . +f_n(z)$ và $k(z) = f_1(z) . . . f_n(z)$ với mọi $z \in A$. Chứng minh h và k liên tục tại x.

Chứng minh h liên tục tại x

Dùng qui nạp toán học

$n = 1$: đúng

Giả sử kết quả đúng với $n = m$. Xét trường hợp $n = m+1$

$h(z) = f_1(z) +. . . +f_{n+1}(z) = [f_1+. . . +f_m](z) + f_{m+1}(z)$

$f_1+. . . +f_m$: liên tục tại x theo giả thiết qui nạp

$h = [f_1+. . . +f_m]+ f_{m+1}$: liên tục tại x

Tương tự k liên tục tại x

Bài toán 57b. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và f là một hàm số thực trên A liên tục tại x.

Giả sử $f(z) \neq 0$ với mọi z trong A. Đặt $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ với mọi $z \in A$. Chứng minh g liên tục tại x.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Chứng minh $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$.

Đặt $a_n = f(x_n)$, $b_n = g(x_n)$, $a = f(x)$ và $b = g(x)$

$b_n = g(x_n) = \dfrac{1}{f(x_n)} = \dfrac{1}{a_n}$ và $b = g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a}$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Chứng minh $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$.

Đặt $a_n = f(x_n)$, $b_n = g(x_n)$, $a = f(x)$ và $b = g(x)$

$$b_n = g(x_n) = \frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{a_n} \text{ và } b = g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$$

Cho $\{x_n\}$ hội tụ về x trong A

Ta có $\{a_n\}$ hội tụ về a

$a_n \neq 0$ và $a \neq 0$

Theo bài toán 23b

$\{b_n\}$ hội tụ về b

Bài toán 58. Cho A và B là hai tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, f là một hàm số thực liên tục trên A và g là một hàm số thực liên tục trên B sao cho $f(A) \subset B$. Chứng minh $h = gof$ liên tục trên A.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h = g\, o\, f"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

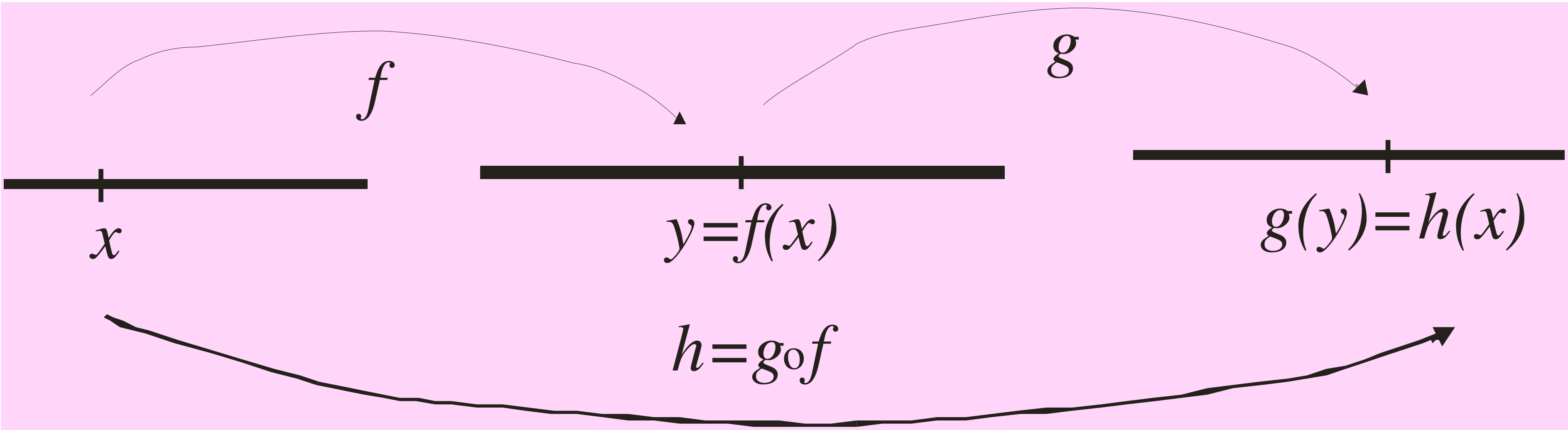
Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Cho $\{y_m\}$ là một dãy hội tụ về y trong B.

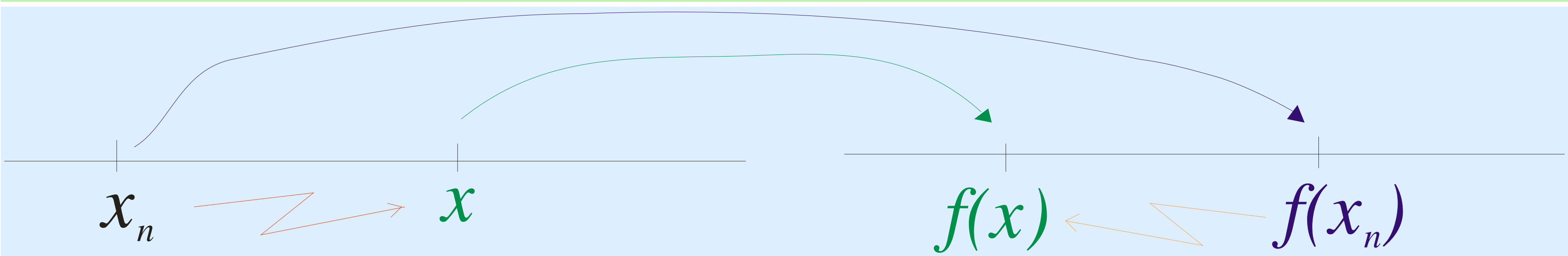
Ta có $\{g(y_m)\}$ là một dãy hội tụ về $g(y)$

Cho $\{z_n\}$ là một dãy hội tụ về z trong A.

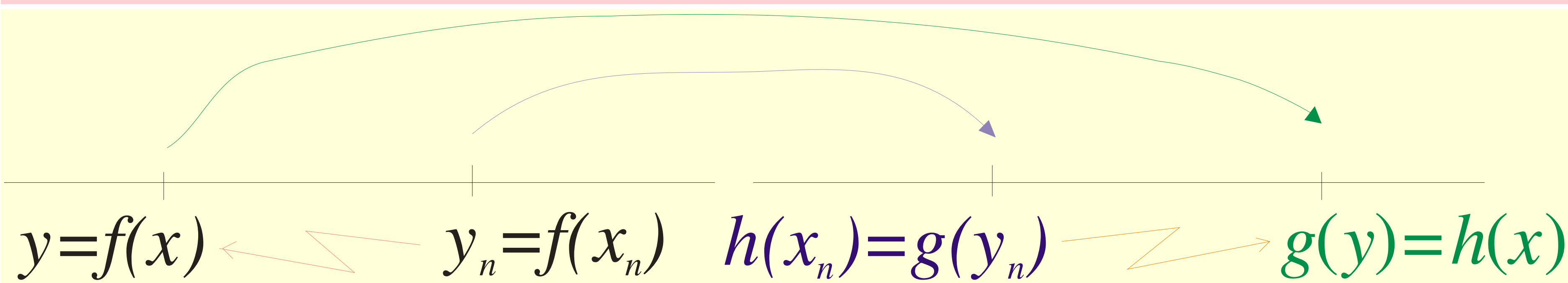
Chứng minh $\{h(z_n)\}$ là một dãy hội tụ về $h(z)$



$\{x_n\}$ hội tụ về $x \Rightarrow \{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$



$\{y_m\}$ hội tụ về $y \Rightarrow \{g(y_m)\}$ hội tụ về $g(y)$



Bài toán 59. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó tập hợp ảnh $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ là một tập bị chặn trên trong $\mathbb{R}$.

Cho $x \in [a, b]$ và $\epsilon > 0$ ta có $\delta(x,\epsilon) > 0$ sao cho
$| f(y) - f(x) | < \epsilon \quad \forall y \in [a, b]$ với $| y - x | < \delta(x,\epsilon)$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$.

Có một số thực M sao cho

$y \leq M \quad \forall y \in f([a, b])$

Có một số thực M sao cho

$f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$\forall$ số thực M , $\exists x \in [a, b]$ sao cho $f(x) > M$

$\forall$ số thực M , $\exists x_M \in [a, b]$ sao cho $f(x_M) > M$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$.

$\forall$ số thực M, $\exists z_M \in [a, b]$ sao cho $f(z_M) > M$

Chọn $x_n = z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vì $\{z_n\} \subset [a, b]$, có một dãy con $\{z_{m_n}\}$ của $\{z_n\}$ hội tụ về x trong $[a, b]$

Chọn $x_n = z_{m_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$ và

$$f(x_n) > m_n \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

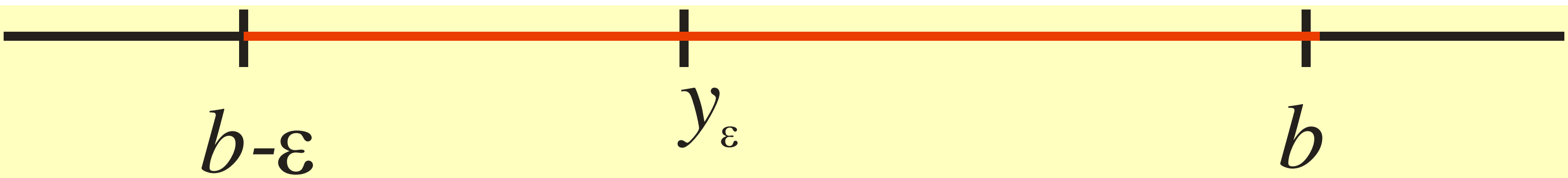
Vô lý

Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực Cauchy. Lúc đó $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$

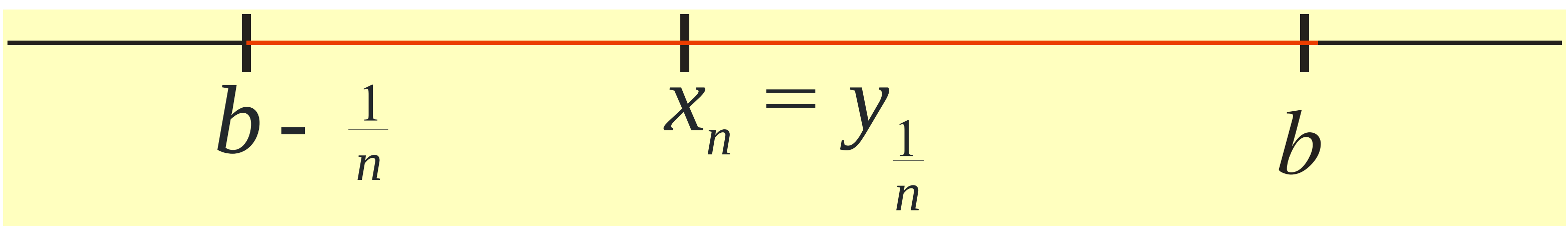
Bài toán 60. Cho A là một tập khác trống và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Chứng minh có dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về $b = \sup A$

- $x \leq b \qquad \forall\ x \in A$
- $\forall\ \epsilon > 0\ :\ b - \epsilon$ không là một chặn trên của A

$\forall\ \epsilon > 0$, có $y_\epsilon \in A$ sao cho $y_\epsilon \in [b - \epsilon\ ,\ b]$



Đặt $x_n = y_{1/n}$
$\forall\ n \in \mathbb{N}$



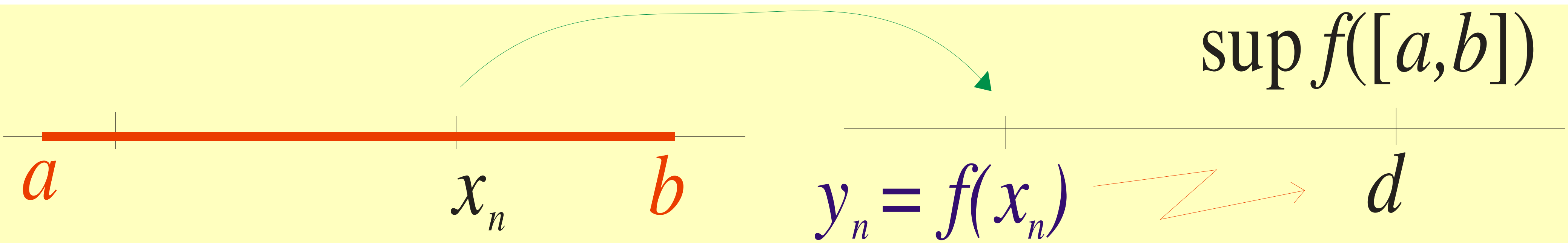
Cho A là một tập khác trống và bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$. Chứng minh có dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về $c = \inf A$.

Bài toán 61. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Lúc đó có c trong $[a, b]$ sao cho $f(c) = \max f([a, b])$

$f([a, b]) = \{ f(x) : x \in [a, b] \}$ là một tập bị chặn trên

$\exists \{y_n\} \subset f([a,b])$ sao cho $\{y_n\}$ hội tụ về $d = \sup f([a,b])$

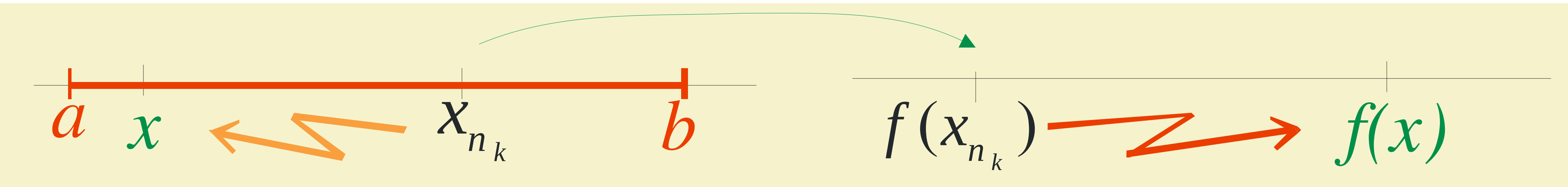
$\exists \{x_n\} \subset [a,b]$ sao cho $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $d = \sup f([a,b])$



Có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ về x trong $[a, b]$

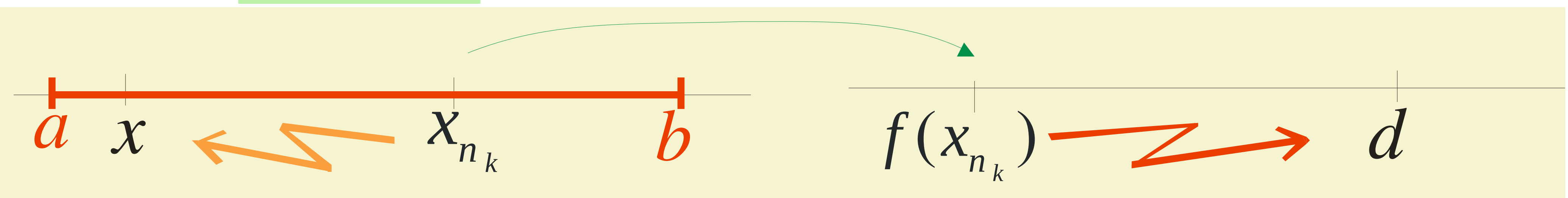
Có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ về x trong $[a, b]$

Vì f liên tục , dãy $\{f(x_{n_k})\}$ hội tụ về $f(x)$



$\{f(x_n)\}$ hội tụ về $d = \sup f([a,b])$

Dãy con $\{f(x_{n_k})\}$ của $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $d = \sup f([a,b])$



$x \in [a, b]$ và $f(x) = d = \sup f([a,b])$

Đặt $c = x \in [a, b]$

$f(c) = \sup f([a,b]) = \max f([a,b])$

Bài toán 62. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[c,d]$. Đặt $\alpha = f(c)$ và $\beta = f(d)$. Giả sử $\alpha < \beta$. Chứng minh $[\alpha, \beta] \subset f([c,d])$.

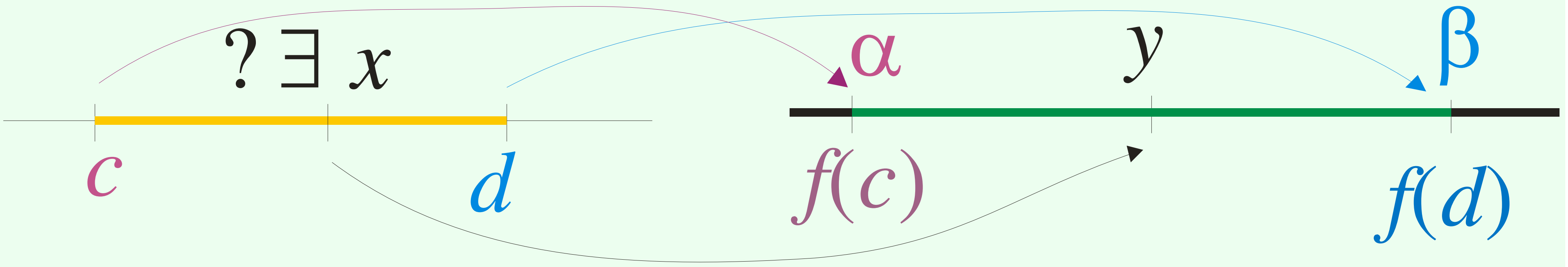
Cho $y \in [\alpha, \beta]$ chứng minh $y \in f([c, d])$

Cho $y \in [\alpha, \beta]$ chứng minh có $x \in [c,d]$ để cho $f(x) = y$

$y = \alpha \;:\; y = f(c)$

$y = \beta :\; y = f(d)$

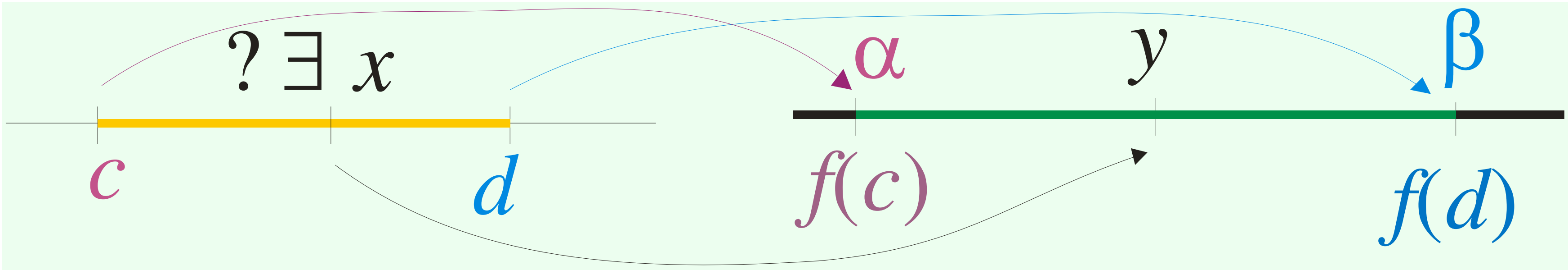
Cho $y \in (\alpha, \beta)$ chứng minh có $x \in (c,d)$ để cho $f(x) = y$



Đặt $S = \{ x \in [c, d] : f(x) < y \}$

$c \in S \subset [c, d]$

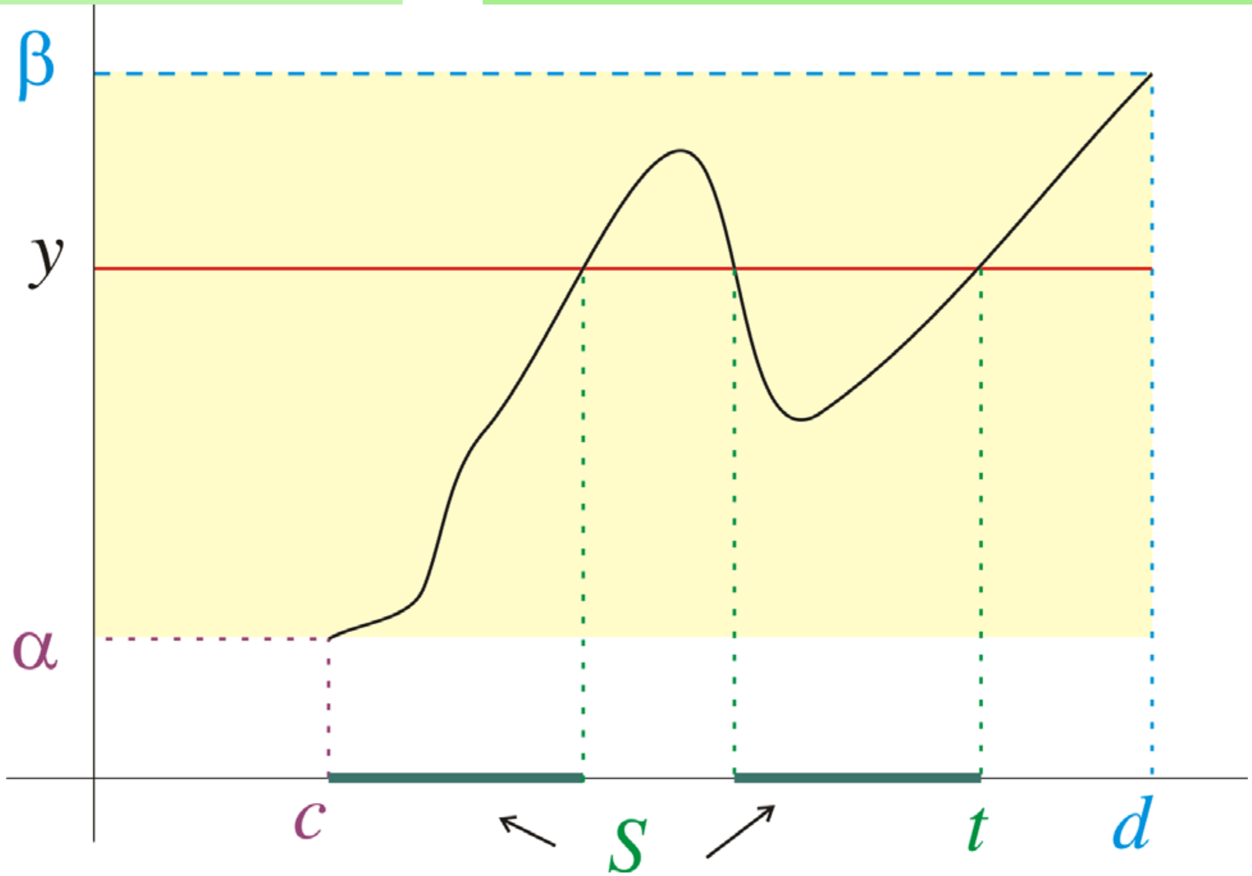
$\exists\ t \in [c, d]$ để cho $t = \sup S$



Đặt $S = \{ x \in [c, d] : f(x) < y \}$

$c \in S \subset [c, d]$

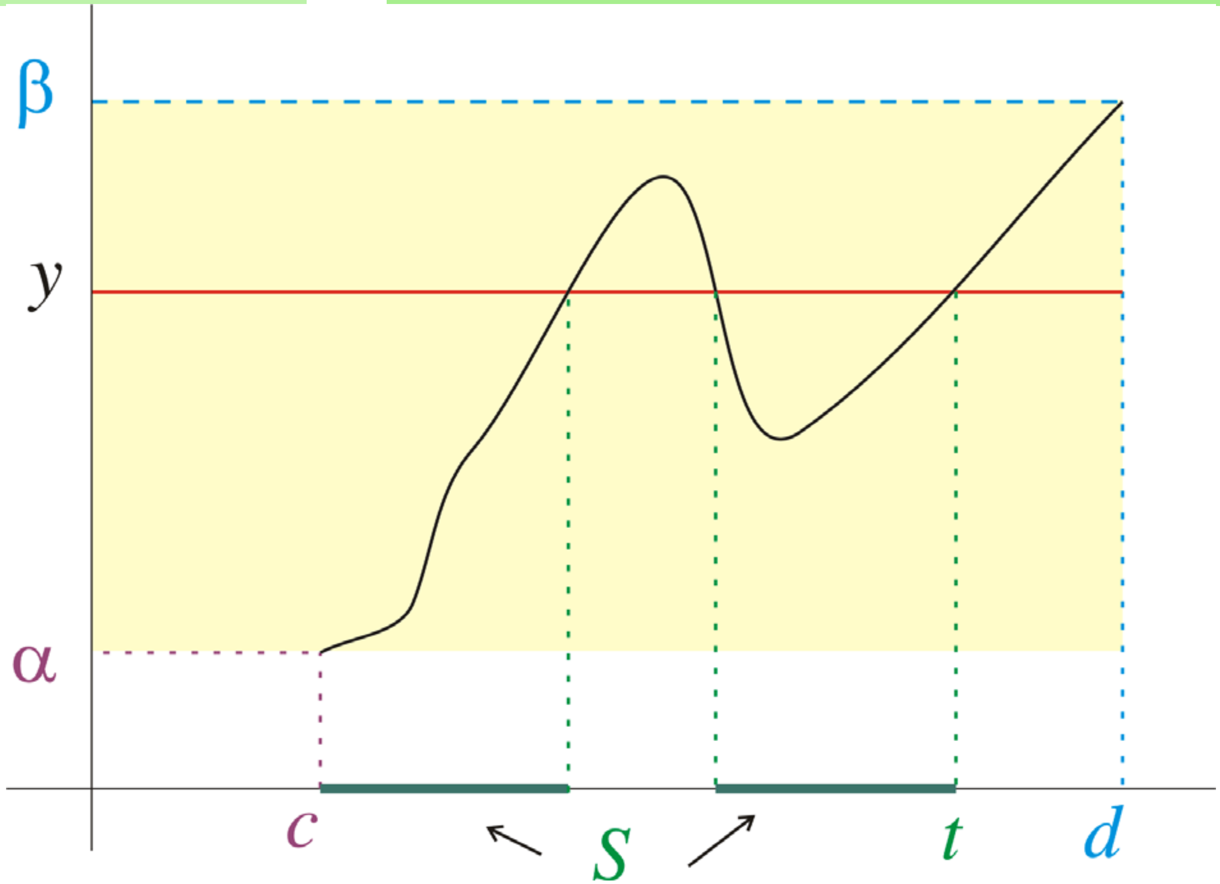
$\exists\ t \in [c, d]$ để cho $t = \sup S$



Đặt $S = \{ x \in [c, d] : f(x) \leq y \}$

$c \in S \subset [c, d]$

$\exists\ t \in [c, d]$ để cho $t = \sup S$



Ta chứng minh $f(t) = y$

$f(t) \leq y$

$f(t) \geq y$

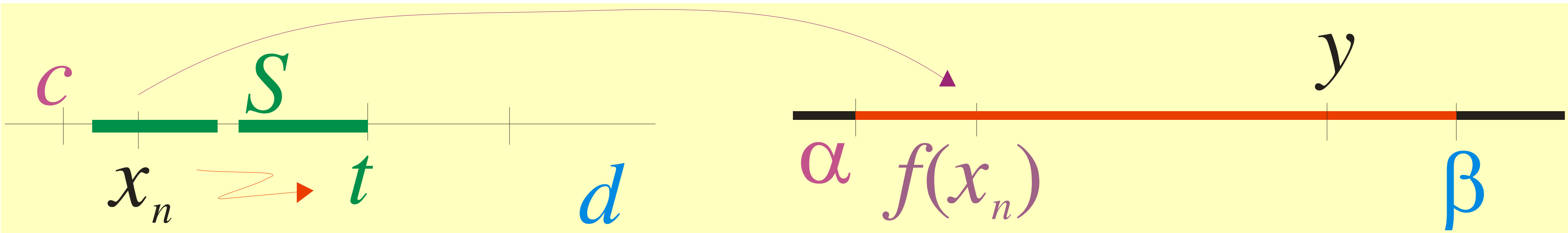
Ta chứng minh $f(t) \leq y$

Đặt $S = \{ x \in [c, d] : f(x) \le y \}$

$\exists\ t \in [c, d]$ để cho $t = \sup S$

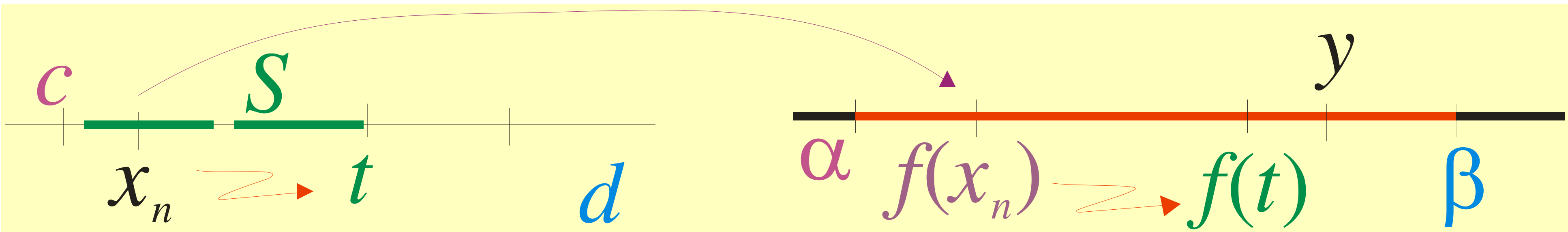
Ta chứng minh $f(t) \le y$

Có $\{x_n\}$ trong S sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về t



$f(x_n) \le y$

$\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(t)$



$f(t) \le y$

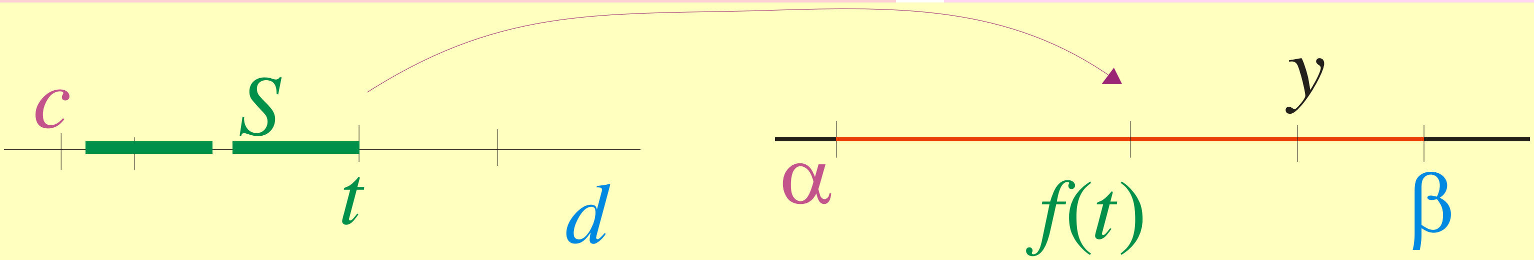
Đặt $S = \{ x \in [c, d] : f(x) \leq y \}$

$\exists \; t \in [c, d]$ để cho $t = \sup S$

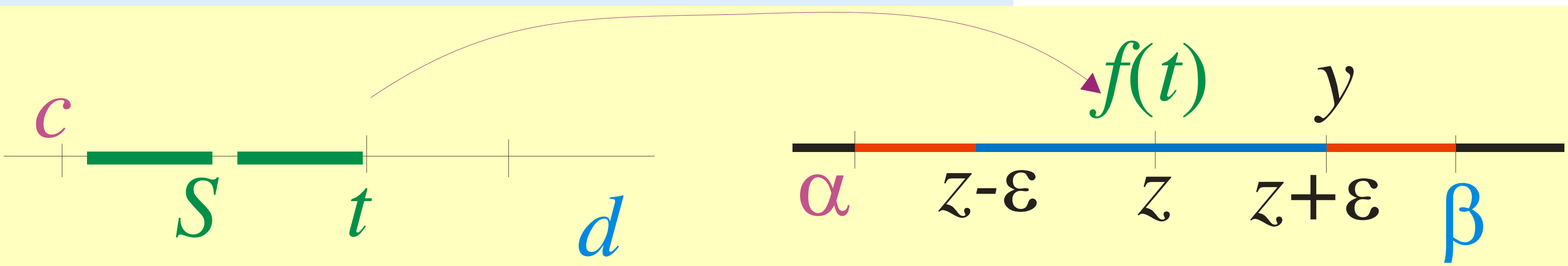
$f(t) \leq y$

Ta chứng minh $f(t) \geq y$

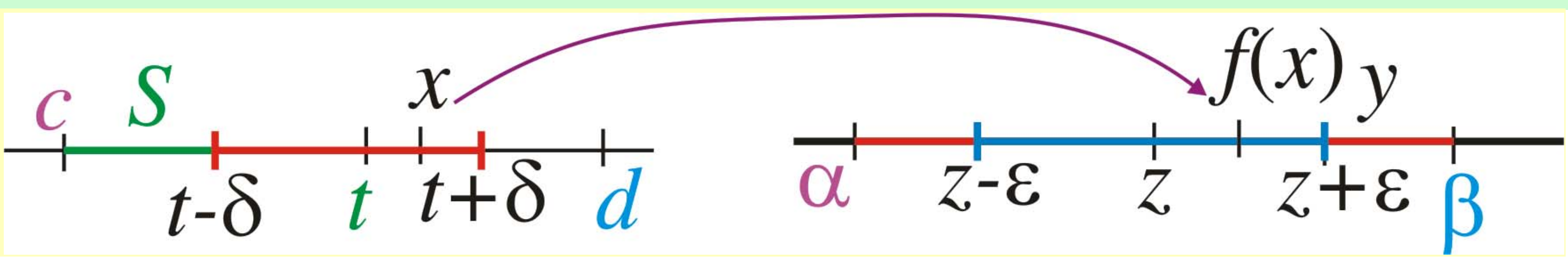
Giả sử $f(t) < y$



Đặt $\varepsilon = y - f(t) > 0$ và $z = f(t)$



$\exists \; \delta > 0$ sao cho : $|f(x) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall \, x \in [c,d], |x-t| < \delta$



Đặt $S = \{ x \in [c, d] : f(x) \le y \}$

$\exists\ t \in [c, d]$ để cho $t = \sup S$

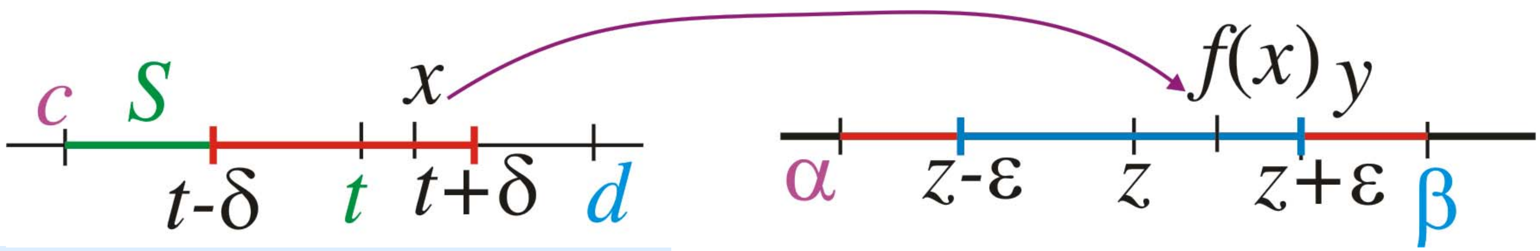
$f(t) \le y$

Ta chứng minh $f(t) \ge y$

Giả sử $f(t) < y$

Đặt $\varepsilon = y - f(t) > 0$ và $z = f(t)$

$\exists\ \delta > 0$ sao cho : $|f(x) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [c,d], |x-t| < \delta$



Đặt $x = t + \dfrac{1}{2}\delta \ > \ t$

$|f(x) - f(t)| < \varepsilon$

$f(x) - f(t) < \varepsilon$

$f(x) < f(t) + \varepsilon = f(t) + y - f(t) = y$

$x \in S$ và $x > t = \sup S$

Vô lý

$f(t) \ge y$

Bài toán 63. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[c, d]$. Đặt $\alpha = f(c)$ và $\beta = f(d)$. Giả sử $\alpha > \beta$. Chứng minh $[\beta, \alpha] \subset f([c, d])$.

Đặt $g(x) = f(c+d-x)$ $\forall x \in [c, d]$. Ta có

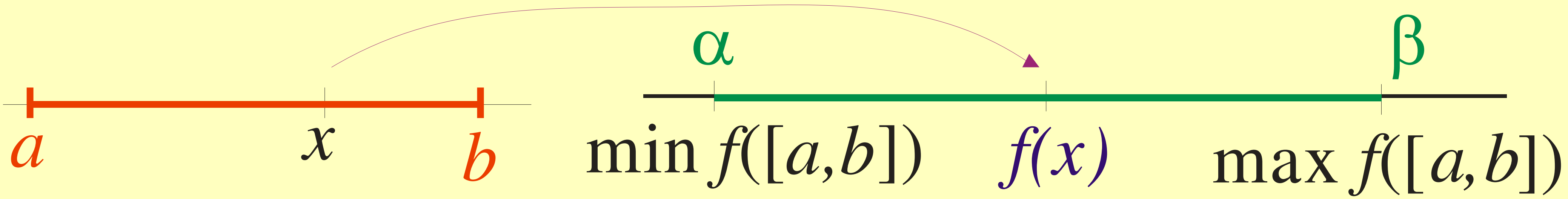
- $(c+d-x) \in [c, d]$ nếu và chỉ nếu $x \in [c, d]$.
- g là một hàm số thực liên tục trên $[c, d]$.
- $g(c) = f(d) = \beta$
- $g(d) = f(c) = \alpha$
- Nếu $g(s) = y$ thì $f(t) = y$, với $t = c+d-s$

Áp dụng bài toán 62 : $[\beta, \alpha] \subset g([c, d])$

Bài toán 64. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Đặt $\alpha = \min f([a, b])$ và $\beta = \max f([a, b])$. Chứng minh $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

$f([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$

$[\alpha, \beta] \subset f([a, b])$



$f([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$?

$y \in f([a, b]) \Rightarrow y \in [\alpha, \beta]$?

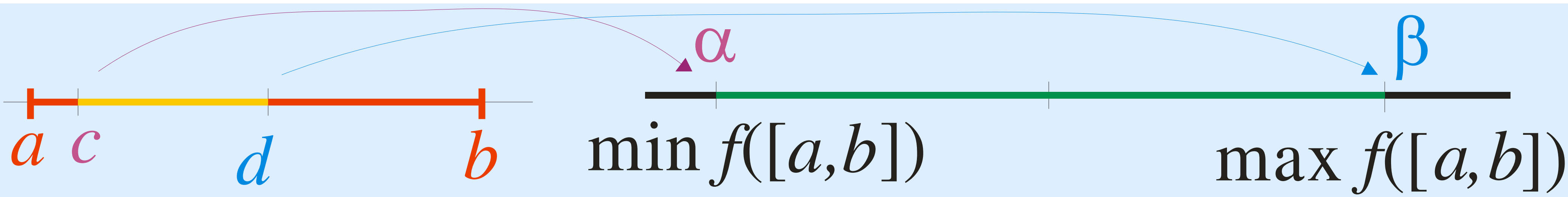
$y \in f([a, b]) \Rightarrow \alpha \leq y \leq \beta$?

$y \in f([a, b]) \Rightarrow \min f([a, b]) \leq y \leq \max f([a, b])$?

Chứng minh $[\alpha , \beta] \subset f([a , b])$

$\exists c,\ d \in [a,b]$ để cho

$f(c) = \min f([a,b]) = \alpha$ và $f(d) = \max f([a,b]) = \beta$



các bài toán 60 và 61 : $[\alpha , \beta] \subset f([c , d])$

$f([c , d]) \subset f([a , b])$

$[\alpha , \beta] \subset f([a , b])$

Đinh nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$. Ta nói A là một khoảng nếu với mọi x và y trong A sao cho $x < y$, ta có $[a,b] \subset A$.

Các tập sau đây là là các khoảng:

1. $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}$.
2. $(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \le b \}$.
3. $[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x < b \}$.
4. $(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$.
5. $[a,\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \}$.
6. $(a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \}$.
7. $(-\infty,b] = \{ x \in \mathbb{R} : x \le b \}$.
8. $(-\infty,b) = \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}$.
9. $\mathbb{R}$.

- Trong các trường hợp 1, 2, 3, 4, 5, 6 : a được gọi là một đầu mút của khoảng.
- Trong các trường hợp 1, 2, 3, 4, 7, 8 : b được gọi là một đầu mút của khoảng.

Bài toán 65. Cho A và B là hai khoảng trong $\mathbb{R}$ và f là một song ánh và đơn điệu tăng từ A vào B. Chứng minh f là một hàm số liên tục trên A.

f đơn điệu tăng nếu và chỉ nếu : $u < v$ thì $f(u) \leq f(v)$

Trong trường hợp bài toán này (f đơn ánh), f đơn điệu tăng nghiêm cách : $u < v$ thì $f(u) < f(v)$.

Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |y - x| < \delta(\varepsilon)$.

Ta phân ra ba trường hợp :

• x không là đầu mút của A.

• • x là đầu mút phía tay trái của A.

• • • x là đầu mút phía tay mặt của A.

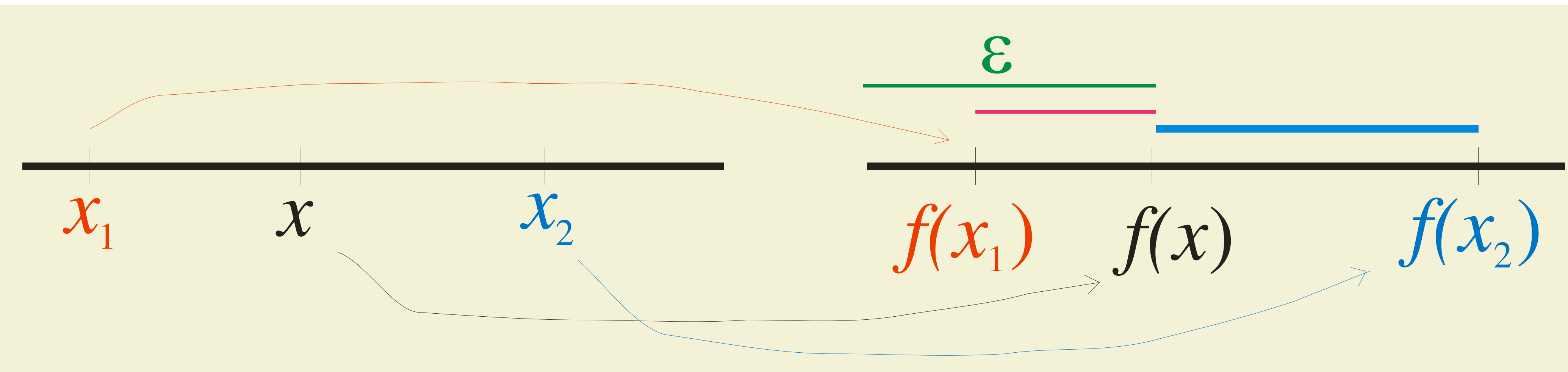
$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) < f(v) \,.$$

Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |\, y - x \,| < \delta(\varepsilon) \,.$$

• x không là đầu mút của A.

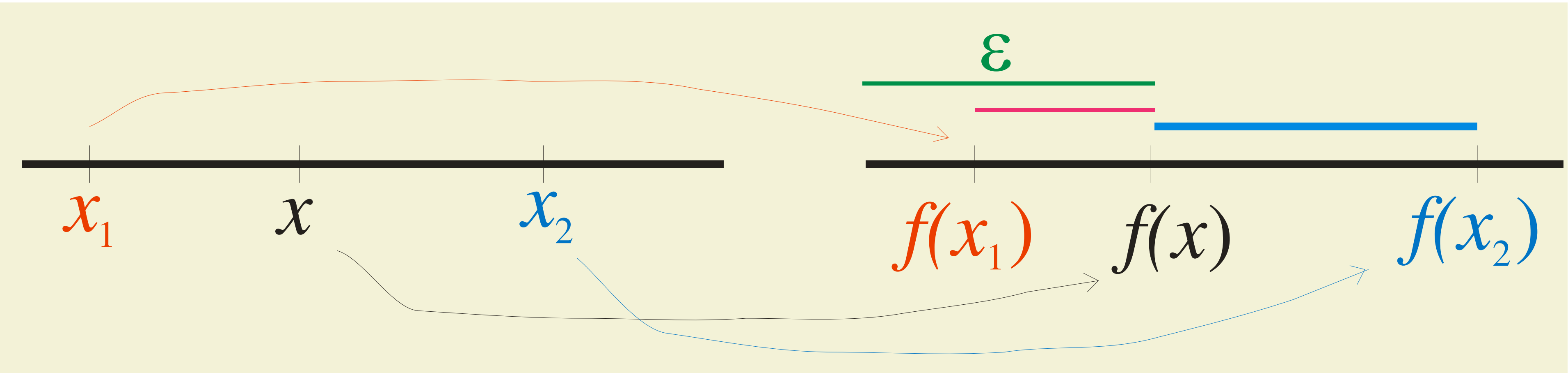
Có x_1 và x_2 trong A sao cho $x_1 < x < x_2$ $\quad f(x_1) < f(x) < f(x_2)$



Đặt $\eta = \min\{\varepsilon, f(x)-f(x_1), f(x_2)-f(x)\} = \min\{\_\_, \_\_, \_\_\}$

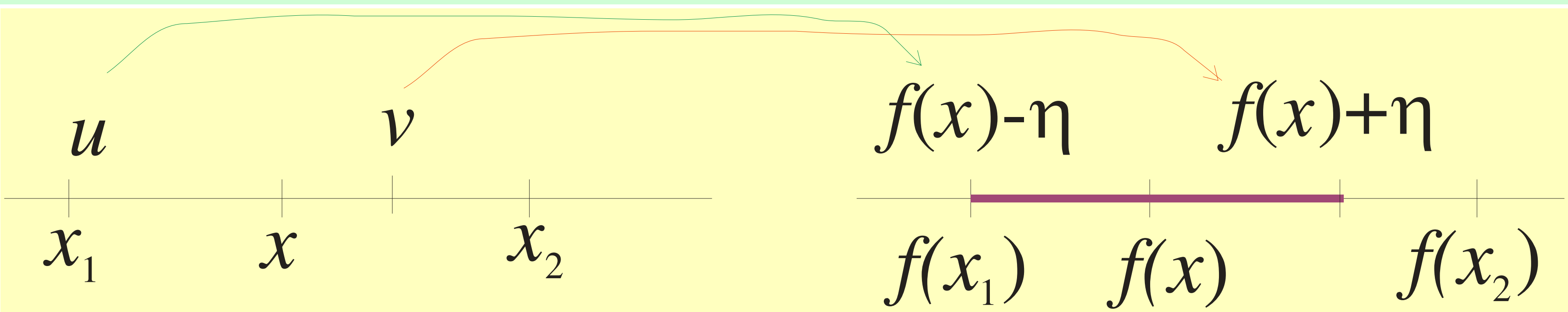
Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |y - x| < \delta(\varepsilon)\ .$$



$$\textit{Đặt}\ \ \eta = \min\{\varepsilon, f(x)-f(x_1), f(x_2)-f(x)\} = \min\{\;,\;,\;\}$$

Có u và v trong $[x_1,x_2] \subset A$ sao cho : $f(u) = f(x) - \eta$ và $f(v) = f(x) + \eta$

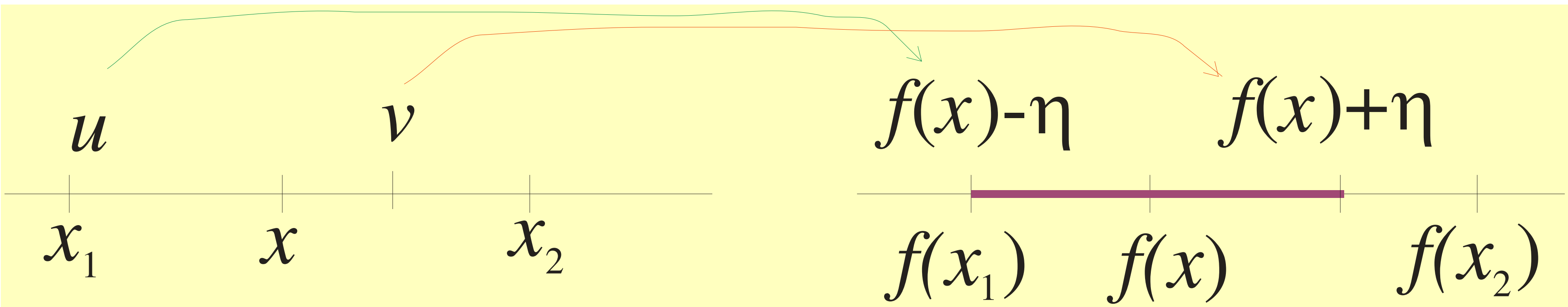


Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |y - x| < \delta(\varepsilon)$.

Đặt $\eta = min\{\varepsilon, f(x)\text{-}f(x_1), f(x_2)\text{-}f(x)\} = \min\{\_\_, \_\_, \_\_\}$

$\exists\, u, v \in [x_1, x_2] \subset A$ sao cho : $f(u) = f(x)-\eta$ và $f(v) = f(x)+\eta$



Đặt $\delta = \min\{x - u, v - x\} > 0$. Lúc đó $[x - \delta, x + \delta] \subset [u, v]$:

$|f(y) - f(x)| < \eta \le \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |y - x| < \delta(\varepsilon)$

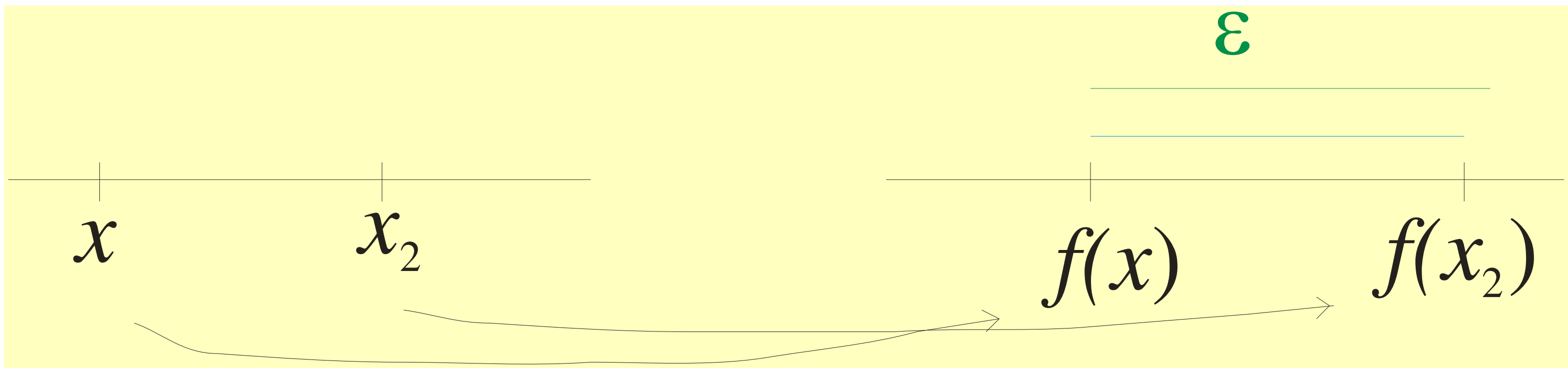
• • x là đầu mút phía tay trái của A.

Cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |\, y - x\,| < \delta(\varepsilon)$.

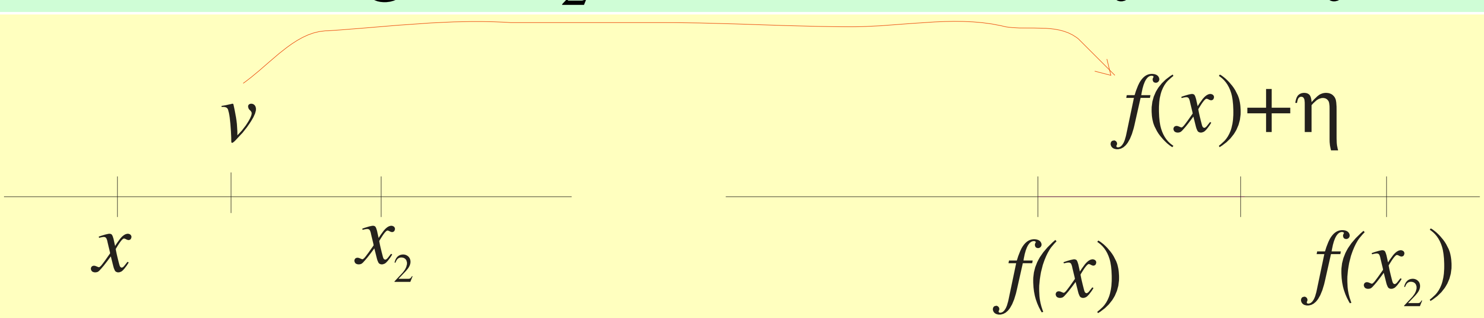
Có x_2 trong A sao cho $x < x_2$

$f(x) < f(x_2)$



Đặt $\eta = min\{\varepsilon,\ f(x_2)\text{-}f(x)\} = \min\{$—, —$\}$

Có v trong $[x,x_2] \subset A$ sao cho : $f(v) = f(x) + \eta$



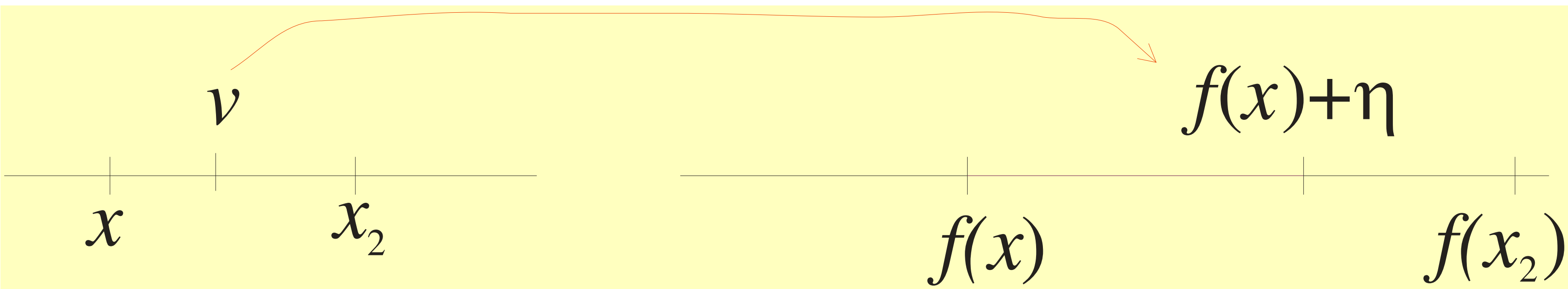
Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A, \ |y - x| < \delta(\varepsilon)$.

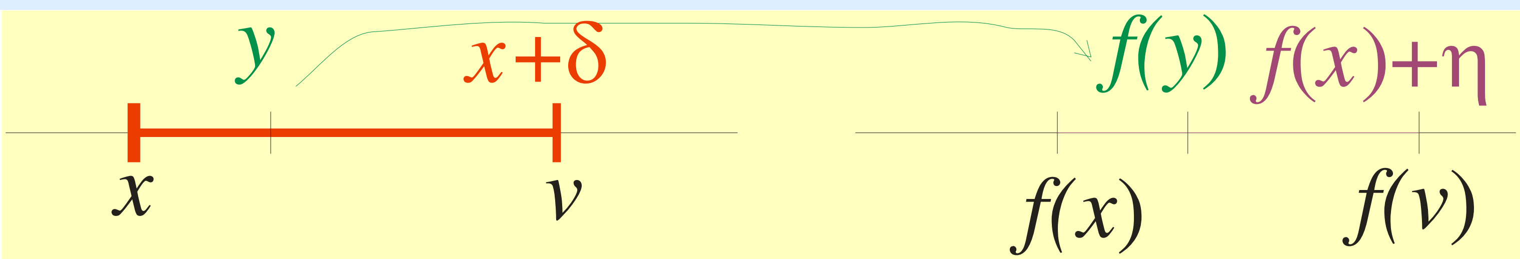
Có x_2 trong A sao cho $x < x_2$ $\qquad f(x) < f(x_2)$

Đặt $\eta = min\{\varepsilon,\ f(x_2) - f(x)\} = \min\{\text{—},\ \text{—}\}$

Có v trong $[x, x_2] \subset A$ sao cho : $f(v) = f(x) + \eta$



Đặt $\delta = v - x > 0$. Lúc đó $[x, x + \delta] \subset [x, v]$



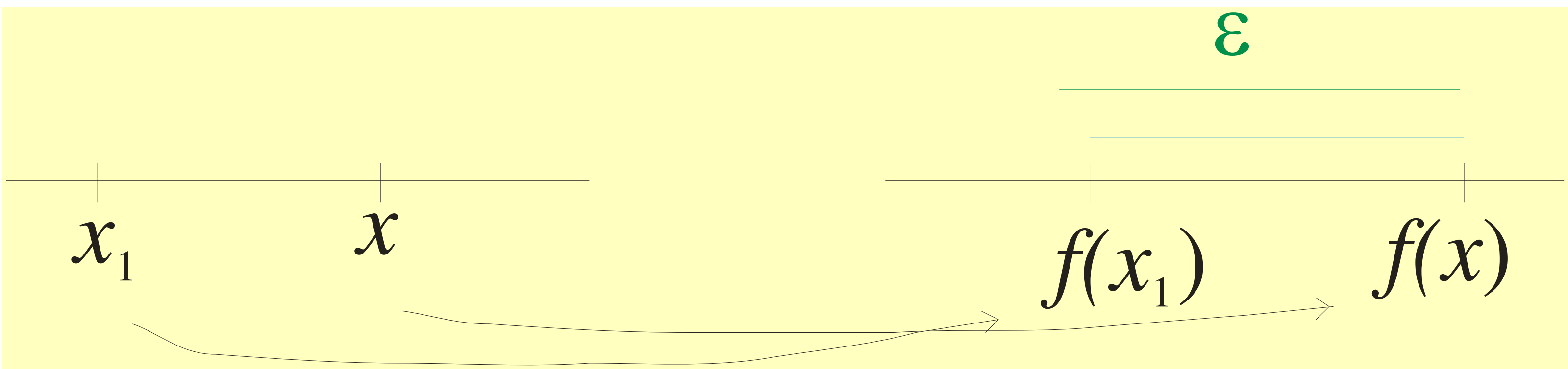
$|f(y) - f(x)| < \eta \leq \varepsilon \qquad \forall\, y \in A, \ |y - x| < \delta(\varepsilon)$

Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |\,y - x\,| < \delta(\varepsilon)$.

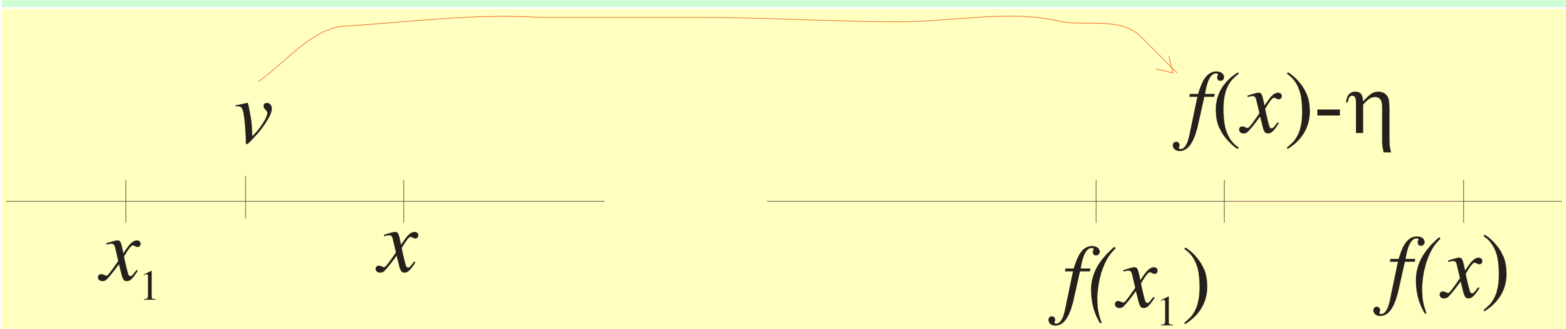
• • • x là đầu mút phía tay phải của A.

Có x_1 trong A sao cho $x_1 < x$ $\qquad f(x_1) < f(x)$



Đặt $\eta = min\{\varepsilon,\ f(x) - f(x_1)\} = \min\{\text{—},\ \text{—}\}$

Có u trong $[x_1, x] \subset A$ sao cho : $f(v) = f(x\ ) - \eta$



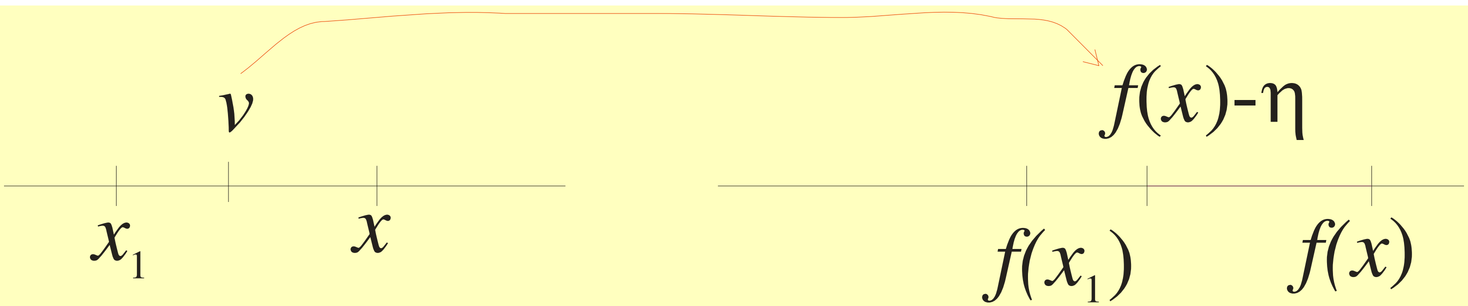
Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |\, y - x \,| < \delta(\varepsilon)$.

Có x_1 trong A sao cho $x_1 < x$ $\qquad f(x_1) < f(x)$

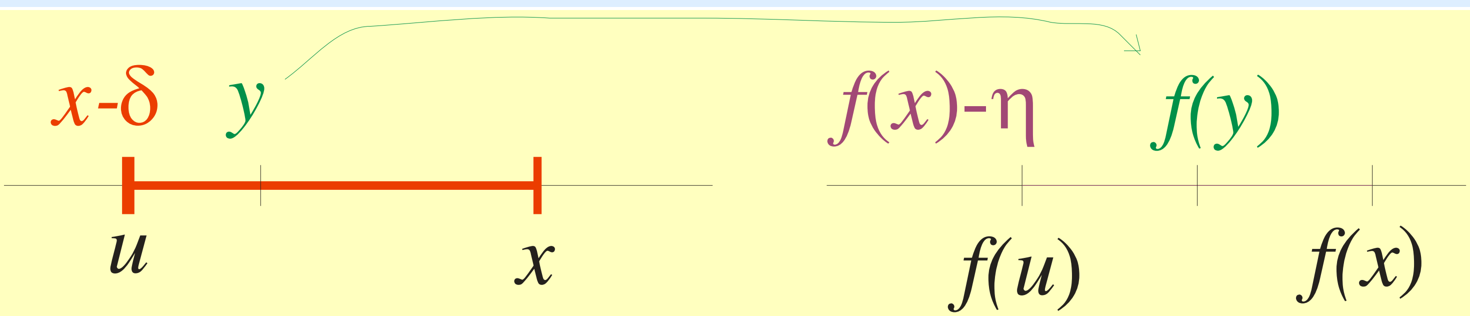
Đặt $\eta = \mathit{min}\{\varepsilon,\ f(x) - f(x_1)\} = \min\{$—, —$\}$

Có u trong $[x_1, x] \subset A$ sao cho : $f(v) = f(x) - \eta$



Đặt $\delta(\varepsilon) = x - u > 0$. Lúc đó $[x - \delta, x] \subset [u, x]$:

$|f(y) - f(x)| < \eta \le \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |\, y - x \,| < \delta(\varepsilon)$



Bài toán 66a. Cho số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x)=x^n$ với mọi $x \in [0,\infty)$. Chứng minh f liên tục từ $[0,\infty)$ vào $[0,\infty)$.

Dùng các bài toán 52 và 57 ta thấy f liên tục

Bài toán 66b. Cho số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x) = x^n$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Chứng minh f là một song ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

f là một đơn ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

$x, y \in [0, \infty), x \neq y$ $\Rightarrow$ $f(x) \neq f(y)$

$0 \leq x < y \Rightarrow x^n < y^n$ Dùng qui nạp toán học $n=1$: đúng

Giả sử trường hợp $n = m$ đúng, xét trường hợp $n = m+1$

$$x^{m+1} = x^m x < y^m x < y^m y = y^{m+1}$$

f là một toàn ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

Cho $y \in [0, \infty)$, tìm $x \in [0, \infty)$ sao cho $f(x) = y$.

• Nếu $y = 0$, chọn $x = 0$. Ta có $f(0) = 0$.

• Nếu $y > 0$, theo tính chất Archimède, có một số nguyên dương N sao cho : theo tính chất Archimède, có một số nguyên dương N sao cho : $0 < y < N.1 = N$

Dùng qui nạp toán học, ta có : $N \leq N^n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

$f(0) = 0 < y < N \leq N^n = f(N)$

$y \in [f(0), f(N)] \subset f([0,N])$

$\exists\ x \in [0,N] \subset [0, \infty)$ sao cho $f(x) = y$ (bài tập 64)

Vậy cho $y \in [0, \infty)$, ta tìm được $x \in [0,\infty)$ sao cho $f(x) = y$

Bài toán 66c. Cho một số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x) = x^n$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Đặt $h = f^{-1}$. Chứng minh h đơn điệu tăng trên $[0, \infty)$.

Cho u và v trong $[0, \infty)$ sao cho $u < v$. Chứng minh

$$x = h(u) < h(v) = y$$

$u = x^n$, $v = y^n$

$x^n < y^n \Rightarrow x < y$?

" $P \Rightarrow Q$ " $\Leftrightarrow$ " $\sim Q \Rightarrow \sim P$ "

$x \geq y \Rightarrow x^n \geq y^n$? : dùng qui nạp toán học như trong bài tập 66b

(iv) Dùng bài toán trước

Bài tập 66 . Cho số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x) = x^n$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Chứng minh

(i) f liên tục từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

(ii) f là một song ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

(iii) Đặt $h = f^{-1}$, thì h đơn điệu tăng trên $[0, \infty)$.

(iv) f^{-1} là một hàm số thực liên tục trên $[0, \infty)$. Ta ký hiệu $f^{-1}(x)$ là $\sqrt[n]{x}$ hay $x^{\frac{1}{n}}$ với mọi $x \in [0, \infty)$.

(i), (ii) và (iii) : các bài tập 66a, 66b và 66c.

(iv) : dùng bài toán 65

Bài toán 67. Cho một số nguyên $k \geq 1$. Đặt $n = 2k+1$, $f(x) = x^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lúc đó :

(i) f liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

(ii) f là một song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

(iii) Đặt $h = f^{-1}$, thì h đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

(iv) f^{-1} là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta ký hiệu $f^{-1}(x)$ là $\sqrt[n]{x}$ hay $x^{\frac{1}{n}}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Phần chứng minh tương tự như trong định lý trước, chỉ khác phần (ii).

(iia) Cho x và y trong $\mathbb{R}$ sao cho $x < y$. Chứng minh

$$x^n = f(x) < f(y) = y^n$$

(iia) Cho x và y trong $\mathbb{R}$ sao cho $x < y$. Chứng minh

$$x^{n} = f(x) < f(y) = y^{n}$$

Chia làm ba trường hợp :

• $0 \le x < y$.

• • $x < 0 < y$.

• • • $x < y \le 0$.

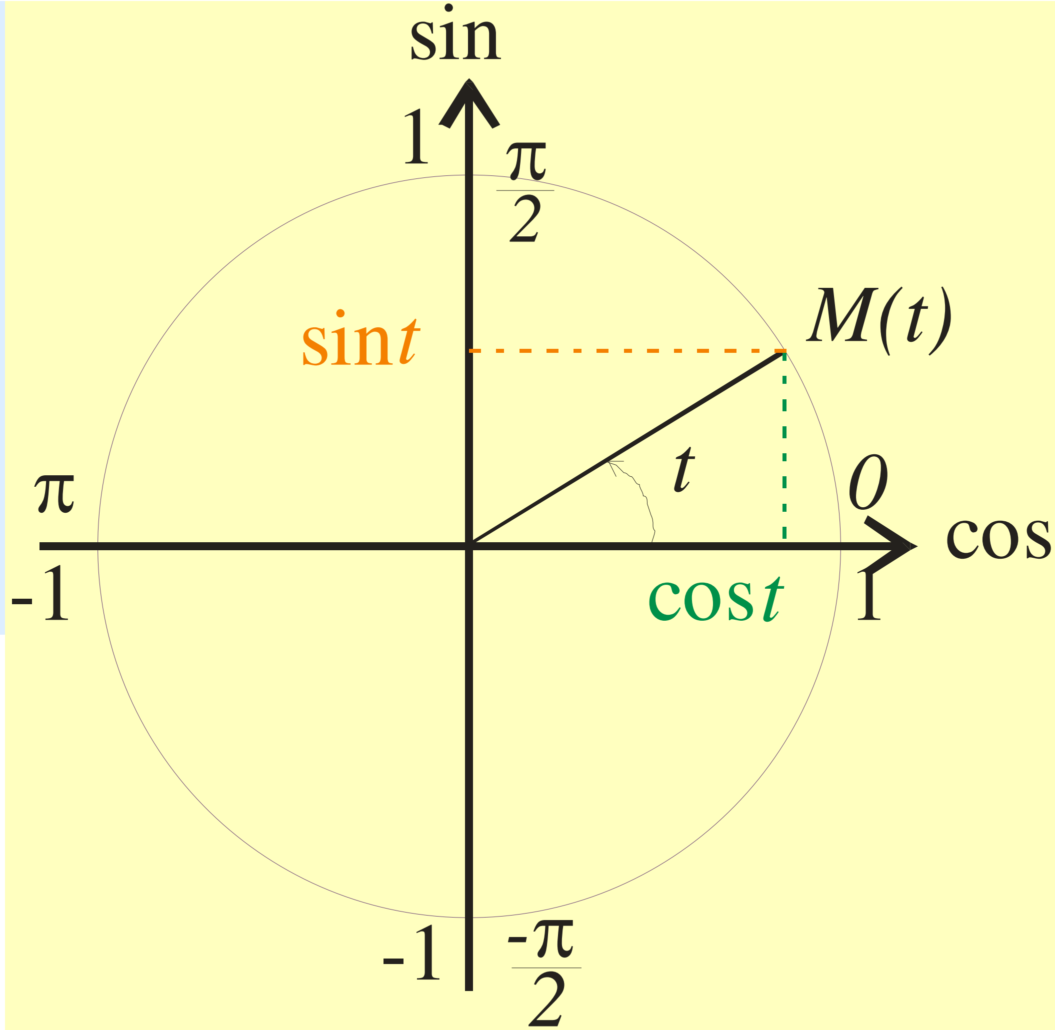
• Như trong phần chứng minh định lý trước

• • Để ý $x^{2k+1} < 0 < y^{2k+1}$.

• • • Đặt $u = - y$ và $v = - x$. Ta có $0 \le u < v$ và $u^{n} = - y^{n}$ và $v^{n} = - x^{n}$. Áp dụng • .

Cho $t \in \mathbb{R}$ ta tương ứng một góc và một điểm $M(t)$ như trong hình vẽ. Ta đặt

- $\sin t$ = hoành độ của $M(t)$
- $\cos t$ = tung độ của $M(t)$



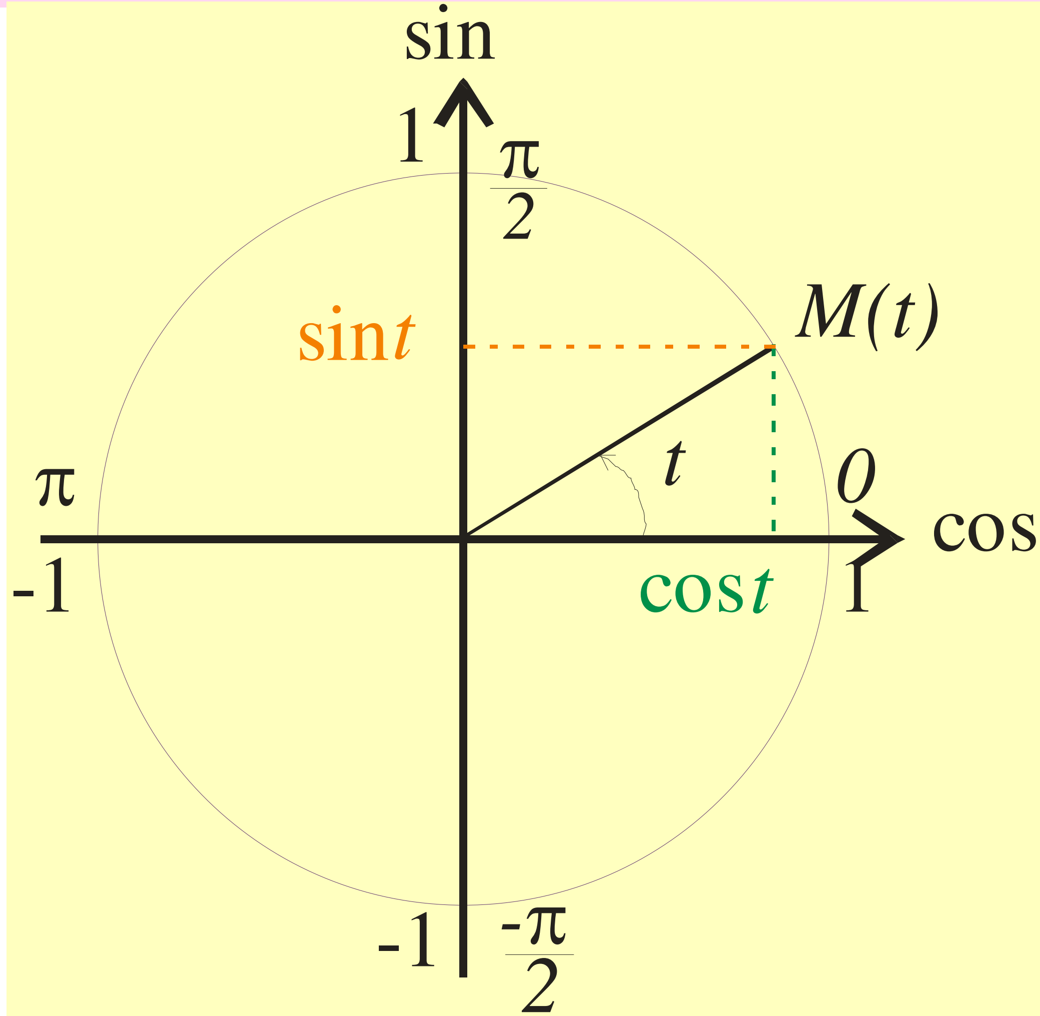
Xét hàm số g từ [-1,1] vào $\mathbb{R}$ như sau

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \forall x \in [-1,1]$$

Ta thấy với mọi $x \in [-1,1]$ có duy nhất một $t \in [0,\pi]$ sao cho $(x, g(x)) = M(t)$, và ngược lại. Và x chính là $\cos t$. Vậy hàm cos là một song ánh từ $[0,\pi]$ vào [-1,1] .

Ta thấy với mọi $x \in [-1,1]$ có duy nhất một $t \in [0,\pi]$ sao cho $(x,g(x)) = M(t)$, và ngược lại. Và x chính là $\cos t$. Vậy hàm cos là một song ánh từ $[0,\pi]$ vào $[-1,1]$. Theo hình vẽ, hàm cos đơn điệu giãm.

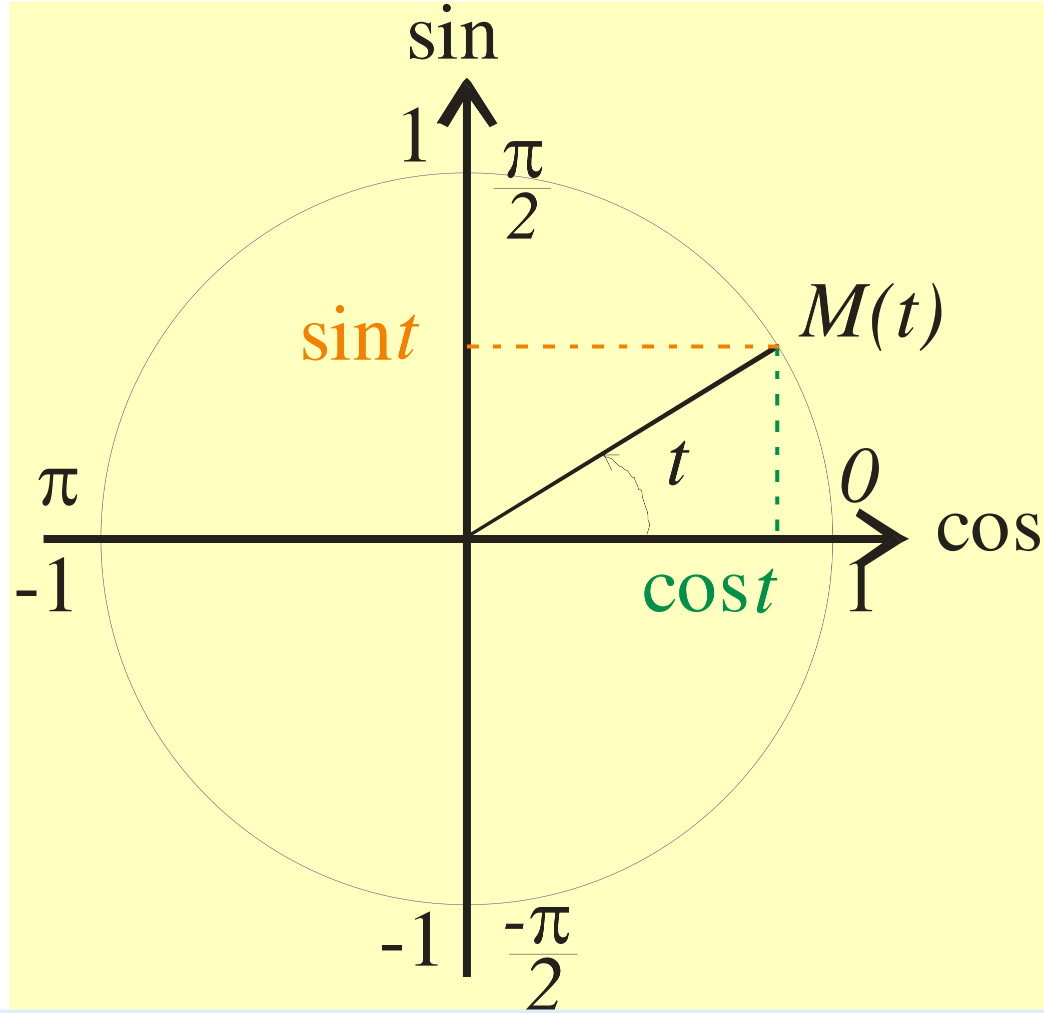
Do tính song ánh đơn điệu giảm , hàm cos liên tục từ $[0 , \pi]$ vào $[-1,1]$, và hàm ngược của nó cũng liên tục từ $[-1,1]$ vào $[0,\pi]$. Ta ký hiệu hàm này là arccos t với mọi $t \in [-1,1]$.



Theo hình vẽ ta thấy :

- $\cos -t \ = \cos t$,
- $\cos (t+\pi) \ = - \cos t$.
- $\cos (t + k2\pi) = \cos t$,

với mọi t trong $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.



Theo phần trên : $\forall$ $\{x_n\}$ trong $[0 , \pi]$ và hội tụ về x trong $[0 , \pi]$, thì $\{\cos x_n\}$ hội tụ về $\cos x$.

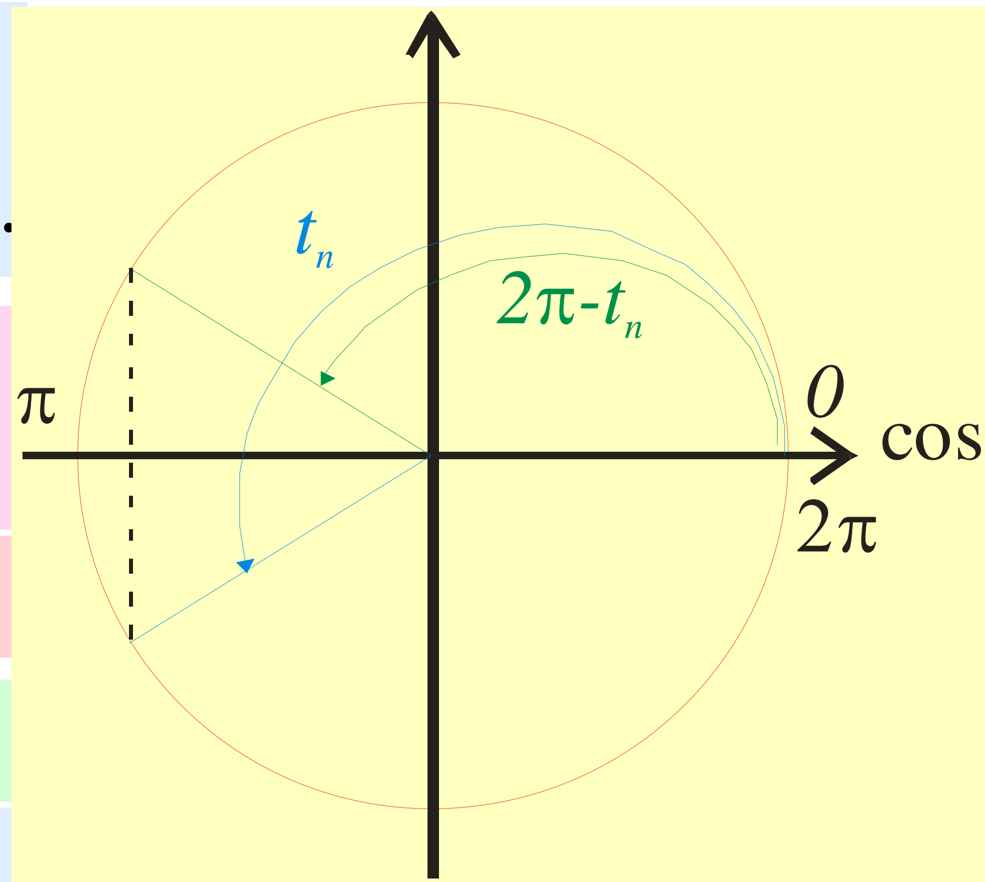
Nay cho một dãy $\{t_n\}$ trong $[0 , 2\pi]$ và hội tụ về π . Ta sẽ chứng minh $\{\cos t_n\}$ hội tụ về $\cos\pi$.

Bài toán 68. Chứng minh hàm cos liên tục tại π .

Cho một dãy $\{t_n\}$ trong $[0 , 2\pi]$ và hội tụ về π . Ta sẽ chứng minh $\{\cos t_n\}$ hội tụ về $\cos\pi$.

Hàm cos liên tục trên $[0 , \pi]$

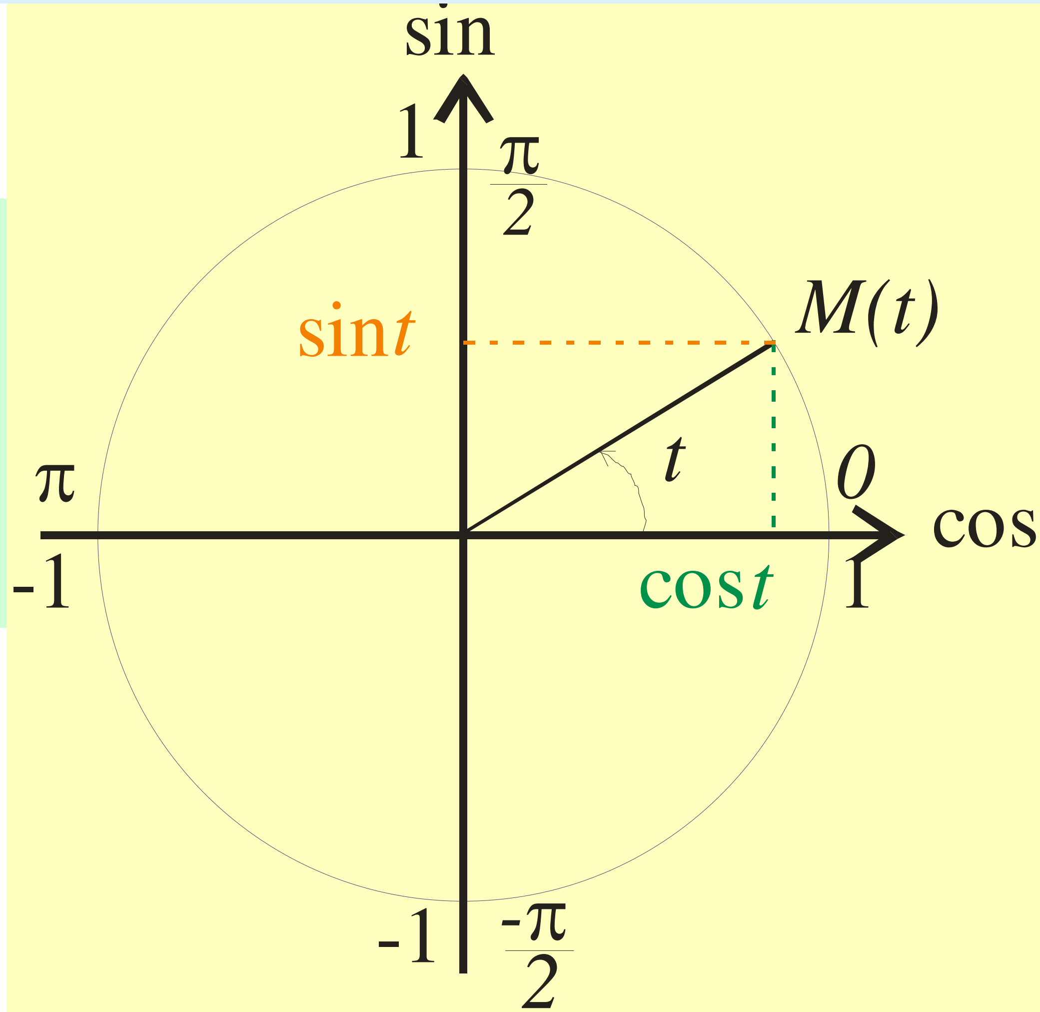
$$x_n = \begin{cases} t_n & \text{nếu } t_n \in [0,\pi], \\ 2\pi - t_n & \text{nếu } t_n \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$



- $|(2\pi - t_n) - \pi| = |\pi - t_n|$: $\{x_n\}$ trong $[0 , \pi]$ và hội tụ về π
- $\{\cos x_n\}$ hội tụ về $\cos\pi$
- $\cos x_n = \cos - t_n = \cos t_n$
- $\{\cos t_n\}$ hội tụ về $\cos\pi$

Lý luận tương tự, ta thấy hàm sin là một song ánh đơn điệu tăng liên tục từ $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ vào [-1,1]. Vậy hàm ngược của nó cũng liên tục từ [-1,1] vào $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Ta ký hiệu hàm này là arcsin t *với* mọi $t \in [-1,1]$.

Từ đây ta chứng minh được sự liên tục của hàm sin trên ℝ như trong trường hợp hàm cos

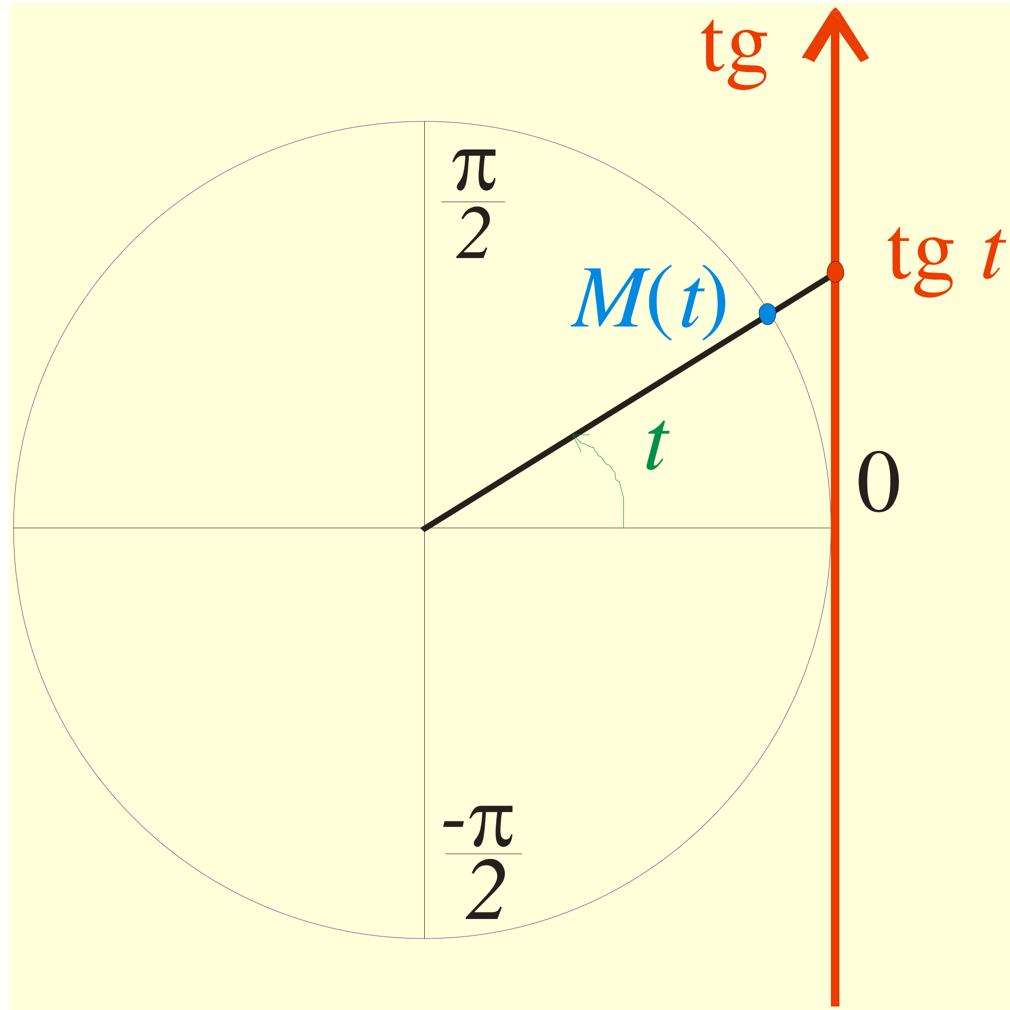


Lý luận tương tự, ta thấy hàm tg là một song ánh đơn điệu tăng liên tục từ $\left(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right)$ vào (- ∞, ∞). Vậy hàm ngược của nó cũng liên tục từ (- ∞, ∞) vào $\left(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right)$. Ta ký hiệu hàm này là arctg *t với* mọi $t \in$ (- ∞, ∞) .

Từ đây ta chứng minh được sự liên tục của hàm tg trên

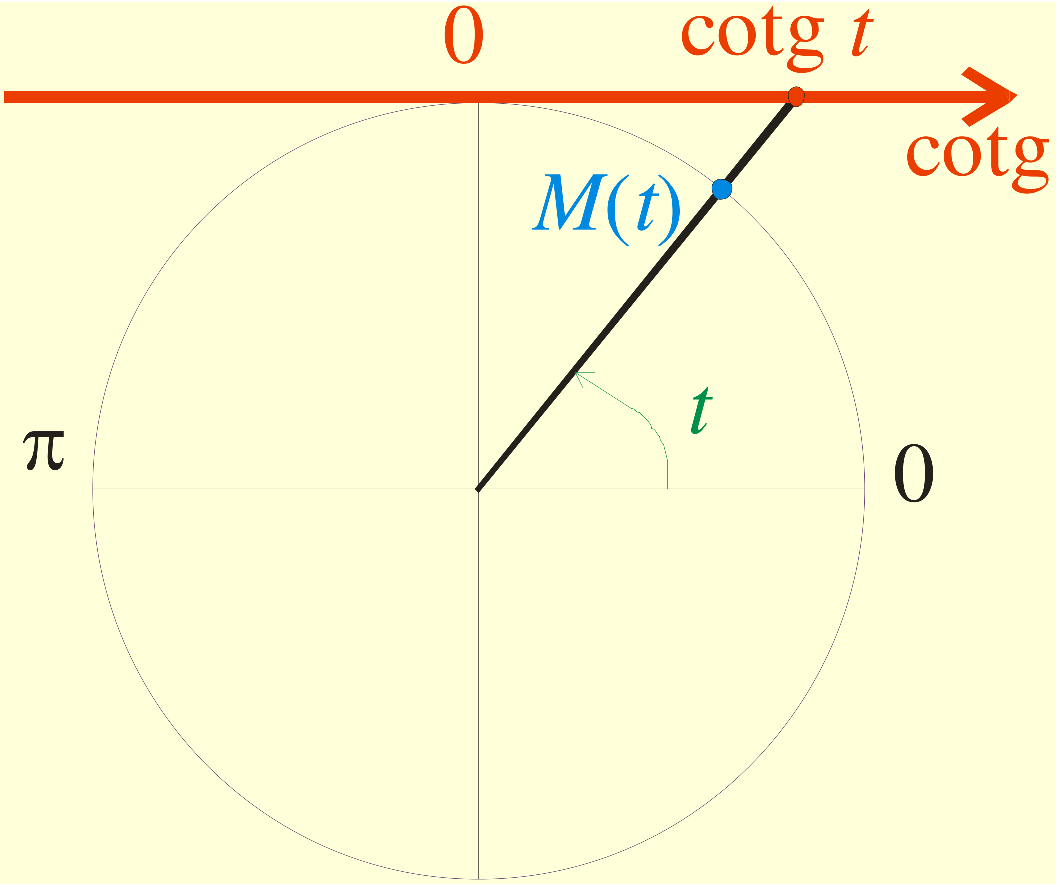
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi-\frac{1}{2}\pi,k\pi+\frac{1}{2}\pi\right)$$

như trong trường hợp hàm cos



Lý luận tương tự, ta thấy hàm cotg là một song ánh đơn điệu giãm liên tục từ $(0, \pi)$ vào (- ∞, ∞). Vậy hàm ngược của nó cũng liên tục từ (- ∞, ∞) vào $(0, \pi)$. Ta ký hiệu hàm này là arccotg t với mọi $t \in$ (- ∞, ∞) .

Từ đây ta chứng minh được sự liên tục của hàm cotg trên $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, k\pi + \pi)$ như trong trường hợp hàm cos



Đặt $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad \forall\ x \in (0, \infty)$

Ta chứng minh được ln là một song ánh đơn điệu tăng từ $(0,\infty)$ vào $\mathbb{R}$. Do đó ln liên tục trên $(0,\infty)$ và nó có ánh xạ ngược ký hiệu là e^x là một hàm số liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $(0,\infty)$.

Cho số thực dương a, ta đặt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \forall\ x \in (0, \infty)$$

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$\ln x$: logarit Neper của x

$\ln_a x$: logarit cơ hệ a của x

e^x : hàm mũ của x

Các hàm này liên tục trên tập chúng xác định

Định nghĩa . Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$, ta nói f là một hàm số thực liên tục đều trên A nếu và chỉ nếu

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x$ và $y \in A$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

Bài toán 69. Cho một số thực dương c và đặt $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x$ và $y \in \mathbb{R}$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

$|f(x) - f(y)| = c|x - y| < \varepsilon$

Đặt $\delta(\varepsilon) = c^{-1}\varepsilon$

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x$ và $y \in \mathbb{R}$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

Bài toán 70 . Cho $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall\, x$ và $y \in \mathbb{R}$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

$\exists\, \varepsilon > 0\,,\ \forall\, \delta > 0$ có $x(\delta)$ và $y(\delta) \in \mathbb{R}$ sao cho

$\boxed{|y(\delta) - x(\delta)| < \delta(\varepsilon)}$ và $\boxed{|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon}$.

$x > 0\,,\ y = x + h$ với $h > 0$

$|y - x| = h$

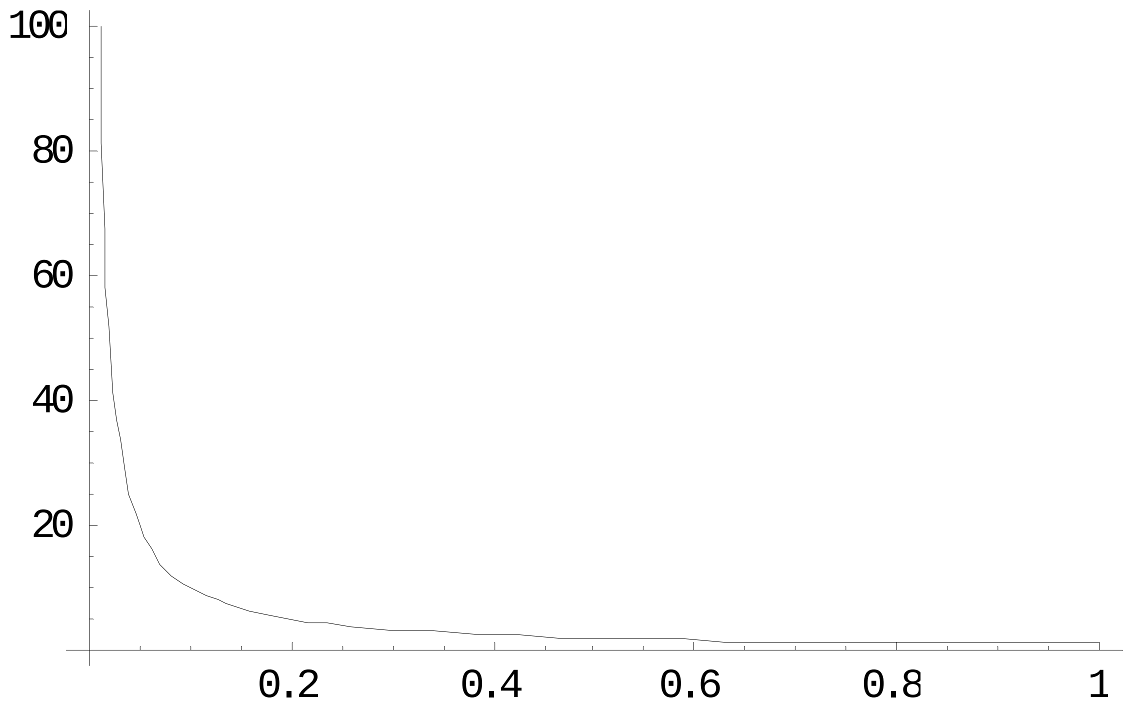
$|f(x) - f(y)| = (x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2 \geq \varepsilon$

$\forall\, \delta > 0$, chọn $h = 2^{-1}\delta\,,\ x(\delta) = \delta^{-1},\ y(\delta) = x(\delta) + 2^{-1}\delta$

$|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| = 2\,x(\delta)\,h + h^2 \geq 1$

Chọn $\varepsilon = 1$.

Bài toán 71 . Cho $A = (0,1)$ và $f(x) = x^{-1} \quad \forall x \in A$.
Chứng minh f không liên tục đều trên A.



$\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \delta > 0$ có $x(\delta)$ và $y(\delta) \in A$ sao cho

$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta$ và $|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$.

$\exists\, \varepsilon > 0\,,\ \forall\, \delta > 0$ có $x(\delta)$ và $y(\delta) \in A$ sao cho

$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta$ và $|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$.

$x\,,\ y \in (0,1)\,,\ y = x - h$ với $h > 0$

$|y - x| = h$

$$|f(x) - f(y)| = (x - h)^{-1} - x^{-1} = [\,x\,(x - h)\,]^{-1}h \geq x^{-2}h$$

$\forall\, \delta > 0\ \ (\delta \in (0, 1))$. Chọn $h = 2^{-1}\delta\ ,\ x(\delta) = \sqrt{h}$ và

$y(\delta) = x - h$

$$|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq x(\delta)^{-2}h = 1$$

Chọn $\varepsilon = 1$.

Bài toán 72 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a,b]$. Lúc đó f liên tục đều trên $[a,b]$

Giả sử có một số thực dương ε sao cho với mọi số thực dương δ ta có hai số $x(\delta)$ và $y(\delta)$ trong $[a, b]$ sao cho

$$|x(\delta) - y(\delta)| < \delta \quad \text{và} \quad |f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$$

Đặt $x_n = x(n^{-1})$ và $y_n = y(n^{-1}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$|x_n - y_n| < n^{-1}$ và $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

$\{x_n\}$ là một dãy trong $[a,b]$

Có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ về c trong $[a, b]$

Đặt $u_k = x_{n_k}$ và $v_k = y_{n_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} u_k = c$$

$|u_k - v_k| < (n_k)^{-1} < k^{-1}$ và $|f(u_k) - f(v_k)| \geq \varepsilon$

$$\lim_{k\to\infty} u_k = c$$

$$|\, u_k - v_k \,| < (n_k)^{-1} < k^{-1} \text{ và } |f(u_k) - f(v_k)| \geq \varepsilon$$

$$-\frac{1}{k} < u_k - v_k < \frac{1}{k}$$

$$u_k - \frac{1}{k} < v_k < u_k + \frac{1}{k}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ c}}{u_k} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{k}} < \underset{\substack{\downarrow \\ c}}{v_k} < \underset{\substack{\downarrow \\ c}}{u_k} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} v_k = c$$

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k) = f(c) \qquad \lim_{k\to\infty} f(v_k) = f(c)$$

Cho $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$, có N(ε') và M(ε') trong ℕ sao cho

$|f(u_k) - f(c)| < \varepsilon' \ \forall\, k \geq N(\varepsilon')$ và $|f(v_k) - f(c)| < \varepsilon' \ \forall\, k \geq M(\varepsilon')$

Chọn $k = N(\varepsilon') + M(\varepsilon') + 1$

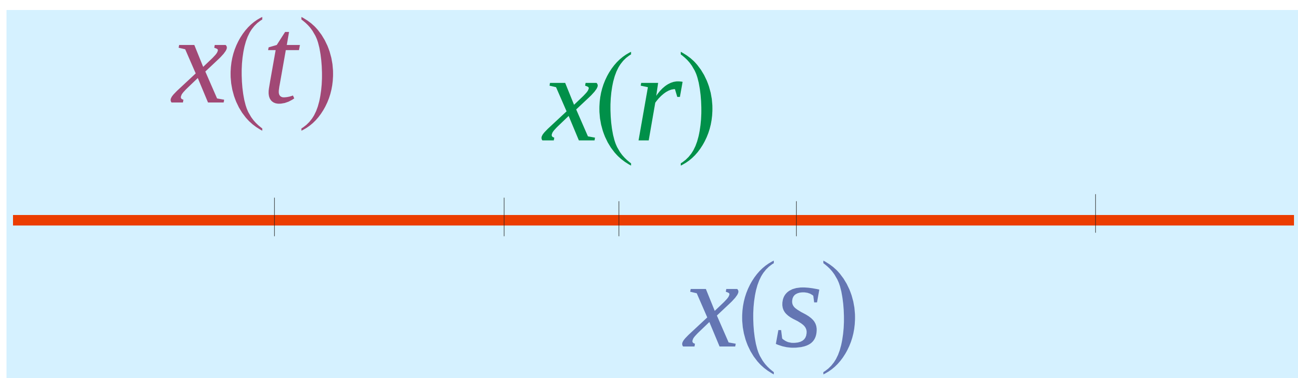
$$\varepsilon \leq |f(u_k) - f(v_k)| \leq |f(u_k) - f(c)| + |\, f(c) - f(v_k)| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

CHƯƠNG BẢY

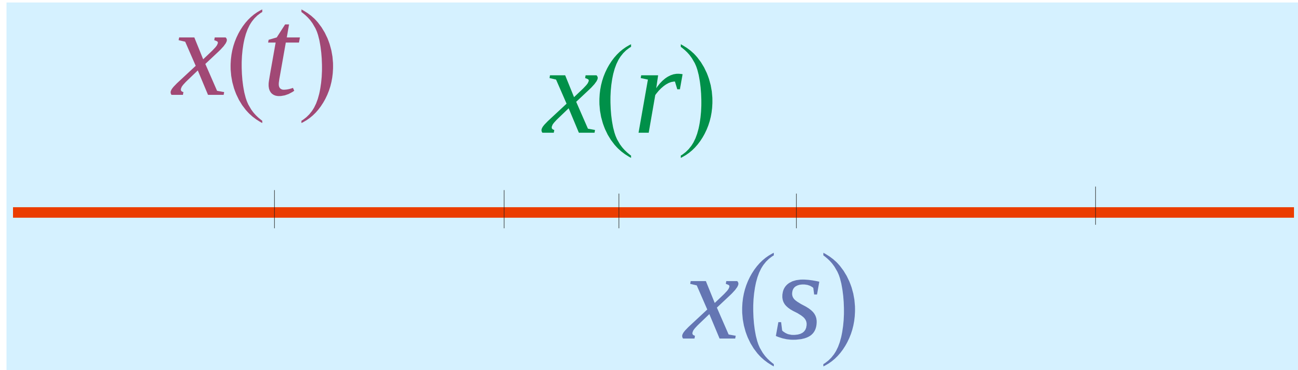
PHÉP TÍNH VI PHÂN

Quan sát một chiếc xe chạy trên đường thẳng, chúng ta muốn xét việc chạy nhanh hoặc chậm của nó tại một thời điểm t . Ta mô hình toán học việc này như sau: ghi vị trí chiếc xe tại thời điểm s là $x(s)$. Với một thời điểm s khá gần nhưng khác t, ta tính được vận tốc trung bình của chiếc xe trong khoảng thời gian từ t đến s như sau

$$v_{t,s} = \frac{x(s) - x(t)}{s - t}$$



$$v_{t,s} = \frac{x(s) - x(t)}{s - t}$$

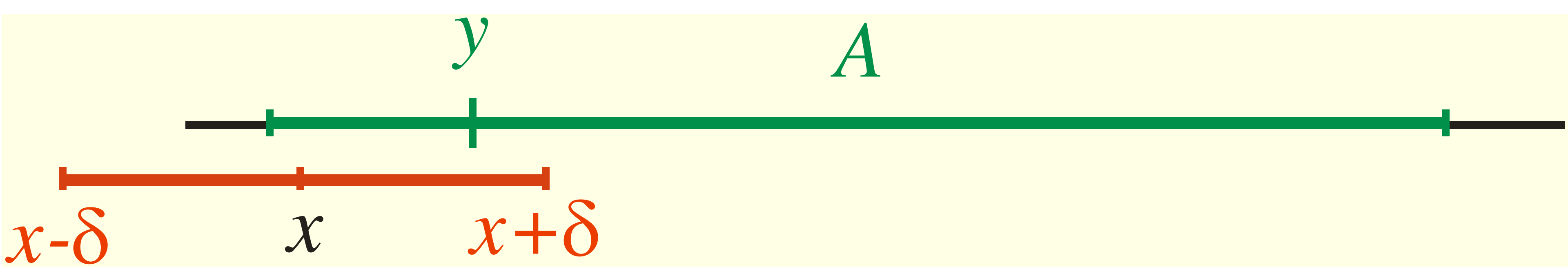


Vận tốc trung bình $v_{t,s}$ cho chúng ta các thông tin về việc chạy nhanh hoặc chậm của chiếc xe tại thời điểm t. Nếu s càng gần t hơn, thì $v_{t,s}$ càng cho chúng ta các thông tin chính xác hơn về việc chạy nhanh hoặc chậm của chiếc xe tại thời điểm t.

Vậy để biết việc chạy nhanh hoặc chậm của chiếc xe tại thời điểm t, ta phải xét vị trí $x(r)$ của chiếc xe tại các thời điểm r trong một tập hợp A. Tập hợp A này phải có tính chất : luôn luôn có các phần tử khác t nhưng rất gần t.

Ta mô hình toán học ý tưởng bên trên như sau

Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và $x \in \mathbb{R}$. Ta nói x là một điểm tụ của A nếu với mọi số thực dương δ ta tìm được $y \in A$ sao cho $0 < |x - y| < \delta$. Tập hợp tất cả các điểm tụ của A được ký hiệu là A^*.



$$\exists\, y \in A \cap \{(x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}\}$$

$$\exists\, y \in \{A \setminus \{x\}\} \cap (x-\delta, x+\delta)$$

$$\{A \setminus \{x\}\} \cap (x-\delta, x+\delta) \neq \emptyset$$

$$x \in A^*$$

$$\Leftrightarrow\ x \in (A \setminus x\})^*$$

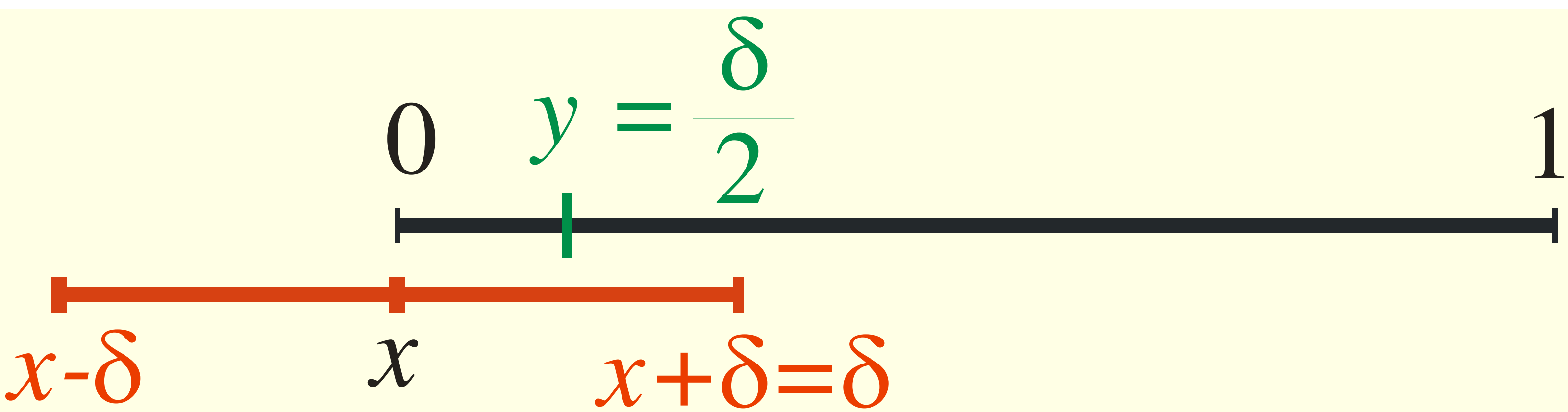
Bài toán 73. **Cho** $A = (0,1)$ và $x = 0$. Chứng minh x là một điểm tụ của A

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in A$ sao cho $0 < |x - y| < \delta$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in (0,1)$ sao cho $0 < |0 - y| < \delta$

$|0 - y| = |y| = y$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in (0,1)$ sao cho $0 < y < \delta$



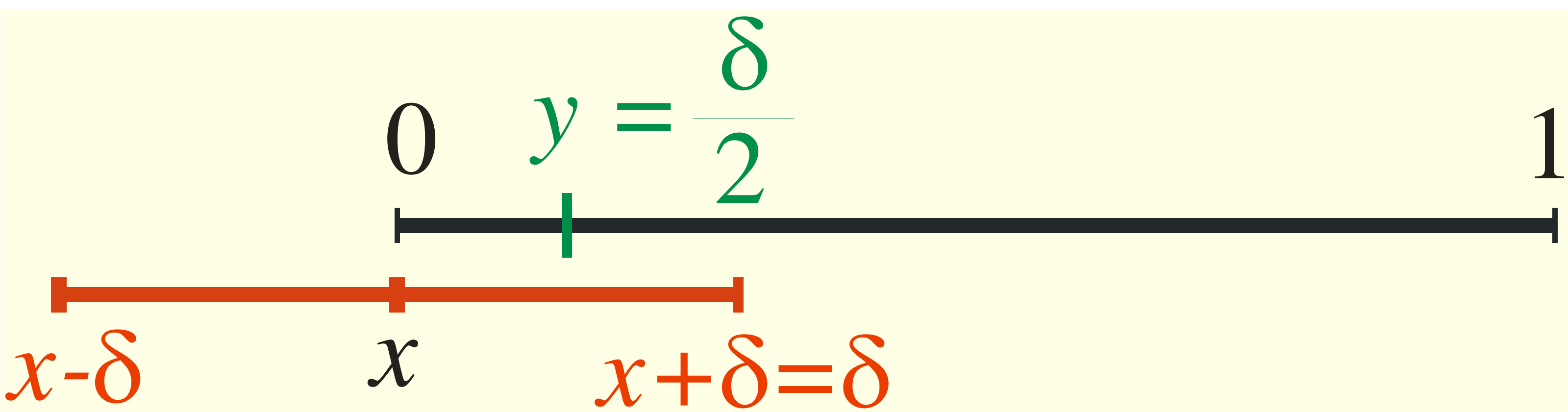
Bài toán 74. **Cho** $A = [0,1]$ và $x = 0$. Chứng minh x là một điểm tụ của A

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in A$ sao cho $0 < |x - y| < \delta$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in (0,1)$ sao cho $0 < |0 - y| < \delta$

$|0 - y| = |y| = y$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in (0,1)$ sao cho $0 < y < \delta$



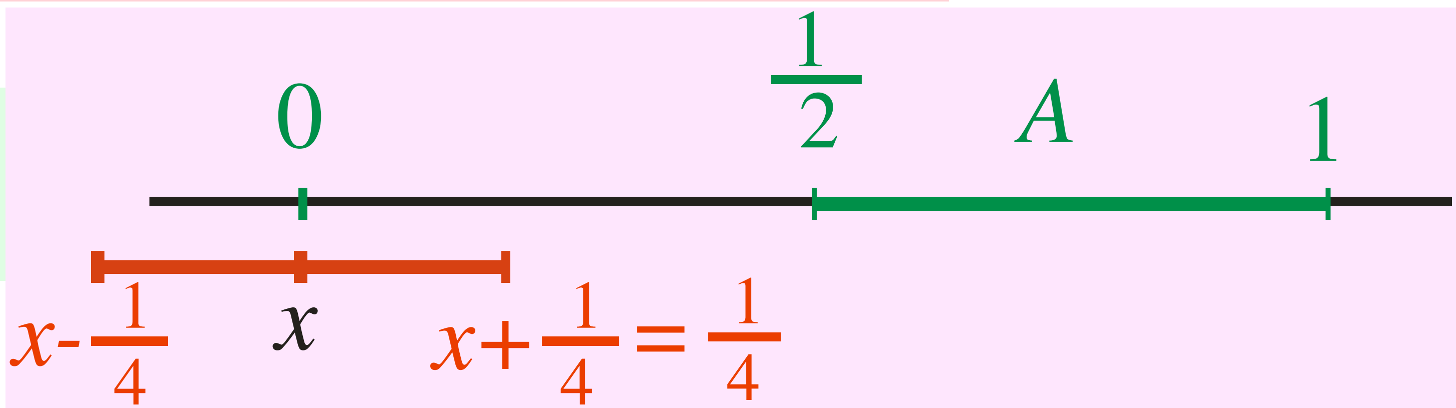
Bài toán 75. Cho $A = \{0\} \cup [2^{-1}, 1]$ và $x = 0$.
Chứng minh x không là một điểm tụ của A

$\forall \delta > 0, \{A \setminus \{x\}\} \cap (x - \delta, x + \delta) \neq \emptyset$

$\exists \delta > 0, \{A \setminus \{x\}\} \cap (x - \delta, x + \delta) = \emptyset$

$\exists \delta > 0, [2^{-1}, 1] \cap (-\delta, \delta) = \emptyset$

Chọn $\delta = \frac{1}{4} > 0$



$$\{A \setminus \{x\}\} \cap (x - \delta, x + \delta) = [\frac{1}{2}, 1] \cap (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \phi$$

Bài toán 76. Cho B là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in B^*$. Đặt $A = B \cup \{a\}$. Chứng minh $a \in A^*$.

$\forall\ \delta > 0$, ta có $\{B \setminus \{a\}\} \cap (a - \delta, a + \delta) \neq \emptyset$

$\forall\ \delta > 0$, chứng minh $\{A \setminus \{a\}\} \cap (a - \delta, a + \delta) \neq \emptyset$

$A \setminus \{a\} = B \setminus \{a\}$?

$$A \setminus \{a\} = A \cap (\mathbb{R} \setminus \{a\}) = (B \cup \{a\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{a\})$$

$$= (B \cap (\mathbb{R} \setminus \{a\})) \cup (\{a\} \cap (\mathbb{R} \setminus \{a\}))$$

$$= B \cap (\mathbb{R} \setminus \{a\}) = B \setminus \{a\}$$

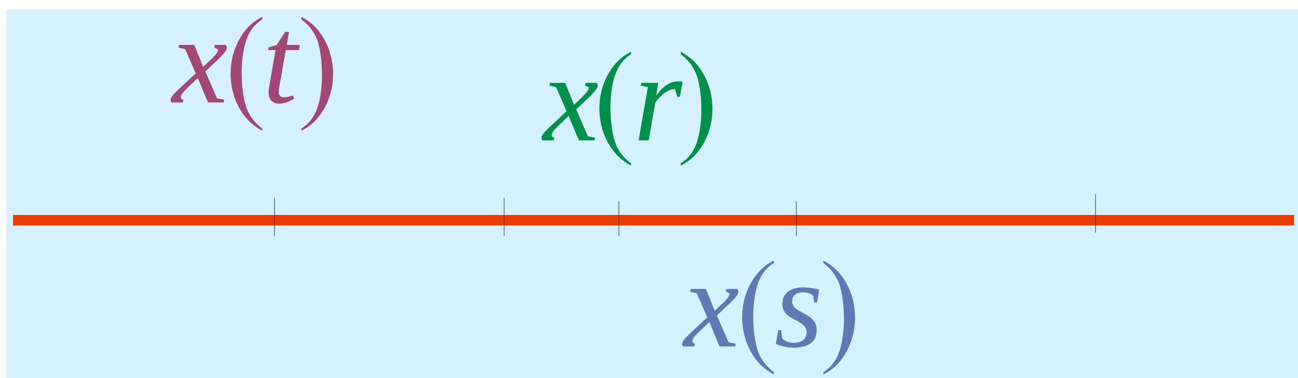
Quan sát một chiếc xe chạy trên đường thẳng, chúng ta muốn xét việc chạy nhanh hoặc chậm của nó tại một thời điểm t . Ta mô hình toán học việc này như sau

- chọn một tập hợp các thời điểm A sao cho t là một điểm tụ của A,

- với một thời điểm $s \in A \setminus \{t\}$, ta tính vận tốc trung bình $v_{t,s}$ của chiếc xe trong khoảng thời gian từ t đến s.

- nếu s càng gần t thì $v_{t,s}$ càng gần một số thực v . Ta nói v là vận tốc tức thời của chiếc xe tại thời điểm t.

$$v_{t,s} = \frac{x(s) - x(t)}{s - t}$$



Ta thử xem mô hình toán học ý tưởng bên trên như sau.

Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A và $a \in A^*$. Ta nói

- f *có giới hạn là c* tại a nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε có một số thực dương δ(ε) sao cho

$$| f(x) - c | < \varepsilon \qquad \forall\ x \in A \text{ với } 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon),$$

và ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Bài toán 77. Cho $A = [0,1]$, $a = 0$ và

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \forall\ x \in [0,1), \\ 1 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Chứng minh $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

$\forall\ \varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in A \quad \text{với } 0 < |x - 0| < \delta(\varepsilon)$$

$\forall\ \varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - 1| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in [0,1]$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \qquad \forall x \in (0,1)$$

$\forall\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1]$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \qquad \forall x \in (0,1)$$

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right| < \sqrt{x} \qquad \forall x \in (0,1)$$

$\forall\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$\sqrt{x} < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1]$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$

$\sqrt{x} \le \varepsilon$ $\quad x \le \varepsilon^2$ $\quad \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$

$\forall\ \varepsilon > 0$, đặt $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ ta có

$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1]$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$

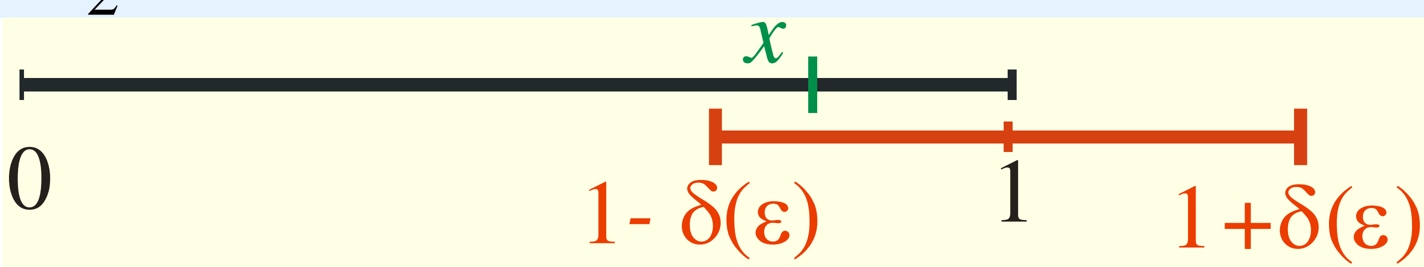
Bài toán 78. Cho $A = [0,1]$, $a = 1$ và

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \forall\ x \in [0,1), \\ 1 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Chứng minh $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in A \quad \text{với } 0 < |x - 1| < \delta(\varepsilon)$$



Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in [0,1] \ \text{ với } \ 1 - \delta(\varepsilon) < x < 1$$

Cho ε > 0 , tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in [0,1] \text{ với } 1 - \delta(\varepsilon) < x < 1$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \qquad \forall x \in [0,1)$$

$$|f(x) - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{2}| = \frac{1 - \sqrt{x}}{2(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1 - x}{2(\sqrt{x} + 1)^2} < 1 - x$$

Cho ε > 0 , tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - \frac{1}{2}| < |1 - x| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1] \text{ với } 1 - \delta(\varepsilon) < x < 1$$

Cho ε > 0 , đặt $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ ta có

$$|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in [0,1] \text{ với } 1 - \delta(\varepsilon) < x < 1$$

Dùng lệnh $\text{Limit}[f(x), x \to a]$ để tính $\lim_{x\to a} f(x)$

$$\text{In}[1] := \text{Limit }[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\ x \to 0]$$

$$\text{Out}[1] := 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1$$

$$\text{In}[1] := \text{Limit }[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\ x \to 1]$$

$$\text{Out}[1] := \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathrm{In}[3] := \mathrm{Limit}\ [x^{x^{x}} - 1,\ x \to 0]$$

$$\mathrm{Out}[3] := 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^{x^{x}} - 1 = 1$$

$$\mathrm{In}[4] := \mathrm{Limit}\ [\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln} x,\ x \to 1]$$

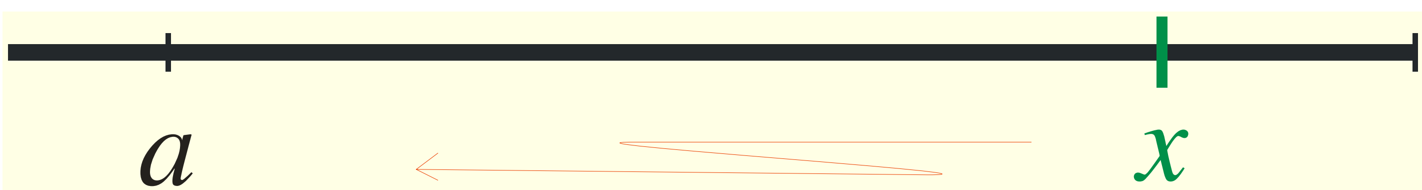
$$\mathrm{Out}[4] := \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln} x) = \frac{1}{2}$$

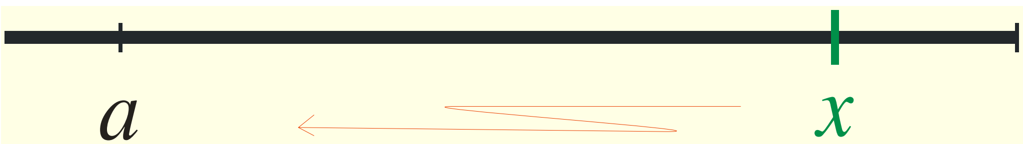
Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A và $a \in A^*$. Ta nói f *có giới hạn bên phải là c tại a* nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε có một số thực dương δ(ε) sao cho

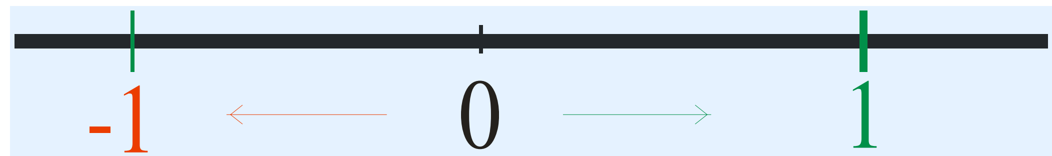
$$|f(x) - c| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in A \text{ với } 0 < x - a < \delta(\varepsilon),$$

và ký hiệu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$



Dùng lệnh $\text{Limit}[f(x), x \to a, \text{Direction} \to -1]$ để tính $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$





$$\text{In}[1] := \text{Limit}\ [(1+x)^{x^{-1}},\ \ x \to 0, \text{Direction} \to -1]$$

$$\text{Out}[1] := e$$

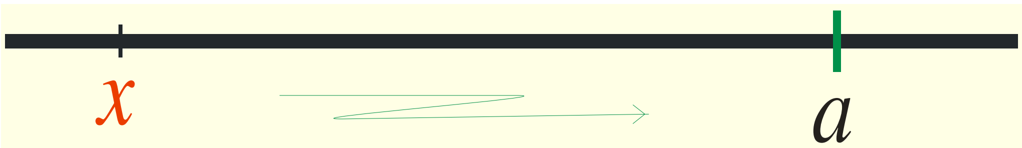
$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$$

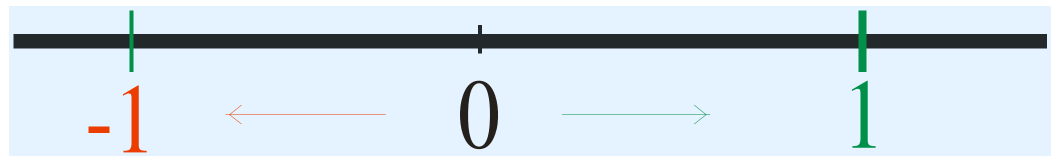
Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A và $a \in A^*$. Ta nói f *có giới hạn bên trái là c tại a* nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε có một số thực dương δ(ε) sao cho

$$|f(x) - c| < \varepsilon \qquad \forall x \in A \quad \text{với } 0 < a - x < \delta(\varepsilon),$$

và ký hiệu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$

Dùng lệnh $\text{Limit}[f(x), x \to a, \text{Direction} \to 1]$ để tính $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$





$$\text{In}[1] := \text{Limit}\ [\frac{Log(\cos x)}{x\,|\,x\,|},\ \ x \to 0, \text{Direction} \to 1]$$

$$\text{Out}[1] := \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{Log(\cos x)}{x\,|\,x\,|} = \frac{1}{2}$$

Bài toán 79. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Giả sử f liên tục tại a. Lúc đó $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Cho một $\varepsilon > 0$, có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in A \text{ với } |x - a| < \delta(a,\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon' \qquad \forall\, x \in A \text{ với } 0 < |x - a| < \eta(a, \varepsilon')$$

Cho $\varepsilon' > 0$ | Đặt $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(a,\varepsilon)$ | Đặt $\eta(a, \varepsilon') = \delta(a,\varepsilon)$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon = \varepsilon' \ \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta(a,\varepsilon) = \eta(a,\varepsilon')$$

Bài toán 80. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Giả sử $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Chứng minh f liên tục tại a

Cho $\varepsilon > 0$ có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \forall x \in A$ với $0 < |x - a| < \delta(a, \varepsilon)$

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon' \qquad \forall x \in A$ với $|x - a| < \eta(a, \varepsilon')$

■ $x \neq a$: $\quad 0 < |x - a|$

Cho $\varepsilon' > 0$

Đặt $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(a, \varepsilon)$

Đặt $\eta(a, \varepsilon') = \delta(a, \varepsilon)$

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon = \varepsilon' \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta(a, \varepsilon) = \eta(a, \varepsilon')$

■ $x = a$: $f(x) = f(a)$, $|f(x) - f(a)| = 0$

$\Rightarrow$

Bài toán 81. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Giả sử $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong $A \setminus \{a\}$ (nghĩa là $x_n \in A \setminus \{a\}$ với mọi n) và $\{x_n\}$ hội tụ về a. Chứng minh dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về c .

Cho $\epsilon > 0$, có $\exists\, \delta(a, \epsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - c| < \epsilon \qquad \forall x \in A, \; 0 < |x - a| < \delta(a, \epsilon)$$

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 < |x_n - a| < \epsilon' \qquad \forall n \geq N(\epsilon') .$$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f(x_m) - c| < \epsilon'' \qquad \forall m \geq M(\epsilon'') .$$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$\boxed{| f(x_m) - c | < \epsilon''}$ $\forall\, m \geq M(\epsilon'')$.

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - a | < \epsilon'$ $\forall\, n \geq N(\epsilon')$.

Cho một $\epsilon > 0$ ta có $\delta(a,\epsilon) > 0$ sao cho

$\boxed{| f(x) - c | < \epsilon}$ $\forall\, x \in A$, $0 < | x - a | < \delta(a,\epsilon)$

$\epsilon'' \rightleftarrows \epsilon$ | $x_m \rightleftarrows x$ | $\delta(a,\epsilon) \rightleftarrows \epsilon'$ | $M(\epsilon'') \rightleftarrows N(\epsilon')$

Cho $\epsilon'' > 0$ đặt $\epsilon = \epsilon''$

Với ϵ có $\delta(x,\epsilon)$

$\epsilon' = \delta(a,\epsilon)$

Với ϵ' có $N(\epsilon')$

$M(\epsilon'') = N(\epsilon')$

$m \geq M(\epsilon'') = N(\epsilon')$

$\Rightarrow$

$|x_n - a| < \epsilon' = \delta(a,\epsilon)$

$\Rightarrow$

$| f(x_m) - c | < \epsilon''$

Bài toán 82. Cho một hàm số thực f trên một tập con A của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ và $a \in A^*$. Giả sử với mọi dãy $\{x_n\}$ trong $A \setminus \{a\}$ (nghĩa là $x_n \in A \setminus \{a\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) và $\{x_n\}$ hội tụ về a, thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về c. Chứng minh. $\lim_{x \to a} f(x) = c$

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon$ $\forall n \geq N(\epsilon)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho $|f(x_n) - c| < \epsilon'$ $\forall n \geq M(\epsilon')$.

Cho $\epsilon'' > 0$, tìm $\delta(a,\epsilon'') > 0$ sao cho
$|f(y) - c| < \epsilon''$ $\forall y \in A$ với $|y - a| < \delta(a,\epsilon'')$

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $|y_\delta - a| < \delta$ sao cho $|f(y_\delta) - c| \geq \epsilon''$

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N(\epsilon)$.

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - c| < \epsilon' \quad \forall n \geq M(\epsilon')$.

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $|y_\delta - a| < \delta$ sao cho $|f(y_\delta) - c| \geq \epsilon''$

Tìm các thành tố có vẽ mâu thuẫn với nhau

$|f(x_n) - c| < \epsilon' \quad \rightleftarrows \quad |f(y_\delta) - c| \geq \epsilon''$

$y_\delta \rightleftarrows x_n \qquad |y_\delta - a| < \delta \rightleftarrows |x_n - a| < \epsilon$

Chọn $\delta = n^{-1}$ và $x_n = y_{1/n}$

$|x_n - a| < n^{-1}$ và $|f(x_n) - c| = |f(y_\delta) - c| \geq \epsilon'' \quad \forall n$

Bài toán 83. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A^*$ và hai hàm số thực f và g trên A có giới hạn tại x là c và d. Đặt $h(z) = f(z) + g(z)$ $\forall z \in A$. Chứng minh h có giới hạn tại x là $c+d$.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong $A \setminus \{x\}$ hội tụ về x.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về d

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $c+d$

$$h(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$$

$$\begin{array}{ccccc} h(x_n) & = & f(x_n) & + & g(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c+d & & c & & d \end{array}$$

Bài toán 84. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A^*$ và hai hàm số thực f và g trên A có giới hạn tại x là c và d. Đặt $h(z) = f(z)g(z)$ $\forall z \in A$.

Chứng minh h có giới hạn tại x là cd.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về d

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về cd

$$h(x_n) = f(x_n)g(x_n)$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ cd}}{h(x_n)} = \underset{\substack{\downarrow \\ c}}{f(x_n)} \,.\, \underset{\substack{\downarrow \\ d}}{g(x_n)}$$

Định lý. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Lúc đó ba điều sau đây tương đương

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(ii) f liên tục tại a

(iii) với mọi dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về a, ta có $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(a)$.

Bài toán 85. Cho B là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in B^*$, $c \in \mathbb{R}$ và một hàm số thực g trên B. Đặt $A = B \cup \{a\}$. Giả sử $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Đặt

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \setminus \{a\} \\ c & x = a \end{cases}$$

Chứng minh f liên tục tại a.

Cho $\varepsilon > 0$ có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho

$$|g(x) - c| < \varepsilon \quad \forall\, x \in B \text{ với } 0 < |x - a| < \delta(a, \varepsilon)$$

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon' \quad \forall\, x \in A \text{ với } |x - a| < \eta(a, \varepsilon')$$

$$f(x) - f(a) = f(x) - c = \begin{cases} g(x) - c & x \in B, \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

$A = B \cup \{a\}$

Cho $\varepsilon > 0$ có một số thực dương sao cho

$$|g(x) - c| < \varepsilon \qquad \forall x \in A \text{ với } 0 < |x - a| < \delta(a,\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon' \qquad \forall x \in A \text{ với } |x - a| < \eta(a, \varepsilon')$$

$A = B \cup \{a\}$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \setminus \{a\} \\ c & x = a \end{cases}$$

$$f(x) - f(a) = f(x) - c = \begin{cases} g(x) - c & x \in B, \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

Cho $\varepsilon' > 0$ Đặt $\varepsilon = \varepsilon'$ có $\delta(a,\varepsilon)$ Đặt $\eta(a,\varepsilon') = \delta(a,\varepsilon)$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon = \varepsilon' \qquad \forall x \in A, |x - a| < \delta(a,\varepsilon) = \eta(a, \varepsilon')$$

Bài toán 86. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^*$, $c \in \mathbb{R}$ và ba hàm số thực f, g và h trên A. Giả sử $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in A$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$.

Chứng minh $\lim\limits_{x\to a} h(x) = c$.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

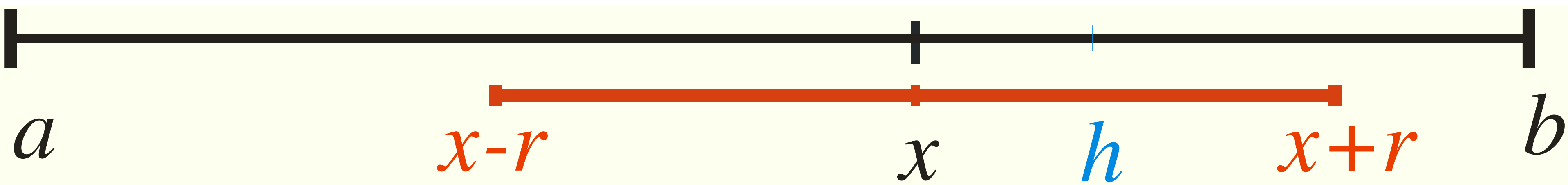
Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

$$\begin{array}{ccccc} f(x_n) & \leq & h(x_n) & \leq & g(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c & & c & & c \end{array}$$

$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$

Cho $x \in (a, b)$. Lúc đó có một số thực dương r sao cho $x + h \in (a, b)$ $\forall \; h \in (-r, r)$



Cho f là một hàm số thực trên (a, b) và $x \in (a, b)$. Đặt

$$u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \forall h \in A \equiv (-r, r) \setminus \{0\}$$

$0 \in A^*$

Có thể xét $\lim\limits_{h \to 0} u(h)$ hay $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a, b) và $x \in (a, b)$. Chọn một số thực dương r sao cho $(x - r, x + r) \subset (a, b)$. Đặt

$$u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \forall h \in (-r, r) \setminus \{0\}$$

Ta nói f là một hàm số khả vi tại x nếu và chỉ nếu giới hạn sau đây có và là một số thực.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (= \lim_{h \to 0} u(h))$$

Lúc đó ta ký hiệu giới hạn này là $f'(x)$ và gọi nó là _đạo hàm của f tại x. Nếu f khả vi tại mọi $x \in (a, b)$ ta nói f khả vi trên (a, b).

Bài toán 87. Cho c là một số thực và $f(x) = c \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

Bài toán 88. Cho c là một số thực và $f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c(x+h) - cx}{h} = \frac{ch}{h} = c$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c$$

Dùng lệnh **D[f(x), x]** để tính đạo hàm của hàm số *f*.

Thí dụ . Cho $f(x) = (7x - 3)^3 \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Tính đạo hàm của f .

In[1]:=D[(7x - 3)^{3}Cos[2x],x]

Out[1]:= 21(7x - 3)^{2}cos2x - 2(7x-3)^{3}sin2x

$$f'(x) = 21(7x - 3)^2\cos 2x - 2(7x-3)^3\sin 2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài toán 89. Cho f và g là các hàm số thực khả vi trên khoảng mở (a, b). Ta có $k = f + g$ khả vi trên khoảng mở (a, b) và $k'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = u(h) + v(h)$$

$$u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad v(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$w(h) = \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = u(h) + v(h)$$

$$u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$v(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} u(h) = f'(x)$$

$$\lim_{h \to 0} v(h) = g'(x)$$

$$w(h) = u(h) + v(h)$$

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} w(h) = f'(x) + g'(x)$$

Bài toán 90. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a,b) và $x \in (a,b)$. Giả sử f khả vi tại x. Cho M trong $(|f'(x)|, \infty)$. Chứng minh có một số thực dương r sao cho $(x-r, x+r) \subset (a, b)$ và

$$|f(y) - f(x)| \le M|y - x| \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < r$$

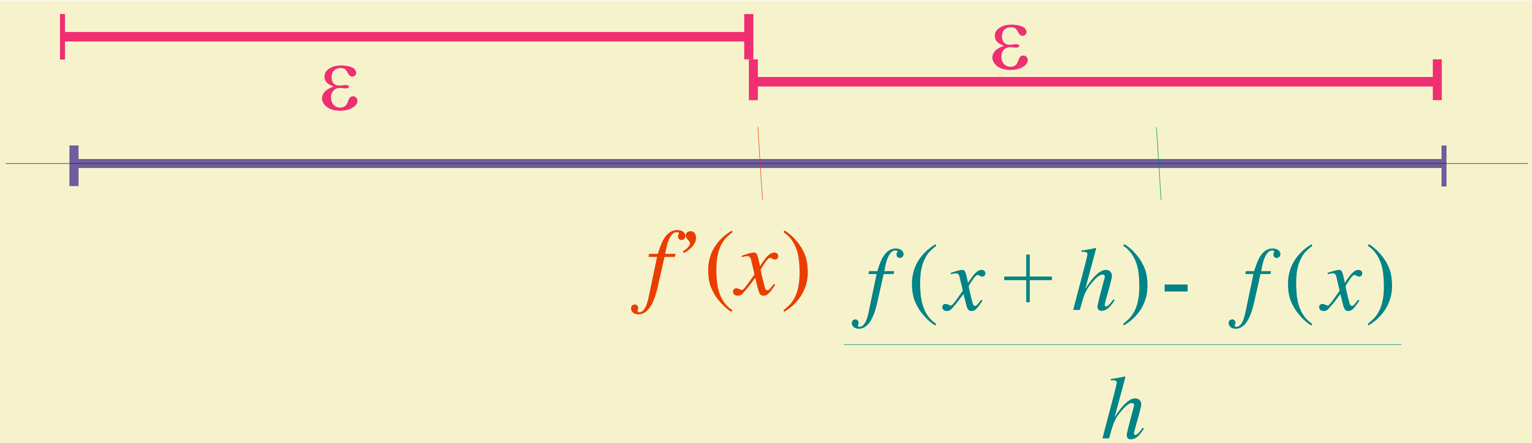
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \varepsilon \qquad \forall\, h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \varepsilon \qquad \forall\, h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$



$$-|f'(x)| - \varepsilon \le f'(x) - \varepsilon \le \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \le f'(x) + \varepsilon \le |f'(x)| + \varepsilon$$

$$-|f'(x)| - \varepsilon \le \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \le |f'(x)| + \varepsilon$$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \le |f'(x)| + \varepsilon \qquad \forall\ h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \le |f'(x)| + \varepsilon \qquad \forall \ h, \ |h| < \delta(\varepsilon)$$

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}(M - |f'(x)|) > 0$ $\quad |f'(x)| + 2\varepsilon = M$

$$|f'(x)| + \varepsilon = M - \varepsilon < M$$

Chọn $r = \delta(\varepsilon)$

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| < M \qquad \forall \ h, \ |h| < r$$

$$|f(x+h)-f(x)| < M|h| \qquad \forall \ h, \ |h| < r$$

$$|f(y)-f(x)| < M|y-x| \qquad \forall \ y \in (a,b), \ |y-x| < r$$

Bài toán 91. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a,b) và $x \in (a,b)$. Giả sử f khả vi tại x và $f'(x)$ khác không. Cho c trong $(0, |f'(x)|)$. Chứng minh có một số thực dương r sao cho $(x-r, x+r) \subset (a, b)$ và

$$c|y-x| \le |f(y) - f(x)| \qquad \forall\, y \in \mathbb{R},\ |y - x| < r$$

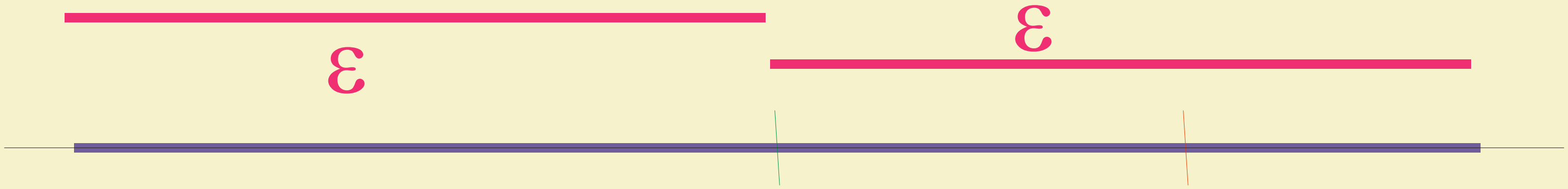
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \varepsilon \qquad \forall\, h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \text{ sao cho}$$

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| < \varepsilon \qquad \forall\ h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$



$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(x)$$

$$-|a| - \varepsilon \le a - \varepsilon \le f'(x) \le a + \varepsilon \le |a| + \varepsilon$$

$$-\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| - \varepsilon \le f'(x) \le \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| + \varepsilon$$

$$|f'(x)| \le \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| + \varepsilon \qquad \forall\ h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$

$$|f'(x)|-\varepsilon \le \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \quad \forall\ h,\ |h|<\delta(\varepsilon)$$

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}(|f'(x)|-c) > 0$

$$|f'(x)|-2\varepsilon = c$$

$$|f'(x)|-\varepsilon = c+\varepsilon > c$$

Chọn $r = \delta(\varepsilon)$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > c \quad \forall\ h,\ |h|<r$$

$$|f(x+h)-f(x)| > c\,|h| \quad \forall\ h,\ |h|<r$$

$$|f(y)-f(x)| > c\,|y-x| \quad \forall\ y\in(a,b),\ |y-x|<r$$

Bài toán 92. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a, b) và $x \in (a, b)$. Giả sử f khả vi tại x. Chứng minh f liên tục tại x

Cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho :

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in (a,b),\ |y-x| < \delta(\varepsilon)$$

Bài toán 90 : Cho $M > |f'(x)|$, có $r > 0$ sao cho $(x-r, x+r) \subset (a,b)$ và

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x| \qquad \forall\, y \in \mathbb{R},\ |y - x| < r$$

Cho $\varepsilon > 0$, đặt $\delta(\varepsilon) = \min\{r, M^{-1}\varepsilon\}$

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in (a,b),\ |y-x| < \delta(\varepsilon)$$

Bài toán 93. Cho f và g là các hàm số thực khả vi trên khoảng mở (a,b). Ta có $k = fg$ khả vi trên khoảng mở (a,b) và $k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$? \quad \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}$$

$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$h$$

$$? \qquad 0 \qquad f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Bài toán 94. Cho f là một hàm số từ (a, b) vào (c,d) và g là một hàm số thực trên (c, d). Cho $x \in (a, b)$ sao cho f khả vi tại x, g khả vi tại $z = f(x)$ và $g'(x) = 0$. Đặt $u = g \circ f$. Chứng minh u khả vi tại x và $u'(x) = 0$

Chứng minh $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = 0$

Cho ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho ∀ h, $|h| < \delta(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\right| = \left|\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} - 0\right| < \varepsilon$$

Cho ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho

$$|g(f(x+h))-g(f(x))| < \varepsilon |h| \qquad \forall\ h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$

Cho ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho

$$| g(f(x+h)) - g(f(x)) | < \varepsilon | h| \qquad \forall h, |h| < \delta(\varepsilon)$$

BT 90 : Đặt $M = |f'(z)| + 1$, có $r > 0$, sao cho

$$| f(x+h) - f(x)| \leq M | h | \qquad \forall h, | h | < r$$

BT 90 : Cho $\varepsilon' > 0$, có $s(\varepsilon') > 0$, sao cho

$$| g(z+k) - g(z)| \leq \varepsilon' | k | \qquad \forall k, | k | < s(\varepsilon')$$

$$| g(f(x+h)) - g(f(x)) | < \varepsilon' | f(x+h) - f(x) | < \varepsilon' M | h |$$

$$\forall \ | f(x+h) - f(x) | < s(\varepsilon'), \ | h | < r$$

$$| f(x+h) - f(x)| \leq M| h | < s(\varepsilon') \qquad \forall h, | h | < r$$

Cho ε > 0, chọn $\varepsilon' = M^{-1}\varepsilon$, và $\delta(\varepsilon) = \min\{r, 2^{-1}M^{-1}s(\varepsilon')\}$

$$| g(f(x+h)) - g(f(x)) | < \varepsilon | h| \qquad \forall h, |h| < \delta(\varepsilon)$$

Bài toán 95. Cho f là một hàm số từ (a, b) vào (c,d) và g là một hàm số thực trên (c, d). Cho $x \in (a, b)$ sao cho f khả vi tại x, g khả tại $z = f(x)$. Đặt $u = g \circ f$. Chứng minh u khả vi tại x và $u'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

- $g'(z) = 0 : u'(x) = 0$ (BT 94)

- $g'(z) = \alpha > 0$. Đặt

$g_1(t) = g(t) - \alpha t \quad \forall t \in (c,d).$

$v(s) = g_1(f(s)) \quad \forall s \in (a,b).$

$g_1'(t) = g'(t) - \alpha \quad \forall t \in (c,d)$

$g_1'(z) = g'(z) - \alpha = 0$

$v'(z) = 0$

$v(s)= g_1(f(s)) = g(f(s)) - \alpha f(s) = u(s)- \alpha f(s)$

$v'(s)= u'(s)- \alpha f'(s)$

$0 = v'(z)= u'(z)- \alpha f'(z)$

$u'(s) = \alpha f'(s) = g'(f(x))f'(x)$

Bài toán 96 (Định lý ánh xạ ngược) . Nếu f là một song ánh từ (a,b) vào (c,d), f liên tục trên (a,b). Cho một x trong (a,b) sao cho f khả tại x và $f'(x) \neq 0$. Chứng minh ánh xạ ngược $g \equiv f^{-1}$ của f khả vi tại $y = f(x)$ và

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Đặt $u = g(v)\ \ \forall\ v \in (c,d)$

$$f'(x) = \lim_{u\to x}\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$$

$$g'(x) = \lim_{v\to y}\frac{g(v)-g(y)}{v-y} = \frac{1}{f'(g(y))}?$$

Đặt $s = 2^{-1}\min\{y-c, d-y\}$, $c' = y-s$, $c' = y+s$, $a' = g(y-s)$, $b' = g(y+s)$. Lúc đó $f([a',b'])$ là một khoảng đóng I chứa $[c',d']$. Từ đó g liên tục trên I, và g liên tục tại y.

Đặt $u = g(v)\ \ \forall\ v \in (c,d)$

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

$$g'(x) = \lim_{v \to y} \frac{g(v) - g(y)}{v - y} = \frac{1}{f'(g(y))}?$$

Đặt $s = 2^{-1}\min\{y-c, d-y\}$, $c' = y-s$, $c' = y+s$, $a' = g(y-s)$, $b' = g(y+s)$. Lúc đó $f([a',b'])$ là một khoảng đóng I chứa $[c',d']$. Từ đó g liên tục trên I, và g liên tục tại y.

$$\lim_{v \to y}(u - x) = \lim_{v \to y}(g(v) - g(y)) = 0$$

$$\frac{g(v) - g(y)}{v - y} = \frac{u - x}{f(u) - f(x)} = \left[\frac{f(u) - f(x)}{u - x}\right]^{-1} \qquad \forall v \neq y$$

$$\lim_{v \to y} \frac{g(v) - g(y)}{v - y} = \lim_{u \to x}\left[\frac{f(u) - f(x)}{u - x}\right]^{-1} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Cho

$g(y) = \arcsin y \qquad \forall\, y \in [-1, 1]$ và

$f(x) = \sin x \qquad \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ta thấy g là ánh xạ ngược của f và

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - f(x)^2}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - f(g(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \forall y \in (-1, 1)$$

Cho f là một hàm số thực trên một khoảng mở (a, b) và c là một điểm trong (a, b). Ta nói

- f đạt cực đại tại c nếu và chỉ nếu

  $f(c) \geq f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

- f đạt cực tiểu tại c nếu và chỉ nếu

  $f(c) \leq f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Bài toán 97. Cho f là một hàm số thực trên một khoảng mở (a, b) và c là một điểm trong (a, b). Giả sử f khả vi tại c và đạt cực đại tại c. Chứng minh $f'(c) = 0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \geq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Bài toán 98 . Cho f là một hàm số thực trên một khoảng mở (a, b) và c là một điểm trong (a, b). Giả sử f khả vi tại c và đạt cực tiểu tại c. Chứng minh $f'(c) = 0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \geq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Bài toán 99 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên một khoảng mở (a, b) sao cho $f(a) = f(b)$. Chứng minh có $t \in (a, b)$ sao cho $f'(t) = 0$.

Có c và d trong $[a, b]$ sao cho $f(c) = \min f([a, b])$ và $f(d) = \max f([a, b])$

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \qquad \forall x \in [a, b]$$

■ Nếu $f(c) = f(d)$: thì $f(c) \leq f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in [a, b]$, f là ánh xạ hằng và ta thấy $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$.

■ Nếu $f(c) \neq f(d)$ thì hoặc c hoặc d phải thuộc (a, b) , vì $f(a) = f(b)$.

$$f'(c) = 0 \qquad \text{hoặc} \qquad f'(d) = 0$$

Bài toán 100 (Định lý giá trị trung bình). Nếu f là một ánh xạ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), thì có một $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \quad \forall x \in [a,b]$

Ta thấy $g(a) = g(b)$ và

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad \forall x \in (a,b)$$

Theo bài toán 99, có $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Nếu f khả vi trên (a, b), đặt $g(x) = f'(x)$ với mọi x trong (a, b). Ta thấy g là một hàm số trên (a, b).

Nếu g khả vi tại $x \in (a, b)$, ta thấy

$$g'(x) = (f')'(x) .$$

Lúc đó ta nói f có đạo hàm bậc 2 tại x, đạo hàm bậc 2 của f tại x chính là $g'(x)$, và được ký hiệu là $f''(x)$ hoặc $f^{(2)}(x)$.

Ta còn ký hiệu $f^{(0)} = f$ và $f^{(1)} = f'$.

Ta có thể dùng qui nạp toán học để định nghĩa các đạo hàm bậc cao $n \geq 2$ như sau : $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

Định nghĩa . Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở (a, b). Ta thấy f' là một hàm số thực trên (a, b) . Nếu f' liên tục trên (a, b), ta nói f thuộc lớp C^1 trên (a, b).

Định nghĩa . Cho f là một hàm số thực khả vi n lần trên một khoảng mở (a, b). Ta thấy $f^{(n)}$ là một hàm số thực trên (a, b) . Nếu $f^{(n)}$ liên tục trên (a, b), ta nói f thuộc lớp C^n trên (a, b).

Dùng lệnh D[f(x),{x,n}] : tính đạo hàm bậc n của hàm số f.

$$\mathrm{In}[1] := D[e^{-\frac{1}{x^2}},\{x,3\}]$$

$$\mathrm{Out}[1] := e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{8}{x^9}-\frac{36}{x^7}+\frac{24}{x^5}\right)$$

Đạo hàm bậc ba của $e^{-\frac{1}{x^2}}$ là $e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{8}{x^9}-\frac{36}{x^7}+\frac{24}{x^5}\right)$

Cho c và d là hai điểm trong khoảng mở (a,b), I(c,d) là khoảng đóng có các đầu mút là c và d, và f là một hàm khả vi đến cấp n -1 trên khoảng mở (a,b), với $n \geq 2$. Xét đa thức Taylor bậc n tại c như sau

$$P_{n-1}(x,c) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad \forall x \in I(c,d)$$

Dùng lệnh Series[f[x],{x,c,n}] Ta tính được $P_{n-1}(x,c)$.

$$\text{In}[3] := \text{Series}[e^{x}, \{x, 0, 4\}]$$

$$\text{Out}[3] := 1 + x + \frac{1}{2}x^{2} + \frac{1}{6}x^{3} + \frac{1}{24}x^{4} + \text{o}[x]^{5}$$

Vậy ta có khai triển Taylor tại 0 đến bậc 4 của hàm số e^x là

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Định lý. (Taylor) . Cho c và d là hai điểm trong khoảng mở (a,b), I(c,d) là khoảng đóng có các đầu mút là c và d, và f là một hàm khả vi đến cấp n trên khoảng mở (a,b), với $n \geq 2$. Lúc đó có $s \in I(c,d)$ sao cho

$$f(d) = P_{n-1}(d,c) + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

$$= f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

$$P_{n-1}(x,c) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad \forall x \in I(c,d)$$

Bài toán 101 . Tính $\sqrt{2}$ với sai số nhỏ hơn 10^{-8} .

Xét $f(x) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in (0, \infty)$. Dùng qui nạp chứng minh f có đạo hàm mọi bậc và với mọi $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} , \quad f^{(2)}(x) = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} ,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\cdots(n - \tfrac{3}{2}) x^{-n+\frac{1}{2}} \qquad n \geq 3$$

$\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{98}}{7}$ Tính $\sqrt{98}$ Đặt $c = 100$ và $d = 98$

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n \qquad (s \in I(c,d))$$

$$\sqrt{98} = 10 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(100)}{k!})(-2)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n \qquad (s \in I(c,d))$$

$$\sqrt{98} = 10 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(100)}{k!}(-2)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n \qquad (s \in (c,d))$$

Chọn n sao cho sai số $\left|\frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n\right| \le 10^{-8}$ và tính

$$\sqrt{2} = \frac{1}{7}\sqrt{98} \approx \frac{1}{7}\left[10 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(100)}{k!}(-2)^k\right]$$

Sai số : $\left|\frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n\right| \le \frac{(n-1)!}{n!}(98)^{-n+\frac{1}{2}} 2^{n-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n}(49)^{-n+1}$

In[1] := $N[\frac{1}{5}49^{-4}]$

Out[1] := $3.46933\ 10^{-8}$

In[2] := $N[\frac{1}{6}49^{-5}]$

Out[2] := $5.90022\ 10^{-10}$

Chọn

$n = 6$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{7}\sqrt{98} \approx \frac{1}{7}[10 + \sum_{k=1}^{5} \frac{f^{(k)}(100)}{k!}(-2)^k]$$

$$\text{In}[9] := \text{N}[\frac{1}{7}(10 + \frac{1}{2}100^{-\frac{1}{2}}(-2) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}100^{-\frac{3}{2}}(-2)^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}100^{-\frac{5}{2}}(-2)^3 - \frac{1}{24}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}100^{-\frac{7}{2}}(-2)^4 + \frac{1}{120}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}100^{-\frac{9}{2}}(-2)^5),\ 17]$$

$$\text{Out}[9] := 1.414213562375000$$

Với sai số nhỏ hơn 10^{-8} , ta có thể chọn giá trị xấp xỉ của $\sqrt{2}$ là 1,414213562

Định lý. (Maclaurin) Cho f là một hàm số có đạo hàm $f^{(n)}$ cấp n trên (a,b) với mọi số nguyên dương n. Giả sử có $r > 0$ sao cho $[-r, r] \subset (a,b)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} \sup_{x\in[-r,r]} |f^{(n)}(x)| = 0$$

Lúc đó $$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \qquad \forall t \in (-r, r)$$

Định lý Taylor cho ta : có $s \in I(c,d)$ sao cho

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

Định lý Taylor cho ta : có $s \in I(c,d)$ sao cho

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

với $c = 0$ và $d = t$: có $s \in I(0,t)$ sao cho

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}t^n$$

$$\left|\frac{f^{(n)}(s)}{n!}t^n\right| \le \frac{r^n}{n!} \sup_{x \in [-r,r]} |f^{(n)}(x)|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(s)}{n!}t^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k = \lim_{n\to\infty}\left[f(t) - f(0) - \frac{f^{(n)}(s)}{n!}t^n\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k = f(t) - f(0)$$

Cho $f(x) = e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta thấy f khả vi mọi bậc trên $\mathbb{R}$ và $f^{(n)}(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f^{(n)}(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{r^n}{n!}|f^{(n)}(x)| \le \frac{r^n e^r}{n!} \qquad \forall x \in [-r, r], \forall r > 0$$

$$\frac{r^n}{n!} \sup_{x \in [-r,r]} |f^{(n)}(x)| \le \frac{r^n e^r}{n!}$$

$$\frac{r^{2k} e^r}{2k!} = \frac{r^{2k} e^r}{1.2....2k} \le \frac{r^{2k} e^r}{k...2k} \le e^r \frac{(r^2)^k}{k^k}$$

$$= e^r \left(\frac{r^2}{k}\right)^k \le e^r \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \qquad \forall k > 2r^2$$

$$\frac{r^{2k}e^r}{2k!} = \frac{r^{2k}e^r}{1.2....2k} \le \frac{r^{2k}e^r}{k...2k} \le e^r \frac{(r^2)^k}{k^k}$$

$$= e^r (\frac{r^2}{k})^k \le e^r (\tfrac{1}{2})^k \qquad \forall k > 2r^2$$

$$\lim_{m\to\infty} (\tfrac{1}{2})^m = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} e^r (\tfrac{1}{2})^m = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} re^r (\tfrac{1}{2})^m = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n e^r}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} \sup_{x\in[-r,r]} |f^{(n)}(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{r^n e^r}{n!} = 0$$

Cho $f(x) = e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta thấy f khả vi mọi bậc trên $\mathbb{R}$ và $f^{(n)}(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f^{(n)}(0) = 1 \ \forall n \in$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} \sup_{x \in [-r,r]} |f^{(n)}(x)| = 0$$

Định lý (Maclaurin)

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \qquad \forall t \in (-r,r),\ r > 0$$

$$e^t = f(t) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \qquad \forall t \in [-r,r]$$

$$e^t = f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \qquad \forall t \in (-\infty,\infty)$$

Định lý (L' Hôpital). Cho f và g là hai hàm số khả vi trên khoảng mở (a,b) sao cho $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$, ở đây $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Giả sử giới hạn $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ xác định .

Ta có $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ trong các trường hợp sau :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

Đặt $u(x) = \ln(1+3x)$ và $v(x) = x \quad \forall x \in (0, \infty)$

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} v(x) = 0$$

$$u'(x) = \frac{3}{1+3x} \qquad v'(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{1+3x} = 3$$

TÍNH GIỚI HẠN CÁC HÀM SỐ

I ■ Dùng tính liên tục của các hàm số

Cho f là một hàm số thực trên khoảng $[a, b]$ và liên tục tại $c \in (a, b)$. Lúc đó $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ (**Bài toán 79**)

Bài toán 102 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2}$

Đặt $g(x) = x^6 - 4x^2 + 5$ và $h(x) = x^4 + x^2$

$$f(x) = \frac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$\forall\ x \in [0,3]$ $\forall\ x \in [1,3]$

f liên tục trên $[1 , 3]$, $\sqrt{3} \in (1,3)$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2} = f(\sqrt{3}) = \frac{5}{6}$$

II ■ Dùng các kết quả của bài tập 7.7.3.1

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{2n} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty$$

Bài toán 103 . Tính giới hạn $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2}$

$$\frac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2} = \frac{x^6(1 - 4x^{-4} + 5x^{-6})}{x^4(1 + x^{-2})} = x^2\,\frac{1 - 4x^{-4} + 5x^{-6}}{1 + x^{-2}}$$

$$1-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{4x^{-4}}+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{5x^{-6}} \longrightarrow 1$$

$$x \to \infty$$

$$1+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x^{-2}} \longrightarrow 1$$

$$x \to \infty$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{x^{2}}\,\frac{\overset{\substack{1\\ \uparrow}}{1-4x^{-4}+5x^{-6}}}{\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1+x^{-2}}} \longrightarrow \infty$$

$$x \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-4x^2+5}{x^4+x^2}=\lim_{x\to\infty}x^2\,\frac{1-4x^{-4}+5x^{-6}}{1+x^{-2}}=\infty$$

Bài toán 104 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}$

Đặt $y = x - 1$ | $x = y + 1$ | $2x + 1 = 2y + 3$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x-1}=\lim_{y\to 0^+}\frac{2y+3}{y}=\lim_{y\to 0^+}(2y+3)\frac{1}{y}$$

$$\underbrace{(2y+3)}_{\to 3}\underbrace{\frac{1}{y}}_{\to\infty}\to\infty$$

$$y\to 0^+$$

$$\lim_{y\to 0^+}(2y+3)\frac{1}{y}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x-1}=\infty$$

Bài toán 105 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}$

Đặt $y = x - 1$ $\quad x = y + 1 \quad 2x + 1 = 2y + 3$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{x-1} = \lim_{y\to 0^-}\frac{2y+3}{y} = \lim_{y\to 0^-}(2y+3)\frac{1}{y}$$

$$(2y+3)\frac{1}{y}$$

-∞

-∞

3 $\quad y \to 0^-$

$$\lim_{y\to 0^-}(2y+3)\frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{x-1} = -\infty$$

Bài toán 106 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+1}-x)$

$$\sqrt{x^2-5x+1}-x=(\sqrt{x^2-5x+1}-x)\frac{\sqrt{x^2-5x+1}+x}{\sqrt{x^2-5x+1}+x}$$

$$\frac{x^2-5x+1-x^2}{\sqrt{x^2-5x+1}+x}=\frac{x(-5+x^{-1})}{x(\sqrt{1-5x^{-1}+x^{-2}}+1)}=\frac{-5+x^{-1}}{\sqrt{1-5x^{-1}+x^{-2}}+1}$$

$$\frac{-5+\overbrace{x^{-1}}^{0}}{\underbrace{\sqrt{1-5x^{-1}+x^{-2}}}_{1}+1}\xrightarrow[x\to\infty]{}-\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+x^{-1}}{\sqrt{1-5x^{-1}+x^{-2}}+1}=-\frac{5}{2}$$

III ■ Dùng các kết quả của các bài tập 7.7.3.1 và **7.7.2.3 .**

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty. \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Cho v là một hàm số thực dương trên (a, b). Đặt $f(x) = \ln(v(x))$ với mọi x trong (a,b). Ta có

$$(i)\ \lim_{x\to c} f(x) = d \iff \lim_{x\to c} v(x) = e^d\ ,$$

$$(ii)\ \lim_{x\to c} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to c} v(x) = \infty\ ,$$

$$(iii)\ \lim_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to c} v(x) = 0\ .$$

Bài tập này giúp ta tính các giới hạn của các hàm số v có dạng tích hoặc luỹ thừa

Bài toán 107 . Cho $\delta > 0$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\delta}$

Đặt $f(x) = \ln x^{\delta} = \delta \ln x$

$$\delta \ln x \to \infty \qquad x \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\delta} = \infty$$

Bài toán 108 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{x^2+7}\right)^x$

Đặt $f(x)=\ln\left(\dfrac{3+5x}{x^2+7}\right)^x = x\ln\left(\dfrac{3+5x}{x^2+7}\right)$

$$x \to 0$$

$$3 \leftarrow 3+5x \qquad 7 \leftarrow x^2+7$$

$$\frac{3+5x}{x^2+7} \to \frac{3}{7}$$

$$\ln\frac{3}{7} \leftarrow \ln\left(\frac{3+5x}{x^2+7}\right) \qquad 0 \leftarrow x$$

$$x\ln\left(\frac{3+5x}{x^2+7}\right) \to 0$$

$$x \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+5x}{x^2+7}\right)^x = 1$$

IV ■ Dùng bài tập 7.7.3.5

$$(i)\ \lim_{x\to\infty} x^{-n}e^{x} = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^{n}e^{x} = 0, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$(ii)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Bài toán 109 . Tính giới hạn $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Đặt $f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln x}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Bài toán 110 . Tính giới hạn $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x^2}}$

Đặt $f(x) = \ln x^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Đặt $y = x^2$

$x \to \infty$

$y \to \infty$

$$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln y^{1/2}}{y} = \frac{1}{2}\frac{\ln y}{y}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{y\to\infty}\frac{\ln y^{1/2}}{y} = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\ln y}{y} = \frac{1}{2}\lim_{y\to\infty}\frac{\ln y}{y} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

V ■ Dùng nguyên tắc Hôpital

Bài toán 111 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}}$

Đặt $f(x)=\ln(1+6x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\ln(1+6x)}{x}$

$$0 \leftarrow \ln(1+6x) \rightarrow 1 \qquad \frac{\ln(1+6x)}{x} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0$$

Đặt $u(x) = \ln(1+6x)$, $v(x) = x$

$u'(x) = 6$, $v'(x) = 1$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{1}=6$$

$$\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}}=e^{6}$$

Bài toán 112 . Tính giới hạn $\lim_{y\to\infty}(1+\frac{6}{y})^{y}$

Đặt $x = y^{-1}$ $y \to \infty$ $x \to 0$

Đặt $f(x) = \ln(1+6x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+6x)}{x}$

$0 \leftarrow \ln(1+6x) \rightarrow 1$, $x \to 0$

$\frac{\ln(1+6x)}{x}$ $\rightarrow 0$

Đặt $u(x) = 1+6x$, $v(x) = x$ $u'(x) = 6$, $v'(x) = 1$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6}{1} = 6$$

$$\lim_{y\to\infty}(1+\frac{6}{y})^{y} = \lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}} = e^{6}$$

VI ▪ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài toán 113 . Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2n}-e^{n}+3}{3e^{2n}+5}$

Đặt $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{x}+3}{3e^{2x}+5}$

$$\frac{e^{2x}-e^{x}+3}{3e^{2x}+5}=\frac{e^{2x}(1-e^{-x}+3e^{-2x})}{e^{2x}(3+5e^{-2x})}=\frac{1-e^{-x}+3e^{-2x}}{3+5e^{-2x}}$$

$$x\to\infty:\quad \frac{\overbrace{1-\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}+3\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}}^{\to 1}}{\underbrace{3+5\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}}_{\to 3}}\to\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n}-e^{n}+3}{3e^{2n}+5}=\frac{1}{3}$$

Bài toán 114 . Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{-5n}{7n+3}}$

Đặt $f(x) = x^{\frac{-5x}{7x+3}}$

Đặt $g(x) = \dfrac{-5x}{7x+3}\ln x = \dfrac{-5}{7+3x^{-1}}\ln x$

$$\frac{-5}{7+3x^{-1}} \xrightarrow{x\to\infty} -\frac{5}{7}$$

$$7+3x^{-1} \to 7$$

$$x^{-1} \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5}{7+3x^{-1}}\ln x = -\infty$$

$$\ln x \to \infty$$

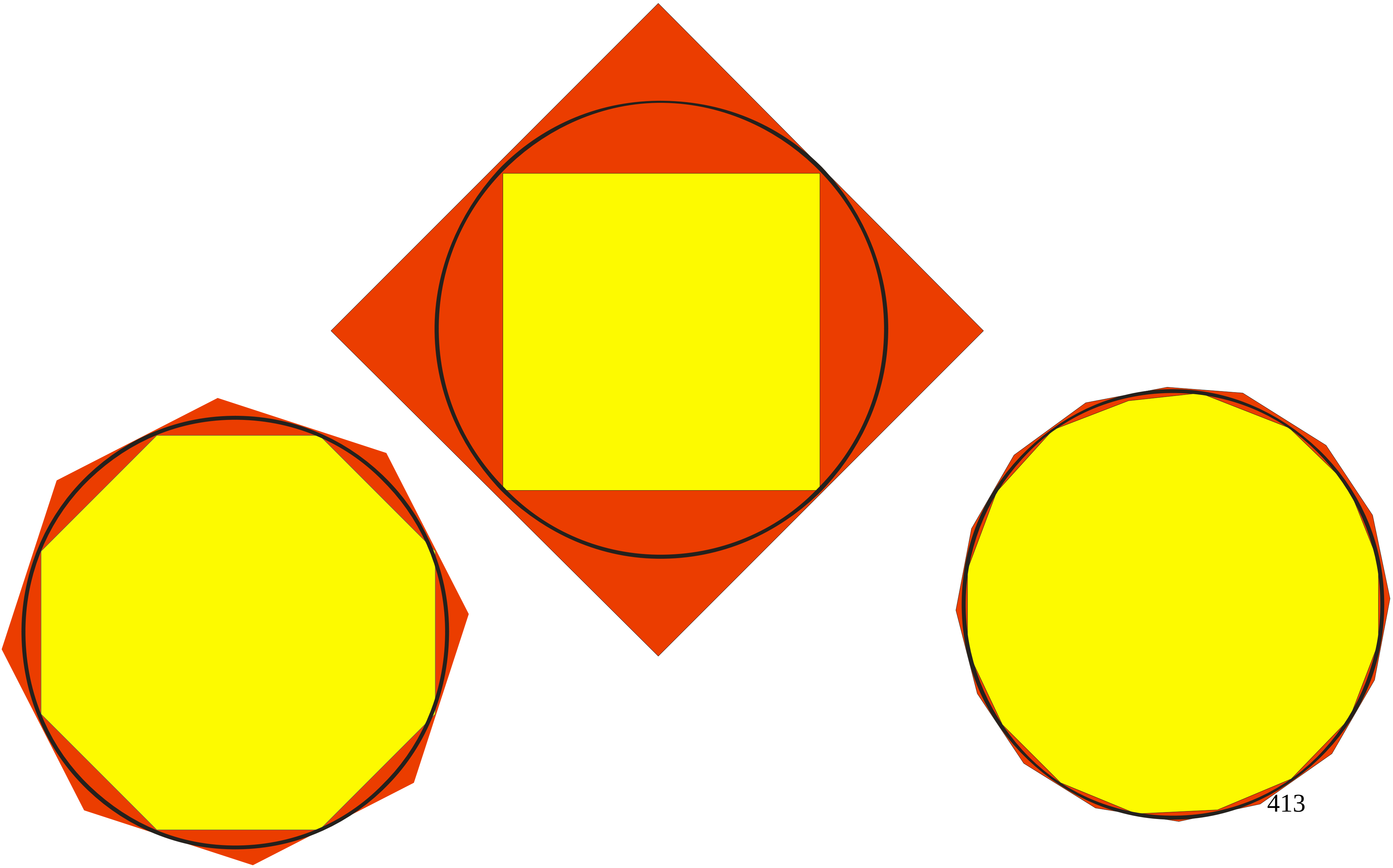
$$\frac{-5}{7+3x^{-1}}\ln x \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$$

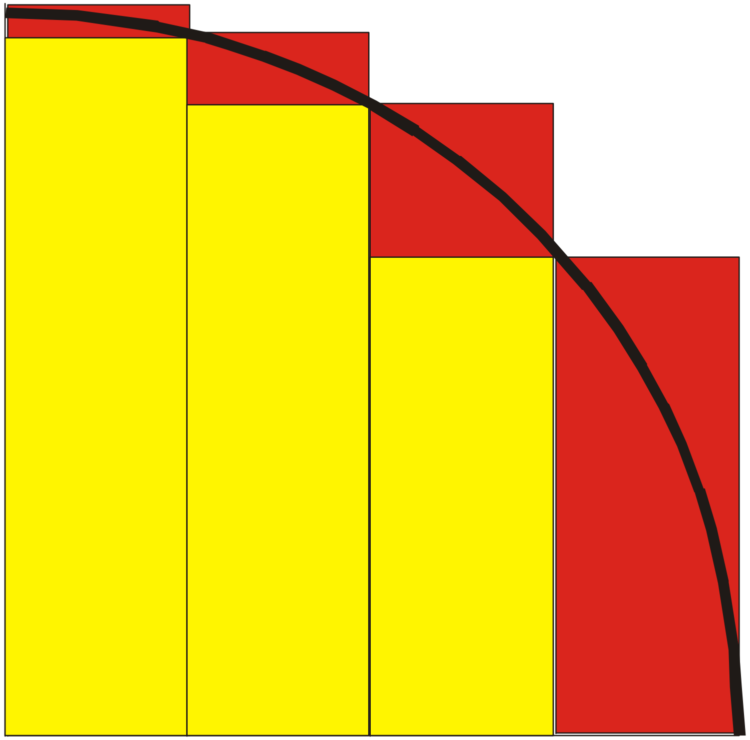
$$\frac{-5}{7+3x^{-1}} \to -\frac{5}{7}$$

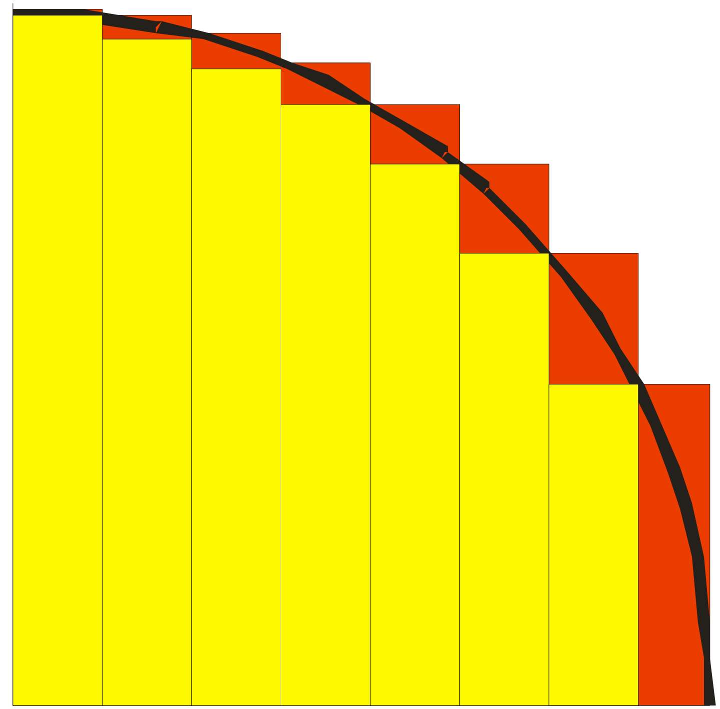
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

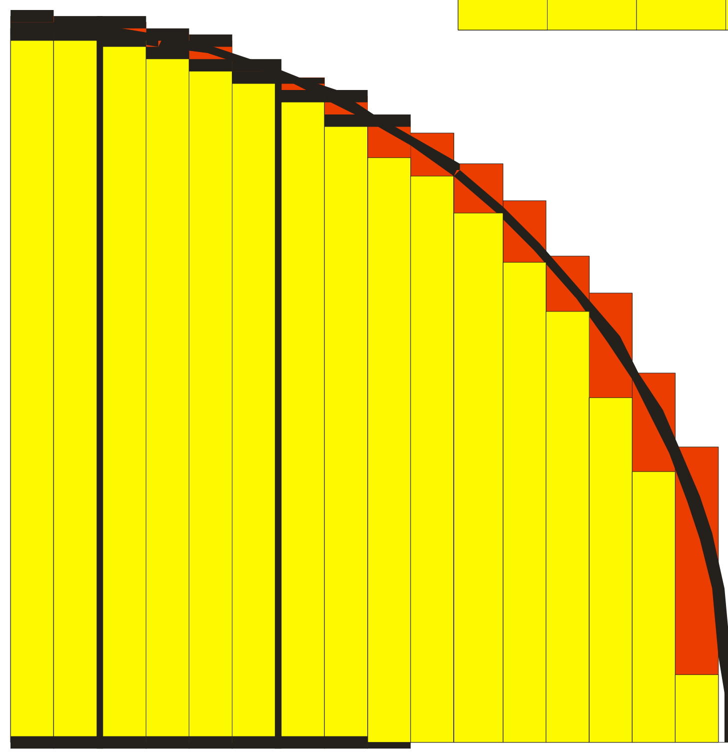
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{-5n}{7n+3}} = 0$$

TÍCH PHÂN









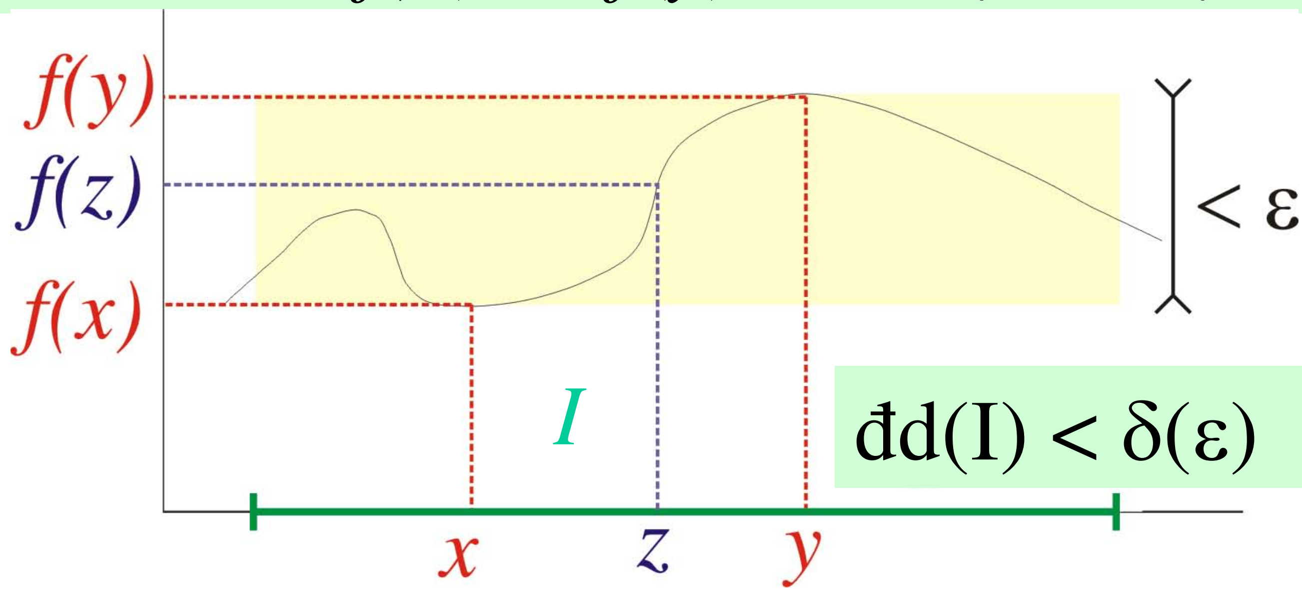
Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$, ta nói f là một hàm số thực liên tục đều trên A nếu và chỉ nếu

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

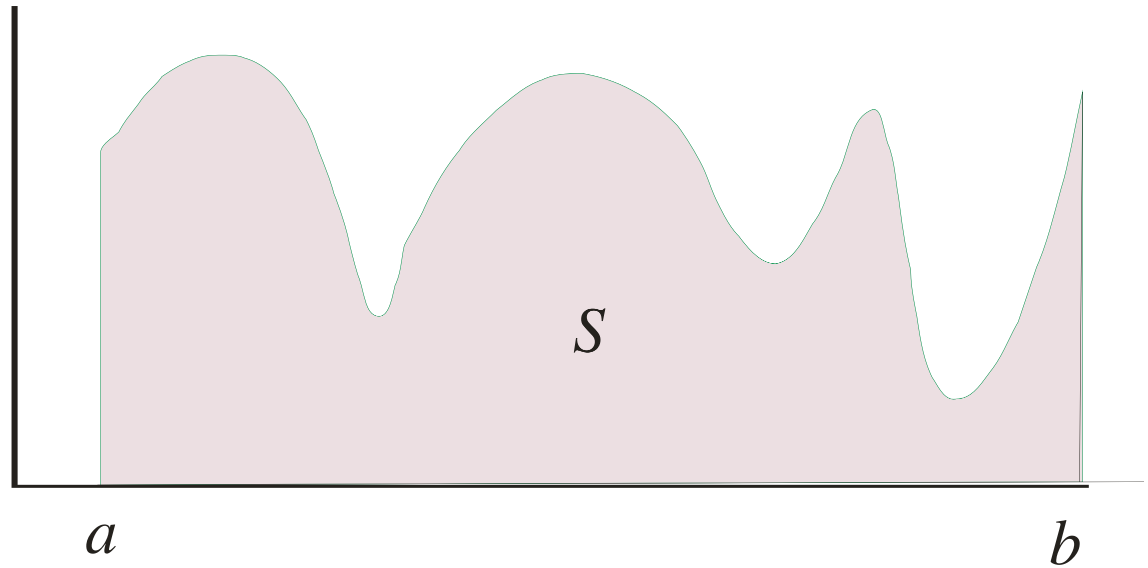
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, x$ và $y \in A$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

Cho I là một khoãng trong A có chiều dài đd(I) nhỏ hơn $\delta(\varepsilon)$. Cho x và y trong I sao cho $f(x)$ và $f(y)$ lần lượt là cực tiểu và cực đại của f trong I . Lúc đó

$f(y) - f(x) < \varepsilon$



Cho f là một hàm số liên tục trên khoảng $[a,b]$. Đặt S là là diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của f, trục hoành và các đường thẳng thẳng góc với trục hoành tại các đầu mút a và b với trục hoành.



Cho một số thực dương ε, chúng ta sẽ tính xấp xỉ S với sai số nhỏ hơn ε .

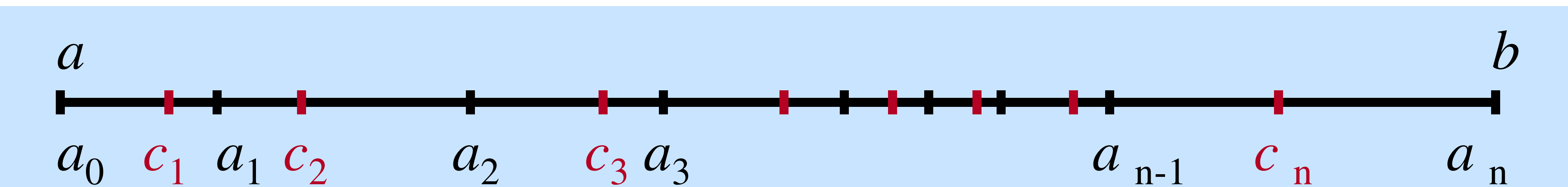
Nhưng dt(S) là gì ? Làm sao xác định nó ?

Định nghĩa. Cho một khoảng đóng $[a, b]$. Cho $2n+1$ số thực $a_0, a_1, \cdots, a_n, c_1, \cdots, c_n$ sao cho $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ và $c_k \in [a_{k-1}, a_k]$ với mọi $k = 1, \cdots, n$.

Lúc đó ta nói $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; c_1, \cdots, c_n\}$ là một phân hoạch của khoảng $[a, b]$ và đặt

$$|P| = \max\{a_1 - a_0, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1}\}.$$

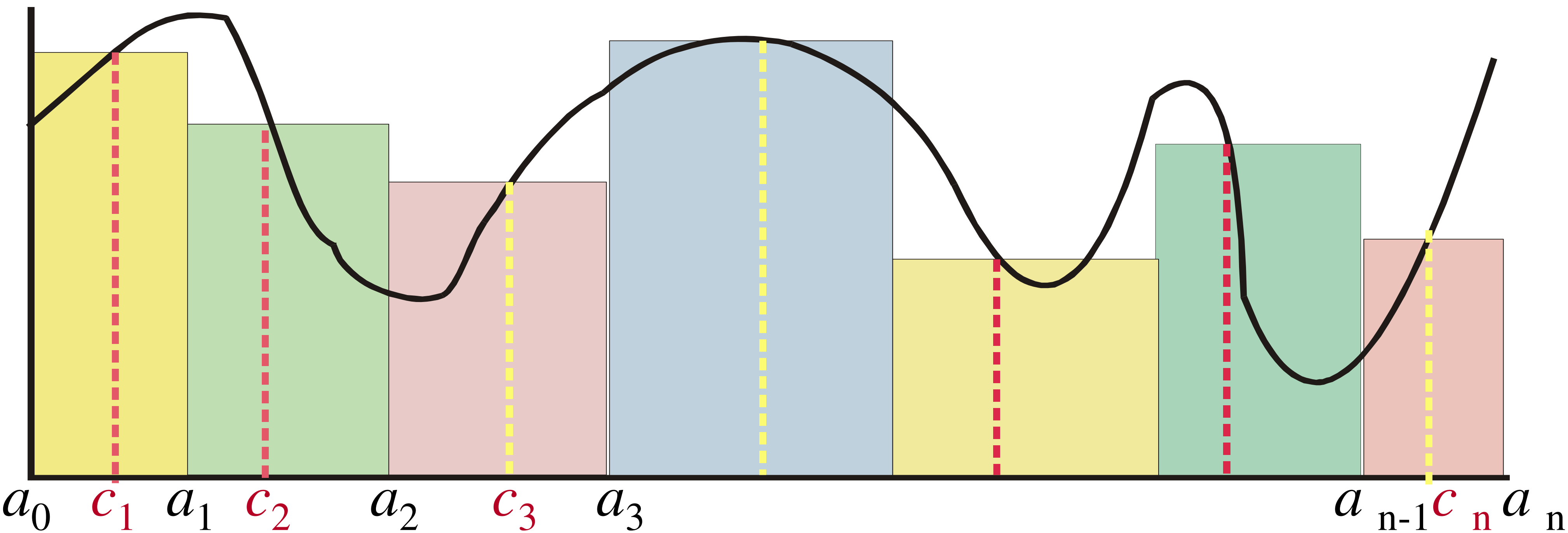
Đặt $\mathcal{P}([a,b])$ là tập hợp tất cả các phân hoạch của $[a, b]$.



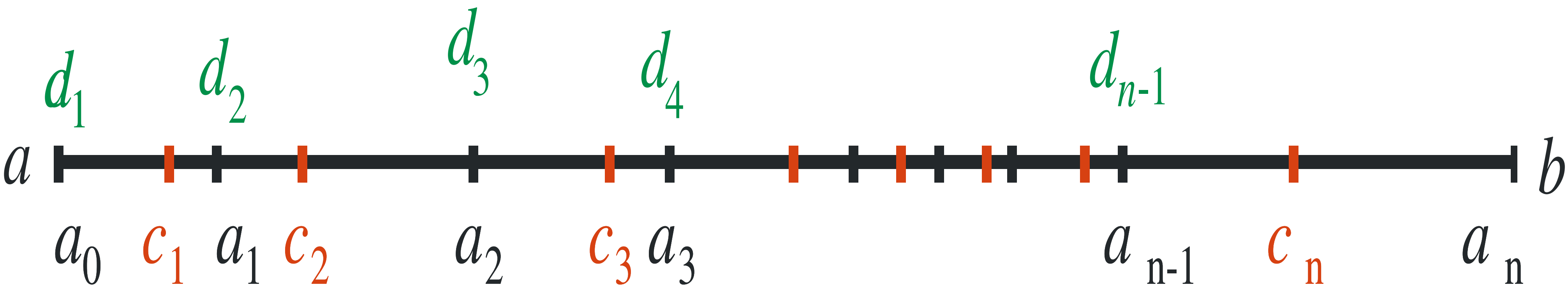
Định nghĩa. Cho một hàm số thực f trên một khoảng đóng $[a, b]$ và $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; c_1, \cdots, c_n\}$ là một phân hoạch của khoảng $[a, b]$. Ta đặt

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(a_k - a_{k-1})$$

và gọi tổng số này là tổng Riemann tương ứng với phân hoạch P.



Định nghĩa. Cho $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; c_1, \cdots, c_n\}$ là một phân hoạch của khoảng $[a,b]$. Ta đặt $d_i = a_{i-1}$ với mọi i trong $\{1, \ldots, n\}$ và $P' = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; d_1, \cdots, d_n\}$. Ta thấy P' là một phân hoạch của $[a,b]$.



Bài toán TP1. Cho một hàm số thực f liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, và ε là một số thực dương. Chứng minh có một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,P')| < \varepsilon \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}([a, b]), |P| < \delta(\varepsilon).$$

Bài toán TP1. Cho một hàm số thực f liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, và ε là một số thực dương. Chứng minh có một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,P')| < \varepsilon \qquad \forall\ P \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P| < \delta(\varepsilon).$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,P')| < \varepsilon \qquad \forall\ P \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P| < \delta(\varepsilon).$$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\delta'(\varepsilon') > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\ x, y \in [a, b],\ |y-x| < \delta'(\varepsilon').$$

$$S(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(a_{k+1} - a_k) \qquad S(f,P') = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1} - a_k)$$

$$|S(f,P) - S(f,P')| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1} - a_k) \right|$$

Cho ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho

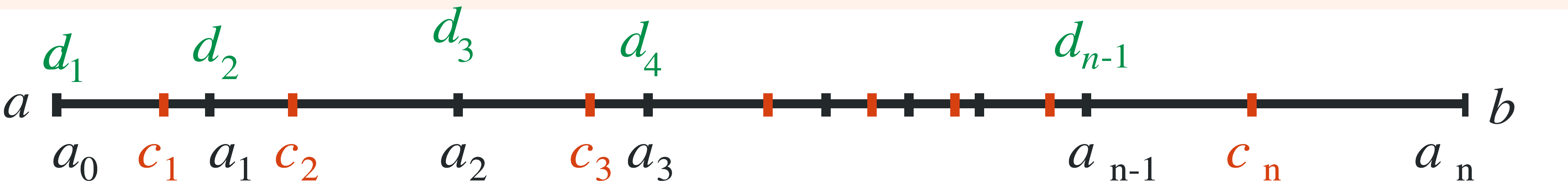
$|S(f,P) - S(f,P')| < \varepsilon \qquad \forall P \in \mathcal{P}([a, b]), |P| < \delta(\varepsilon).$

Cho ε' > 0, có δ'(ε') > 0 sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall x,y \in [a, b], |y-x| < \delta'(\varepsilon').$

$$|S(f,P)-S(f,P')| = |\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(a_{k+1}-a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)|$$

$$= |\sum_{k=0}^{n-1}[f(c_k)-f(a_k)](a_{k+1}-a_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|f(c_k)-f(a_k)|(a_{k+1}-a_k)$$



$$|S(f,P)-S(f,P')| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon'(a_{k+1}-a_k) = \varepsilon'(b-a) \text{ nếu } |P| \leq \delta'(\varepsilon')$$

Cho ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho

$|S(f,P) - S(f,P')| < \varepsilon \qquad \forall P \in \mathcal{P}([a, b]), |P| < \delta(\varepsilon).$

Cho ε' > 0, có δ'(ε') > 0 sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall x,y \in [a, b], |y-x| < \delta'(\varepsilon').$

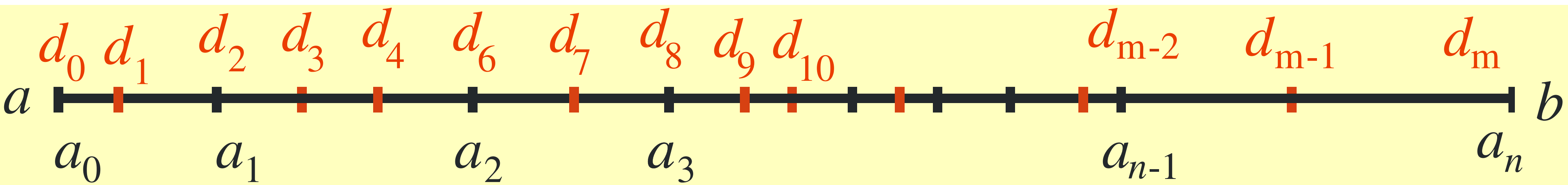
$$| S(f,P) - S(f,P') | \leq \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon'(a_{k+1} - a_k) = \varepsilon'(b-a) \text{ nếu } |P| \leq \delta'(\varepsilon')$$

Cho ε > 0, đặt $\varepsilon' = (b-a)^{-1}\varepsilon$. Ta có δ'(ε') > 0 . Đặt δ(ε) = δ'(ε'). Ta có

$|S(f,P) - S(f,P')| < \varepsilon \qquad \forall P \in \mathcal{P}([a, b]), |P| < \delta(\varepsilon).$

Định nghĩa. Cho $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n;\ a_0, \cdots, a_{\mathrm{n-1}}\}$ và $Q = \{d_0, d_1, \cdots, d_{m-1}, d_m;\ d_0, \cdots, d_{\mathrm{m-1}}\}$ là các phân hoạch của khoảng $[a,b]$. Ta nói $P \subset Q$ nếu và chỉ nếu

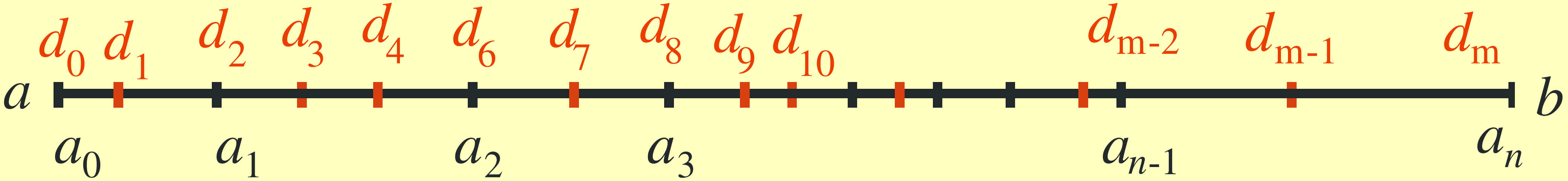
$$\{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n\} \subset \{d_0, d_1, \cdots, d_{m-1}, d_m\}$$



Bài toán TP2. Cho một hàm số thực f liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, và ε là một số thực dương. Chứng minh có một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$$|S(f,P') - S(f,Q')| < \varepsilon \qquad \forall\ P, Q \in \wp([a, b]),\ P' \subset Q'$$

$$|P| < \delta(\varepsilon)$$



Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|S(f,Q') - S(f,P')| < \varepsilon \quad \forall\, P, Q \in \wp([a, b]), P' \subset Q' \; |P| < \delta(\varepsilon)$

$$S(f,Q') = \sum_{k=0}^{m-1} f(d_k)(d_{k+1} - d_k)$$

$$S(f,P') = \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j) \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} (d_{k+1} - d_k)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} f(a_j)(d_{k+1} - d_k)$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|S(f,Q') - S(f,P')| < \varepsilon \quad \forall\ P,\ Q \in \wp([a, b]), P' \subset Q'\ |P| < \delta(\varepsilon)$

$$S(f,Q') = \sum_{k=0}^{m-1} f(d_k)(d_{k+1} - d_k)$$

$$S(f,P') = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} f(a_j)(d_{k+1} - d_k)$$

$$S(f,Q') = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} f(d_k)(d_{k+1} - d_k)$$

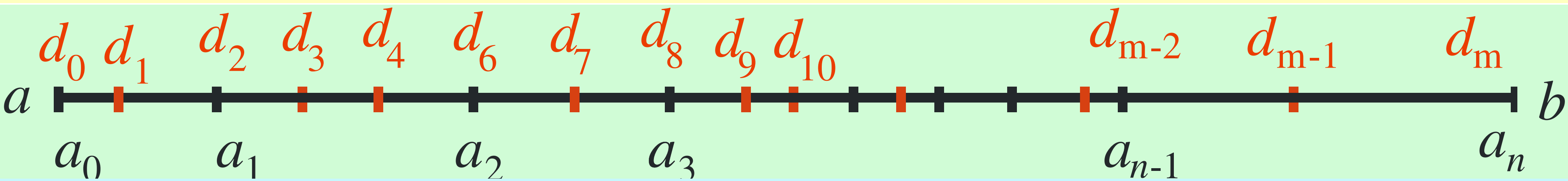
$$| S(f,Q') - S(f,P') | = | \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} [f(d_k) - f(a_j)](d_{k+1} - d_k) |$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|S(f,Q') - S(f,P')| < \varepsilon \quad \forall\, P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), P' \subset Q', |P| < \delta(\varepsilon)$

$$|S(f,Q') - S(f,P')| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} [f(d_k) - f(a_j)](d_{k+1} - d_k)\right|$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} |f(d_k) - f(a_j)|(d_{k+1} - d_k)$$



Cho $\varepsilon' > 0$, có $\delta'(\varepsilon') > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\, x,y \in [a, b], |y-x| < \delta'(\varepsilon')$.

$$|S(f,Q') - S(f,P')| \le \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \le d_k < a_{j+1}} \varepsilon'(d_{k+1} - d_k) \text{ nếu } |P| \le \delta'(\varepsilon')$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|S(f,Q') - S(f,P')| < \varepsilon \quad \forall\ P, Q \in \wp([a, b]), P' \subset Q'\ |P| < \delta(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\delta'(\varepsilon') > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\ x, y \in [a, b], |y-x| < \delta'(\varepsilon')$.

$$| S(f,Q') - S(f,P') | \leq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \leq d_k < a_{j+1}} \varepsilon'(d_{k+1} - d_k) \text{ nếu } | P | \leq \delta'(\varepsilon')$$

$$| S(f,Q') - S(f,P') | \leq \varepsilon' \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{a_j \leq d_k < a_{j+1}} (d_{k+1} - d_k) = \varepsilon'(b-a)$$

nếu $| P | \leq \delta'(\varepsilon')$.

Cho $\varepsilon > 0$, đặt $\varepsilon' = (b-a)^{-1}\varepsilon$, ta có $\delta'(\varepsilon')$. Đặt

$$\delta(\varepsilon) = \delta'(\varepsilon')$$

Bài toán TP3. Cho một hàm số thực f liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, và ε là một số thực dương. Chứng minh có một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P|, |Q| < \delta(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P|, |Q| < \delta(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,P')| < \varepsilon \qquad \forall\ P \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P| < \delta(\varepsilon).$$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|S(f,Q') - S(f,P')| < \varepsilon \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), P' \subset Q',\ |P| < \delta(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |Q| < \delta(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\delta'(\varepsilon') > 0$ sao cho

$|S(f,R) - S(f,R')| < \varepsilon' \quad \forall\ R \in \mathcal{P}([a, b]), |R| < \delta'(\varepsilon')$.

Cho $\varepsilon'' > 0$, có $\delta''(\varepsilon'') > 0$ sao cho

$|S(f,U') - S(f,V')| < \varepsilon'' \quad \forall\ U, V \in \mathcal{P}([a, b]), U' \subset V',$

$|U| < \delta''(\varepsilon'')$

$$|S(f,P) - S(f,Q)| \le |S(f,P) - S(f,P')| + |S(f,P') - S(f,Q')| +$$

$$+ |S(f,Q') - S(f,Q)| < 2\varepsilon' + |S(f,P') - S(f,Q')|$$

$$\forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |Q| < \delta'(\varepsilon').$$

Ta ước lượng $|S(f,P') - S(f,Q')|$

Ta ước lượng $|S(f,P') - S(f,Q')|$

Cho $\varepsilon'' > 0$, có $\delta''(\varepsilon'') > 0$ sao cho

$|S(f,U') - S(f,V')| < \varepsilon''$ $\forall\ U, V \in \mathcal{P}([a, b]), U' \subset V'$,

$|U| < \delta''(\varepsilon'')$

Nếu P và Q là các phân hoạch của $[a,b]$ thành các đoạn có đầu mút lần lượt là $\{a_0,a_1, \ldots,a_n\}$ và $\{d_0,d_1, \ldots,d_m\}$, chọn V là một phân hoạch của $[a,b]$ thành các đoạn có đầu mút là $\{a_0,a_1, \ldots,a_n,d_0,d_1, \ldots,d_m\}$.

$S(f,P') - S(f,Q')| \leq S(f,P') - S(f,V')| + S(f,Q') - S(f,V')|$

$S(f,P') - S(f,Q')| < 2\varepsilon''$

$\forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |Q| < \delta''(\varepsilon'')$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho
$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon \quad \forall P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P| , |Q| < \delta(\varepsilon)$

$|S(f,P) - S(f,Q)| \le |S(f,P) - S(f,P')| + |S(f,P') - S(f,Q')| +$

$+ |S(f,Q') - S(f,Q)| < 2\varepsilon' + |S(f,P') - S(f,Q')|$

$\forall P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P| , |Q| < \delta'(\varepsilon')$.

$S(f,P') - S(f,Q')| < 2\varepsilon''$
$\forall P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |Q| < \delta''(\varepsilon'')$

$S(f,P) - S(f,Q)| < 2\varepsilon' + 2\varepsilon''$
$\forall P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |Q| < \min\{\delta'(\varepsilon'), \delta''(\varepsilon'')\}$

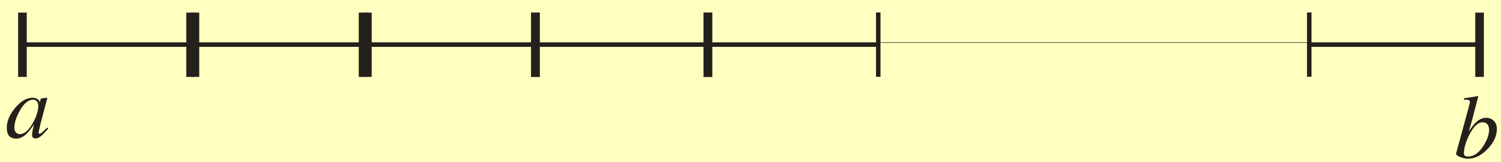
Cho $\varepsilon > 0$, đặt $\varepsilon' = \varepsilon'' = 4^{-1}\varepsilon$, và $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta'(\varepsilon'),\delta''(\varepsilon'')\}$

Định nghĩa. Cho một khoảng đóng $[a, b]$, đặt

$$a_{n,k} = a + n^{-1}k(b-a) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; k = 0,1, \ldots, n.$$

$$P_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, b;\, a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n-1}\}$$

Ta gọi P_n là phân hoạch đều thứ n của đoạn $[a,b]$



Bài toán TP4. Cho một hàm số thực f liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, đặt $s_n = S(f,P_n)$ với mọi số nguyên n. Chứng minh $\{s_n\}$ hội tụ về một số thực s.

Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một số nguyên N sao cho

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \qquad \forall\, n > m \geq N$$

Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một số nguyên $N(\varepsilon)$ sao cho

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \qquad \forall\ n > m \geq N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một số nguyên $N(\varepsilon)$ sao cho

$$|S(f,P_n) - S(f,P_m)| < \varepsilon \qquad \forall\ n > m \geq N(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\delta'(\varepsilon') > 0$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon' \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |Q| < \delta'(\varepsilon')$$

$|P_k| = k^{-1}(b-a)$

Chọn $M(\varepsilon')$ sao cho $M(\varepsilon')^{-1}(b-a) < \delta'(\varepsilon')$

$$|P_n|, |P_m| < \delta'(\varepsilon') \qquad \forall\ n > m \geq M(\varepsilon')$$

$$|S(f,P_n) - S(f,P_m)| < \varepsilon' \qquad \forall\ n > m \geq M(\varepsilon')$$

Cho $\varepsilon > 0$, chọn $\varepsilon' = \varepsilon$. Ta có $M(\varepsilon')$. Đặt $N(\varepsilon) = M(\varepsilon')$

Bài toán TP5. Cho một hàm số thực f liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, đặt s như trong bài toán TP4. Chứng minh : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$| S(f,P) - s | < \varepsilon \qquad \forall\ P \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P| < \delta(\varepsilon).$$

Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|S(f,P) - s| < \varepsilon \qquad \forall\ P \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P| < \delta(\varepsilon).$$

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một số nguyên $N(\varepsilon')$ sao cho

$$|S(f,P_n) - s| < \varepsilon' \qquad \forall\ n \geq N(\varepsilon')$$

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\delta'(\varepsilon'') > 0$ sao cho

$$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon \qquad \forall\ P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P| , |Q| < \delta'(\varepsilon'')$$

Cho một ε > 0, tìm một δ(ε) > 0 sao cho

$$|S(f,P) - s| < \varepsilon \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P| < \delta(\varepsilon).$$

Cho một ε' > 0, tìm một số nguyên N(ε') sao cho

$$|S(f,P_n) - s| < \varepsilon' \qquad \forall\, n \geq N(\varepsilon')$$

Cho ε" > 0, tìm δ'(ε") > 0 sao cho

$$|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon" \quad \forall\, P, Q \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |Q| < \delta'(\varepsilon")$$

$$|S(f,P) - s| \leq |S(f,P) - S(f,P_n)| + |S(f,P_n) - s| < \varepsilon" + \varepsilon'$$

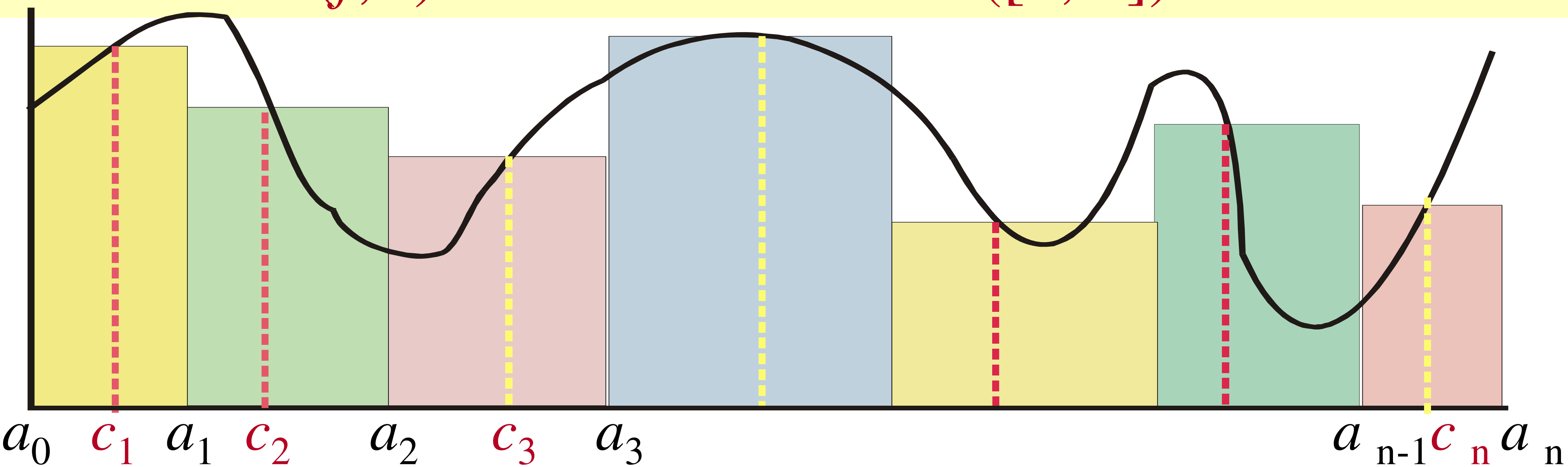
$$\forall\, n \geq N(\varepsilon'), \forall\, P \in \mathcal{P}([a, b]), |P|, |P_n| < \delta'(\varepsilon")$$

Cho ε > 0, đặt ε' = ε" = 2^{-1} ε. Chọn δ(ε) = δ'(ε") và một số nguyên n sao cho $n \geq N(\varepsilon')$ và $|P_n| = n^{-1}(b-a) < \delta'(\varepsilon")$:

$$|S(f,P) - s| < \varepsilon \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}([a, b]),\ |P| < \delta(\varepsilon).$$

Định nghĩa. Cho một hàm số thực f trên một khoảng đóng $[a,b]$. Ta nói f khả tích Riemann nếu có một số thực α sao cho với mọi số $\varepsilon > 0$, ta có một $\delta > 0$ để cho

$$|\alpha - S(f,P)| \leq \varepsilon \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}([a, b]) \text{ với } |P| \leq \delta$$



$$|P| = \max\{a_1 - a_0, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1}\}.$$

Lúc đó ta gọi α là tích phân của f trên $[a, b]$ và ký hiệu α là $\int_a^b f(t)dt$

Ta ký hiệu $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Định lý. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó f khả tích.

Integrate[f(x),{x,a,b}] : tính tích phân Riemann

NIntegrate[f(x),{x,a,b}] : tính xấp xỉ tích phân

In[1]:= Integrate[x^3 * ArcTan[x], {x, 0, 1}]

Out[1]= $\frac{1}{6}$

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx = \frac{1}{6}$$

In[3]:= Integrate[(x^3)*ArcTan[x], {x, 0, 6}]

Out[3]= $\frac{-198 + 3885\ \text{ArcTan}[6]}{12}$

In[4]:= NIntegrate[(x^3)*ArcTan[x], {x, 0, 6}]

Out[4]= 438.578

$$\int_0^6 x^3 arctgx dx = \frac{-198 + 3885 arctg6}{12} \approx 438{,}578$$

Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó f khả tích. Để giải các bài toán lý thuyết về tích phân của f, chúng ta làm những bước sau

- Với mọi số nguyên n, chọn phân hoạch P_n của $[a,b]$

$\{a, a + n^{-1}(b - a), \cdots, a + (n-1)n^{-1}(b - a), b;$

$a + n^{-1}(b - a), \cdots, a + (n-1)n^{-1}(b - a), b\}$

- Xử lý bài toán dựa trên tổng Riemann $S(f,P_n)$

$$S(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})đd([a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

Dùng tính chất $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx$

Bài toán 114. Cho f và g là các hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, α và β là các số thực. Chứng minh $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Cho $P_n = \{a, a + n^{-1}(b - a), \cdots, a + (n-1)n^{-1}(b - a), b$; $a + n^{-1}(b - a), \cdots, a + (n-1)n^{-1}(b - a), b\}$ là phân hoạch của khoảng đóng $[a, b]$.

$$S(\alpha f + \beta g, P_n) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\alpha f(a + k\frac{b-a}{n}) + \beta g(a + k\frac{b-a}{n})]\frac{b-a}{n}$$

$$S(\alpha f+\beta g,P_n)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha f+\beta g)(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[\alpha f(a+k\frac{b-a}{n})+\beta g(a+k\frac{b-a}{n})]\frac{b-a}{n}$$

$$S(\alpha f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\alpha f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}=\alpha S(f,P_n)$$

$$S(\beta g,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\beta g(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}=\alpha S(g,P_n)$$

$$\begin{array}{ccccc}
S(\alpha f+\beta g,P_n) & = & \alpha S(f,P_n) & + & \beta S(g,P_n) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)\mathrm{d}x & & \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x & & \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x
\end{array}$$

$$S(\alpha f+\beta g,P_n) \;=\; \alpha S(f,P_n) \;+\; \beta S(g,P_n)$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x \qquad \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx \;=\; \alpha\int_a^b f(x)dx \;+\; \beta\int_a^b g(x)dx$$

Bài toán 116. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a,b]$ và $c \in (a,b)$. Ta có

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

$$Q_n = \{a, a+\frac{c-a}{n}, \cdots, a+(n-1)\frac{c-a}{n}, c \;; a+\frac{c-a}{n}, \cdots, a+(n-1)\frac{c-a}{n}, c\}$$

$$R_n = \{c, c+\frac{b-c}{n}, \cdots, c+(n-1)\frac{b-c}{n}, b \;; c+\frac{b-c}{n}, \cdots, c+(n-1)\frac{b-c}{n}, b\}$$

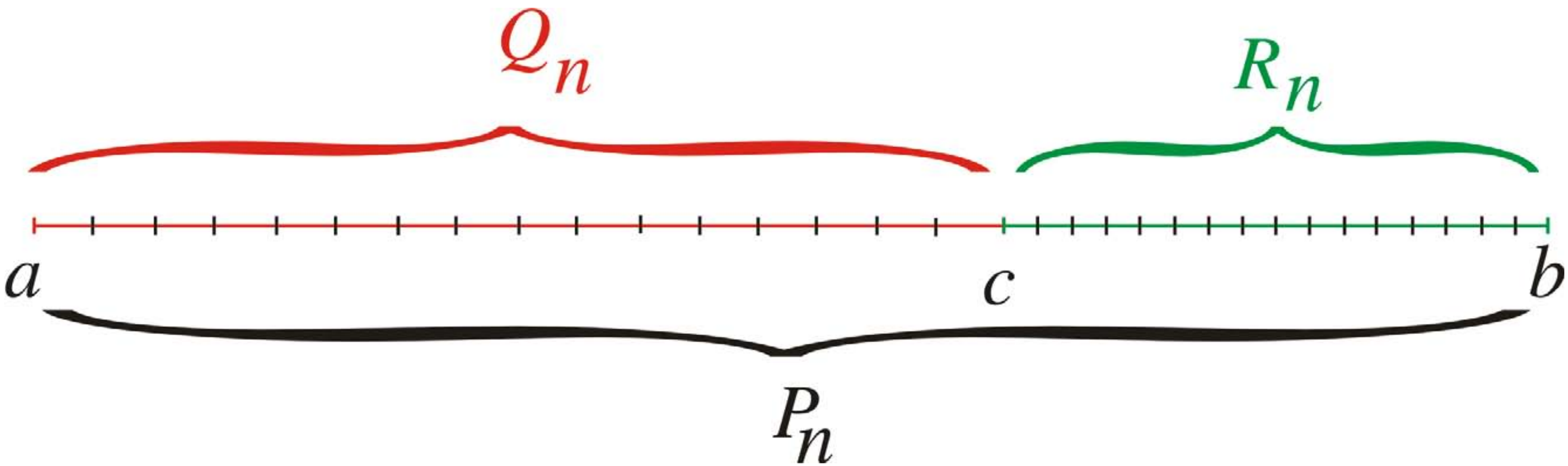
$$P_n = \{a, a+\frac{c-a}{n}, \cdots; a+(n-1)\frac{c-a}{n}, c, c+\frac{b-c}{n}, \cdots; c+(n-1)\frac{b-c}{n}, b \;;$$

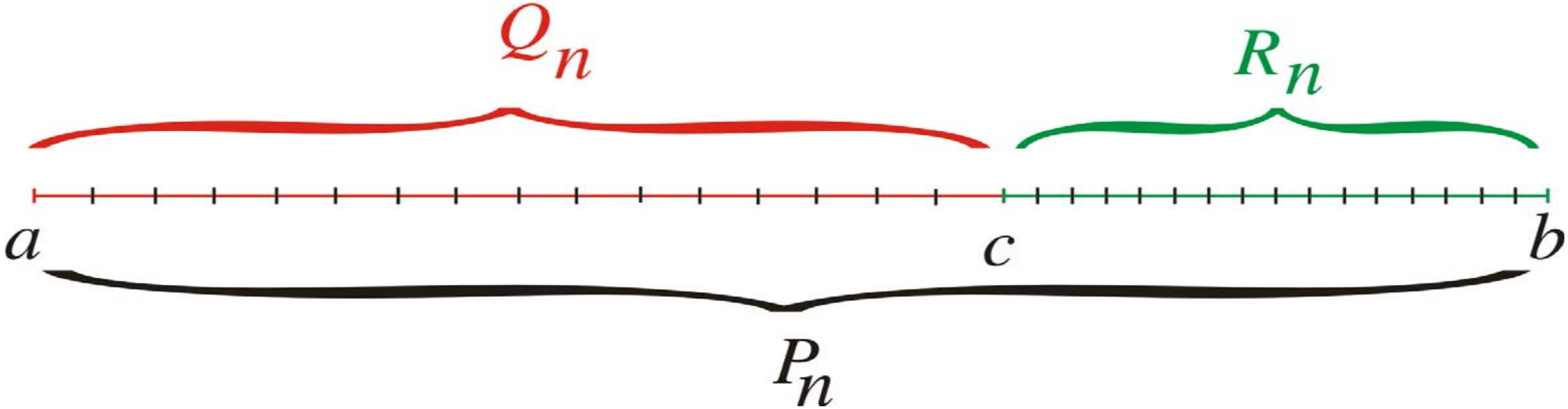
$$a+\frac{c-a}{n}, \cdots; a+(n-1)\frac{c-a}{n}, c, c+\frac{b-c}{n}, \cdots; c+(n-1)\frac{b-c}{n}, b\}$$

$$Q_n=\{a,a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c\ ;a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c\}$$

$$R_n=\{c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\ ;c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\}$$

$$P_n=\{a,a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\ ;$$
$$a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\}$$





$$S(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{c-a}{n}\right)\frac{c-a}{n} \;+\; \sum_{k=1}^{n} f\left(c+k\frac{b-c}{n}\right)\frac{b-c}{n}$$

$$S(f,Q_n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{c-a}{n}\right)\frac{c-a}{n}$$

$$S(f,R_n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(c+k\frac{b-c}{n}\right)\frac{b-c}{n}$$

$$S(f,P_n) \;=\; S(f,R_n) \;+\; S(f,Q_n)_n$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \beta\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$S(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{c-a}{n}\right)\frac{c-a}{n} + \sum_{k=1}^{n} f\left(c+k\frac{b-c}{n}\right)\frac{b-c}{n}$$

$$S(f,Q_n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{c-a}{n}\right)\frac{c-a}{n} \qquad S(f,R_n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(c+k\frac{b-c}{n}\right)\frac{b-c}{n}$$

$$\begin{array}{ccccc} S(f,P_n) & = & S(f,R_n) & + & S(f,Q_n) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x & & \int_a^c f(x)\mathrm{d}x & & \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Bài toán 117. Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Giả sử $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Chứng minh

$$\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$$

$$S(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

$$S(g,P_n) = \sum_{k=1}^{n} g(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

$$S(f,P_n) \le S(g,P_n)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$$

Bài toán 118. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$S(|f|, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left|f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right|\frac{b-a}{n}$$

$$|S(f, P_n)| \le S(|f|, P_n)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \qquad \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

Bài toán 119. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng $[a, b]$. Đặt

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$$

Chứng minh G là một hàm số liên tục trên $[a, b]$

Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|G(x) - G(y)| < \varepsilon \quad \forall\ x , y \in [a, b] , \quad |x - y| < \delta(\varepsilon)$$

$$G(x) - G(y) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt = \int_x^y f(t)dt \quad \forall\ y > x$$

$$| G(x) - G(y) | = | \int_x^y f(t)dt | \le \int_x^y | f(t) | dt \qquad \forall\ y > x$$

Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|G(x) - G(y)| < \varepsilon \quad \forall\, x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta(\varepsilon)$$

$$|G(x) - G(y)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \qquad \forall\, y > x$$

Vì f liên tục trên $[a,b]$, nên có một số thực dương M :

$$|f(t)| \le M \qquad \forall\, x, y \in [a, b]$$

$$|G(x) - G(y)| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \le M\,|y - x| < \varepsilon$$

$$\delta(\varepsilon) = M^{-1}\varepsilon$$

$$|G(x) - G(y)| < \varepsilon \qquad \forall\, x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta(\varepsilon)$$

Bài toán 120. Cho c là một số thực và $f(x) = c$ với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^{n} c\frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

$$S(f, P_n) = c(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

Bài toán 121. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng $[a, b]$. Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$.

Chứng minh G khả vi trên (a,b) và $G'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x) \right| = 0$$

$h > 0$

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

$$\int_x^{x+h} f(x)dt = f(x)h$$

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt$$

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt$$

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(x)dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)\text{-}f(x)]dt$$

Cho một ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho $\forall\ h,\ 0<|h|<\delta(\varepsilon)$

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)\text{-}f(x)]dt\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)\text{-}f(x)]dt\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}[f(t)\text{-}f(x)]dt\right|$$

$$\le \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}|f(t)\text{-}f(x)|dt$$

Cho một ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho $\forall\ h,\ 0 < |h| < \delta(\varepsilon)$

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)\text{-}f(x)]dt\right| < \varepsilon$$

$h > 0$

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)\text{-}f(x)]dt\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}[f(t)\text{-}f(x)]dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}|f(t)\text{-}f(x)|\,dt$$

Cho một ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho

$$\frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}|f(t)\text{-}f(x)|\,dt < \varepsilon \qquad \forall\ h,\ 0 < |h| < \delta(\varepsilon)$$

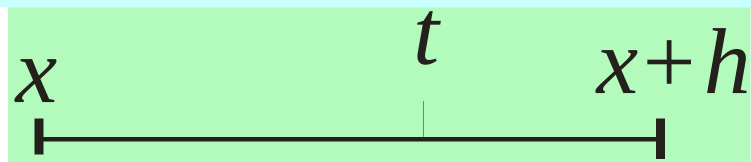
Cho một ε > 0, tìm δ(ε) > 0 sao cho

$$\frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt < \varepsilon \qquad \forall\ h,\ 0<|h|<\delta(\varepsilon)$$

Cho một ε’ > 0, có một δ’(ε’) > 0 sao cho

$$|f(u)-f(v)| < \varepsilon' \qquad \forall u, v \in [a,b],\ |u-v| < \delta'(\varepsilon')$$

$h > 0$ $\quad$ $u = t\ ,\ v = x$



$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon'\,dt = \frac{1}{h}\varepsilon' h = \varepsilon' \qquad \forall 0 < h < \delta'(\varepsilon')$$

Cho ε > 0 , đặt ε’ = ε > 0 có δ’(ε’) > 0 đặt δ(ε)= δ’(ε’)

Cho một ε > 0, tìm được δ(ε) > 0 sao cho

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon \qquad \forall\ h,\ |h| < \delta(\varepsilon)$$

Bài toán 122. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Giả sử có hàm số v liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) và $v'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$. Lúc đó

$$\int_a^x f(t)dt = v(x) - v(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, $u(x) = v(x) - v(a) - G(x) \qquad \forall x \in [a,b]$

$$u'(x) = v'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

$\forall t \in (a, b), \exists x \in (a, b) :\ u(t) - u(a) = u'(x)(t - a) = 0$

$u(t) = u(a) = 0\ \forall t \in [a, b)$

u liên tục trên $[a,b]$

$u(b) = \lim_{t \to b} u(t) = 0$

$0 = v(x) - v(a) - \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$

$u(t) = 0\ \forall t \in [a,b]$

Bài toán 123. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Giả sử có hàm số v liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) và $v'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$. Lúc đó

$$v(x) = \int_a^x f(t)dt + v(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Cho hàm số v liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) và $v'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$. Lúc đó ta nói

- v là một nguyên hàm của f trên (a,b), có một hằng số c

$$v(x) = \int_a^x f(t)dt + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

- $\int_a^x f(t)dt$ là tích phân xác định của f trên $[a,x]$

Bài toán 123 giúp ta tính tích phân của một hàm số f liên tục trên một khoảng $[a,b]$ như sau : tìm một hàm số v liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) với $v'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a,b)$. Lúc đó

$$\int_a^b f(t)dt = v(b) - v(a)$$

Bài toán 124 . Tính $\int_0^3 (x^7 - x^3 + 5)dx$

Đặt $v(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{4}x^4 + 5x$ với mọi $x \in [0,3]$

Dùng nhận xét bên trên ta có

$$\int_0^3 (x^7 - x^3 + 5)dx = v(3) - v(0) = (\tfrac{1}{8}x^8 - \tfrac{1}{4}x^4 + 5x)\Big]_0^3 = \frac{6519}{8}$$

Bài toán 125. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó có $c \in (a, b)$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall \; x \in [a,b]$

G liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $G'(x) = f(x)$ với mọi x trong (a, b).

Có $c \in (a, b)$: $G(b) - G(a) = G'(c)(b\text{-}a) = f(c)(b\text{-}a)$

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Bài toán 126. Cho u và v là các hàm số thực khả vi liên tục trên (c, d), và cho một khoảng $[a, b]$ chứa trong (c, d). Ta có

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Đặt $G(s) = u(s)v(s)$ với mọi $s \in (c, d)$. *ta có*

$$G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \text{ với mọi } x \in [a, b]$$

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(t)dt$$

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b [u(t)v'(t) + u'(t)v(t)]dt$$

$$= \int_a^b u(t)v'(t)dt + \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Bài toán 126 cho ta phương pháp tính tích phân từng phần cho các hàm số có dạng tích:

- (đa thức).(biểu thức lượng giác)
- (ln x, arctg x, arcsin x, arccos x). (đa thức)

Bài toán 127 . Tính $\int_0^{\pi} x\cos x dx$

Đặt $u(x) = x$ và $v(x) = \sin x$ $u'(x) =$ và $v'(x) = \cos x$

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$$

$$= u(\pi)v'(\pi) - u(0)v'(0) - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx$$

$$= -\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \cos\pi - \cos 0 = -2$$

Định lý (Taylor) . Cho a, b, c và d là các số thực sao cho $[c,d] \subset (a,b)$, và f là một hàm khả vi đến cấp n trên khoảng mở (a,b), với $n \geq 1$. Đặt $g(x) = f(x) - P_{n-1}(x,c)$ với mọi x trong (c,d) . Lúc đó

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \int_c^d \frac{(d-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

$g(x) = f(x) - P_{n-1}(x,c) \quad \forall\, x \in (c,d)$. Lúc đó

$$g(d) = \int_c^d \frac{(d-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \int_c^d \frac{(d-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

• $n = 1$: $$f(d) - f(c) = \int_c^d f^{(1)}(x)dx$$

• Giả sử n = $m \geq 1$ đúng :

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \int_c^d \frac{(d-x)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x)dx$$

• Xét n = $m+1$

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \int_c^d \frac{(d-x)^{m}}{m!} f^{(m+1)}(x)dx \ \ ?$$

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \int_c^d \frac{(d-x)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x)dx$$

- Xét n = $m+1$

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \int_c^d \frac{(d-x)^{m}}{m!} f^{(m+1)}(x)dx \quad ?$$

$$\int_c^d \frac{(d-x)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x)dx = -\frac{(d-x)^m}{m!} f^{(m)}(x)\Big]_c^d +$$

$$+\int_c^d \frac{(d-x)^m}{m!} f^{(m+1)}(x)dx =$$

$$= \frac{(d-c)^m}{m!} f^{(m)}(c) + \int_c^d \frac{(d-x)^m}{m!} f^{(m+1)}(x)dx$$

Bài toán 128 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng $[a,b]$, h là một hàm số thực khả liên tục trên khoảng (p,q), và khoảng $[c,d] \subset (p,q)$. Giả sử $h([c,d])$ chứa trong $[a, b]$. Chứng minh

$$\int_c^d f(h(s))h'(s)ds = \int_{h(c)}^{h(d)} f(x)dx$$

Chọn u sao cho $u' = f$. Đặt $v = u \circ h$.

$v'(s) = u'(h(s))h'(s)$ $v'(s) = f(h(s))h'(s)$

$$\int_c^d f(h(s))h'(s)ds = \int_c^d v'(s)ds = v(d) - v(c)$$

$$= u(h(d)) - u(h(c))$$

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f(x)dx = \int_{h(c)}^{h(d)} u'(x)dx = u(h(d)) - u(h(c))$$

Định nghĩa. Cho một hàm số thực f trên một khoảng mở (a, b) . Giả sử

- $\int_c^d f(t)dt$ xác định với mọi $[c, d] \subset (a, b)$.
- Có một số thực α sao cho với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương δ để cho

$$|\alpha - \int_c^d f(t)dt| < \varepsilon \quad \text{khi } |a - c| \le \delta \text{ và } |d - b| \le \delta.$$

Lúc đó ta nói α là *tích phân suy rộng* của f trên (a,b) và vẫn ký hiệu nó là

$$\int_a^b f(t)dt$$

Ở đây ta có thể xét a bằng $-\infty$ hoặc b có thể bằng ∞ .

Bài toán 129. Cho $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với mọi $x \in (0,1)$.

Chứng minh f khả tích trên (0,1) và tính $\int_0^1 f(x)dx$.

- $\int\limits_c^d f(t)dt$ xác định với mọi $[c, d] \subset (0, 1)$.
- Có một số thực α sao cho với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương δ để cho

$$| \alpha - \int\limits_c^d f(t)dt | < \varepsilon \quad \text{khi } | 0 - c | \le \delta \text{ và } | 1 - d | \le \delta.$$

$$\int_c^d \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\,\Big]_c^d = 2(\sqrt{d} - \sqrt{c}) \quad \to 2 \text{ khi } d \to 1 \text{ và } c \to 0$$

Bài toán 130. Cho $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh f khả tích trên $\mathbb{R}$ và tính $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

- $\int\limits_c^d f(t)dt$ xác định với mọi $[c, d] \subset (-\infty,\infty)$
- Có một số thực α sao cho với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương M để cho

$$| \alpha - \int\limits_c^d f(t)dt | < \varepsilon \quad \text{khi} \quad c \leq -M \text{ và } M \leq d.$$

$$\int_c^d \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}\Big]_c^d = \operatorname{arctg} d - \operatorname{arctg} c \to \pi \quad \text{khi } d \to \infty \text{ và } c \to -\infty$$

Cho a, b, a_1 , ... , a_n trong ℝ sao cho $a = a_1 < a_2 < ... < a_n = b$. Cho f là một hàm số liên tục trên $A = \bigcup_{i=1}^{n-1}(a_i, a_{i+1})$. Lúc đó f được gọi là một hàm số liên tục từng đoạn trên (a, b).

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực liên tục từng đoạn trên một khoảng mở (a, b) (với $A = \bigcup_{i=1}^{n-1}(a_i, a_{i+1})$). Giả sử tích phân suy rộng của f trên các khoảng (a_1, a_2), . . ., (a_{n-1}, a_n). Lúc đó ta nói tích phân Riemann của f trên (a, b) xác định, được ký hiệu là $\int_a^b f(t)dt$ và có trị giá là

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

DANH SÁCH BÀI TẬP LÀM TRONG GIỜ BÀI TẬP

Môn Giải tích A1 – Giải tích cơ sở

1	1.5.2.6	13	4.2.2.1	25	6.3.2.2
2	1.5.3.9	14	bt14 - ch4	26	6.3.2.2
3	1.5.3.14	15	bt15 - ch4	27	6.3.2.4
4	2.5.2.1	16	4.2.3.3	28	6.3.2.5
5	2.5.2.2	17	Bt17 - ch4	29	6.3.4.7
6	2.5.3.2	18	4.2.3.4	30	Bt54 - ch6
7	2.5.3.4	19	Bt23b - ch5	31	Bt59 - ch6
8	3.7.1.2	20	5.6.2.4	32	Bt61 - ch6
9	3.7.2.4	21	5.6.2.9	33	Bt62 - ch6
10	3.7.3.1	22	Bt34 - ch5	34	Bt65 - ch6
11	3.7.3.2	23	5.6.4.4		
12	3.7.5.2	24	Bt37 - ch5		

Môn Giải tích A1 – Vi tích phân

1	Bt75 - ch7	13	Bt96 - ch7	25	Bt114 - ch7
2	Bt78 - ch7	14	Bt99 - ch7	26	Bt114 - ch8
3	Bt79 - ch7	15	Bt100 - ch7	27	Bt116 - ch8
4	Bt80 - ch7	16	7.7.4.7	28	Bt117 - ch8
5	Bt81 - ch7	17	7.7.4.8	29	Bt119 - ch8
6	Bt82 - ch7	18	7.7.6.1	30	Bt120 - ch8
7	Bt85 - ch7	19	7.7.6.9	31	Bt125 - ch8
8	Bt86 - ch7	20	Bt101 - ch7	32	9.5.4.3
9	Bt90 - ch7	21	Bt103 - ch7	33	9.5.4.7
10	Bt91 - ch7	22	Bt106 - ch7	34	9.5.5.3
11	Bt92 - ch7	23	Bt108 - ch7		
12	Bt95 - ch7	24	Bt112 - ch7		

Các bài tập này trích trong quyễn “ Giáo trình toán giải tích 1” và các slides bài giảng của GS Dương Minh Đức.

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 1

1.5.2.6. Cho A và B là hai tập con của tập E. Chứng minh $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

Giải.

Ta có

- $E \setminus A = \{t \in E : t \notin A\}$.
- $E \setminus B = \{u \in E : u \notin B\}$.
- $(E \setminus A) \cup (E \setminus B) = \{x \in E : x \in E \setminus A$ hoặc $x \in E \setminus B\}$

$= \{x \in E : x \notin A$ hoặc $x \notin B\}$. (1)

- $E \setminus (A \cap B) = \{s \in E : s \notin A \cap B\}$.

Đặt P là "$s \in A \cap B$" hay "$s \in A$ và $s \in B$", ta có $\sim P$ là "$s \notin A$ hoặc $s \notin B$". Từ đó ta có

$E \setminus (A \cap B) = \{s \in E : s \notin A$ hoặc $s \notin B\}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

1.5.3.9. Tìm phủ định của mệnh đề sau: "$x \leq a$ với mọi $x \in A$" và "$a \leq b$ nếu $x \leq b$ với mọi $x \in A$".

Giải.

Đặt $P =$ "$x \leq a$ với mọi $x \in A$", và $q =$ "$a \leq b$ nếu $x \leq b$ với mọi $x \in A$". Vậy mệnh đề cho sẵn có dạng "P và Q" và phủ định của nó là "$\sim P$ hoặc $\sim Q$". Ta có

- "$\sim P$" : " có $x \in A$ sao cho $x > a$".
- Q : "$a \leq b \ \ \forall\, b \in \{c : x \leq c \ \forall\, x \in A\}$.
- $\sim Q$: "$\exists\, b \in \{c : x \leq c \ \forall\, x \in A\}$ sao chò $a > b$".
- "$\sim P$ hoặc $\sim Q$" : " có $x \in A$ sao cho $x > a$" hoặc "$\exists\, b$ sao cho $x \leq b \ \forall\, x \in A$ và $a > b$".

1.5.3.14. Chứng minh không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Giải.

Giả sử có hai nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$. Gọi d là ước số chung lớn nhất của m và n, lúc đó có hai nguyên dương p và q sao cho $m = dp$ và $n = dq$. Ta có $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$ và p và q có ước số chung lớn nhất là 1.

Từ đó $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$. Vậy $p^2 = 2q^2$. Từ đó p^2 chia chẵn cho 2. Suy ra p chia chẵn cho 2. Điều này lại dẫn đến $p^2 = 2q^2$ chia chẵn cho 4. Vậy q^2 chia chẵn cho 2. Suy ra q chia chẵn cho 2.

Vậy 2 là một ước số chung của p và q : mâu thuẫn . Do đó không có hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.

2.5.2.1.(iv) Cho f là một ánh xạ từ tập X vào tập Y, cho A và B là hai tập con của X.

Chứng minh $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Giải.

• $f(A \cap B) = \{y : \exists x \in A \cap B$ sao cho $y = f(x)\}$

• $f(A) = \{u : \exists s \in A$ sao cho $u = f(s)\}$

• $f(B) = \{v : \exists t \in B$ sao cho $v = f(t)\}$

Ta phải chứng minh :

• cho $y \in f(A \cap B)$ chứng minh $y \in f(A) \cap f(B)$

• "$y \in f(A \cap B)$" $\Rightarrow$ "$y \in f(A) \cap f(B)$"

• "có $x \in A \cap B$ sao cho $y = f(x)$" $\Rightarrow$ "có $s \in A$ sao cho $y = f(s)$, và có $t \in B$ sao cho $y = f(t)$"

Đặt $s = x$ và $t = x$ ta có $y = f(s) = f(t)$.

2.5.2.2. Cho f là một ánh xạ từ tập X vào tập Y, cho A và B là hai tập con của X. Chứng minh $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.

Giải.

Cho một y trong $f(A) \setminus f(B)$, chứng minh y thuộc $f(A \setminus B)$.

• $f(A) = \{u : \exists s \in A$ sao cho $u = f(s)\}$

• $f(B) = \{v : \exists t \in B$ sao cho $v = f(t)\}$

• $y \in f(A) \setminus f(B)$: có $s \in A$ sao cho $y = f(s)$ nhưng không có $t \in B$ sao cho $y = f(t)$. (1)

• $f(A \setminus B) = \{y : \exists x \in A \cap B$ sao cho $y = f(x)\}$

• $y \in f(A \setminus B)$: có x trong A nhưng x không trong B sao cho $y = f(x)$. (2)

Chọn $x = s$ trong (1), ta thấy x thoả (2) : đpcm.

3.7.3.1. Chứng minh $1!1 + 2!2 + \cdots + n!n = (n+1)! - 1$ (0)

Giải

• $n = 1$: $1!1 = 1$ và $2! - 1 = 1$. Vậy (0) đúng với $n = 1$.

• Giả sử (0) đúng với $n - k$. Ta có

$1!1 + 2!2 + \cdots + k!k = (k+1)! - 1$ (0).

Ta chứng minh (0) đúng với $n = k + 1$. Ta có

$1!1 + 2!2 + \cdots + k!k + (k+1)!(k+1) = [1!1 + 2!2 + \cdots + k!k] + (k+1)!(k+1)$ (0).

$$(k+1)! - 1 + (k+1)!(k+1) = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

Vậy (0) với $n = k + 1$. Áp dụng qui nạp toán học ta có (0) đúng với mọi số nguyên n.

4.2.3.1. Cho A là một tập con khác trống và bị chặn trên của $\mathbb{R}$, cho c là một chặn trên của A. Giả sử mọi số thực dương ε đều có một x trong A sao cho $c - \varepsilon < x$. Chứng minh

$c = \sup A$.

Giải .

Giả sử $c > \sup A$. Đặt $\varepsilon = \dfrac{c - \sup A}{2}$. Ta thấy

$c - \varepsilon = c - \dfrac{c - \sup A}{2} = \dfrac{c + \sup A}{2} > \sup A$ (1)

$\exists x \in A$ sao cho $x > c - \varepsilon$. (2).

Từ (1) và (2), ta có một x trong A sao cho $x > \sup A$. Mâu thuẩn này cho thấy $c \leq \sup A$, vậy $c = \sup A$.

4.2.3.4. Cho A là một tập con khác trống và bị chặn trên của $\mathbb{R}$. Đặt $-A = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh

(i) $-A$ bị chặn dưới.

(ii) $\inf -A = -\sup A$.

Giải .

(i) Đặt $B = -A = \{-x : x \in A\}$. Ta phải chứng minh

$y \geq -\sup A \qquad \forall\, y \in B$ hay

$y \geq -\sup A \qquad \forall\, y = -x, x \in A$ hay

$-x \geq -\sup A \qquad \forall\, x \in A$ hay

$x \leq \sup A \qquad \forall\, x \in A$.

Dòng sau cùng hiển nhiên đúng .

(ii) Do (i), ta có $\inf -A \geq -\sup A$. Ta chỉ còn phải chứng minh $\inf -A \leq -\sup A$ hay $\sup A \leq -\inf -A$. Ta phải chứng minh

$x \leq -\inf -A \qquad \forall\, x \in A.$ hay

$-x \geq \inf -A \qquad \forall\, x \in A.$ hay

$-x \geq \inf -A \qquad \forall -x \in -A.$

Dòng sau cùng hiển nhiên đúng .

4.2.3.3. Cho A và B là hai tập con khác trống của $\mathbb{R}$ sao cho $A \subset B$. Chứng minh

(i) Nếu B bị chặn trên thì $\sup A \leq \sup B$.

(ii) Nếu B bị chặn dưới thì $\inf A \geq \inf B$.

Giải .

(i) Đặt $M = \sup B$. Ta phải chứng minh $x \leq M$ với mọi x trong A. Cho x trong A, ta có x thuộc B (vì $A \subset B$), vậy $x \leq M$.

(i) Đặt $M' = \inf B$. Ta phải chứng minh $x \geq M'$ với mọi x trong A. Cho x trong A, ta có x thuộc B (vì $A \subset B$), vậy $x \geq M'$.

5.6.2.4. Cho $\{a_k\}$ là một dãy số thực Cauchy. Chứng minh có hai thực b và c sao cho $b \le a_k \le c$ với mọi $k \in I\!N$.

Giải.

Ta chỉ cần tìm một số thực M sao cho $|a_k| \le M$ với mọi $k \in I\!N$.

Cho một $\varepsilon > 0$, ta tìm được một số nguyên $N(\varepsilon)$ sao cho

$|a_m - a_n| \le \varepsilon \qquad \forall\ m > n \ge N(\varepsilon).$

Vậy

$|a_m| \le |a_m - a_n| + |a_n| \le \varepsilon + |a_n| \qquad \forall\ m > n \ge N(\varepsilon).$

Do đó

$|a_m| \le |a_n| + 1 \qquad \forall\ m > n \ge N(1).$

$|a_m| \le |a_{N(1)}| + 1 \qquad \forall\ m > N(1) \qquad (1).$

Đặt $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N(1)}|, |a_{N(1)}| + 1\}$

Từ (1) ta có

$|a_k| \le M$ với mọi $k \in I\!N$.

5.6.2.9. Cho A là một trong các khoảng sau : $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ hay $(-\infty, \infty)$. Cho g là một ánh xạ từ A vào A sao cho có một số thực $c \in (0, 1)$ để cho

$$|g(x) - g(y)| \le c|x - y| \qquad \forall\ x,\ y \in A.$$

Lúc đó ta nói g là một ánh xạ co trên A . Cho $a_0 \in A$. Đặt $a_1 = g(a_0)$, $a_2 = g(a_1)$, $\cdots$, $a_{n+1} = g(a_n)$ với mọi $n \in I\!N$. Chứng minh

(i) $|a_{n+1} - a_n| \le c^n|a_1 - a_0| \qquad \forall\ n \in I\!N.$

(ii) Dãy $\{a_n\}$ hội tụ về một số thực $b \in A$.

(iii) Giới hạn b của dãy $\{a_n\}$ chính là một điểm bất động của g , nghĩa là $g(b) = b$.

(iv) g chỉ có một điểm bất động trong A.

Giải.

(i) Dùng Qui nạp toán học. Đặt P_n là "$|a_{n+1} - a_{n+1}| \le c^n|a_1 - a_0|$". Khi n=1, do tính co g ta có

$|a_2 - a_1| = |g(a_1) - g(a_0)| \le c|a_1 - a_0|$

Vậy P_1 đúng. Giả sử P_k đúng, ta có

$|a_{k+1} - a_k| \le c^k|a_1 - a_0| \qquad (1).$

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng. Ta có

$$\begin{aligned}|a_{k+1+1} - a_{k+1}| &= |g(a_{k+1}) - g(a_k)| \le c|a_{k+1} - a_k|\\ &\le cc^k|a_1 - a_0| = c^{k+1}|a_1 - a_0|\end{aligned}$$

Vậy P_{k+1} đúng. Theo qui nạp toán học ta có P_n đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Cho một $\varepsilon > 0$, tìm một số nguyên $N(\varepsilon)$ sao cho

$|a_m - a_n| \leq \varepsilon \qquad \forall\ m > n \geq N(\varepsilon). \qquad (2)$

Ta có

$|a_m - a_n| = |a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + a_{n+m-n-1} - a_m|$

$\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m-n-1} - a_n|$

$\leq c^n|a_1 - a_0| + c^{n+1}|a_1 - a_0| + \cdots + c^{m-1}|a_1 - a_0|$

$= [c^n| + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1}]|a_1 - a_0| \leq c^n|[1 + c^+ \cdots + c^{m-1-n}]|a_1 - a_0|$

$\leq c^n[\sum_{k=0}^{\infty} c^k]|a_1 - a_0| \leq \dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0|. \qquad (3)$

Vì $\{\dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0|\}$ hội tụ về 0, nên cho $\varepsilon' > 0$, ta tìm được một số nguyên $M(\varepsilon')$ sao cho

$\dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0| = |\dfrac{c^n}{1-c}|a_1 - a_0| - 0| \leq \varepsilon' \qquad \forall\ n \geq M(\varepsilon'). \qquad (4)$

Nay cho $\varepsilon > 0$, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $M(\varepsilon')$, đặt $N(\varepsilon) = M(\varepsilon')$, ta có (2). Vậy $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy và nó hội tụ về một số thực b.

(iii) Ta phải chứng minh $g(b) = b$. Ta có

$|g(b) - b| \leq |g(b) - a_{n+1}| + |a_{n+1} - b| = |g(b) - g(a_n)| + |a_{n+1} - b|$

$\qquad \leq c|b - a_n| + |a_{n+1} - b|. \qquad (5).$

Suy ra

$|g(b) - b| \leq \lim\limits_{n\to\infty}[c|b - a_n| + |a_{n+1} - b|] = 0.$

(iv) Giả sử có u và v trong A sao cho $g(u) = u$ và $g(v) = v$, ta có

$|u - v| = |g(u) = g(v)| \leq c|u - v|.$

Vậy $0 \leq (1-c)|u - v| \leq 0$, vì $0 < c < 1$. Ta thấy $(1-c) > 0$, nên $|u = v = 0$.

5.6.3.2. Cho e là một số thực và $\{a_n\}$ là một dãy số thực sao cho $\{a_n\}$ không hội tụ về e . Chứng minh có số thực dương ε và một dãy con $\{a_{n_k}\}$ của $\{a_n\}$ sao cho $|a_{n_k} - e| \geq \varepsilon$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Giải.

Vì $\{a_n\}$ không hội tụ về e, nên có một số thực dương ε sao cho với mọi số nguyên N ta lại có một số nguyên $n(N) \geq N$ để cho $|a_{n(N)} - e| \geq \varepsilon$. Vậy tập $J = \{m : |a_m - e| \geq \varepsilon\}$ là một tập vô hạn. Dùng qui nạp toán học đặt

- $n_1 = \inf J$,
- $n_2 = \inf J \setminus [1, n_1]$.
- $n_{k+1} = \inf J \setminus [1, n_k]$.

Ta thấy $\{a_{n_k}\}$ là một dãy con cần tìm của $\{a_n\}$.

5.6.4.4. Cho e là một số thực và $\{a_k\}$ là một dãy số thực sao cho $\limsup_{n\to\infty} a_n < e$. Chứng minh có một số nguyên N sao cho $a_n < e$ với mọi $n \geq N$.

Giải.

Đặt $A_m = \{a_k : k \geq m\}$, $b_m = \sup A_m$. Lúc đó $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Đặt $\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n$, ta có $\alpha < e$. Đặt $\varepsilon = \dfrac{e-\alpha}{2}$. Ta có

• $\alpha + \varepsilon < e$ (1).

• Ta có một số nguyên N sao cho

$|b_n - \alpha| < \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N. \qquad (2)$

Từ (2) ta có

$b_n < \alpha + \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N. \qquad (3)$

Vậy $\sup A_N < \alpha + \varepsilon$, do đó, theo (1) ta có

$a_n \leq \sup A_N < \alpha + \varepsilon < e \qquad \forall\ n \geq N.$

6.3.2.2. Cho hai khoảng mở (a, b) và (c, d), $A = (a, b) \cup (c, d)$, và f là một hàm số thực trên A. Đặt $g(t) = f(t)$ với mọi $t \in (a, b)$ và $h(s) = f(s)$ với mọi $s \in (c, d)$. Giả sử g liên tục trên (a, b), và h liên tục trên (c, d). Chứng minh f liên tục trên A.

Giải.

Cho một x trong A và một số thực dương ε, ta tìm một số thực dương $\delta(x, \varepsilon)$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ y \in A, |y - x| < \delta(x, \varepsilon). \qquad (1)$

Ta có $x \in (a, b)$ hoặc $x \in (c, d)$. Trước hết ta xét trường hợp $x \in (a, b)$. Lúc đó vì tính liên tục của g, với một số thực dương ε', ta tìm một số thực dương $\nu(x, \varepsilon')$ sao cho

$|g(u) - g(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\ u \in (a, b), |u - x| < \nu(x, \varepsilon').$

Vì $f(t) = g(t)$ với mọi $t \in (a, b)$, ta có

$|f(u) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ u \in (a, b), |u - x| < \nu(x, \varepsilon'). \qquad (2)$

Đặt $\mu = \min\{x-a, b-x\}$, ta có $t \in (a, b)$ nếu $|t-x| < \mu$. Cho ε, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $\nu(x, \varepsilon')$. Đặt $\delta(x, \varepsilon) = \min\{\mu, \nu(x, \varepsilon')\}$. Ta thấy "$y \in (a, b), |u - x| < \nu(x, \varepsilon')$" nếu "$y \in A, |y - x| < \delta(x, \varepsilon)$". Do đó, theo (2) ta có (1).

6.3.2.4. Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và f là một hàm số liên tục trên A. Chứng minh $|f|$ là một hàm số liên tục trên A.

Giải.

Cho một x trong A và một số thực dương ε, ta tìm một số thực dương $\delta(x, \varepsilon)$ sao cho

$||f|(y) - |f|(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ y \in A, |y - x| < \delta(x, \varepsilon). \qquad (1)$

Do tính liên tục của f, với một số thực dương ε', ta tìm một số thực dương $\nu(x, \varepsilon')$ sao cho

$|f(u) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\, u \in A, |u - x| < \nu(x, \varepsilon'). \qquad (2)$

Ta có

$||f|(y) - |f|(x)| \leq |f(y) - f(x)|.$

Vậy theo (2) ta có

$||f|(y) - |f|(x)| \leq |f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\, u \in A, |u - x| < \nu(x, \varepsilon'). \qquad (3)$

Cho ε, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $\nu(x, \varepsilon')$. Đặt $\delta(x, \varepsilon) = \nu(x, \varepsilon')$. Từ (3) ta có (1).

6.3.2.5. Cho f là một hàm số liên tục từ khoảng đóng $[a, b]$ vào $[a, b]$. Chứng minh có một x trong $[a, b]$ sao cho $f(x) = x$.

Giải.

Đặt $g(s) = s - f(s)$ với mọi s trong $[a, b]$. Ta thấy g là một hàm số liên tục trên $[a, b]$, $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Vì $g([a, b])$ là một khoảng đóng, nên $[g(a), g(b)] \subset g([a, b])$. Vì $0 \in [g(a), g(b)]$ nên $0 \in g([a, b])$. Vậy có x trong $[a, b]$ sao cho $g(x) = 0$. Lúc đó $f(x) = x$.

6.3.4.7. Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$. Đặt $A_x = \{|x - y| : y \in A\}$ và $f(x) = \inf A_x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh f là một hàm số liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Giải.

Cho u và v trong $\mathbb{R}$ và y trong A, ta có

$f(u) \leq |u - y| \leq |u - v| + |v - y|$ hay

$f(u) - |u - v| \leq |v - y| \qquad \forall\, y \in A$ hay

$f(u) - |u - v| \leq s \qquad \forall\, s \in A_v.$

Vậy $f(u) - |u - v|$ là một chặn dưới của A_v. Do đó

$f(u) - |u - v| \leq \inf A_v = f(v)$ hay

$f(u) - f(v) \leq |u - v|. \qquad (1)$

Tương tự ta cũng có

$f(v) - f(u) \leq |v - u| = |u - v|. \qquad (2)$

Từ (1) và (2), ta có

$|f(v) - f(u)| \leq |v - u|. \qquad (3)$

Nay cho $\varepsilon > 0$, đặt $\delta = \varepsilon$, do (3) ta có

$|f(v) - f(u)| \leq \varepsilon \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}, |u - v| \leq \delta.$

Vậy f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

7.7.4.7. Cho hai khoảng mở (a, b) và $c \in (a, b)$, $A = (a, c) \cup (c, b)$, và f là một hàm số thực liên tục trên (a, b) và khả vi trên A. Giả sử $\lim\limits_{t \to c} f'(t) = d$. Chứng minh f khả vi tại c và

$f'(c) = d$.

Giải.

Ta phải chứng minh

$\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(c+s)-f(c)}{s} = d$ hay

Cho một số thực dương ε, tìm một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$|\dfrac{f(c+s)-f(c)}{s} - d| < \varepsilon \qquad \forall\ s, 0 < |s| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho s là một số thực dương khá nhỏ, dùng định lý giá trị trung bình, ta có một $x(s) \in (c, c+s)$ sao cho

$f(c+s) - f(c) = f'(x(s))(c+s-c) = f'(x(s))s$ hay

$\dfrac{f(c+s)-f(c)}{s} = f'(x(s)) \qquad (2)$

Cho s là một số thực âm với $|s|$khá nhỏ, dùng định lý giá trị trung bình, ta có một $x(s) \in (c+s, c)$ sao cho

$\dfrac{f(c+s)-f(c)}{s} = f'(x(s)) \qquad (3)$

Kết hợp (1) và (3) ta chỉ cần chứng minh điều sau đây : cho một số thực dương ε, tìm một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$|f'(x(s)) - d| < \varepsilon \qquad \forall\ s, 0 < |s| < \delta(\varepsilon) \qquad (4)$

Vì $\lim\limits_{t\to c} f'(t) = d$, ta có : cho một số thực dương ε', có một số thực dương $\nu(\varepsilon')$ sao cho

$|f'(t) - d| < \varepsilon' \qquad \forall\ t, 0 < |t-c| < \nu(\varepsilon') \qquad (5)$

Vì $|x(s) - c| < |s|$, nên với một ε, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $\nu(\varepsilon')$, đặt $\delta(\varepsilon) = \nu(\varepsilon')$, từ (5) ta có (4).

7.7.4.8. Cho f là một hàm số thực khả vi trên (a, b), và $x \in (a, b)$. Giả sử có một dãy $\{x_n\}$ trong $(a, b) \setminus \{x\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về x và $f(x_n) = f(x)$ với mọi n trong $\mathbb{N}$. Chứng minh $f'(x) = 0$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, hay : cho một $\varepsilon > 0$, ta có một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ h, 0 < |h| < \delta(\varepsilon). \qquad (1)$

Đặt $h_n = x_n - x$, ta có $x_n = x + h_n$. Vì $f(x_n) = f(x)$ và từ (1), ta có : cho một $\varepsilon > 0$, ta có một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f'(x)| = |\dfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} - f'(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ n, 0 < |h_n| < \delta(\varepsilon). \qquad (2)$

Vì $\{x_n\}$ hội tụ về x, ta có điều sau đây : cho một $\varepsilon' > 0$, ta có một $N(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|h_n| = |x_n - x| < \varepsilon' \qquad \forall\ n \geq N(\varepsilon'). \qquad (3)$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0$, đặt $\varepsilon' = \varepsilon$, ta có $N(\varepsilon')$. Áp dụng (2) cho $h_{N(\varepsilon')}$, ta có :

$|f'(x)| < \varepsilon$

Vậy $|f'(x)| = 0$.

7.7.6.1. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức trên $I\!R$ với $a_n \neq 0$. Cho $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ sao cho $f(c_k) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Chứng minh $m \leq n$.

Giải.

Ta dùng qui nạp toán học theo n. Ta thấy bài toán đúng với $n = 1$, vì lúc đó $m = 1$. Giả sử bài toán đúng với $n = N$. Xét đa thức $g(x) = b_{N+1}x^{N+1} + b_N x^N + \cdots + b_1 x + b_0$ là một đa thức trên $I\!R$ với $b_{N+1} \neq 0$, và $d_1 < d_2 < \cdots < d_M$ sao cho $g(d_k) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, M\}$. Ta sẽ chứng minh $M \leq N + 1$. Đặt $a_k = (k+1)b_{k+1}$ và

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Ta có bậc của f nhỏ hơn hoặc bằng N. Áp dụng định lý giá trị trung bình ta tìm được các $c_k \in (d_k, d_{k+1})$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, M-1\}$ sao cho

$$0 = g(d_{k+1} - g(d_k) = g'(c_k)(b_{k+1} - b_k) \qquad \forall\ k \in \{1, 2, \cdots, M-1\}.$$

Suy ra $c_1 < c_2 < \cdots < c_{M-1}$ và $f(c_k) = g'(c_k) = 0$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, M-1\}$. Theo giả thiết qui nạp toán học $M - 1 \leq N$, suy ra $M \leq N + 1$. Vậy bài toán đúng với mọi số nguyên n.

7.7.6.9. Chứng minh có duy nhất một x trong $(0, \infty)$ sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4 = 0$.

Giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Ta thấy f liên tục trên $[0, \infty)$ và khả trên $(0, \infty)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 0 \qquad \forall\ x \in (0, \infty).$$

Nay cho u và v trong $[0, \infty)$ sao cho $u < v$. Dùng Định lý giá trị trung bình ta có một $s \in (u, v)$ sao cho

$$f(v) - f(u) = f'(s)(v - u) > 0.$$

Vậy f là một đơn ánh trên $[0, \infty)$. Ta có $f(0) = -3$ và $f(15) = \sqrt{15}$. Vậy $[-3, \sqrt{15}]$ chứa trong $f([0, 15])$. Vậy có x trong $[0, 15]$ sao cho $f(x) = 0$. Do tính đơn ánh của f, nghiệm này duy nhất.

9.5.4.3. Đặt $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} (\sin t^3 + t)dt$ với mọi số thực x. Chứng minh f khả vi trên $I\!R$ và tính đạo hàm của f.

Giải.

Đặt $g(y) = \displaystyle\int_y^0 (\sin t^2 + t)dt$ với mọi số thực y, $u(s) = s^2$ và $v(s) = s^2 + 1$. Ta thấy $f(x) = g(v(x)) - g(u(x)$ với mọi số thực x, hay $f = g \circ v - g \circ v$. Vì g, u và v đều khả nên f khả và với mọi x trong $I\!R$, ta có $g'(x) = \sin x^2 + x$, $u'(x) = 2x$,, $v'(x) = 2x$, và

$f'(x) = g'(v(x)).v'(x) - g'(u(x)).u'(x)$

$= \sin(v(x))^2.2x + v(x) - \sin(u(x))^2.2x - u(x) = \sin(x^4 + 2x^2 + 1) - \sin(x^4) + 1.$

9.5.4.7. Cho f là một hàm số khả n lần trên một khoảng (c, d), và $[a, b]$ chứa trong (c, d) sao cho $\int_a^b f(x)dx = 0$ và $f^r(a) = f^r(b) = 0$ với mọi r trong $\{0, 1, \cdots, n\}$. Cho g là một đa thức bậc bé hơn n. Chứng minh $\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx = 0.$

Giải.

Ta chỉ cần chứng minh $\int_a^b x^k f(x)dx = 0$ với mọi k trong $\{0, 1, \cdots, n\}$. Ta qui nạp theo n. Hiển nhiên kết quả này đúng với $n = 0$. Giả sử bài toán dúng với $n = N$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n = N + 1$. Trước hết vì bài toán đúng với $n = N$, áp dụng bài toán cho f' vàf, ta có

$$\int_a^b x^k f^{(N+1)}(x)dx = \int_a^b x^k f^{(N)}(x)dx = 0 \qquad \forall\ k \in \{0, 1, \cdots, N\} \qquad (1)$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\int_a^b x^{N+1} f^{(N+1)}(x)dx = [b^{N+1} f^{(N)}(b) - a^{N+1} f^{(N)}(a)] - (N + 1)\int_a^b x^N f^{(N)}(x)dx = 0$$

9.5.5.3. Cho f là một hàm số thực dương liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(x + y) = f(x)f(y)$ với mọi số thực x và y. Chứng minh f khả trên $\mathbb{R}$.

Giải.

Đặt $c = (\int_0^1 f(t)dt)^{-1}$. Cho x trong $\mathbb{R}$, ta có

$$\int_0^1 f(x + t)dt = \int_0^1 f(x)f(t)dt = f(x)\int_0^1 f(t)dt \qquad \text{hay}$$

$$f(x) = c\int_0^1 f(x + t)dt. \qquad (1)$$

Đặt $h(t) = x + t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $h'(t) = 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Áp dụng công thức đổi biến ta có

$$\int_0^1 f(x + t)dt = \int_0^1 f \circ h(t)dt = \int_{h(0)}^{h(1)} f(s)ds = \int_x^{x+1} f(s)ds. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$f(x) = c\int_x^{x+1} f(s)ds \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Đặt $g(t) = \int_0^s f(s)ds$, $u(t) = t$ và $v(t) = t + 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Ta có g, u và v khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f(x) = c[g(v(x)) - g(u(x)]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $f = c[g \circ v - g \circ u]$, do đó f khả vi $\mathbb{R}$.

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 1

Hệ Cử nhân chính qui - Khoa Toán-Tin

Học kỳ I - 2006-2007

THỜI GIAN : 120 PHÚT

(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải 6 trong 7 câu sau :

1. Cho A và B là các tập con khác trống của $[0, \infty)$. Giả sử A và B bị chặn trên. Đặt $C = \{x^2 y : x \in A, y \in B\}$. Chứng minh C bị chặn trên.

2. Giải phương trình : $x^3 + \sin(x^{\frac{1}{7}} + sin 8x) = 1$.

3. Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Đặt $c_n = x_n y_n$ với mọi số nguyên dương n. Hỏi $\{c_n\}$ có là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hay không?

4. Đặt $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ với mọi số nguyên dương n. Tính $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x)$ khác không với mọi x trong $\mathbb{R}$. Hỏi f có là một đơn ánh hay không?

6. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(t) \geq 0$ với mọi t trong $\mathbb{R}$. Đặt

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t)dt \qquad \forall\ x \ \in [1, 2].$$

Cho x và y trong $[1, 2]$ sao cho $x \leq y$. Hỏi $g(x) \leq g(y)$ đúng hay sai?

7. Đặt $A = \{2^{-2}, 3^{-3}, \ldots, n^{-n}, \ldots\}$. Xác định A^* (A^* là tập hợp tất cả các điểm tụ của A).

Hết

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH 1

Hệ Cử nhân chính qui - Khoa Toán-Tin

Học kỳ I - 2007-2008

THỜI GIAN : 120 PHÚT

(Thí sinh được tham khảo mọi tài liệu mang theo)

Trong các câu chỉ có một khẳng định, thí sinh phải chứng minh khẳng định của mình. Trong các câu hỏi có trường hợp đúng có trường hợp sai, thí sinh phải cho các thí dụ tương ứng và chứng minh các khẳng định trong các thí dụ đó.

Giải 5 trong 6 câu sau :

1. Cho A và B là các tập con khác trống của $(-\infty, 0)$. Giả sử với mọi x trong A có một y trong B sao cho $x \leq y$. Hỏi $\sup A \leq \sup B$ đúng hay sai ?

2. Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy cùng hội tụ về a trong $\mathbb{R}$. Đặt $c_{2k} = x_{2k}$ và $c_{2k+1} = y_{2k+1}$ với mọi số nguyên dương k. Hỏi $\{c_n\}$ có là một dãy hội tụ trong $\mathbb{R}$ hay không?

3. Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$. Hỏi A có bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ hay không, và nếu đặt $b = \sup A$, thì b có bằng $\sqrt{5}$ hay không?

4. Cho cho a là một số thực và $\{x_n\}$ là một dãy trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\liminf_{n\to\infty} y_n$ là một số thực b. Đặt $c_n = a + x_n$. Tính $\liminf_{n\to\infty} c_n$.

5. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(0) > 0$. Hỏi có một số thực dương a sao cho $f|_{[-a,a]}$ là một hàm số đơn điệu tăng hay không?

6. Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(0) = g(0)$ và

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x g(t)dt \qquad \forall\ x \in (1, \infty).$$

Hỏi $f(x) = g(x)$ với mọi x trong $(1, \infty)$ đúng hay sai?

Hết