PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP I

I. Hệ số hằng:

1. Phương trình thuần nhất

* Dạng tổng quát:

Ay(n + 1) + by(n) = 0 (*) Với a, b là hằng số ≠ 0

* Cách giải:

Cách 1: Xét phương trình đặc trưng: aλ + b = 0

⇨ λ = -b/a

⇨ Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$Y(n) = c(-b/a)^n$

Cách 2: Truy hồi

VD: y(n + 1) – 3y(n) = 0 (1)

- Cách 1: Xét phương trình đặc trưng của (1) là λ – 3 = 0 =>λ = 3

=> Nghiệm tổng quát của (1) là: $y(n) = C. 3^n$

- Cách 2: Truy hồi: y(n) ≠ 0 √ n, y(n + 1) = 3y(n)

Ta có: y(1) = 3y(0)

Y(2) = 3y(1)

………….

Y(n) = 3y(n-1)

Nhân vế với vế ta có: $y(n) = y(0) * 3^n$

Đặt $y(0) = C \Rightarrow y(n) = C. 3^n$

2. Phương trình không thuần nhất:

* Dạng tổng quát:

Ay(n + 1) +by(n) = f(n) (a.b ≠ 0; f(n) ≠ 0)

- Cách giải:

- Cách 1: Phương pháp chọn

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất ay(n+1) +by(n) = 0

Ta tìm được nghiệm tổng quát $y(n) = (-b/a)^n .c$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng ü(n) của 1

Trường hợp 1: Cho hàm $f(n) = \alpha^n.P_m(n)$

Với $P_m(n)$ là đa thức bậc m của n

+ Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nghĩa là α ≠ -b/a. Nghiệm riêng của (1) có thể tìm dưới dạng: $ü(n) = \alpha^n. Q_m(n)$

Trong đó $Q_m(n)$ là một đa thức bậc m có hệ số chưa biết và có thể tìm bằng phương pháp hệ số bất định

+ Nếu α là nghiệm của phương trình đặc trưng thì tìm nghiệm riêng ở dạng:

$ü(n) = n. \alpha^n. Q_m(n)$

Trường hợp 2: Cho hàm $f(n) = \alpha^n. [P_m(n)\cos(n\beta) + Q_l(n).\sin(n\beta)]$

Nghiệm riêng có thể tìm dưới dạng $ü(n) = \alpha^n. [P_h(n)\cos(n\beta) + Q_h(n).\sin(n\beta)]$

Trong đó h = max(l,m)

Cách giải 2: Phương pháp biến thiên hằng số:

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất ay(n+1) +by(n) = 0

Ta tìm được nghiệm tổng quát $y(n) = (-b/a)^n .c$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình thuần nhất bằng biến thiên hằng số

Coi C = C(n) khi đó:

$Y(n) = C(n). (-b/a)^n$

⇨ $y(n+1) = C(n+1). (-b/a)^{n+1}$

Thay vào phương trình

$Ay(n + 1) + by(n) = f(n)$ ta được: $a.C(n+1).(-b/a)^{n+1} + b.C(n).(-b/a)^n = f(n)$

⇨ $C(n+1) – C(n) = (-1/b).(-a/b)^n.f(n)$

Đây là phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng đối với C(n) ta có thể giải bằng các cách đã biết

$C(1) – C(0) = (-1/b). f(0).(-a/b)^0$

$C(2) – C(1) = (-1/b). f(1). (-a/b)^1$

…………………

$C(n) – C(n-1) = (-1/b). f(n-1). (-a/b)^{n-1}$

Cộng theo từng vế ta được:

$$C(n) – C(0) = (-1/b). \sum_{i=0}^{n-1} f(i). (-a/b)^i$$

Lấy hằng số tự do là C(0) = C ta được

$$C(n) = C +(-1/b). \sum_{i=0}^{n-1} f(i). (-a/b)^i$$

Thay vào y(n) ta được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$Y(n) = (-b/a)^n.[\, C + (-1/b).\sum_{i=0}^{n-1} f(i).\,(-a/b)^I\,]$$

Ví dụ: Giải phương trình: $y(n+1) - 5y(n) = 5^n(n + 3)$

Cách giải 1:

Bước 1: Xét phương trình thuần nhất $y(n+1) - 5y(n) = 0$

Xét phương trình đặc trưng: $\lambda - 5 = 0$

⇨ $\lambda = 5$

⇨ $y(n) = C.5^n$

Bước 2: Ta có: $f(n) = 5^n(n+3)$

$\alpha=5$ là nghiệm của phương trình đặc trưng

Vậy $ü(n) = n5^n.(An+B)$

⇨ $ü(n+1) = (n+1)5^{n+1}(An +A + B)$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$(n+1)5^{n+1}(An + A + B) - 5n5^n.(An+B) = 5^n(n + 3)$

⇨ $5(n+1)(An + A +B) - 5n(An + B) = n+3$

⇨ $10An + 5(A + B) = n+3$

⇨ $10A = 1$ và $5(A + B) = 3$

⇨ $A=1/10$ và $B = ½$

⇨ $ü(n) = n.5^n(n/10 + 1/2)$

⇨ Nghiệm của phương trình là $y(n) = C.5^n + n.5^n(n + 5)/10$

Cách giải 2: Xét phương trình thuần nhất $y(n+1) - 5y(n) = 0$

Xét phương trình đặc trưng: $\lambda - 5 = 0$

⇨ $\lambda = 5$

⇨ $y(n) = C.5^n$

Coi C = C(n) ta có:

$C(n+1)\ 5^{n+1} - 5.5^n.C(n) = 5^n(n+3)$

⇨ $C(n+1) - C(n) = 5^{-1}(n+3)$

$C(1) - C(0) = 5^{-1}(0+3)$

$C(2) - C(1) = 5^{-1}(1+3)$

…………..

$C(n) - C(n-1) = 5^{-1}(n-1+3)$

Cộng vế với vế ta được: $C(n) - C(0) = 5^{-1}(3+4+5+\ldots+n+2) = (n^2 + 5n)/10$

Đặt C = C(0)

Thay C(n) vào y(n) ta được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$Y(n) = (C + (n^2 + 5n)/10)$

II. Hệ số biến thiên:

a. Phương trình thuần nhất

- Dạng: $a(n).y(n+1) + b(n).y(n) = 0$
- Cách giải: Truy hồi

b. Phương trình không thuần nhất:

- Dạng: $a(n).y(n+1) + b(n).y(n) = f(n)$ (1) $f(n) \neq 0$
- Cách giải: Dùng truy hồi

VD: Giải phương trình:

Y(n+1) = (n+1)y(n) + (n+1)!.n

Lời giải:

Xét phương trình thuần nhất:

Y(n+1) = (n +1)y(n)

Ta có: y(1) = 1y(0)

Y(2) = 2y(1)

……………

Y(n) = n.y(n-1)

Nhân vế với vế, lấy C = y(0) ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Y(n) = C.n!

Coi C = C(n) ta được: y(n) = n!.C(n)

Y(n+1) = (n+1)!.C(n+1)

Thay vào phương trình không thuần nhất ban đầu ta được:

(n+1)!.C(n+1) = (n+1)C(n)n! + n(n+1)!

⇨ C(n+1) –C(n) = n

⇨ C(1) – C(0) = 0

C(2) –C(1) = 1

…………

C(n) – C(n-1) = n-1

Cộng vế với vế ta được: C(n) – C(0) = n(n-1)/2

Coi C =C(0) => C(n) = C + n(n-1)/2

Thay vào biểu thức ta được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

Y(n) = (C + n(n-1)/2)

Trao đổi trực tuyến tại:
http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html