

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trào i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

BOÄMÔN TOÄÄN ÖÖNG DUÖÖNG - ÑHÖBK

PHÖÖNG PHÄP TÍNH – CHÖÖNG 6
GIAÛ XÄP XÊ PHÖÖNG TRÌNH ÑÄÖ
HÄM RIÊNG

- TS. NGUYÊÑ QUÖC LÄÑ (05/2006)

NOI DUNG

1- BA DẠNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM RIÊNG CƠ BẢN

2 -PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC. BÀI TOÁN LAPLACE

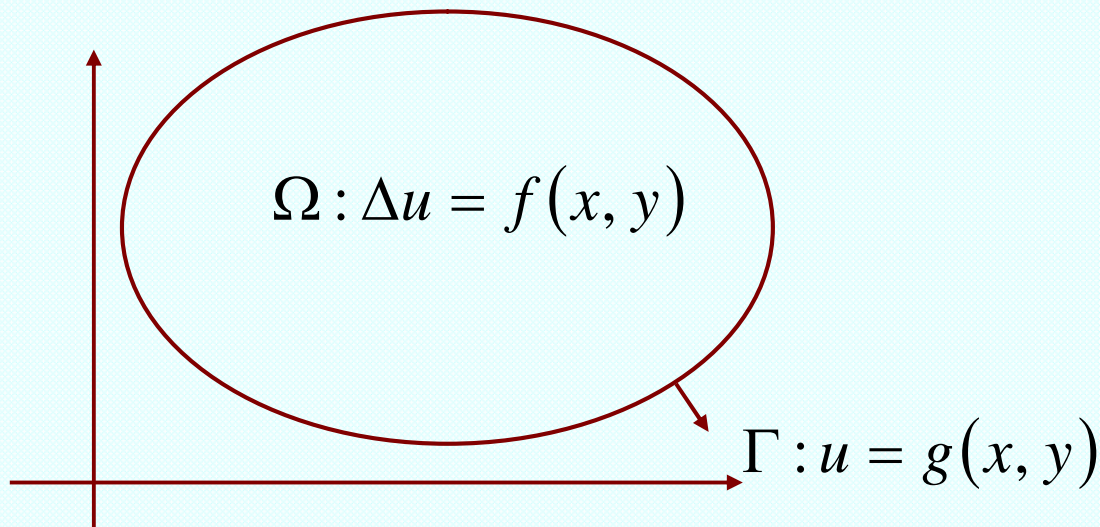
3- PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC. BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT. SƠ NHIÊN - AN

BAI TOAN ELLIPTIC

Ptrình Poisson ($f \equiv 0$: Laplace) & ñieù kien bien Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), (x, y) \in \Omega \subset R^2 \\ u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Toan töu Laplace: $u = u(x, y) \Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$



Giaù bang sai phan hõu
hain: Chia nhõu Ω . Tính
xap xæ giaù trò nghieim u
tail caic ñieim chia

MINH HOÀ YÙTÔNG

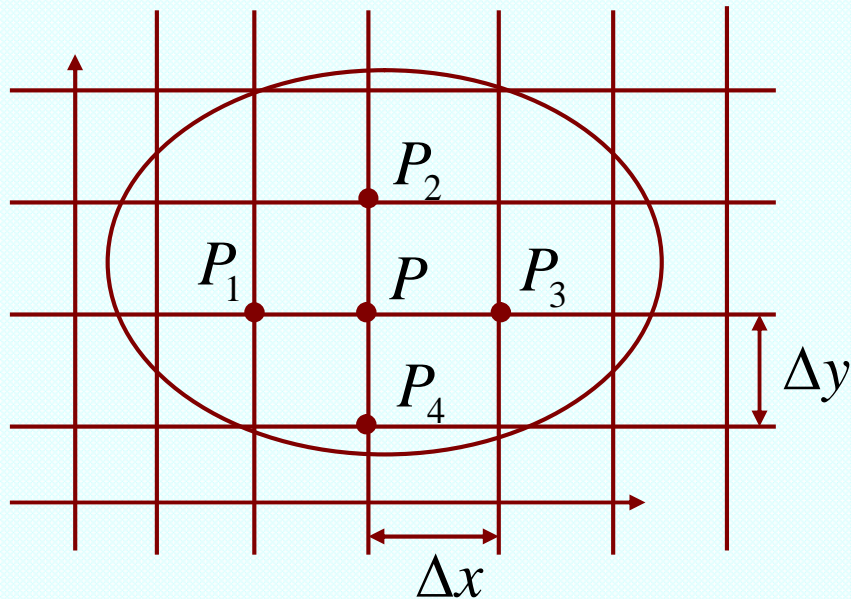
Tính giá trị nghiệm $u(x, y)$ của bài toán sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y + 4x, \quad 1 < x < 4, 1 < y < 3 \\ \text{Điều Kiện Biên:} \\ u(x, 1) = x^2 + 2x, \quad 1 \leq x \leq 4 \quad (*) \\ u(4, y) = 8y^2 + 16y, \quad 1 \leq y \leq 3 \\ u(x, 3) = 3x^2 + 18x, \quad 1 \leq x \leq 4 \\ u(1, y) = 2y^2 + y, \quad 1 \leq y \leq 3 \end{array} \right.$$

tại các điểm chia bên trong miền đang xét với bước chia cách đều $\Delta x = \Delta y = 1$

GIAI GẦN NHƯNG BAI TOAN ELLIPTIC

Phân hoạch Ω : Chia nhỏ Ω bởi các đường thẳng // Ox, Oy



$\Delta x = \Delta y = h$: Ta b l o o i b o o c chia
c a c h n e u h. K y u h i e u : P_1, P_2, P_3, P_4 –
4 n i e m k e a P

C o n g t h o c x a p x e Laplacian Δu
(c o n g t h o c n a o h a m h o n g t a m !)

$$\Delta u(P) \approx \frac{u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4) - 4u(P)}{h^2} \quad (*)$$

L a n l o o t t h a y $P_k(x, y)$ v a o p h o n g t r i n h e l l i p t i c , d u n g (*) & n i e u k i e n
b i e n (g i a u t r o u t r e n b i e n) \Rightarrow H e p h o n g t r i n h a n $u_k = u(P_k)$

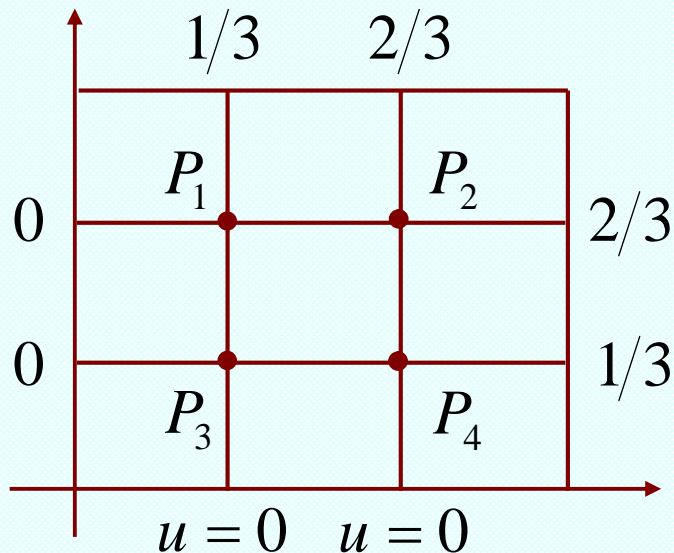
VÍ DỤ

Giải bài toán

$$\begin{cases} \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0, & u(x, 1) = x & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = 0, & u(1, y) = y, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

bộ lưới bậc chia cách đều $h = 1/3$ trên trục Ox và Oy

Lưới 4 nút ẩn \Rightarrow 4 phương trình tìm. Nhanh số tính phương trình biên:



Nút 1: $1/3 + u_3 + u_2 - 4u_1 = 0$

Nút 2: $2/3 + u_4 + u_1 + 2/3 - 4u_2 = 0$

Nút 3: $u_1 + u_4 - 4u_3 = 0$

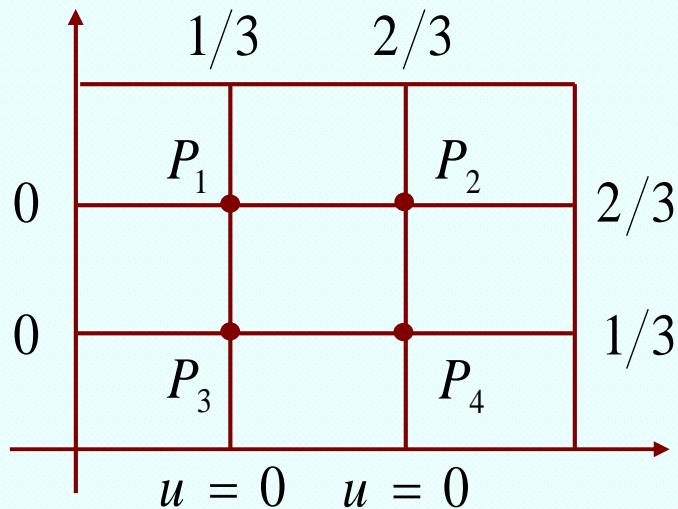
Nút 4: $u_2 + u_3 + 1/3 - 4u_4 = 0$

KẾT QUẢ

Hệ phương trình $Au = b$ với

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 0.33 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 1.33 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0.33 \end{array} \right] \Rightarrow u = \begin{bmatrix} 0.2208 \\ 0.4429 \\ 0.1104 \\ 0.2208 \end{bmatrix}$$

Chuyển Phương trình Poisson $\Delta u = f(x, y)$ (\neq Laplace: $\Delta u = 0$)



$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y \Rightarrow \Delta u(P_1) = f(P_1)$$

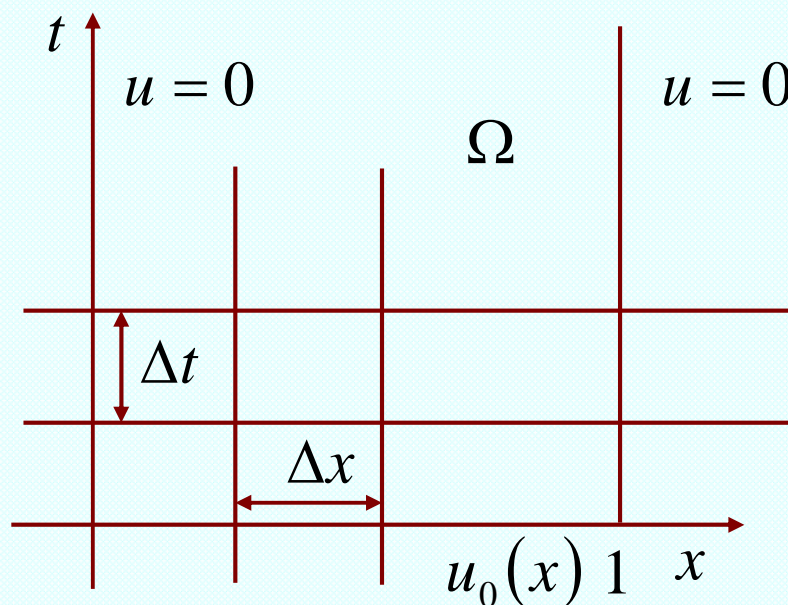
$$\Rightarrow \frac{0 + \frac{1}{3} + u_2 + u_3 - 4u_1}{1/9} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 1$$

PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC

Bài toán truyền nhiệt 1 chiều (điều kiện biên + điều kiện ban đầu)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$



Miền $\Omega = \{ (x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \}$

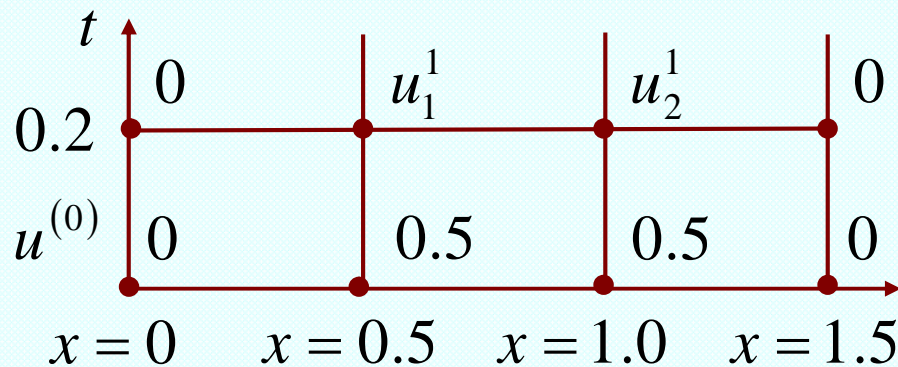
Phân hoạch Ω : Lưới theo x với
đại Δx , theo t với đại $\Delta t \Rightarrow$ Các
điểm lưới $x = i \Delta x, t = k \Delta t$

Xấp xỉ $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ & ĐK biên, đầu \Rightarrow Giải u tại điểm chia

MINH HOÀI YÙTÔNG: SAI PHẢN TIẾN

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = xt, & 0 < x < 1.5, t > 0 \\ \underbrace{u(0,t) = u(1.5,t) = 0, t > 0;}_{\text{Điều Kiện Biên: } x=0 \text{ \& } x=1.5} \quad \underbrace{u(x,0) = x(1.5-x), 0 \leq x \leq 1.5}_{\text{Điều Kiện Đầu: } t=0} \end{cases}$$

Xây dựng công thức tính $u^{(1)}$ (mức thời gian 1) theo $u^{(0)}$ với $\Delta t = 0.2, \Delta x = 0.5$ bởi: Sai phản tiến theo t từ mức thời gian 0



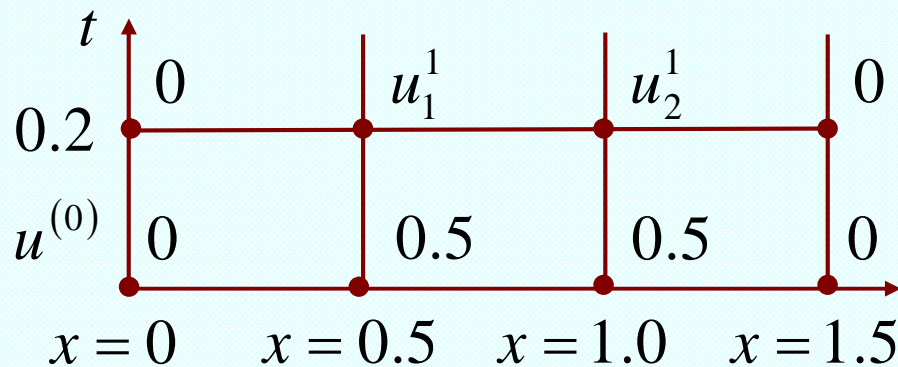
$$\begin{aligned} \text{Tiến: } \frac{\partial u}{\partial t}(0.5,0) &\approx \frac{u_1^1 - 0.5}{0.2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0.5,0) &\approx \frac{0.5 - 2 \times 0.5 + 0}{(0.5)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0.5,0) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0.5,0) = 0.5 \times 0 \Rightarrow \frac{u_1^1 - 0.5}{0.2} - \frac{-0.5}{0.5^2} = 0 \Rightarrow u_1^1 = 0.1$$

MINH HOÀI YÙTÖÔNG: SAI PHAÏN LƯỖ

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = xt, & 0 < x < 1.5, t > 0 \\ \underbrace{u(0,t) = u(1.5,t) = 0, t > 0;}_{\text{Niêu Kiệñ Biệñ: } x=0 \text{ \& } x=1.5} \quad \underbrace{u(x,0) = x(1.5 - x), 0 \leq x \leq 1.5}_{\text{Niêu Kiệñ Nàù: } t=0} \end{cases}$$

Xây dựng công thức tính $u^{(1)}$ (mức thời gian 1) theo $u^{(0)}$ với $\Delta t = 0.2$, $\Delta x = 0.5$ bởi: Sai phân lùi theo t ở mỗi thời gian 1



Lũì: $\frac{\partial u}{\partial t}(0.5, 0.2) \approx \frac{0.5 - u_1^1}{-0.2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0.5, 0.2) \approx \frac{u_2^1 - 2u_1^1 + u_0^1}{(0.5)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0.5, 0.2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0.5, 0.2) = 0.5 \times 0.2 \Rightarrow \frac{0.5 - u_1^1}{-0.2} - \frac{u_2^1 - 2u_1^1}{0.5^2} = 0.1$$