www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên nghành khoa học tự nhiên và kĩ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminer, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

**Trao đổi trực tuyến tại:**

**http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html**

# Đạo hàm và vi phân

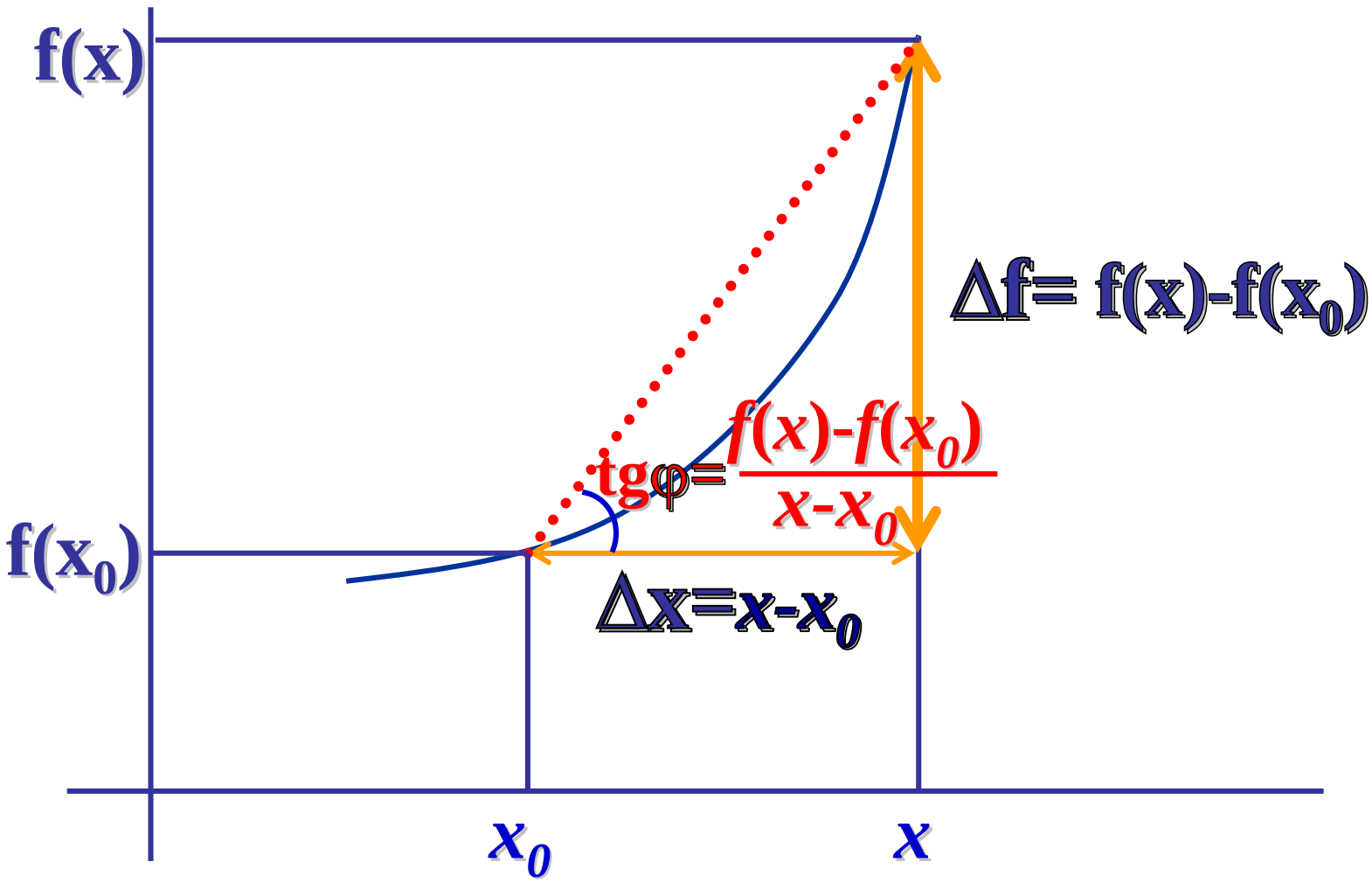
**1) Định nghĩa** (đạo hàm tại một điểm) :

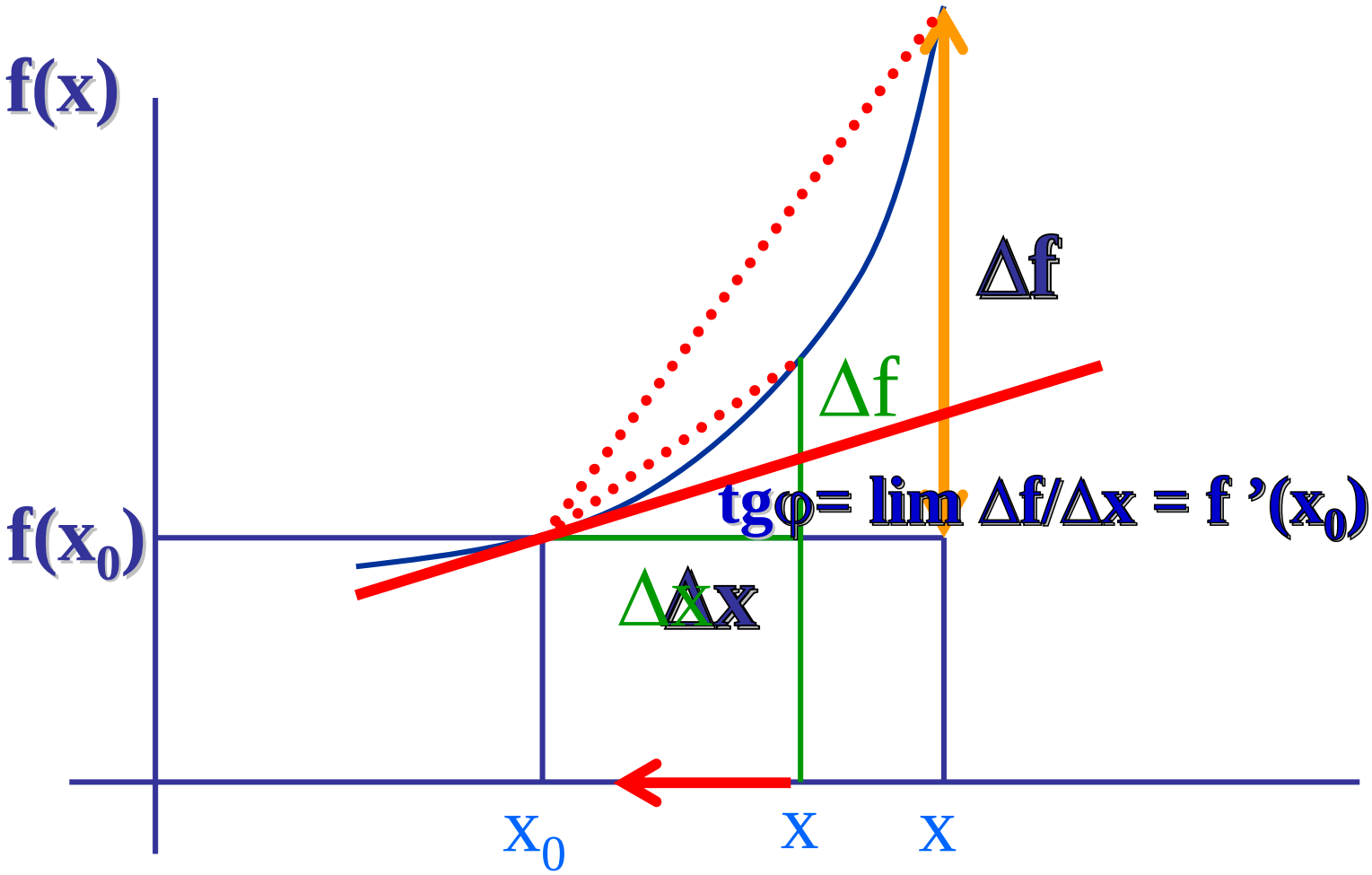
$$f'(x_0) = f'(x)\Big|_{x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

**Gia số của hàm**

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

**Gia số của biến**


f(x)
f(x0)
Δf= f(x)-f(x0)
tgφ= f(x)-f(x0) / x-x0
Δx=x-x0
x0
x




**Ý nghĩa hình học của đạo hàm :**

***f'(x₀)* là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm có hoành độ *x₀***

**Định nghĩa** (đạo hàm phải và đạo hàm trái )

$$f_{\oplus}'(x_0) = f'(x_0^{\oplus}) = \lim_{x \to x_0^{\oplus}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\textbf{Phải})$$

$$f_{\ominus}'(x_0) = f'(x_0^{\ominus}) = \lim_{x \to x_0^{\ominus}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\textbf{Trái})$$

**Định lý** : Hàm có đạo hàm $f'(x_0)$ khi và chỉ khi có đạo hàm phải $f_+'(x_0)$ , đạo hàm trái $f_-'(x_0)$ tại điểm đó và hai đạo hàm phải , trái bằng nhau .

## 2) Bảng các đạo hàm quan trọng :

a) $(\sin x)' = \cos x$

b) $(\cos x)' = -\sin x$

c) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

d) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

g) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

h) $(e^x)' = e^x$

i) $(a^x)' = a^x \ln a$

j) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

k) $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$l)\quad (\sinh x)'$

$m)\quad (\cosh x)'$

## 3) Tính chất : ( Quy tắc )

a) $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

b) $\left(\alpha f(x)\right)' = \alpha f'(x)$

c) $\left(f(x).g(x)\right)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

d) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

với $g(x) \neq 0$

Với giả thiết các hàm đều có đạo hàm

# Chú ý :

$$[f(x).g(x).h(x)]' =$$

$$[\boxed{f'(x)}.g(x).h(x) +$$

$$+ f(x).\boxed{g'(x)}.h(x)$$

$$+ f(x).g(x).\boxed{h'(x)}]$$

## e) Đạo hàm hàm hợp :

$$y = y(u)\ ,\ u = u(x)$$

khi đó $y = y(u(x))$ là hàm hợp .

Công thức đạo hàm hàm hợp :

$$y'(x) = y'(u).u'(x)$$

$$y'(x) = y'(u(x)).u'(x)$$

**Ví dụ :**

$$(\sin 3x)' = \cos 3x . 3$$

$$(e^{\sin 3x})' = e^{\sin 3x} . \cos 3x . 3$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$f(x) = \frac{-1}{\ln^2 x} . \frac{1}{x}$$

$$f(x) = [y^2(x)]$$

$$f'(x) =$$

$$f'(x) = 2y(x)$$

## Chú ý :

$$f(g(h(x)))' = f'(g).g'(h).h'(x)$$

$$f = \cos^{4}(\sqrt[3]{\sin x})$$

$$f'(x) = 4\cos^{3}(\sqrt[3]{\sin x}).[-\sin(\sqrt[3]{\sin x})].$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\sin^{2} x}}.\cos x$$

## f) Đạo hàm $x'(y)$

$y = y(x)$ là một hàm đơn điệu trên đoạn [a,b] ,

hàm $x = x(y)$ là hàm giải x theo y

Công thức đạo hàm :

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & \\ y(x) \arrow[r, leftrightarrow, "?"] & x \end{tikzcd}$$

## f) Đạo hàm $x'(y)$

$y = y(x)$ là một hàm đơn điệu trên đoạn [a,b] ,

hàm $x = x(y)$ là hàm giải x theo y

Công thức đạo hàm :

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}$$

$$x'(y) = \lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}$$

**Ví dụ :** Cho hàm số $y = \sin x \quad (\underbrace{\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}})$

*) $y = y(x) = \sin x \leftrightarrow x = x(y) = \arcsin y$

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$x'(y) = (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$y'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Ví dụ :** Cho hàm số $y = tgx$

*) $y = y(x) = tgx \leftrightarrow x = x(y) = arctgy$

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}} = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$x'(y) = (arctgy)' = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$y'(x) = (arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

## g.)Đạo hàm của hàm cho theo tham số :

Cho hệ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, nếu khử được $t$ ta được

$$\Rightarrow \quad y = y(x) .$$

Công thức đạo hàm :

$$\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & ? & \\ \downarrow & & \\ x(t) & \longleftrightarrow & t \end{array}$$

## g.)Đạo hàm của hàm cho theo tham số :

Cho hệ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$$\Rightarrow \quad y = y(x) .$$

Công thức đạo hàm :

$$\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

$t_0$ là điểm tương ứng sao cho $x(t_0) = x_0$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

$\boxed{+}$

$$y = +\sqrt{1 - x^2}$$

$$y'(x) = \frac{-x}{+\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{y(x)}$$

$-$

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$y'(x) = -\frac{(-x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{-\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{y(x)}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t \longrightarrow y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \boxed{-\frac{x}{y}}$$

## h) Đạo hàm hàm ẩn :

*) Lấy đạo hàm hai vế của phương trình hàm ẩn theo biến $x$

*) Khi lấy đạo hàm , **coi y là hàm theo biến $x$ : $y = y(x)$** , biểu thức thu được chứa $y'(x)$

*) Từ biểu thức thu được tìm $y'(x)$ theo $y$ và $x$

**Ví dụ :**

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$2x + 2y \,.\, y'(x) = 0$$

$$y'(x) = \frac{-x}{y(x)} \boxed{= \frac{-x}{y}}$$

**Ví dụ :** Cho hàm $y = y(x)$ xác định từ phương trình $e^y + xy - e = 0$, tính giá trị $y'(x)$

Lấy đạo hàm hai vế $(e^y + xy - e)' = 0$ theo $x$

$$(e^{y(x)} + xy(x) - e)' = 0$$

$$e^{y(x)} y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0$$

$$(e^y + x) y' = -y$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{-y(x)}{e^{y(x)} + x}}$$

**i) Đạo hàm của** $u(x)^{v(x)}$ **được tính bằng cách đổi sang hàm mũ :**

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x).\ln u(x)}$$

**Ví dụ** : Cho hàm $y = x^x \quad (x > 0)$ . Tìm $y'(x)$

$$y = x^x = e^{x\ln x}, \quad y'(x) = (e^{x\ln x})' =$$

$$= e^{x\ln x}.(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

**Ví dụ :** Tính $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ với $y(x) = x^{\sin x}$

$$\boxed{y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$$

# Vi phân

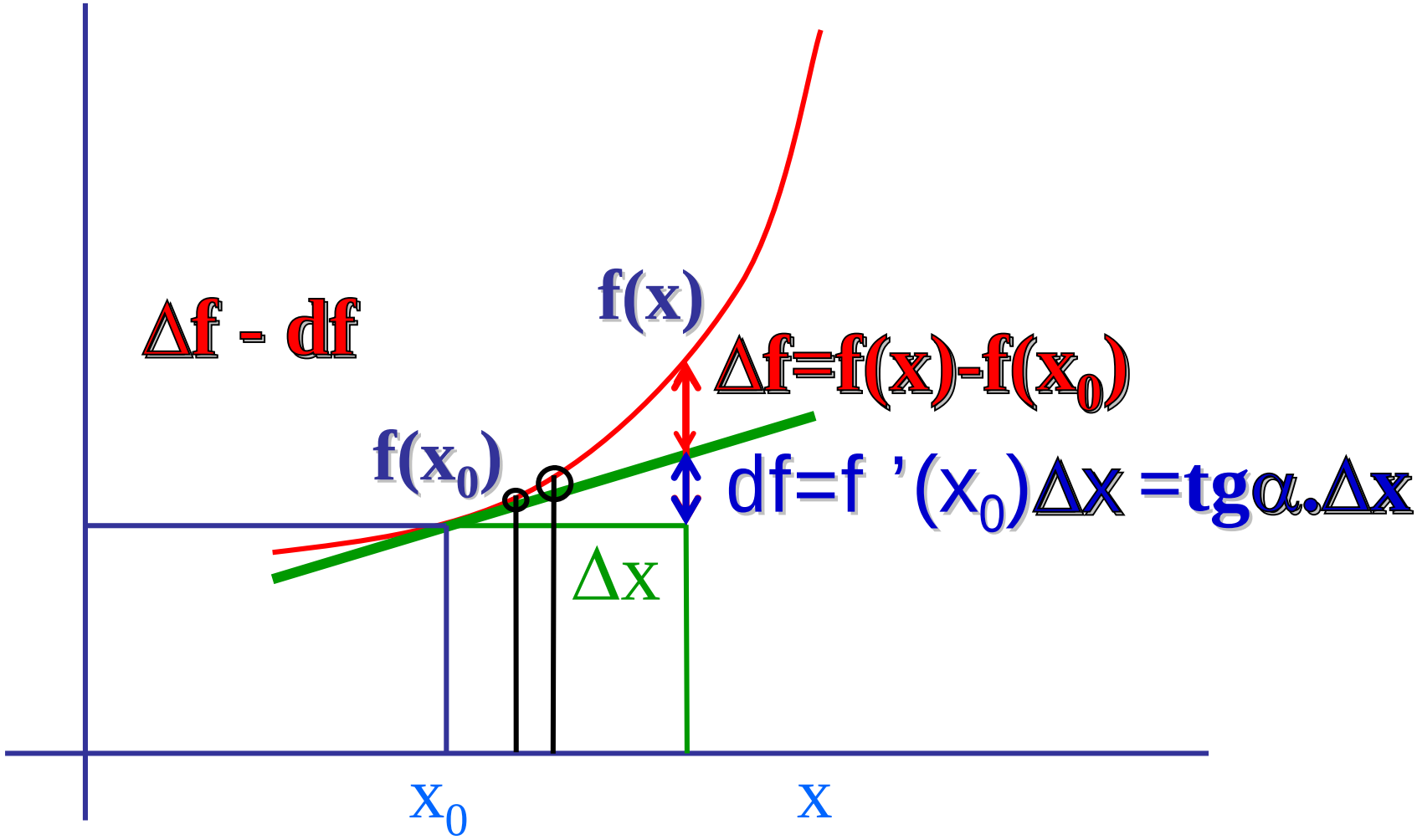
Hàm $f(x)$ gọi là **khả vi** tại điểm $x_0$ nếu nó có đạo hàm tại điểm đó

Biểu thức $f'(x_0)\,\Delta x = f'(x_0)\,dx$

**vi phân** của hàm tại $x_0$ và ký hiệu là $df(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}$$




$x \to x_0$: $\boxed{\Delta f \approx df}$

**2)** Các tính chất của vi phân suy ra từ tính chất của đạo hàm :

$$d(f+g) = df + dg$$

$$d(f.g) = gdf + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

$\neq 0$

**Tính bất biến của vi phân cấp 1 :**

Nếu $y = f(x)$ thì $dy = f'(x)dx$

Nếu $y = f(x)$ và $x = x(t) \rightarrow y = f(x(t))$ và có

$$dy = [f(x(t))]' dt = f'(x)\boxed{x'(t)dt} = f'(x)\boxed{dx}$$

## 3) Bảng các vi phân quan trọng :

a) $d(\sin x) = \cos x\, dx$

b) $d(\cos x) = -\sin x\, dx$

c) $d(tgx) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

d) $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} dx$

e) $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $d(\arccos x) = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

g) $d(arctgx) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

h) $d(e^x) = e^x dx$

i) $d(a^x) = a^x \ln a\, dx$

j) $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$

$$d(\sin 2x) = 2\cos 2x\ dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x\ dx$$

$$d(arctg\,3x) = \frac{3}{1+9x^2}\ dx$$

$$y = e^{3x+1} \qquad dy(x) = 3e^{3x+1}\ dx$$

$$dy(0) = 3e\ dx$$

$$d\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}\ dx$$

$$d(\cos^2 2x) = 2\cos 2x.(2)(-\sin 2x)dx$$

**Ví dụ :**

$$d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) = \cos 2x\ dx \quad \text{( sai khác hằng số )}$$

$$d(-\cos x) = \sin x\ dx$$

$$d(x^2) = 2x\,dx$$

$$d\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) = e^{-2x}\ dx$$

$$d\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}dx$$

$$d(\ln|x|) = \frac{1}{x}\,dx$$

$$d\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$d\left(\frac{-1}{\sin x}\right) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$