CHÖÔNG 2

GIAI GAN ÑUNG PHÖÔNG TRÌNH PHI TUYEN

I. ÑAT BAI TOAN :

Bai toan : tìm nghiem gan ñung cua phöông trình

$$f(x) = 0$$

vôi f(x) la ham lien tuc tren khoang ñong [a, b] hay khoang môi (a,b).

1. Khoang cach ly nghiem

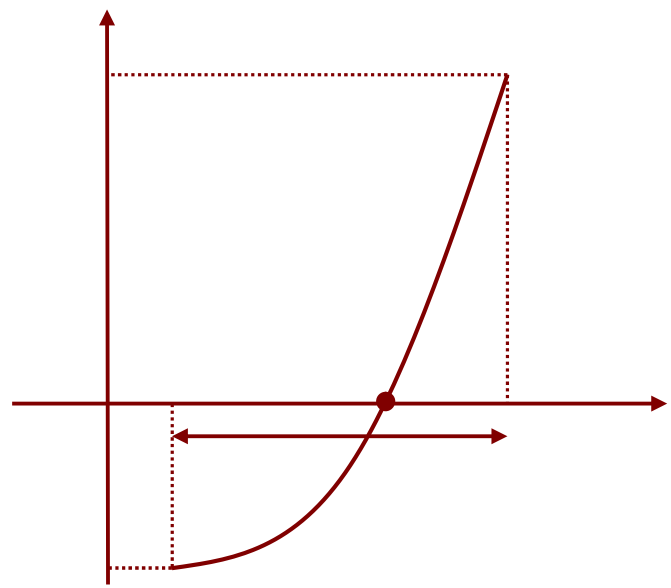
Khoang ñong hay môi tren ño ton tai duy nhat nghiem cua phöông trình goi la khoang cach ly nghiem

Ñònh ly :

Neu ham f lien tuc tren ñoan [a,b] thoa ñieu kien f(a) f(b) < 0 thì phöông trình f(x) = 0 co nghiem tren [a,b].
Neu ham f ñôn ñieu thì nghiem la duy nhat.

ÑK ñu: [a, b] la KCLN cua pt khi

- f(a) f(b) < 0
- Ñao ham f' khong ñoi dau tren ñoan [a,b]



Ví du :

Tìm cac khoang cach ly nghiem cua pt

$$f(x) = x^5 + x - 12 = 0$$

Giai :

Ta co $f(1) = -10, f(2) = 22$

$$\Rightarrow f(1)\ \ f(2) < 0$$

Mat khac

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \quad \forall x$$

f ham ñôn ñieu tang nen pt co duy nhat nghiem

Vay khoang cach ly nghiem la (1,2)

Ví du :

Tìm cac khoang cach ly nghiem cua pt

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

giai :

Ta lap bang gia trò tai cac ñiem ñac biet

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-1	3	1	-1	3	+

Nhìn vao bang ta thay pt co nghiem trong cac khoang (-2, -1) (0, 1) (1,2)

Vì pt bac 3 co toi ña 3 nghiem, nen cac khoang cach ly nghiem la : (-2,-1) (0,1) (1,2)

Bai tap :

1. Tìm cac khoang cach ly nghiem cua pt

$$f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$$

2. Tìm cac khoang cach ly nghiem cua pt

$$f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x + 1$$

Giai

1. $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

$f'(x) = e^x - 2x + 3$

Ta lap bang gia trò tai cac ñiem ñac biet

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-	-	-	+	+	+

Nhan xet : $f'(x) > 0, \forall x \in [0,1]$.

Vay khoang cach ly nghiem (0,1)

2. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = \cos x - x\sin x - 4x + 3$

Ta lap bang gia trò tai cac ñiem ñac biet

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-	-	+	+	-	-

Nhan xet :

$f'(x) < 0 \ \forall x \in [1,2]$,

$f'(x) > 0 \ \forall x \in [-1,0]$

Vay cac khoang cach ly nghiem : (-1. 0), (1,2)

2. Cach giai gan ñung pt f(x) = 0

- B1: tìm tat ca cac khoang cach ly nghiem

- B2: trong töng khoang cach ly nghiem, tìm nghiem gan ñung cua phöông trình

3. Cong thöc sai so tong quat :

Ñònh ly :

Gia sö f(x) lien tuc tren [a,b], kha vi tren (a,b)
Neu x* , x la nghiem gan ñung va nghiem
chính xac cua phöông trình va

$$|f'(x)| \geq m > 0, \ \forall x \in (a,b)$$

thì sai so ñöôc ñanh gia theo cong thöc :

$$\boxed{|x^* - x| \leq |f(x^*)| / m}$$

Ví du : Xet phöông trình

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$$

tren khoang [-2, -1]

Tính sai so neu chon nghiem $x^* = -1.37$

Giai

$$f'(x) = 3x^2 - 10x$$

Ta co $|f'(x)| = |x|\,|3x-10| = -x(10-3x),\ \forall x \in [-2,-1]$

Vay $|f'(x)| \geq 13 = m,\ \forall x \in [-2,-1]$

Sai so

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)|/m \approx 0.0034$$

Ghi nhô : sai so luon lam tron len

Ví duï : Xeùt phöông trình

$$f(x) = 5x + \sqrt[7]{x} - 24 = 0$$

treân khoaûng [4,5]

Tính sai soá neáu choïn nghieäm x* = 4.9

Giaûi

$$f'(x) = 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

=> $$|f'(x)| \geq 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{5^6}} = m, \ \forall x \in [4,5]$$

Sai soá

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)|/m \approx 0.3485$$

4. Cac phöông phap giai gan ñung

- Phöông phap chia ñoi
- Phöông phap lap ñôn
- Phöông phap lap Newton

II. Phöông Phap Chia Ñoi

Xet phöông trình $f(x) = 0$ co nghiem chính xac x trong khoang cach ly nghiem [a,b] va $f(a)f(b) < 0$.

1. Ñat $a_o = a$, $b_o = b$

Chon x_o la ñiem giöa cua [a,b]

Ta co $x_o = (a_0+b_0) / 2$, $d_0=b_o-a_o=b-a$

Neu $f(x_o) = 0$ thì x_o la nghiem $\rightarrow$ xong

2. Neu

- $f(a_o)f(x_o) < 0$: ñat $a_1 = a_o$, $b_1 = x_o$
- $f(x_o)f(b_o) < 0$: ñat $a_1 = x_o$, $b_1 = b_o$

Ta thu ñöôc $[a_1, b_1] \subseteq [a_o, b_o]$

$$x_1 = (a_1+b_1) / 2,\ d_1 = b_1-a_1 = (b-a)/2$$

3. Tiep tuc qua trình chia ñoi nhö vay ñen n lan ta ñöôc

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}],\ d_n = b_n-a_n = (b-a)/2^n$$

$$x_n = (a_n+b_n) / 2,\ a_n \le x_n \le b_n,\ a_n \le x \le b_n$$

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

Ta co

$\{a_n\}$ day tang va bò chan tren (<=b)

$\{b_n\}$ day giam va bì chan dööi (>=a)

nen chung hoi tu

Vì $b_n - a_n = (b-a)/2^n$, nen $\lim a_n = \lim b_n$

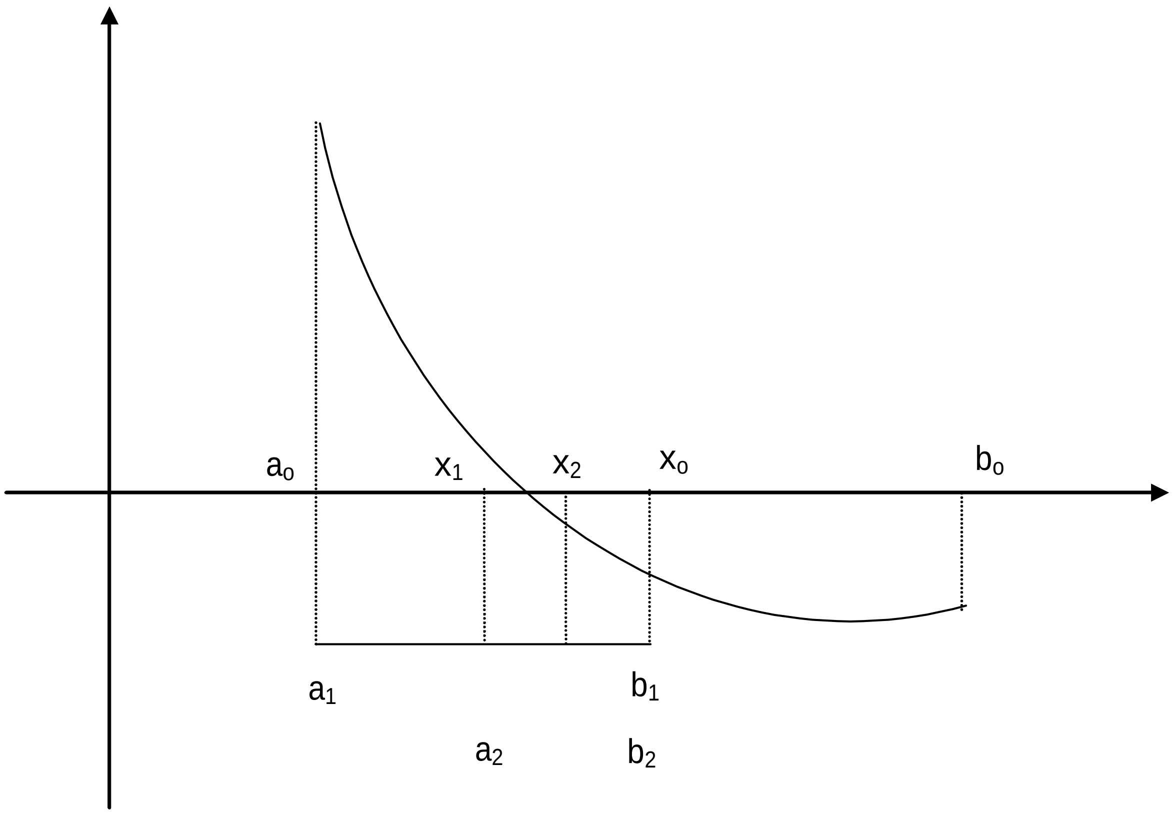
Suy ra $\lim x_n = x$

Vay x_n la nghiem gan ñung cua pt

Cong thöc sai so

$$\boxed{|x_n - x| \leq (b-a) / 2^{n+1}}$$

Yù nghóa hình hoïc



Ví du : Tìm nghiem gan ñung cua pt

$$f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$$

tren khoang cach ly nghiem [0,1] vôi sai so 0.1

Giai

Ta lap bang

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	Δ_n
0	0	-	1	+			0.5
1							0.25
2							0.125
3							0.0625

Nghiem gan ñung la $x = 0.4375$

Ví du : Tìm nghiem gan ñung cua pt

$$f(x) = 2+\cos(e^x-2)-e^x = 0$$

tren khoang [0.5,1.5] vôi sai so 0.04

Giai

Ta lap bang

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	Δ_n
0	0.5	+	1.5	-			0.5
1							0.25
2							0.125
3							0.0625
4							0.03125

Nghiem gan ñung la $x = 1.03125$

III. Phöông Phap Lap Ñôn

Xet phöông trình f(x) = 0 co nghiem chính xac x trong khoang cach ly nghiem [a,b] va f(a)f(b) < 0.

Ta chuyen pt f(x) = 0 ve dang

$$x = g(x)$$

Nghiem cua pt goi la ñiem bat ñong cua ham g(x)

Ñe tìm nghiem gan ñung, ta chon 1 gia trò ban ñau $x_o \in [a,b]$ tuy y

Xay döng day lap theo cong thöc

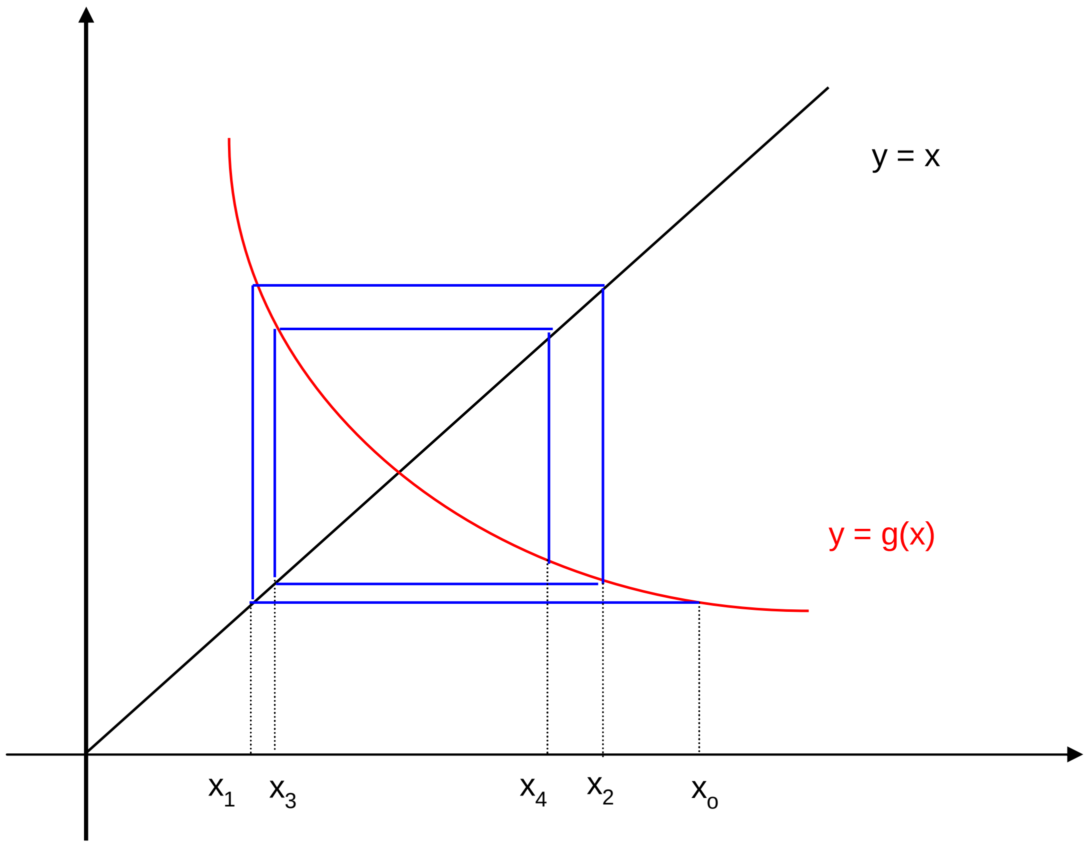
$$x_n = g(x_{n-1}),\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Bai toan cua ta la khao sat söi hoi tui cua day $\{x_n\}$

Tong quat, day $\{x_n\}$ co the hoi tu hoac phan ky

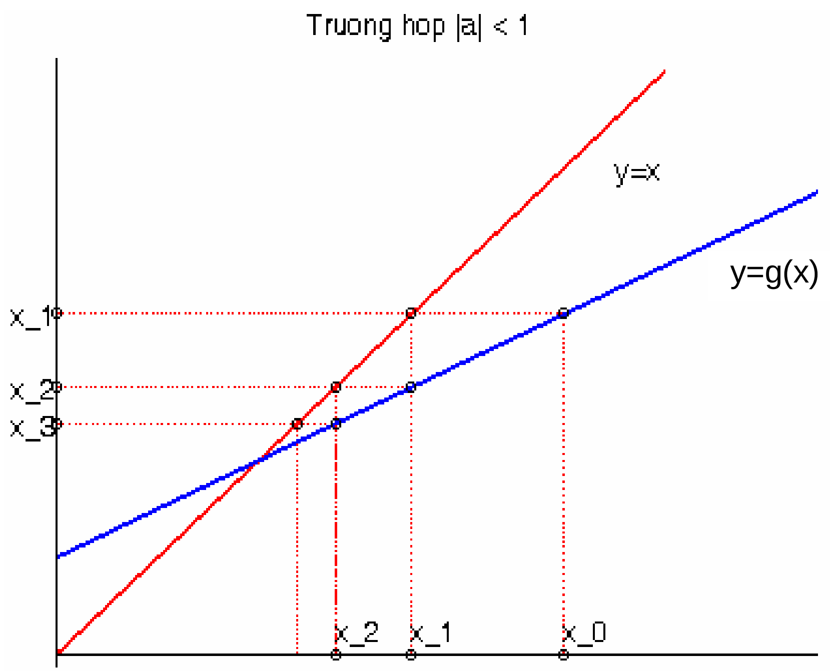
Neu day $\{x_n\}$ hoi tu thì no se hoi tu ve nghiem x cua pt

Ý nghĩa hình học

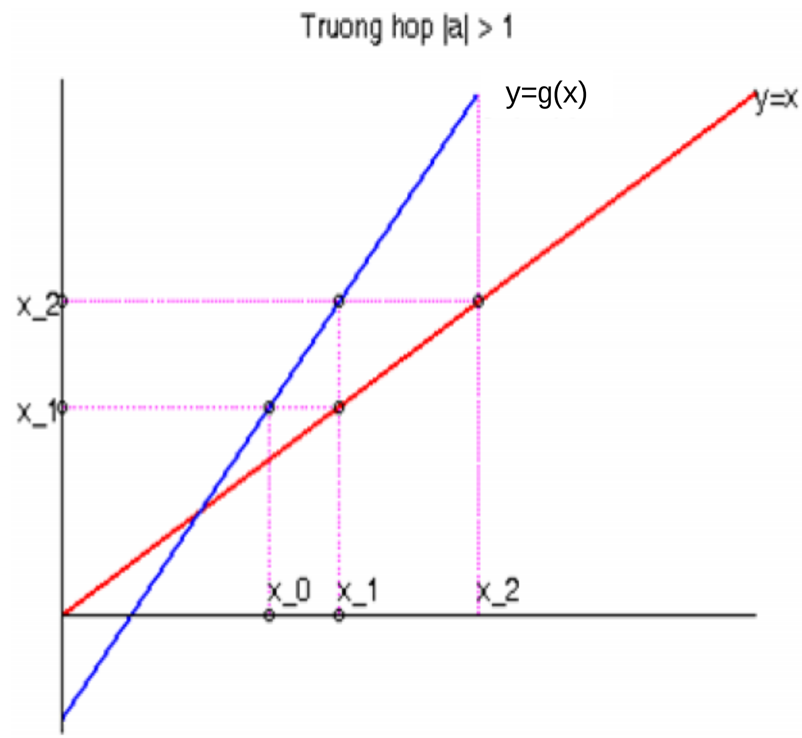


Ví duï : Minh hoïa söï hoäi tuï cuûa daõy laëp

$$x_{n+1} = g(x_n) = ax_n + b$$



Daõy hoäi tuï



Daõy phaân kyø

Bay giô ta tìm ñieu kien ñe day $\{x_n\}$ hoi tu

Ta co ñònh nghóa sau

Ñònh Nghóa : Ham g(x) goi la <u>ham co</u> tren ñoan [a,b] neu $\exists q : 0<q<1$ sao cho

$$|g(x) - g(y)| \le q\,|x - y|,\ \forall x, y \in [a,b]$$

q goi la he so co

Ñe kiem tra ham co, ta co ñònh ly sau

Ñònh ly : Neu ham g(x) lien tuc tren [a,b], kha vi tren (a,b) va $\exists q : 0<q<1$ sao cho

$$|g'(x)| \le q,\ \forall x \in [a,b]$$

Thì g(x) la ham co vôi he so co q

Ví du : Xet tính chat co cua ham

$$g(x) = \sqrt[3]{10 - x}$$

tren khoang [0,1]

Giai

Hien nhien g(x) kha vi tren [0,1]

Ta co

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(10-x)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{81}} = q, \forall x \in [0,1]$$

$$q \approx 0.0771 < 1$$

Nen g(x) la ham co

Ví du : Xet tính chat co cua ham

$$g(x) = (x^2 - e^x + 2)/3$$

tren khoang [0,1]

Giai

Hien nhien g(x) kha vi tren [0,1]

$$g'(x) = (2x - e^x)/3$$

$$g''(x) = (2 - e^x)/3 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Ta co $g'(0) = -0.33$, $g'(1) = -0.24$

$$g'(\ln 2) = -0.2046$$

$$\Rightarrow \quad |g'(x)| \le 0.33 = q < 1, \ \forall x \in [0,1]$$

Nen g(x) la ham co

Ñònh ly (nguyen ly anh xa co) :

Gia sö g(x) la ham co tren [a,b] vôi he so co q, ñong thôi g(x) $\in$ [a,b], $\forall x \in$ [a,b]

Khi ay vôi moi gia trò x_o ban ñau $\in$ [a,b] tuy y, day lap $\{x_n\}$ hoi tu ve nghiem x cua pt

Ta co cong thöc ñanh gia sai so

$$(1) \quad |x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \qquad \text{tien nghiem}$$

$$(2) \quad |x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \qquad \text{hau nghiem}$$

Nhan xet :Cong thöc (2) sai so chính xac hôn cong thöc (1)

Ví dui : Xeit phöông trình

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5 = 0$$

trein khoaing caich ly nghieim [3,4]

Giai söi choin giai trò ban ñaiu $x_o = 3.5$

Tính gain ñuing nghieim x_4 vai sai soi Δ_4

Giai

Ta chuyein pt vei daing $x = g(x)$

Coi nhieiu caich chuyein :

Caich 1: $$x = \frac{x^2}{3} - \frac{5}{x} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{2x}{3} + \frac{5}{x^2}$$ Khoing phai ham co

Cach 2: $x = 3 + \dfrac{5}{x^2} = g(x)$

$$g'(x) = -\frac{10}{x^3} \Rightarrow |g'(x)| \le \frac{10}{27} = q, \forall x \in [3,4]$$

q < 1 nen g ham co

Hien nhien g(x) $\in$ [3,4] nen pp lap hoi tu

xay döng day lap

$$\begin{cases} x_0 = 3.5 \\ x_n = 3 + \dfrac{5}{x_{n-1}}, \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ta lap bang

n	x_n
0	3.5
1	3.408163265
2	3.430456452
3	3.424879897
4	3.426264644

Sai so

$$\Delta_4 = \frac{q}{1-q} | x_4 - x_3 | \approx 0.00082$$

Ví duï : Tìm nghieäm gaàn ñuùng cuûa pt

$$f(x) = x^3+x-1000=0$$

vôùi sai soá 10^{-8}

Giaûi

$f'(x) = 3x^2+1 > 0$, $f(9) = -262$, $f(10) = 10$

Vaäy khoaûng caùch ly nghieäm [9,10]

Ta chuyeån pt veà daïng $x = g(x)$

Coù nhieàu caùch chuyeån :

Caùch 1: $x = 1000 – x^3 = g(x)$ khoâng phaûi haøm co

Caùch 2: $x = \sqrt[3]{1000 - x} = g(x)$

Hien nhien g(x) kha vi tren [9,10]

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} = q, \forall x \in [9,10]$$

q ≈ 0.0034 < 1, nen g(x) la ham co

De dang kiem tra g(x) $\in$ [9,10], $\forall$x $\in$ [9,10]

$$(9 \le \sqrt[3]{1000-x} \le 10 \Leftrightarrow 0 \le x \le 271)$$

Theo nguyen ly anh xa co thì pp lap hoi tu

Chon x_o = 10, xay döng day lap theo cong thöc

$$x_n = \sqrt[3]{1000 - x_{n-1}} \quad \forall n = 1,2,3,..$$

Sai so (dung cong thöc (2) hau nghiem)

$$|x_n - x| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Ta lap bang

n	x_n	Δ_n
0	10	
1		
2		
3		

Nghiem gan ñung x* = 9.966666789

Ví du : Xet phöông trình

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

tren khoang cach ly nghiem [0,1]

Gia söi chon gia trò ban ñau $x_o = 1$. Xac ñònh so lan lap n khi xap xæ nghiem pt vôi sai so 10^{-8}

(dung cong thöc tien nghiem)

Giai

a. Ta chuyen ve pt

$$x = \cos x = g(x)$$

g(x) la ham co vôi he so co $q = \sin 1 < 1$

Mat khac $g(x) = \cos x \in [0,1]$ nen pp lap hoi tu xaiy döing daiy laip

$x_o = 1$

$x_n = \cos x_{n-1}$

Xaic ñònh soi lain laip baing coing thöic tiein nghieim

$$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad n \ge \log\left(\frac{(1-q)10^{-8}}{|x_1 - x_0|}\right) / \log q = 112.8904$$

Vaiy soi lain laip n = 113

Nhan xet :

Toc ño hoi tu cua pp lap ñôn phu thuoc vao gia trò cua he so co q

- q cang nho (gan vôi 0) thì pp lap hoi tu cang nhanh
- q cang lôn (gan vôi 1) thì pp lap hoi tu cang cham

IV. Phöông Phaùp Laëp Newton

Moät phöông phaùp laëp khaùc laø pp laëp Newton, neáu hoäi tuï seõ cho toác ñoä hoäi tuï nhanh hôn

Giaû söû haøm f khaû vi treân khoaûng caùch ly nghieäm [a,b] vôùi f(a)f(b) < 0 vaø f'(x) $\neq$ 0, $\forall x \in$ [a,b]

Phöông trình f(x) = 0 töông ñöông vôùi pt

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x)$$

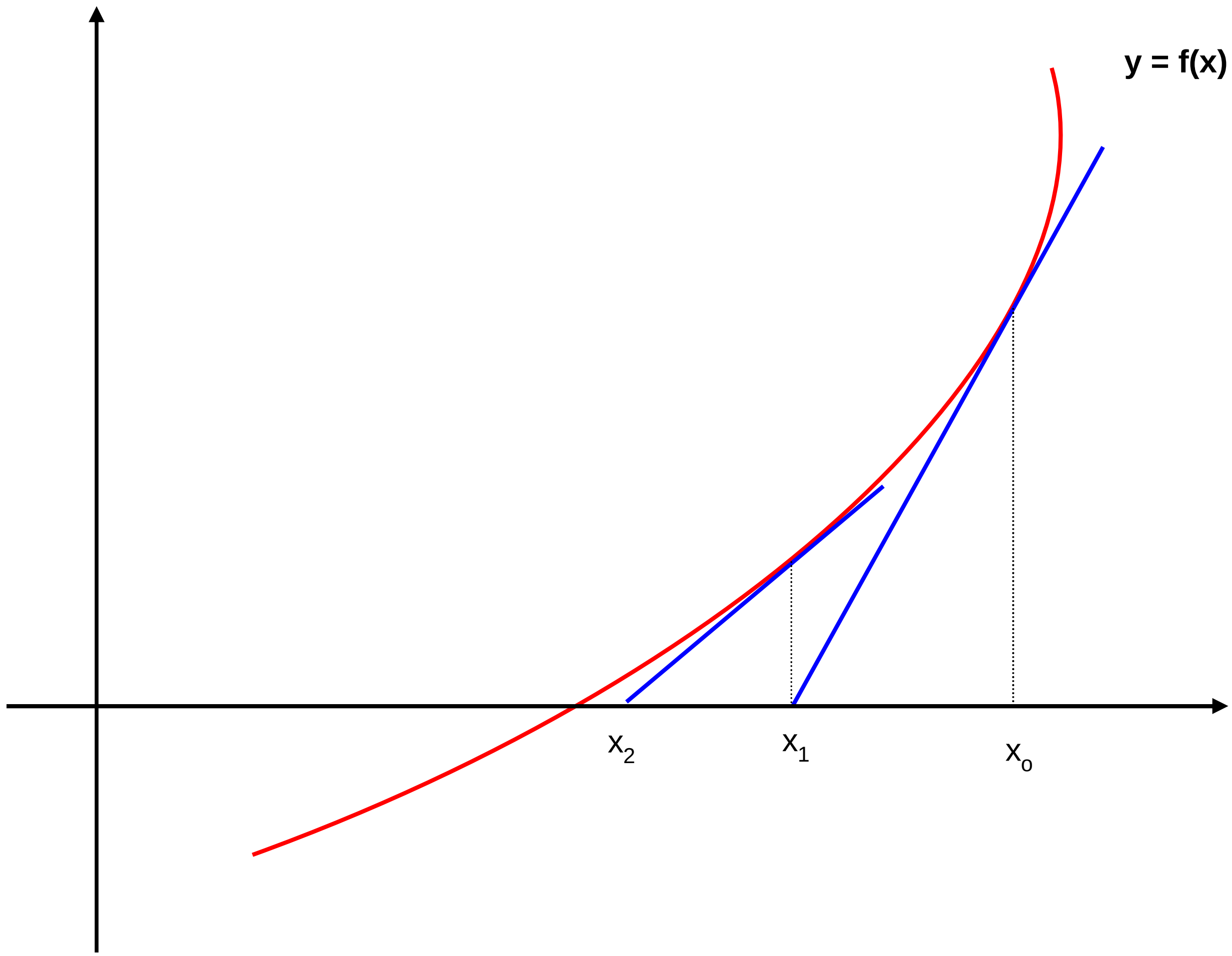
Ñe tìm nghiem gan ñung ta chon 1 gia trò ban ñau $x_o \in [a,b]$ tuy y. Xay döng day lap $\{x_n\}$ theo cong thöc

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \forall n = 1, 2, \ldots}$$

Cong thöc nay goi la <u>cong thöc lap Newton</u>

Tong quat, day $\{x_n\}$ co the hoi tu hoac phan ky

Yì nghĩa hình học



Ñònh ly :

Gia söi ham f(x) co ñao ham ñen cap 2 lien tuc va cac ñao ham f’(x) va f”(x) khong ñoi dau tren ñoan [a,b].

Khi ay neu chon gia trò ban ñau x_o thoa ñieu kien Fourier

$$\boxed{f(x_o)f''(x_o) > 0}$$

Thì day lap $\{x_n\}$ xac ñònh theo cong thöc Newton se hoi tu ve nghiem x cua pt

Chu y :

➢ Ñieu kien Fourier chæ la ñieu kien ñu khong phai la ñieu kien can

➢ Tö ñieu kien Fourier ta ñöa ra qui tac chon gia trò ban ñau x_o nhö sau :

neu ñao ham cap 1 va 2 cung dau, chon $x_o = b$. Ngöôc lai trai dau chon $x_o = a$

➢ Ñieu kien Fourier $f(x_o)f''(x_o)$ co the = 0 tai cac ñiem bien

➢ Trong pp Newton, ñaïo haøm f'(x) phaûi $\neq$ 0. Neáu $\exists$ c$\in$[a,b] : f'(c) = 0 thì ta phaûi thu heïp khoaûng caùch ly nghieäm ñeå loaïi boû ñieåm c.

➢ Ñeå ñaùnh giaù sai soá cuûa pp Newton ta duøng coâng thöùc sai soá toång quaùt

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)| / m$$

$$m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Ví duï : Tìm nghieäm gaàn ñuùng cuûa pt

$f(x) = x\text{-}\cos x = 0$

Treân khoaûng caùch ly nghieäm [0,1] vôùi sai soá 10^{-8}

Giaûi

1.Kieåm tra ñieàu kieän hoäi tu

$f(x) = x - \cos x$ coù ñaïo ham caáp 1 vaø 2 lieân tuïc treân [0,1]

$f'(x) = 1+\sin x > 0, \forall x \in [0,1]$

$f''(x) = \cos x > 0$

$f'(x)$ vaø $f''(x)$ cuøng daáu, choïn $x_o = 1$ ta coù pp laëp Newton hoäi tuï

2. Xay döng day lap Newton

$$x_0 = 1$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - \cos x_{n-1}}{1 + \sin x_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Cong thöc sai so

$$m = \min_{0 \le X \le 1} | f'(x) | = 1$$

$$| x_n - x | \le | f(x_n) | / m = | x_n - \cos x_n |$$

n	x_n	Δ_n
0	1	
1		
2		
3		

Nghiem gan ñung x = 0.739085133

Ví duï : Cho phöông trình

$$f(x) = x^3-3x+1= 0$$

Treân khoaûng caùch ly nghieäm [0,1]. Duøng pp Newton tính nghieäm x_3 vaø ñaùnh giaù sai soá Δ_3 theo coâng thöùc sai soá toång quaùt

Giaûi

1.Kieåm tra ñieàu kieän hoäi tu

Ta thaáy $f'(x) = 3x^2-3= 0$ taïi x = 1, do ñoù ta chia ñoâi ñeå thu heïp khoaûng caùch ly nghieäm.

Vì $f(0) = 1$, $f(0.5) = -0.375$

Thu heïp khoaûng caùch ly nghieäm [0, 0.5] f(x) co ñao ham cap 1 va 2 lien tuc tren [0, 0.5]

$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$

$f''(x) = 6x \geq 0, \forall x \in [0, 0.5]$

f'(x) va f"(x) trai dau, nen chon $x_o = 0$ thì pp lap Newton hoi tu

2. Xay döng day lap Newton

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Cong thöc sai so

$$m = \min_{0 \le X \le 0.5} |f'(x)| = 2.25$$

$$|x_n - x| \le |f(x_n)|/m = |x_n^3 - 3x_n + 1|/2.25$$

n	x_n	Δ_n
0	0	
1		
2		
3		

Nghiem gan ñung x = 0.347296353

Sai so 0.2545×10^{-8}

V. Giai gan ñung he pt phi tuyen bang pp Newton Raphson

He phöông trình phi tuyen

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Trong ño $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la cac ham lien tuc va co ñao ham rieng theo cac bien x_i lien tuc trong lan can cua nghiem

Phöông trình töông ñöông

$$f(x) = 0$$

Vôi $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Chon gia trò ban ñau $x^{(0)}$ tuy y thuoc lan can cua nghiem. Ky hieu $x^{(k)}$ la bo nghiem gan ñung ô böôc thö k

Cong thöc Newton

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - f(x^{(k-1)})/f'(x^{(k-1)}), \ \forall k = 1, 2 \ldots$$

Ta ñöa ve giai he phöông trình tuyen tính

Ah = b

vôi b = -f($x^{(k)}$)

A la ma tran Jacobi

$$A = f'(x) = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \dots & \partial f_2/\partial x_n \\ \dots & & & \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{vmatrix}$$

Nghiem gan ñung : $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$

Xeùt tröôøng hôïp heä goàm 2 phöông trình vôùi 2 aån

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

Vôùi F(x,y), G(x,y) laø caùc haøm lieân tuïc vaø coù ñaïo haøm rieâng theo caùc bieán x, y lieân tuïc trong laân caän cuûa nghieäm

Choïn (x_o, y_o) tuøy yù thuoäc lc cuûa nghieäm, coâng thöùc Newton goàm 2 daõy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{J_y(x_{n-1}, y_{n-1})}{J(x_{n-1}, y_{n-1})} \\ y_n = y_{n-1} - \dfrac{J_x(x_{n-1}, y_{n-1})}{J(x_{n-1}, y_{n-1})} \end{cases}$$

Trong ñoù $J = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \neq 0, \forall (x, y)\, trong\; lc\; cua\; nghiem$

$$J_x = \begin{vmatrix} F'_x & F \\ G'_x & G \end{vmatrix} \qquad J_y = \begin{vmatrix} F & F'_y \\ G & G'_y \end{vmatrix}$$

Neáu daõy (x_n,y_n) hoäi tuï thì noù seõ hoäi tuï veà nghieäm (x,y) cuûa pt

Ví dui : Tìm nghieim gain ñuing vôii n = 1 cuia hei pt

$$\begin{cases} F(x,y) = x + 3\ln x - y^2 \\ G(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 \end{cases}$$

Neiu choin $x_o = 1.5$, $y_o = -1.5$

Giaii

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4664 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_x' \\ G_x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{3}{x} \\ 4x-y-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_y' \\ G_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix} = -12 \quad J_x = \begin{vmatrix} F_x' & F \\ G_x' & G \end{vmatrix} = -0.416 \quad J_y = \begin{vmatrix} F & F_y' \\ G & G_y' \end{vmatrix} = -1.4496$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{J_y}{J} = 1.3792 \\ y_1 = y_0 - \dfrac{J_x}{J} = -1.5347 \end{cases}$$

Ví dui : Tìm nghieim gain ñuing vôii n = 1 cuia hei pt

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2 + xy - 10 \\ G(x,y) = y + 3xy^2 - 57 \end{cases}$$

Neiu choin $x_o = 1.5$, $y_o = 3.5$

Giaii

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 1.625 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 36.75 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F'_y \\ G'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1+6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 32.5 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = 156.125 \quad J_x = \begin{vmatrix} F'_x & F \\ G'_x & G \end{vmatrix} = 102.4375 \quad J_y = \begin{vmatrix} F & F'_y \\ G & G'_y \end{vmatrix} = -83.6875$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{J_y}{J} = 2.0360 \\ y_1 = y_0 - \dfrac{J_x}{J} = 2.8439 \end{cases}$$