MỤC LỤC
MÔN TOÁN RỜI RẠC

Tài liệu tham khảo :

KENNETH H. ROSEN "Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học".

Chương 1 : CƠ SỞ LOGIC.

1.1Mệnh đề.

1.1.1 Khái niệm về mệnh đề.

Mệnh đề toán học (hoặc nói tắt là mệnh đề) được hiểu như là một khẳng định nào đó có giá trị chân lý xác định (đúng hoặc sai nhưng không thể vừa đúng vừa sai). Ta thường ký hiệu các mệnh đề bởi các chữ cái P, Q, R,...

Nếu P là mệnh đề đúng, ta nói P có chân trị đúng và viết P = 1.

Nếu Q là mệnh đề sai, ta nói Q có chân trị sai và viết Q = 0.

Ví dụ:

P : "6 là số chẵn"

Q : "Paris là thủ đô nước Anh"

R : "Hôm nay trời đẹp làm sao !"

S : " $x + 2 < 7$ "

Ta có P=1, Q=0 còn R, S không phải là mệnh đề. (S là vị từ, sẽ khảo sát sau)

1.1.2 Phân loại mệnh đề.

Các mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết chúng lại bằng các liên từ ***và, hay, nếu, thì*** hoặc trạng từ ***không*** gọi là các ***mệnh đề phức hợp.***

Ví dụ : "Nếu trời mưa thì tôi ở nhà" là mệnh đề phức hợp.

Các mệnh đề không được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ các liên từ ***và, hay, nếu, thì*** hoặc trạng từ ***không*** gọi là các mệnh đề ***nguyên thủy hay sơ cấp***.

Ví dụ : "Sắt nặng hơn gỗ", "Số 12 chia hết cho 5" là các mệnh đề sơ cấp.

1.1.3 Các phép toán logic.

Từ một hoặc nhiều mệnh đề ta có thể xây dựng những mệnh đề mới bằng các phép toán logic. Sau đây là các phép toán cơ bản :

1. **Phép phủ định.**

Phủ định của mệnh đề P được ký hiệu bởi $\neg P$ hay $\overline{P}$ (đọc "không P") là mệnh đề có chân trị được xác định bởi bảng sau :

P	$\neg P$
0	1
1	0

Ví dụ : P : "Trái đất quay"

$\neg P$: "Trái đất không quay"

2. **Phép hội.**
   Hội của hai mệnh đề P, Q được ký hiệu bởi P ∧ Q (đọc “P và Q”) là mệnh đề có chân trị được xác định bởi bảng sau :

P	Q	P∧Q
0	1	0
0	0	0
1	1	0
1	0	1

Vậy mệnh đề P∧Q chỉ đúng khi cả P và Q đều đúng, còn sai trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ : P : “ số 2 là số nguyên tố ”
Q : “ 2 là số chẵn “.
P∧Q : “ 2 là số nguyên tố và là số chẵn “.
Ta có P=1, Q=1, do đó P∧Q=1.

3. **Phép tuyển.**
   Tuyển của hai mệnh đề P, Q được ký hiệu bởi P ∨ Q (đọc “ P hay Q”) là mệnh đề có chân trị được xác định bởi bảng sau :

P	Q	P∨Q
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

Vậy mệnh đề P∨Q chỉ sai khi cả P và Q đều sai, còn đúng trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ : P : “Hùng đang đọc báo “.
Q : “ Hùng đang xem tivi “.
Ta có P∨Q : “ Hùng đang đọc báo hay (hoặc) xem ti vi “.

4. **Phép kéo theo.**
   Mệnh đề P kéo theo mệnh đề Q được ký hiệu bởi P → Q là mệnh đề có chân trị được xác định bởi bảng sau :

P	Q	P→Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Vậy mệnh đề P→Q chỉ sai khi P đúng và Q sai, còn đúng trong các trường hợp còn lại. Trong mệnh đề P→Q, P được gọi là giả thiết, Q được gọi là kết luận.

Ví dụ : a/b = c → a = bc (ngược lại chưa chắc đúng).

5. **Phép tương đương.**

Mệnh đề P tương đương với mệnh đề Q được ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ là mệnh đề xác định bởi $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, từ đó ta có bảng chân trị được xác định bởi bảng sau :

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ta thường đọc mệnh đề $P \leftrightarrow Q$ là " P khi và chỉ khi Q", "P nếu và chỉ nếu Q ", " P là điều kiện cần và đủ để có Q"

Ví dụ : "Một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi nó có tổng các chữ số chia hết cho 3"

1.1.4 Độ ưu tiên các phép toán.

Để tránh dùng nhiều dấu ngoặc trong các biểu thức logic, người ta đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán như sau :

Cấp ưu tiên	Phép toán
1	$\rceil$
2	$\wedge, \vee$
3	$\rightarrow, \leftrightarrow$

Ví dụ : $\rceil P \vee Q$ có nghĩa là $(\rceil P) \vee Q$

$\rceil P \vee Q \rightarrow R \wedge S$ có nghĩa là $((\rceil P) \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$

1.2 Dạng mệnh đề.

1.2.1 Các định nghĩa.

Dạng mệnh đề là một "biểu thức logic" (tương tự biểu thức đại số trong đại số)

Được xây dựng từ :

Các mệnh đề (hằng mệnh đề).

Các biến mệnh đề.

Các phép toán logic thao tác trên các hằng mệnh đề và biến mệnh đề theo một thứ tự nhất định.

Ví dụ :

$E(p, q, r) = (p \vee q) \wedge (P \rightarrow (\rceil r))$

Là một dạng mệnh đề trong đó p,q,r là các biến mệnh đề còn P là một hằng mệnh đề .

Giả sử E, F là hai dạng mệnh đề, khi ấy $\rceil E$, $E \vee F$, $E \wedge F$, $E \rightarrow F$, $E \leftrightarrow F$ là các dạng mệnh đề.

Định nghĩa 1 : Hai dạng mệnh đề E và F gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng chân trị. Khi đó ta viết $E \Leftrightarrow F$

Ví dụ: xây dựng bảng chân trị của các dạng mệnh đề $p \rightarrow q$, $\rceil p$, $\rceil q$, $\rceil p$, $p \vee q$

p	q	$\rceil p$	$\rceil q$	$P \to q$	$\rceil p \to \rceil q$	$\rceil p \vee q$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1

.

Từ bảng trên , ta có : $\mathbf{p \to q \Leftrightarrow \rceil p \vee q}$

Định nghĩa 2 :

Một dạng mệnh đề được gọi là một hằng đúng nếu nó luôn lấy chân trị 1.

Một dạng mệnh đề được gọi là một hằng sai hay mâu thuẩn nếu nó luôn lấy chân trị 0.

Ví dụ:

Dạng mệnh đề $p \wedge \rceil p$ là một hằng sai.

Dạng mệnh đề $p \vee \rceil p$ là một hằng đúng.

Ta có: Hai dạng mệnh đề E và F tương logic khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là một hằng đúng.

Định nghĩa 3 :

Dạng mệnh đề F được gọi là hệ quả logic của dạng mệnh đề E nếu $E \to F$ là một hằng đúng. Khi đó ta viết $E \Rightarrow F$

Ví dụ: $p \vee (q \to r) \Leftrightarrow p \vee (\rceil q \vee r)$

1.2.2 Các quy luật logic.

Định lý : Với p, q, r là các biến mệnh đề, 1 là hằng đúng, 0 là hằng sai, ta có các tương đương logic sau :

1. Luật phủ định của phủ định :
   $\rceil\rceil p \Leftrightarrow p$
2. Qui tắc De Mogan:
   $\rceil(p \wedge q) \Leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q$
   $\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q$
3. Luật giao hoán
   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
   $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
4. Luật kết hợp.
   $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
   $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
5. Luật phân bố.
   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
6. Luật lũy đẳng.
   $p \wedge p \Leftrightarrow p$
   $p \vee p \Leftrightarrow p$
7. Luật trung hòa.
   $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
   $p \vee 0 \Leftrightarrow p$
8. Luật về phần tử bù.
   $p \wedge \rceil p \Leftrightarrow 0$
   $p \vee \rceil p \Leftrightarrow 1$
9. Luật thống trị.
   $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
   $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$
10. Luật hấp thụ.
   $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
   $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Ví dụ 1: Chứng minh $(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$

Ví dụ 2: Chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

1.3 Qui tắc suy diễn.

1.3.1 Suy luận và qui tắc suy diễn.

Suy luận là rút ra mệnh đề mới từ một hoặc nhiều mệnh đề đã có.

Mệnh đề đã có gọi là tiền đề, mệnh đề mới gọi là kết luận.

Trong chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p_1, p_2, \ldots p_n$ gọi là tiền đề , ta áp dụng các qui tắc suy diễn để suy ra tính đúng của một mệnh đề q gọi là kết luận, hay nói cách khác mệnh đề $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ là một hằng đúng.

Ta dùng sơ đồ sau:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

1.3.2 Một số qui tắc suy diễn.

1. Qui tắc Modus Ponens (phương pháp khẳng định).

   Được thể hiện bởi hằng đúng: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

   Ví dụ 1: Tục ngữ có câu : "Trăng quầng trời hạn, trăng tán trời mưa"

Nếu trăng tán thì trời mưa	$p \rightarrow q$
mà trăng tán	p
Kết luận: trời mưa	$\therefore q$

   Ví dụ 2:

Nếu Lan lười học thì sẽ không đạt môn toán rời rạc	$p \rightarrow q$
mà Lan lười học	p
Vậy Lan không đạt môn toán rời rạc	$\therefore q$

2. Qui tắc Modus Tollens (phương pháp phủ định).

   Qui tắc này được thể hiện bởi hằng đúng sau:

   $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

   Ví dụ :

Nếu Hùng chăm học thì sẽ đạt môn toán rời rạc	$p \rightarrow q$
Hùng không đạt môn toán rời rạc	$\neg p$
Vậy Hùng không chăm học	$\therefore \neg q$

3. Tam đọan luận.

   Dựa theo hằng đúng : $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

Ví dụ :

Nếu chúng ta đoàn kết thì chúng ta mạnh	$p \to q$
Nếu chúng ta mạnh thì chúng ta đánh thắng mọi kẻ thù	$q \to r$
Vậy nếu chúng ta đoàn kết thì chúng ta đánh thắng mọi kẻ thù	$\therefore p \to r$

4. Qui tắc mâu thuẫn (chứng minh bằng phản chứng)

   Dựa theo hằng đúng: $p \to q \iff [(p \wedge \neg q) \to 0]$

Ví dụ : Dùng phương pháp phản chứng cho chứng minh sau:

$p \to r$

$\neg p \to q$

$\underline{q \to s}$

$\therefore \neg r \to s$

1.4 Vị từ và lượng từ.

1.4.1 Vi từ.

Định nghĩa : Vị từ là một khẳng định p(x,y,...) trong đó x,y,.. là biến có giá trị trong những tập cho trước A, B, .. sao cho :

- Bản thân p(x,y,...) không phải là mệnh đề.
- Nếu thay x, y,... bởi các giá trị cụ thể $a \in A$, $b \in B$ ta sẽ được một mệnh đề p(a,b,...). Các biến x,y,.. gọi là biến tự do của vị từ.

Ví dụ 1: p(n) = “ n là một số nguyên tố “ là một vị từ theo biến tự do $n \in N$

Ví dụ 2: q(x,y) = “ x = y + 3 “ là một vị từ theo hai biến tự do $x,y \in R$

1.4.2 Lượng từ.

Dùng hai lượng từ “với mọi” và “tồn tại” để chuyển một vị từ thành mệnh đề.

Định nghĩa: giả sử p(x) là một vị từ theo biến $x \in A$.

- Mệnh đề “với mọi $x \in A$, p(x)” ký hiệu bởi “$\forall x \in A$, p(x)” được gọi là lượng từ hóa của vị từ p(x) bởi lượng từ khái quát $\forall$.
- Mệnh đề “tồn tại $x \in A$, p(x)” ký hiệu bởi “$\exists x \in A$, p(x)” được gọi là lượng từ hóa của vị từ p(x) bởi lượng từ khái quát $\exists$.

Nếu A là một tập hữu hạn phần tử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ thì:

- $\forall x\ p(x)$ tương đương với mệnh đề $p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge ... \wedge p(a_n)$
- $\exists x\ p(x)$ tương đương với mệnh đề $p(a_1) \vee p(a_2) \vee ... \vee p(a_n)$

Ví dụ : Cho vị từ p(n) = “ n là một số nguyên tố “ .

Mệnh đề $\forall n \in N$, p(n) có chân trị là 0 (sai)

Mệnh đề $\exists n \in N$, p(n) có chân trị là 1 (đúng)

Định lý (sự hoán vị các lượng từ) Nếu p(x,y) là một lượng từ theo hai biến x, y thì các mệnh đề sau là đúng:

1) $[\ \forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)\ ] \leftrightarrow [\ \forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)\ ]$
2) $[\ \exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)\ ] \leftrightarrow [\ \exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)\ ]$
3) $[\ \exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)\ ] \to [\ \forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)\ ]$

Mệnh đề đảo của 3) không đúng, thí dụ p(x,y) = " x + y = 1" .

1.4.3 Phủ định của lượng từ.

$$\rceil(\forall x \in A, p(x)) \leftrightarrow \exists x \in A, \rceil p(x)$$
$$\rceil(\exists x \in A, p(x)) \leftrightarrow \forall x \in A, \rceil p(x)$$

Ví dụ :Một hàm thực f(x) liên tục tại $x_0 \in R$ được định nghĩa bởi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R, (|\ x - x_0\ | < \delta) \to (|\ f(x) - f(x_0)\ | < \delta\ )$$

Lấy phủ định ta sẽ được định nghĩa hàm f(x) không liên tục tại $x_0 \in R$:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R, (|\ x - x_0\ | < \delta) \wedge (|\ f(x) - f(x_0)\ | \geq \delta\ )$$

1.5Ứng dụng logic vào một số vấn đề toán học.

1.5.1 Biểu thị một mệnh đề toán học

1. Định lý. Điều kiện cần. Điều kiện đủ.

Các định lý toán học thường được biểu thị bằng mệnh đề đúng có dạng

$P \Rightarrow Q$

trong đó P, Q là các mệnh đề.

Ta nói : P là điều kiện đủ để có Q (vì P đúng thì Q đúng)

Q là điều kiện cần để có P (vì Q sai thì P sai)

Ví dụ: xem hai mệnh đề

P = "Số tự nhiên n có tổng các chữ số chia hết cho 9 "

Q = "Số tự nhiên n chia hết cho 3 "

Ta phát biểu:

- Để một số tự nhiên chia hết cho 3 điều kiện đủ là tổng các chữ số chia hết cho 9.
- Để một số tự nhiên có tổng các chữ số chia hết cho 9 điều kiện cần là nó chia hết cho 3.

2. Định lý đảo. Điều kiện cần và đủ.

Giả sử ta có định lý $P \Rightarrow Q$

Khi đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo.

Nếu mệnh đề đảo đúng thì ta có một định lý gọi là định lý đảo,

định lý trên gọi là định lý thuận.

Nếu đồng thời có định lý thuận và định lý đảo thì ta có mệnh đề đúng: $P \Leftrightarrow Q$

Lúc đó ta nói "P là điều kiện cần và đủ để có Q"

Ví dụ: P = "Tam giác ABC là một tam giác đều "

Q = "Tam giác ABC là một tam giác cân và có một góc bằng 60^0 "

Ta có thể phát biểu:

"Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC là một tam giác đều là nó là một tam giác cân và có một góc bằng 60^0 "

1.5.2 Một số phương pháp chứng minh toán học.

1) Phương pháp chứng minh trực tiếp

Để chứng minh mệnh đề đúng có dạng $E \Rightarrow F$,

ta xây dựng và chứng minh dãy các mệnh đề sau là đúng:

$E \Rightarrow E_1$

$E_1 \Rightarrow E_2$

……

$E_n \Rightarrow F$

Ví dụ : chứng minh nếu n nguyên tố > 5 thì n^2-1 chia hết cho 24

Giải :

1) n là nguyên tố > 5 ⇒ n-1, n+1 là các số chẵn.
2) n-1 và n+1 là hai số chẵn liên tiếp ⇒ (n-1).(n+1) chia hết cho 8.
3) n-1, n, n+1 là ba số nguyên liên tiếp ⇒ (n-1).n.(n+1) chia hết cho 3.
4) n là số nguyên tố > 5 ⇒ n không chia hết cho 3.
5) từ 3) và 4) ta có (n-1).(n+1) chia hết cho 3.
6) từ 2) và 5) ta có n^2-1 = (n-1).(n+1) chia hết cho 8x3=24

2) Phương pháp chứng minh phản chứng

Cơ sở của phương pháp chứng minh phản chứng là qui tắc mâu thuẫn:

$$p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge \neg q) \rightarrow 0$$

3) Phương pháp chứng minh quy nạp

Nguyên lý quy nạp : mệnh đề $\forall n \in N$, p(n) là hệ quả của mệnh đề

$$P(0) \wedge [\forall n \in N, p(n) \rightarrow p(n+1)]$$

Để chứng minh p(n) đúng với mọi $n \in N$, ta thực hiện 2 bước:

Bước 1 (cơ sở) : kiểm chứng p(0) đúng.

Bước 2 (quy nạp) : giả sử $n \in N$ đúng, ta chứng minh p(n+1) đúng.

Ví dụ 1: chứng minh $\forall$ $n \in N$ ta có :

$$0 + 1 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ví dụ 2: cô Lan cầm 1 tờ giấy và cắt thành 7 mảnh, sau đó nhặt một trong những mảnh giấy đã cắt và lại cắt thành 7 mảnh và cứ tiếp tục cắt như vậy. Sau một hồi cô Lan thu những mảnh giấy đã cắt và đếm được 122 mảnh. Hỏi cô Lan đếm đúng hay sai ?

Hướng dẫn : tổng số mảnh giấy có dạng 6k+1.

Bài tập chương 1

Chương 2 : PHÉP ĐẾM.

2.1 Nhắc lại lý thuyết tập hợp và ánh xạ.

2.2 Tập hợp.

1. Khái niệm về tập hợp

a. <u>Tập hợp và phần tử.</u>

Tập hợp là một trong những khái niệm cơ bản (nguyên thủy) của toán học, không được định nghĩa, mà làm cơ sở để định nghĩa các khái niệm khác.

Ví dụ:

- Tập hợp các bài thơ của Hàn Mặc Tử.
- Tập hợp các nghiệm số thực của phương trình $x^2+3x-4=0$.
- Họ các đường tròn đồng tâm.
- Lớp các hàm đa thức.
- Hệ các phương trình tuyến tính.

b. <u>Diển tả tập hợp.</u>

Cách 1: Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử tạo ra tập hợp, thường được thể hiện bởi một vị từ p(x) theo một biến x :

$A = \{ x \in U \mid p(x)\}$

U được gọi là tập hợp vũ trụ.

Ví dụ : $A = \{ x \in N \mid$ x là số nguyên tố $\}$

$A = \{ x \in R \mid x^2 -1 = 0 \}$

Cách 2 : Liệt kê tất cả các phần tử viết trong hai dấu ngoặc nhọn { } cách nhau bởi dấu ; hoặc ,

Ví dụ : $A = \{ -1, 1 \}$

$B = \{ -2; 5; 7; 105 \}$

c. <u>Các tập hợp số.</u>

$N = \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$: tập hợp các số tự nhiên.

$N^* = \{ 1, 2, 3, ... \}$: tập hợp các số tự nhiên khác không.

$Z = \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$: tập hợp các số nguyên.

$Q = \{ p/q \mid p,q \in Z$ và $q\neq 0 \}$: tập hợp các số tự nhiên.

R : tập hợp các số tự thực.

C : tập hợp các số phức.

d. <u>Phân loại.</u>

Nếu tập hợp A có n phần tử thì ta nói A là tập hữu hạn và viết $|A| = n$.

Nếu tập hợp A có vô số phần tử thì ta nói A là tập vô hạn và viết $|A| = +\infty$.

e. <u>Tập hợp rỗng.</u>

Tập hợp không có phần tử nào gọi là tạo hợp rỗng. Ký hiệu $\varnothing$.

Như vậy $|A| = 0$

f. **<u>Tập hợp con</u>**. Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là tập hợp con của B, ký hiệu $A \subset B$.
Như vậy : $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$
Từ định nghĩa ta có :

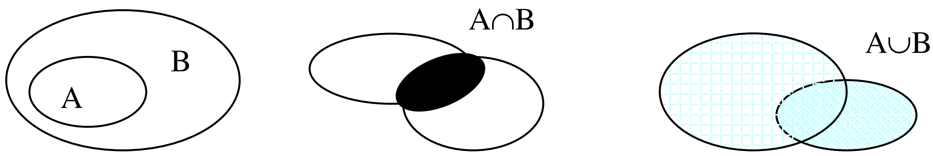
$\varnothing \subset A$

$A \subset A$

Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ th2 ta nói A bằng B và viết $A = B$

Nếu $A \neq B$ thì $A \not\subset B$ và $B \not\subset A$

g. **<u>Biểu đồ Venn</u>** : Để dễ hình dung một số quan hệ giữa các tập hợp người ta còn biểu diễn tập hợp bởi một đường cong kín gọi là biểu đồ Venn.
Ví dụ :



2. Các phép toán trên tập hợp.

<u>Định nghĩa</u> : Giả sử A, B là hai tập hợp con của tập hợp vũ trụ U.

a. Phép giao: $A \cap B = \{ x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$
b. Phép hợp: $A \cup B = \{ x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$
c. Phần bù: $\overline{A} = \{ x \in U \mid x \notin A \}$

3. Tính chất của các phép toán.

1. Tính giao hoán.
   $A \cap B = B \cap A$
   $A \cup B = B \cup A$
2. Tính kết hợp.
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Tính phân phối.
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Công thức De Morgan.
   $A \cup B = \overline{A} \cap \overline{B}$
   $A \cap B = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Phần tử trung hòa.
   $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap U = U$
6. Phần bù.
   $A \cup \overline{A} = U$
   $A \cap \overline{A} = \varnothing$
7. Tính thống trị.
   $A \cup U = U$
   $A \cap \varnothing =$

Ghi chú:

Ta có thể viết $A \cup B \cup C$ thay cho $(A \cup B) \cup C$ hay $A \cup (B \cup C)$

và $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ \ldots \cap A_n$$

4. Tích Descartes của tập hợp.

Tích Descartes của hai tập hợp A, B ký hiệu A_xB là các cặp có thứ tự (a,b) trong đó $a \in A$, $b \in B$.

$$A_xB = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Ví dụ, nếu A={a,b}, B={1,2,3} thì

$A_xB = \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$

Định lý : Cho các tập hợp hữu hạn A, B, $A_1, A_2, \dots A_n$ .Ta có:

$$|A_xB| = |A| . |A|$$

$$| A_1 \,_x A_2 \,_x \dots _x A_n | = |A_1|.|A_2|\dots|A_n|$$

2.2 Ánh xạ.

Các định nghĩa

Định nghĩa 1:

Một ánh xạ f từ tập hợp X vào tập hợp Y, ký hiệu f:X→Y, là phép tương ứng liên kết mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$.

Khi ấy ta viết :

$$f: X \to Y$$
$$x \to y=f(x)$$

X gọi là tập nguồn, Y gọi là tập đích

Phần tử y = f(x) gọi là ảnh của x, x gọi là nghịch ảnh của y

$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x) \}$ gọi là miền giá trị của f.

Ví dụ :

Phép tương ứng $f : R \to R$

$$x \to y = 2x+1$$

là một ánh xạ từ R vào R.

Phép tương ứng $f : R \to R$

$$X \to y = \frac{2}{x-5}$$

không phải là ánh xạ từ R vào R.

Định nghĩa 2:

i. Nếu A là một tập con của X thì ảnh của A bởi f là tập hợp

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y=f(x) \}$$

ta cũng viết $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

ii. Nếu B là tập con của Y thì ảnh ngược của B là tập hợp

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$

<u>Định nghĩa 3</u> (các loại ánh xạ) Cho ánh xạ f:X→Y

- f được gọi là đơn ánh nếu $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- f được gọi là toàn ánh nếu f(X) = Y
- f được gọi là song ánh nếu f đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.

Chú ý : nếu $f:X\to Y$ là song ánh, khi ấy $\forall y \in Y, \exists! x \in X: f(x)=y$

Do đó tương ứng $y\to x$ là một ánh xạ từ Y vào X và gọi là ánh xạ ngược của f, ký hiệu f^{-1}

Ví dụ:

Cho $f : Z \to Q$ sao cho $f(x) = \frac{x}{2}$, f đơn ánh nhưng không toàn ánh.

Cho $f : R \to R$ sao cho $f(x) = x^3$, f là song ánh, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Cho $f : R \to R$, $f(x) = 2x+1$ là song ánh và $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Định nghĩa 4 (ánh xạ hợp): Cho hai ánh xạ

$f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$

Ánh xạ hợp h là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi:

$h = g_o f : X \to Z$

$x \to h(x) = g(f(x))$

Ví dụ: cho $f : R \to R$ xác định bởi $f(x) = \cos(x)$

và $g : R \to R$ xác định bởi $g(x) = x^3+1$

Ta có $g_o f : R \to R$ xác định bởi $g_o f(x) = g(f(x)) = g(\cos(x)) = \cos^2 x+1$

Định lý: Giả sử f là một ánh xạ từ X vào Y, A_1, A_2 là hai tập con tùy ý của X, B_1, B_2 là hai tập con tùy ý của Y. Ta có:

$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Phép đếm.

2.2.1 Những nguyên lý đếm cơ bản.

1. **Nguyên lý cộng.**

Giả sử một công việc được phân thành n trường hợp riêng biệt: Trường hợp 1 có m_1 cách, trường hợp 2 có m_2 cách, ..., trường hợp n có m_n cách. Khi đó số cách chọn thực hiện công việc là $m_1 + m_2 +...+ m_n$

Ví dụ 1: Cho tập hợp A = {a, b, c}. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một tập con B của A

Giải: Một tập hợp con B của A có số phần tử từ 0 cho đến 3 :

Trường hợp 1: $|B| = 0$, có 1 cách chọn ($\varnothing$).

Trường hợp 2: $|B| = 1$, có 3 cách chọn ({a}, {b}, {c}).

Trường hợp 3: $|B| = 2$, có 3 cách chọn ({a,b}, {a,c}, {b,c}).

Trường hợp 4: $|B| = 1$, có 1 cách chọn ({a, b, c}).

Vậy số cách chọn là 1+3+3+1 = 8

Ví dụ 2: Giá trị biến k bằng bao nhiêu sau khi đoạn chương trình Pascal sau được thực hiện ?

```
k := 0
for i :=1 to n1 do
        k:=k+1;
for i :=1 to n2 do
        k:=k+1;
        .
        .
        .
for i :=1 to nm do
        k:=k+1;
```

Chú ý : nguyên lý cộng có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho $A_1, A_2, \ldots A_n$ là các tập hợp rời nhau, ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Ví dụ 3: Một trường PTTH có 250 học sinh lớp 10, 200 học sinh lớp 11 và 150 học sinh lớp 12. Hỏi số học sinh tổng cộng của trường là bao nhiêu ?

$$250 + 200 + 150 = 600$$

2. **Nguyên lý nhân.**

Giả sử một công việc được thực hiện qua n bước liên tiếp, bước 1 có m_1 cách, bước 2 có m_2 cách, ..., bước n có m_n cách. Khi đó số cách chọn thực hiện công việc là $m_1 . m_2 \ldots m_n$

Ví dụ 1: Trong một lớp học có 30 người. Có bao nhiêu cách cử một ban đại diện gồm một lớp trưởng, một lớp phó, một thủ quỹ ?

Việc cử ra ban đại diện gồm 3 bước:

Bước 1: cử lớp trưởng, có 30 cách.

Bước 2: cử lớp phó , có 29 cách.

Bước 3: cử thủ quỹ , có 28 cách.

Vậy theo nguyên lý nhân, có 30.29.28 = 24360 cách.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 10 ?

Giải: Đặt $x = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ là số thỏa mãn bài toán.

a_5 có 1 cách chọn (vì x chia hết cho 10 nên $a_5 = 0$).

a_4 có 9 cách chọn.

a_3 có 8 cách chọn.

a_2 có 7 cách chọn.

a_1 có 6 cách chọn.

Theo nguyên lý nhân có 1.9.8.7.6 = 3024 số thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài bằng 7 ?

Giải : Mỗi một bit trong dãy nhị phân có 2 cách chọn. Theo nguyên lý nhân có $2^7 = 128$ dãy nhị phân có độ dài 7.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu ánh xạ từ tập hợp A có m phần tử vào tập hợp B có n phần tử ?

Giải : Mỗi phần tử trong tập hợp A có thể chọn n ảnh trong B.

Vậy có n^m cách chọn ánh xạ từ A sang B.

Ví dụ 5: Một hệ thống máy tính có mật khẩu truy cập dài từ sáu đến tám ký tự , trong đó ký tự là chữ cái hoa hoặc chữ số, mỗi mật khẩu phải chứa ít nhật một chữ số . Hỏi có bao nhiêu mật khẩu ?

Giải : Gọi P là tổng số mật khẩu cần tìm và P_6, P_7, P_8 tương ứng là số mật khẩu dài 6,7,8 ký tự. Theo nguyên lý cộng ta có $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Mà $P_6 = P_{6a} - P_{6b}$ với P_{6a} là số mật khẩu dài 6 ký tự, P_{6b} là số mật khẩu dài 6 ký tự không chứa chữ số nào cả.

Ta có $P_{6a} = 36^6$, $P_{6b} = 26^6$ (26 ký tự chữ cái hoa và 10 ký tự chữ số)

Vậy $P_6 = 36^6 - 26^6$

Tương tự $P_7 = 36^7 - 26^7$, $P_8 = 36^8 - 26^8$

Vậy $P = 36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8 = 2.684.483.063.360$

Chú ý : nguyên lý nhân có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho $A_1, A_2, \ldots A_n$ là các tập hợp , ta có:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| . |A_2| . \ldots .|A_n|$$

2.2.2 Nguyên lý bù trừ.

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời ta tính tổng số cách làm từng công việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai công việc.

Ví dụ 1: Có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài bằng 8 hoặc bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00 ?

Giải : Số dãy nhị phân dài 8 bit bắt đầu bằng 1 là $2^7 = 128$.

Số dãy nhị phân dài 8 bit kết thúc bằng 00 là $2^6 = 65$.

Số dãy nhị phân dài 8 bit bắt đầu 1 và kết thúc 00 là $2^5 = 32$

Vậy tổng số dãy nhị phân cần tìm là 128+64+32 = 160

Chú ý : nguyên lý bù trừ có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho $A_1, A_2, \ldots A_n$ là các tập hợp , ta có:

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Ví dụ 2: Trong một lớp học có 180 sinh viên. Trong số này có 55 sinh viên chọn học môn Anh văn, 45 sinh viên chọn học môn Anh văn và 15 sinh viên chọn học cả hai môn Anh văn, Pháp văn. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không theo học Anh văn lẫn Pháp văn.

Giải : gọi A, B lần lượt là tập sinh viên chọn học môn Anh văn, Pháp văn.

Ta có $|A| = 55$, $|B| = 45$, $|A \cap B| = 15$.

Số SV theo học Anh hoặc Pháp văn là $|A| + |B| - |A \cap B| = 55+45-15 = 85$

Vậy số SV không học cả Anh lẫn Pháp văn là $180 - 85 = 95$

Ví dụ 3: Giả sử có 1200 sinh viên học tiếng Anh, 850 sinh viên học tiếng Pháp và 100 sinh viên học tiếng Đức, 90 sinh viên học cả tiếng Anh và Pháp, 15 sinh viên học cả tiếng Anh và Đức, 10 sinh viên học cả tiếng Pháp và Đức . Nếu tất cả 2050 sinh viên đều học ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng ?

Giải : Đặt A, B, C lần lượt là tập hợp sinh viên học tiếng Anh, Pháp, Đức.

Khi đó: $|A| = 1200$, $|B| = 850$, $|C| = 100$,

$|A \cap B| = 90$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 10$

Mà $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Hay $2050 = 1200 + 850 + 100 - 90 - 15 - 10 + |A \cap B \cap C|$

Vậy $|A \cap B \cap C| = 15$

Ví dụ 4: Hỏi trong tập $X = \{ 1, 2, \ldots, 10000 \}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, 7 ?

Giải : Đặt $A_i = \{ x \in X \mid x \text{ chia hết cho } i \}$, $i = 3, 4, 7$

Vậy số lượng các số cần đếm là

$N = 10000 - |A_3 \cup A_4 \cup A_7|$

$= 10000 - |A_3| - |A_4| - |A_7| + |A_3 \cap A_4| + |A_3 \cap A_7| + |A_4 \cap A_7| - |A_3 \cap A_4 \cap A_7|$

$= 10000 - [10000/3] - [10000/4] - [10000/7] + [10000/12] + [10000/21] + [10000/28] - [10000/84]$

$= 4286$

2.3. Giải tích tổ hợp.

2.3.1. Hoán vị.

Định nghĩa: Một hoán vị của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm đủ mặt n phần tử đã chọn.

Ví dụ : Với M = {1,2,3} ta có tất cả các hoán vị sau đây của M:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)

Định lý : Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$

Ví dụ 1: Thầy giáo muốn tặng 5 quyển sách khác nhau cho 5 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách tặng ?

Giải : Số cách tặng là $P_5 = 5! = 120$

Ví dụ 2: Người ta xếp ngẫu nhiên 5 lá phiếu ghi số từ 1 đến 5 cạnh nhau.

a) Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu chẵn luôn ở cạnh nhau ?
b) Có bao nhiêu cách xếp để các phiếu phân thành hai nhóm chẵn lẻ riêng biệt ?

Giải :

a) Có thể xếp các phiếu chẵn vào vị trí có dấu *, phiếu lẻ vào vị trí có dấu + :

+++   +++   ++**+   +++* *

Vậy số cách xếp là : 4 . 2! . 3! = 48

b) Có thể xếp thành hai trường hợp :

+++   và   +++

Vậy số cách xếp là 2 . 2! . 3! = 24

2.3.2. Tổ hợp và chỉnh hợp.

Định nghĩa :

a. Một chỉnh hợp chập k từ n phần tử ($1 \le k \le n$) là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.
b. Một tổ hợp chập k từ n phần tử ($1 \le k \le n$) là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Chú ý : Cho tập M có n phần tử.

Có 1 tổ hợp chập 0 của M, đó là tập rỗng.

Có 1 tổ hợp chập n của M, đó là tập M.

M có 2^n tập con.

Định lý :

a) Số chỉnh hợp chập k của tập n phần tử là:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

b) Số tổ hợp chập k của tập n phần tử là:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ví dụ 1: Một lớp học 10 môn, mỗi ngày học hai môn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp thời khóa biểu ?

Số cách sắp xếp thời khóa biểu là số chỉnh hợp chập 2 từ 10 phần tử :

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10.9 = 90$$

Ví dụ 2 : Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ . Có bao nhiêu cách chọn một nhóm 5 người trong đó có đúng 2 nữ.

Giải :

Số cách chọn 2 nữ trong số 6 nữ là $C_6^2 = \frac{6!}{2!.4!} = 15$

Số cách chọn 3 nam trong số 8 nam là $C_8^3 = \frac{8!}{3!.5!} = 56$

Vậy số cách chọn là 15.56 = 840

Ví dụ 3 : Một lớp học có 20 sinh viên trong đó 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự hội nghị sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp.

Giải :

Số cách chọn 3 trong số 20 sinh viên tùy ý : C_{20}^3 .

Số cách chọn 3 trong số 18 sinh viên không có cán bộ lớp : C_{18}^3

Vậy số cách chọn theo đề bài : $C_{20}^3 - C_{18}^3 = \frac{20!}{3!.17!} - \frac{18!}{3!15!} = 1140 - 816 = 324$

Ví dụ 4: Cho 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

a) Có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi một ?
b) Trong các số ở a) có bao nhiêu số chẵn ?

Giải :

a) Mỗi số ứng với một chỉnh hợp chập 5 từ 7 phần tử

$$C_7^5 = 7.6.5.4.3 = 2520$$

b) Đặt số $x = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

Do x chẵn nên $a_5 = 2, 4, 6$:có 3 cách chọn.

Với mỗi cách chọn a_5 có $C_6^4 = 6.5.4.3 = 360$

Vậy số cách chọn là 3 . 360 = 1080

Định lý : Cho các số nguyên n, k thõa : $n \geq 1$ và $0 \leq k \leq n$. Khi đó:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$

b) $C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

c) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

2.3.3. Tổ hợp và chỉnh hợp lặp.

Định nghĩa :

a) Một chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể có mặt 1,2,.. , k lần trong nhóm tạo thành.

b) Một tổ hợp lặp chập k từ n phần tử là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Lưu ý : Vì mỗi phần tử có thể xuất hiện nhiều lần nên có thể k > n.

Ví dụ : Cho 3 phần tử 2, 3, 5.

Ta có các chỉnh hợp lặp chập 2 là:

(2,2) (2,3) (2,5)
(3,2) (3,3) (3,5)
(5,2), (5,3) (5,5)

Ta có các tổ hợp lặp chập 2 là:

(2,2) (2,3) (2,5)
(3,3) (3,5) (5,5)

Định lý :

a) Số chỉnh hợp lặp chập k của tập n phần tử là: $\overline{A}_n^k = n^k$

b) Số tổ hợp lặp chập k của tập n phần tử là: $\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Ví dụ 1: Để đăng ký một loại máy mới người ta dùng 3 chữ số trong 9 chữ số từ 1 đến 9. Hỏi có thể đánh số được bao nhiêu máy ?

Giải: Mỗi số máy là một chỉnh hợp lặp chập 3 từ 9 phần tử đã cho.

Vậy có thể đánh số được $\overline{A}_9^3 = 9^3 = 729$

Ví dụ 2: Có 4 loại bút chì xanh, đỏ, vàng, tím và mỗi loại có ít nhất 6 cây bút.

Có bao nhiêu cách khác nhau để mua 6 cây ?

Giải : Số cách mua 6 cây bút chì là số tổ hợp lặp chập 6 từ 4 phần tử đã cho

$$\widetilde{C}_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84$$

Định lý : (Khai triển lý nhị thức Newton)

Cho các số thực a, b và số nguyên n ≥ 1. Ta có:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n \qquad (*)$$

Chú ý : Vì $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên các số hạng vế phải của (*) có tính đối xứng.

Ví dụ 1: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Ví dụ 2: Tính hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(x+y)^{25}$

Giải : hệ số này bằng $C_{25}^{13} = \dfrac{25!}{12!13!} = 5.200.300$

2.4 Nguyên lý Dirichlet (nguyên lý chuồng bồ câu).

2.4.1 Nguyên lý Dirichlet.

Có n con bồ câu được xếp vào m cái chuồng với n>m.
Khi đó có ít nhất một chuồng chứa ít nhất 2 con bồ câu.

Ví dụ 1: Trong số 367 người bao giờ cũng tìm được hai người có ngày sinh giống nhau.

Ví dụ 2: Trong kỳ thi học sinh giỏi Toán, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu học sinh dự thi để chắc chắn tìm được hai học sinh có điểm giống nhau.

2.4.1 Nguyên lý Dirichlet tổng quát.

Nếu đem xếp n đối tượng vào k hộp thì luôn tìm được một cái hộp chứa không ít hơn n/k đối tượng.

Ví dụ 1: Trong 100 người có ít nhất bao nhiêu người sinh cùng trong một tháng ? (100 / 12 = 8,3 → 9 người)

Ví dụ 2: Trong lớp có 30 học sinh. Khi viết chính tả em Hùng phạm 13 lỗi, còn các em khác ít hơn. Chứng minh rằng trong lớp có ít nhất 3 em mắc cùng số lỗi như nhau.

Bài tập chương 2

Chương 3 : THUẬT TOÁN

3.1 Thuật toán.

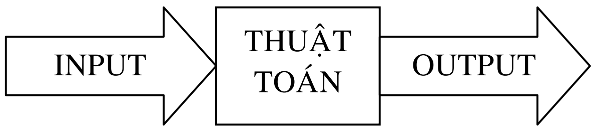
3.1.1 Khái niệm thuật toán.

Khi thiết kế và cài đặt một phần mềm tin học cho một vấn đề nào đó, chúng ta cần phải đưa ra phương pháp giải quyết mà thực chất là thuật toán giải quyết vấn đề này. Nếu không tìm ra một phương pháp giải quyết thì không thể lập trình được.

Định nghĩa: Thuật toán giải bài toán đặt ra là một thủ tục xác định bao gồm một dãy hhữu hạn các bước cần thực hiện để thu được lời giải của bài toán.

Các đặc trưng của thuật toán:

- Đầu vào và đầu ra (input/output): Mọi thuật toán dù đơn giản đến mấy cũng nhận dữ liệu đầu vào, xử lý nó rồi cho ra dữ liệu cuối cùng.



- Tính xác định (definiteness): Các bước trong thuật toán phải được xác định chính xác và rõ ràng, không thể gây nên sự nhập nhằng, lẫn lộn. Nói cách khác là trong cùng một điều kiện, hai bộ xử lý (người hoặc máy) thực hiện cùng một bước của thuật toán thì phải cho cùng kết quả.
- Tính hữu hạn (finiteness): một thuật toán phải cho ra lời giải đúng (hay kết quả) sau một số hữu hạn bước với mọi đầu vào.
- Tính đơn trị (uniqueness): Các kết quả trung gian của từng bước thực hiện một thuật toán được xác định đơn trị và chỉ phụ thuộc vào đầu vào và các kết quả cũa các bước trước.
- Tính hiệu quả (effectiveness): Một bài toán có thể có nhiều thuật toán khác nhau. Tính hiệu quả của một thuật toán được đánh giá dựa trên một số tiêu chuẩn như : số phép tính cần thực hiện, dung lượng bộ nhớ và thời gian khi thuật toán được thi hành.
- Tính tổng quát (generaliness): Một thuật toán có tính tổng quát là thuật toán phải được áp dụng cho mọi trường hợp của bài toán chứ không phải chỉ áp dụng cho một vài trường hợp đơn lẻ nào đó.

Ví dụ 1: Cho 3 số nguyên a, b,c. Mô tả thuật toán tìm số lớn nhất trong ba số đã cho.
Giải:

1. **Input : yêu cầu cho biết giá trị của a,b,c.**
2. **Đặt x := a**
3. **Nếu b > x thì đặt x := b**
4. **Nếu c > x thì đặt x := c**
5. **Output: Số lớn nhất là x**

Tư tưởng của thuật toán là duyệt lần lượt giá trị của từng số và giữ lại giá trị lớn nhất và biến x. Kết thúc thuật toán, x cho số nguyên lớn nhất trong ba số đã cho.

Ví dụ 2: Thuật toán giải phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)
Giải:

1. **Input : yêu cầu cho biết giá trị của a,b,c.**
2. **Nếu a=0 thì**
   - **2.1 Thông báo đầu vào không đảm bảo.**
   - **2.1 Kết thúc thuật toán**
3. **Trường hợp $a \neq 0$ thì**
   - **3.1 Tính giá trị $\Delta = b^2 - 4ac$**
   - **3.2 Nếu $\Delta > 0$ thì**
     - **3.2.1 Phương trình có hai ngiệm phân biệt**

       $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
     - **3.2.2 Kết thúc thuật toán.**
   - **3.3 Nếu $\Delta = 0$ thì**
     - **3.3.1 Phương trình có ngiệm kép**

       $$x = \frac{-b}{2a}$$
     - **3.3.2 Kết thúc thuật toán.**
   - **3.4 Nếu $\Delta < 0$ thì**
     - **3.4.1 Phương trình vô ngiệm.**
     - **3.4.2 Kết thúc thuật toán.**

3.1.2 **Biểu diễn thuật toán.**

Có ba phương pháp thường dùng để biểu diễn thuật toán:

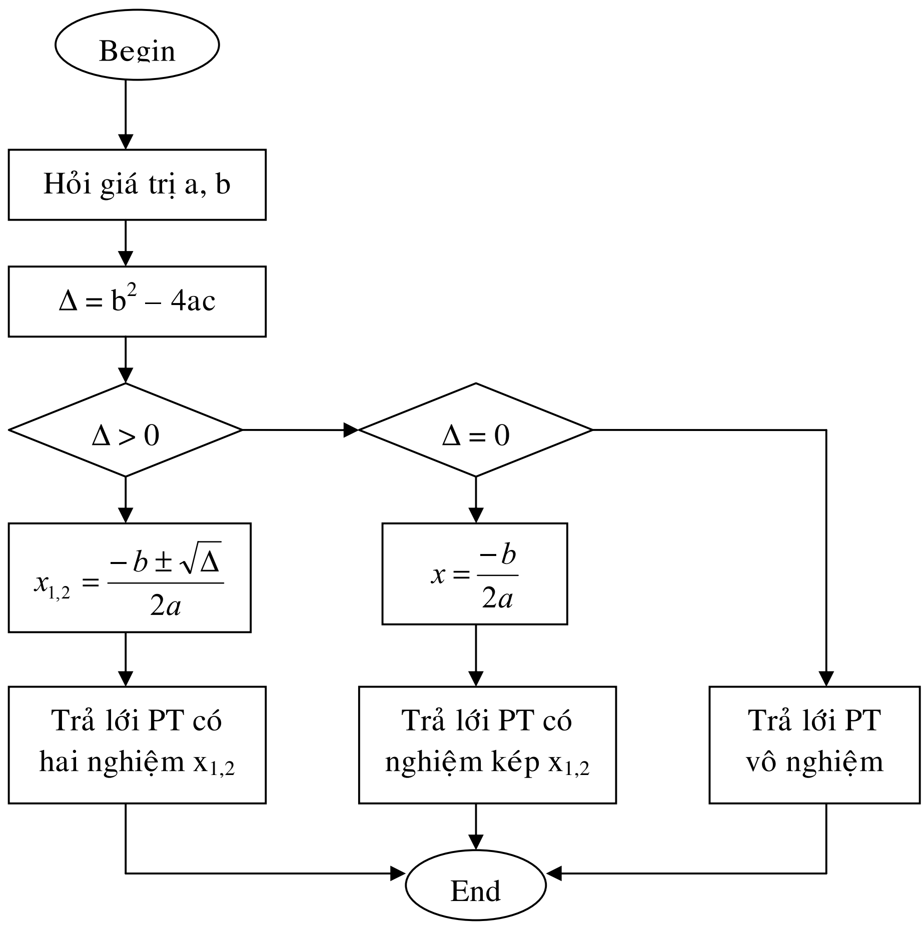
- Dùng ngôn ngữ tự nhiên.
- Dùng lưu đồ.
- Dùng mã giả.

1. Ngôn ngữ tự nhiên:

    Hai ví dụ trên diễn tả thuật toán theo ngôn ngữ tự nhiên

2. Lưu đồ.

    Ví dụ : Lưu đồ thuật toán phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$



3. Mã giả.
   Việc sử dụng lưu đồ sẽ rát cồng kềnh đối với các thuật toán phức tạp. Vì vậy người ta coǹ viết các thuật giải theo một ngôn ngữ tựa ngôn ngữ lập trình, được gọi là mã giả. Trong mã giả, ta sử dụng các cú pháp có cấu trúc chuẩn hóa của một ngôn ngữ lập trình nào đó (như Psacal,..) và vẫn sử dụng ngôn ngữ tự nhiên.

   Ví dụ : Thuật toán giải PT bậc hai $ax^2 - bx + c = 0$

```
If delta > 0 then
        Begin
                x1 := (-b + sqrt(delta) / (2*a)
                x2 := (-b - sqrt(delta) / (2*a)
                xuất kết quả : phương trình có hai nghiệm là x1 và x2
        end
else
        if delta = 0 then
                xuất kết quả : phương trình có nghiệm kép là –b/(2*a)
        else
                xuất kết quả phương trình vô nghiệm
```

3.2 Một số thuật toán xử lý số

3.2.1 Thuật toán kiểm tra số nguyên tố

Vấn đề : Cho một số nguyên dương m. Kiểm tra m có phải là số nguyên dương hay không ?

```
*       Input : Số nguyên dương m.
*       Output : true nếu m là số nguyên tố, false nếu ngược lại.
Function NguyenTo(m);
Begin
        i := 2;
        while (i <= √m ) and ( m mod i = 0) do i := i+1;
        NguyenTo := (i > √m );
End;
```

Từ thuật toán trên ta có thuật toán tìm và in ra các số nguyên tố nhỏ hơn số nguyên dương n cho trước:

```
*       Input : Số nguyên dương n.
*       Output : các số nguyên tố nhỏ hơn n.
Function ListNguyenTo(n);
Begin
        for i := 2 to n-1 do
                if NguyenTo(i) then write(i,5);
End;
```

3.2.2 Thuật toán tìm ước số chung lớn nhất của hai số tự nhiên

Vấn đề : Cho a, b là hai số tự nhiên. Tìm ước số chung lớn nhất của a và b ?

Theo định nghĩa: ước chung lớn nhất (UCLN) của hai số a và b là só tự nhiên d lớn nhất trong tập các ước chung của a và b, tức là : $d = \max\{c \mid a:c\ ,\ b:c\ \}$

Chú ý : với mọi số tự nhiên a, ta có : UCLN(a, 1) = 1; UCLN(a, 0) = a

Qui ước : UCLN(0, 0) = 0

Ta có tính chất : UCLN(a,b) không đổi khi ta hay số lớn hơn trong hai số bằng hiệu số của nó với số thứ hai: UCLN(a,b) = UCLN(a, b-a) nếu b > a

```
*       Input : Hai số nguyên dương a, b.
*       Output : UCLN của a và b.
Function UCLN(a,b);
Begin
        while (a > 0) and ( b > 0 ) do
                if a>= b then a := a-b
                else b := b – a;
        UCLN := a;
End;
```

Chú ý: Phép tìm dư a MOD b tương đương với phép trừ liên tiếp khi hiệu a-b vẫn là một số tự nhiên. Khi đó ta có : UCLN(a, b) = UCLN(a MOD b, b)

Để ý rằng $0 \le a \text{ MOD } b \le b < b$, do đó thuật toán được viết lại như sau :

```
*       Input : Hai số nguyên dương a, b.
*       Output : UCLN của a và b.
Function UCLN(a,b);
Begin
        while ( b > 0 ) do
                begin
                        r := a MOD b;
                        a := b;
                        b := r;
                end;
        UCLN := a;
End;
```

3.2.3 Thuật toán tìm số lớn nhất trong dãy hữu hạn số.

Vấn đề : Cho một dãy gồm n số : $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

Tìm số lớn nhất trong dãy ?

```
*       Input : Dãy số a1, a2, a3, ..., an
*       Output : L là số lớn nhất trong dãy.
Procedure SoLonNhat(a, n, L);
Begin
        L := a1;
        for i := 2 to n do
                if ai > L then L := ai;
```

```
End;
```

3.2.4 Thuật toán sắp xếp .

Vấn đề : Cho một dãy gồm n số : $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

Hãy thực hiện việc sắp xếp để dãy số trên tăng dần

Thuật toán nổi bọt (bubble sort)

Sắp xếp tăng dần dãy : 4 5 1 3 2

Bước 0	1	2	3	4
4	4	1	1	1
5	1	3	2	2
1	3	2	3	
3	2	4		
2	5			

```
*       Input : Dãy số a1, a2, a3, ..., an
*       Output : Dãy số a1, a2, a3, ..., an xếp tăng
Procedure BubbleSort(a1, a2, a3, ..., an);
Begin
        for i := 1 to n-1 do
            for j := 1 to n-i do
                if aj > aj+1 then đổi chỗ aj và aj+1;
End;
```

Hiệu chỉnh thuật toán sắp xếp nổi bọt để nó dừng khi không cần sự đổi chổ nữa.

```
*       Input : Dãy số a1, a2, a3, ..., an
*       Output : Dãy số a1, a2, a3, ..., an xếp tăng
Procedure BubbleSort(a1, a2, a3, ..., an);
Begin
        i := 1;   done := false;
        while (i < n) and (done = false) do
        begin
            done := true;
            for j :=1 to to n-i do
                if aj > aj+1 then
                    begin
                        đổi chỗ aj và aj+1;
                        done := false;
                    end;
            i := i+1;
        end;
End;
```


3.2.5 Thuật toán tìm kiếm .

Vấn đề : Cho một x và một dãy gồm n số

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

Hãy xác định xem phần tử x có trong dãy số trên hay không ? Lời giải của bài toán này là giá trị chỉ vị trí (hay chỉ số) của một phần tử trong dãy bằng x hoặc là n+1 nếu x không có trong dãy.

Thuật toán tìm kiếm tuyến tính (hay tuần tự)

```
*       Input : Dãy số a gồm n phần tử a1, a2, a3, ..., an và phần tử x
*       Output : Vị trí của x trong dãy hoặc n+1 nếu không tìm thấy
Function LinearSearch(a, x, n);
Begin
        i := 0;
        Repeat
                i := i+1;
        Until (i>n) or (x=ai);
        linearSearch := i;
End;
```

Thuật toán tìm kiếm nhi phân (Binary search)

```
*       Input : Dãy số a gồm n phần tử a1, a2, a3, ..., an và phần tử x
*       Output : Vị trí của x trong dãy hoặc n+1 nếu không tìm thấy
Function BinarySearch(a, x, n);
Begin
        l := 1;         {l là điểm mút trái của khoảng tìm kiếm }
        r := n;         {l là điểm mút phải của khoảng tìm kiếm }
        Repeat
                j := (l+r) div 2;
                if x < a then r := j+1;
                else l := j-1;
        Until (x=a) or (l>r);
        if x=a then BinarySearch := i
        else BinarySearch := n+1;
End;
```

3.3 Độ phức tạp của thuật toán.

3.3.1 Khái niệm về độ phức tạp của thuật toán.

Một khái niệm quan trọng của thuật toán là độ phức tạp của thuật toán. Nhờ đó ta có thể đánh giá và so sánh được các thuật toán với nhau.

Độ phức tạp tính toán của thuật toán là lượng thời gian và bộ nhớ cần thiết để thực hiện thuật toán.

Ở đây chúng ta chỉ đề cập đến thời gian cần thiết để thực hiện thuật toán, gọi là thời gian tính của thuật toán.

Thời gian tính của thuật toán là hàm của dữ liệu đầu vào. Ta sẽ làm việc với một đặc trưng quan trọng của dữ liệu đầu vào, đó là kích thước của nó.

- Thời gian tính tốt nhất của thuật toán với đầu vào kích thước n là thời gian tối thiểu cần thiết để thực hiện thuật toán với mọi bộ dữ liệu đầu vào kích thước n.
- Thời gian tính tồi nhất của thuật toán với đầu vào kích thước n là thời gian nhiều nhất cần thiết để thực hiện thuật toán với mọi bộ dữ liệu đầu vào kích thước n.
- Thời gian tính trung bình của thuật toán với đầu vào kích thước n là thời gian trung bình cần thiết để thực hiện thuật toán với mọi bộ dữ liệu đầu vào kích thước n.

Để đo thời gian của thuật toán ta đếm số câu lệnh mà nó thực hiện hoặc đếm số phép tính toán số học, so sánh, gán .. mà thuật toán đòi hỏi thực hiện.

Ví dụ : Xét thuật toán tìm số lớn nhất trong dãy gồm n số $a_1, a_2, ..., a_n$:

Coi kích thước dữ liệu nhập là số lượng phần tử của dãy số , tức là n.

Vòng lặp trong thuật toán luôn thực hiện đúng n-1 lần, do đó thời gian tính tốt nhất, tồi nhất, trung bình của thuật toán đều bằng n-1.

3.3.2 Đánh giá thời gian tốt nhất, tồi nhất và trung bình của một thuật toán.

Trong các ứng dụng thực tế ta thường quan tâm đến mức độ tăng lên của thời gian thực hiện thuật toán khi kích thước của dữ liệu đầu vào tăng lên. Thí dụ, một thuật toán có thời gian tính tồi nhất là :

$$t(n) = 30n^2 + 6n + 6$$

với dữ liệu đầu vào có kích thước n.

n	$t(n) = 30n^2 + 6n + 6$	$30n^2$
10	3066	3000
100	300606	300000
1000	30006006	30000000
10000	3000060006	3000000000

Khi n lớn ta có thể xấp xỉ t(n) với $30n^2$.

Trong trường hợp này t(n) có tốc độ tăng giống như **$30n^2$.**

Hơn nữa khi n tăng càng lớn thì t(n) tăng giống như n^2 và ta nói t(n) có bậc là n^2

ký hiệu $t(n) = \Theta(n^2)$

Định nghĩa 1: Giả sử f và g là hai hàm đối số nguyên dương. Ta nói :

i. f(n) có bậc cao nhất là g(n), ký hiệu f(n) = O(g(n))
nếu tồn tại các hằng số dương C và N sao cho
$|f(n)| \le C.|g(n)| \ \forall\ n \ge N$

ii. f(n) có bậc thấp nhất là g(n), ký hiệu f(n) = Ω(g(n))
nếu tồn tại các hằng số dương C và N sao cho
$|f(n)| \ge C.|g(n)| \ \forall\ n \ge N$

iii. f(n) có bậc là g(n), ký hiệu f(n) = Θ(g(n))
nếu f(n) = O(g(n)) và f(n) = Ω(g(n)).

Chú ý : các ký hiệu O, Ω và Θ lần lượt đọc là ô lớn, ômêga và têta.

Ví dụ : xét hàm f(n) = $\frac{n(n+1)}{2}$

Do $\frac{n(n+1)}{2} \le n^2$ với $n \ge 5$ (với C=1, N=5) nên f(n) = O(n^2)

Do $\frac{n(n+1)}{2} \ge \frac{1}{2} n^2$ với $n \ge 1$ (với C=$\frac{1}{2}$, N=1) nên f(n) = Ω(n^2)

Từ đó ta có : f(n) = Θ(n^2)

Tương tự , ta có :

Mọi đa thức bậc k với hệ số dương có bậc là n^k, tức là :

$$p_k(n) = a_k n^k + ... + a_1 k + a_0 \ = \ \Theta(n^k)$$

Ví dụ 2: Chứng minh với mọi k là só nguyên dương ta có :

$$1^k + 2^k + ... + n^k \ = \ \Theta(n^{k+1})$$

Giải :

Ta có :

$$1^k + 2^k + ... + n^k \ \le \ n^k + n^k + ... + n^k = n.n^k = n^{k+1} \text{ khi } n \ge 1$$

Do đó

$$1^k + 2^k + ... + n^k \ = \ O(n^{k+1})$$

Mặt khác, ta có :

$$\begin{aligned} 1^k + 2^k + ... + n^k \ &\ge \ (n/2)^k + ... + (n-1)^k + n^k \\ &\ge \ (n/2)^k + ... + (n/2)^k + (n/2)^k \\ &\ge \ (n/2).(n/2)^k = n^{k+1}/2^{k+1} \end{aligned}$$

nên

$$1^k + 2^k + ... + n^k \ = \ \Omega(n^{k+1})$$

vậy

$$1^k + 2^k + ... + n^k \ = \ \Theta(n^{k+1})$$

Định nghĩa 2 :

Nếu thuật toán đòi hỏi thời gian tính tốt nhất (tồi nhất, trung bình)
là t(n) với độ dài đầu vào n và
t(n) = O(g(n)) (t(n) = Ω(g(n)), t(n) = Θ(g(n)))
thì ta nói thời gian tính tốt nhất (tồi nhất, trung bình)
của thuật toán có bậc cao nhất (thấp nhất, bằng) là g(n)
hay nói thời gian tính tốt nhất (tồi nhất, trung bình)
của thuật toán là O(g(n)) (Ω(g(n)), Θ(g(n)))

Ví dụ : Đánh giá thời gian tính tốt nhất , tồi nhất, trung bình của thuật toán tìm kiếm tuyến tính.
Giải:
Tốt nhất : khi $x=a_1$, câu lệnh i := i+1 được thực hiện 1 lần,
do đó thời gian tính tốt nhất của thuật toán là Θ(1).
Tồi nhất : khi x không có trong dãy , câu lệnh i := i+1 được thực hiện n+1 lần,
do đó thời gian tính tồi nhất của thuật toán là Θ(n).
Trung bình : nếu $x=a_i$, câu lệnh i := i+1 được thực hiện i lần,
do đó số lần trung bình phải tính lệnh i :=i+1 là

$$\frac{(1+2+\ldots+n)+n+1}{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2}$$

Do đó thời gian trung bình của thuật toán là Θ(n).

Sau đây là một số dạng đánh giá thông dụng (sắp xếp tăng dần)

Dạng đánh giá	**Tên gọi**
Θ(1)	Hằng số
$\Theta(\log_a n)$	Logarithm
Θ(n)	Tuyến tính
Θ(nlgn)	N log n
$\Theta(n^k)$	Đa thức bậc k
$\Theta(a^n)$	Hàm mũ
Θ(n!)	Giai thừa

Bảng sau cho ta thấy thời gian tăng như thế nào với các đánh giá khác nhau
(đơn vị đo thời gian 0.001 giây)

Đánh giá	**Thời gian tính nếu n =**			
	2	**8**	**32**	**64**
1	0.001	0.001	0.001	0.001
$\log_2 n$	1	3	5	6
n	2	8	32	64
$n \log_2 n$	2	24	160	384
n^2	4	64	1,02 giây	4,09 giây
n^3	8	512	32,7 giây	4,36 phút
2^n	4	256	49,6 ngày	$5{,}85 \times 10^8$ năm
n!	2	40,3 giây	$8{,}34 \times 10^{23}$ năm	$4{,}02 \times 10^{78}$ năm

Định nghĩa 3:

i. Bài toán đặt ra được gọi là ***được giải tốt*** nếu ta có thể xây dựng thuật toán với thời gian tính tồi nhất là đa thức để giải nó.

ii. Bài toán đặt ra được gọi là ***khó giải*** nếu không có thuật toán với thời gian tính tồi nhất là đa thức để giải nó.

iii. Bài toán đặt ra được gọi là ***không giải được*** nếu ta không thể xây dựng thuật toán để giải nó.

Chương 4 : ĐẠI SỐ BOOLE.

I. Mở đầu.

Đại số Boole là các phép toán và quy tắc làm việc với tập {0,1}, được áp dụng trong các nghiên cứu về máy tính, dung cụ điện tử, quang học. Ba phép toán được dùng nhiều nhất trong đại số Boole là :

1) Phần bù của một phần tử, ký hiệu ký hiệu bằng một gạch ngang trên đầu, được định nghĩa bởi :

$\overline{0} = 1$ và $\overline{1} = 0$

2) Tổng Boole, ký hiệu là + hoặc OR (hoặc) được xác định bởi :

$1 + 1 = 1$; $1 + 0 = 1$; $0 + 1 = 1$; $0 + 0 = 0$.

3) Tích Boole, ký hiệu là . hoặc AND (và), được xác định :

$1 \,.\, 1 = 1$; $1 \,.\, 0 = 0$; $0 \,.\, 1 = 0$; $0 \,.\, 0 = 0$.

Chú ý :

Thứ tự thực hiện các phép toán Boole:

- Lấy phần bù.
- Tích Boole.
- Tổng Boole.

Phép lấy phần bù, tổng và tích Boole tương ứng với các toán tử logic $\rceil$, v và $\wedge$, 0 ứng với chân trị *sai* và 1 ứng với chân trị *đúng*

Ví dụ : Tìm giá trị của $1.0+(\overline{0+1})$

Giải : $1.0+(\overline{0+1}) = 0+\overline{1} = 0+0 = 0$

II. Hàm Boole và biểu thức Boole.

1. Hàm Boole.

Định nghĩa 1. Cho B={0,1}. Một ánh xạ :

$$f: \quad B^n \to B$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Gọi là hàm Boole bậc n theo n biến $x_1, x_2, ..., x_n$

Chú ý :

- Các hàm Boole còn gọi là hàm logic hay hàm nhị phân.
- Các biến xuất hiện trong hàm Boole gọi là các biến Boole.
- Mỗi hàm Boole liên kết với một bảng cho biết sự phụ thuộc của hàm theo các biến Boole, gọi là bảng chân trị của hàm Boole.

Ví dụ 1: Hàm Boole hai biến f(x,y) được xác định bởi bảng sau:

x	**Y**	**f(x,y)**
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Ví dụ 2: các cử tri A_1, A_2, A_3 tham gia bỏ phiếu trong cuộc bầu cử có ứng cử viên D. Các biến Boole tương ứng là x_1, x_2, x_3.

Với $x_i = \begin{cases} 1 \text{ nếu } A_i \text{ bầu cho D} \\ 0 \text{ nếu } A_i \text{ không bầu cho D.} \end{cases}$

Đặt $f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1 \text{ nếu D trúng cử (D được ít nhất hai phiếu bầu)} \\ 0 \text{ nếu D không trúng cử (D được ít hơn hai phiếu bầu)} \end{cases}$

Ta có hàm Boole $f : B^3 \to B$ tương ứng với bảng chân trị sau:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Định nghĩa 2: Hai hàm Boole $f : B^n \to B$ và $g : B^n \to B$ được gọi là bằng nhau nếu

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = g(x_1,x_2,...,x_n) \text{ với mọi } x_1,x_2,...,x_n \in B$$

Định nghĩa 3: Phần bù của hàm Boole $f : B^n \to B$ ký hiệu là $\overline{f}$ được xác định như sau :

$$\overline{f}(x_1,x_2,...,x_n) = \overline{f(x_1,x_2,...,x_n)} \text{ với mọi } x_1,x_2,...,x_n \in B$$

Định nghĩa 4: Tổng Boole f+g và tích Boole f.g được xác định như sau :

$$(f+g)(x_1,x_2,...,x_n) = f(x_1,x_2,...,x_n) + g(x_1,x_2,...,x_n) \text{ với mọi } x_1,x_2,...,x_n \in B$$

$$(f.g)(x_1,x_2,...,x_n) = f(x_1,x_2,...,x_n).g(x_1,x_2,...,x_n) \text{ với mọi } x_1,x_2,...,x_n \in B$$

Chú ý : số hàm Boole n biến khác nhau là 2^{2^n}

Ví dụ Nếu f(x) là hàm Boole một biến thì có 4 hàm cho theo bảng sau

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2. Biểu thức Boole.
   Các biểu thức Boole với các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ được định nghĩa đệ quy như sau :
   - 0, 1, $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biểu thức Boole.
   - Nếu E_1 và E_2 là các biểu thức Boole thì $\overline{E_1}$, E_1+E_2 và $E_1.E_2$ cũng là các biểu thức Boole.

   Chú ý :
   - Mỗi biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole
   - Hai biểu thức Boole biểu diễn cùng một hàm Boole thì tương đương nhau.

Ví dụ : Tìm giá trị của hàm Boole được biểu diễn bởi :

$$f(x,y,z) = xy + \overline{z}$$

Giải:

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$f(x,y,z)=xy+\overline{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

3. Biểu diễn các hàm Boole.
   Vấn đề: cho các giá trị một hàm Boole n biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Làm thế nào để tìm được biểu thức biễu diễn hàm đó ?
   Định nghĩa 1:
   - Một biến Boole hoặc phần bù của nó được gọi là một <u>tục biến</u>.
   - Tích Boole $y_1 y_2... y_n$ trong đó $y_i=x_i$ hoặc $y_i=\overline{x_i}$ với $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến Boole được gọi là một <u>tiểu hạng</u>

Ghi chú : Tổng các tiểu hạng biểu diễn hàm Boole được gọi là khai triển các tích hay dạng tuyển chuẩn tắc của hàm Boole.

Ví dụ 1: Tìm biểu thức Boole biễu diễn hàm Boole f(x,y) xác định theo bảng:

x	y	f(x,y)
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Giải : Hàm có giá trị 1 khi x=1 và y=0 và có giá trị 0 trong mọi trường hợp còn lại nên hàm có 1 tiểu hạng là $x\overline{y}$. Vậy f(x,y) = $x\overline{y}$

Ví dụ 2 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc của các hàm Boole f, g được xác định qua bảng sau :
Giải:

x	**y**	**z**	**f(x,y,z)**	**g(x,y,z)**
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Giải :

Biểu diễn của hàm f là f(x,y,z)= $x\overline{y}z$

Biểu diễn của hàm g là g(x,y,z)= $xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$

Ví dụ 3 : Tìm khai triển tổng các tích hàm Boole f(x,y,z) = $(x+y)\overline{z}$

Giải: Tìm giá trị hàm f theo bảng

x	**y**	**z**	**x+y**	$\overline{\mathbf{z}}$	$f=(x+y)\overline{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

f là tổng ba tiểu hạng ứng với ba dòng có giá trị 1

Biểu diễn của hàm f là f(x,y,z)= $xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z}$

4. Các hằng đẳng thức của đại số Boole.

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$x = \overline{\overline{x}}$	luật bù kép
x+x=x x.x=x	luật lũy đẳng
x+0=x x.1=x	luật đồng nhất
x+1=1 x.0=0	luật nuốt
x+y=y+x xy=yx	luật giao hoán
x+(y+z)=(x+y)+z x(yz)=(xy)z	luật kết hợp
x(y+z)=xy+xz x+(yz)=(x+y)(x+z)	luật phân phối
$(\overline{xy}) = \overline{x} + \overline{y}$ $(\overline{x+y}) = \overline{x}.\overline{y}$	luật De Morgan

Chứng minh : lập bảng chân trị.

Ví dụ : Chứng minh luật hút thu:

x(x+y)=x

Giải :

x(x+y)	= xx + xy	(phân phối)
	= x + xy	(lũy đẳng)
	= x.1 + xy	(đồng nhất)
	= x(1+y)	(phân phối)
	= x.1	(nuốt)
	= x	

5. Tính đối ngẫu của đại số Boole.
   Đối ngẫu của một biểu thức Boole là một biểu thức Boole nhận được bằng các tổng và tích đổi chỗ cho nhau,, các số 0 và 1 đỗi chỗ cho nhau.
   Ví dụ:
   Đối ngẫu của $(x.\overline{y}) + z$ là $(x + \overline{y}).z$
   Đối ngẫu của $(\overline{x}.1) + (\overline{y} + z)$ là $(\overline{x} + 0).(\overline{y}.z)$

Nguyên lý đối ngẫu:

Một hằng đẳng thức giữa hai biểu thức Boole vẫn còn đúng nếu ta lấy đối ngẫu của cả hai vế.

Ví dụ :

Ta có luật hút thu : $x\,(x+y) = x$

Lấy đối ngẫu hai vế ta cũng có luật hút thu: $x+(x.y) = x$

III. Định nghĩa trừu tượng của đại số Boole.

Định nghĩa : Một đại số Boole là một tập A cùng hai phép toán hai ngôi v, $\wedge$ thõa mản các tính chất sau : $\forall x,y,z \in A$

a. Tính kết hợp:

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

b. Tính giao hoán:

$x \vee y = y \vee x$

$x \wedge y = y \wedge x$

c. Tính phân phối:

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

d. Tính đồng nhất:tồn tại hai phần tử trung hòa ký hiệu 0 và 1 sao cho

$x \vee 0 = x$

$x \wedge 1 = x$

e. Tính nuốt : $\forall x \in A, \exists\ \bar{x} \in A$:

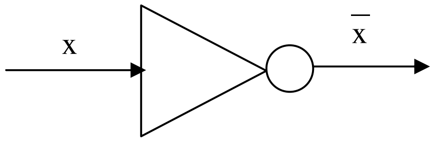
$x \vee \bar{x} = 1$

$x \wedge \bar{x} = 0$

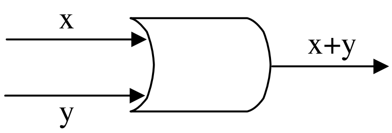
IV. Các cổng logic và tổ hợp các cổng logic.

Các dụng cụ điện tử được tạo bởi nhiều mạch tổ hợp, mỗi mạch bao gồm nhiều phần tử cơ bản được gọi là các cổng logic. Giá trị đầu ra chỉ phụ thuộc duy nhất vào giá trị đầu vào.

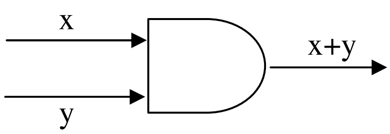
1. Các cổng logic
   a. Bộ đảo



   b. Cổng OR



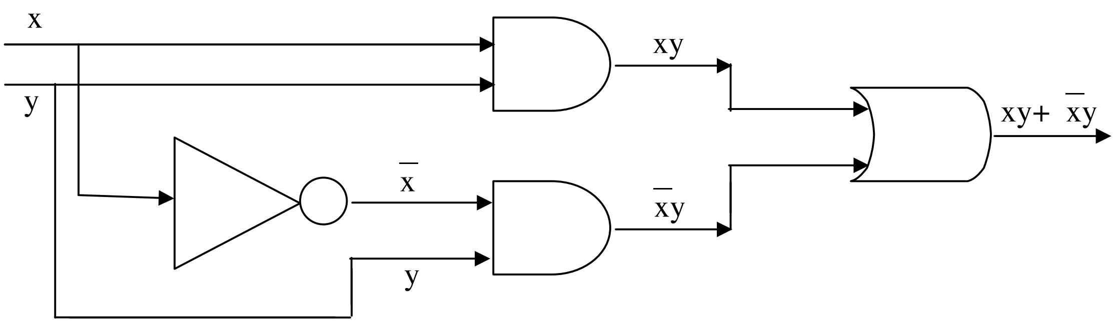
   c. Cổng AND



2. Tổ hợp các cổng logic.

Ví dụ : thiết kế một mạch tổ hợp có đầu ra là biểu thức boole: $xy + \overline{y}\overline{z}$

Giải : xy là cổng AND, $\overline{x}$ là bộ đảo, $\overline{y}\overline{z}$ là cổng AND



V. Tối thiểu hóa hàm Boole.

1. Phương pháp biến đổi đại số.

Dựa vào các luật, các hằng đẳng thức của đại số Boole để tối thiểu hóa các biến và phép toán.

Ví dụ 1:

a) Tối thiểu hóa hàm Boole: f(x,y,z) = $xyz + x\bar{y}z$

b) Thiết kế mạch tổ hợp của f(x,y,z) = $xyz + x\bar{y}z$ và của dạng tối thiểu hóa của nó.

Ví dụ 2:

c) Tối thiểu hóa hàm Boole: f(x,y) = $x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y$

d) Thiết kế mạch tổ hợp của f(x,y,z) = $x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y$ và của dạng tối thiểu hóa của nó.

2. Phương pháp bảng Karnaugh.

Thường áp dụng khi hàm Boole có 6 biến trở xuống.

Bảng Karnaugh với hàm Boole hai biến:

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

Hai ô gọi là kề nhau nếu các tiểu hạng mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một tục biến

Quy tắc: nếu hai ô kề nhau có giá trị 1 thì ta có thể rut1 gọn thành 1 ô

Ví dụ 1: Dùng bảng Karnaugh để tối thiểu hóa hàm Boole :

$$f(x,y) = xy + \bar{x}y$$

Giải: bảng Karnaugh của hàm f

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

Ta có dạng tối thiểu hóa f(x,y) = y

Ví dụ 2: Dùng bảng Karnaugh để tối thiểu hóa hàm Boole :

$$f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$$

Giải: bảng Karnaugh của hàm f

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

Ta có dạng tối thiểu hóa f(x,y) = $\bar{x} + \bar{y}$

Ví dụ 3: Dùng bảng Karnaugh để tối thiểu hóa hàm Boole :

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Giải: bảng Karnaugh của hàm f

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

Tổ hợp 2 ô kề nhau: $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} = x\bar{z}$

Tổ hợp 2 ô kề nhau: $x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{y}\bar{z}$

Ta có dạng tối thiểu hóa f(x,y) = $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$

Ví dụ 4: Dùng bảng Karnaugh để tối thiểu hóa hàm Boole :

$$f(x,y,z) = x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

3. Phương pháp Quine-Mc Cluskey.

Phương pháp bảng Karnaugh có hạn chế là khó sử dụng khi số biến lớn hơn 4 và lại dựa vào trực quan để nhận dạng các số cần nhóm lại. Phương pháp Quine – Mc.Cluskey giải quyết được các khuyết điểm trên.

Ví dụ 1: Tối thiểu hóa hàm Boole sau:

$$f(x,y,z) = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Giải:

Bước 1: Tìm các ứng viên

Bước 1.a :

Lập bảng biểu diễn các tiểu hạng bằng các xâu bit theo nguyên tắc sau :

- các tục biến không có dấu phủ định thì thay bằng 1.
- có dấu phủ định thì thay bằng 0.

Nhóm các tiểu hạng có cùng số các số 1

Tiểu hạng	Xâu bit	Số các số 1
xyz	111	3
$x\bar{y}z$	101	2
$\bar{x}yz$	011	2
$\bar{x}\bar{y}z$	001	1
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	0

Bước 1.b :

Hai tiểu hạng trong hai nhóm kề nhau có thể tổ hợp lại nếu chúng chỉ khác nhau một tục biến, khi đó ta thay vi trí của tục biến đó trong xâu bit bằng dấu –

Bước 1a				Bước 1b			Bước 1c		
Tiểu hạng		Xâu bit	Số các số 1	Tiểu hạng		Xâu bit	Tiểu hạng		Xâu bit
1	xyz	111	3	(1,2)	xz	1-1	(1,2,3,4)	z	--1
2	$x\bar{y}z$	101	2	(1,3)	yz	-11	(1,3,2,4)	z	--1
3	$\bar{x}yz$	011	2	(2,4)	$\bar{y}z$	-01			
4	$\bar{x}\bar{y}z$	001	1	(3,4)	$\bar{x}z$	0-1			
5	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	0	(4,5)	$\bar{x}\bar{y}$	00-	(4,5)	$\bar{x}\bar{y}$	00-

Ta tìm được các ứng viên là z và $\bar{x}\bar{y}$.

Bước 2 Kiểm tra các ứng viên trên có phủ hết các tiểu hạng gốc của hàm f(x,y,z)

Ứng viên \ Tiểu hạng gốc	xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
z	x	x	x	x	
$\bar{x}\bar{y}$				x	x

Vậy tối thiểu hóa hàm f(x,y,z) là $z + \bar{x}\bar{y}$

Ví dụ 2: Tối thiểu hóa hàm Boole

$$f(w,x,y,z) = wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}x\bar{y}z + \overline{wx}yz + \overline{wxy}z$$

Giải:

Bước 1

Bước 1a				Bước 1b			Bước 1c		
Tiểu hạng		Xâu bit	Số các số 1	Tiểu hạng		Xâu bit	Tiểu hạng		Xâu bit
1	$wxy\bar{z}$	1110	3	(1,4)	$wy\bar{z}$	1-10	(3,5,6,7)	$\bar{w}z$	0--1
2	$w\bar{x}yz$	1011	3	(2,4)	$w\bar{x}y$	101-	(3,6,5,7)	$\bar{w}z$	0--1
3	$\bar{w}xyz$	0111	3	(2,6)	$\bar{x}yz$	-011			
4	$w\bar{x}y\bar{z}$	1010	2	(3,5)	$\bar{w}xz$	01-1			
5	$\bar{w}x\bar{y}z$	0101	2	(3,6)	$\bar{w}yz$	0-11			
6	$\overline{wx}yz$	0011	2	(5,7)	$\bar{w}\bar{y}z$	0-01			
7	$\overline{wxy}z$	0001	1	(6,7)	$\bar{w}\bar{x}z$	00-1			

Bước 2

Kiểm tra các ứng viên trên có phủ hết các tiễu hạng gốc của hàm f(x,y,z)

Ứng viên \ Tiểu hạng	$wxy\bar{z}$	$w\bar{x}yz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}xyz$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\overline{wx}yz$	$\overline{wxy}z$
$\bar{w}z$				x	x	x	x
$wy\bar{z}$	x		x				
$w\bar{x}y$		x	x				
$\bar{x}yz$		x				x	

Kết quả : Có hai nghiệm

$$f(w,x,y,z) = \bar{w}z + wy\bar{z} + w\bar{x}y$$

$$f(w,x,y,z) = \bar{w}z + wy\bar{z} + \bar{x}yz$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1 (CƠ SỞ LOGIC)

Bài 1: Trong các khẳng định sau, cho biết khẳng định nào là mệnh đề:

a) 6 là một số nguyên tố.

b) Cô ta rất thông minh.

c) Tam giác cân có hai cạnh bằng nhau.

d) Hãy làm bài tập toán cao cấp đi !

e) Nếu bạn đến trễ thì tôi sẽ đi học trước.

f) X là một số lẻ.

g) Bạn có thích xem bóng đá không?

Bài 2 Gọi P, Q là mệnh đề:

P: "Hùng thích bóng đá"

Q: "Hùng ghét nấu ăn"

Hạy viết lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức trong đó sử dụng các phép nối.

a) Hùng không thích bóng đá lẫn nấu ăn.

b) Hùng thích bóng đá nhưng ghét nấu ăn.

c) Hùng thích bóng đá hay Hùng vừa thích nấu ăn vừa ghét bóng đá.

d) Hùng thích bóng đá và nấu ăn hay Hùng ghét bóng đá nhưng Hùng thích nấu ăn.

Bài 3 Xét chân trị các mệnh đề sau:

a) $(\sqrt{2} < 1) \wedge (1 < 3)$

b) $(2+4=6) \vee (\log_2 1 < 0)$

c) $(1>5) \rightarrow (5+4<6)$

Bài 4 Hãy lấy phủ định các mệnh đề sau:

a) Nếu x^2 là một số nguyên thì x là một số nguyên

b) Nếu ngày mai là thứ tư thì hôm nay phải là thứ hai.

c) Tôi không thể ngủ nếu tôi đói bụng

d) Nếu Lan dậy sớm ngày mai và đi học thì Lan đã không ngủ hôm qua.

e) Mọi tam giác đều có các góc bằng 60^0

f) Tuổi của Tuấn khoảng từ 15 đến 20.

Bài 5 Xác định các chân trị của các mệnh đề sau:

a) Nếu 2+5 =6 thì 2+4 =10

b) Nếu 2x4 =8 thì 5-2 = 3

c) Nếu 1+2 = 3thì 1+3 = 5

Bài 6 Lập bảng chân trị cho các dạng mệnh đề sau:

a) $\neg p \to (P \vee q)$

b) $\neg p \to (\neg q \vee r)$

c) $p \vee (q \wedge r)$

d) $(p \vee q) \wedge r$

e) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge r) \wedge (\neg q)$

Bài 7 Hãy chỉ ra các hằng đúng trong các dạng mệnh đề sau:

a) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

b) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

c) $p \to (\neg q \to p)$

d) $p \to (\neg p \to q)$

e) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (q \to r)]$

Bài 8 Chứng minh các tương đương lôgic sau:

a) $p \to (q \to p) \Leftrightarrow r \vee \neg r$

b) $(p \wedge q) \vee \neg q \Leftrightarrow p \vee \neg q$

c) $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

d) $(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$

Bài 9 Chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng

$[(r \to s) \wedge [(r \to s) \to (\neg t \vee u)]] \to (\neg t \vee u)$

Bài 10 Ba sinh viên A, B, C bị nghi là gian lận trong bài thi. Khi bị thầy hỏi thì họ khai như sau:

A: "B đã chép bài và C vô tội"

B: "Nếu A có tội thì C cũng có tội"

C: "Tôi vô tội"

Hãy trả lời câu hỏi sau:

a) Nếu A nói thật và B nói láo thì ai vô tội và ai đã chép bài?

b) Nếu mọi người vô tội thì ai nói thật và ai nói láo?

c) Nếu A nói láo và B, C nói thật thì ai có tội?

Bài 11 Có thể nói gì về một dạng mệnh đề:

a) Có hệ quả logic là một mâu thuẫn?

b) Có hệ quả logic là một hằng đúng?

d) Là hệ quả logic của một hằng đúng?

Bài 12 Các cặp mệnh đề (vị từ) sau đây có phải phủ định của nhau không:

a) $2 > 3 : 3 > 2$.

b) X là số âm : X là số dương

c) Phương trình X + 5 = 2 có nghiệm ; phương trình x +5 = 2 vô nghiệm.

d) Có một số là ước của 15 : có một số không phải là ước của 15.

Bài 13 Cho biết suy luận nào trong các suy luận dưới đây là đúng và quy tắc suy diễn nào đã được sử dụng?

a) Điều kiện đủ để đội bóng chuyền Việt nam thắng trận là đối thủ đừng gỡ lại vào phút cuối

Mà đội bóng chuyền Việt nam đã thắng trận

Vậy đối thủ của bóng chuyền Việt nam không gỡ lại vào phút cuối.

b) Nếu An siêng học thì An xếp loại giỏi

Mà An không được xếp loại giỏi

Vậy An không siêng học

c) Nếu Hùng thi đỗ đại học thì Hùng sẽ được thưởng một xe máy

Nếu được thưởng xe máy thì Hùng sẽ đi Vũng Tàu

Do đó nếu thi đỗ đại học Hùng sẽ đi Vũng Tàu.

Bài 14 Dùng các quy tắc suy diễn để suy ra khẳng định sau là đúng:

$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Bài 15 Xét các dạng mệnh đề:

$E = [p \wedge (q \wedge r)] \vee \neg[p \vee (q \wedge r)]$

$F = [p \wedge (q \vee r)] \vee \neg[p \vee (q \vee r)]$

Khẳng định $E \Rightarrow F$ đúng hay sai?

Bài 16 Xét các vị từ $p(x)$ = "$x^2 - 3x + 2 = 0$" Cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

a) $p(0)$ b) $p(1)$ c) $p(2)$

d) $\exists x, p(x)$ e) $\forall x, p(x)$

Bài 17 Xét các vị từ theo biến thực X:

$p(x)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$q(x)$: $x^2 - 4x - 5 = 0$

$r(x)$: $x > 0$

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $\forall x, p(x) \rightarrow r(x)$; b) $\forall x, q(x) \rightarrow \neg r(x)$;

c) $\exists x, q(x) \rightarrow r(x)$; d) $\exists x, p(x) \rightarrow \neg r(x)$;

Bài 18 Với mỗi mệnh đề dưới đây, cho biết chân trị. Phủ định kèm theo có đúng không?

Nếu không hãy thay bằng phủ định đúng.

a) Với mọi số thực x,y nếu $x^2 > y^2$ thì $x > y$

Phủ định : tại số thực x, y sao cho $x^2 > y^2$ nhưng $x \leq y$.

b) Tồn tại hai số nguyên lẻ có tích là số lẻ.

Phủ định: tích của hai số lẻ bất kỳ là số lẻ.

c) Bình phương của mọi sồ hữu tỉ là hữu tỉ.

Phủ định : tồn tại số thực x sao cho nếu x vô tỉ thì x^2 vô tỉ

Bài 19 Lấy phủ định của các mệnh đề sau:

a) Các sinh viên khoa tin học đều có máy tính tại nhà

b) Với mọi số nguyên n, nếu n^2 chia hết cho 4 thì n chia hết cho 4

c) Nếu x là một số thực sao cho $X^2 > 4$ thì $x<-2$ hay $x>2$

d) Với mọi số thực x, nếu $| x - 1 | < 4$ thì $-2 < x < 6$

Bài 20 Viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây:

a) $\forall x \in R: x \neq x^5$

b) $\exists y \in Z : y = \sin(y)$

c) $\exists x \in R, \exists y \in R : y < 3^x - 2$

Bài 21 Gọi p(x) và q(x) là hai vị từ theo một biến, hãy lâ(y phủ định và đơn giản các mệnh đề sau:

a) $\exists x, p(x) \vee q(x)$

b) $\forall X, p(x) \wedge \urcorner q(x)$

c) $\exists x, [p(x) \vee q(x)] \rightarrow p(x)$

Bài 22 Trên tập hợp số thực cho 3 vị từ:

P(a) = “phương trình x +1/x = a không có nghiệm”.

q (a) = “Đẳng thức $\sqrt{a^2 + 6a + 9} = 3 - a$ đúng”.

r(a) = “Bất đẳng thức $\dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} > -3$ đúng với mọi x

Tìm những giá trị của a sao cho chỉ có hai trong ba vị trí từ trên đúng?

Bài 23 Phát biểu các định lý sau. Sử dụng khái niệm “điều kiện đủ”

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

b) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song.

c) Nếu tứ giác T là một hìng vuông thì có 4 cạnh bằng nhau.

Bài 24 Phát biểu các định lý sau. Sử dụng khái niệm”điều kiện cần”

a) Nếu a = b thì $a^2 = b^2$

b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng co các góc tưng ứng bằng nhau.

c) Nếu tứ giác T là một hình vuông thì có 4 cạnh bằng nhau.

Bài 25 Hãy sửa lại (nếu cần) các mệnh đề sau đây để được mệnh đề đúng:

a) Để ab > 0 điều kiện cần là cả hai số a và b đều dương.

b) Điều kiện cần và đủ để một số chia hết cho 3 là tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

c) Để hai tam giác bằng nhau. Điều kiện cần và đủ là chúng có diện tích bằng nhau.

Bài 26 Chứng minh rằng không có hai số nguyên dương m và n sao cho

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

Bài 27 Chứng minh với mọi số nguyên dương n ta có:

a) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 28 Chúng minh rằng trên mặt phẳng n đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm, chia mặt phẳng thành 2n phần khác nhau.

Bài 29 Chúng minh rằng nếu $x + \dfrac{1}{x}$ là số nguyên thì $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ cũng là số nguyên với mọi số tự nhiên n.

Bài 30 Với mọi số nguyên k ≥ 2, hãy tìm chữ số tận cùng của số $a_k = 2^{2^k} + 1$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2 (phép đếm).

Bài 1. Cho A, B là hai tập con của U. Chứng minh :

a) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

b) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = U$

c) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$

d) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = U$

Bài 2. Ký hiệu P(E) là tập tất cả tập con của E.

a) Cho E = {a, b, c }. Xác định P(E).

b) Chứng minh $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

Bài 3. Cho A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}. Hãy viết ra tất cả các phần tử của A x B.

Bài 4. Cho A = [1, 2] = $\{x \in \mathbf{R} : 1 \le x \le 2\}$, B = [2, 3] = $\{x \in \mathbf{R} : 2 \le x \le 3\}$.
Biểu diễn hình học tập tích A x B trên mặt phẳng tọa độ.

Bài 5. Các ánh xạ f : A → B sau là đơn ánh, toàn ánh, song ánh ? Xác định ánh xạ ngược, nếu có :

a) A = R, B = R, f(x) = x + 7.

b) A = R, B = R, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

c) A = [4, 9], B = [21, 96], $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

d) A = R, B = R, f(x) = 3x – 2|x|.

e) A = R, B = R, $f(x) = ½(e^x - e^{-x})$.

Bài 6. Cho ánh xạ f : **R** → **R** xác định bởi :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

a) Tìm ảnh f(**R**).

b) Khảo sát tính chất của f.

Bài 7. Cho A và B là hai tập con của E. Chứnh minh rằng :

F đơn ánh $\Leftrightarrow$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Bài 8. Cho ánh xạ g : $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

a) Khảo sát các tính chất của f và tìm f(**R**)

b) Cho ánh xạ g : **R*** → **R** xác định bởi g(x) = 1/x, (trong đó R* = R\{0})
Tìm ảnh $f_o g$.

Bài 9. Cho f : E → F và g : F → G. Đặt $h = g_o f$. Chứng minh :

a) h toàn ánh => g toàn ánh.

b) h đơn ánh => f đơn ánh.

Bài 10. Có 18 đội bóng chuyền tham gia thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối ba huy chương vàng, bạc, đồng. Biết rằng mỗi đội chỉ có thể nhận một huy chương là cùng ?

Bài 11. Cho 10 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600.000 được xây dựng từ 10 chữ số trên.

Bài 12. Với các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được:

a) bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau ?

b) bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau ?

c) bao nhiêu số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau ?

Bài 13. Cho 100.000 chiếc vé xổ số được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số vé gồm 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu ?

Bài 14. Có bao nhiêu số có 5 chữ số , trong đó các chữ số cách đều chữ số giữa giống nhau ?

Bài 15. Với các chữ số 1,2,3,4,5 có thể lập được:

a) Bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau ?

b) Bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và bé hơn hay bằng 345 ?

Bài 16. Một người có 6 cái áo, trong đó có 3 áo sọc và 3 áo trắng; có 5 cái quần, trong đó có 2 quần đen và có 3 đôi giày, trong đó có 2 đôi giày màu đen. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn mặc áo, quần và mang giầy, nếu :

a) Chọn áo, quần và giầy nào cũng được.

b) Nếu chọn áo sọc thì với quần nào và giày nào cũng được; còn nếu chọn áo trắng thì chỉ mặc với quần đen và đi giày đen.

Bài 17.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số mà các chữ số đều > 5 và đôi một khác nhau.

b) Tính tổng các số đó.

Bài 18. Có bao nhiêu cách sắp xếp năm bạn học sinh A,B,C,D,E vào một chiếc ghế dài sao cho :

a) Bạn C ngồi chính giữa.

b) Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế.

Bài 19. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm 4 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 4 học sinh trường A và 4 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối điện nhau thì khác trường nhau.

Bài 20. Trên giá sách có 10 quyển sách, trong đó có 7 quyển có tác giả khác nhau và 3 quyển có cùng tác giả. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các sách ấy sao cho các sách của cùng một tác giả đứng cạnh nhau.

Bài 21. Cho các số 1,2,5,7,8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ 5 số trên sao cho:

a) Số tạo thành là số chẵn ?

b) Số tạo thành là một số không có chữ số 7 ?

c) Số tạo thành nhỏ hơn 278 ?

Bài 22. Hỏi từ 10 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

Bài 23. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 người ta lập tất cà các số có 4 chữ số khác nhau. Tính tổng của tất cả các số này ?

Bài 24. Một lớp có 10 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Thầy chủ nhiệm muốn chọn 3 học sinh để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách :

a) Chọn ra 3 học sinh gồm 1 nam và 2 nữ.

b) Chọn ra 3 học sinh trong đó có ít nhất 1 nam ?

Bài 25. Cần lập một ủy ban có ít nhất 4 người và nhiều nhất 10 người được chọn ra từ 5 nam và 7 nữ, với điều kiện phải có ít nhất 2 nam và số nữ ít nhất là phải gấp đôi số nam. Vậy có bao nhiêu cách chọn ủy ban ?

Bài 26. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 cuốn sách văn học, 4 cuốn sách âm nhạc và 3 cuốn hội họa. Ông lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 học sinh A,B,C,D,E,F mỗi người một cuốn .

a) Giả sử thầy giáo chỉ muốn tặng cho các học sinh những cuốn sách thuộc hai loại văn học và âm nhạc. Hỏi có bao nhiêu cách tặng ?

b) Giả sử thầy giáo muốn rằng sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba thể loại sách đều phải còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng ?

Bài 27. Một buổi liên hoan có 10 nam và 6 nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 cặp nhảy (mỗi cặp gồm 1 nam và 1 nữ) ?

Bài 28. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả 3 màu ?

Bài 29. Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 viên bi vàng có kích thước đôi một khác nhau.

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có đúng 2 viên vi màu đỏ ?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó số bi xanh bằng số bi đỏ ?

Bài 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 8 cái mũ từ những cái mũ giống hệt nhau với 3 màu xanh, trắng , đen ?

Bài 31. Có bao nhiêu biển số xe khác nhau gồm 4 chữ số ?

Bài 32. Tìm số tự nhiên k sao cho các số $C_{14}^{k}, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$ lập thành cấp số cộng.

Bài 33. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Newton của $(x + 1/x)^{12}$

Bài 34. Cho $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{100}x^{100}$

a) Tính hệ số a_{97}.

b) Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{100}$

c) Tính tổng $M = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 100a_{100}$

Bài 35. Biết tổng số tất cả hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024, hãy tìm số hệ số a (a là số tự nhiên) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

Bài 36. Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng có ít nhất bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau ?

Bài 37. Xét một cơ sở dữ liệu có 500.000 bản tin (record). Hỏi có thể sử dụng một vùng (thuộc tính) với nhiều nhất 4 ký tự là các mẫu tự làm khóa chính hay không ?

Ở đây, một vùng được nói là khóa chính nếu giá trị của nó xác định bản tin một cách duy nhất.

Bài 38. Chứng minh rằng trong n người tùy ý ($n \geq 2$), luôn luôn có ít nhất hai người có số người quen (trong số họ) bằng nhau.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3 (THUẬT TOÁN)

Bài 1. Hãy vẽ lưu đồ của các thuật toán sau :

a) Giải phương trình trùng phương.

b) Tìm số lớn nhất trong một dãy số có n phần tử.

c) Tính tổng S của n số nguyên đầu tiên.

d) Tìm ước số chung lớn nhất của hai số tự nhiên.

Bài 2. Viết thuật toán giải các bài toán sau :

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

b) Tính x^n với n là một số nguyên.

Ghi chú : trước hết cho một thủ tục tính x^n với n là một số nguyên không âm bằng cách nhân liên tiếp với x, bắt đầu bằng 1.. Sau đó mở rộng thủ tục này : dùnh tính chất $x^{-n} = 1 / x^n$ để tính x^n với n âm.

c) Chèn một số nguyên x vào vị trí thích hợp trong dãy các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$ xếp theo thứ tự tăng dần.

d) Tìm cả số lớn nhất lẫn bé nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên.

Bài 3. Viết thuật toán giải các bài toán sau :

a) Tìm trong một dãy các số nguyên số hạng đầu tiên bằng một số hạng nào đó đứng trước nó trong dãy.

b) Tìm trong một dãy các số nguyên tất cả các số hạng lớn hơn tổng tất cả các số hạng đứng trước nó trong dãy.

c) Liệt kê các giá trị khác nhau của một dãy số cho trước và ứng với mỗi giá trị cũng cho biết số lần xuất hiện của giá trị đó trong dãy. Chẳng hạn, với dãy cho trước sau đây:

3 5 4 2 2 3 5 4 6 4 3

thì sẽ xuất hiện kết quả như sau :

Giá tri	Số lần xuất hiên
2	2
3	4
4	3
5	2
6	1

Bài 4. Chứng minh rằng :

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = O(n^2)$

b) $n! = O(n^n)$

c) $\lg n! = O(n \lg n)$

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $f_1(x) = O(g_1(x))$, $f_2(x) = O(g_2(x))$ thì :

a) $f_1(x) + f_2(x) = O(\max(g_1(x), g_2(x)))$

b) $f_1(x).f_2(x) = O(g_1(x).g_2(x))$

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + x^2 \log x$

Tìm số nguyên nhỏ nhất sao cho $f(x) = O(x^n)$

Bài 7. Chứng minh $\lg n! = \Theta (n \lg n)$

Bài 8. Thuật toán thông thường để tính giá trị của đa thức

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Tại x = c được mô tả bằng ngôn ngữ phỏng Pascal như sau :

```
Procedure Da_thuc(c, a0, a1, ..., an) ;
Begin
        power := 1;
        y := a0;
        For  i := 1 to n do
                Begin
                        power := power * c;
                        y := y + ai * power;
                End;
        End;
End;
```

a) Tính toán giá trị của đa thức $3x^3 + x + 1$ tại x = 2 bằng cách thực hiện từng bước của thuật toán trên.

b) Có bao nhiêu phép nhân và phép cộng trong thuật toán trên đã sử dụng để tính toán giá trị của đa thức tại x = c (không kể các phép cộng được dùng để tăng biến của vòng lặp).

Bài 9. Đánh giá số lần thực hiện câu lệnh x := x + 1 trong các đoạn chương trình sau như là hàm của đầu vào n :

a)

```
for  i := 1 to n do
        for j := 1 to i do
                x := x + 1;
```

b)

```
j := n;
while j >= 1 do
begin
        for i := 1 to j do
                x := x + 1;
        j := j Div 2;
end;
```

Bài 10. Đánh giá thời gian tồi nhất của thuật toán sắp xếp nổi bọt sau:

```
Procedure Buble_sort(a1, a2, ..., an);
Begin
        i := 1;  done := false;
        While (i < n)  and (done = false) do
        Begin
                Done := true;
                For j:=1 to n-i then
                        Begin
                                Đổi chổ aj và aj+1
                                Done := false;
                        End;
                j := j + 1;
        End;
End;
```


BÀI TẬP CHƯƠNG 5 (Đại số Boole)

Bài 1. Tìm giá trị các biểu thức sau :

a) $1 . \overline{0}$; b) $1 + \overline{1}$;

c) $\overline{0} . 0$; d) $\overline{(1+0)}$.

Bài 2. Tìm giá trị các hàm Boole dưới đây khi các biến x, y, z và t lấy các giá trị 1, 1, 0 và 0.

a) $x\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}$; b) $t + \overline{x}\,y$;

c) $t\,x + \overline{\overline{y}} + yz$; d) $tx + xy + yz$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của y và z để các biểu thức dưới đây luôn luôn lấy giá trị 1, biết rằng x=1.

a) $\overline{x}\,y + y\,z$; b) $x\,y + z$.

Bài 4. Tìm tích Boole của các biến x, y, z hoặc phần bù của chúng , biết rằng tích đó có giá trị 1 nếu và chỉ nếu :

a) $x = 0, y = 1, z = 0$; b) $x = 0, y = z = 1$;

Bài 5. Tìm khai triển tổng các tích của các hàm Boole. sau:

a) $f(x,y,z) = x + y + z$; b) $g(x, y, z) = x\,\overline{y}$.

Bài 6. Tìm một tổng Boole chưá x hoặc $\overline{x}$, y hoặc $\overline{y}$ và z hoặc $\overline{z}$ có giá trị 0 nếu và chỉ nếu:

a) $x = y = 1, z = 0$; b) $x = z = 0$, $y = 1$.

Bài 7. Chứng minh luật De Mogan của đại số Boole :

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y} ;$$
$$\overline{(x+y)} = \overline{x} . \overline{y}.$$

Bài 8. Trong đại số Boole B = {0,1}, hãy tìm phần bù của :

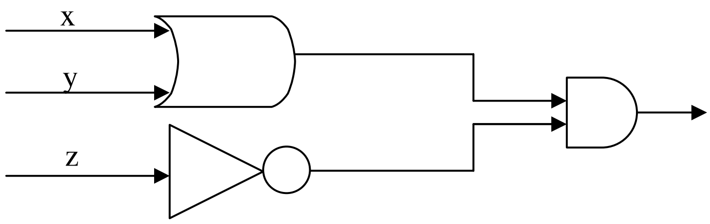
a) $\overline{y}.z + z.\,t$ b) $y\,\overline{z} + \overline{y}\,x + x\,z$.

Bài 9. Tìm đối ngẫu của các biểu thức sau :

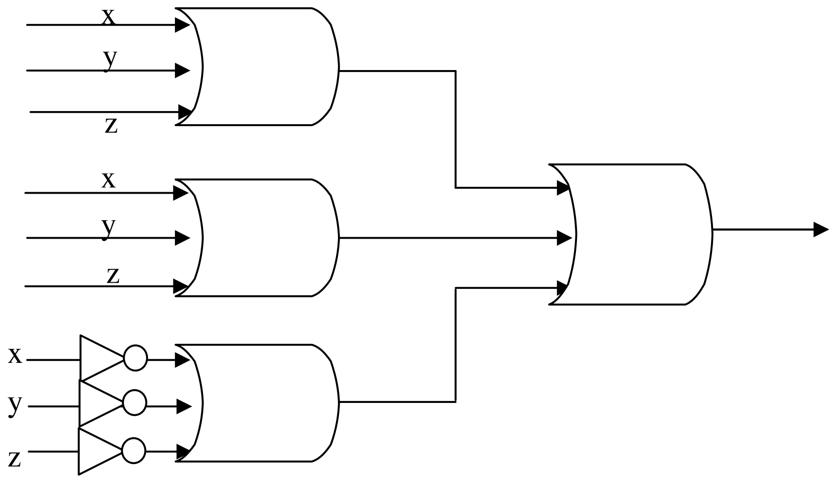
a) $x.\,y.\,z + \overline{x}.\,\overline{y}.\,\overline{z}$; b) $x.\,\overline{z} + z\,.0 + \overline{x}.1$.

Bài 10. Tìm đầu ra của các mạch tổ hợp sau :

a)



b)



Bài 11. Dựng các mạch gồm các bộ đảo, các cổng AND và OR để tạo ra các đầu ra sau:

a) $x.y + \bar{x}\,\bar{y}$; b) $(x+y+z).(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z})$;

c) $\overline{x.y} + (\bar{z} + x)$; d) $\bar{x}\,.\,\overline{(y+\bar{z})}$

Bài 12. Dựng mạch tổ hợp trong đó chỉ sử dụng cổng AND và bộ đảo để tạo đầu ra là tổng Boole x+y.

Bài 13. Dùng bảng Karnaugh để tối thiểu hóa hàm Boole hai biến sau :

a) $f(x,y) = \bar{x}.y + \bar{x}\,\bar{y}$;

b) $f(x,y) = x.y + x\,\bar{y}$;

c) $f(x,y) = x.y + x\,\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\,\bar{y}$;

Bài 14. Vẽ bảng Karnaugh của những khai triển tổng các tích Boole ba biến sau:

a) $x\,\bar{y}\,\bar{z}$; b) $\bar{x}\,y\,z + \bar{z}\,\bar{y}\,\bar{z}$;

d) $x\,y\,z + x\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z$;

Bài 15. Dùng bảng Karnaugh để tối thiểu hóa hàm Boole ba biến sau:

a) $\bar{x}\,y\,z + \bar{x}\,\bar{y}\,z$;

b) $x\,y\,z + x\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z + \bar{x}\,y\,\bar{z}$;

c) $x\,y\,\bar{z} + x\,\bar{y}\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,z + \bar{x}\,y\,z + \bar{x}\,\bar{y}\,z$;

d) $x\,y\,z + x\,\bar{y}\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z + \bar{x}\,\bar{y}\,z + x\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z$;

Bài 16. Dùng phương pháp Quine – Mc Cluskey để tối thiểu hóa hàm Boole ba biến trong bài tập 15 (a, b, c).

Bài 17. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của hàm :

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{t} + \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t + x\,\bar{y}\,z\,t + x\,y\,\bar{z}\,\bar{t} + x\,y\,\bar{z}\,t + x\,y\,z\,t\,.$$