

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

BOÄMOÄN TOÄÄN ÖÖNG DUÖNG - ÑHBK

TOÄÄN 1 HK1 0708

- BAÖ 4: VCBEÜ- VCLÖN. LIEN TUÖC (SINH VIEN)

- TS. NGUYEN QUOC LAN (11/2007)

VOI CUNG BEU

Nai lööng $\alpha(x)$ – voi cung beu (VCB) khi $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

VCB cô ban ($x \rightarrow 0$): Lööng giai $\alpha(x) = \sin x, 1 - \cos x, \operatorname{tg} x$

Muõ In: $e^x - 1, \ln(1+x)$ Luỹ thõa: $(1+x)^\alpha - 1$. VD: $\sqrt{1+3x} - 1$

x_0 : Không quan trọng. VCB $x \rightarrow \infty$: $\frac{1}{x}$ VCB $x \rightarrow 1$: $\sin(x-1) \dots$

$\alpha(x), \beta(x)$ – VCB khi $x \rightarrow x_0$

$\alpha(x)$ VCB, $C(x)$ bõ chån

$\Rightarrow \alpha(x) \pm \beta(x), \alpha(x)\beta(x)$: VCB

$\Rightarrow C(x)\alpha(x)$: VCB

VD: $a / \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ $b / \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x}$ $c / \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}$

BT: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

SO SÁNH VOÃCUNG BEÙ

$\alpha(x), \beta(x)$ – VCB, $x \rightarrow x_0$ và $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \Rightarrow$ So sánh ñöôc

1/ $c = 0$: $\alpha(x)$ – VCB cấp cao so với $\beta(x)$: $\alpha(x) = o(\beta(x))$

Cách ñöôc khác: $\beta(x)$ – VCB cấp thấp hơn

2/ $c = \infty$: Ngược lại trường hợp $c = 0 \Rightarrow \beta(x) = o(\alpha(x))$

3/ $c \neq 0, c \neq \infty$: vô cùng bằng cấp

VCB cấp thấp: Chöù ít “thöù số 0” hơn. VD: $\sin^2 x, x^3$

Ãp dụng: So sánh 2 vô cùng beù x^m, x^n ($m, n > 0$) khi $x \rightarrow 0$

VD: So sánh VCB: $\sin x, 1 - \cos x, \operatorname{tg} x$

VOI CUNG BEI TONG NONG - (QUAN TRONG)

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - VCB tong nong khi } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

VCB loing giai: $\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0$

VCB muoi ln: $e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$

VCB luoi thoa (can): $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, x \rightarrow 0$ VD: $\sqrt[3]{1+2x} \sim \frac{2x}{3}$

VCB tong nong: Nong phep thay thoa soatong nong vao tích & thoa (nhong khong thay vao tong & hieu!)

VD: Tim hang soa C va α nei $\operatorname{tg} x - \sin x \sim Cx^\alpha, x \rightarrow 0$

DÙNG VOI CUNG BEU TINH GIOU HAI N

Ap dung: Dung voi cung beu tong nong tinh giou hai n

$$\alpha(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \alpha_1(x), \beta \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \beta_1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Tim lim: Coi thay VCB tong va TICH (THONG)

Nhong khong thay tuy tien VCB tong va TONG (HIEU)

VD: Tim 1/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2\text{tg}^2 x)}{x \sin x}$ 2/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{(e^{2x} - 1)\sin x}$

x coi thay $\rightarrow x_0$ bat ky VD: Tim $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1} \right)^x$

$\alpha \sim \beta$ & $\alpha_1 \sim \beta_1$ khi $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \alpha \pm \alpha_1 \sim \beta \pm \beta_1$

VD : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \text{tg} x}{x^3}$

QUY TẮC NGẮT BỒI VOÃ CUNG BÈU

α, β – VCB khác cấp $\Rightarrow \alpha + \beta$ tổng ãông VCB cấp thấp hơn

Quy tắc ngắn bồi VCB cấp cao: $\alpha(x), \beta(x)$ – tổng VCB khác cấp \Rightarrow
 $\lim \alpha/\beta = \lim$ (tỷ số hai VCB cấp thấp 1 của tử & mẫu)

VD: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) + 2x^3}{\ln(1 + x^2)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) + x^2 + 3\text{tg}^2 x}{\sin^3 x + 2x}$

Thay VCB tổng ãông vào tổng: VCB dạng lũy thừa & $\Sigma \equiv 0$ /

$$\begin{cases} f \sim \lambda x^\alpha, x \rightarrow a \\ g \sim \mu x^\beta, x \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow f + g \sim \lambda x^\alpha + \mu x^\beta \text{ iff } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \alpha = \beta \ \& \ \lambda + \mu \neq 0 \end{cases}$$

$$1 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \pm x}{x} \quad 2 / \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right]$$

VOÂCUNG LỒN – SO SÁNH VCL- NGẮT BỒ VCL

Hàm $y = f(x)$ – vô cực lớn (VCL) khi $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$

So sánh VCL: $f(x), g(x)$ – VCL khi $x \rightarrow x_0$ và \exists giới hạn f/g

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ $\left\{ \begin{array}{l} c \neq 0, \infty: f(x), g(x) \text{ – VCL cùng cấp} \\ c = 1: f, g \text{ – VCL tương đương : } f \sim g \\ c = \infty: f \text{ – VCL cấp cao hơn } g. \text{ Viết: } f \gg g \end{array} \right.$

VD: $3x^2 - 4x + 1 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 3x^2$ $a^x \underset{x \rightarrow \infty}{\gg} x^\alpha \underset{x \rightarrow \infty}{\gg} \log_\beta x \quad (a > 1, \alpha > 0)$

- Tổng vô cực lớn khác cấp tương đương VCL cấp cao nhất
- Thay VCL tương đương vào TÍCH (THÔNG) khi tính lim

KEÁT LUẬN

Vô cùng bé (chẳng hạn dạng $0/0 \dots$):

❖ Dạng tích (thông) \Rightarrow Thay các THỎA SỎI bằng biểu thức
tổng nhỏ & nhỏ dần

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} \quad \text{với } f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x) \dots$$

❖ Dạng tổng VCB khác cấp \Rightarrow Thay bằng VCB cấp thấp 1

❖ Dạng tổng VCB tổng quát $\sum f_i(x) \Rightarrow$ Thay mỗi $f_i(x)$ bằng VCB
tổng nhỏ dạng lũy thừa: $f_i(x) \sim C_i x^{\alpha_i} \ \& \ \sum C_i x^{\alpha_i} \neq 0$

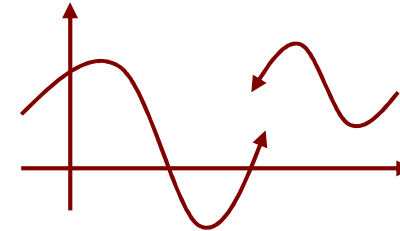
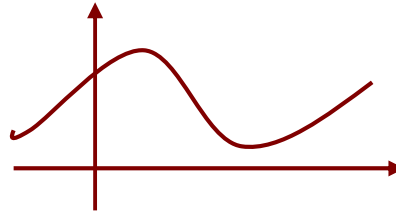
Giới hạn vô cùng bé (dạng $\infty/\infty \dots$): 1/ Thay tổng nhỏ vào
tích (thông) khi tìm lim 2/ Tổng VCL \sim VCL cấp cao nhất

HAM LIÊN TỤC

Ham $f(x)$ liên tục tại x_0 : Ham liên tục $/ [a, b] \Leftrightarrow (C)$: **không liên**

➤ $f(x)$ xác định tại x_0

➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



**Gián
đoạn!**

Ham số cấp (định nghĩa qua 1 biểu thức) liên tục \Leftrightarrow xác định

VD: Kiểm tra tính liên tục của các hàm số

$$a / y = \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 1} \quad b / y = \frac{\sin x}{x} \quad c / f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 1 - x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} : \text{ Không} \\ \text{số cấp!} \end{array}$$

VD: Tìm a để ham liên tục tại $x = 0$:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

LIÊN TỤC MỘT PHÍA

Tổng tối giới hạn 1 phía: Hàm ghép, chèn trừ tuyệt ... \Rightarrow **Khảo sát**

$f(x)$ liên tục trái tại x_0 khi xác định tại x_0 và

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$f(x_0^-)$

$f(x)$ liên tục phải tại x_0 khi xác định tại x_0 và

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$f(x_0^+)$

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow$ Liên tục trái & liên tục phải tại x_0

VD: **Khảo sát tính liên tục:** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ **Chú ý:** $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = ?$

PHÂN LOẠI NIÊM GIẢN NƠI

Hàm f xác định & giản nơi tại $x_0 \Leftrightarrow$ Không có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Hoặc $\exists \lim f \neq f(x_0)$, hoặc $\lim_- \neq \lim_+$, hoặc $\exists \bar{\lim} f$: 3 trường hợp!

$f(x)$ giản
nơi tại x_0

Loại 1:

▪ **Niem khöi nööc:** $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

▪ **Niem nhai:** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Böc nhai: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

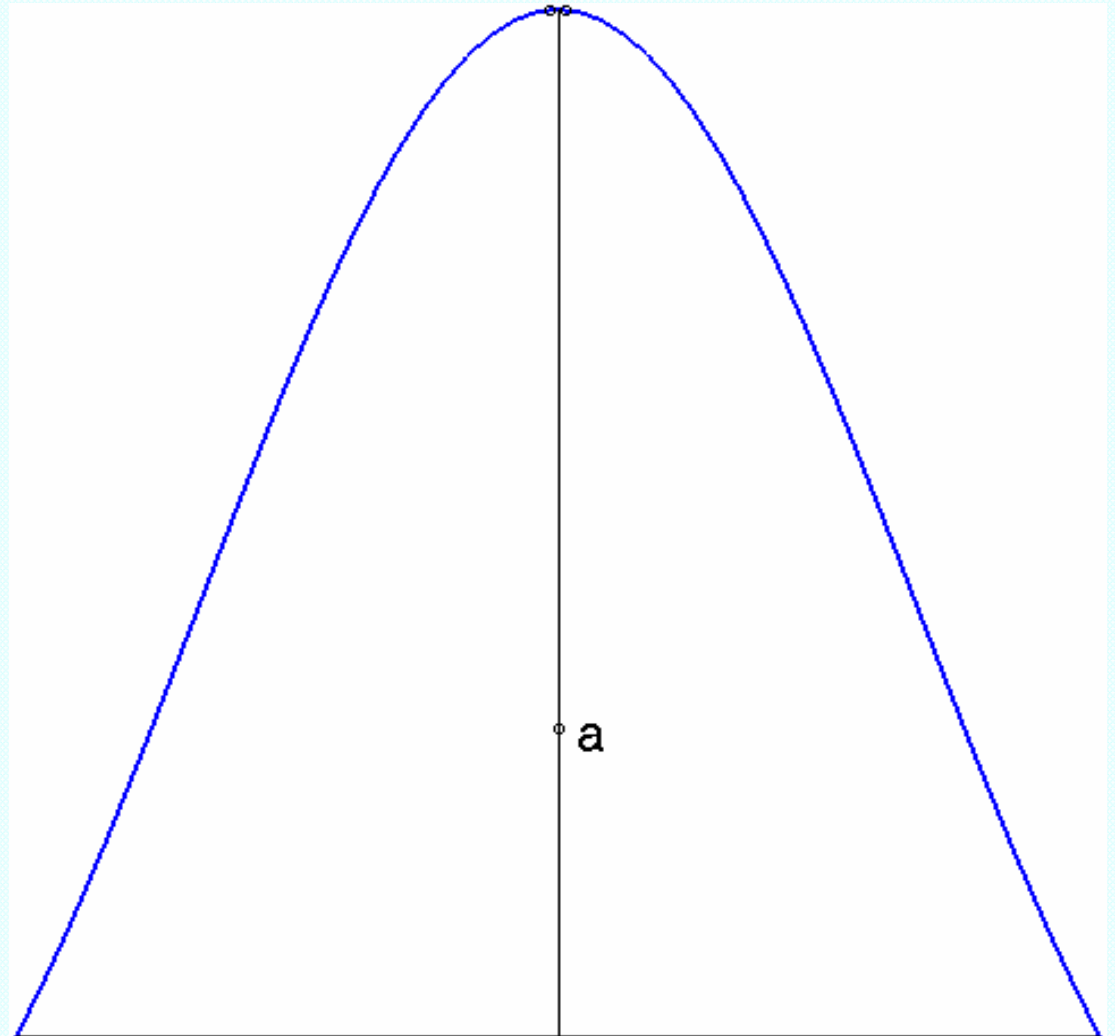
Loại 2: $\bar{\exists} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ hoặc $\bar{\exists} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

(Hoặc không tồn tại cả 2 giản 1 phía)

VÍ DỤ

Niệm $x_0 = 0$ có phải niếm giai ñoãn? Hãy phân loai

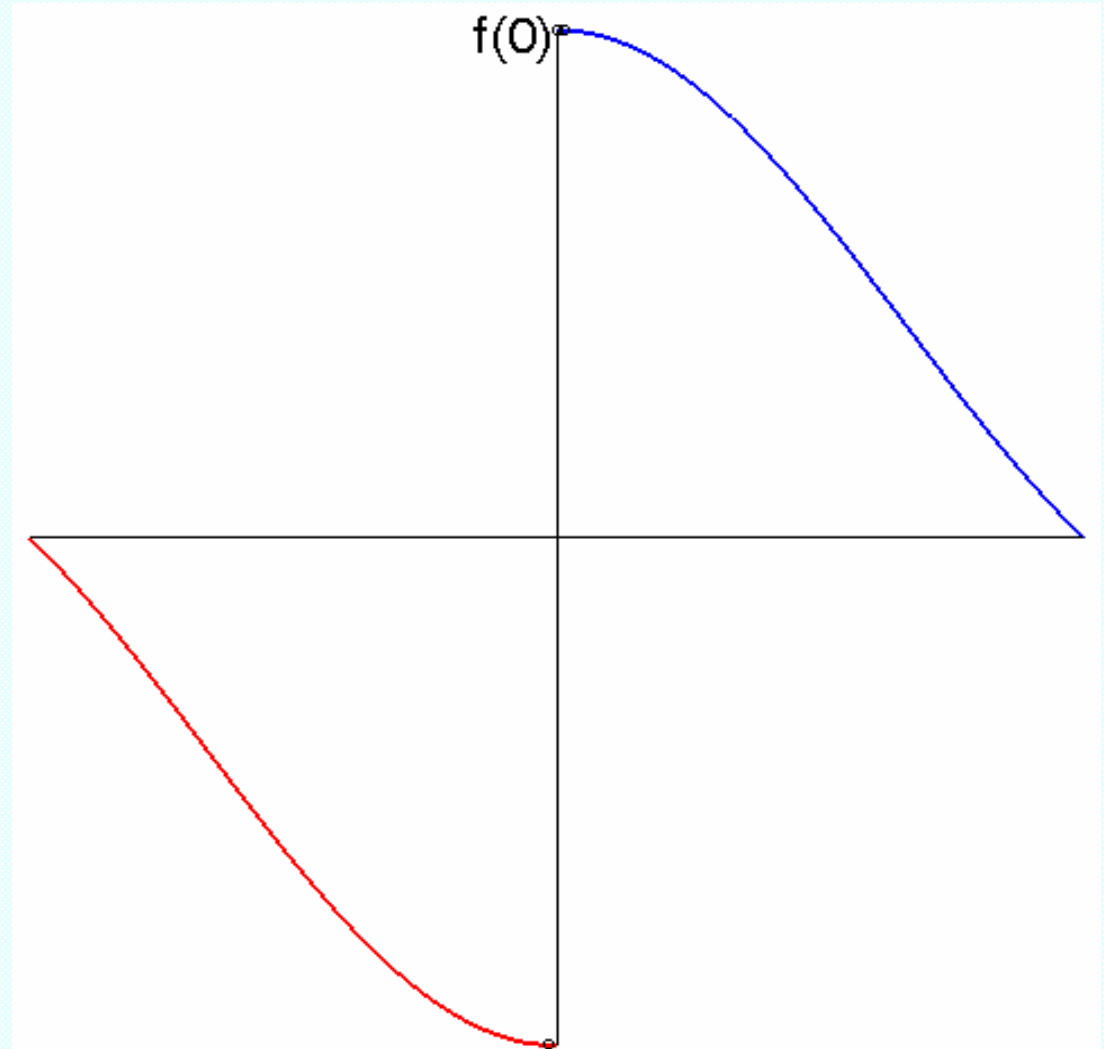
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$



VÍ DỤ

Niem $x_0 = 0$ có phải niem gian ñoan? Hay phan loai

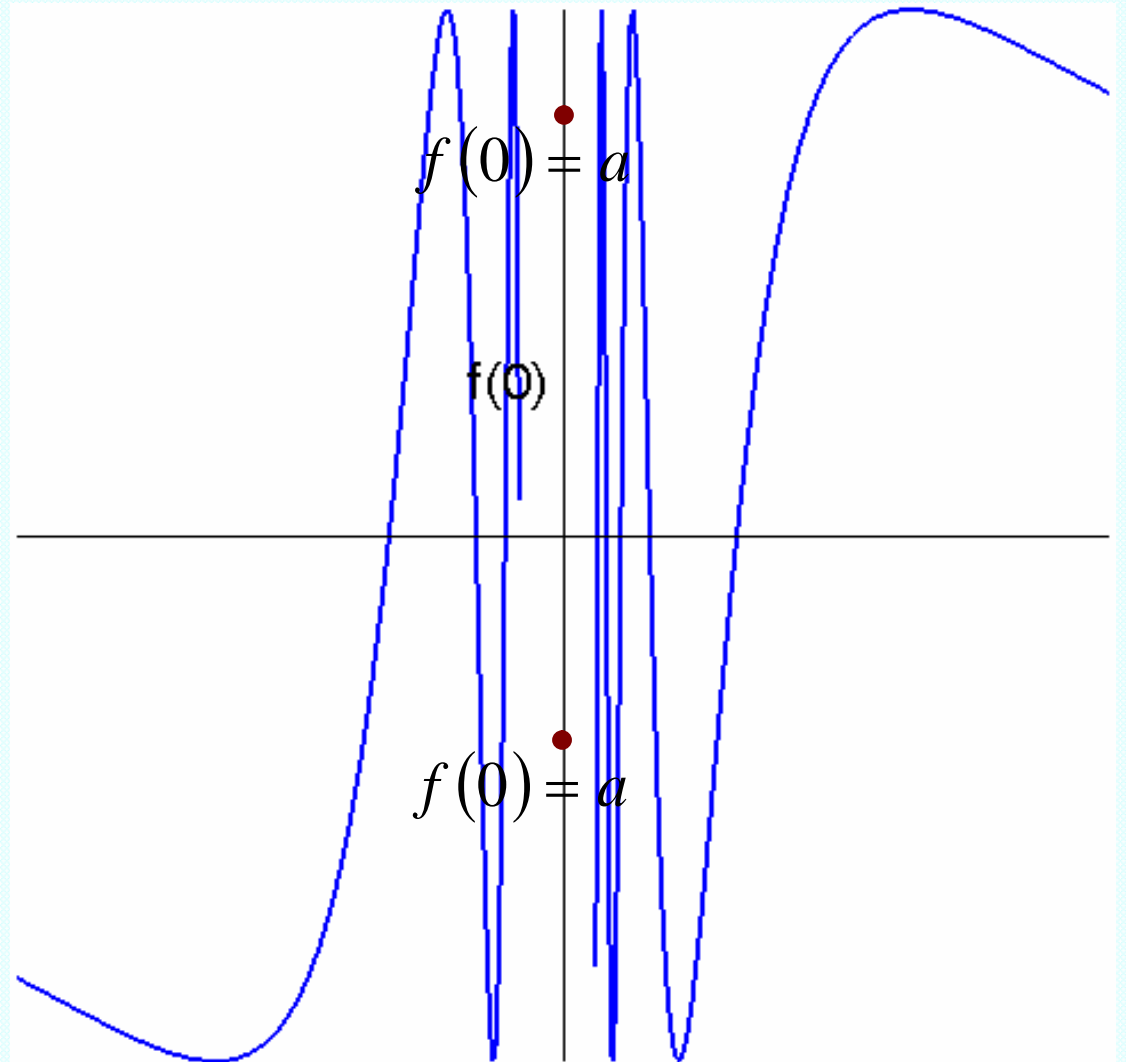
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$



VÍ DỤ

Biện luận tính chất liên tục của hàm số sau theo a

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$$



TÍNH CHẤT HÀM LIÊN TỤC TRÊN MỘT ĐOẠN

f bị chặn trên $[a, b]$: $\exists m, M$
& $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$

f đạt GTLN, BN trên $[a, b]$:
 $\exists x_0, x_1 \in [a, b]: f(x_0) = m, \dots$

Hàm $y = f(x)$ liên tục
trên đoạn $[a, b]$

Chú ý Không
thể thay đoạn
bằng khoảng!

f nhận mọi giá trị trung gian: \forall
 k & $GTBN \leq k \leq GTLN \Rightarrow \exists c$
 $\in [a, b]: f(c) = k$

(Hay sơ dụng) Định lý giá trị
hai dấu trái dấu: $f(a) \cdot f(b) < 0$
 $\Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$

VÍ DỤ

1/ Tìm a, b nếu hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 0 \\ ax + b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases} \iff f \text{ liên tục tại } 0 \text{ \& } 1$$

2/ Chứng minh phương trình sau có ít nhất 1 nghiệm âm

$$x^5 = 1 - x$$

$f(x)$ liên tục trên $(0, 3)$. Nếu $f(x) = 0$ có nghiệm trên (a, b) :

a/ $f(2)f(3) < 0, (a, b) = (2, 3)$ b/ $f(1)f(2) < 0, (a, b) = (1, 2)$

a/ Bao nhiêu hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}: f^2(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$

b/ Bao nhiêu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}: f^2(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$