

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

BOÄMOÄN TOÄÄN ÖÖNG DUÖÖNG - ÑHBK

TOÄÄN 1 HK1 0708

- BÄÄ 3: GIÖÖ HÄÄN HÄÄM SÖÄ (SINH VIEÄN)

- TS. NGUYEÄN QUÖÖC LÄÄN (10/2007)

NOÏ DUNG

- 1- YÙTÖÔNG GIÒÙ HAÏN HAM SOÁ
- 2- ÑÒNH NGHÓA “ÑÔN GIÀN” GIÒÙ HAÏN HAM SOÁ
- 3- ÑÒNH NGHÓA CHAÏT CHEÕGIÒÙ HAÏN HAM SOÁ
- 4- TÍNH CHAÏT GIÒÙ HAÏN
- 5- GIÒÙ HAÏN ÑAÏC BIEÏT
- 6- QUY TAÏC LOPITAN
- 7- GIÒÙ HAÏN KEÏP
- 8- GIÒÙ HAÏN THEO NGOÏN NGÖÕDAÏY. KHOÏNG GIÒÙ HAÏN

YÙTÖÔNG GIÖÙ HÄÏN

Hàm $y = f(x)$, M \times N D

$x_0 \Rightarrow$ Giá trị $f(x_0)$?

- $x_0 \in D \Rightarrow f(x_0)$: xác ñnh
- $x_0 \notin D \ \& \ f(x_0)$: không xác ñnh
- VD: $f(x) = \ln x \ \& \ x_0 = -1$
- $x_0 \notin D, f(x_0)$: "gần ñh" xác ñnh
- VD: $f(x) = \sin x / x \ \& \ x_0 = 0 \notin D$

Gtrò $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ quanh 0:

0.1000	0.8415
0.01000	0.9588
0.001000	0.9816
0.0001000	0.9896
0.00001000	0.9935

Töông töi:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, x_0 = 0$$

$$\frac{1}{x}, x_0 = \infty$$

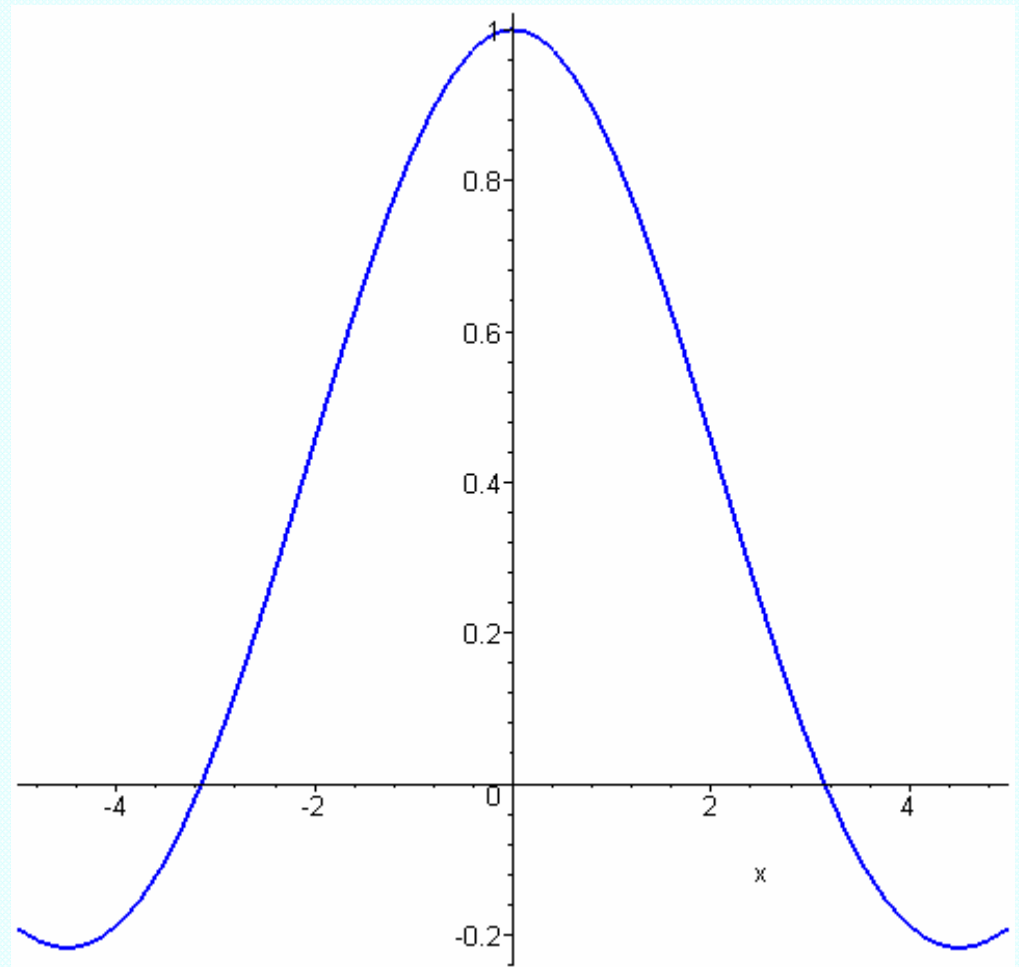
$$e^x, x_0 = -\infty \dots$$

MINH HOÀ HÌNH HOIC

Nhà toán học: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Chuyển đến căn $x_0 = 0$:

$f(0)$ không xác định, nhưng giới hạn của $f(x)$ lại "rất gần" 1 khi x "rất gần" 0 \rightarrow Nhà toán học liên tục. Có thể xem " $f(0)$ " = 1 ???



Cần công cụ xác định giới hạn hữu hạn " $f(x_0)$ " tại $x_0 \notin D$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

GIỚI HẠN HÀM SỐ – NGHĨA ĐƠN GIẢN

Cho hàm $y = f(x)$ xác định trong lân cận x_0 (có thể không xác định tại x_0 !). Hàm $f(x)$ có giới hạn $= L$ khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow$ Giá trị $f(x)$ “trở gần” L “đến mức” x_0 . Ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

VD: đoán (không chứng minh) giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, với $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

Ghi ý: Chú ý hàm $f(x)$ không xác định tại $x = 1$

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

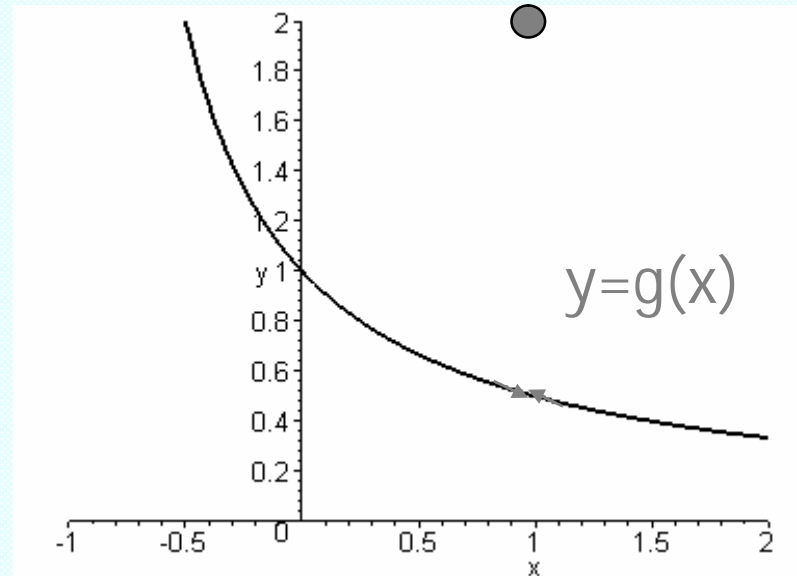
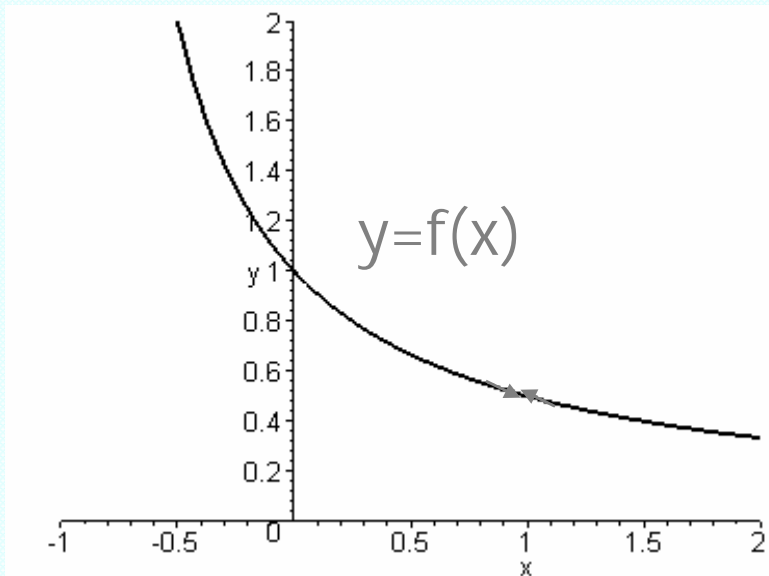
Tập giá trị, có thể phỏng đoán:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

GIAÙTRÒ TẠI ÑIỂM KHÔNG ANH HỒNG GIỜI HẠN

Hàm $g(x)$ sau (xác nh t i $x = 1$) có gi i h n nh $f(x)$ khi $x \rightarrow 1$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \text{ khi } x \neq 1 \\ 2 \text{ khi } x = 1 \end{cases}$$



Giá tr f t i x_0 (có hay không có) không nh h ng n $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

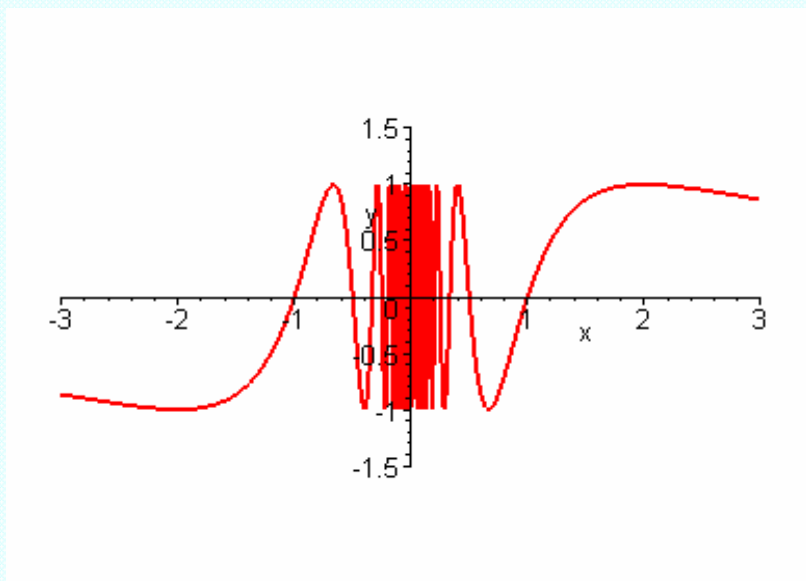
ỖOÀN - KHÔNG CHẮC CHẴN 100%!

Ví d : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$

G i ý: Tính $f(1), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{3}\right), f(0.1), f(0.01)$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0.1) = f(0.01) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} = 0 : \text{SAI!}$$

Tuy nhiên t **th hàm** $y = \sin \frac{\pi}{x}$ **c ng nh giá tr hàm t i**



$$x = \frac{2}{4k+1} \Rightarrow \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{x} = 1!$$

Có vô s giá tr x g n 0 tùy ý,
t i ó f = 0 l n f = 1. KL:
Gi i h n ang xét không \exists !

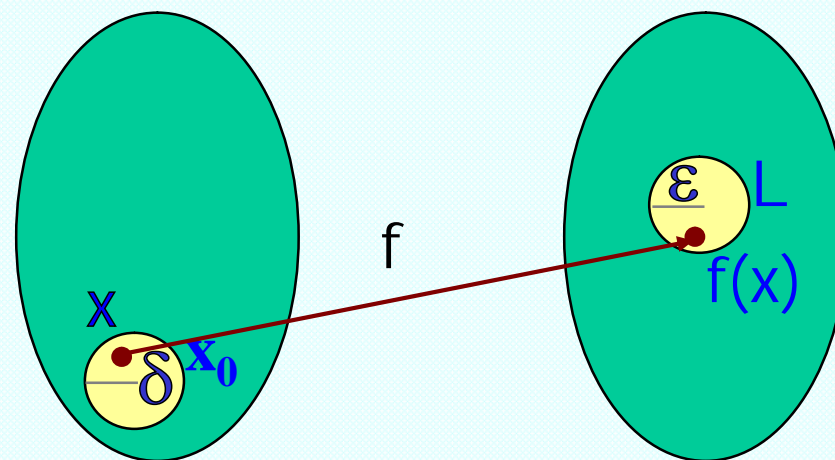
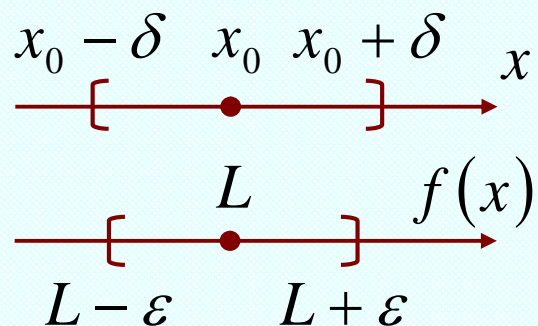
ĐỊNH NGHĨA CHẤT CHẴNG

Ngôn ngữ Gi i tích: i l ñng bi n thiên f “r t g n” l ñng g \Leftrightarrow
 $|f - g| \leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0. x$ “ g n” $x_0: \exists \delta > 0$ và xét $|x - x_0| < \delta$

$$\mathbf{N:} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Chú ý: Trong th c t , ñh ñgh a trên th ñng c áp d ñng
 ch ñng minh lý thuy t ch không s d ñng tìm gi i h n!

Minh h a hình h c:



VÍ DỤ

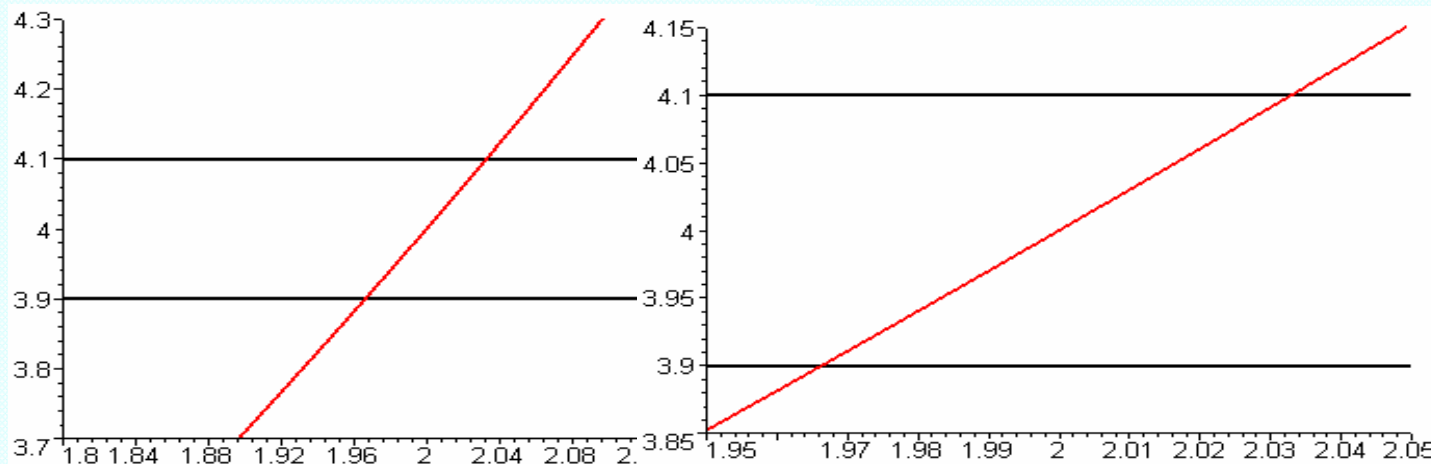
VD: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$ (*) **Tìm δ nh trong ngh a khi $\varepsilon = 0.01$**

Gi i: $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$, $x_0 = 1$, $L = 4 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{1}$: $|f(x) - L| = 2|x - 1|$

$\varepsilon = 0.01$: $|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < 0.005 \Rightarrow$ Chọn $\delta = 0.005$

VD: Gi i b ng th câu h i t ng t : $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$, $\varepsilon = 0.1$

Gi i: $|f(x) - 4| < 0.1 \Leftrightarrow 3.9 < f(x) < 4.1$. **V $y = f(x)$ & $y = 3.9, 4.1$**



$$1.97 < x < 2.03$$

$$\text{Vậy } |x - 2| < 0.03$$

$$\Rightarrow \delta = 0.03$$

GIỚI HẠN VÔ CÙNG – GIỚI HẠN TẠI VÔ CÙNG

Khi $f(x) \rightarrow \pm \infty$ (tức $L = \pm \infty$) hoặc $x \rightarrow \pm \infty$ (tức $x_0 = \pm \infty$):

Không thể xét hiệ $|f(x) - L|$ hay $|x - x_0| \Rightarrow$ Cần chú ý!

Chú ý: $\lim_{x \rightarrow \infty} A = \infty \Leftrightarrow A > M \forall M$ & $\lim_{x \rightarrow -\infty} B = -\infty \Leftrightarrow B < m \forall m$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M \exists \delta > 0 \forall x: \text{Nếu } |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Tốt nhất cho trường hợp $f(x) \rightarrow -\infty$: Cần viết $f(x) < m$!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x: \text{Nếu } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

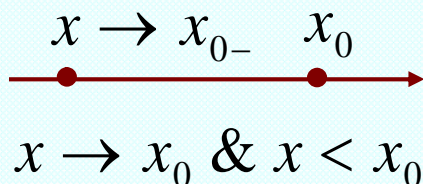
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M \exists A \forall x: \text{Nếu } x > A \Rightarrow f(x) > M$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ khi $x \rightarrow -\infty$ & $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ khi $x \rightarrow \pm \infty$: tốt nhất

GIỚI HẠN MỘT PHÍA

G. h n trái: $x \rightarrow x_0^- \Leftrightarrow x \rightarrow x_0 \ \& \ x < x_0$ (t c $x \rightarrow x_0$ t bên trái)

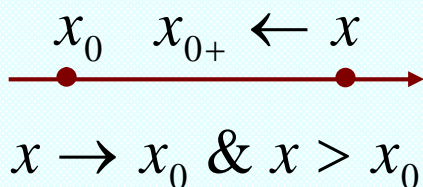
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_{0-}): \lim_{x \rightarrow x_0 \ \& \ x < x_0} f(x)$$

Minh h a: 

VD: Gi i h n trái $x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow x < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

G. h n ph i: $x \rightarrow x_0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow x_0 \ \& \ x > x_0$ (t c $x \rightarrow x_0$ t bên ph i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_{0+}): \lim_{x \rightarrow x_0 \ \& \ x > x_0} f(x)$$

Minh h a: 

M nh : $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists f(x_{0-}), f(x_{0+}) \ \& \ f(x_{0-}) = f(x_{0+})$

VD: Không t n t i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ vì $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

GIỚI HẠN TỔNG - HIỆU - TÍCH - THƯƠNG

Giới hạn tổng (hiệu, tích, thương) = Tổng (hiệu, tích, thương)

giới hạn: Cho c là hằng số và $f(x), g(x)$: hàm số có giới hạn

khi $x \rightarrow a$. Khi đó

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{if} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

VÍ DỤ

Cho hai hàm số

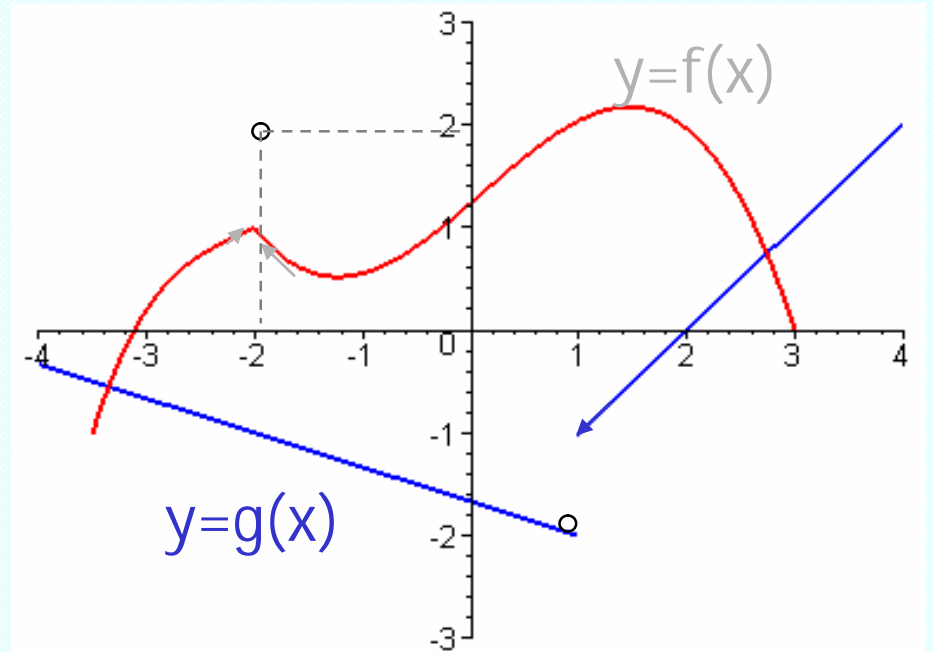
$y = f(x)$ và $y = g(x)$

a/ Các giới hạn sau liệu có tồn tại hay không:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

b/ Tính giá trị các giới hạn sau nếu chúng tồn tại

$$1/ \lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + 5g(x)] \quad 2/ \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)] \quad 3/ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$



Giải: a/ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$; Không $\exists \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ b/ 1/ -4. 2/ -3/: Không \exists

GIỚI HẠN HÀM SỐ CẤP CƠ BẢN

Cho $n \in \mathbb{N}$ và hằng số a, c . Nếu hàm $f(x)$ có giới hạn tại a :

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \forall a \quad 8. \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{nếu } n : \text{chẵn, } a \text{ phải } > 0)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (\text{nếu } n : \text{chẵn, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ phải } > 0)$$

Nguyên tắc thay vào trực tiếp: Nếu $f(x)$ – hàm biến đổi liên tục thì

$$\text{công thức của các hàm cơ bản} \quad \& \quad a \in D_f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Tính chất trên là tính liên tục của $f(x)$ (xem xét riêng bài 3)

VÍ DỤ

Giá trị hàm mũ, lu thừa khi $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & (\alpha > 0) \\ 0 & (\alpha < 0) \end{cases}$

$$a > 1: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & x \rightarrow \infty \\ 0, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad 0 < a < 1: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a^x = \begin{cases} 0, & x \rightarrow \infty \\ \infty, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

VD: Tìm các giá trị a/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2+2}$ b/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-3x+2}$

Giá trị: a/ Thay vào trực tiếp (biểu thức có nghĩa, xác định): $\frac{1}{3}$

b/ Không thể thay vào trực tiếp (biểu thức có nghĩa không thể!):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x-2}{x-2} = 3$$

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+2^x}{2+2^x}: \quad x \rightarrow -\infty: L = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}; \quad x \rightarrow \infty: L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/2)^x+1}{2(1/2)^x+1} = 1$$

GIỚI HẠN HÀM SỐ- NGOÀI NGỒI ĐÂY (PHỔ THÔNG)

Ngôi ngoài "đây":

$$\forall \{t_n\}: [t_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(t_n) \rightarrow a]$$

Không có giới hạn tại x_0 (Thẳng thẳng chứng minh không \exists lim):

$$\left[\begin{array}{l} \exists \{t_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = x_0 \ \& \ \bar{\exists} \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \\ \exists \{y_n\}, \{z_n\}: y_n, z_n \rightarrow x_0 \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \end{array} \right.$$

VD: Chứng minh không có giới hạn: $a / \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ $b / \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$

a/ 2 dãy: $y_n = n\pi \rightarrow \infty$ & $z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow \infty$ b/ 2 dãy ???

Nhận xét: Tổng cộng dãy con chứng minh dãy phân kỳ

Những nhận xét với ví dụ sau. Chứng minh không $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$

GIỚI HẠN NÀC BIẾT: KHÖUDAING VOÄÑÖNH

Löông giac

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Muö ln:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Daing 1^∞ : Söüduing soäe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

VD: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-2}\right)^{3x+2}$

Caich 1: Dung soäe. Caich 2: Laáy ln 2 veä

Kyöthuaät:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u^v (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{v\alpha} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v\alpha} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(u-1)}$$

QUY TẮC LOPITAN: KHỔU ĐÃNG VOÃ ÑỒNH

Đãđng voã ñồnh: $0/0, \infty/\infty, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0 \rightarrow$ Biếđ ñổi về ñồnh

Phõõng phãp: Nguyẽđ tãc Lopitan, voã cõng beũ õõõ ñõõõ

Nguyẽđ tãc Lopitan: Tĩđ giõũ hãĩ (tõn tãĩ) đãđng $0/0, \infty/\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

VD : a/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$ b/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ c/ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} \quad (a > 1, \alpha > 0)$

Chũũyũ: Ñõn giãĩn hoãũ biếũ thõc

VD: Tĩđ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right]$$

Khõõng đũng ñõõc Lopitan khi giõũ hãĩ khõõng \exists .

VD : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

GIỚI HẠN KÈP

Giới hạn kép

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall \quad |x - x_0| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$$

Hệ quả

$$\begin{cases} 0 \leq |f(x)| \leq h(x) \quad \forall \quad |x - x_0| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

VD: Tìm các giới hạn: a/ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ b/ $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x}$ c/ $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}$

Giải: a/ Không \exists b/ Kẹp c/ Nhớ biết: b/ $0 \leq \left| x \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$

VD: Chứng minh $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ c/ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/x)}{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \cdot \pi$