

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

Chöông 1

KHAÙ NIỀM VEÀ
SOÁ GÀN ÑUÙNG
VAØ SAI SOÁ

I. KHÁI NIỆM SAI SỐ:

Trong các bài toán kỹ thuật thông thường ta không thể xác định một giá trị chính xác của 1 vài thông số mà chỉ làm việc với giá trị gần đúng của nó. Những sai lệch giữa giá trị gần đúng và giá trị chính xác gọi là sai số.

Ta có 4 loại sai số:

- Sai số hệ thống
- Sai số ngẫu nhiên
- Sai số phương pháp
- Sai số tính toán

Sai số giả thiết : Các giả thiết dùng để mô hình hóa bài toán thường thiếu chính xác, các giả thiết này được chấp nhận khi xây dựng mô hình. Sai số này gọi là sai số giả thiết

Sai số số liệu ban đầu : Các số liệu ban đầu dùng để giải bài toán thường thu được thông qua đo đạc hay thực nghiệm. Các số này phụ thuộc vào dụng cụ đo, thực nghiệm nên không được chính xác gọi là sai số số liệu ban đầu.

Sai số phương pháp : Các phương pháp dùng để giải các bài toán kỹ thuật thông thường là các phương pháp giải xấp xỉ gần đúng, mỗi phương pháp có 1 sai số nhất định nào đó sai số này gọi là sai số phương pháp

Sai số tính toán : Tính toán bằng máy tính thông thường sẽ sinh ra 1 số hữu hạn các chữ số hoặc làm tròn số các sai số này tích lũy trong quá trình tính toán gọi là sai số tính toán hay sai số làm tròn.

II. CÁCH BIỂU DIỄN SAI SỐ:

Gọi A là số chính xác của bài toán

Số a gọi là số gần đúng của A nếu nó xấp xỉ A

ký hiệu $a \approx A$

Nhiệm lượng $\Delta = |a - A|$

gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a

1. Sai số tuyệt đối

Trong thực tế do không tính được A , ta tìm
1 số a sao cho $|a - A| \leq \Delta_a$ thỏa

$$|a - A| \leq \Delta_a$$

Δ_a gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a

Ký hiệu $A = a \pm \Delta_a$

2. sai số tương đối :

Sai số tương đối của số gần đúng a là số dương δ_a tính theo công thức

$$\delta_a = \Delta_a / |a|$$

Ví dụ :

Giá trị $A = \pi$;

$a = 3.14$ là số gần đúng của π

Xác định sai số

- **Giai**

- Ta có

- $\pi =$

3.14159265358979323846264338327...

- $\Rightarrow 3.14 - 0.01 < \pi < 3.14 + 0.01$

- $\Rightarrow |3.14 - \pi| < 0.01 \quad \delta_a = 0.3185\%$

- $\Rightarrow \Delta_a = 0.01$

Mặt khác

$3.14 - 0.002 < \pi < 3.14 + 0.002$

$\Rightarrow \Delta_a = 0.002 \quad \delta_a = 0.0637\%$

Do ñoicung 1 giáitrò gàn ñùng còitheà còinhieàu sai soátuyeã ñoá khác nhau, trong ví dụ này, sai số 0.002 là toà hơn

Ví dụ : Cho $a = 1.85$ với sai số $\delta_a = 0.12\%$, tính sai số tuyệt đối

$$\begin{aligned}\Delta_a &= |a| * \delta_a \\ &= 1.85 * 0.12 / 100 = 0.00222\end{aligned}$$

3. Sai số của một hàm :

- Cho hàm $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Mỗi biến x_i có sai số Δx_i

Sai số tuyệt đối

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Sai số tương đối

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial (\ln f)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Ví dụ : Cho $A = 15.00 \pm 0.002$

$$B = 0.123 \pm 0.001 \quad C = 13.00 \pm 0.05$$

Tính sai số tuyệt đối

1. $x = a + b$

2. $y = 20a - 10b + c$

3. $z = a + bc$

• **Giai**

• 1. $\Delta_x = \Delta_a + \Delta_b = 0.002 + 0.001 = 0.003$

• 2. $\Delta_y = 20\Delta_a + 10\Delta_b + \Delta_c = 0.1$

• 3. $\Delta_z = \Delta_a + |c|\Delta_b + |b|\Delta_c = 0.02115$

Ví dụ : Diện tích hình tròn $S = \pi R^2$
với $\pi = 3.14 \pm 0.002$ và $R = 5.25 \pm 0.001$ m
Tính sai số của S

Giai :

$$S = 3.14 \times (5.25)^2 = 86.54625$$

sai số tuyệt đối

$$\begin{aligned}\Delta_S &= R^2 * \Delta_\pi + 2\pi R * \Delta_R \\ &= (5.25)^2 \times 0.002 + 2 \times 3.14 \times 5.25 \times 0.001 \\ &= 0.088095\end{aligned}$$

III. BIỂU DIỄN SỐ THẬP PHÂN

Số thập phân a ñược biểu diễn dươi dạng

$$\begin{aligned} a &= a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} \\ &= \sum a_k 10^k \end{aligned}$$

1. Làm tròn số

Làm tròn số là một số cách chổ số lẻ bên phải ñể ñược 1 số gần hơn và gần ñúng với a.

Gia số a muốn làm tròn đến chữ số lẻ
thứ k ($1 \leq k \leq n$).

xem 2 số

$$a^- = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k}$$

$$a^+ = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots (a_{-k} + 1)$$

chọn số làm tròn là a^- hoặc a^+ theo điều kiện

$$\tilde{a} = \begin{cases} a^- & \text{nếu } |a^- - a| < |a^+ - a| \\ a^+ & \text{nếu } |a^+ - a| < |a^- - a| \end{cases}$$

Ví dụ : Cho $a = 456.12345678$

- Làm tròn với 2 chữ số lẻ

$$a^- = 456.12 \quad |a^- - a| = 0.00345678$$

$$a^+ = 456.13 \quad |a^+ - a| = 0.00654322$$

Vậy $\tilde{a} = a^- = 456.12$

- Làm tròn với 4 chữ số lẻ

$$a^- = 456.1234 \quad |a^- - a| = 0.00005678$$

$$a^+ = 456.1235 \quad |a^+ - a| = 0.00004322$$

Vậy $\tilde{a} = a^+ = 456.1235$

Cách làm tròn gần hơn

Neu a_{-k-1} (chỗ số sau chỗ số lẻ thứ k)

$$< 5 : \tilde{a} = a^-$$

$$5 : \tilde{a} = a^+$$

- Sai số làm tròn

$$\text{Nếu } \theta = |\tilde{a} - a|$$

$$\text{Ta có } |\tilde{a} - A| \leq |\tilde{a} - a| + |a - A| = \theta + \Delta_a$$

Vậy sai số làm tròn :

$$\Delta_{\tilde{a}} = \theta + \Delta_a$$

* NX : Ta có $\Delta_{\tilde{a}} \geq \Delta_a$. Vậy khi làm tròn sai số sẽ tăng lên, nên trong tính toán ta tránh làm tròn các phép toán trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng.

Ví dụ : Cho $s = CX A$, $a = 187.123456$ là số gần đúng với sai số là 0.0001 . Gọi \tilde{a} là số làm tròn của a với 4 chữ số lẻ. Tính sai số của \tilde{a} so với A

giải

$$\text{Sai số } \Delta_{\tilde{a}} = \theta + \Delta_a$$

$$\theta = |187.1235 - 187.123456| = 0.000044$$

$$\text{Vậy } \Delta_{\tilde{a}} = 0.000044 + 0.0001 = 0.000144$$

Chú ý:

Trong hộp lam tron trong bat ñáng thòi, ta dùng khái niệm lam tron lên và lam tron xuống

° Lam tron lên : $\tilde{a} = a^+$, áp dụng cho các số nguyên âm

° Lam tron xuống : $\tilde{a} = a^-$, áp dụng cho các số nguyên dương

Ví dụ:

- $a < 13.9236$

làm tròn lên với 2 chữ số lẻ ta có

$$a < 13.93$$

- $b > 78.6789$

làm tròn xuống ta có

$$b > 78.67$$

2. Chỗ số có nghĩa :

là những chỗ số ở tính từ chỗ số khác 0 nào
tiên từ trái sang.

Ví dụ :

10.20003 có 7 chỗ số có nghĩa

001234.34 có 6 chỗ số có nghĩa

0.010203 có 5 chỗ số có nghĩa

10.20300 có 7 chỗ số có nghĩa

3. Chöõsoáñàng tin :

Cho $a \approx A$ với sai số Δ_a .

Chöõsoá a_k gọi là chöõsoáñàng tin nếu

hay

$$\begin{aligned} \Delta_a &= 10^k / 2 \\ k &= \log (2\Delta_a) \end{aligned}$$

Ví dụ: Tìm số chữ số thập phân của a

1. $a = 12.3456$ với $\Delta_a = 0.0044$

2. $a = 12.3456$ với $\Delta_a = 0.0062$

giải

1. Chữ số a_k là chữ số thập phân nếu

$$\Delta_a = 0.0044 \leq \frac{1}{2} 10^k$$

$$\Rightarrow k \log(0.0088) = -2.0555$$

Vậy ta có 4 chữ số thập phân 1, 2, 3, 4.

2. $\Delta_a = 0,0062 \leq \frac{1}{2} 10^k$

$$\Rightarrow k \log(0.0124) = -1.9065$$

Vậy ta có 3 chữ số thập phân 1, 2, 3