www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên nghành khoa học tự nhiên và kĩ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminer, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao đổi trực tuyến tại:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

Giới hạn hàm số

1.Định nghĩa : Cho hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon$$

Mở rộng định nghĩa giới hạn :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow$

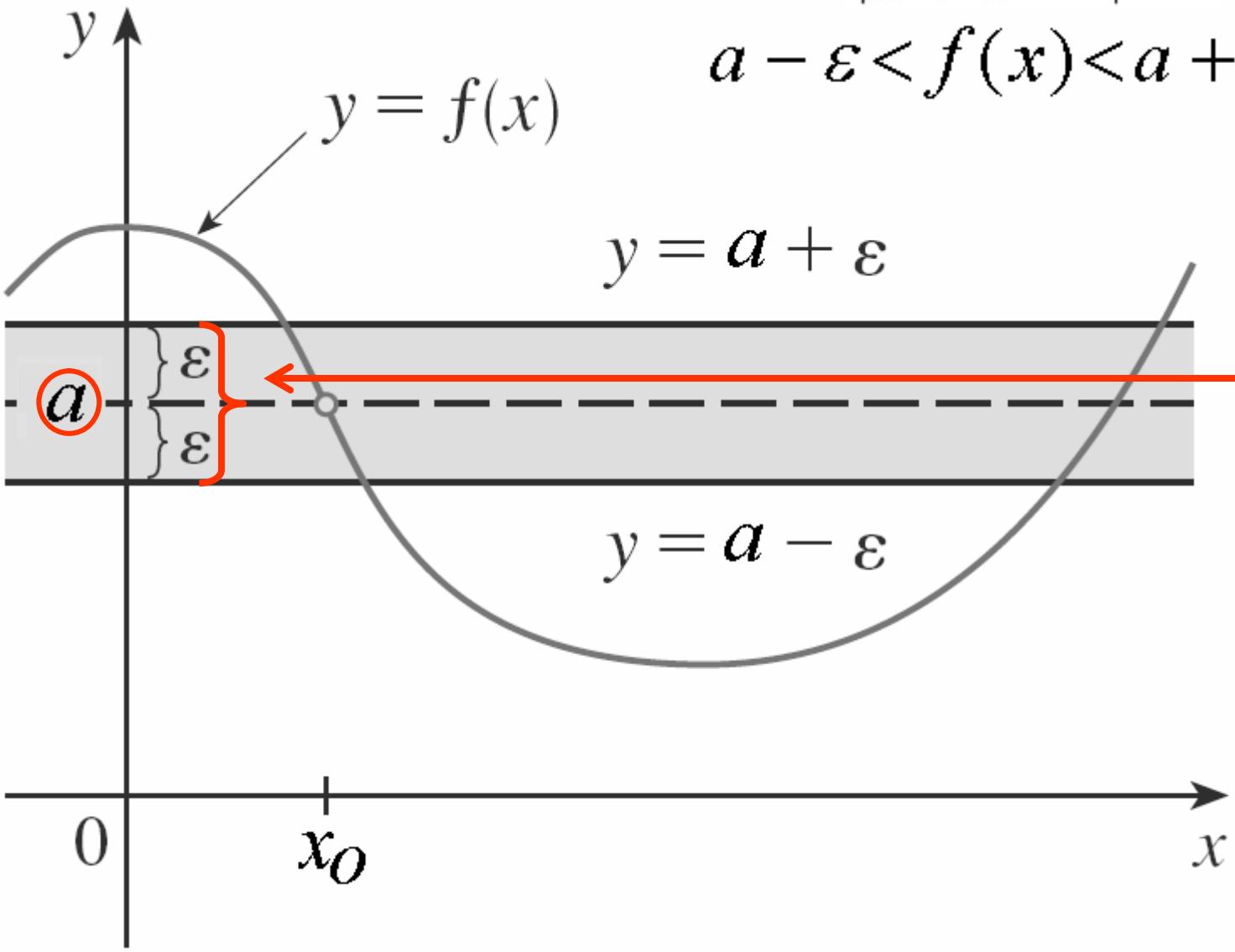
$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x : x > N$ thì $|f(x) - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

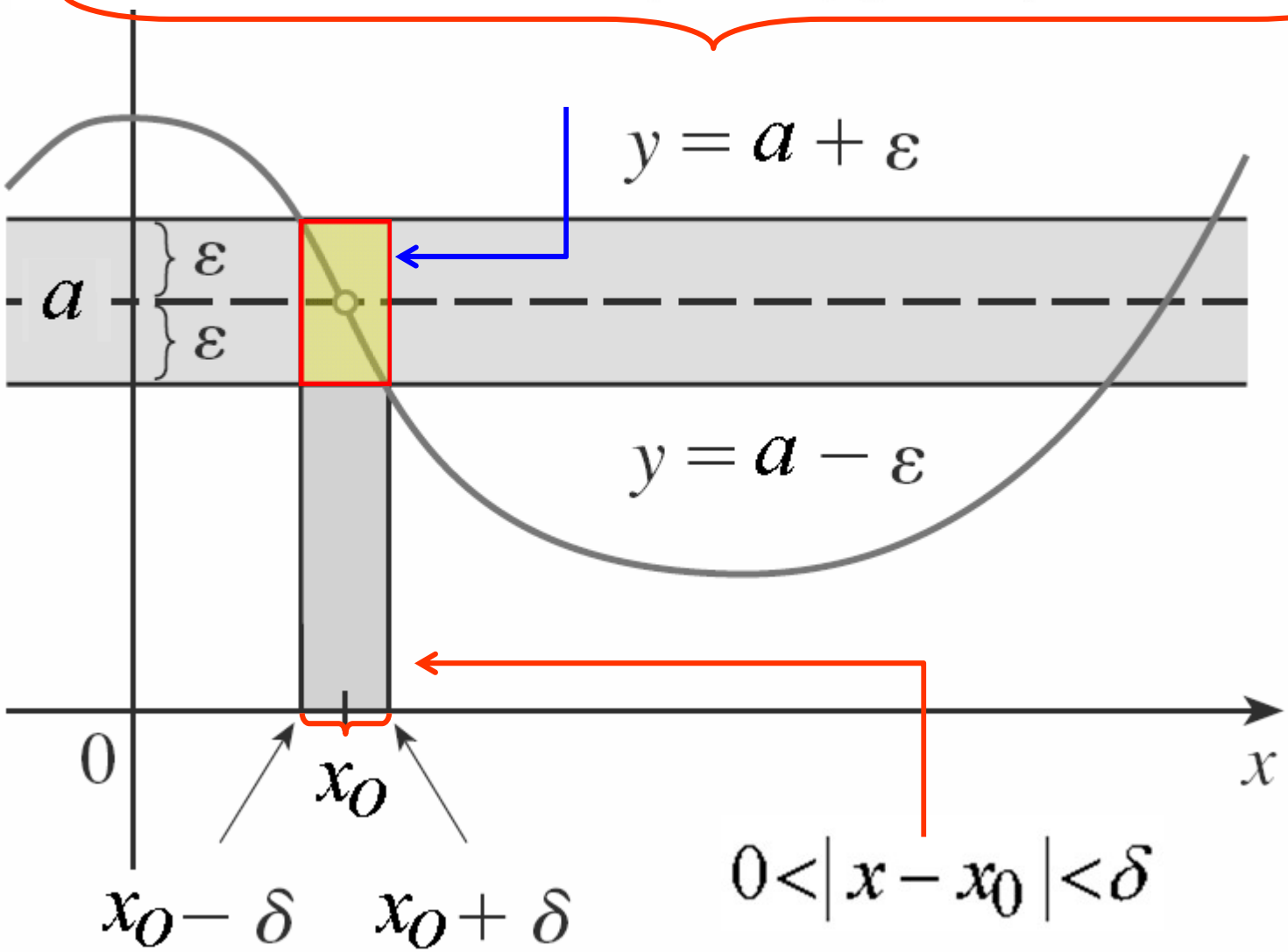
$\forall M > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) > M$

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

$$a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon$$



Giới hạn hàm số

1.Định nghĩa : Cho hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon$$

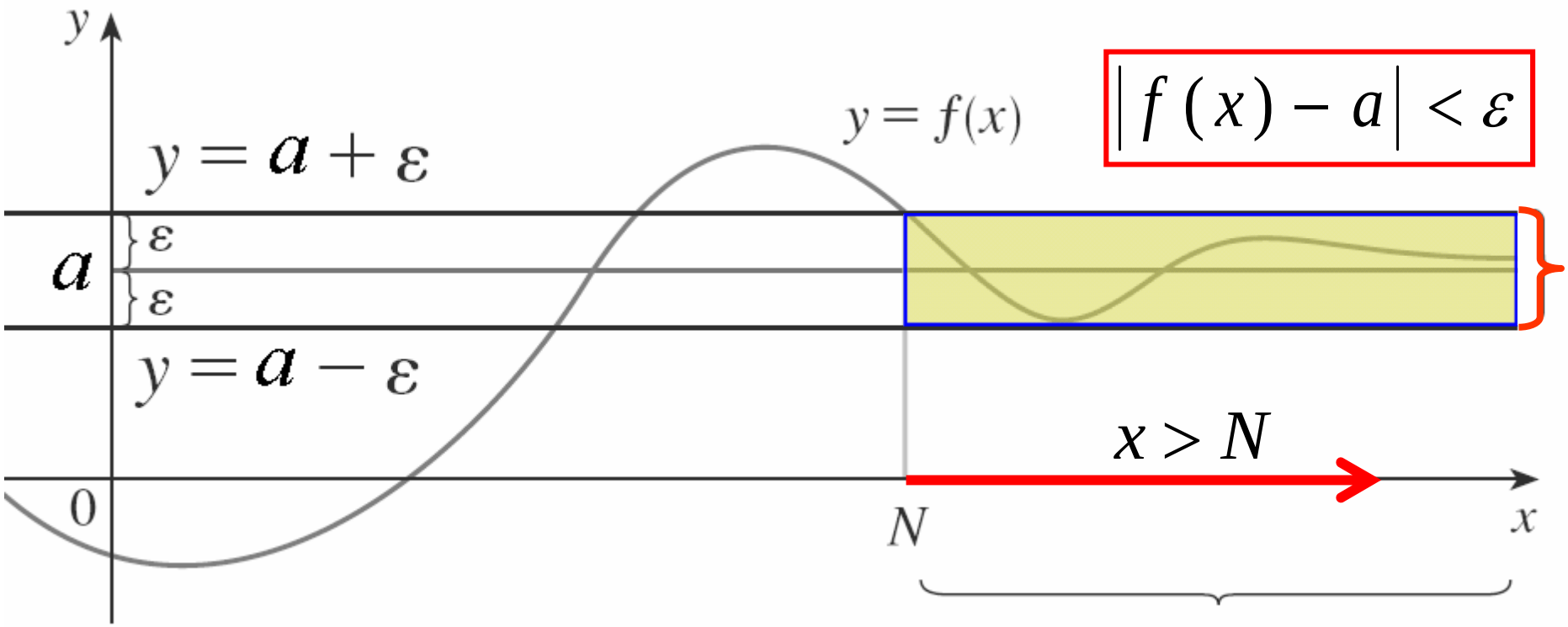
Mở rộng định nghĩa giới hạn :

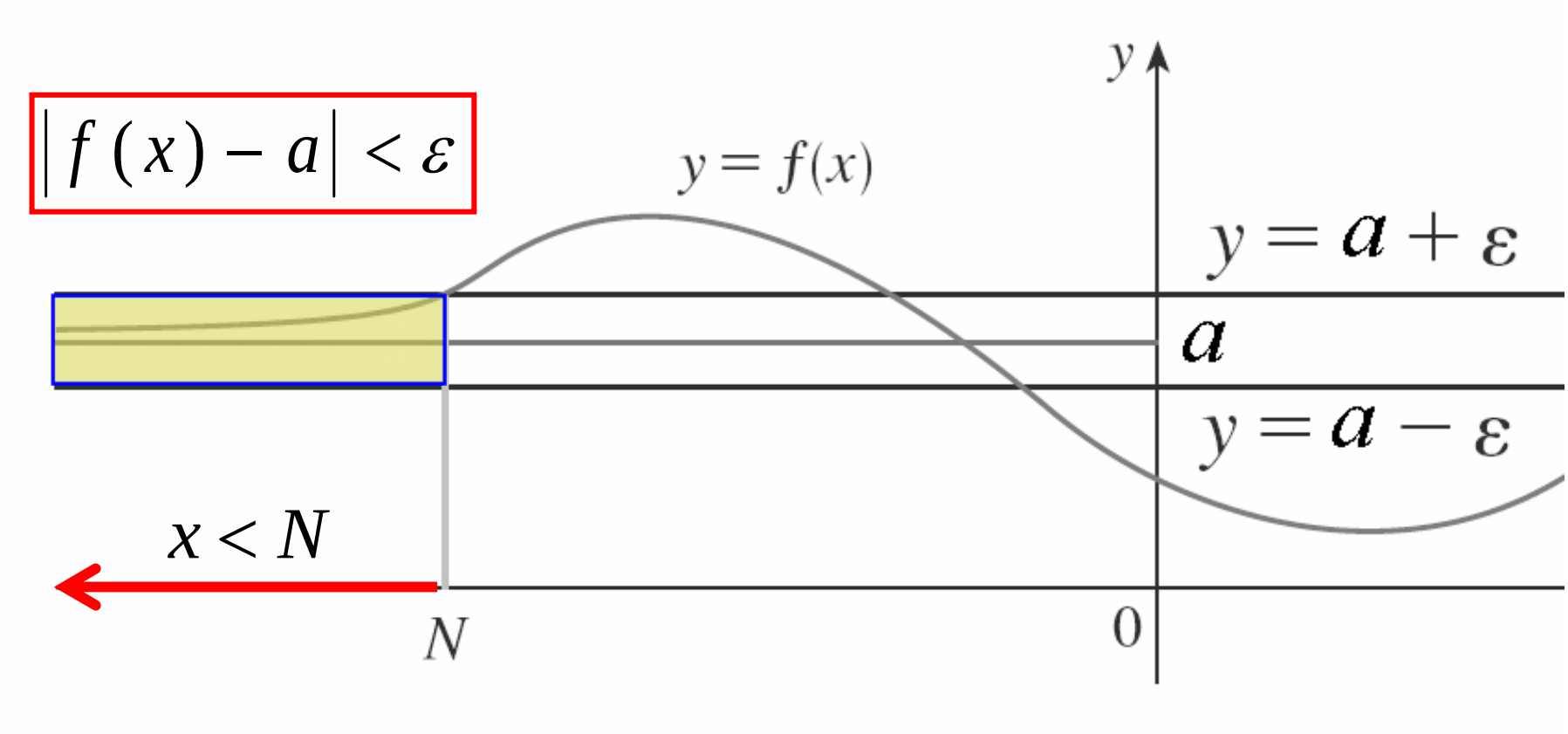
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x : x > N \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall M > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } f(x) > M$$


y
y = a + ε
a
ε
ε
y = a − ε
0
y = f(x)
|f(x) − a| < ε
x > N
N
x



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Giới hạn hàm số

1.Định nghĩa : Cho hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon$$

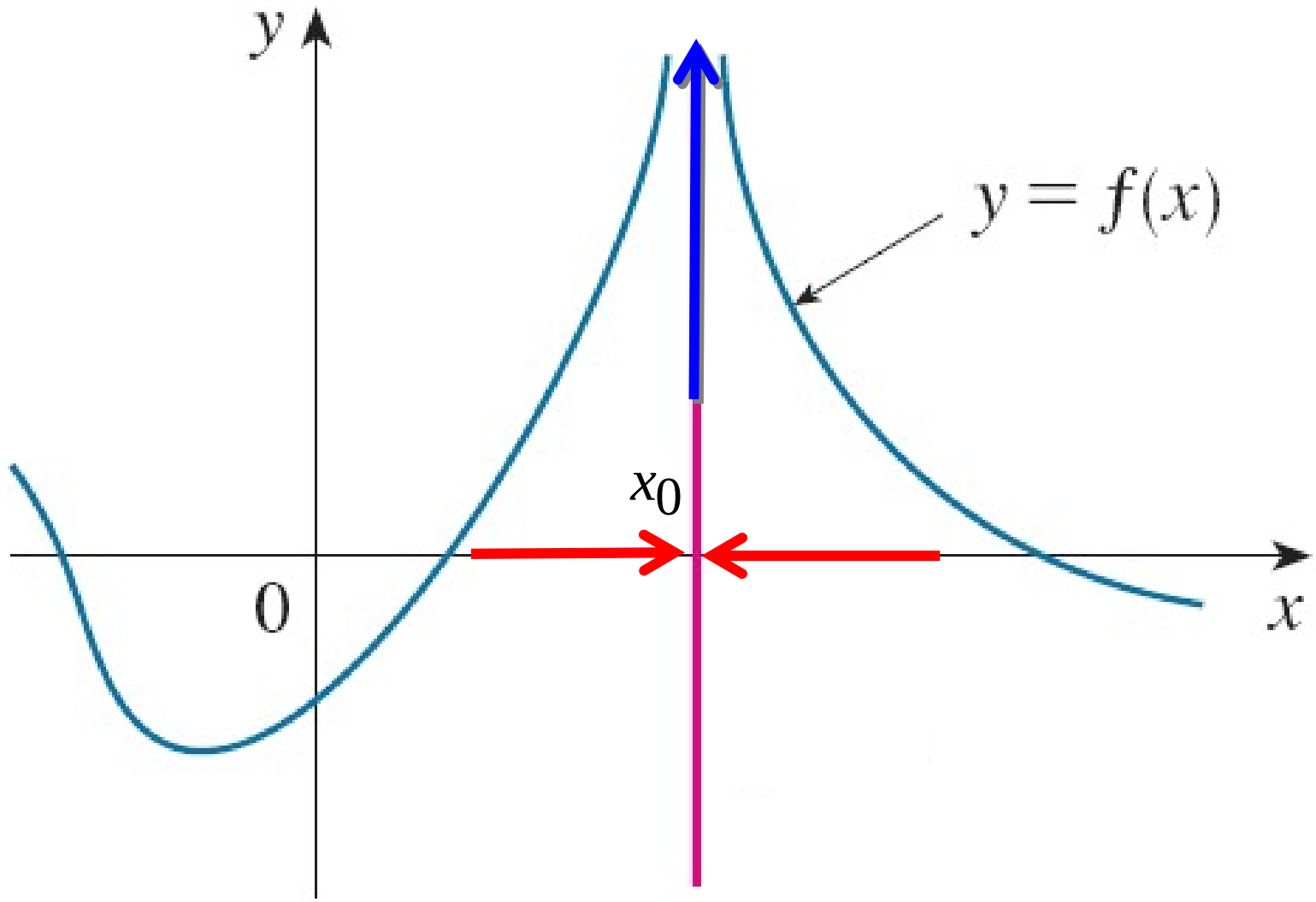
Mở rộng định nghĩa giới hạn :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow$$

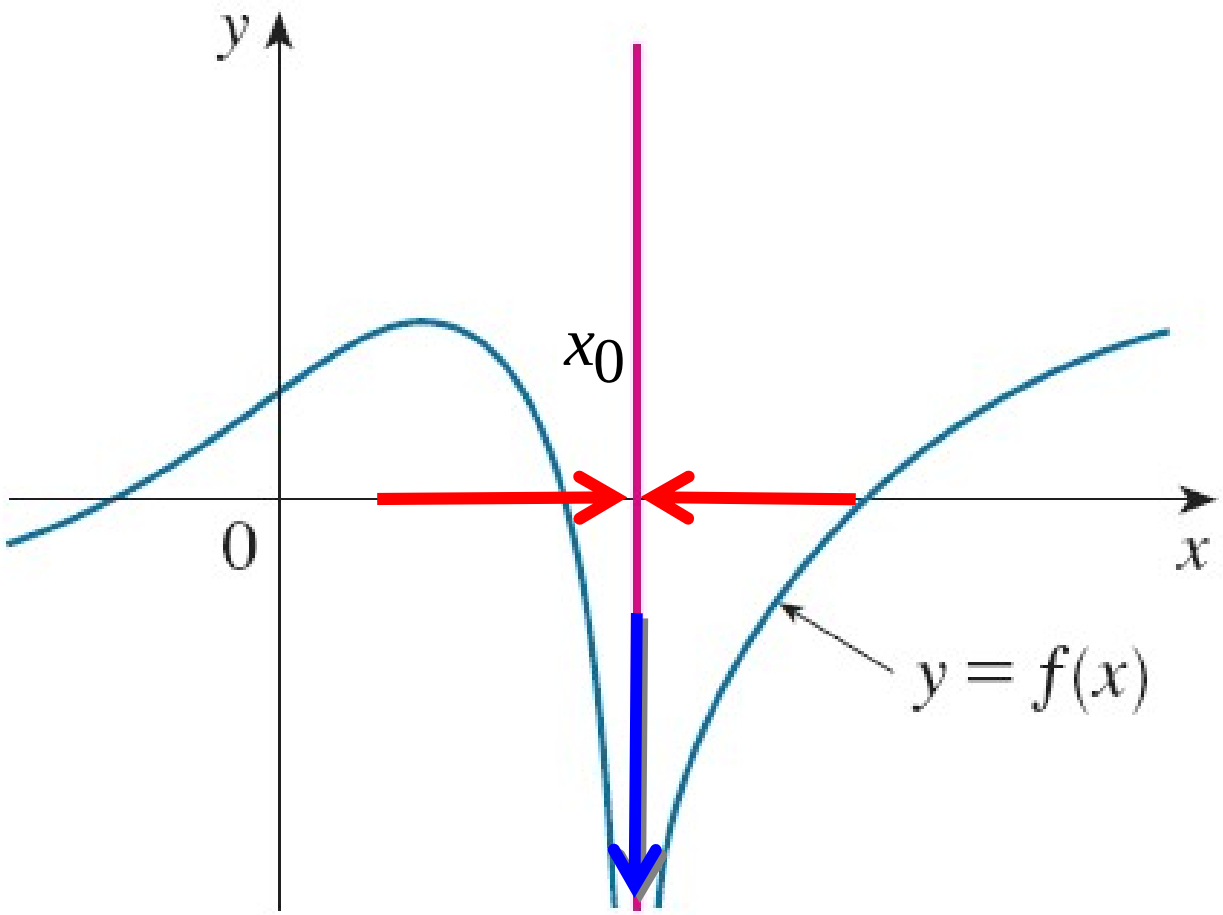
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x : x > N \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \boxed{+\infty} \Leftrightarrow$$

$$\forall M > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } f(x) > M$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

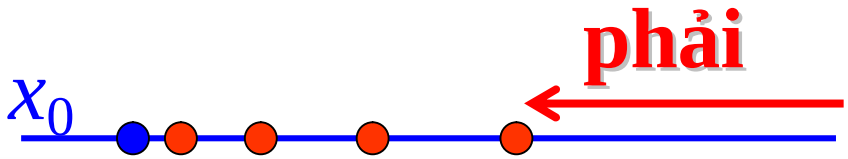
Chú ý : Trong định nghĩa không đòi hỏi $f(x)$ phải xác định tại $x = x_0$, ví dụ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ tuy rằng tại $x = 0$ hàm không xác định .

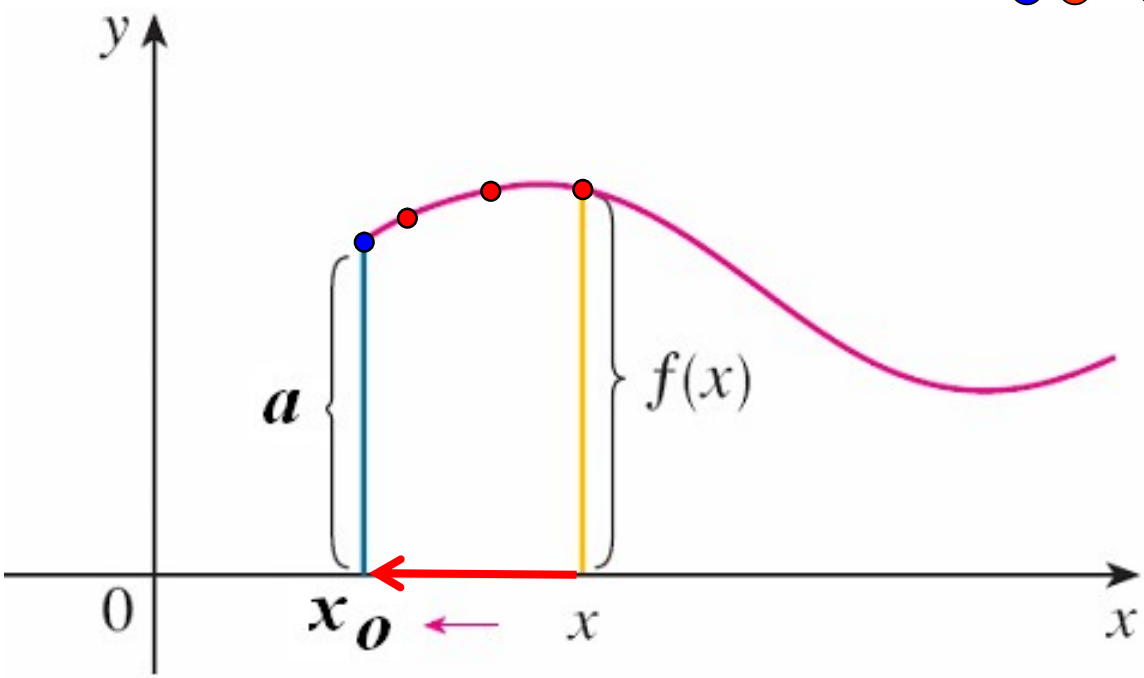
Chú ý : Cách ký hiệu biến không ảnh hưởng đến giới hạn, ví dụ nếu $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ thì $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t}$

2.Giới hạn một phía :

a) Giới hạn phải : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < x - x_0 < \delta \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon$$





Giới hạn một phía :

a) Giới hạn phải : $\lim\limits_{x \to x_0^{+}} f(x) = a \Leftrightarrow$

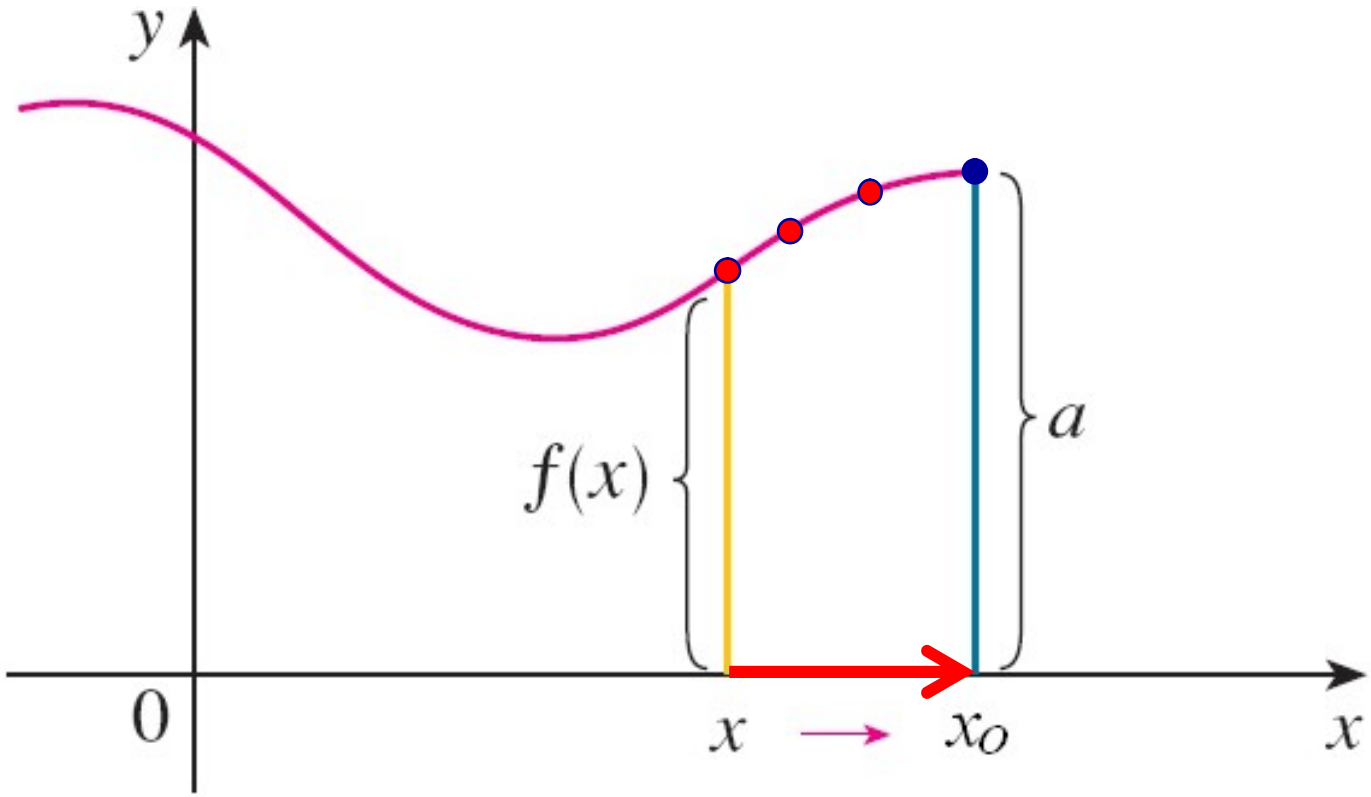
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < x - x_0 < \delta$ thì $|f(x) - a| < \varepsilon$

b) Giới hạn trái : $\lim\limits_{x \to x_0^{-}} f(x) = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < x_0 - x < \delta$ thì $|f(x) - a| < \varepsilon$

Định lý : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x \to x_0^{+}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^{-}} f(x)$ tồn tại và bằng nhau


y
f(x)
a
0
x
x_O
x

Giới hạn một phía :

a) Giới hạn phải : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow$

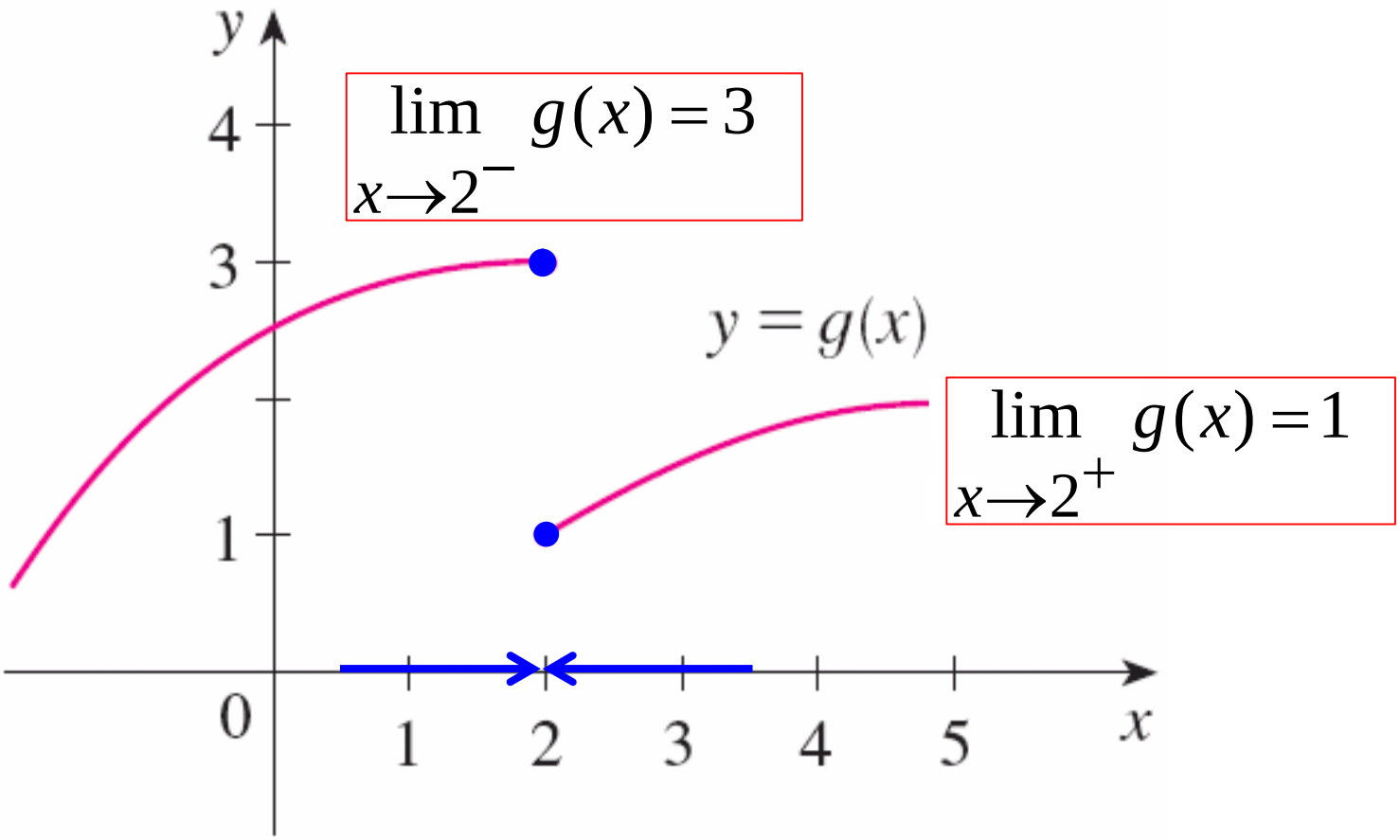
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < x - x_0 < \delta$ thì $|f(x) - a| < \varepsilon$

b) Giới hạn trái : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x : 0 < x_0 - x < \delta$ thì $|f(x) - a| < \varepsilon$

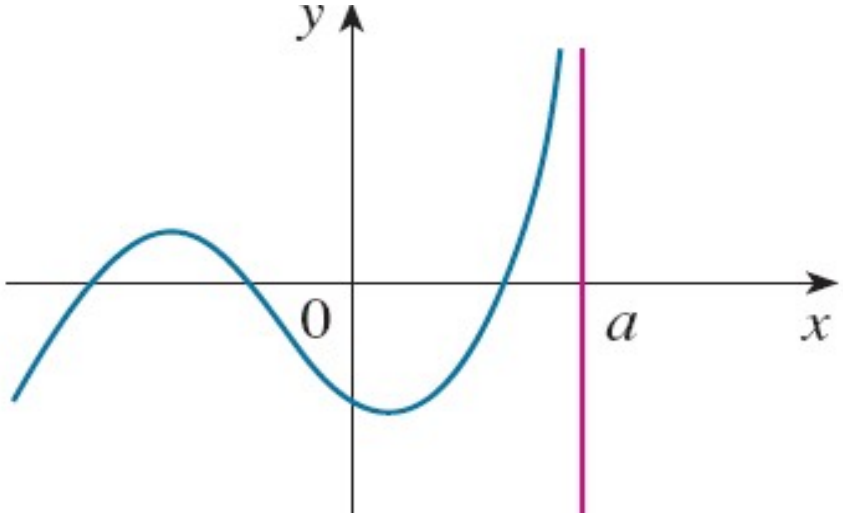
Định lý : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại và bằng nhau

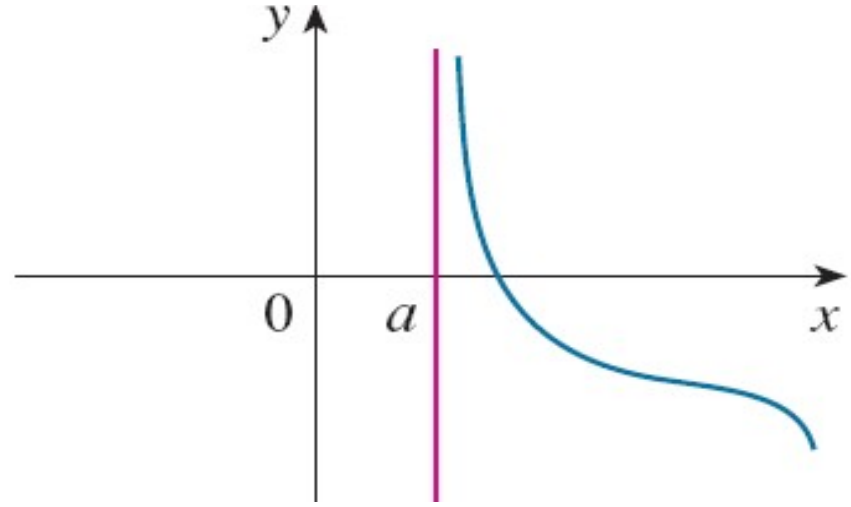


$\lim_{x \to 2} g(x)$ Không tồn tại

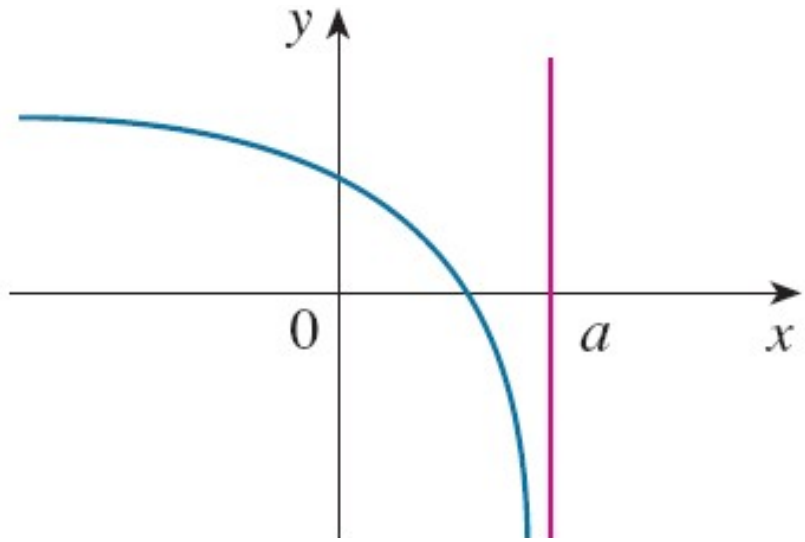
Tương tự ta có mở rộng cho khái niệm giới hạn một phía bằng vô hạn



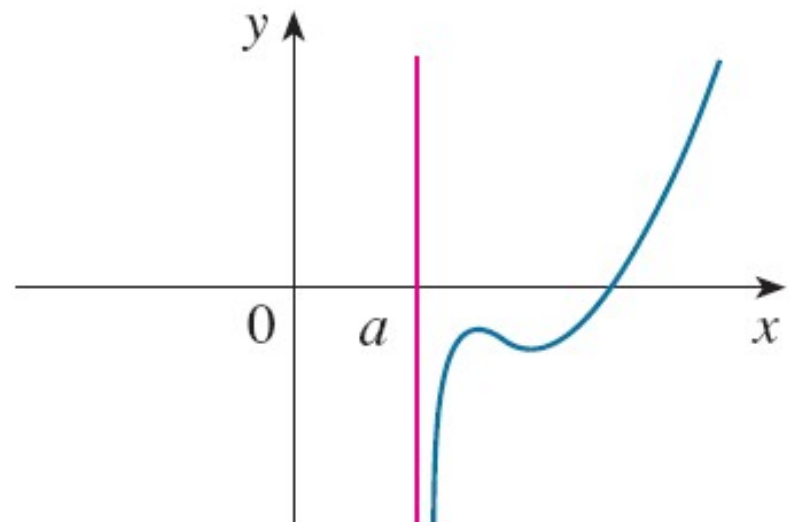
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Ví dụ : Cho $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ tìm

$$\lim_{x \to 0^{+}} \frac{\sin x}{x} \quad \text{và} \quad \lim_{x \to 0^{-}} \frac{\sin x}{x}$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{\sin x}{|x|}$

Khi $x \to 0^{+}$ thì $x > 0$, do đó $\dfrac{\sin x}{|x|} = \dfrac{\sin x}{x}$,

$$\lim_{x \to 0^{+}} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Khi $x \to 0^-$ thì $x < 0$, do đó $\dfrac{\sin x}{|x|} = \dfrac{\sin x}{-x}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

$$= \lim_{x \to 0^-} -\frac{\sin x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$$

Giới hạn một phía thường được dùng trong trường hợp :

căn bậc chẵn

chứa trị tuyệt đối

hàm ghép

3. Tính chất : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [\alpha f(x)] = \alpha A$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = A.B$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{A}{B}$ (nếu $B \neq 0$)

e) Nếu $h(x) \le f(x) \le g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

f) Nếu $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

g) Nếu $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ thì $\lim_{n \to +\infty} \{f(n)\} = a$

(Hàm có giới hạn thì dãy cũng có giới hạn)

4. Các giới hạn cơ bản khi $\boxed{x \to +\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty \qquad (\alpha > 0)$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{\alpha} = +\infty \qquad (\alpha > 0)$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\alpha}} = 0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln^2 x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad (a > 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \boxed{\frac{1}{a}}^x = 0 \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} q^x = 0}$$

$$q = 1/a \quad 0 < q < 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x$$ **không tồn tại**

$$\lim_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} arctgx = \frac{-\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad (a > 1)$$

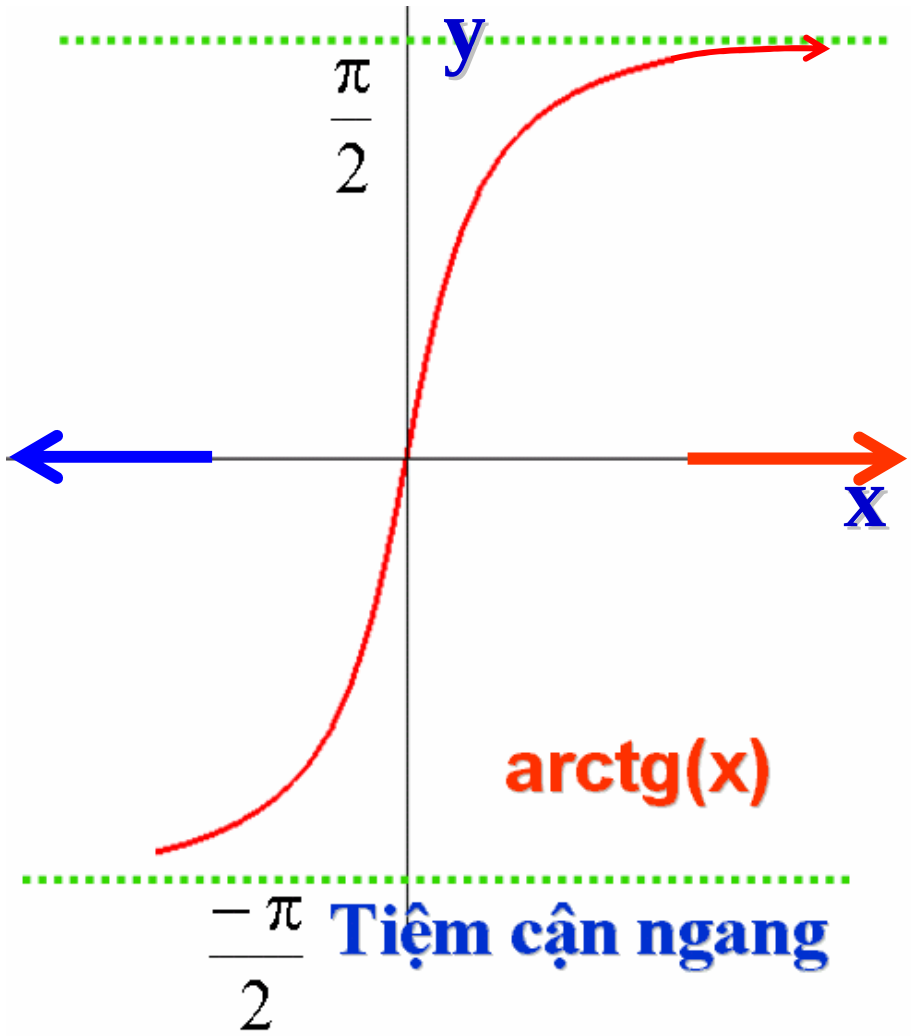
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} q^x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x$$ **không tồn tại**

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x$$ **không tồn tại**

$$\lim_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} arctgx = \frac{-\pi}{2}$$



4. Giới hạn cơ bản khi $\boxed{x \to 0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

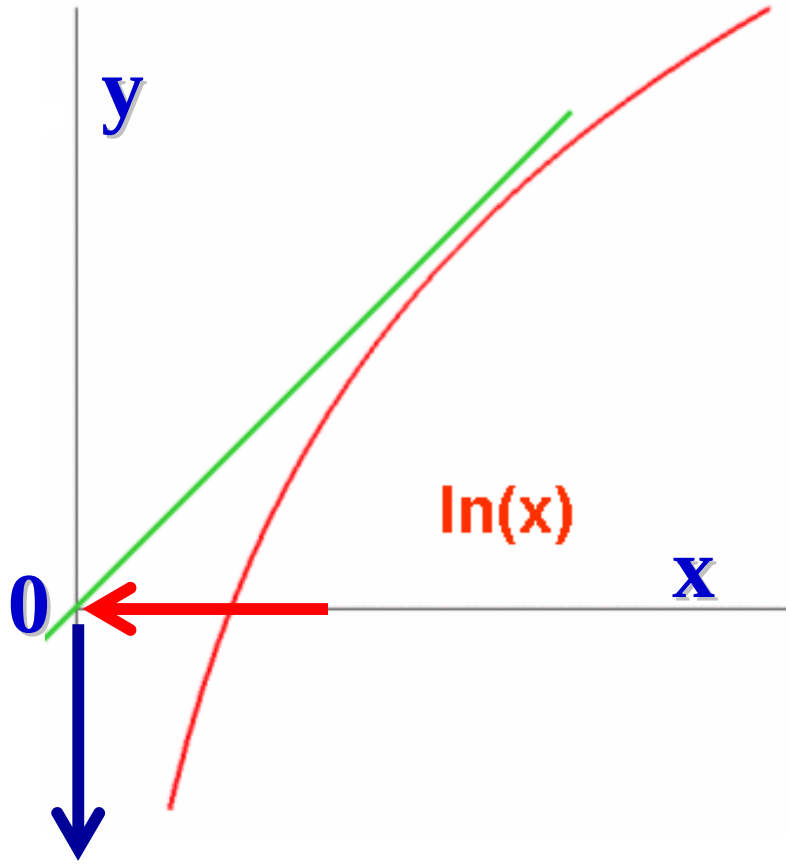
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x\to 0} (1-x)^{1/x} = \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^{\oplus}} \ln x =}$$



Chú ý :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} =$$

Cách tìm giới hạn : Bước 1

Nếu khi thay giá trị của $x = x_0$ vào biểu thức của hàm cần lấy giới hạn mà không có dạng vô định thì giới hạn chính bằng giá trị của biểu thức đó

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\cos x} = 1^0 = 1$$

Ví dụ : Cho $f(x)=\begin{cases} x+3 & khi \quad x>0 \\ \cos x & khi \quad x<0 \end{cases}$.

Tìm $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+3 = \lim_{x\to 0} x+3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Không tồn tại giới hạn

Bước 2

Nếu có dạng vô định :

Dùng các giới hạn cơ bản

Dùng quy tắc L'Hopital

Dùng công thức MacLaurin Taylor

Chú ý : Các dạng vô định (7 dạng)

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \ 0.\infty \ , \infty - \infty ,$$

(∞ hiểu là $+\infty$)

Chú ý :Các dạng không phải vô định

$$\frac{2}{\infty} = 0 \qquad \frac{3}{0} = \pm\infty \qquad \infty + \infty = +\infty$$

$$\frac{\infty}{0} = \pm\infty \qquad \infty - 5 = \infty \qquad 0^{\infty} = 0$$

$$\infty^{\infty} = \infty \qquad \infty.\infty = \infty$$

$$\frac{0}{\infty} = 0 \qquad 3^{\infty} = \infty \qquad [0.99]^{\infty} = 0$$

Ví dụ :

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln[1 + arctg(x^2)]}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{tgx}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x + 5^x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{tgx} - e^{\sin x}}{tgx - \sin x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x.(1-\cos x)}{x^3.\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\sin x}{x}}.\boxed{\frac{(1-\cos x)}{x^2}}.\frac{1}{\cos x}$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{e^x - 1}$

$$= \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}.\boxed{\frac{\sin x}{x}}.\boxed{\frac{x}{e^x - 1}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+arctg(x^2)]}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+arctg(x^2)]}{\boxed{arctg(x^2)}}\cdot\frac{\boxed{arctg(x^2)}}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+arctg(x^2)]}{arctg(x^2)}\cdot\frac{arctg(x^2)}{\boxed{x^2}}\cdot\frac{\boxed{x^2}}{\sin^2 x}=1$$

Ví dụ :

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{tgx}} =$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{tgx}} =$$

$$\boxed{a^{bc} = [a^b]^c}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\boxed{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}\right]^{\boxed{\frac{\sin x}{tgx}}} = e^1 = e$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tgx} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

Ví dụ : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$$

Chia tử và mẫu cho x :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \boxed{1/x^2}}}{x} = 0$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x + 3^x}{4^x + 5^x}$

Chia tử và mẫu cho 5^x :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\boxed{\left(\frac{2}{5}\right)^x} + \left(\frac{3}{5}\right)^x}{\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1} = 0$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x}$

$$\boxed{a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 + 2x}$

$$\boxed{x = -\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = -1$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$$*) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\boxed{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$-|x| \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\underbrace{-x}_{\downarrow\, 0} \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \underbrace{x}_{\downarrow\, 0}$$

Sai ?

$$\boxed{a^b = e^{b\ln a}}$$

Ví dụ : $$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \boxed{= e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\boxed{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln(\cos x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\boxed{\cos x-1}} \cdot \frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\boxed{t}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

$$x = -\sqrt{x^2}$$
$$(x < 0)$$

$$\neq \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Ví dụ : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ $\boxed{\text{không tồn tại.}}$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

*) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{x} =$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^{\sin x}}{tgx-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{tgx-\sin x}-1\right)}{tgx-\sin x}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{m}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\boxed{\frac{(\sqrt[n]{1+\beta x}-1)}{x}}+\boxed{\frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)}{x}}}{}$$

Sử dụng giới hạn $\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{\beta x}}\beta=\frac{\beta}{n}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1/n}-1}{t}=1/n$$

Chú ý : Không lấy giới hạn hai lần

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\frac{\sin x}{x}} - \cos x}{x^2} \neq \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quy tắc L'Hopital

7 dạng vô định

$$\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty},} \quad 0.\infty \;, \infty-\infty \;, 1^{\infty} \;, 0^{0}, \infty^{0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

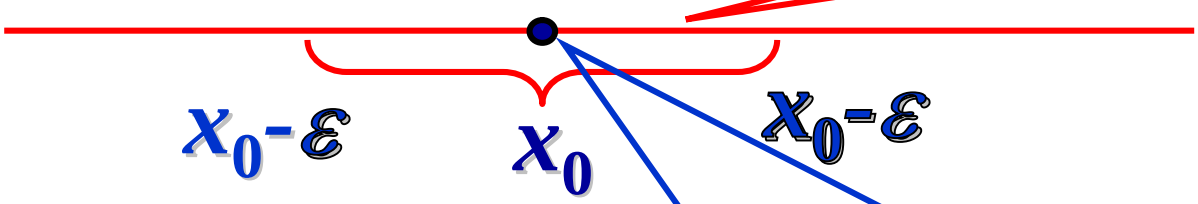
1. Quy tắc L'Hopital cho dạng $\frac{0}{0}$:

$f(x), g(x)$ **có đạo hàm** trên $\boxed{0 < |x - x_0| < \varepsilon}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0}$

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ **thì** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Có đạo hàm



Có thể không có đạo hàm

Chú ý : x_0 và A có thể hiểu là $\pm\infty$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{+\infty}$ **thì** $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \boxed{+\infty}$

Nếu $\lim\limits_{x\to \boxed{-\infty}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ **thì** $\lim\limits_{x\to \boxed{-\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

Có thể dùng L'Hopital cho **giới hạn một phía**

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ **thì** $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

Có thể dùng L'Hopital liên tiếp **nhiều lần**

Nếu biểu thức đạo hàm quá dài , có thể dùng giới hạn cơ bản để làm **đơn giản hoá biểu thức** trước khi dùng L'Hopital .

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **không tồn tại** , có thể $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **vẫn tồn tại**

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ **thì** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

$$\nexists \xrightarrow[\textbf{sai}]{} \nexists$$

2. Quy tắc L'Hopital cho dạng $\frac{\infty}{\infty}$:

$f(x), g(x)$ **có đạo hàm** trong miền $0 < |x - x_0| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ **thì** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Các điểm chú ý tương tự như quy tắc cho dạng 0/0

Giới hạn cơ bản khi $\boxed{x \to 0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x\to 0} (1-x)^{1/x} = \frac{1}{e}$$

3. Các ví dụ : Giới hạn cơ bản

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\quad(1^{\infty})\qquad=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{1}=e$$

3. - Các ví dụ :

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}\cdot\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}\to 1$$

sai

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\boxed{\sin x}}{\boxed{6}x}=\frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{tg^3x}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}.\boxed{\frac{x^3}{tg^3x}}=\frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}.\boxed{\frac{x^2}{\sin^2 x}}=1$$

f) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}=-1$$

$$\text{g)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-8x+5}{3x^2-10x+7}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x-8}{6x-10}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}$$

$$\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\text{h)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\boxed{\sin 2x}}{\cos 2x\,.\boxed{2\sin x\cos x}}=-2$$

i) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\ln x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0$$

j) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{4x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12x^2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{24x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{24}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^3}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2^x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\boxed{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\boxed{\dfrac{1}{\ln x}}} = \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\dfrac{-1}{\ln^2 x}\,\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x\ln^2 x = \ldots..$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

(0.∞)

$$\text{k)}\quad \lim_{x\to \boxed{0^+}} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x . \ln(1+x) =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \boxed{x \ln x} . \boxed{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

n) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\dfrac{1}{\cos ax}}(-a\boxed{\sin ax})}{\boxed{\dfrac{1}{\cos bx}}(-b\boxed{\sin bx})}=\frac{a^2}{b^2}$$

o) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-2}{1+x^2}}{\dfrac{x}{x+1}.\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x+1)}{1+x^2}=2$$

$\boxed{\text{Dạng } 0^0}$: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$ $\boxed{a^b = e^{b \ln a}}$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\boxed{x \ln x}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

Dạng 1^{∞} : $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\ln x} = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x \ln(1+x)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x \ln(1+x) = 0$$

Dạng ∞^0 : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+2^x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+2^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2^x}(1+2^x\ln 2)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+2^x\ln 2)}{x+2^x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2.\ln 2}{1+2^x\ln 2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{\left(\frac{1}{2^x\ln 2}\right)+1}=\ln 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln 2}=2$$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}} \qquad\qquad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

???

$$\lim \frac{e^{tgx} - e^{\sin x}}{tgx - \sin x} = \lim \frac{(e^{tgx} - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{tgx - \sin x} =$$

$$\lim \frac{\boxed{\frac{(e^{tgx} - 1)}{tgx}} tgx - \boxed{\frac{(e^{\sin x} - 1)}{\sin x}} \sin x}{tgx - \sin x} =$$

$$\lim \frac{tgx - \sin x}{tgx - \sin x} = 1$$

sai

Hàm liên tục :

1) Hàm liên tục tại một điểm :

$f(x)$ liên tục tại $x = x_0$: $\boxed{\cancel{\lim_{x \to x_0}} f(x) \cancel{=} f(\cancel{x_0})}$

$$\lim_{x \to x_0} \Delta f = 0$$

Hàm gián đoạn tại x_0 nếu nó không liên tục

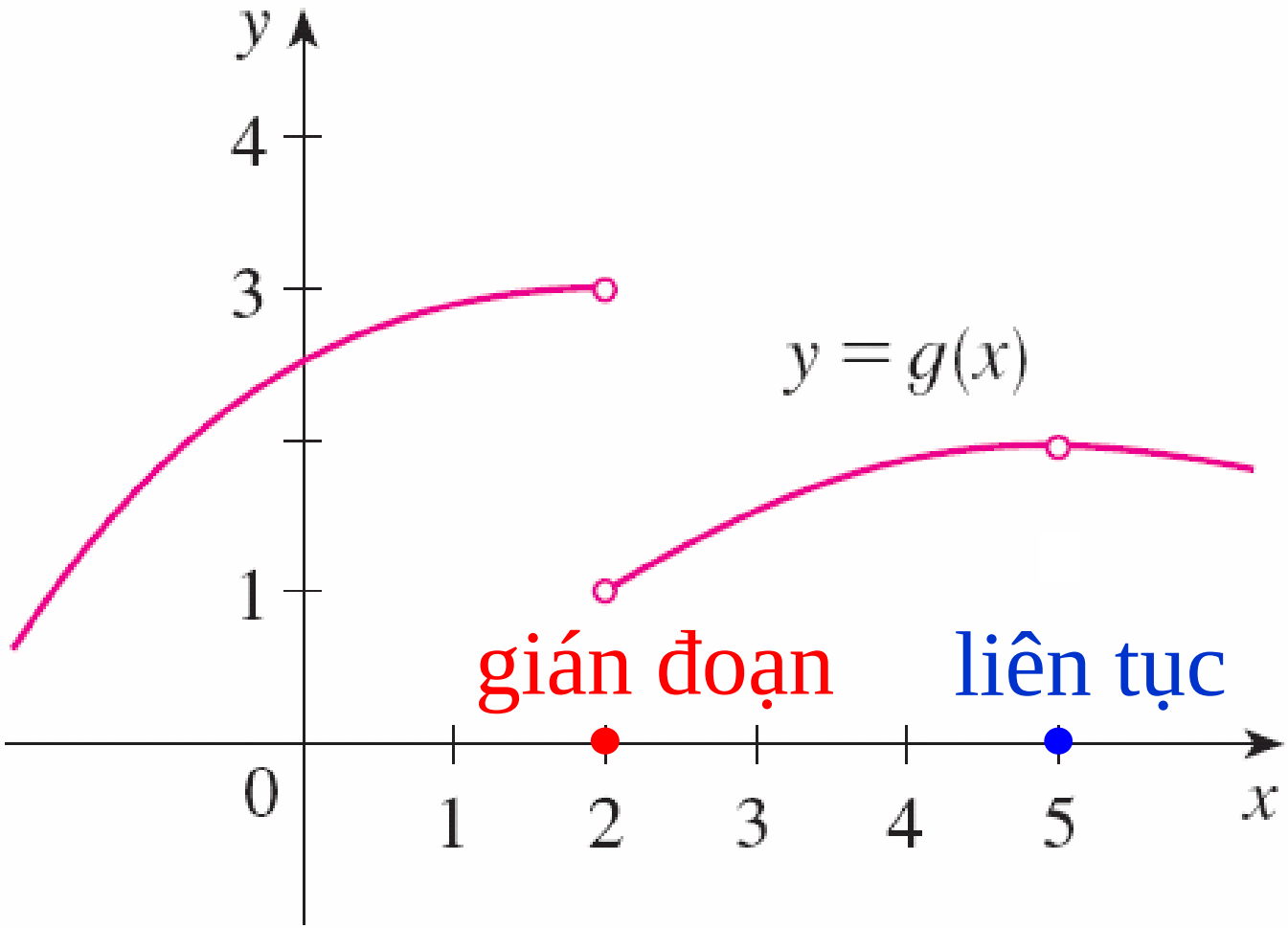
Phân loại điểm gián đoạn :

Bỏ được :Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ nhưng $f(x_0)$ không tồn tại

Loại 1 $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại và không bằng nhau

Loại 2 : Các trường hợp còn lại

Đồ thị của một hàm liên tục tại x_0 là một **đường liền nét** tại điểm đó



2. Tính chất hàm liên tục :

Tính chất :

Tổng , hiệu , tích của hai hàm liên tục là hàm liên tục .

Thương của hai hàm $f(x)/g(x)$ liên tục là hàm liên tục (với điều kiện $g(x_0) \neq 0$)

Hợp của hai hàm liên tục là liên tục

Các hàm cơ bản đều liên tục tại mọi điểm trong miền xác định

Đồ thị của hàm liên tục là một **đường cong liền nét** tại điểm liên tục

Ví dụ : Hàm $y = \sin x$ liên tục tại

Hàm $y = x^2$ liên tục tại mọi điểm

Hàm $y = \sqrt{x}$ liên tục tại mọi điểm $x \geq 0$

Hàm $y = \ln x$ liên tục tại mọi điểm $x > 0$

Hàm $y = \dfrac{\sin x}{x}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$

Hàm $y = e^{\cos x}$ liên tục với mọi x

Ví dụ : Cho $f(x)=\begin{cases}\dfrac{b+\cos x}{1+e^{1/x}} & khi \quad x\neq 0\\ a & khi \quad x=0\end{cases}$

Tìm a,b để hàm liên tục tại $x_0=0$

*) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b+\cos x}{1+e^{1/x}}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{b+\cos x}{1+e^{1/x}}=b+1$

để có giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ thì $b=-1$.

Muốn hàm liên tục tại $x_0=0$ thì $a=0$

Hàm liên tục một phía :

$f(x)$ liên tục phải tại $x = x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$f(x)$ liên tục trái tại $x = x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Định lý : Hàm liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi nó liên tục phải và liên tục trái tại đó

Ví dụ : Cho hàm

$$y = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Xét liên tục một phía tại 0

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 = f(0)$$

Hàm liên tục phải tại 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 \neq f(0)$$

Hàm không liên tục trái tại 0

Ví dụ : Xét sự liên tục của hàm

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & khi \quad x\neq 0\\ -1 & khi \quad x=0\end{cases}$$

Hiển nhiên hàm liên tục tại $x=x_0\neq 0$ vì là thương của hai hàm liên tục .

Tại $x=0$, hàm không liên tục vì

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, trong khi đó $f(0)=-1$

Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Tìm a để f(x) liên tục tại 0

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|} = 0 \qquad f(0) = a$$

$$|x| \leq -\left|x\sin\frac{1}{|x|}\right| \leq x\sin\frac{1}{|x|} \leq \left|x\sin\frac{1}{|x|}\right| \leq |x|$$

3. Hàm liên tục trên một khoảng mở :

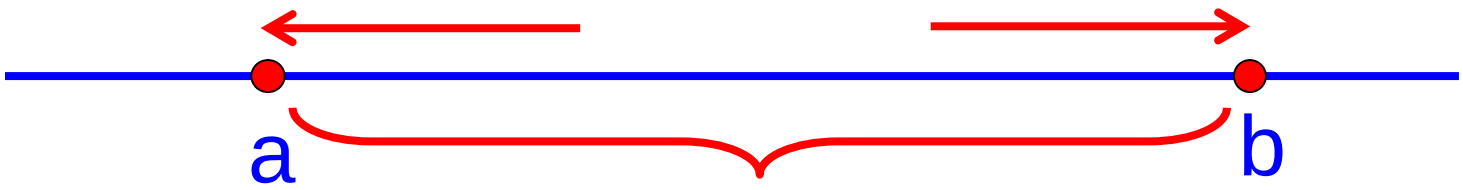
Hàm $f(x)$ gọi là liên tục trên $(a\ ,\ b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi $x = x_0$ thuộc $(a\ ,\ b)$

Ví dụ : Hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0,1)$ **Liên tục**

Hàm $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(-1,0)$ **Liên tục**

Trên khoảng $(-1,1)$ ⊗

Hàm liên tục trên một khoảng đóng : Hàm $f(x)$ liên tục trên $[a\ ,\ b]$ nếu $f(x)$ **liên tục** trên $(a\ ,\ b)$, **liên tục phải** tại a , **liên tục trái** tại b



Định lý : Hàm liên tục trên $[a, b]$ thì :

*) bị chặn (trên , dưới)

*) đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đó (max, min)

*) nhận mọi giá trị trung gian giữa hai giá tri max và min

Chú ý : Hàm liên tục trên (a, b)

Các khẳng định trên không còn đúng

Hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$

không bị chặn trên (0 , 1)

không đạt max , min trên (0 , 1)

Ví dụ : Xét sự liên tục hàm

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & khi \quad x\neq 0\\ -1 & khi \quad x=0\end{cases}$$

trên $(0\ ,\ 1)$,$(-1,0)$, $(-1,1)$,$[0\ ,\ 1]$,$[-1\ ,\ 0]$

Trên $(0\ ,\ 1)$ hàm liên tục vì nó liên tục tại mọi điểm $x_0>0$.

Trên $(-1,1)$ hàm không liên tục vì nó không liên tục tại $x_0=0$

Trên $(-1\ ,\ 0)$ hàm liên tục vì nó liên tục tại mọi điểm $x_0<0$

Trên đoạn $[0\ ,\ 1]$ hàm không liên tục vì nó không liên tục phải tại điểm $x_0 = 0$

Trên đoạn $[-1\ ,\ 0]$ hàm liên tục vì nó liên tục trên $(-1\ ,\ 0)$, liên tục trái tại $x_0 = 0$, liên tục phải tại $x_0 = -1$

Tính các giới hạn **(đề cao học)**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x\,arctg\,2x}$ **1995**

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})..(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ **1996**

Hướng dẫn : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt[k]{x})}{(1-x)}=\dfrac{1}{k}$

3. $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{1/x}$ **1997**

Hướng dẫn : $e^{\ln(\sin x+\cos x)/x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}+e^{-x}-2)\cot gx$ **1998**

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^{2}x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$ **1999**

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}.\sqrt[4]{1+2x}-1}{x\cos 2x-x^{2}}$ **2000**

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{x}$ **2001**

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctgx}-\dfrac{1}{x}\right)$ **2001**

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x^2)-x\sin x-e^{-x^2}}{x^2\sin^2 x}$ **2002 Taylor**

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$ **2003**

11. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ **2004**

12. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+4x)^{1/x}}{e^4}\right)^{1/x}$ **2005**

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt[3]{1+x}-\dfrac{x}{3}\right]^{1/x^2}$ **Logarit + L'Hopital** **2006**

14. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^{x+1}(x+2)^{(x+2)}(x+4)^{(x+4)}}{(x+5)^{3x+7}}$$

2007