

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trào i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

BOÄMÔN TOÄN ÖÖNG DUÖNG - ÑHBK

TOÄN 1 – HOÖC KYÖ1 0708

BAÖ 1: DAÖY SOÁ GIÖU HAÖN DAÖY SOÁ(SV)

- TS. NGUYEÖN QUÖC LAÖN (9/2007)

SGK: Giaöi tích ham 1 bien – BM Toän Ööhng Duöhng (ÑHBK)

Giaöi tích ham 1 bien – NoäCoöhng Khanh

Toän hoöh cao cap – Tap hai – Nguyeöh Nöhnh Trí (chueibien)

NOÏ DUNG

- 1- KHÀÙ NIỆM DAỖ SỐ
- 2- DAỖ TẦNG, GIẢM, BÒ CHẶN, DAỖ CON
- 3- GIỜÙ HẢIN DAỖ SỐ
- 4- TÍNH CHẤT GIỜÙ HẢIN
- 5- TIÊU CHUẨN WEIRSTRASS: DAỖ ÑÔN ÑIEÙ, BÒ CHẶN
- 6- GIỜÙ HẢIN KẾP

KHAI NIỆM GIỚI HẠN (PHỔ THÔNG – ĐẠI HỌC)

Giới hạn: Khai niệm cốt bản của Giải tích. “Không có giới hạn thì giải tích không tồn tại. Mọi khái niệm của giải tích đều là giới hạn theo một nghĩa nào đó”

Ñạo hàm (theo ñịnh nghĩa): giới hạn $\Delta y / \Delta x$

Ồng dưng hình học: Hsgoic tiếp tuyến = lim Hsgoic ñẩy cung

Ồng dưng vật lý: Vận tốc tức thời = lim Vận tốc trung bình

Ñoại ñông cong = lim ñoại ñông gấp khúc nối tiếp

Diện tích hình thang cong (tích phân) = lim S hình chõnha

Giới hạn: $\left[\begin{array}{l} \text{Giới hạn ñẩy số} \\ \text{Giới hạn hàm số} \end{array} \right.$

DAÏY SỐ THỜI

Tập hợp vô hạn các số thực \mathbb{R} dạng số 1 đến ∞ : $x_1, x_2 \dots x_n \dots$

\Rightarrow Dãy số $\{x_n\}_{n \geq 1}$ (hoặc từ 0 đến ∞ : $x_0, x_1 \dots x_n \dots \rightarrow \{x_n\}_{n \geq 0}$)

VD: Dãy số nguyên dương: 1, 2, 3, 4 ... Dãy số chẵn: 2, 4, 6 ...

Câu hỏi: Tìm số hạng cuối cùng của 1 dãy số?

Thông thường, dãy số thực xác định theo 1 công thức tổng quát dành cho số hạng thời

VD: Dãy $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n \geq 1} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots \frac{n}{n+1} \dots \right\}$

$\{x_n\} = \{(-1)^n n\}_{n \geq 0} \rightarrow \{0, -1, 2 \dots (-1)^{n-1} (n-1) \dots\} \rightarrow x_{n-1}$: số hạng thời n của $\{x_n\}_{n \geq 0}$!

CÔNG THỨC TỔNG QUÁT – SỐ HẰNG THỜI

1/ Dãy hàng 1, 1 ... 1 ...: Hữu hạn giới & vô hạn phần tử

2/ Dãy các số nguyên tố 1, 2, 3, 5 ... : Công thức tổng quát?

Có thể xem dãy số $\{x_n\}$ với số hạng tổng quát: $x_n = f(n)$ nhờ hàm số tập số nguyên dương $N^* \rightarrow R$.

VD: Dãy số chính phương 1, 4, 9, 16 ... $\Rightarrow x_n = n^2 \Rightarrow f(x) = x^2$

VD: Tìm số hạng tổng quát (số hạng thời) của các dãy $\{x_n\}_{n \geq 1}$:

$a / \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $b / \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ $c / 1, 3, 5, \dots$ Maple: `> n^2 $n = 1..5;`

NS: $a / \frac{1}{2^n}$ $b / (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ $c / 2n-1$ `> array([[n, n^2] $ n = 1 .. 5]);`

DAÏY TĂNG - GIẢM: ÑÔN ÑIEÛ

$\{x_n\}$ TĂNG: $x_n \leq x_{n+1} \forall n \geq 1$. Tổng quát: $x_n \leq x_{n+1} \forall n \geq N_0$

VD: $a/x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$: chöa TÖNG \rightarrow nên xét HIỆU $x_{n+1} - x_n$

$b/x_n = \frac{2n-3}{3n-4}$: bthöc giöng HÀM SỐ \rightarrow xét $f(x) = \frac{2x-3}{3x-4}$ & tính f' !

$\{x_n\}$ GIẢM: $x_n \geq x_{n+1} \forall n \geq 1$. Tổng quát: $x_n \geq x_{n+1} \forall n \geq N_0$

$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right), n \geq 2$: döng, dạng TÍCH \rightarrow Xét THÖÔNG $\frac{x_{n+1}}{x_n}$

DAÏY $\{x_n\}$ LUÔN tăng hoặc LUÔN giảm (tö N_0 nào ñö): daÏy ÑÔN ÑIEÛ

DAÏY BÒ CHAÏN - DAÏY CON

$\{x_n\}$ bò chaïn trên: $x_n \leq M \forall n \geq 1$. Tổng quát: $x_n \leq M \forall n \geq N_0$

$\{x_n\}$ bò chaïn dõõu: $x_n \geq m \forall n \geq 1$. Tổng quát: $x_n \geq m \forall n \geq N_0$

DaÏy bò chaïn trên laïn dõõu: gõii chung bò chaïn $\Rightarrow m \leq x_n \leq M$

VD: Xét tính bò chaïn của các daÏy $a / \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ $b / \{3^n\}$ $c / \{(-1)^n n\}$

a/ Bò chaïn. Trên: 1, Dõõu: 0. b/ Dõõu: 0. c/ K0 bò chaïn trên, dõõu

$\{x_n\} \Rightarrow$ DaÏy con $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}, \dots\}, n_1 < \dots < n_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$

VD: DaÏy $\left\{ \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\} \rightarrow$ DaÏy con $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots \right\} : \uparrow$ & $\left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \dots \right\} : \downarrow$

Chùyü TõõdaÏy $\{x_n\} \rightarrow$ Hay xét 2 daÏy con $\{x_{2n-1}\}$ & $\{x_{2n}\}$

GIỚI HẠN DÃY SỐ HÌNH NGHÓA "DEÃCHÒU"

Lập bảng giá trị 2 dãy số sau. Quan sát và rút ra kết luận

$$a / x_n = \frac{n}{n+1} \quad b / y_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

5	0.835	-0.835
10	0.910	0.910
15	0.940	-0.940
20	0.950	0.950
25	0.960	-0.960
30	0.970	0.970

Nhận xét: n tăng, x_n nên gần 1 còn y_n nên gần $\pm 1 \Rightarrow$ Khi $n \rightarrow \infty$: Giá trị $x_n \approx 1$, còn y_n **KHÔNG** nên gần giá trị cụ thể nào!

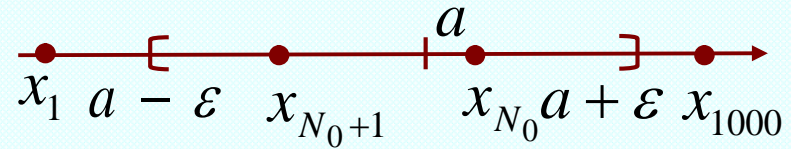
Hình nghĩa ("deãchòu"): Dãy $\{x_n\}$ có giới hạn bằng $a \Leftrightarrow x_n \approx a$ khi n đủ lớn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3 n + n^2}{2n^2 - n} : \quad a / 0 \quad b / 1/2 \\ c / 1 \quad d / \infty$$

Mình: n đủ lớn ($n = 1000$) & MTBTui $\rightarrow 0.50025 \rightarrow (b)$!

GIỚI HẠN DÃY SỐ NÈNH NGHĨA CHẤT CHẾ

Toàn hức (ngôn ngữ $\varepsilon - N_0$):



$$x_n \text{ "rất gần" } a, n \text{ đủ lớn} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_0: |x_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N_0$$

Đãỹ $\{x_n\}$ hoã tũ về $a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: hũũ hãĩ

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: |x_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0: a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon \forall n \geq N_0$$

Cũ ghãĩ: Hoã tũ. K0 cũ ghãĩ (hoãc $\lim = \infty$): phãĩ kũũ

VD: Xũũ đãỹ $\{n/(n + 1)\}$ a/ "Nũũ" $\lim x_n$

b/ Vũũ \lim vũũ nũũ & $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3} \Rightarrow N_0 = ?$

c/ Chũũ minh chãĩ chũũ(a)

"Nũũ" $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon = 10^{-1}$$

$$\Rightarrow n \geq N_0 = ?$$

GIỚI HẠN VOÃNG – DÃY PHÃN KỸ

Giới hạn = $\pm\infty$ (vãn lã phãn kỹ): Không thể xet $|x_n - a|$!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \text{ lớn bất kỳ } \exists N_0 \in \mathbb{N} : x_n > M \quad \forall n \geq N_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \text{ (âm) tùy ý } \exists N_0 \in \mathbb{N} : x_n < M \quad \forall n \geq N_0$$

Định nghĩa $\{x_n\}$ phãn kỹ: Phủ định (logic) mệnh đề hoã tũ

Hoã tũ:

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \text{ luôn } \exists N_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$

Phãn kỹ

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 : \forall N_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq N_0 \text{ ã } |x_n - a| \geq \varepsilon$$

Thức teã tìm giới hạn: Ít dung cách chứng minh = ã định nghĩa!

TÍNH CHẤT GIỚI HẠN

lim tổng (hiệu, tích, thương, căn v.v...) = Tổng (hiệu ...) lim

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (\text{ÑK} : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \quad (\text{ÑK} : x_n \geq 0 \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0) \end{cases}$$

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \text{Mỗi dãy con của } \{x_n\} \text{ đều } \rightarrow a: \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

Đãy $\{x_n\}$ phân kỳ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ một dãy con phân kỳ của } \{x_n\} \\ \exists \text{ hai dãy con hội tới giới hạn } \neq \text{nhau} \end{array} \right.$

VD: Chọn toàn dãy $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ phân kỳ

GIỚI HẠN CƠ BẢN

Luỹ thừa: $\begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty \\ \alpha < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0 \end{cases}$ **Hàm mũ** $\begin{cases} a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \\ 0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \end{cases}$

$a / \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ $b / \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $c / \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ & $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

VD: (Tổng cấp số nhân) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$ **KQ:** $\frac{1}{1-1/2} = 2$

Tổng quát: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$ **Hdẫn:** $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Số e: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ & $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ **Hay gặp:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

NGUYÊN TẮC TÍNH GIỚI HẠN

Biến đổi biểu thức cần tính lim về giới hạn cơ bản & thay vào

VD: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n - 2^n}{4^n + 2 \cdot 5^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

Giaû: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left[2 + 1/n^2 \right]}{n^2 \left[1 - 1/n^2 \right]} = \frac{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n - 2^n}{4^n + 2 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left[3 - (2/5)^n \right]}{5^n \left[(4/5)^n + 2 \right]} = \frac{3}{2}$$

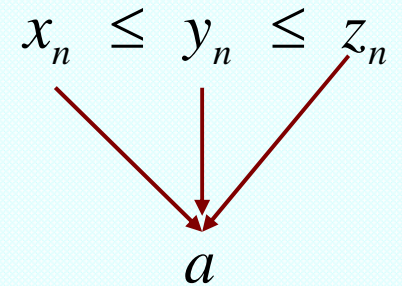
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1 + \sqrt{1-1/n})} = 0$$

Thức tế $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$: Giới hạn hàm \rightarrow Lôpital ...

GIỚI HẠN KẸP

Cho 3 dãy $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$

$$\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n & \forall n \geq N_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ \& } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$



Hệ quả (hay bổ đề): $0 \leq |x_n| \leq y_n \quad \forall n \text{ \& } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

VD: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1000}{n} \right)^n$ $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{n \cdot n \dots n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$

$0 \leq \left| \frac{n \sin n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0$ **Với $n \geq 2000$:** $0 < \left(\frac{1000}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0$

VD: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ **Co&i:** $1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \dots 1} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \dots + 1}{n} \rightarrow 1$

TIÊU CHUẨN WEIRSTRASS

Chứng minh dãy hội tụ → Hay dùng: Tính dồn nều & bờ chẵn

Tiêu chuẩn Weirstrass: Dãy tăng & chẵn trên thì hội tụ
Dãy giảm & chẵn dều thì hội tụ

VD: Chứng minh tồn tại giới hạn (sốe) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Giải: Dãy tăng: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$

Bất Cođi: $\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot 1 \leq \frac{(1+1/n) + \dots + 1}{n+1} = \frac{n(1+1/n) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

Bờ chẵn trên: Xem SGK, Nổa Công Khanh, trang 18 – 19

TOÀNG KEÁT

Các kỹ thuật chứng minh dãy hội tụ

- Bằng ñịnh nghĩa: Tìm giá trị $a = \lim x_n$. Giá trị $|x_n - a| \leq \varepsilon$
- Tính giới hạn: Ñưa về biểu thức theo các giới hạn cơ bản
- Chặn x_n từ 2 phía \Rightarrow Tính chất 3 dãy kẹp
- Chứng minh dãy tăng & chặn trên (giảm & chặn dưới)

Chứng minh dãy phân kỳ: Chæ ra 2 dãy con có lim khác nhau hoặc tồn tại một dãy con không có giới hạn

Maple: `>limit(..., n=infinity)`; VD: `limit(n/(n+1), n=infinity)`

BT: Sách giáo khoa & Bài sung (xem trên web)