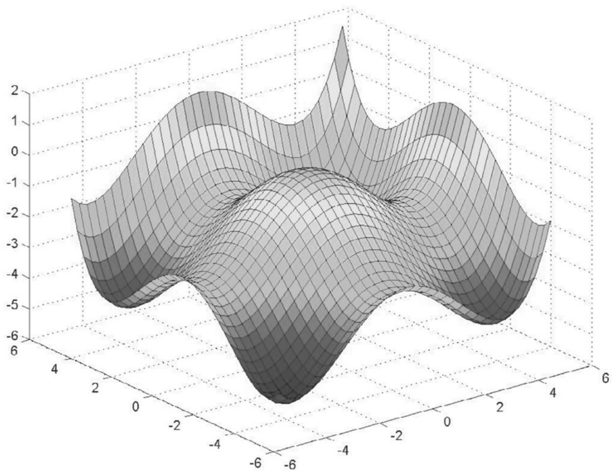
DONGPHD PROBLEMS BOOK SERIES

Tuyển tập Đề thi Cao học môn Toán

(1998 – 2008)



Cuốn sách bao gồm các đề thi tuyển sinh sau đại học của các trường ĐHQG Hà Nội, Đại học Sư phạm TPHCM, Đại học Huế, Đại học Vinh, Đại học Quy Nhơn, Viện Toán, Đại học Kinh tế Quốc dân.

CONTRIBUTORS:

Ngô Quốc Anh

Đặng Xuân Cương

DongPhD

RobinHood

Nguyễn Đình Hoàng Nhân

Trần Mậu Quý

Bản điện tử chính thức có tại

http://www.vnmath.com

Trường Đại học Sư phạm TP.HCM — CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Hội đồng Tuyển sinh Sau đại học 2004 — Độc Lập - Tự Do - Hạnh Phúc

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004

ĐỀ THI MÔN : GIẢI TÍCH (CƠ SỞ)

(Thời gian 180 phút, không kể thời gian phát đề)

Câu I:

Cho không gian mêtric X với E, F là hai tập con của X sao cho E là tập conpact và F là tập đóng. Đặt $d(E,F) = \inf\limits_{x\in E, y\in F} d(x,y)$

a) Chứng minh tồn tại $x_0 \in E$ sao cho $d(x_0, F) = d(E, F)$.

b) Cho $E \cap F = \emptyset$. Chứng minh tồn tại số $t > 0$ sao cho $d(E, F) \geq t$.

Câu II:

Cho (X, μ) là không gian có độ đo và hàm số $f : X \to \mathbb{R}^+$ là hàm khả tích. Cho dãy (A_n) các tập đo được trong không gian X sao cho:

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \text{ và } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

Chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu = \int\limits_{X} f d\mu$$

Câu III:

Cho (X, μ) là không gian có độ đo và $B \subset X$ với B là tập đo được. Cho hàm số đo được $f : X \to \mathbb{N}$. Với $n \in N$, ta đặt:

$$B_n = \{x \in B : |f(x)| \leq n\}$$

Chứng minh rằng với mọi n thì B_n là tập đo được và

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(b)$$

Câu IV:

Tính tích phân sau đây:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} dx$$

Câu V:

Cho X là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và e_n là một hệ trực chuẩn đầy đủ trong không gian X. Cho a_n là một dãy số. Đặt

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < x, e_n > e_n \qquad , \text{ với } x \in X$$

a) Cho dãy a_n bị chặn. Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính $\|T\|$.

b) Cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Chứng minh T là ánh xạ compact.

HẾT

Ghi chú - Thí sinh không được sử dụng tài liệu
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm

Trường Đại học Sư phạm TP.HCM **CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**
Hội đồng Tuyển sinh Sau đại học 2004 **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI : ĐẠI SỐ (CƠ SỞ)

(Thời gian 180 phút, không kể thời gian phát đề)

Bài I: Cho A là vành giao hoán có đơn vị.

a) Định nghĩa iđêan tối đại của vành A.

b) Cho M là một iđêan của A. Chứng minh M là iđêan tối đại khi và chỉ khi A/M là trường.

c) Cho M là một iđêan của A. Chứng minh: Nếu $\forall x \in M \quad 1+x$ khả nghịch trong A thì M là iđêan tối đại duy nhất của A.

Bài II: a) Cho $(G,\cdot)$ là một nhóm có **2n** phần tử và H là một nhóm con của G có **n** phần tử.

Chứng minh $\forall x \in G \quad x^2 \in H$

b) Trong nhóm đối xứng S_4 (nhóm các phép thế bậc 4) hãy xét tính chuẩn tắc của các nhóm con xiclic sinh bởi một vòng xích độ dài 3.

Bài III: Trong trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ ta xét tập con:

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \middle/ n \text{ là số lẻ} \right\}$$

a) Chứng minh A là vành con của $\mathbb{Q}$.

b) Tìm các phần tử khả nghịch trong vành A.

c) Chứng minh vành con A là một vành chính.

Bài IV: Xét đa thức $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$

1) Chứng minh $f(x) = x^3 + x + 1$ bất khả vi trong $\mathbb{Q}[x]$

2) Gọi α là nghiệm thực của $f(x) = x^3 + x + 1$ (nghiệm thực này là duy nhất).

Đặt $K = \{a\alpha^2 + b\alpha + c / a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

a) Chứng minh ánh xạ

$$\begin{array}{rrcl} \alpha : & \mathbb{Q}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g(x) & \longmapsto & g(\alpha) \end{array}$$

là đồng cấu vành.

b) Tìm Kerφ.

c) Chứng minh K là một trường.

HẾT

Ghi chú - Thí sinh không được sử dụng tài liệu

Trường Đại học Sư phạm TP.HCM **CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**
Hội đồng Tuyển sinh Sau đại học 2004 **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI : ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

(Thời gian 180 phút, không kể thời gian phát đề)

Câu 1: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(n+1)}x^n$$

Câu 2: Cho hàm số $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ,\text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Xét sự liên tục của f trên $\mathbb{R}^2$;

b) Tính các đạo hàm riêng của f trên $\mathbb{R}^2$.

Câu 3: Tính tích phân $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$,

trong đó D là nửa trên của hình tròn có tâm tại điểm (1,0) bán kính 1

Câu 4: Cho tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Với mọi $m,n\in$, đặt

$$d(m,n)=\begin{cases}0 & ,\text{nếu } m=n\\ 1+\dfrac{1}{m+n} & ,\text{nếu } m\neq n\end{cases}$$

Hãy chứng minh:

a) d là một metric trên $\mathbb{N}$.

b) $(\mathbb{N},d)$ là một không gian metric đầy đủ.

Câu 5: Tính định thức:

$$\begin{vmatrix}1&3&0&0&4&6\\2&4&0&0&5&8\\5&1&1&5&2&1\\7&6&6&7&1&2\\3&7&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

Câu 6: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cặp cơ sở chính tắc là

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\2&3&-1&1\\-2&0&-5&3\end{bmatrix}$$

Hãy xác định nhân và ảnh của f. Hỏi f có là đơn cấu, toàn cấu hay không? Vì sao?

Câu 7: Cho ma trận

$$\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$$

a) Tìm giá trị riêng, vectơ riêng của A.

b) Tính A^{2004}

HẾT

Ghi chú - Thí sinh không được sử dụng tài liệu

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM TP.HCM
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH SĐH 2005

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ (dành cho PPGD Toán)
(Thời gian **180** phút, không kể thời gian phát đề)

Câu 1 : Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

a) Tính $\det A$

b) Tính rank A.

Câu 2 : Cho B là ma trận vuông cấp n, $(B)_{\mathrm{ij}} = 1$ hoặc $(B)_{\mathrm{ij}} = -1$ với mọi i, j. Chứng minh $\det B$ chia hết cho 2^{n-1}.

Câu 3 : Cho n là một số tự nhiên $(n \geq 1)$, $\mathbb{R}_n[x]$ là tập các đa thức với hệ số thực bậc bé hơn hoặc bằng n. Biết rằng $\mathbb{R}_n[x]$ với phép cộng các đa thức và phép nhân một số với một đa thức là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và $1, x, \ldots, x^n (*)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_n[x]$.

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}_n[x] \to f : \mathbb{R}_n[x]$

$p(x) \mapsto p(x) - xp'(x)$ $\quad p'(x)$: đạo hàm của đa thức $p(x)$

---

a. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của f trong cơ sở (*) ở trên.

b. Tìm một cơ sở và số chiều của các không gian con $\mathrm{Ker\,f} = \mathrm{f}^{-1}(0)$ và $\mathrm{imf} = \mathrm{f}\,(\mathbb{R}_\mathrm{n}[\mathrm{x}])$

Câu 4 : Trong không gian vectơ Euclide $\mathbb{R}^4$ (với tích vô hướng thông thưng), cho L là không gian con sinh bởi các vectơ $\alpha_1 = (0,1,0,1)$, $\alpha_2 = (0,1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,1,1,1)$, $\alpha_4 = (1,2,1,2)$, $(L =< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 >)$

a. Tìm điều kiện cần và đủ để vectơ $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in L$.

b. Tìm một cơ sở và số chiều của L.

c. Tìm một cơ sở trực chuẩn của L.

Câu 5 : Cho E là không gian vec tơ Euclide, tích vô hướng của hai vectơ $x, y \in E$, kí hiệu là $< x, y >$ và cho $\varphi : E \mapsto E$ là ánh xạ thoả mãn $< \varphi(x), \varphi(y) > = < x, y > \ \forall x, y \in E$. Chứng minh φ là ánh xạ tuyến tính.

HẾT

Ghi chú : – Thí sinh không được sử dụng tài liệu
– Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM TP.HCM **CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**

HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH SĐH 2005 **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

(Thời gian **180** phút, không kể thời gian phát đề)

Kí hiệu :

- n $\mathbb{Q}$ là trường số hữu tỉ, $\mathbb{R}$ là trường số thực, $\mathbb{C}$ là trường số phức, $\mathbb{Z}$ là vành số nguyên.
- $\mathbb{Z}_p$ là vành thương $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Câu 1 : (2đ + 1đ)

1. Cho $(G, \cdot)$ là một nhóm giao hoán hữu hạn có mn phần tử, với m, n nguyên tố cùng nhau. Đặt $A = \{x \in G : x^m = e\}$ và $B = \{x \in G : x^n = e\}$ (e là phần tử đơn vị của nhóm). Chứng minh A và B là 2 nhóm con của G thoả $A \cap B = \{e\}$ và $AB = G$.

2. Cho $(G, \cdot)$ là một nhóm có $2n$ phần tử. Chứng minh trong G có phần tử cấp 2.

Câu 2 : (0,5đ + 1,5đ)

Xét vành tích $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ với phép toán cộng và phép nhân theo thành phần.

a. Cho I là một iđêan của $\mathbb{Z}^2$. Đặt :

$$I_1 = \{x \in \mathbb{Z}/(x, 0) \in I\}, \quad I_2 = \{y \in \mathbb{Z}/(0, y) \in I\}$$

Chứng minh I_1, I_2 là 2 iđêan của $\mathbb{Z}$.

b. Chứng minh vành $\mathbb{Z}^2$ không phải là vành chính mặc dù mọi iđêan của nó đều là iđêan chính.

Câu 3 : (1đ + 1đ + 1đ)

Cho đa thức $f(x) = 1x^4 + 1 \in K[x]$, với K là một trường có đơn vị là 1.

Hãy xét tính bất khả qui của $f(x)$ trong $K[x]$ đối với từng trường hợp sau :

a. $K = \mathbb{Q}$

b. $K = \mathbb{Z}_5$

c. $K = \mathbb{Z}_3$

Câu 4 : (2đ)

Cho số phức $\alpha = -1 + i\sqrt{2}$ và đồng cấu vành $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ xác định bởi $\varphi f = f(\alpha)$. Chứng minh φ là toàn ánh và suy ra

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x] / \langle x^2 - 2x + 3 \rangle$$

HẾT

Ghi chú : – Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

– Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM TP.HCM | **CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**

HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH SĐH 2005 | **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN CƠ BẢN : ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH ĐẠI CƯƠNG

(Thời gian **180** phút, không kể thời gian phát đề)

Câu 1 : Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{nếu } x=y=0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ không liên tục tại $O(0,0)$ nhưng $f(x,y)$ khả vi tại $O(0,0)$.

Câu 2 : Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n (x-2)^n.$$

Câu 3 : Gọi $M = \{x \in C([0,1]) | x(1) = 1, \quad 0 \le x(t) \le 1, \forall t \in [0,1]\}$

a. Chứng minh rằng M là tập đóng không rỗng và bị chặn trọng không gian mêtric $C([0,1])$ với mêtric

$$d(x,y) = \max_{0\le t\le 1} |x(t)-y(t)|, \text{ với } x(t), y(t) \in C([0,1]).$$

b. Xét $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt$. Chứng minh rằng f liên tục trên M nhưng f không đạt được giá trị nhỏ nhất trên M. Từ đó suy ra M không phải là tập compact trong $C([0,1])$.

Câu 4 : Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một phép biến đổi tuyến tính xác định bởi : $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$, $f(u_3) = v_3$. Với $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$; $v_1 = (a+3, a+3, a+3)$, $v_2 = (2, a+2, a+2)$, $v_3 = (1, 1, a+1)$ với $a \in \mathbb{R}$

a. Tìm ma trận của f với cơ sở chính tắc $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

b. Tìm giá trị của a để f là một đẳng cấu.

c. Khi f không là một đẳng cấu hãy tìm cơ sở và số chiều của Imf và Kerf.

d. Với $a = -3$, f có chéo hóa được không ? Trong trường hợp f chéo hóa được, hãy tìm một cơ sở để ma trận của f với cơ sở đó có dạng chéo.

Câu 5 : Cho dạng toàn phương $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$.

a. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

b. Với giá trị nào của a thì q là xác định dương, nửa xác định dương.

HẾT

Ghi chú : – Thí sinh không được sử dụng tài liệu

– Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. M là tập hợp các ma trận cấp n ($n \geq 1$), thực, khả nghịch.

1. Chứng minh rằng M là nhóm đối với phép nhân ma trận.
2. $C \in M$ cố định. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \to M$, $f(A) = C^{-1}AC$ là một đồng cấu nhóm. Tìm $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ (hay chứng minh rằng f là đẳng cấu).
3. Chứng minh ràng ánh xạ $f_1 : M \to \mathbb{R}^\star$, $f_1(A) = |A|$ là đồng cấu nhóm. Tìm $\operatorname{Im} f_1$, $\operatorname{Ker} f_1$.

Câu II. Chứng minh rằng $\mathbb{C}^\star$ là nhóm đối với phép nhân thông thường. Xét các ánh xạ $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star$, $f(\alpha) = \overline{\alpha}$, $g : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star$, $g(\alpha) = \|\alpha\|$ là đồng cấu nhóm, đơn cấu, toàn cấu hay không? Tìm $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.

Câu III. Chứng minh rằng các phép biến đổi trực giao trên không gian Euclid E làm thành một nhóm đối với phép nhân (phép hợp thành), ký hiệu G. Giả sử $g \in G$. Đặt ánh xạ $\varphi : G \to G$, $\varphi(f) = g^{-1}fg$. Chứng minh rằng φ là đẳng cấu nhóm.

Câu IV. $\mathbb{C}[x]$ là vành. Đặt ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[x] &\to \mathbb{C}[x], \\ f(x) &\to \overline{f(x)} \end{aligned}$$

(được hiểu là $\overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + ... + \overline{a}_n x^n$).

1. Chứng minh rằng φ là đồng cấu nhóm.
2. Chứng minh rằng $\mathbb{R}[x]$ là vành con mà không idean.

Câu V.

1. Chứng minh rằng các ma trận đối xứng cấp n lập thành nhóm aben đối với phép cộng, ký hiệu nhóm này là M.
2. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \to M$, $f(A) = A'$ (chuyển vị của A) là đồng cấu nhóm. Tìm $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.
3. Chứng minh rằng tập M các ma trận đối xứng thực cấp n lập thành $\mathbb{R}$-không gian véc tơ (hay $\mathbb{R}$-không gian véc tơ con của không gian các ma trận vuông cấp n).
4. T là ma trận khả nghịch (không nhất thiết đối xứng). Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \to M$, $f(A) = T^{-1}AT$ là đồng cấu (tức là ánh xạ tuyến tính).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Tìm hạng của hệ véc tơ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ theo tham số a

$$a_1 = (1, a, 1)\,,$$
$$a_2 = (1, 1, a)\,,$$
$$a_3 = (a, 1, 1)\,.$$

Tìm phần bù trực tiếp của $L = \{a_1, a_2, a_3\}$ khi $a = -2$ hoặc $a = 1$.

Câu II. Biết $\mathbb{R}_5[x]$ là không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn 5. Cho $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$. Chứng minh rằng (1) và (2) là các cơ sở của nó

1. 1, x, x^2, x^3, x^4.
2. $f^{(4)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$.

Tìm ma trận chuyển cơ sở (1) sang (2). Tìm toạ độ của $f(x) = 34 + 33x + 16x^2 + 5x^3 + x^4$ trong cơ sở (2).

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính f trên không gian phức có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

có chéo hoá được không? Có tồn tại phép biến đổi tuyến tính nghịch đảo f^{-1}? Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của f^{-1}.

Câu IV. Chứng minh rằng tập hợp các ma trận thực có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}.$$

với $a, b \in \mathbb{R}$ lập thành vành con của vành $\mathbf{Mat}(2, \mathbb{R})$, hỏi nó có là idean không?

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2001
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Chứng minh rằng

1. Tập $\mathbb{S}^1$ các số phức có mô đun bằng 1 là một nhóm con của nhóm nhân các số phức khác 0.
2. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ cho bởi $f(x) = \cos(\pi x) + i\sin(\pi x)$ là một đồng cấu từ nhóm cộng các số thực $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{S}^1$.

Câu II.

1. Chứng minh rằng mỗi không gian con L của không gian véc tơ hữu hạn chiều V đều có bù tuyến tính. Phần bù tuyến tính của L có duy nhất không?
2. Tìm số chiều, một cơ sở và phần bù tuyến tính của không gian con của không gian $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ $\{u_1 = (1, -2, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 3, 0, 2)$, $u_3 = (2, -5, -1, -1)$, $u_4 = (2, -4, -2, 2)\}$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & d \\ 0 & -d & c \end{pmatrix}.$$

1. Nếu φ là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc là A thì φ có chéo hoá được không? Vì sao?
2. Với $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ và $d = 2$ hãy tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^T AQ$ là ma trận đường chéo.

Câu IV. Phép biến đổi tuyến tính φ gọi là luỹ linh bậc p nếu p là một số nguyên dương sao cho $\varphi^{p-1} \neq 0$ và $\varphi^p = 0$. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính luỹ linh bậc p trong không gian véc tơ n-chiều V. Chứng minh rằng

1. Nếu x là một véc tơ sao cho $\varphi^{p-1}(x) \neq 0$ thì hệ véc tơ
$$\left\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), ..., \varphi^{p-1}(x)\right\}$$
độc lập tuyến tính.
2. $p \leq n$.
3. φ chỉ có một giá trị riêng $\lambda = 0$.
4. Nếu $E - A$ là ma trận của phép biến đổi φ đối với cơ sở nào đó thì ma trận A khả nghịch (E là ma trận đơn vị).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2001
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng tập $O(n)$ các ma trận trực giao cấp n là một nhóm đối với phép nhân ma trận.

2. Cho $Q \in O(n)$, xét ánh xạ $f : O(n) \to O(n)$ cho bởi $f(A) = Q^T AQ$ trong đó Q^T là chuyển vị của Q. Chứng minh rằng f là một đẳng cấu nhóm.

Câu II. Xét phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 4x_3, 4x_1 - 7x_2 + 8x_3, 6x_1 - 7x_2 + 7x_3).$$

1. Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của φ.

2. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ có tồn tại hay không một cơ sở sao cho đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng đường chéo.

Câu III. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L sinh bởi hệ véc tơ

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}.$$

1. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian con L và cơ sở trực chuẩn của phần bù trực giao $L^\perp$.

2. Giả sử $x = (4, -1, -3, 4)$. Tìm véc tơ $y \in L$ và véc tơ $z \in L^\perp$ sao cho $x = y + z$.

Câu IV.

1. Chứng minh rằng họ $\left\{1, x-a, (x-a)^2, ..., (x-a)^{n-1}\right\}$ với $a \in \mathbb{R}$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn n.

2. Tìm toạ độ của $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ đối với cơ sở đó.

Câu V.

1. Giả sử f_1, f_2 là các dạng tuyến tính trên K-không gian véc tơ V. Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : V \times V \to K$ cho bởi $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ là một dạng song tuyến tính trên V. Tìm điều kiện cần và đủ để φ là dạng song tuyến tính đối xứng.

2. Giả sử V là K-không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng dạng song tuyến tính φ có hạng bằng 1 khi và chỉ khi $\varphi \neq 0$ và có hai dạng tuyến tính f_1, f_2 sao cho $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ với mọi $x, y \in V$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Giả sử h là một đồng cấu vành từ vành K vào vành K', và A là vành con của vành G. Chứng minh rằng $h(A)$ là một vành con của vành K'.

2. Trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ xét hai phép toán xác định bởi

$$a \oplus b = a + b - 1$$
$$a \circ b = a + b - ab.$$

Chứng minh rằng $(\mathbb{Z}, \oplus, \circ)$ là một vành giao hoán có đơn vị.

Câu II. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét phép biến đổi tuyến tính g xác định bởi

$$g(u) = (8x - y - 5z, -2x + 3y + z, 4x - y - z) \text{ với } u = (x, y, z).$$

1. Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của g.

2. Tìm một cơ sở cả không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho đối với cơ sở đó ma trận B của phép biến đổi g có các phần tử ở phía trên đường chéo chính bằng 0. Viết ma trận B.

Câu III. Trong không gian véc tơ Euclide E xét hệ véc tơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$, và ma trận

$$G = ((u_i, u_j))_{n \times n}.$$

Chứng minh rằng hệ véc tơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det G \neq 0$.

Câu IV. Giả sử f là một dạng song tuyến tính hạng r trên K-không gian véc tơ V n-chiều. Xét các tập con

$$V_r = \left\{ y \text{ thuộc } V : f(x, y) = 0 \text{ đối với mọi } x \text{ thuộc } V \right\},$$
$$V_l = \left\{ y \text{ thuộc } V : f(y, x) = 0 \text{ đối với mọi } x \text{ thuộc } V \right\}.$$

Chứng minh rằng V_r, V_l là các không gian con và $\dim V_r = \dim V_l = n - r$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Giả sử h là một đồng cấu từ nhóm G vào nhóm G', và H là nhóm con của nhóm G. Chứng minh rằng $h(H)$ là một nhóm con của nhóm G'.

2. Xét ánh xạ f từ nhóm tuyến tính tổng quát $GL(n, \mathbb{R})$ vào nhóm nhân $\mathbb{R}^\star$ các số thực khác 0 xác định bởi $f(A) = \det A$. Chứng minh rằng f là một toàn cấu. Xác định nhóm con $f(O(n))$, với $O(n)$ là nhóm các ma trận trực giao.

Câu II.

1. Giả sử L là một không gian con p-chiều của không gian véc tơ Euclide E n-chiều. Chứng minh rằng tập
$$L^* = \{x \in E : (x, y) = 0, \forall y \in L\},$$
là một không gian con $(n-p)$-chiều và $E = L \bigoplus L^\star$.

2. Xét không gian con L của không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ $u_1 = (1, 0, 2, 1)$, $u_2 = (2, 1, 2, 3)$, $u_3 = (0, 1, -2, 1)$. Xác định một cơ sở trực chuẩn của không gian con L^*.

Câu III. Vết của ma trận A cấp n trên trường K là tổng các phần tử trên đường chéo chính, được ký hiệu là $\mathrm{Tr}(A)$. Chứng minh rằng

1. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2. Vết của ma trận của một phép biến đổi tuyến tính không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở của không gian.

Câu IV.

1. Hạng của ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ được ký hiệu là $r(A)$. Chứng minh rằng
$$r(A + B) \leq r(A) + r(B).$$

2. Tính $r(A)$ với $A = (\min\{i, j\})_{m\times n}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng tích các đồng cấu vành là một đồng cấu vành.
2. Xét đồng cấu nhóm $f : G \to G'$. Chứng tỏ rằng nếu G là một nhóm giao hoán thì $\mathrm{Im}(f)$ cũng là một nhóm giao hoán.. Cho một ví dụ chứng tỏ điều ngược lại nói chung không đúng.

Câu II.

1. Giả sử L là không gian con của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hệ véc tơ
$$\{u_1 = (2,3,5)\,, u_2 = (3,7,8)\,, u_3 = (1,-6,1)\}\,.$$
Với giá trị nào của tham số a thì véc tơ $u = (7,-1,a)$ thuộc không gian con L.
2. Chứng minh rằng trong không gian các hàm số thực liên tục $C\,(a,b)$ hệ véc tơ $\{1, \cos x, \cos^2 x, ..., \cos^n x\}$ độc lập tuyến tính.

Câu III. Xét ma trận thực đối xứng
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
Tìm ma trận trực giao Q sao cho $Q^T A Q$ là ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo đó.

Câu IV. Giả sử u là một véc tơ của không gian Euclid E.

1. Chứng minh rằng với mỗi véc tơ x thuộc E có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = au + v$ trong đó véc tơ v trực giao với véc tơ u.
2. Cho $E = \mathbb{R}^4$, $u = (2,-1,0,2)$, $x = (1,1,1,-1)$. Tính a và v.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Trong nhóm G xét ánh xạ $h : G \to G$ xác định bởi $h(a) = a^{-1}$, $\forall a \in G$. Chứng minh rằng ánh xạ h là một tự đẳng cấu khi và chỉ khi G là một nhóm Aben.

Câu II. Trong không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Tìm số chiều và một cơ sở của phần bù trực giao $L^\star$ của không gian con L.

2. Cho véc tơ $x = (7, -4, -1, 2)$. Tìm véc tơ $y \in L$, $z \in L^\star$ sao cho $x = y + z$.

Câu III. Xét ánh xạ tuyến tính $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$g((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_1 + x_3 - x_4, 2x_2 + x_3 - 2x_4).$$

1. Tìm $\dim \operatorname{Ker} g, \dim \operatorname{Im} g$.

2. Với giá trị nào của tham số a thì véc tơ $y = (-1, 2, a)$ thuộc không gian con $\operatorname{Im} g$.

Câu IV. Giả sử f là một phép biến đổi tuyến tính luỹ linh bậc n (tức là $f^{n-1} \neq 0$, $f^n = 0$) trong K-không gian véc tơ V. Chứng minh rằng

1. Nếu $x \in V : f^k(x) \neq 0$ thì hệ véc tơ $\{x, f(x), \ldots, f^k(x)\}$ độc lập tuyến tính.

2. $n \leq \dim V$.

3. Nếu $n = \dim V$ thì đa thức đặc trưng của phép biến đổi f có dạng $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Giả sử $(G, \circ)$ là một nhóm có hữu hạn phần tử, đơn vị e. Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi phần tử $a \in G$ tồn tại số nguyên $k \geq 1$ sao cho $a^k = e$ (số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất đó gọi là cấp của phần tử a).
2. Nếu a là phần tử cấp n thì $A = \{a, a^2, \ldots, a^n\}$ là một nhóm con của nhóm $(G, \circ)$.

Câu II. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}.$$

1. Chứng tỏ ma trận A không khả nghịch.
2. Tính hạng của ma trận A theo giá trị của các tham số a, b, c.

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính f trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$f(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z).$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của f.
2. Phép biến đổi f có chéo hoá được không? Vì sao? Tìm một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận của f đối với cơ sở đó là ma trận tam giác.

Câu IV. Chứng minh rằng tập con khác rỗng L của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ là một khôn gian con khi và chỉ khi L là tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Giả sử X là một vành. Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi số nguyên $n \geq 0$, tập

$$nX = \left\{ a = nx = \underbrace{x + x + ... + x}_{n \text{ lần}} : x \in X \right\}$$

là một idean của vành X (với quy ước $0x = 0$).

2. Các tập dạng $n\mathbb{Z}$ với $n = 0, 1, 2, ...$ là tất cả các idean của vành số nguyên $\mathbb{Z}$.

Câu II.

1. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L sinh bởi hệ véc tơ

$$\{u_1 = (1, a, -1, -2), u_2 = (2, -1, a, 5), u_3 = (1, 10, -6, 1)\}.$$

Tính $\dim L$ theo tham số a.

2. Giả sử hệ véc tơ $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là một cơ sở của K-không gian véc tơ V. Đặt $v_k = u_k + ... + u_n$ với $k = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng hệ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một cơ sở của không gian V.

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính g trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$g((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 3x_2 - x_3, -3x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 5x_3).$$

1. Chứng tỏ rằng g là một phép biến đổi đối xứng.

2. Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ là các véc tơ riêng của g.

Câu IV. Giả sử f là một dạng song tuyến tính hạng k trên K-không gian véc tơ $\mathbb{K}^n$. Xét các tập con

$$V_r = \left\{ y \in \mathbb{K}^n : f(x, y) = 0 \text{ đối với mọi } x \in \mathbb{K}^n \right\},$$
$$V_l = \left\{ y \in \mathbb{K}^n : f(y, x) = 0 \text{ đối với mọi } x \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Chứng minh rằng V_r, V_l là các không gian con và $\dim V_r = \dim V_l = n - k$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Trong nhóm G xét ánh xạ $f : G \to G$ cho bởi $f(x) = x^2$ với mọi $x \in G$.

1. Chứng minh rằng f là một tự đồng cấu của nhóm G khi và chỉ khi G là nhóm aben.

2. Cho một ví dụ sao cho f là tự đẳng cấu và một ví dụ sao cho f là một từ đồng cấu những không phải là tự đẳng cấu.

Câu II. Xét ánh xạ tuyến tính $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: với $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thì

$$h(u) = (x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4)$$

1. Xác định $\dim \operatorname{Im} h$, $\dim \operatorname{Ker} h$ theo tham số a.

2. Với $a = 3$, với giá trị nào của b thì véc tơ $u = (1, -2, b)$ thuộc $\operatorname{Im} h$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A.

2. Tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^T A Q$ là ma trận đường chéo. Viết ma trận B.

Câu IV.

1. Giả sử F là một không gian con của K-không gian véc tơ n-chiều V. Chứng minh rằng nếu $\dim F < n$ thì trong không gian V có cơ sở $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ sao cho $u_i \notin F$, $i = 1, 2, .., n$.

2. Chứng minh rằng đối với mỗi dạng tuyến tính φ trên không gian véc tơ Euclid hữu hạn chiều E tồn tại duy nhất một véc tơ $u^\star \in E$ sao cho

$$\varphi(x) = (u^\star . x) \text{ với mọi } x \in E.$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Xét đồng cấu vành $f : K \to K^{\star}$. Chứng minh rằng

1. Nếu A là một vành con của vành K thì $f(A)$ là một vành con của $K^{\star}$.
2. Nếu B là một idean của vành K' thì $f^{-1}(B)$ là một idean của vành K.

Câu II.

1. Xác định số chiều của không gian nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây theo tham số a

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. Với $a = 3$, tìm cơ sở trực giao của phần bù trực giao $N^{\star}$ của N trong không gain véc tơ Euclid $\mathbb{R}^4$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A.
2. Tìm một một ma trận tam giác đồng dạng với ma trận A.

Câu IV. Xét dạng toàn phương ω trên không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^n$ cho bởi

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad x = (x_1, x_2, .., x_n).$$

Chứng minh rằng

1. Nếu dạng ω xác định dương thì $a_{ii} > 0$ với mọi $i = 1, 2, .., n$.
2. Dạng ω xác định dương khi và chỉ khi tồn tại ma trận khả nghịch S sao cho $(a_{ij})_{n\times n} = S^T S$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 1
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng giao các idean của một vành là một idean.

2. Giả sử S là tập con khác rỗng của vành K giao hoán có đơn vị. Chứng minh rằng tập

$$(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i : s_i \in S, a_i \in K, i = 1, 2, .., n \right\}$$

là idean nhỏ nhất chứa tập S.

Câu II. Xét phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$f\left((x_1, x_2, x_3)\right) = (x_1 + ax_2 + x_3, 2x_1 + ax_2 + bx_3, -x_1 + (b-1)\, x_3)$$

1. Với giá trị nào của các tham số a, b thì f là một tự đẳng cấu.

2. Tìm $\dim \operatorname{Im} f$, $\dim \operatorname{Ker} f$ với $a = b = 1$.

Câu III. Xét ma trận đối xứng thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A.

2. Dạng toàn phương ω trên không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ cho bởi

$$\omega(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^3$ là cơ sở chính tắc của ω. Viết dạng chính tắc của ω tương ứng với cơ sở đó.

Câu IV. Giả sử E là không gian véc tơ Euclid n-chiều.

1. Chứng minh rằng nếu $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của E thì mỗi véc tơ x thuộc E đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x.u_i)\, u_i.$$

2. Giả sử L, M là các không gian con của E và $\dim L < \dim M$. Chưng minh rằng tồn tại véc tơ $u \in M$, $u \neq 0$ sao cho $(u.y) = 0$ với mọi $y \in L$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 2
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Xét vành đa thức $\mathbb{R}[x]$ ẩn x hệ số thực. Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi đa thức $f(x)$ thuộc $\mathbb{R}[x]$ tập
$$f(x)\mathbb{R}[x] = \{g(x) = f(x)h(x) : h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$
là một idean của vành $\mathbb{R}[x]$.

2. Đối với mỗi idean $I \neq \{0\}$ của vành $\mathbb{R}[x]$ tồn tại duy nhất đa thức dạng chuẩn $p(x)$ sao cho $I = p(x)\mathbb{R}[x]$.

Câu II. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ xét hệ véc tơ
$$u_1 = (1, a, 2, 1) \quad , \quad u_2 = (1, 1, b, 0) \quad , \quad u_3 = (1, b, 2, 1).$$

1. Với những giá trị nào của các tham số a, b thì hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính.

2. Tìm một cơ sở của phần bù trực giao $L^\star$ của không gian con L sinh bởi hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ với $a = b = 1$.

Câu III. Xét phép biến đổi tuyến tính f trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xác định bởi
$$f((x, y, z)) = (8x - y - 5z, -2x + 3y + z, 4x - y - z).$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của f, của f^n, $n > 0$.

2. Tìm một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận B của f đối với cơ sở đó là ma trận tam giác. Viết ma trận B.

Câu IV. Xét dạng song tuyến tính g trên K-không gian véc tơ n-chiều V thoả mãn điều kiện $g(x, x) =$ với mọi x thuộc V. Chứng minh rằng

1. $g(x, y) = -g(y, x)$ với mọi x, y thuộc V.

2. Nếu g không suy biến thì mỗi véc tơ u thuộc V, $v \neq \{0\}$, luôn luôn tồn tại véc tơ v thuộc V sao cho $g(u, v) = 1$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007 ĐỢT 1
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Phần tử a thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ gọi là có cấp hữu hạn p nếu p là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^p = e$. Giả sử G là một tập hợp hữu hạn có n phần tử. Chứng minh rằng

1. Mỗi phần tử a thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ đều có cấp hữu hạn.
2. Với mọi a, b thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ các phần tử $a \circ b$ và $b \circ a$ có cấp bằng nhau.

Câu II.

1. Xác định số chiều của không gian nghiệm N_0 của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây theo tham số thực a

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. Cho $a = 3$, tìm phần bù trực tiếp của N_0 trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$.

Câu III. Trong không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ xét phép biến đổi tuyến tính f cho bởi

$$f\left((x_1, x_2, x_3)\right) = \left(3x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -2x_2 + 5x_3\right).$$

1. Chứng minh rằng f là phép biến đổi đối xứng.
2. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Eucild $\mathbb{R}^3$ là các véc tơ riêng của f và cho biết ma trận của f đối với cơ sở đó.

Câu IV. Xét dạng song tuyến tính không suy biến g trên K-không gian véc tơ n-chiều V. Giả sử rằng dạng song tuyến tính g_1 trên không gian véc tơ con r-chiều F cho bởi $g_1(x, y) = g(x,)$ với mọi x, y thuộc F là một dạng không suy biến. Xét tập

$$F^\star = \{x \in V : g\left(x, y\right) = 0 \text{ với mọi } y \in F\}.$$

Chứng minh rằng

1. $F^\star$ là một không gian con và $F^\star \cap F = \{0\}$.
2. $V = F \oplus F^\star$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng hàm số một biến số liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì liên tục đều trên đó.

2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$. Hãy xét sự liên tục đều của nó trên các tập dưới đây:

   (a) Trên $(0, 1)$.

   (b) Trên $(-1, 0)$.

   (c) Trên $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Câu II.

1. Chứng minh rằng nếu một dãy số đơn điệu có một dãy số con hội tụ thì nó cũng là một dãy hội tụ.

2. Chứng tỏ rằng dãy số $\{x_n\}$ với

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad , \quad n \geq 1$$

   là một dãy hội tụ.

Câu III.

1. Tính diện tích của miền nằm trong mặt phẳng toạ độ xOy được giới hạn bởi trục hoành và một nhịp cycloid

$$\begin{cases} x = & a(t - \sin t) \\ y = & a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi, a > 0).$$

2. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha \sin x}{(x-1)^\beta} dx,$$

   trong đó α, β là các tham số.

Câu IV.

1. Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{nx}}{1+n^2}$.

   (a) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm.

   (b) Xét tính khả vi của tổng chuỗi hàm trong miền hội tụ.

2. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $(-\infty, +\infty)$. Với n nguyên dương đặt

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\left[f(x + \frac{1}{n}) + f(x + \frac{2}{n}) + \cdots + f(x + \frac{n}{n}) \right].$$

   Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều trên mọi đoạn hữu hạn bất kỳ.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh nguyên lý Cauchy về sự hội tụ của dãy số (còn gọi là tiêu chuẩn Cauchy).

2. Xét sự hội tụ của dãy số $\{x_n\}$ trong đó

$$x_n = \sin 1 + \sin \frac{1}{1^2} + ... + \sin \frac{1}{n^2}.$$

Câu II.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về tính liên tục đều của một hàm số liên tục trên một đoạn.

2. Cho $f(x)$ liên tục trên $[0, +\infty)$. Biết rằng tồn tại giới hạn hữu hạn của $f(x)$ khi $x \to +\infty$. Chứng minh rằng $f(x)$ liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

Câu III.

1. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{1 + n^3 x^2} \text{ trên khoảng } (-\infty, +\infty).$$

2. Xét tính khả vi của hàm số

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}.$$

Câu IV.

1. Tính tích phân $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ với $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leqslant 1\}$.

2. Cho $f(x)$ xác định và có đạo hàm hữu hạn $f'(x)$ trên khoảng (a, b). Chứng minh rằng nếu $f'(x) \neq 0$ với $\forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu trên khoảng (a, b).

Câu V.

1. Xét sự hội tụ của tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{x} dx.$$

2. Biết rằng $f(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) - f(b) = 0$. Chứng minh rằng

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh nguyên lý Bolzano-Weirestrass về giới hạn của dãy số.
2. Giả sử a_0 là số thực thoả mãn $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$ và $\{a_n\}$ là dãy số thực xác định theo quy tắc

$$a_1 = a_0 \quad , \quad a_{2n} = \frac{1}{2}a_{2n-1} \quad , \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_{2n}) \quad , \quad n \leqslant 1$$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ chỉ có 2 giới hạn riêng là $\frac{1}{3}$ và $\frac{2}{3}$.

Câu II.

1. Phát biểu định lý Cauchy về giá trị trung bình của thương hai hàm khả vi.
2. Cho $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3$. Hỏi có thể áp dụng được định lý Cauchy trên $[-1, 1]$ cho thương hai hàm này không? Tìm số c để

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Câu III. Cho hàm 2 biến

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } (x, y) = (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong một lân cận của điểm $(0, 0)$ hàm f liên tục và có các đạo hàm riêng giới nội nhưng f không khả vi tại điểm $(0, 0)$.

Câu IV.

1. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{x} dx.$$

2. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < +\infty$.

Câu V. Chứng minh rằng độ dài l của đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thoả mãn bất đẳng thức

$$\pi(a + b) \leqslant l \leqslant \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh nguyên lý Cauchy về sự hội tụ của dãy số.

2. Chứng minh rằng một dãy đơn điệu có một dãy con hội tụ thì dãy đó cũng hội tụ.

Câu II. Cho $f(x)$ là hàm số xác định và có các đạo hàm hữu hạn $f'(x)$, $f''(x)$ trên khoảng $(-\infty, 0)$. Hãy xác định các hằng số a, b, c để hàm số

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{với } x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{với } x > 0, \end{cases}$$

có đạo hàm $F'(x)$, $F''(x)$ trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

Câu III. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục theo từng biến x và y trong miền D, đơn điệu theo một trong hai biến đó thì nó liên tục theo hai biến (x, y) trong D.

Câu IV.

1. Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n + (-3)^n}{n} (x-1)^n.$$

2. Xét sự hội tụ đều của dãy hàm $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ trên đoạn $[1, 2]$.

Câu V. Cho $f(x)$ là hàm số khả vi trên đoạn $[0, 1]$ và thoả mãn điều kiện $f'(0)f'(1) < 0$. Chứng minh rằng $f(x)$ đạt cận trên đúng hoặc cận dưới đúng tại một điểm trong khoảng $(0, 1)$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về tính liên tục đều của một hàm số liên tục trên một đoạn.

2. Chứng minh rằng một hàm số liên tục đều trên khoảng hữu hạn (a, b) thì có thể bổ sung giá trị hàm tại hai đầu mút để trở thành hàm liên tục trên $[a, b]$.

Câu II. Phát biểu và chứng minh định lý về tính khả tích của hàm giới hạn của một dãy hàm và điều kiện chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân.

Câu III.

1. Tính
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{\sqrt{1+x^3}-1}.$$

2. Tìm cực trị của hàm số $u = xyz$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2 = 3$ trong miền $x > 0, y > 0, z > 0$.

Câu IV.

1. Tìm miền hội tụ và xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1-\sin 2x}$$

2. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng
$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}\sin 2x}{1+x^2}dx$$
trong đó α là một tham số.

Câu V. Cho dãy số $\{a_n\}$. Biết $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \alpha$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \beta$; α, β là hai số hữu hạn. Tìm $\overline{\lim} a_n$, $\underline{\lim} a_n$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI CƠ SỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về điều kiện chuyển qua giới hạn từng số hạng của một chuỗi hàm.

2. Cho chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{x^2+n^2}\left(\frac{x^2}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$
Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm và xét tính liên tục của tổng chuỗi hàm đó trên miền hội tụ của nó.

Câu II.

1. Phát biểu và chứng minh định lý Lagrange về hàm khả vi.

2. Chứng minh rằng một hàm khả vi trên khoảng hữu hạn (a, b) và không giới nội trên khoảng đó thì đạo hàm của nó cũng không giới nội trên khoảng đó.

3. Tính
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}.$$

Câu III. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng hàm số có đạo hàm riêng tại mọi điểm nhưng các đạo hàm riêng này không liên tục tại điểm $(0,0)$.

2. Xét tính khả vi của hàm số tại $(0,0)$.

Câu IV. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln^2 x}{1+x^\alpha}dx$$
trong đó α là một tham số.

Câu V. Cho f là hàm liên tục trên $(-\infty, \infty)$. Với n nguyên dương đặt
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\left[f(x+\frac{1}{n}) + f(x+\frac{2}{n}) + \cdots + f(x+\frac{n}{n})\right].$$
Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều trên mọi đoạn hữu hạn bất kỳ.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI CƠ SỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý Cantor về dãy đoạn lồng nhau thắt lại trên $\mathbb{R}$.
2. Xét sự hội tụ của dãy số $\{a_n\}$ với

$$a_n = \frac{\sin 1 - \sin 2}{1} + \frac{\sin 2 - \sin 3}{2} + \cdots + \frac{\sin n - \sin(n+1)}{n}.$$

Câu II.

1. Tính

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$$

2. Xét tính khả vi của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} & \text{nếu } x^2+y^2>0, \\ 0 & \text{nếu } x=y=0. \end{cases}$$

Câu III.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về điều kiện chuyển qua giới hạn của một chuỗi hàm.

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} U_n(x).$$

2. Cho chuỗi hàm

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}.$$

Tìm miền tồn tại của $S(x)$ và xét tính liên tục của $S(x)$ trên miền đó.

Câu IV.

1. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^\alpha} dx$$

trong đó α là một tham số.

2. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm khả vi trên $(a, +\infty)$ và $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004 ĐỢT 2
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý Rolle về hàm khả vi.
2. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một hàm liên tục $y = y(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ thoả mãn phương trình $y = x + \varepsilon \sin y$, $0 \le \varepsilon < 1$.

Câu II.

1. Phát biểu và chứng minh nguyên lý Bolzano-Weierstrass về giới hạn dãy số.
2. Tìm
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2}\right).$$

Câu III. Cho chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n\left(1+nx^2\right)}.$$

1. Xác định miền hội tụ của chuỗi hàm.
2. Xét tính liên tục của chuỗi hàm trong miền hội tụ của nó.

Câu IV.

1. Áp dụng tích phân hai lớp tính diện tích của hình giới hạn bởi các đường cong $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ trong đó $0 < \alpha < \beta$.
2. Tính tích phân
$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$
trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $a > 0$.

Câu V. Cho hàm $g(x)$ xác định trên khoảng $[0, +\infty)$ đơn điệu dần về 0 khi $x \to +\infty$. Chứng minh rằng các tích phân
$$\int\limits_0^{+\infty} g(x)\sin^2 x dx \text{ và } \int\limits_0^{+\infty} g(x)\, dx$$
cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004 ĐỢT 2
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về hàm liên tục trên một đoạn có giá trị hai đầu mút đoạn đó trái dấu nhau thì đồ thị của nó sẽ cắt trục hoành.

2. Tìm tham số a để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3} & \text{nếu } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right), \\ a & \text{nếu } x = 1, \end{cases}$$

liên tục trên $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Câu II.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về tính khả vi của hàm giới hạn của một dãy hàm.

2. Cho chuỗi hàm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Tìm miền hội tụ của hàm f và xét tính khả vi của nó trên miền đó.

Câu III.

1. Xét tính khả vi của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

2. Tính

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Câu IV.

1. Tìm các giới hạn riêng của dãy số $\{a_n\}$ với

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{2} + (-1)^n\right) \sin \frac{n\pi}{2}.$$

2. Giả sử f là hàm khả vi hai lần trên $[1, +\infty)$ và $f(1) > 0$, $f'(1) < 0$ còn $f''(x) \leq 0$, $\forall x > 1$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm thuộc $[1, +\infty)$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005 ĐỢT 1
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Định nghĩa tổng Darboux theo một phân hoạch trên đoạn $[a, b]$ của một hàm xác định trên đó. Từ đó phát biểu và chứng minh định lý về điều kiện cần và đủ để một hàm khả tích trên $[a, b]$.

2. Cho f là một hàm khả tích trên đoạn $[a, b]$ và $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ sao cho $f(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Câu II.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về một hàm số liên tục trên một đoạn và giá trị của hàm số tại hai đầu mút của đoạn đó trái dấu nhau thì đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành.

2. Tìm cực trị của hàm số $u = xy^2z^3$ với điều kiện $x + 2y + 3z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Câu III.

1. Cho chuỗi hàm
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1 - x^n)(1 - x^{n+1})}.$$
   (a) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm.
   (b) Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm trên đoạn $[-a, a]$ trong đó a là tham số thoả mãn $0 < a < 1$.

2. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của tích phân suy rộng
$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}dx \text{ với } b > a > 0.$$

Câu IV. Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$ cũng hội tụ tuyệt đối. Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ chỉ bán hội tụ thì có thể nói $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$ hội tụ tuyệt đối được hay không? Nếu không đúng thì hãy cho một ví dụ.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005 ĐỢT 2
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý Cantor về tính liên tục đều của hàm số trên đoạn $[a, b]$.

2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$. Hãy xét sự liên tục đều của nó trên các tập dưới đây:

   (a) Trên $(0, 1)$.
   (b) Trên $(-1, 0)$.
   (c) Trên $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Câu II.

1. Xét sự hội tụ tuyệt đối của tích phân suy rộng
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x^3}{x+10}dx.$$

2. Tính tích phân
$$\iint_D \sqrt{xy}dxdy$$
trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong $y = ax^2$, $y = bx^2$, $xy = p$, $xy = q$ ($0 < a < b$, $0 < p < q$).

Câu III.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về tính liên tục của tổng chuỗi hàm.

2. Cho chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x}e^{-nx}.$$
Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm trong các khoảng

   (a) $[0, +\infty)$.
   (b) $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$.

Câu IV. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thoả mãn điều kiện
$$\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0 \text{ với mọi } n = 1, 2, .., N.$$
Chứng minh rằng hàm f có ít nhất $N + 1$ không điểm trong khoảng (a, b).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 1
MÔN THI CƠ SỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh nguyên lý Cauchy về tiêu chuẩn hội tụ của dãy số.
2. Áp dụng nguyên lý Cauchy xét tính hội tụ của dãy số

$$a_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\ln k} \quad , \quad n \geqslant 2.$$

Câu II.

1. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x} dx \text{ với } \alpha \text{ là tham số.}$$

2. Tính tích phân ba lớp

$$\iiint_V \left|z - \left(x^2+y^2\right)\right| dxdydz$$

trong đó $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Câu III.

1. Phát biểu và chứng minh định lý Rolle về giá trị trung bình của hàm số khả vi trong một khoảng.
2. Cho $f(x)$ liên tục trong $[0,1]$, khả vi trong $(0,1)$ và $f(0) = e$, $f(1) = 1$. Bằng cách xét hàm $g(x) = e^x f(x)$ chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = -f(c)$.

Câu IV.

1. Cho $\{r_n\}$ là một dãy các số hữu tỷ thuộc đoạn $[0,1]$. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n} \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Chứng minh rằng
   (a) Chuỗi hội tụ với mọi $x \in [0,1]$ và tổng $S(x)$ là một hàm liên tục trong đoạn $[0,1]$.
   (b) $S(x)$ khả vi tại mọi điểm vô tỷ nhưng không khả vi tại các điểm hữu tỷ thuộc $[0,1]$.

2. Cho dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, $n \geqslant 1$. Với giá trị nào của α thì dãy hàm
   (a) Hội tụ trên đoạn $[0,1]$.
   (b) Hội tụ đều trên đoạn $[0,1]$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 2
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý Cantor về tính liên tục đều của hàm số trên đoạn $[a, b]$.

2. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng $(a, +\infty)$, $(-\infty < a < +\infty)$. Giả thiết tồn tại các giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = K.$$

Chứng minh rằng hàm $f(x)$ liên tục đều trong $(a, +\infty)$.

Câu II.

1. Phát biểu và chứng minh định lý về tính khả vi của tổng của chuỗi hàm.

2. Cho $u_n(x)$, $n = 1, 2, ..$ là các hàm xác định và đơn điệu trên đoạn $[a, b]$. Giả thiết rằng chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ tyyệt đối tại $x = a$ và $x = b$. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn $[a, b]$.

Câu III.

1. Xét tính hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}}\right) dx.$$

2. Chứng minh rằng tích phân

$$\int_0^{+\infty} \sin(f(x))\, dx$$

hội tụ nếu $f'(x)$ đơn điệu tăng và dần ra $+\infty$ khi $x \to +\infty$.

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$$

trong đó V là miền được giới hạn bởi mặt $3\left(x^2 + y^2\right) + z^2 = 3a^2$.

2. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007 ĐỢT 1
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh các định lý Bolzano-Cauchy thứ nhất và thứ hai về giá trị trung gian của hàm liên tục trên một đoạn.
2. Cho X là một khoảng số thực: $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục, $Y = \{f(x) : x \in X\}$ là tập giá trị của hàm f trên X. Chứng minh rằng Y cũng là một khoảng.

Câu II.

1. Tính tích phân sau $\iint\limits_D (\ln x + \ln y)\, dxdy$ trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong sau: $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.
2. Xét tính hội tụ của tích phân suy rộng sau
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^\alpha + x^\beta} dx \quad , \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Câu III.

1. Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$
   - Phát biểu định nghĩa tính hội tụ đều của chuỗi hàm trên tập hợp X.
   - Phát biểu và chứng minh định lý Weierstrass về sự hội tụ đều của chuỗi hàm trên tập hợp X.
2. Cho $\{u_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ là dãy hàm xác định trên đoạn $[a, b]$ sao cho
   (a) Các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(a)|^2$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(b)|^2$ hội tụ.
   (b) $u_n(x)$ là các hàm khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $u_n'(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, ...$

   Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \sin \frac{x}{n}$ hội tụ đều trên đoạn $[a, b]$.

Câu IV. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{tại điểm } (0, 0). \end{cases}$$

1. Hãy tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$. Chứng minh các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ gián đoạn tại điểm $(0, 0)$.
2. Chứng minh rằng hàm $f(x, y)$ khả vi tại điểm $(0, 0)$.

Ô“ THI TUY”N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 1998

M□n ò□i Sậ

Th□i gian 180'

Câu 1. Cho $(G, \cdot)$ là mắt nh□m h□u h□n. ò□nh nghĨa quan hữ $\sim$ tr□n G bẻi:

$$x \sim y \Longleftrightarrow (\exists g \in G, g^{-1}xg = y).$$

Vèi mẽi $x \in G$, ặ□t $H_x = \{g \in G \mid g^{-1}xg = x\}$ và $O_x = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$.

a) Ch□ng tã $\sim$ là mắt quan hữ t□ăng ặ□ăng tr□n G.

b) Vèi mẽi tẻp con A cềa G, k□ hiữu $|A|$ là sậ phôn tË cềa A. Ch□ng tã rêng $O_{1_G} = \{1_G\}$, H_x là mắt nh□m con cềa G và $|G| = |H_x| . |O_x|$, vèi mÊi $x \in G$.

c) Ch□ng tã n’u $|G| = p^n$, vèi p là mắt sậ nguy□n tậ và n là sậ t□ nhi□n kh□c 0, th□tẹn t□i mắt phôn tË $g \in G$ sao cho $gx = xg, \forall x \in G$.

Câu 2. Gi□ sË $M_n(\mathbb{R})$ là vành c□c ma trẻn vu□ng th□c c p n.

a) Ch□ng minh rêng, ma trẻn A là □èc b□n ph□i cềa 0 trong $M_n(\mathbb{R})$ khi và ch□ khi $\det(A) = 0$.

b) Cho tẻp hểp $\mathcal{N}$ gẹm t t c□ c□c ma trẻn cềa $M_n(\mathbb{R})$ mà mÊi phôn tË tı d□ng th□ hai trẻ ặi ặ“u bêng 0. Ch□ng minh rêng, $\mathcal{N}$ là mắt vành con cềa $M_n(\mathbb{R})$ và mÊi phôn tË kh□c 0 cềa $\mathcal{N}$ ặ“u là □èc b□n ph□i cềa kh□ng trong $\mathcal{N}$.

c) Ch□ng minh rêng, trong $\mathcal{N}$ tẹn t□i v□ sậ ặăn v□ tr□i.

Câu 3. Cho A là mắt ma trẻn m hàng và n cẳt vèi c□c phôn tË thuẳc tr□□ng $\mathbb{K}$. H□ng cềa A k□ hiữu là r_A, ặ□ểc ặ□nh nghĨa là c p cao nh t cềa c□c ặ□nh th□c con kh□c 0 cềa A.

a) Ch□ng minh rêng, r_A bêng sậ c□c ặ□i c□c vector cẳt ặẳc lẻp tuy’n tÛnh cềa A.

b) Cho hữ ph□ăng tr□nh tuy’n tÛnh

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ b_i \in \mathbb{K} \qquad (*).$$

Cho B là ma trẻn m hàng $n+1$ cẳt nhẻn ặ□ểc tı A bêng c□ch gh–p th□m cẳt $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ vào thành cẳt cuại. Ch□ng minh rêng, $(*)$ c□ nghiữm khi và ch□khi $r_A = r_B$.

Bài 4. Gi□sË V là mẳt kh□ng gian vector ph□c gẹm t t c□c□c ặa th□c cềa x vèi hữ sậ ph□c, $f(x)$ là mẳt ặa th□c ặ□cho c□ bẻc r h□u h□n, V_{n+1} là kh□ng gian con cềa V gẹm c□c ặa th□c c□ bẻc kh□ng v□ết qu□n. X–t–□nh x□:

$$\begin{aligned} \varphi :\ V &\longrightarrow V \\ g &\longmapsto fg' - gf' \end{aligned}$$

trong ặ□ f', g' là c□c ặ□o hàm cềa f, g t□ăng □ng.

a) Ch□ng minh rêng, φ là ph–p bi'n ặấi tuy'n tữh cềa V. T□m $\ker\varphi$ và ch□ng tã rêng

$$\varphi(V_{r+1}) = \varphi(V_r).$$

b) T□m $\dim(\varphi(V_{r+1}))$.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 1998

Môn Gi□i T□ch

Th□i gian 180'

Câu 1.

a) Kh□o s□t s□ hải t□ ặ"u cềa chuẽi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}(x^n + x^{-n})$$

tr□n mi"n hải t□ ặ□ặ□ểc ch□ra là $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$.

b) T□m mi"n hải t□ cềa chuẽi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2} x^n.$$

Câu 2. Cho $C_{[a,b]}$ là tẻp c□c hàm li□n t□c tr□n ặo□n $[a, b]$.

a) ò □t

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|, \ x, y \in C_{[a,b]}.$$

Ch□ng minh rêng, d là mẩt metric tr□n $C_{[a,b]}$ và vèi metric d, $C_{[a,b]}$ là mẩt kh□ng gian ặôy ặề.

b) ò □t

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt, \ x, y \in C_{[a,b]}.$$

Ch□ng minh rêng, ρ là mẩt metric tr□n $C_{[a,b]}$ và vèi metric ặ□ $C_{[a,b]}$ là mẩt kh□ng gian kh□ng ặôy ặề.

Câu 3.

a) ò □t

$$C_0[0, 1] = \{x \in C_{[0,1]} \ : \ x(0) = 0\},$$

trong ặ□ $C_{[0,1]}$ là kh□ng gian ặ□nh chuẩn c□c hàm li□n t□c tr□n $[0, 1]$ vèi chuẩn "max". Ch□ng minh rêng, $C_0[0, 1]$ là kh□ng gian con ặ□ng cềa $C_{[0,1]}$ và

$$\begin{aligned} A : C_0[0, 1] &\longrightarrow C_0[0, 1] \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

cho bẻi

$$(Ax)(t) = \frac{1}{2}[x(t^2) + tx(1)],\ t \in [0, 1]$$

là mẩt □nh x□tuy'n tûnh li□n t□c. Tûnh $\|A\|$.

b) Gi□sË X, Y là hai kh□ng gian Banach và $A : X \longrightarrow Y$ là mẩt to□n tË tuy'n tûnh. Bi't rêng vèi mÊi $y^* \in Y^*$, ta c□ $y^* \circ A \in X^*$. Ch□ng minh rêng, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Câu 4. Cho H là mẩt kh□ng gian Hilbert.

a) Gi□sË $A \in \mathcal{L}(H)$ là mẩt to□n tË t□li□n hểp. Ch□ng minh rêng, $\|A^2\| = \|A\|^2$, vèi $A = A \circ A$.

b) Cho $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(H)$ thõa m□n ại"u kiữn

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle A_n x, y\rangle| < +\infty$$

vèi mÊi $x, y \in H$. Ch□ng minh rêng, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A\| < +\infty$.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 1999

M□n ò□i Sậ

Th□i gian 180'

Câu 1. Cho n là mẩt sậ nguy□n d□ăng vèi

$$n = p_1^{r_1}...p_h^{r_h}$$

trong ặ□ p_i là c□c sậ nguy□n tậ và $r_i > 1$. Cho G là mẩt nh□m giao ho□n (vèi phôn tË ặăn v□ e) c□ n phôn tË. Gi□sË tÛnh ch t $(*)$ sau ặây ặ□ểc thăa m□n:

"Vèi m□i □èc sậ d cềa n, t□p hểp $\{x \in G \mid x^d = e\}$ c□ nhi□u nh t d phôn tË."

Ch□ng tã rêng, vèi mëi $1 \le i \le h$, tẹn t□i $a_i \in G$ thăa m□n $a_i^{p_i^{r_i}} = e$ và $a_i^{p_i^{r_i - 1}} \neq e$. Suy ra a_i c□ bêc là $p_i^{r_i}$.

Câu 2. Cho A là vành giao ho□n, c□ ặăn v□ ò□t

$$\mathcal{R} = \{I \mid I \text{ là idean c□c ặ□i cềa } A\},$$
$$N = \bigcap_{I \in \mathcal{R}} I.$$

Ch□ng tã:

a) Vèi mëi idean I cềa A, $I \in \mathcal{R}$ khi và ch□ khi A/I là mẩt tr□□ng.

b) $N = \{x \in A \mid \forall y \in A, \exists z \in A, (1 - xy)z = 1\}$.

c) Gi□sË A c□ tÛnh ch t: $\forall x \in A, \exists n > 1$ thuẩc $\mathbb{N}$ sao cho $x^n = x$. Ch□ng tã rêng idean nguy□n tậ cềa A cĩng c□c ặ□i.

Câu 3. Cho A, B là c□c ma trên vu□ng c p n c□ c□c phôn tË thuẩc vào tr□□ng $\mathbb{K}$. Ch□ng tã:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \le \text{rank}(AB) \le \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

Câu 4. Cho E là mẩt kh□ng gian vector h□u h□n chi"u tr□n tr□□ng $\mathbb{K}$ c□ ặ□c sậ kh□c 2 và f là mẩt d□ng song tuy'n tÛnh ặậi x□ng tr□n E. Vèi mëi kh□ng gian con U cềa E, ặ□t $U^\perp = \{x \in E \mid f(x, y) = 0,\ \forall y \in U\}$; U ặ□ểc gÊi là hoàn toàn ặ□ng h□êng n'u $f(x, x) = 0,\ \forall x \in U$. Kh□ng gian con hoàn toàn ặ□ng h□êng ặ□ểc gÊi là c□c ặ□i n'u n□ kh□ng ch□a trong mẩt kh□ng gian hoàn toàn ặ□ng h□êng kh□c.

a) Ch□ng tã rêng U là mẩt kh□ng gian con hoàn toàn ặ□ng h□èng khi và ch□khi $U \subset U^{\perp}$.

b) Cho U, V là c□c kh□ng gian hoàn toàn ặ□ng h□èng. Ch□ng tã rêng vèi mÊi $x \in U \cap V$, kh□ng gian con $V + Kx$ là hoàn toàn ặ□ng h□èng.

c) Ch□ng tã rêng mẽi kh□ng gian con hoàn toàn ặ□ng h□èng ặ□ểc ch□a trong mẩt kh□ng gian con hoàn toàn ặ□ng h□èng c□c ặ□i. Suy ra c□c kh□ng gian con hoàn toàn ặ□ng h□èng c□c ặ□i c□cẽng mẩt sạ chi“u.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2000

M□n ò □i Sạ

Th□i gian 180'

Câu 1. K□ hiữu $GL(n, \mathbb{R}^n)$ là nh□m nhân c□c ma trẻn th□c kh□ng suy bi'n c p n. Ch□ng tã:

a) Tẻp hẻp $SL(n, \mathbb{R}^n)$ c□c ma trẻn th□c c p n c□ ặ□nh th□c bêng 1 là mất nh□m con chuẩn tốc cềa $GL(n, \mathbb{R}^n)$.

b) Ánh x□

$$f : GL(n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

tı nh□m $GL(n, \mathbb{R}^n)$ vào nh□m nhân c□c sạ th□c kh□c 0 là mất toàn c u. Suy ra nh□m th□ăng $GL(n, \mathbb{R}^n)/SL(n, \mathbb{R}^n)$ ặ□ng c u vèi nh□m $\mathbb{R}^*$.

Câu 2. Cho $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_p[x]$ là tẻp hẻp mÊi ặa th□c mất bi'n x c□ hữ sạ trong tr□□ng $\mathbb{Z}_p$ c□c sạ nguy□n modulo p, vèi p là mất sạ nguy□n tạ. X~~t~~ $f \in \mathcal{R}$ vèi:

$$f = \overline{1} + [x^{p-1} + (x + \overline{1})^{p-1} + \cdots + (x + \overline{p-1})^{p-1}].$$

a) Ch□ng tã rêng mÊi phôn tË cềa $\mathbb{Z}_p$ là nghiữm cềa ph□ăng tr□nh $f(x) = 0$. Do ặ□ $f = 0$.

b) Suy ra c□ng th□c sau:

$$1^k + \cdots + (p-2)^k + (p-1)^k \equiv \begin{cases} 0 \; mod(p) & \text{n'u} \;\; k \not\equiv 0 \; mod(p-1), \\ -1 \; mod(p) & \text{n'u} \;\; k \equiv 0 \; mod(p-1). \end{cases}$$

Câu 3. Cho A, B là c□c ma trẻn vu□ng c p n c□ sạ h□ng trong tr□□ng $\mathbb{K}$. Ch□ng tã:

$$|\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \leq \text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

Câu 4. Cho V là mất kh□ng gian vector th□c. Tẻp D ặ□ểc gÊi là mất ặa t□p tuy'n tÝnh cềa V n'u $D = W + x_0$, vèi W là mất kh□ng gian vector con cềa V và $x_0 \in V$, sạ chi"u cềa W ặ□ểc gÊi là sạ chi"u cềa D. Ch□ng tã rêng

a) Vèi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là mất hữ vector cho tr□èc trong V th□ tẻp hẻp

$$D = \{x = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1\}$$

là mất ặa t□p tuy'n tữnh cềa V ch□a c□c vector $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

b) Tẻp hểp c□c nghiữm cềa mất hữ ph□ăng tr□nh tuy'n tữnh t□ăng thữch n ần h□ng r vèi hữ tË thuẩc tr□□ng sậ th□c $\mathbb{R}$ lẻp thành mất ặa t□p tuy'n tữnh c□ sậ chi"u là $n - r$ trong kh□ng gian vector $\mathbb{R}^n$.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2000

Môn Gi□i Tứch

Th□i gian 180'

Câu 1. Cho (X, d) là mẩt kh□ng gian metric. Ta ặ□t

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x.y)}, \ x, y \in X.$$

H□y ch□ng minh:

a) (X, ρ) là mẩt kh□ng gian metric.

b) Kh□ng gian (X, ρ) ặôy ặề khi và ch□ khi (X, d) ặôy ặề.

c) Cho A là mẩt tẹp compact trong (X, d). Ch□ng minh rêng, A cĩ ng là mẩt tẹp compact trong (X, ρ).

Câu 2. Cho $f \geq 0$ là hàm ặo ặ□ếc tr□n tẹp A. Vèi mẽi $n \in \mathbb{N}$ ta ặ□t

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{n'u } f(x) < n \\ n & \text{n'u } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Ch□ng minh $\lim\limits_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Câu 3. K□ hiữu $X = C_{[0,1]}$ là kh□ng gian ặ□nh chuẩn vèi chuẩn " max ".

a) Gi□ sË $x \in X$, vèi mẽi $n \in \mathbb{N}$ ta ặ□t

$$x_n(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}}), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ch□ng minh rêng, d□y $(x_n)_n$ hẩi t□ v" hàm x trong X.

b) ò □t $A : X \longrightarrow X$ cho bẻi c□ng th□c $x \longmapsto Ax, (Ax)(t) = x(0) - tx(t)$, vèi mÊi $t \in [0, 1]$. Ch□ng minh A tuy'n tứnh li□n t□c và tứnh $\|A\|$.

Câu 4. Cho X là mẩt kh□ng gian ặ□nh chuẩn và $f \in X^*$, $f \neq 0$. K□ hiữu $\alpha = \inf\{\|x\| \ : \ x \in X, f(x) = 1\}$. Ch□ng minh rêng, $\|f\| = \dfrac{1}{\alpha}$.

Câu 5. Cho H là mẩt kh□ng gian Hilbert vèi $\{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ là mẩt că sẻ tr□c chuẩn cềa H.

ò □t $A : \ H \longrightarrow H$ x□c ặ□nh bẻi

$$\forall x \in H, \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{n+1} \rangle \, e_n.$$

Ch□ng minh rêng, A tuy'n tứnh, li□n t□c. T□m $\|A\|$ và x□c ặ□nh to□n tË li□n hẹp A^*.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2001

M□n Gi□i TÛch

Th□i gian 180'

Câu 1 1) Kh□o s□t s□hải t□cềa chuẽi sậ sau ặây: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln(1+n)}{n^\alpha},\ \alpha > 1.$

2) Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm sậ x□c ặ□nh bẻi:

$$f = \begin{cases} 0, & \text{n'u } x \notin (0,1], \\ \sqrt{n}, & \text{n'u } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \quad \text{vèi } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

TÛnh $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ và suy ra f kh□tÛch tr□n $\mathbb{R}$, trong ặ□ μ là ặẩ ặo Lebesgue tr□n $\mathbb{R}$.

Câu 2. Cho X là mẩt kh□ng gian metric compact và $f : X \longrightarrow X$ là mẩt □nh x□li□n t□c. Gi□sË (K_n) là mẩt d□y gi□m c□c tẻp ặ□ng kh□ng rẽng cềa X.

Ch□ng minh rêng, $f(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(K_n)$.

Câu 3. K□hiũu $C_{[0,1]}$ là kh□ng gian ặ□nh chuẩn c□c hàm sậ li□n t□c tr□n $[0,1]$ vèi chuẩn "$\max$". ò□t

$$M = \{x \in C_{[0,1]}\ :\ x(0) = 0,\ 0 \le x(t) \le 1,\ \forall t \in [0,1]\}.$$

1) Ch□ng minh rêng M là mẩt tẻp ặ□ng và b□ch□n trong $C_{[0,1]}$.

2) X~~t~~ hàm sậ $f : C_{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}$ x□c ặ□nh bẻi c□ng th□c $f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$. Ch□ng minh rêng, f li□n t□c tr□n tẻp M nh□ng f kh□ng ặ□t ặ□ểc gi□tr□b— nh t tr□n M.

Câu 4. Gi□sË X là kh□ng gian ặ□nh chuẩn th□c và $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là mẩt phi'm hàm tuy'n tÛnh. Ch□ng minh rêng, $f \in X^*$ khi và ch□khi tẻp $M = \{x \in X\ :\ f(x) \ge 1\}$ là mẩt tẻp ặ□ng trong X.

Câu 5. Cho H là mẩt kh□ng gian Hilbert vèi că sẻ tr□c chuẩn $\{e_n,\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ và X là mẩt kh□ng gian Banach. Gi□sË $A \in \mathcal{L}(H, X)$ sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < +\infty$. Vèi mẽi $n \in \mathbb{N}$, ta ặ□t $A_n : H \longrightarrow X$ x□c ặ□nh bẻi $A_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle Ae_k,\ \forall x \in H$. Ch□ng tã rêng

a) Vèi mÊi $n \in \mathbb{N}$, A_n là mẩt to□n tË tuy'n tÛnh li□n t□c.

b) $A_n \longrightarrow A$ trong kh□ng gian $\mathcal{L}(H, X)$ và tı ặây suy ra A là mẩt to□n tË compact.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2001

M□n ò □i Sậ

Th□i gian 180'

Câu 1. Cho G là tẻp t t c□c□c bẩ sậ nguy□n d□ng (k_1, k_2, k_3). Ch□ng minh rêng,

a) G là mẩt nh□m vèi ph~~p~~ to□n

$$(k_1, k_2, k_3).(l_1, l_2, l_3) = (k_1+(-1)^{k_3}l_1, k_2+l_2, k_3+l_3),\ \forall k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}.$$

b) Nh□m con cyclic H sinh bẻi phôn tË $(1, 0, 0)$ là □èc chuẩn tốc trong G.

c) Nh□m th□ăng G/H ặ□ng c u vèi nh□m cẩng c□c sậ nguy□n Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\right\}.$$

Câu 2. Cho R là vành h□u h□n phôn tË. X□c ặ□nh c□c ặẹng c u vành tı R vào vành c□c sậ nguy□n $\mathbb{Z}$.

Câu 3. Cho $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ và $\mathbb{K}$ là mẩt tr□□ng. GÊi $M_n(\mathbb{K})$ là kh□ng gian vector c□c ma trển vu□ng c p n tr□n $\mathbb{K}$. Ta ặ□nh nghÎa v't cềa ma trển vu□ng $A \in M_n(\mathbb{K})$ (k□ hiữu $\mathrm{Tr}(A)$) là tấng c□c phôn tË nêm tr□n ặ□□ng ch~~o~~ chÛnh cềa A. Ch□ng minh rêng,

a) Vèi mÊi $A \in M_n(\mathbb{K})$, □nh x□ $\theta_A : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ x□c ặ□nh bẻi

$$\theta_A(X) = \mathrm{Tr}(AX),\ \forall X \in M_n(\mathbb{K})$$

là mẩt phôn tË cềa kh□ng gian ặại ng□u $(M_n(\mathbb{K}))^*$.

b) Ánh x□

$$\begin{aligned} \theta : M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow (M_n(\mathbb{K}))^* \\ A &\longmapsto \theta_A \end{aligned}$$

là mẩt ặ□ng c u gi□a c□c kh□ng gian vector.

Câu 4. Cho $\varphi : V \longrightarrow W$ là mẩt □nh x□ tuy'n tÛnh tı kh□ng gian vector n-chi"u V vào kh□ng gian vector m-chi"u W. Ch□ng minh rêng,

a) N'u U là mẩt kh□ng gian vector con k-chi"u cềa V sao cho $U \cap \ker\varphi$ là kh□ng gian con p-chi"u th□ $\dim\varphi(U) = k - p$.

b) N'u T là mẩt kh□ng gian vector con cềa W sao cho $T \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ là kh□ng gian con r-chi"u th□ $\dim\varphi^{-1}(T) = n + r - \mathrm{rank}(A)$.

Ò‟ THI TUY”N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2002

Môn ò □i Sậ

Th□i gian 180'

Câu 1.

a) Tẹn t□i hay kh□ng mẩt th” $(K, +, \times)$ c□ặ□t sậ kh□c 2 sao cho c□c nh□m con $(K, +)$ và $(K^*, \times)$, vèi $K^* = K \setminus \{0\}$, ặ□ng c u vèi nhau?

b) Cho $A = \mathbb{Z}[i]$ là vành c□c sậ ph□c d□ng $a + bi$, vèi a, b là c□c sậ nguy□n, và I là tẻp con cềa A gẹm c□c sậ ph□c $c + di$, vèi c, d là bải cềa 3. Ch□ng minh rêng, I là mẩt idean cềa A và vành th□ăng A/I là mẩt tr□□ng gẹm 9 phôn tË.

Câu 2. Cho $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ và $\circ$ là ph—p to□n trong G x□c ặ□nh bẻi

$$(x, y) \circ (x', y') = (xx', xy' + \frac{y}{x'}),$$

vèi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Ch□ng minh rêng, $(G, \circ)$ là mẩt nh□m. Ch□ra nh□m tâm cềa G.
2. Ch□ng minh rêng, vèi b t k□ $k \in \mathbb{R}$, tẻp hểp

$$H_k = \left\{ (x, k(x - \frac{1}{x})) \;:\; x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

là mẩt nh□m con giao ho□n cềa G.

Câu 3.

1. Cho A, B là c□c ma trẻn vu□ng c p n vèi hữ tË trong tr□□ng $\mathbb{K}$. Ch□ng tã

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

2. Ch□ng minh rêng, c□ng th□c tr□n v□n c□n ặĩ ng khi A, B là c□c ma trẻn ch□ nhẻt vèi n là sậ cẩt cềa A và cĩ ng là sậ hàng cềa B.

Câu 4. Cho f là mẩt d□ng song tuy'n tÛnh tr□n kh□ng gian vector th□c n-chi‟u V và $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là mẩt că sẻ cềa V. GÊi L là kh□ng gian con cềa V sinh bẻi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (vèi $1 \le k < n$) và ặ□t $L^{\perp} = \{y \in V \mid f(x, y) = 0,\ \forall x \in L\}$.

1. Cho B là ma trển bi"u di‘n f theo că sẻ $\mathcal{U}$. Ch□ng tã rêng, n'u $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ theo că sẻ $\mathcal{U}$ th□ $y \in L^{\perp}$ khi và ch□ khi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là nghiữm cềa hữ ph□ăng tr□nh

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

vèi $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ là ma trển nhển ặ□ểc tı B bêng c□ch bã $n - k$ hàng cuậi cễng cềa B.

2. f ặ□ểc gÊi là kh□ng suy bi'n n'u ma trển bi"u di‘n f, theo mẩt că sẻ nào ặ□ cềa V, là kh□ng suy bi'n. Ch□ng tã n'u f kh□ng suy bi'n th□ $\dim L^{\perp} = n - k$.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2002

Môn Gi□i Tĩch

Th□i gian 180'

Câu 1.

1. Cho $(x_n)_n$ là mẩt d□y tđng, b□ch□n tr□n và $x_n > 0$ vèi mÊi $n \in \mathbb{N}^*$. Ch□ng minh rêng, chuẽi sậ $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$ hẩi t□.

2. T□m mi"n hẩi t□ và tĩnh tấng cẻa chuẽi lĩ y thı a: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}$.

Câu 2. Cho $(X, d_X), (Y, d_Y)$ là hai kh□ng gian metric, trong ặ□ X compact. K□ hiữu $\mathcal{C}(X,Y)$ là tẻp hểp c□c □nh x□ li□n t□c tı X vào Y.

1. Gi□ sË $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$, ặ□t $\varphi(x) = d_Y(f(x), g(x))$. Ch□ng minh rêng, $\varphi(x)$ là mẩt hàm li□n t□c tr□n X.

2. Vèi $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$, ặ□t $d(f,g) = \max_{x \in X} \varphi(x)$. Ch□ng minh rêng, $\mathcal{C}(X,Y)$ là mẩt kh□ng gian metric. Hăn n□a, $\mathcal{C}(X,Y)$ là kh□ng gian ặôy ặề khi và ch□ khi Y ặôy ặề.

Bài 3. Cho X là mẩt kh□ng gian metric ặôy ặề và φ là □nh x□ li□n t□c b□ch□n tı $X \times \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Gi□ sË tẹn t□i $\lambda \in (0,1)$ sao cho

$$\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ : \ |\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| \leq \lambda |y_1 - y_2|.$$

Ch□ng minh rêng, tẹn t□i duy nh t mẩt □nh x□ li□n t□c u tı X vào $\mathbb{R}$ sao cho

$$u(x) = \varphi(x, u(x)), \ \forall x \in X.$$

Câu 4.

1. Cho X là mẩt kh□ng gian ặ□nh chuẩn và M là mẩt tẻp con cẻa X. Gi□ sË vèi mÊi $f \in X^*$ ta c□ $\sup_{x \in M} |f(x)| < +\infty$. Ch□ng minh rêng, M là mẩt tẻp b□ch□n trong X.

2. Cho X là kh□ng gian Banach, Y là kh□ng gian ặ□nh chuẩn, $(A_n)_n$ là mẩt d□y to□n tË tuy'n tĩnh li□n t□c trong kh□ng gian $\mathcal{L}(X,Y)$. Ch□ng minh rêng, n'u vèi mÊi $x \in X$, $(A_n x)_n$ là mẩt d□y că b□n trong Y th□ $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|A_n\| < +\infty$.

Câu 5. Cho $\{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ là mẩt hữ tr□c chuẩn trong kh□ng gian Hilbert H và $(\lambda_n)_n$ là mẩt d□y sậ b□ch□n.

1. Ch□ng minh rêng, vèi mÊi $x \in H$, chuõi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ hải t□ trong H.

2. ò □t $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ vèi mÊi $x \in H$. Ch□ng minh rêng, A là to□n tË tuy'n tÛnh li□n t□c tr□n H. TÛnh $\|A\|$.

Ò" THI TUY"N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2003

M□n Gi□i T̃ch

Th□i gian 180'

Câu 1. Cho A là mẩt tẻp ậo ặ□ểc và $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ là c□c hàm kh□ t̃ch tr□n A. Vèi mẽi $n \in \mathbb{N}$ ta ặ□t $A_n = \{x \in A \mid n \leq |f(x)| < n+1\}$ và $B_n = \{x \in A \mid \ |f(x)| \geq n\}$. Ch□ng minh rêng

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_n} g d\mu = 0,$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mu A_n < +\infty,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\mu B_n = 0.$

Câu 2.

a) Cho A là mẩt tẻp con trong kh□ng gian metric X và $x \in X$ là mẩt ặi"m d̃nh cềa A. Gi□ sË $x \notin A$. Ch□ng minh A là mẩt tẻp v□ h□n. Suy ra mÊi tẻp con c□ h□u h□n ặi"m trong X ặ"u là tẻp ặ□ng.

b) Gi□ sË X, Y là hai kh□ng gian metric và $f : X \longrightarrow Y$ là mẩt to□n □nh li□n t□c tı X l□n Y. Cho $A \subset X$ sao cho $\overline{A} = X$. Ch□ng minh rêng $\overline{f(A)} = Y$.

Câu 3. Cho A là mẩt to□n tË tuy'n t̃nh li□n t□c, $\mathcal{R}(A)$ là tẻp hểp c□c gi□ tr□ cềa A.

a) Gi□ sË X là kh□ng gian Banach, Y là kh□ng gian tuy'n t̃nh ặ□nh chuẩn. Ch□ng minh rêng, n'u tẹn t□i sậ $m > 0$ sao cho $\|Ax\| \geq m\|x\|$ vèi mÊi $x \in X$ th□ $\mathcal{R}(A)$ là mẩt kh□ng gian con ặ□ng cềa Y.

b) Gi□ sË X, Y là c□c kh□ng gian Banach và $\mathcal{R}(A)$ là tẻp ặ□ng trong Y. Ch□ng minh rêng, tẹn t□i sậ $m > 0$ sao cho vèi mẽi $y \in \mathcal{R}(A)$, tẹn t□i $x \in X$ ặ" $y = Ax$ và $\|y\| \geq m\|x\|$.

Câu 4. K□ hiũu H là kh□ng gian Hilbert.

a) Gi□ sË A là kh□ng gian con 1-chi"u cềa H và a là mẩt phôn tË kh□c 0 cềa A. Ch□ng minh rêng, vèi mÊi $x \in H$ ta c□

$$d(x, A^{\perp}) = \inf\left\{\|x-u\|,\ u \in A^{\perp}\right\} = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}.$$

b) Cho $M \subset H$ sao cho kh□ng gian con sinh bẻi M trễ mẻt trong H. Ch□ng minh rêng, n'u $x \in H$ và $x \perp M$ th□ $x = 0$.

Câu 5. Gi□ sË $\{e_n\}$ là mắt hữ thặng tr□c chuẩn trong kh□ng gian Hilbert H, $\{\lambda_n\}$ là mắt d□y sậ hải t□ ặ'n 0. Ch□ng minh rêng, to□n tË A x□c ặ□nh bẻi c□ng th□c

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \; x \in H$$

là mắt to□n tË compact tı H vào H.

Ò‟ THI TUY”N SINH SAU Ặ□I H□C NĐM 2003

M□n ò □i Sậ

Th□i gian 180'

Câu 1. X–t nh□m nhân $\mathbb{C}^*$ cềa tr□□ng $\mathbb{C}$ c□c sậ ph□c. K□ hiữu G^k là tẻp c□c cđn bẻc p^k cềa phôn tË ặăn v□cềa $\mathbb{C}$ (p là sậ nguy□n tậ và k là sậ nguy□n d□ăng) và $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G^k$.

a) Ch□ng tã rêng G là mẩt nh□m con c p v□ h□n kh□ng cyclic cềa $\mathbb{C}^*$ và mÊi nh□m con th□c s□cềa G ặ‟u là nh□m con cyclic h□u h□n.

b) Tr□n G, x–t hai ph–p to□n $\oplus, \odot$ nh□ sau:

$$\forall x, y \in G, \;\; x \oplus y = xy, \quad x \odot y = 0.$$

Ch□ng minh rêng, $(G, \oplus, \odot)$ là mẩt vành giao ho□n, kh□ng ch□a ặăn v□và kh□ng c□ idean tại ặ□i.

Câu 2. Cho D là mẩt mi‟n nguy□n vèi ặăn v□e sao cho mẽi nh□m con cềa nh□m cẩng cềa D là mẩt idean cềa D. Ch□ng minh rêng, D ặ□ng c u vèi vành $\mathbb{Z}$ c□c sậ nguy□n ho□c D ặ□ng c u vèi vành $\mathbb{Z}_p$ c□c sậ nguy□n $mod(p)$, vèi p là mẩt sậ nguy□n tậ.

Câu 3. X–t kh□ng gian vector th□c $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ gẹm c□c ma trẻn vu□ng c p n vèi hữ tË tr□n tr□□ng $\mathbb{R}$ c□c sậ th□c. K□ hiữu $\mathcal{S}(n)$ là tẻp con c□c ma trẻn ặậi x□ng và $\mathcal{A}(n)$ là tẻp con c□c ma trẻn ph□n ặậi x□ng cềa $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

a) Ch□ng minh rêng, $\mathcal{S}(n)$ và $\mathcal{A}(n)$ là nh□ng kh□ng gian con cềa $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ và x□c ặ□nh sậ chi‟u cềa chï ng.

b) Ch□ng tã $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{S}(n) \oplus \mathcal{A}(n)$.

Câu 4. X–t kh□ng gian vector $\mathcal{K}^n$ gẹm c□c bẩ n phôn tË cềa tr□□ng $\mathcal{K}$ (n là sậ nguy□n d□ăng). Ch□ng minh rêng,

a) Tẻp nghiữm cềa mẩt hữ ph□ăng tr□nh tuy’n tÝnh thuôn nh t n ẳn, h□ng r vèi c□c hữ tË thuẩc tr□□ng $\mathcal{K}$ lẻp thành mẩt kh□ng gian con cềa $\mathcal{K}^n$ c□ sậ chi‟u là $d = n - r$.

b) Vèi mÊi kh□ng gian con W cềa $\mathcal{K}^n$ sao cho $\dim W = d$, tẹn t□i mẩt hữ ph□ăng tr□nh tuy’n tÝnh thuôn nh t n ẳn, h□ng $r = n - d$ vèi hữ tË thuẩc $\mathcal{K}$ sao cho tẻp nghiữm trẽng vèi kh□ng gian con ặ□cho./.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh:....................................
Số báo danh:........................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007
Môn thi: GIẢI TÍCH
(Dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: 180phút

Câu I.

a. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^n x}$.

b. Khảo sát sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ trên miền $(0;+\infty)$.

c. Tính tích phân:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

trong đó: $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/2ax\leqslant x^2+y^2\leqslant 2bx\}, 0<a<b.$

Câu II. Cho X là tập gồm tất cả các tập con compact khác $\emptyset$ của $\mathbb{R}$.

a. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, đặt $d(x,A)=\inf\{|x-y|:y\in A\}$. Chứng minh rằng, với mọi $x\in\mathbb{R}, A\in X$, tồn tại $x_0\in A$ sao cho $|x-x_0|=d(x,A)$.

b. Gọi $d:X\times X\to\mathbb{R}$ là ánh xạ được xác định như sau:

$$d(A,B):=\inf\{\delta : A\subset B_\delta, B\subset A_\delta\},$$

trong đó, $A_\delta=\inf\{x\in\mathbb{R}:d(x,A)\leqslant\delta\}$. Chứng minh rằng d là một metric trên X.

Câu III. Ký hiệu $X=C_{[0,2]}$ là không gian định chuẩn các hàm số liên tục trên $[0,2]$ với chuẩn:

$$\|x\|=\max\{|x(t)|:t\in[0,2]\}$$

và không gian con $Y=x\in X:x(0)=0$ của X.
Cho ánh xạ $A:X\to Y, x\mapsto Ax$ xác định bởi:

$$Ax(t)=\int\limits_0^t x(s)ds; t\in[0,2]$$

a. Chứng minh rằng A là toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y.

b. Tính $\|A\|$. Ánh xạ A có phải là một toàn ánh không ?

Câu IV. Cho không gian Hilbert phức H và tập hợp $\{\phi_n|n\in\mathbb{N}\}\subset H$ thỏa mãn $\|\phi_n\|=1$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ và sao cho với mọi $f\in H$, ta có:

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f,\phi_n\rangle|^2.$$

Chứng minh rằng:

a. $\{\phi_n|n\in\mathbb{N}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của H.

b. Dãy $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ yếu đến 0.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh:....................................
Số báo danh:........................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007
Môn thi: ĐẠI SỐ
(Dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: 180phút

Câu I.

1. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các vectơ khác không của một không gian vectơ và A là một phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ đó sao cho:

$$Ax_1 = x_1, Ax_k = x_k + x_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, n.$$

Chứng minh rằng các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính.

2. Cho B là ma trận vuông cấp n xác định trên trường F sao cho $B^k = 0$, với k là một số tự nhiên nào đó. Tìm $(E_n - B)^{-1}$, trong đó E_n là ma trận vuông đơn vị cấp n.

3. Tính $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2000}$ với $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận xác định trên trường F.

Câu II.

1. Cho φ và ψ là hai tự đồng cấu của một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường số phức $\mathbb{C}$ sao cho $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Chứng minh rằng φ và ψ có chung một vectơ riêng.

2. Cho E là một không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều và $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là một hệ trực chuẩn trong E. Chứng minh rằng nếu với mọi $v \in E$ ta đều có:

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle^2$$

thì $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là một cơ sở của E.

Câu III. Cho G là một nhóm nhân hữu hạn sao cho G có một tự đẳng cấu φ thỏa $\varphi(a) \neq a, \forall a \neq 1_G$. Chứng minh rằng:

1. Với mọi $\alpha \in G$ tồn tại $g \in G$ sao cho $\alpha = g^{-1}\varphi(g)$;

2. Nếu φ có cấp bằng 2, tức là $\varphi \neq id$ và $\varphi^2 = id$, thì $\varphi(g) = g^{-1}$ với mọi $g \in G$ và G là một nhóm aben có cấp là một số lẻ.

Câu IV.

1. Cho R là một vành giao hoán với đơn vị $1 \neq 0$ và I là một iđêan của R. Chứng minh rằng với mỗi $a \in R$, tập con $J = \{ax + I | x \in R\} \subset R/I$ là một iđêan của R/I sinh bởi $a + I \in R/I$. Từ đó suy ra rằng khi I là iđêan tối đại của vành R thì mọi phần tử khác không của R/I đều khả nghịch.

2. Chứng minh rằng tập hợp các số hữu tỷ dạng $\frac{m}{n}$ với mẫu số là một số nguyên lẻ tạo thành một miền nguyên chính.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh:....................................
Số báo danh:........................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006
Môn thi: GIẢI TÍCH
(Dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: 180phút

Câu I.

a. Chứng minh :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

b. Tìm miền hội tụ và xét sự hội tụ đều trên miền đó của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n.$$

Câu II.

a. Xét dãy hàm số $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi

$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng dãy hàm $(f_n)_n$ hội tụ điểm khắp nơi (trên $\mathbb{R}$) nhưng không hội tụ theo độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$.

b. Cho không gian độ đo $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Giả sử $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sao cho cả f và f^2 đều khả tích trên X. Chứng tỏ rằng nếu $1 \leqslant p \leqslant 2$ thì $|f|^p$ khả tích trên X.

Câu III. Cho$X$ là một không gian Banach và F là một tập con đóng của X có tính chất sau: *với mọi $x \in X$ đều tồn tại một số $\epsilon > 0$ (phụ thuộc vào x) sao cho $\lambda x \in F, \forall \lambda \in [0, \epsilon]$*. Chứng minh rằng F phải chứa một hình cầu mở $B(x_0, r)$ nào đó.

Câu IV. Chứng minh rằng:

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt, x \in C_{[-1,1]}$$

là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên $C_{[-1,1]}$ với chuẩn "max". Tính $\|f\|$.

Câu V.

a. Giả sử H là không gian Hilbert, $A : H \to H$ là một toán tử tuyến tính thỏa mãn điều kiện:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \forall x, y \in H.$$

Chứng minh rằng A liên tục.

b. Khi H là một không gian Hilbert phức, $A \in \mathcal{L}(H)$ và $\langle Ax, x\rangle = 0, \forall x \in H$.
Chứng minh rằng $A = 0$.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh:....................................
Số báo danh:.......................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006
Môn thi: ĐẠI SỐ
(Dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: 180phút

Câu I.

1. Cho G là một nhóm hữu hạn. Một phần tử $x \in G$ được gọi là *không sinh* nếu tính chất sau được thỏa mãn: *với mọi tập con S của G, đẳng thức $G = \langle S, x \rangle$ kéo theo $G = \langle S \rangle$.* Một nhóm con thực sự K của G được gọi là *cực đại* nếu không tồn tại nhóm con L nào của G chứa K sao cho $L \neq K, L \neq G$. Đặt:
$$\Phi(G) = \{x \in G | x \text{ là không sinh}\}$$
$$\mathcal{M} = \{K \subset G | K \text{ là nhóm con cực đại của } G\}$$
Chứng tỏ rằng $\Phi(G) = \bigcap\limits_{K \in \mathcal{M}} K$. Suy ra $\Phi(G)$ là một nhóm con của G.

2. Chứng minh rằng nếu G là nhóm chỉ có 2 nhóm con tầm thường là $\{e\}$ và G thì G là xiclic hữu hạn cấp nguyên tố.

Câu II. Cho R là một vành có nhiều hơn một phần tử. Chứng minh các khẳng định sau:

1. Nếu R hữu hạn có đơn vị thì mọi phần tử của R không phải là ước của 0 đều khả nghịch.

2. Nếu với mọi $a \in R, a \neq 0$, tồn tại duy nhất $b \in R$ (phụ thuộc a) thỏa $aba = a$ thì R là một thể.

Câu III. Giả sử A là một ma trận vuông cấp n trên trường số thực $\mathbb{R}$ có dạng:
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hãy chỉ ra một vectơ $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho các vectơ $x, Ax, A^2x, A^{n-1}x$ độc lập tuyến tính.

2. Chứng minh rằng nếu ma trận A chéo hóa thành ma trận có $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ trên đường chéo chính thì tất cả các số $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ đều khác nhau từng đôi một.

Câu IV. Gọi V^{n+1} là không gian vectơ các đa thức hệ số phức, bậc bé hơn hoặc bằng n. Xét ánh xạ $\varphi : V^{n+1} \to V^{n+1}$ xác định bởi:
$$[\varphi(g)](x) = g(x+1) - g(x), \forall g \in V^{n+1}.$$
Chứng tỏ:

1. Hệ $u_0 = 1, u_1(x) = x, u_2(x) = x(x-1), \dots, u_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$ là một cơ sở của không gian vectơ V^{n+1}.

2. Ánh xạ φ là một tự đồng cấu tuyến tính. Xác định $\text{Im}(\varphi)$ và $\text{Ker}(\varphi)$.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh:....................................
Số báo danh:........................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
Môn thi: GIẢI TÍCH
(Dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: 180phút

Câu I.

a. Cho dãy số thực $(a_n)_n$ mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ. Chứng minh các chuỗi sau đây cũng hội tụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{3/4}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{n}\right)^2.$$

b. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x,y)$ liên tục theo từng biến x, y và đơn điệu theo biến y thì sẽ liên tục theo hai biến.

Câu II. Cho $(X, \mathcal{F}, \mu)$ là không gian độ đo, f là hàm đo được và g là hàm khả tích trên $A \in \mathcal{F}$. Chứng minh rằng với α, β là hai số thực cho trước, nếu $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$ hầu khắp A, thì có một số thực $\gamma \in [\alpha, \beta]$ sao cho

$$\int\limits_a f|g|d\mu = \gamma \int\limits_A |g|d\mu$$

Câu III. Cho (X, d) là không gian metric.

a. Giả sử K_1, K_2 là các tập con compact của X. Chứng minh rằng tồn tại $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ sao cho $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$, với $d(K_1, K_2) := \inf\{d(x,y)/x \in K_1, y \in K_2\}$.

b. Giả sử K là tập compact, F là tập đóng trong X sao cho $K \cap F = \emptyset$. Chứng minh rằng $d(K, F) > 0$. Kết quả còn đúng không nếu thay K bằng tập đóng ?

c. Giả sử K là tập compact và F là tập đóng của $X = \mathbb{R}^k$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in K, y \in F$ sao cho $d(x,y) = d(K, F)$.

Câu IV. Giả sử L và M là hai không gian con tuyến tính đóng của không gian Banach X. Chứng minh rằng nếu mỗi phần tử $x \in X$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng: $x = y + z, x \in L, z \in M$ thì tồn tại số K sao cho: $\|y\| + \|z\| \leqslant K\|x\|, \forall x \in X$.

Câu V. Giả sử $\{e_n\}$ là một hệ thống trực chuẩn trong không gian Hilbert H, $\{\lambda_n\}$ là một dãy số bị chặn. Chứng minh rằng:

a. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ hội tụ với mọi $x \in H$.

b. Toán tử $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, x \in H$ là toán tử tuyến tính liên tục và tính $\|A\|$.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh:....................................
Số báo danh:........................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005

Môn thi: ĐẠI SỐ

(Dành cho Cao học)

Thời gian làm bài: 180phút

Câu I. Cho $G = \langle a \rangle$ là một nhóm xiclic cấp n sinh bởi phần tử a và $b = a^k$. Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của n và k. Chứng minh rằng:

a. Cấp của b bằng $\dfrac{n}{d}$ và $G = \langle b \rangle$ khi và chỉ khi $d = 1$. Suy ra các phần tử sinh của G.

b. Nếu q là ước của n thì trong G tồn tại một nhóm con cấp q và nhóm con này là xiclic.

Câu II.

a. Cho $\mathbb{Z}$ là vành số nguyên và $\mathcal{R}$ là vành tùy ý với phần tử đơn vị e. Chứng minh rằng ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\to \mathcal{R} \\ m &\mapsto m.e \end{aligned}$$

là một đồng cấu vành. Xác định ảnh Imφ của đồng cấu φ.

b. Tìm ví dụ về một vành $\mathcal{R}$ có đơn vị $e \neq 0$ sao cho tồn tại phần tử $x \in \mathcal{R}$ thỏa điều kiện $\mathcal{R}x \subset x\mathcal{R}$ và $\mathcal{R}x \neq x\mathcal{R}$.

Câu III. Cho K là một trường và cho hai hệ phương trình tuyến tính thuần nhất theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$AX = 0 \qquad (1)$$

$$BX = 0 \qquad (2)$$

với $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, và $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ là các ma trận m hàng, n cột có số hạng trong K. Chứng tỏ rằng nghiệm của hệ (1) và nghiệm của hệ (2) là trùng nhau khi và chỉ khi tồn tại ma trận không suy biến $C \in M_{m\times n}(K)$ sao cho $A = CB$.

Câu IV. Với mỗi ma trận A, ta định nghĩa hạng của A là số các cột độc lập tuyến tính của A, ký hiệu r_A. Chứng minh rằng:

a. Nếu $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính của các không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường K có ma trân đối với cặp cơ sở của V và W là A thì $r_A =$dim(Imf).

b. Nếu A và B là hai ma trận cùng cấp và $C = A + B$ thì $r_C \leqslant r_A + r_B$.

Bộ giáo dục và đào tạo **Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam**
Trường Đại học Vinh **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

Đề thi tuyển sinh cao học năm 1999
Môn: Giải tích
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu1. 1) Giả sử hàm $f: R^2 \to R$ cho bởi công thức

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0\end{cases}$$

a) Xét tính liên tục của f trên R^2.

b) Xét tính khả vi của hàm f tại điểm $(0,0)$.

2) Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

Câu 2. Kí hiệu $l_1=\left\{x=\{x_n\}: x_n\in C; n\in N, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\right\}$;

$$d_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|,\ d_2(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ với } x=\{x_n\};\ y=\{y_n\} \text{ thuộc } l_1.$$

Chứng minh rằng

a) d_1, d_2 lần lượt là các mêtric trên l_1;

b) không gian (l_1,d_1) đầy đủ ; khả li.

c) Không gian (l_1,d_2) không đầy đủ.

Câu 3. Giả sử $C_{[0,1]}$ là không gian định chuẩn các hàm số thực liên tục trên $[0,1]$ với chuẩn sup và $A: C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}$ biến x thành Ax cho bởi $(Ax)(t)=t^2x(t)$ với mọi $x\in C_{[0,1]}$ và $t\in[0,1]$

a) Chứng minh rằng A là ánh xạ tuyến tính liên tục. Tính $\|A\|$

b) Chứng tỏ rằng $A(C_{[0,1]})$ là không gian con đóng của $C_{[0,1]}$.

Câu 4. Ánh xạ $f: X\to Y$ từ không gain tôpô X vào không gian tôpô Y được gọi là đóng nếu với tập đóng A bất kì ta có $f(A)$ đóng trong Y. Chứng minh rằng $f: X\to Y$ là đóng khi và chỉ khi $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$ với mọi $A\subset X$.

Bộ giáo dục và đào tạo — **Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam**

Trường Đại học Vinh — **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

Đề thi tuyển sinh cao học năm 1999

Môn: Đại số

Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Gọi E_{n+1} Là không gian véctơ tất cả các đa thức một ẩn có bậc $\leq n$ với hệ số thực. Trong E_{n+1} cho các đa thức $u_k(x)$ với $0 \leq k \leq n$ được xác định như sau:

$$u_0 = 0\,; u_k(x) = x(x-1)(x-2)\mathbf{L}\,(x-k+1) \text{ với } 0 \leq k \leq n.$$

a) Chứng minh rằng các đa thức $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ lập thành một cơ sở của E_{n+1}.

b) Hãy chứng tỏ tồn tại duy nhất một phép biến đổi tuyến tính j của E_{n+1} thoả mãn $n+1$ điều kiện $j\left(x^k\right) = u_k$, $k = 0,1,2,\mathbf{K},n$. Và j là một song ánh.

c) Xác định ánh xạ $\partial : E_{n+1} \to E_{n+1}$ bởi điều kiện $\partial\,[p(x)] = p(x+1) - p(x)$; $\forall p(x) \in E_{n+1}$. Hãy chứng minh ∂ là một ánh xạ tuyến tính . Tìm nhân và ảnh của ∂. Tìm các đa thức $\partial(u_k(x)); k = 0,1,2,\mathbf{K},n$.

Câu 2. a) Cho G là một nhóm Xyclic. Chứng minh rằng mọi nhóm con G cũng là nhóm Xyclic.

b) Gọi x là phần tử sinh của nhóm Xyclic G. Hãy tìm tất cả các nhóm con của G đẳng cấu với G.

c) Chứng tỏ rằng mọi nhóm con cấp hữu hạn nguyên tố đều là nhóm Xyclic.

Câu 3. Ta gọi một trường là nguyên tố nếu nó không chứa một trường con thực sự nào.

a) Chứng minh rằng trường các ssó hữu tỉ ¤ và trường các lớp đồng dư $¢_p$ (với p là số nguuyên tố) là trường các số nguyên tố.

b) Cho X là một trường nguyên tố bất kì. Chứng tỏ rằng X $\cong$ ¤ hoặc X $\cong$ $¢_p$ (với p là một số nguyên tố nào đó).

Câu 4. Giả sử phép biến đổi tuyến tính j của không gian R^3 đối với cơ sở đơn vị có ma trận là:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của j .

b) Tìm một cơ sở của R^3 mà đối với nó ma trận của j có dạng tam giác . Viết ma trận đó.

c) Giá trị riêng của j có thay đổi không khi ta thay đổi cơ sở.

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2000
Môn: Giải tích
Ngành: Toán

Đề số 1

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu1. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0\end{cases}$

Khảo sát tính liên tục và tính khả vi của hàm số đã chi trên miền xác định của nó.

Câu 2. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^n}{3n}$.

Câu 3. Giả sử $R^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}: x_i\in R, i=1,2,\cdots,n\}$ và $p\in(0,1)$. Với mỗi tập $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $y=(y_1,\ldots,y_n)$ ta đặt $d(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p$; $r(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ Chứng minh rằng:

a) (R^n,d) là không gian mêtric đầy đủ.

b) Ánh xạ đồng nhất $i_d:(R^n,d)\to(R^n,r)$ liên tục.

Câu 4. Cho hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x\notin(0,1]\\ \sqrt{n} & \text{if } x\in A_n=\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right], n=1,2,\ldots\end{cases}$$

Với mỗi $n\in N^*$ ta đặt $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\, l_{A_n}$ (l_{A_n} là hàm đặc trưng của A_n).

Chứng minh rằng

a) $f_n\uparrow f$ trên $\mathbb{R}$.

b) f khả tích Lơbe trên $\mathbb{R}$ và tính tích phân Lơbe $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

c) Hàm f^2 không khả tích Lơ be trên $\mathbb{R}$.

Câu 5. Kí hiệu $C_{[0,1]}$ là không gian tất cả các hàm liên tục $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ với bất kì $x,y\in C_{[0,1]}$ ta đặt $d(x,y)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$. Chứng minh rằng

a) Ánh xạ $f:C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}$ cho bởi $[f(x)](t)=\int\limits_0^t x(s)ds$, $x\in C_{[0,1]}$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. Tính chuẩn của *f.*

b) $(C_{[0,1]},d)$ không phải là không gian compact.

Bộ giáo dục và đào tạo	Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Trường Đại học Vinh	Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2000
Môn: Giải tích
Ngành: Toán
Đề số 2

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. a) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n}$.

c) Tính tổng của chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-2}$

Câu 2. Ký hiệu $l_2 = \left\{\{x_n\}\subset \mathbf{C}: \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\right\}$. Đặt $p(x,y)=\sup_{n\in\mathbf{N}}|x_n - y_n|$

$$d(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ với } x=\{x_n\};\ y=\{y_n\} \text{ thuộc } l_2$$

a) Chứng minh rằng p, d là các metric trên l_2.

b) Ánh xạ đồng nhất $I_d:\ (l_2, d)\to(l_2, p)$ là ánh xạ liên tục.

Câu 3. a) Cho hàm f $\geq$ 0 đo được, hữu hạn h. k. n trên tập hợp A, đặt

$$f_n(x)=\begin{cases}\text{f(x)} & \text{nếu } \text{f(x)}\leq \text{n}\\ 0 & \text{nếu } \text{f(x)}\geq \text{n}\end{cases} \text{ và } f_n \to \text{f h. k. n}$$

Chứng minh rằng $\lim_{x\to\infty} I_A f_n d_m = (L) I_A f d_m$.

b) Giả sử E là tập con của không gian tôpô X. Chứng minh rằng tập E đóng khi và chỉ khi E chứa tất cả các điểm giới hạn của nó.

Câu 4. Ánh xạ f: E $\to$ F từ không gian định chuẩn E vào không gian định chuẩn F được gọi là bị chặn nếu tồn tại một hằng số C > 0 sao cho $\|f(x)\|\leq C$ với mọi x $\in$ E mà $\|x\|\leq 1$. Chứng minh rằng để f: E $\to$ F bị chặn, điều kiện cần và đủ là f liên tục.

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2000
Môn: Đại số
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Giả sử V là không gian véc tơ thực n chiều và $f : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính.

a) Chứng minh $\dim(imf) + \dim(\ker f) = n$.

b) Giả sử f đơn cấu. Chứng minh f là tự đẳng cấu của V.

c) Giả sử $f^2 = f$. Chứng minh $imf \oplus \ker f = V$.

d) Giả sử mọi véc tơ khác không của V đều là véc tơ riêng của f . Chứng minh rằng f được xác định bởi $f(x) = ax$ (a là số thực cho trước).

Câu 2. Giả sử X là nhóm Xyclic cấp m và Ylà nhóm Xyclic cấp n. Chứng minh rằng:

a) Nhóm con của nhóm X là nhóm Xyclic.
b) X chỉ có một số hữu hạn nhóm con.
c) X$\cong$ Y khi và chỉ khi m=n.
d) X$\times$Y là nhóm Xyclic cấp m$\times$n khi và chỉ khi (m,n)=1.

Câu 3. Giả sư X là một vành giao hoán có đơn vị . Một Iđêan A$\neq$ X của X được gọi là Iđêan tối đại nếu cvà chỉ nếu các Iđêan của X chứa A chính là X và bản thân A. Một Iđêan P của X được gọi là nguyên tố nếu và chỉ nếu với u,v $\in X$ thì tích u.v$\in P$ kéo theo u$\in P$ hoặc v$\in P$. Giả sử I là Iđêan của X. Chứng minh rằng:

a) X/I là một miền nguyên khi và chỉ khi I là Iđêan tối đại.
b) X/I là một trường khi và chỉ khi I là Iđêan tối đại .
c) Nếu I là Iđêan tối đại thì I là Iđêan tối đại.

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2001
Môn: Giải tích
Ngành: Toán
Đề số 1
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n}(2x-1)^n$. (1)

a) Tìm miền hội tụ của chuỗi (1)

b) Tính tổng của chuỗi (1) trong khoảng hội tụ của nó.

Câu 2. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases} y\cos\frac{1}{x} & \text{nếu } x\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x=0 \end{cases}$

a) Tìm tất cả các điểm gián đoạn của f.

b) Tập các điểm gián đoạn của f không đóng trong R^2 nhưng mở trong tập $\{(0,y): y\in ¡\}$.

Câu 3. Cho dãy hàm

$$f_n(x)=\begin{cases} \frac{1}{n}[nx] & \text{nếu } x\in[0,1] \\ 0 & \text{nếu } x\notin[0,1] \end{cases}, n=1,2,\mathbf{K}$$

Chứng minh rằng

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=x$ với $\forall x\in[0,1]$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} If_n=\frac{1}{2}$ trong đó If_n là tích phân Lơbe của f_n trên R, $[nx]$ là phần nguyên của nx.

Câu 4. Giả sử l_∞ là tập tất cả cá dãy số thực bị chặn ; c_0 là tập tất cả các dãy số thực hội tụ tới 0.

a) Chứng minh rằng công thức

$\|x\|=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}|x_n|$ với $x=\{x_n\}\in l_\infty$ xác định một chuẩn trên l_∞.

b) Chứng minh rằng c_0 là không gian con đóng trong l_∞ với chuẩn nói trên.

c) Cho ánh xạ $f: l_\infty\to R$ xác định bởi công thức $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$, với mọi $x=\{x_n\}\in l_\infty$, Hãy chứng minh rằng f là một phiếm hàm tuyến tính, liên tục trên l_∞ và tính $\|f\|$.

Câu 5. Giả sử E là không gian định chuẩn hữu hạn chiều, B là hình cầu đơn vị đóng trong E. Chứng minh rằng với mọi x ∈ E, đều tồn tại y ∈ B sao cho $\|x-y\|$ = d(x, B).

Bộ giáo dục và đào tạo	Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Trường Đại học Vinh	Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2001
Môn: Giải tích
Ngành: Toán

Đề số 2

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(x+1)^n}$.(1)

Xét tính khả vi của tổng chuỗi (1) tại những điểm trong miền hội tụ của nó.

Câu 2. 1) Xét tính liên tục của hàm số $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & \text{nếu } y\neq 0\\ 0 & \text{nếu } y=0\end{cases}$

2) Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của hàm f không đóng , không mở trong $\mathbf{R}^2$ nhưng mở trong **R**.

Câu 3. Cho dãy hàm

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}[nx] & \text{nếu } x\in[0,1]\\ 0 & \text{nếu } x\notin[0,1]\end{cases}, n=1,2,\mathbf{K}$$

Chứng minh rằng

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=x$ với $\forall x\in[0,1]$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} If_n=\frac{1}{2}$ trong đó If_n là tích phân Lơ be của f_n trên R, $[nx]$ là phần nguyên của nx.

Câu 4. Giả sử l_∞ là tập tất cả cá dãy số thực bị chặn ; c_0 là tập tất cả các dãy số thực hội tụ tới 0.

a) Chứng minh rằng công thức $d(x,y)=\sup_{n\in N}|x_n-y_n|$ với $x=\{x_n\};\ y=\{y_n\}\in l_\infty$ xác định một mêtric trên l_∞ và mêtric được sinh bởi một chuẩn trên l_∞.

b)Chứng minh rằng c_0 là tập con đóng trong l_∞.

c) Cho ánh xạ $f: l_\infty\to R$ bởi công thức $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}$ với mọi $x=\{x_n\}$ thuộc l_∞. Hãy chứng minh rằng f là một phiếm hàm tuyến tính , liên tục trên l_∞ và tính $\|f\|$.

Câu 5. Giả sử E là không gian định chuẩn , E^* là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E và a là một điểm thuộc E. Chứng minh rằng ánh xạ $\Phi_a: E^*\to C$ được cho bởi công thức $\Phi_a(f)=f(a);\ \forall f\in E^*$ là ánh xạ tuyến tính liên tục trên E và $\|\Phi_a\|=\|a\|$.

Bộ giáo dục và đào tạo | **Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam**
Trường Đại học Vinh | **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2001
Môn: Đại số
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho V là không gian tất cả các đa thức một ẩn có bậc $\leq n$ với hệ số thực và $\varphi : V \to V$ là ánh xạ biến mỗi đa thức thành đạo hàm của nó.

a) Chứng minh rằng φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gia véc tơ V.

b) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của φ.

Câu 2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y) = (2x - y, x + y, x - 2y + m)$$

a) Tìm m để f là ánh xạ tuyến tính .

b) Tìm $\ker f$ và $\dim(imf)$ trong trường hợp f ánh xạ tuyến tính.

Câu 3. a) Chứng minh rằng mọi vành con của vành số nguyên $\mathbb{Z}$ đều có dạng $m\mathbb{Z}$ với $m \in \mathbb{Z}$.

b) Tìm tất cả các tự đồng cấu của vành $\mathbb{Z}[5]$ các số thực có dạng $a + b\sqrt{5}$ với a, b là các số nguyên.

Câu 4. Cho K là một trường có đặc số nguyên tố *p*. Chứng minh ánh xạ $x \to x^p$ $(x \in K)$ là một tự đồng cấu khác không của trường K. Từ đó hãy chứng minh định lí Fecma bé: Với mọi số nguyên a và số nguyên tố p ta có $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$.

Câu 5. Xét nhóm $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ với phép cộng thông thường.

a) Chứng minh rằng $\mathbb{Q}$ không phải là nhóm Xyclic.

b)Nhóm thương $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ có đẳng cấu với $\mathbb{Q}$ hay không?

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2002
Môn: Giải tích
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\left(1+n^2x^2\right)}$.

Câu 2. Cho hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a)Xét tính khả vi của hàm f tại điểm $(0,0)$.

b) Xét tính liên tục của các đạo hàm riêng của f tại điểm $(0,0)$.

Câu 3. Khảo sát tính khả tích Rieman, khả tích Lơbe và tính các tích phân đó (nếu có) đối với hàm

$$f(x,y)=\begin{cases} \text{sinx} & \text{nếu } x=\frac{1}{n}\\ e^x & \text{nếu } x\neq\frac{1}{n}\end{cases},\ n=1,2,3,\ldots \text{ trên đoạn } [0,1].$$

Câu 4. Giả sử $l_\infty=\left\{\{x_n\}\subset R:\sup_n|x_n|<\infty\right\}$;

$$A=\{e_n=(0,\ldots,0,1,0,0,\ldots),n=1,2,\ldots\}$$

Chứng minh rằng :

a) Các công thức $d_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|$, $d_\infty(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|$ với $x=\{x_n\}$; $y=\{y_n\}$ lần lượt xác định mêtric trên $l_1;l_\infty$.

b) $l_1\subset l_\infty$ nhưng (l_1,d_∞) không đóng trong (l_∞,d_∞).

c) SpanA trù mật trong (l_1,d_1) nhưng không trù mật trong (l_∞,d_∞), trong đó SpanA là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính hữu hạn của A.

d) Ánh xạ $j:(l_\infty,\|\ \|_\infty)\to(l_1,\|\ \|_1)$ với $j(x)=\left\{\frac{x_n}{2^n}\right\},\forall x=\{x_n\}\in l_\infty$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. Tính $\|j\|$ ($\|x\|_\infty=\sup_n|x_n|$; $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$) với $x=\{x_n\}$).

Câu 5. Chứng minh rằng $\{A_n\}$ là dãy các tập mở trong không gian mêtric đầy đủ X sao cho $\overline{A}=X$ thì với mọi n thì $X=\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}$.

Bộ giáo dục và đào tạo — **Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam**

Trường Đại học Vinh — **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2002
Môn: Đại số
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. a) Cho phép biến đổi tuyến tính φ của $\mathbb{R}^3$ đối với cơ sở đơn vị có ma trận là:

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm giá trị riêng và vectơ riêng của φ.

b) Chứng tỏ rằng nếu A là ma trận vuông phần tử thực thỏa mãn $A^2 + I = 0$ thì A không có giá trị riêng thực. Từ đó suy ra không tồn tại ma trận vuông A cấp 3 phần tử thực thỏa mãn $A^2 + I = 0$ (Trong đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với A).

Bài 2. Cho nhóm G và AutG là nhóm tất cả các tự đẳng cấu của G với phép toán nhân ánh xạ. Với mỗi a $\in$ G, xét ánh xạ $f_a : G \to G$

$$x \mapsto a^{-1}xa$$

a) Chứng minh rằng f_a là một tự đẳng cấu của G, và ta gọi đó là tự đẳng cấu trong xác định bởi a.

b) Chứng minh rằng tập tất cả các tự đẳng cấu trong của G lập thành một nhóm con, ký hiệu là IntG của nhóm AutG. Hơn nữa, IntG Δ AutG.

c) Chứng minh rằng một nhóm con H của G là ước chuẩn của G khi và chỉ khi $f_a(H) = H$ với mọi $f_a \in$ IntG.

d) Chứng minh rằng nếu G không giao hoán thì IntG không thể là Cyclic, do đó AutG cũng không là Cyclic.

Bài 3. Cho tập X = $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{Z}_3 \right\}$, trong đó $\mathbb{Z}_3$ là trường các lớp đồng dư theo modul 3.

a) Chứng minh rằng X cùng với phép cộng và nhân ma trận lập thành một trường.

b) Tìm đặc số của trường X.

Bài 4. a) Chứng minh rằng nếu K là một trường thì vành đa thức K[x] là một vành chính.

b) Chứng minh rằng miền nguyên P không phải là trường thì P[x] không là vành chính.

c) Gọi I = <x, 2> là Ideal sinh bởi hai phần tử x và 2 trong vành $\mathbb{Z}$[x]. Chứng minh rằng I gồm tất cả các đa thức với hệ số tự do là số nguyên chẵn và I không phải là Ideal chính.

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2004
Môn: Giải tích
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) & \text{nếu} \quad y\neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad y=0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) $f''_{xy}(x,y)$ và $f''_{ü}(x,y)$ khôngliên tục tại điểm (0,0).

b) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$.

Câu 2. a) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n}x^{2n}\sin(x+np)$.

b)Tính tổng của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n+1)x^{n-2}$ trong miền hội tụ của nó.

Câu 3. Giả sử (X, d) là không gian mêtric , $f:X\to X$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng

a) Tập hợp $A=\{x\in X: f(x)=x\}$ là đóng.

b) Nếu X là tập compact và $A\neq f$ thì tồn tại số c>0 sao cho $d(f(x),x)\geq x$ với mọi $x\in X$.

Câu 4. Giả sử $\{f_n\}$ là dãy các hàm đo được trên A∈ A sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_A|f_n|dm<+\infty$ **.** Chứng minh rằng hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ khả tíc trên A và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_A f_n dm\int\limits_A\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n\right)dm$ **.**

Câu 5. Kí hiệu $C^2_{[0,1]}$ là không gian tuyến tính các hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên đoạn [0,1]. Với mỗi $x\in C^2_{[0,1]}$ ta đặt $\|x\|=|x(0)|+|x'(1)|+\max_{t\in[0,1]}|x''(t)|$.

a) Chứng minh rằng công thức trên xác định một chuẩn trên $C^2_{[0,1]}$;

b) Chứng minh rằng toán tử A: $C^2_{[0,1]}\to C^2_{[0,1]}$ cho bởi công thức $Ax(t)=x'(t)+x''(t)$ với mọi $x\in C^2_{[0,1]}$, $t\in[0,1]$ tuyến tính nhưng không liên tục.

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2004
Môn: Đại số
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho n là số nguyên dương, $P_n(R)$ là tập hợp tất cả các đa thức ẩn x với hệ số thực có bậc không vượt quá n.

a) Chứng minh $P_n(R)$ cùng với phép cộng đa thức và phép nhân đa thức với một số là một không gian véc tơ thực.

b) Chứng minh rằng hệ véc tơ $1, x-1, (x-1)^2, \mathbf{K}, (x-1)^n$ là một cơ sở của $P_n(R)$. Tìm số chiều của $P_n(R)$.

Câu 2. Giả sử V là không gai véc tơ n chiều trên trường K và V_1 là không gian con của V với số chiều bằng m, $0 < m < n$.

a)Chứng minh rằng tồn tại không gian con V_2 của V sao cho V=$V_1 \oplus V_2$. Tìm số chiều của V_2.

b) Hãy nêu cách xây dựng không gian véc tơ thương V/V_1 và tìm số chiều của không gian đó.

Câu 3. Giả sử $£^*$ là nhóm nhân các số phức khác không, H là tập hợp các số phức của $£^*$ nằm trên trục thực và trục ảo , ¡ là nhóm cộng các số thực, ¢ là nhóm cộng các số nguyên.

a) Chứng minh rằng H là ước chuẩn của $£^*$.

b) Chứng minh rằng ¢ là ước chuẩn của ¡ .

c) Chứng minh rằng nhóm thương $£^*$ / H đẳng cấu với nhóm ¡ / ¢ .

Câu 4. Giả sử ¢ là vành các số nguyên . Lập tích đề các V= ¢ $\times$ ¢ .

a) Chứng minh rằng V cúng với phép toán cộng và nhân xác định bởi :

(a,b)+(x,y)=(a+x,b+y)

(a,b).(x,y)=(ax,by) là một vành giao hoán có đơn vị . Tìm ước của không trong vành đó.

b) Chứng minh rằng V cùng với phép cộng và phép nhân xác định bởi

(a,b)+(x,y)=(a+x,b+y)

(a,b).(x,y)=(ax,ay+bx+by) là một vành gaio hoán có đơn vị . Tìm ước của không trong vành đó.

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi bổ túc thi cao học năm 2005
Môn: Giải tích
Ngành: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. 1) Xét tính liên tục và khả vi của hàm số:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{nếu } (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

2) Cho chuỗi hàm: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x+2)^n$ (1)

a) Tìm miền hội tụ, hội tụ đều của chuỗi (1)
b) Tính tổng của chuỗi (1) trong miền hội tụ của nó.

Câu 2. Giả sử $l_1=\left\{x=\{x_n\}: x_n\in C; n\in N, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\right\}$.

a) Chứng minh rằng công thức $\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ với $x=\{x_n\}\in l_1$ xác định một chuẩn trên l_1.

b) Chứng minh rằng ánh xạ f: $l_1\to\mathbf{R}$ với $\text{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}, \forall x=\{x_n\}\in l_1$ là ánh xạ tuyến tính liên tục. Tính $\|\text{f}\|$.

Câu 3. Gỉa sử X là một không gian metric, K là một tập compact của X, a và b là hai điểm thuộc X\ K. Chứng minh rằng tồn tại hai tập mở U, V trong X sao cho U ∩ V = ϕ, K ⊆ U, {a, b} ⊂ V.

Bộ giáo dục và đào tạo **Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam**
Trường Đại học Vinh **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2005
Môn: Giải tích
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. a) Cho hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm f(x, y) liên tục theo biến x khi cố định y và liên tục theo biến y khi cố định biến x nhưng không liên tục theo hai biến (x, y)

b) Giả sử G $\subset \mathbb{R}^2$ và $f : G \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu hàm f(x, y)liên tục theo biến x với mỗi y cố định và có đạo hàm riêng theo biến y bị chặn trên miền G, thì f(x, y) liên tục trên G.

Câu 2. a) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

b) Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)x^n$.

Câu 3. a) Chứng minh rằng tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ với hàm d: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi d(x, y) = $|x-y| + |x^3-y^3|$, với mọi x, y $\in \mathbb{R}$ là không gian metric đầy đủ.

b) Chứng minh rằng ánh xạ đồng nhất $I_d : (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}, d)$ từ không gian các số thực với metric khoảng cách thông thường vào không gian metric ($\mathbb{R}$, d) là ánh xạ liên tục nhưng không liên tục đều.

Câu 4. a) Chứng minh rằng không gian các số thực với tôpô thông thường là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai.

b) Giả sử f: (0: 1] $\to \mathbb{R}$ là hàm bị chặn, đo được Lebesgue. Kí hiệu E = (0 ; 1] và E_n = $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ với n $\geq$ 1. Chứng minh rằng:

a) Hàm f khả tích Lebesgue trên E và E_n với mọi n $\geq$ 1.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f dm = \int\limits_{E} f dm$.

Câu 5. a) Giả sử X và Y là hai không gian Banach, Y^* là không gian liên hợp của Y và A: X $\to$ Y là toán tử tuyến tính. Chứng minh rằng nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $x_n \to 0$ và với mọi f $\in Y^*$ ta có $f[A(x_n)] \to 0$ khi n $\to \infty$, thì f liên tục.

b) Chứng minh rằng trong không gian định chuẩn $l_2 = \left\{ x = \{x_n\} : x_n \in \boldsymbol{C}; n \in \boldsymbol{N}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ với chuẩn $\|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, x = $\{x_n\} \in l_2$, hình cầu đóng B'(0, r) = $\left\{ x = \{x_n\} : \|x\| \leq r \right\}$ với r > 0 không là tập compact.

Bộ giáo dục và đào tạo
Trường Đại học Vinh

Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2005
Môn: Đại số
Ngành: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai A trên trường các số thực ¡ sao cho $A^2 = 0$.

Câu 2. Cho ánh xạ f : ¡$^3 \to$ ¡^{2} xác định bởi : f(x, y) = (2x - y, x + y, x - 2y + 2a).

a) Tìm a để f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm Ker(f) và Im(f) trong trường hợp f là ánh xạ tuyến tính.

Câu 3. Chứng minh rằng:

a) Có duy nhất một đồng cấu từ nhóm cộng các số hữu tỷ ¤ đến nhóm cộng các số nguyên ¢ .

b) Nhóm cộng các số hữu tỷ ¤ không phải là nhóm Cyclic.

c) Nhóm thương ¤ / ¢ không đẳng cấu với nhóm cộng các số hữu tỷ ¤ .

Câu 4. Kí hiệu ¢ [i] là vành các số phức dạng a + bi, với a, b là các số nguyên (với phép cộng và nhân số phức).

a) Chứng minh rằng, ánh xạ f xác định bởi f(a + bi) = a - bi là một tự đẳng cấu của vành ¢ [i].

b) Tìm tất cả các tự đẳng cấu của ¢ [i].

c) Mô tả vành thương ¢ [i]/ A, trong đó A là Ideal của vành ¢ [i], gồm các số phức dạng a + bi, với a, b là các số nguyên chẵn.

Câu 5. Cho X là một miền nguyên. Chứng minh rằng, X là một trường khi và chỉ khi X chỉ có hai Ideal tầm thường là {0} và X.

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC ĐẠI HỌC VINH NĂM 2006

Môn: Giải tích

Thời gian: 180 phút

Câu 1. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$$

Câu 2. Xét tính liên tục và khả vi của hàm

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{y} & \text{nếu } y\neq 0\\ 0 & \text{nếu } y=0\end{cases}$$

Câu 3. Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm đo được và tồn tại tích phân Lơbe If. Với mỗi $n=1,2,\dots$ cho hàm

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & \text{nếu } |f(x)|<n\\ n+1 & \text{nếu } |f(x)|\geq n\end{cases}$$

1) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

2) Có kết luận được $\lim\limits_{n\to\infty} If_n = If$ hay không?

Câu 4. Giả sử $C_{[-1,1]}$ là không gian các hàm số liên tục trên $[-1,1]$ với chuẩn

$$\|f\|=\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|,\ \text{với mọi } f\in C_{[-1,1]}.$$

và $X=\{f\in C_{[-1,1]}: f(1)=0\}$, còn Y là không gian các dãy số hội tụ với chuẩn

$$\|x\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|,\ \text{với mọi } x=\{x_n\}\in Y.$$

Cho ánh xạ $T:X\to Y$ được xác định bởi công thức

$$T(f)=\left\{f\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\},\ \text{với mọi } f\in X.$$

1) Chứng minh rằng Y là không gian Banach

2) Xét tính compact của tập $K=\{f\in X:\|f\|\leq 1\}$ trong X

3) Chứng minh rằng T là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính chuẩn của T.

4) Xét tính trù mật của $Y\setminus T(X)$ trong Y.

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006

Môn: Đại số

Thời gian: 180 phút

Câu 1. Cho V là không gian vectơ tất cả các ma trận vuông cấp 2 phần tử thực. Xét ánh xạ

$$\begin{array}{rcl} f: V & \to & V \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Chứng minh rằng f là phép biến đổi tuyến tính của V.
2) Tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của V.
3) Tìm $Kerf$, Imf.

Câu 2. Giả sử f là phép biến đổi tuyến tính và có ma trận đối với cơ sở đã cho là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của f.
2) Vectơ riêng của f tìm được ở câu 1) có tọa độ đối với cơ sở nào?
3) f có phải đẳng cấu không? Tại sao?

Câu 3. 1) Cho G là tập tất cả các giá trị căn phức bậc n của 1, với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng đối với phép nhân các số phức thông thường, G là nhóm Cyclic.

2) Cho A là một vành và I là một tập con của A. Chứng minh rằng I là Ideal của A khi và chỉ khi I là hạt nhân của một đồng cấu nào đó từ A.

Câu 4. Cho $A[x]$ là vành đa thức một ẩn trên vành A giao hoán có đơn vị.

1) Chứng minh rằng nếu A là trường thì $A[x]$ là vành chính.
2) Gọi $\mathbb{R}$ là trường các số thực và I là Ideal của vành $\mathbb{R}[x]$ sinh bởi x^2+1. Chứng minh vành thương $\mathbb{R}[x]/I$ là một trường.
3) Nếu A là một trường thì $A[x]$ có phải là một trường không? Tại sao?

Câu 5. Cho A là một ma trận vuông cấp 2 phần tử thực và $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng $A^n = 0$ khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

Bộ giáo dục và đào tạo — Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Trường Đại học sư phạm Quy Nhơn — Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2001
Ngành: Toán học
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho hàm số xác định trên $\mathbb{R}^2$ bởi

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) $f(x;y)$ có các đạo hàm riêng liên tục.

b) $f''_{xy}(0;0) = f''(0;0)$.

Câu 2. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ liên tục. Đặt $\rho(x;y) = |f(x) - f(y)|$ với mọi $x;y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

a) $\rho(x;y)$ là một mêtric trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi f đơn ánh.

b) $(\mathbb{R};\rho)$ là không gian mêtric đầy đủ khi và chỉ khi $f(\mathbb{R})$ là đóng trong $\mathbb{R}$ với mêtric thông thường. Từ đó suy ra rằng với $\rho(x;y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ thì $(\mathbb{R};\rho)$ là không gian mêtric không đầy đủ.

Câu 3. Chứng minh rằng không gian $C_{[a;b]}$ các hàm số liên tục trên $[a;b]$ là khả ly với mêtric $d(x;y) = \max\limits_{t\in[a;b]} |x(t) - y(t)|$, $\forall x;y \in C_{[a;b]}$.

Câu 4. Cho X là không gian định chuẩn n chiều. Chứng minh rằng không gian liên hợp X^* là không gian định chuẩn n chiều đồng phôi tuyến tính với X.

Câu 5. Giả sử $E = C_{[0;1]}$ là không gian Banach với chuẩn $\|x\| = \sup\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|$, F là không gian con của E gồm các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Xét ánh xạ $A : F \to E$ cho bởi $A(f) = f'$.

1. Chứng minh rằng

a) $\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0)$ là không gian con đóng của F và A có đồ thị đóng.

b) A không liên tục.

2. Nếu trên F xác định chuẩn $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)|$; $\forall x \in F$, hãy chứng minh rằng A là toán tử tuyến tính liên tục. Tính $\|A\|$.

[1]Typeset by Đặng Xuân Cương – Cao học 12 – Giải tích – Đại học Vinh .

Bộ giáo dục và đào tạo — Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam

Trường Đại học sư phạm Quy Nhơn — Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2001

Ngành: Toán học

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho G là một nhóm Xyclic cấp n sinh bởi phần tử a và H là một nhóm con của G.

a) Chứng minh rằng H là nhóm Xyclic và H có một một phần tử sinh a^d với d là một ước số dương nào đó của n.

b) Cho q là một ước số dương nào đó của n. Chứng minh rằng G có duy nhất một nhóm con cấp q.

c) Cho m và k là những số nguyên dương. Xét nhóm cộng Z_m và quy tắc tương ứng φ từ Z_m vào G cho bởi $\varphi(\bar{t}) = a^{tk}$, với mọi $\bar{t} \in Z_m$. Chứng minh rằng φ là một đồng cấu nhóm khi và chỉ khi km chia hết cho n.

d) Xác định các tự đồng cấu, tự đẳng cấu của nhóm Z_{15}.

Câu 2. a) Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và I là một Ideal của R. Chứng minh rằng J là Ideal nguyên tố khi và chỉ khi R/J là miền nguyên.

b) Chứng minh rằng số nguyên dương n là số nguyên tố khi và chỉ khi Z_n là một trường.

c) Chứng minh rằng trong trường Z_n, với mọi $x, y \in Z_n$, ta có

$$x + y = x^n + y^n = (x + y)^n.$$

Câu 3. Ký hiệu $V = M(2; \mathbb{R})$ và cho $A \in V$.

a) Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi_A : V \to V$ cho bởi $X \mapsto AX - XA$ với mọi $X \in V$ là một tự đồng cấu tuyến tính của V.

b) Chứng minh rằng φ_A không là đơn cấu với mọi $A \in V$.

Câu 4. Giả sử V là một không gian vectơ Euclide hữu hạn chiều và W_1; W_2 là các không gian vectơ con của V. Giả sử rằng với mỗi $\vec{v} \in W_2$; $\vec{v} \neq \vec{0}$; tồn tại một vectơ $\vec{x} \in W_1$ sao cho tích vô hướng $\langle \vec{v}; \vec{x} \rangle \neq 0$. Chứng minh rằng $\dim W_2 \geq \dim W_1$.

Bộ giáo dục và đào tạo — Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Trường Đại học sư phạm Quy Nhơn — Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2004
Ngành: Toán học
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho hàm số hai biến số:

$$f(x;y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$ và xét tính khả vi của hàm số f tại điểm $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Câu 2. Cho hàm số $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ xác đinh như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x^2+1)^2} & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ e^{x^2} & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Xét tính khả tích Riemann và khả tích Lebesgue của hàm số này trên $[0;1]$ và tính tích phân tương ứng nếu tồn tại.

Câu 3. Giả sử $(X;\rho)$ là một không gian mêtric. Xét $d : X \times X \to [0;+\infty)$, $d(x;y) = \frac{\rho(x;y)}{1+\rho(x;y)}$. Chứng minh rằng $(X;\rho)$ là không gian mêtric.

Câu 4. Kí hiệu $C_{[0;1]}$ là không gian vectơ gồm tất cả các hàm số liên tục trên $[0;1]$. Với $x \in C_{[0;1]}$, đặt $\|x\| = \max\limits_{t \in [0;1]} |x(t)|$.

1. Chứng minh rằng $(C_{[0;1]}; \|.\|)$ là một không gian Banach.

2. Định nghĩa ánh xạ $A : C_{[0;1]} \to C_{[0;1]}$, $(Ax)(t) = \int_0^1 \sin(t+s).x(s)ds$; với $x \in C_{[0;1]}$, $t \in [0;1]$. Chứng minh rằng A là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính chuẩn của A.

Câu 5. Giả sử X là không gian định chuẩn và Y là không gian con đóng của X với $\emptyset \neq Y \neq X$ và cho $0 < t < 1$. Chứng minh rằng với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ với $\|x\| = 1$ sao cho $\|x - y\| > t$.

Bộ giáo dục và đào tạo	Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Trường Đại học sư phạm Quy Nhơn	Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2004
Ngành: Toán học
Môn thi: Đại số
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, ký hiệu P_n là không gian vectơ các đa thức thuộc $R[x]$ có bậc $\leq n$, trong đó R là trường số thực.

1. Chứng minh rằng với mỗi $a \in R$, hệ vectơ $\{1, (x - a), \ldots, (x - a)^n\}$ là một cơ sở của P_n

2. Cho ánh xạ $\varphi : P_n \to P_{n-1}$ xác định bởi $\varphi(f(x)) = f'(x)$, với mọi $f(x) \in P_n$, trong đó $f'(x)$ là đa thức đạo hàm của $f(x)$.

a) Chứng minh φ là ánh xạ tuyến tính.

b) Xác định ma trận A của φ đối với cặp cơ sở $\{1, (x - a), \ldots, (x - a)^n\}$ và $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$, với $a \in R$ cho trước.

c) Xác định hạng của ma trận A.

Câu 2. Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường K, $f : V \to V$ là một phép biến đổi tuyến tính. Chứng minh rằng $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ khi và chỉ khi $V = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

Câu 3. Cho $G = \langle a \rangle$ là một nhóm Cyclic cấp n sinh bởi a.

a) Chứng minh rằng với k là một số nguyên bất kỳ, cấp của phần tử a^k bằng $\frac{n}{d}$, trong đó $d = (n, k)$.

b) Cho $n = p^2$, với p là một số nguyên tố. Hãy xác định số phần tử sinh của nhóm G.

Câu 4. Ký hiệu $D = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z; n \text{ là số lẻ} \right\}$, trong đó Z là tập hợp các số nguyên. Chứng minh rằng D là một vành chính với các phép toán cộng và nhân các số hữu tỷ.

Câu 5. Cho p là một số nguyên tố và $p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in Q[x]$, trong đó Q là trường các số hữu tỷ.

1. Chứng minh rằng $p(x)$ là một đa thức bất khả quy trên Q.

2. Gọi $\alpha \in C$ là một nghiệm của $p(x)$. Xét tương ứng:

$$\begin{aligned} \varphi : Q[x] &\to C \\ f(x) &\mapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

Chứng minh rằng:

a) φ là một đồng cấu vành.

b) $B = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{p-2}\alpha^{p-2} \mid a_0, a_1, \ldots, a_{p-2} \in Q\}$ là một trường với các phép toán cộng nhân các số phức.

Bộ giáo dục và đào tạo	Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam
Trường Đại học sư phạm Quy Nhơn	Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2005

Ngành: Toán học

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. 1.Trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, ta đặt $d(x;y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|;\ \forall x;y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

a) d là một mêtric trên $\mathbb{R}$.

b) $(\mathbb{R}; d)$ là không gian mêtric không đầy đủ.

2. Chứng minh rằng mọi ánh xạ từ không gian mêtric $\mathbb{N}$ (là tập hợp các số tự nhiên với mêtric thông thường) vào không gian mêtric Y là liên tục đều. Điều này còn đúng không khi thay $\mathbb{N}$ bằng một không gian mêtric rời rạc.

Câu 2. Cho L là không gian véctơ các ánh xạ Lipschitz từ $[0;1]$ đến $\mathbb{R}$ và đặt $E_1 = C^1([0;1];\mathbb{R})$.

a) Chứng minh rằng $\|.\| : L \to$ xác định bởi

$$\forall f \in L;\ \|f\| = |f(0)| + \sup_{(x;y)\in[0;1]^2;\,x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

là một chuẩn trên L, và chuẩn đó không tương đương với $\|f\|_1 = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|$.

b) Chứng minh rằng $N : E_1 \to$ xác định bởi $\forall f \in E_1;\ N(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[0;1]} |f'(t)|$ là một chuẩn trên E_1 và chuẩn này trùng với $\|.\|$.

Câu 3. Cho $E = C([0;1];\mathbb{R})$ được trang bị chuẩn $\|.\|_1$ và ánh xạ $T : E \to E$ được xác định như sau:

$$\forall f \in E;\ \forall x \in [0;1];\ (T(f))(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng T là ánh xạ tuyến tính liên tục và tính $\|T\|$.

Câu 4. Giả sử

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng khắp nơi trong hình vuông $A = [-1;1] \times [-1;1]$ hàm f có các đạo hàm riêng, các đạo hàm riêng này bị chặn trong A nhưng không kh vi tại (0; 0).

Câu 5. Giả sử f là một hàm đo được trên đoạn $[a;b]$ và có một số $M > 0$ và $0 < \alpha < 1$ sao cho $|f(x)| >= \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}$ với $a < x_0 < b$. Hãy chứng minh f khả tích Lebesgue trên $[a;b]$.

Câu 6. Cho M là một không gian véctơ con của không gian định chuẩn E trên trường $\mathbb{K}$ và T là một ánh xạ tuyến tính từ M vào E. Giả sử có một $\alpha \in \mathbb{K}$ để cho $(\alpha I_d + T)$ là một song ánh từ E vào E. và $(\alpha I_d + T)^{-1}$ liên tục trên E, trong đó ánh xạ I_d là ánh xạ đồng nhất. Chứng minh rằng đồ thị của T là một tập đóng trong $E \times E$.

Bộ giáo dục và đào tạo — Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam

Trường Đại học sư phạm Quy Nhơn — Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Đề thi tuyển sinh cao học năm 2005

Ngành: Toán học

Môn thi: Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. 1. Cho k, n là những số nguyên dương lớn hơn 1 và $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một phép biến đổi tuyến tính thoả mãn $f^k = 0$. Đặt $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cho bởi $g(x) = x - f(x); \forall x \in \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng g là một tự đẳng cấu của $\mathbb{R}^n$.

2. Ký hiệu $M(n;\mathbb{R})$ là không gian tuyến tính các ma trận thực vuông cấp n. Với $A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbb{R})$, đặt $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (vết của ma trận A).

a) Chứng minh rằng ánh xạ $v : M(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$v(A) = (Tr(A); a_{11}); \forall A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbb{R})$$

là một ánh xạ tuyến tính.

b) Tính sốư chiều của hạt nhân $Ker(v)$.

c) Với $n = 3$ hãy chỉ ra một c sở của không gian $Ker(v)$ và xác định không gian con bù của $Ker(v)$ trong không gian $M(n;\mathbb{R})$.

Câu 2. Cho nhóm G với phép toán nhân và $A; B$ là những nhóm con chuẩn tắc của G sao cho $A \cap B = \{e\}$(e là đn vị của nhóm G) và G sinh bởi $A \cup B$.

1. Mỗi phần tử $x \in G$ biểu diễn được dưới dạng $x = ab; a \in A; b \in B$ và biểu diễn là duy nhất.

2. G đẳng cấu với nhóm tích trực tiếp $A \times B$ của hai nhóm A và B.

3. Nếu A và B là những nhóm Cyclic cấp tưng ứng là m và n sao cho $(m;n) = 1$ thì G là nhóm Cyclic.

Câu 3. Cho R là một vành giao hoán có đn vị khác 0. Ideal $P \neq R$ của R được gọi là cực đại nếu R không chứa Ideal $Q \neq R$ nào sao cho $P \subset Q; P \neq Q$.Chứng minh các khẳng định sau:

1. Ideal P là cực đại khi và chỉ khi vành thưng R/P là một trường.

2. Vành R chứa ít nhất một Ideal cực đại.

3. Nếu P là Ideal cực đại duy nhất của vành R thì với mỗi phần tử $a \in R$ phần tử a hoặc 1 - a là kh nghịch.

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 1999
Môn thi: Đại số

Câu 1: Cho R là trường số thực, $\alpha_1 = (1, 1, 1); \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0)$ là ba vectơ trong không gian R^3. Xét ánh xạ tuyến tính $\varphi : R^3 \to R^3$ xác định bởi: $\varphi(x, y, z) = (x + z.y + z, x), (x, y, z) \in R^3$
a) Chứng minh rằng hệ α_i lập thành một cơ sở của R^3
b) Xác định ma trận A của φ đối với cơ sở α_i
c) Tính định thức của ma trận A

Câu 2: Cho H và K là hai nhóm nhân và $G = H \times K$ là tích Đề các của chúng. Trên G ta xác định phép toán nhân như sau: $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ với mọi $a, c \in H; b, d \in K$. Chứng minh rằng:
a) G lập thành một nhóm với phép nhân xác định như trên
b) Các tập hợp con: $A = (a, 1_K)|a \in H$ và $B = (1_H, b)|b \in K$ là những nhóm con chuẩn tắc của G

Câu 3: Cho X là một miền nguyên có đặc số là một số nguyên dương n. Chứng minh rằng:
a) cấp của mọi phần tử khác không trong nhóm cộng $(X, +)$ là n.
b) n là một số nguyên tố

Câu 4: Cho $S = f_1, f_2, ..., f_n, ...$ trong đó $f_n = x^{kn} - 1$ và k là một số nguyên dương là một họ các đa thức của vành đa thức một biến lấy hệ số trên R.
a) Hãy xác định idean (S) trong $R[x]$ sinh bởi họ S.
b) (S) có nguyên tố không? Tại sao?

Câu 5: Cho m, n là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mọi đồng cấu f từ nhóm cộng Z_n vào nhóm cộng Z_m đều là đồng cấu không.

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 2000
Môn thi: Đại số

Câu 1: Trong không gian vectơ thực R^n cho các không gian com sau:

$$V = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n)|x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$$
$$W = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n)|x_1 = x_n = 0\}$$

a) Hãy tìm cơ sở và số chiều của V, W
b) Tìm số chiều của $V \cap W$

Câu 2: Chứng minh rằng một ma trận vuông với các phần tử là số thực giao hoán được với mọi ma trận vuông X cùng cấp khi và chỉ khi A có dạng $A = cE$ trong đó E là ma trận đơn vị, c là một số thực nào đó.

Câu 3: Một nhóm Aben được gọi là bất khả quy nếu nó không phân tích được thành tổng trực tiếp của 2 nhóm con thực sự. Chứng minh rằng:
a) Nhóm Z_p là bất khả quy khi và chỉ khi P là một số nguyên tố
b) Nhóm cộng các số nguyên Z là bất khả quy

Câu 4: Cho R là một nhóm giao hoán. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương:
a) Mọi Iđêan của R là hữu hạn sinh. b) Với mọi dãy tăng các Iđêan trong R:

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$$

luôn tồn tại một số nguyên dương k sao cho $I_k = I_{k+1} = ...$

Câu 5: Cho $A[x]$ là vành đa thức một biến có hệ số trong miền nguyên A. Chứng minh rằng: a) $A[x]$ là một miền nguyên
b) Một phần tử $f(x) \in A[x]$ là khả nghịch khi và chỉ khi $f(x)$ là phần tử khả nghịch của miền nguyên A

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 2001
Môn thi: Đại số

Câu 1: Cho $f, g : V \to V$ là các phép biến đổi tuyến tính của R - không gian vectơ n chiều V thoả mãn các điều kiện sau: $f + g = id_R; fg = 0$. Chứng minh rằng:
a) $f^2 = f; g^2 = g; gf = 0$.
b) $V = Imf \oplus Img$

Câu 2: Cho R^3 là một không gian vectơ trên trường số thực R, X là một tập hợp có 3 phần tử. Gọi E là tập tất cả các ánh xạ từ X đến R^3. Trên E xác định hai phép toán sau:

$$+\forall f, g \in E; \forall x \in X : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$+\forall f \in E; \forall \lambda \in R; \forall x \in X : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

a) Chứng minh rằng E cùng với 2 phép toán được xác định như trên là một không gian vectơ trên R
b) Tìm một cơ sở và số chiều của E

Câu 3: Cho X, Y là 2 nhóm xyclic không tầm thường, $C = X \oplus Y$ là tổng trực tiếp của chúng. Giả sử cấp của nhóm X là n, cấp của nhóm Y là m. Chứng minh rằng C là nhóm xyclic khi và chỉ khi $(n, m) = 1$

Câu 4: Cho A là một Iđêan của vành các số nguyên Z. Chứng minh rằng A là một Iđêan nguyên tố khi và chỉ khi A có dạng $A = pZ$ trong đó hoặc $p = 0$ hoặc p là một số nguyên tố

Câu 5: Cho $R = Z_2[x, y]$ là vành đa thức hai biến có hệ số trong Z_2 và

$$S = \{f_n, n = 1, 2...\}$$

là một họ vô hạn các đa thức của R trong đó $f_n = x^n + y^n$. Gọi I là Iđêan của R sinh bởi S. Chứng minh rằng I là một Iđêan chính.

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 2002
Môn thi: Đại số

Câu 1:
a) Cho ví dụ chứng tỏ phép nhân ma trận không có tính giao hoán
b) Hãy tính định thức của ma trận sau (Yêu cầu phải có các bước tính trong bài làm):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 2: Ký hiệu R là tập hợp các số thực. Xét không gian véc tơ R^3 và không gian vectơ cn $V = \{(x, y, z) \in R^3 | x = y$
a) Hãy xác định cụ thể một không gian con $W \subset R^3$ sao cho $R^3 = V \oplus W$.
b) Cho $u = (a, b, c)$ là một vectơ tuỳ ý của R^3. Hãy phân tích u thành tổng của hai vectơ $v \in V; w \in W$.
c) Không gian vectơ W có xác định duy nhất không? Tại sao?

Câu 3: Chứng minh rằng mọi nhóm có 6 phần tử đều đẳng cấu hoặc với nhóm xyclic $Z/6Z$ hoặc với nhóm đối xứng S_3

Câu 4: Ký hiệu Q là tập các số hữu tỷ. Chứng minh rằng tập tất cả các biểu thức dạng $a + b\sqrt{2}, (a, b \in Q)$ lập thành một trường

Câu 5:
a) Cho f, g là hai đa thức một biến với hệ số thực, $g \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một cặp đa thức h, r với hệ số thực sao cho $f = gh + r$ với bậc $r <$ bậc g
b) Điều trên có đúng không nếu ta chỉ xét các đa thức f, g, h, r với hệ số hữu tỷ? Tại sao?

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 2003
Môn thi: Đại số

Câu 1: Ký hiệu Q là trường các số hữu tỷ. Cho a là một nghiệm của đa thức $x^4 + 9$. Chứng minh rằng tập các số phức dạng $f(a)$ với mọi đa thức $f(x) \in Q[x]$ lập nên một không gian véc tơ trên Q. Hãy tính số chiều của không gian vectơ này.

Câu 2:Hãy tìm tất cả các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Câu 3: Cho S là một nhóm tuỳ ý. G là tập tất cả các tự đẳng cấu của S. Chứng minh rằng G là một nhóm với phép hợp thành.

Câu 4: Cho I là một Iđêan của vành Z. Chứng minh rằng vành thương của Z trên I là một trường khi và chỉ khi I được sinh bởi một số nguyên tố.

Câu 5: Ký hiệu Q là trường các số hữu tỷ. Cho c là một nghiệm của đa thức $f \in Q[x]$ có bậc dương.Cho g là một đa thức có bậc dương nhỏ nhất trong các da thức nhận c làm nghiệm. Chứng minh răng:
a) f chia hết cho g trong $Q[x]$.
b) g là một đa thức bất khả quy và mọi đa thức bất khả quy trong $Q[x]$ có nghiệm c đều có fạng αg với $\alpha \in Q$

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 2004
Môn thi: Đại số

Câu 1: Giải và biện luận hệ phương trình sau trong C:

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ x + my + z &= 1 \\ 3x + y - mz &= 1 \end{cases}$$

Câu 2: Tìm tất cả các phần tử sinh của nhóm xyclic $Z/12Z$

Câu 3: a) Chứng minh rằng tập các ma trận thực cấp 2 dạng $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x] \end{bmatrix}$ với hai phép toán cộng và nhân ma trận lập thành một trường b) Chứng minh rằng trường nói trên đẳng cấu với trường các số phức.

Câu 4: Cho ánh xạ $\varphi : P_n[x] \to P_n[x]$ được xác định bởi : $\varphi(f(x)) = xf^{'}(x)$. Trong đó $P_n[x]$ là không gian các vectơ gồm các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n.
a) Chứng minh rằng φ là một phép biến đổi tuyến tính của $P_n[x]$.
b) Tìm ma trận của φ đối với cơ sở $1, x-1, (x-1)^2, ..., (x-1)^n$ của $P_n[x]$.
c) Tìm một cơ sở của kerφ.

Câu 5: Cho φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ n chiều V thoả mãn $\varphi^2 = \varphi$. Chứng minh rằng: $V = Im\varphi \oplus Ker\varphi$.

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 2005
Môn thi: Đại số

Câu 1: Hãy giải và viết nghiệm tổng quát của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 11x_5 &= 12 \\ 13x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 16x_4 + 17x_5 &= 18 \\ 19x_1 + 20x_2 + 21x_3 + 22x_4 + 23x_5 &= 24 \end{cases}$$

Câu 2: Tìm các vectơ bổ sung để hệ hai vectơ e_1, e_2 lập thành một cơ sở trực chuẩn của R^4, trong đó:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1); e_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)$$

Câu 3: Chứng minh rằng Z/nZ là trường khi và chỉ khi n là số nguyên tố.
Câu 4: Chứng minh rằng các nhóm $Z/9Z$ và $Z/3Z \oplus Z/3Z$ đều có cấp 9 nhưng không đẳng cấu với nhau.
Câu 5: Chứng minh rằng các ma trận hệ số phức có dạng:

$$\begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix}, x, y \in C$$

cùng với các phép toán cộng và nhân ma trận lập thành một vành và mọi phần tử khác không đều khả nghịch

Đề thi tuyển sinh sau đại học năm 2006
Môn thi: Đại số

Câu 1: Xét không gian vectơ R^3 trên trường số thực R. Đặt

$$E = \{(a,b,c) \in R^3 | a + 2b - c = 0\}$$

a) Chứng minh rằng E là một không gian vectơ con của R^3
b) Tìm số chiều và một cơ sở của E
c) Tìm một không gian con F của R^3 sao cho $R^3 = E \oplus F$

Câu 2: Cho U, V là các không gian vectơ trên trường K và $f : U \to V$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:
a) $f(S)$ là hệ phụ thuộc tuyến tính với mọi hệ phụ thuộc tuyến tính S của U.
b) f là đơn ánh nếu và chỉ nếu $f(S)$ là độc lập tuyến tính với mọi hệ độc lập tuyến tính S của V.

Câu 3: Cho G là nhóm. Với mỗi $a \in G$ ký hiệu $f_a : G \to G$ là ánh xạ xác định bởi: $f_a(x) = axa^{-1} \forall a \in G$. Chứng minh rằng:
a) f_a là đẳng cấu nhóm với mọi $a \in G$.
b) Tập hợp $S = \{f_a : a \in G\}$ là một nhóm với phép hợp thành các ánh xạ.
c) Tập hợp $Z(G) = \{x \in G : ax = xa \forall x \in G$ là một nhóm con chuẩn tắc của G và nhóm thương $G/Z(G)$ đẳng cấu với nhóm S

Câu 4: T là tập các ma trận vuông cấp 2 có dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ với $a, b \in Q$. Chứng minh rằng T là một trường với phép cộng và nhân ma trận.

Câu 5: Ký hiệu $R[x]$ là vành đa thức một ẩn với hệ số thực và $Z[x]$ là vành đa thức một ẩn với hệ số nguyên. Chứng minh rằng mỗi Iđêan của $R[x]$ đều là Iđêan chính. Tìm một Iđêan của $Z[x]$ không là Iđêan chính.

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006

Môn thi: **TOÁN CAO CẤP II**
(dành cho *Cao học*)
Thời gian làm bài: ***180 phút***

Câu I:

Giải và biện luận hệ phương trình trên trường số thực:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

Câu II:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1,2,-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x + z - 3 = 0, \\ -x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ.

b. Tìm toạ độ điểm B đối xứng với điểm A qua Δ.

Câu III:

Tính tích phân:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

trong đó $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y,\ y \leq x\}$.

Câu IV:

Xác định bán kính và miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-3)^n.$$

Câu V:

Giải phương trình vi phân sau:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(2x + \cos x - 3\sin x).$$

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

Môn thi: **Toán cao cấp II** Đề Gốc

(dành cho Cao học)

Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu I.

a. Tìm hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

b. Giải hệ phương trình sau trên $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 2 \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

Câu II.

Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn, cho hai mặt phẳng (P) và (P') có phương trình lần lượt là:

$$x + y + z - 1 = 0; \qquad 2x - y + 2z + 1 = 0.$$

Hãy tính khoảng cách từ gốc O đến giao tuyến (d) của hai mặt phẳng trên.

Câu III.

a. Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x-2)^n.$$

b. Giải phương trình vi phân cấp hai

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x.$$

Câu IV.

a. Dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng biểu thức

$$(1,002)^{40}.$$

b. Tính tích phân bất định

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx.$$

Câu V.

a. Cho $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi. Chứng minh rằng hàm số

$$z = y\varphi(x^2 - y^2)$$

thoả mãn phương trình

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

b. Tính tích phân

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

trong đó D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

***Môn thi:* TOÁN CAO CẤP II**

(dành cho Cao học)

Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu I.

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo a trên trường các số thực $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \ y - \ z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 1 \\ x + ay + 3z &= 0. \end{cases}$$

Câu II.

Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình

$$x + y + z = 0$$

và đường thẳng (d) có phương trình tham số

$$x = 1 + 2\lambda,\ y = 2 + \lambda,\ z = 1 - 2\lambda.$$

Hãy tìm phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1,1,1)$, song song với mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng (d). Tìm tọa độ của giao điểm của (Δ) và (d).

Câu III.

Tính giới hạn:

$$I = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right).$$

Câu IV.

1. Cho $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm số khả vi 2 lần. Chứng minh rằng hàm số $z = \varphi(xy) + \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ thoả mãn phương trình

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

2. Tính tích phân đường

$$I = \int_C (x-y)dx + (x+2y)dy$$

trong đó C là parabol $y = x^2$ nối điểm $O(0,0)$ với $I(1,1)$.

Câu V.

1. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)$.

2. Giải phương trình vi phân cấp hai $y'' + y' = x + e^{-x}$.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Họ và tên thí sinh:...
Số báo danh:...

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC ĐỢT II - NĂM 2005
Môn thi: **TOÁN CAO CẤP 3** (Dành cho Cao học ngành Địa lý)
Thời gian làm bài: ***180 phút***

Câu 1. Giải hệ phương trình sau theo tham số m:

$$\begin{cases} mx + y & = 1 \\ \quad 2y + mz & = m \\ x \quad + 3z & = 0 \end{cases}.$$

Câu 2. Trong hệ tọa độ Đề-các $0xyz$, cho bốn điểm $A(1, 0, 0), B(0, 0, -\frac{1}{2}), C(1, 1, \frac{1}{2})$ và $D(0, 0, 1)$. Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ D.

1) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC).
2) Viết phương trình tham số của đường thẳng DH và tính góc lập bởi DH và DA.

Câu 3.

1) Tính tích phân sau:
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}.$$
2) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x - 2$ và đường cong $y^2 = x$.

Câu 4. Tìm cực trị của hàm hai biến:

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

Câu 5. Giải các phương trình vi phân:

1) $y' + xy - xy^3 = 0$.
2) $y'' + 3y' = (4x^2 + 2x + 4)e^x$.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Họ và tên thí sinh:..............................
Số báo danh:..............................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC ĐỢT II - NĂM 2005
Môn thi: **TOÁN CAO CẤP 3** (Dành cho Cao học ngành Địa lý)
Thời gian làm bài: ***180 phút***

Câu 1. Giải hệ phương trình sau theo tham số λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}.$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề-các vuông góc $0xyz$, cho hai đường thẳng (D) và (D') có phương trình lần lượt là:

$$\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 &= 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 &= 0 \end{cases},$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}.$$

1) Chứng minh hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

2) Viết phương trình mặt phẳng qua điểm $A(1,1,1)$ và chứa đường thẳng (D').

Câu 3.

1) Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x} - x)$.

2) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n-1)!}$.

Câu 4. Tìm cực trị của hàm hai biến:

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$$

Câu 5. Giải các phương trình vi phân sau:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = 2$.

2) $y'' - y' - 2y = e^{2x}(18x^2 + 6x + 1)$.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh:.......................................
Số báo danh:...............................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006

Môn thi: Toán cao cấp III

(dành cho: **Cao học)**

Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu I:

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $P(1,2,-1)$ vuông góc với đường thẳng $(l): x = 4-t; y = 1; z = t$ và tính khoảng cách từ P đến (l). 1,5

2. Giải hệ phương trình: 1

$$\begin{cases} x + 3y + 2z &= 5 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y - z &= 4. \end{cases}$$

Câu 2:

1 1. Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2}}{\sin x}.$$

2. Tính các tích phân:

1 $a. \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ 1 $b. \displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\, dx.$

Câu 3:

1,5 1. Tìm cực trị của hàm số: $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y.$

1 2. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{10} < \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 < \frac{1}{5}.$$

Câu 4:

1 1. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}.$

1 2. Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}.$

....

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

***Môn thi:* TOÁN CAO CẤP III**
(dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu I.

Xác định λ để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} (2\lambda+1)x - \lambda y - (\lambda+1)z = 2\lambda \\ 3\lambda x - (2\lambda-1)y - (3\lambda-1)z = \lambda+1 \\ (\lambda+2)x - y - 2\lambda z = 2. \end{cases}$$

Câu II.

Cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là:

$$a : \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-y = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad b : \begin{cases} x-y+2z = 1 \\ 2x + 3z = 3. \end{cases}$$

Hãy chứng minh hai đường thẳng a và b chéo nhau và tính khoảng cách giữa chúng.

Câu III.

Xét hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases} \qquad (k \text{ là số tự nhiên})$$

1. Với điều kiện nào của k thì hàm số liên tục tại $x = 0$?
2. Với điều kiện nào của k thì hàm số có đạo hàm tại $x = 0$?
3. Tính vi phân cấp hai $d^2 f(x)$ tại $x = \dfrac{1}{\pi}$.

Câu IV.

1. Cho $\varphi(t)$ là hàm số một biến có đạo hàm liên tục. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$$

thoả mãn phương trình

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. Tìm cực trị địa phương của hàm số

$$f(x,y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}.$$

Câu V.

1. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

2. Tìm miền hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006
Môn thi: Toán cho vật lý
(*dành cho:* **Cao học**)
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Tìm hàm $u(x,y)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

và thỏa mãn các điều kiện

$$u(x,y)\Big|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0.$$

Câu 2. Tìm phân bố nhiệt độ $u(x,t)$ trong một thanh hữu hạn có chiều dài ℓ tại thời điểm bất kỳ $t > 0$. Biết rằng phân bố nhiệt độ ban đầu trong thanh có dạng $u(x,0) = Ax(\ell - x)$, (A là hằng số). Trong thanh không có nguồn nhiệt, hai đầu mút của thanh luôn được giữ ở nhiệt độ bằng không. Bỏ qua sự trao đổi nhiệt qua mặt bên, vận tốc truyền nhiệt trong thanh bằng a.

Câu 3. Xét hình tròn bán kính R có tâm nằm tại gốc tọa độ. Giả sử (r,φ) là các toạ độ cực, (x,y) là các tọa độ Đề Các hai chiều. Tìm nghiệm của phương trình Laplace đối với miền trong hình tròn thỏa mãn điều kiện biên Dirichlet:

$$u(r,\varphi)\Big|_{r=R} = u(R,\varphi) = A + B\sin 2\varphi,$$

trong đó A và B là các hằng số

Câu 4. Cho bán kính vectơ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$. Hãy tính:

$$\operatorname{div}\left[r.\operatorname{grad}(r^{-n})\right],$$

trong đó n là số nguyên.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

Đề 6

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

Môn thi: **Toán cao cấp III**
(dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu I.

Trên trường số thực, giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

Câu II.

Trong không gian với hệ toạ độ trực chuẩn $Oxyz$, xác định hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$\Delta : \begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ 3x - 2y - z + 15 = 0 \end{cases}$$

lên mặt phẳng

$$(P): \ -2x - 3y + z - 4 = 0.$$

Câu III.

a. Tìm giới hạn:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{x \sin x}.$$

b. Tính tích phân sau:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx, \ (a > 0).$$

Câu IV.

a. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ nhưng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ của hàm hai biến

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

b. Khảo sát cực trị của hàm

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

Câu V.

a. Khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right).$$

a. Giải phương trình vi phân

$$y'' + y' - 2y = e^x.$$

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006
Môn thi: **TOÁN CAO CẤP THỐNG KÊ**
(dành cho *Cao học*)
Thời gian làm bài: ***180 phút***

Câu 1. (3 điểm) Có hai bình thí nghiệm chứa các hạt đậu đỏ và đậu đen. Bình thí nghiệm thứ nhất có 1 hạt đậu đỏ và 2 hạt đậu đen. Bình thí nghiệm thứ hai có 2 hạt đậu đỏ và 1 hạt đậu đen.

a. Từ mỗi bình lấy ngẫu nhiên ra 1 hạt đậu. Tính xác suất để cả 2 hạt đậu có cùng mầu.

b. Lấy ra ngẫu nhiên 1 hạt đậu từ bình thứ nhất bỏ qua bình thứ hai, sau đó từ bình thứ hai lấy ra 1 hạt đậu. Tính xác suất để hạt đậu lấy ra từ bình thứ hai là hạt đậu đỏ.

Câu 2. (2 điểm) Xác suất để một hạt giống không nẩy mầm khi gieo thí nghiệm là 0.001. Gieo thí nghiệm 1500 hạt giống cùng loại đó.

a. Tính xác suất để có đúng 1 hạt giống không nẩy mầm.

b. Tìm số hạt giống không nẩy mầm có khả năng xảy ra nhất.

Câu 3. (3 điểm) Kiểm tra ngẫu nhiên 100 cây giống của một trại thí nghiệm, thấy có 10 cây bị nhiễm sâu bệnh. Với độ tin cậy 99%, tính số cây giống bị nhiễm sâu bệnh trong trại đó, nếu biết tổng số cây giống trong trại là 1000.

Cho biết giá trị từ bảng tích phân Laplace

$$\Phi_0(2,58) = 0,495 \quad \text{với} \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-0,5y^2} dy.$$

Câu 4. (2 điểm) Tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp 1

$$(1 + x^2)dy + ydx = 0$$

thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

Môn thi: **Toán cao cấp Thống kê**

(dành cho Cao học)

Thời gian làm bài: **180 phút**

Đề Gốc

Câu I.

Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+3x^2)}{x^2+x}.$$

Câu II.

a. Giải phương trình vi phân cấp một:

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

b. Giải phương trình vi phân cấp hai:

$$y'' - 5y' = \sin 5x.$$

Câu III.

Ta có hai hộp bi: hộp I chứa 4 bi trắng, 2 bi vàng, 3 bi xanh; hộp II chứa 2 bi trắng, 6 bi vàng, 3 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một viên bi. Tính xác suất để:

a. Cả 2 viên cùng màu.

b. Có 1 bi trắng và 1 bi xanh.

Câu IV.

Xác suất mắc bệnh T của mỗi người ở vùng A là 0,001. Chọn ngẫu nhiên 1000 người ở vùng này. Gọi X là số người mắc bệnh T.

a. Tính kỳ vọng và phương sai của X.

b. Tính xác suất để có ít nhất 3 người mắc bệnh T.

Câu V.

a. Trước một cuộc bầu cử, phỏng vấn ngẫu nhiên 1800 cử tri trong một khu vực thì thấy có 1180 người ủng hộ ứng cử viên A. Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng số người ủng hộ ứng cử viên A, nếu biết toàn bộ số cử tri khu vực đó là 3500 người. Cho biết $\Phi(1,96) = 0,475$ với $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

b. Kiểm tra hai môn Toán và Vật lý trong một nhóm 10 học sinh được chọn ngẫu nhiên từ một lớp chuyên Vật lý, ta có bảng kết quả sau, với X là điểm Toán và Y là điểm Vật lý:

X	7	6	7	10	4	5	7	8	8	9
Y	6	7	7	9	5	3	8	9	6	7

(i) Tính hệ số tương quan mẫu $\rho(X, Y)$ và nhận xét về mối tương quan đó.

(ii) Viết phương trình hồi quy tuyến tính của Y theo X.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

***Môn thi:* TOÁN CAO CẤP THỐNG KÊ**
(dành cho Cao học)
Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu I.

Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$$

Câu II.

Giải phương trình vi phân:

$$y''-2y'+2y=e^x(\sin x+\cos 2x).$$

Câu III.

Có 3 hộp phấn, trong đó hộp I chứa 25 viên tốt và 5 viên xấu, hộp II chứa 10 viên tốt và 5 viên xấu, hộp III chứa 5 viên tốt và 15 viên xấu. Ta gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất: nếu xuất hiện mặt 1 chấm thì chọn hộp I, nếu xuất hiện mặt 2 hoặc 3 chấm thì chọn hộp II, nếu xuất hiện một trong các mặt còn lại thì chọn hộp III. Từ hộp được chọn đó lấy ra ngẫu nhiên 1 viên phấn. Tìm xác suất để nhận được viên phấn tốt.

Câu IV.

Gieo 50 hạt đậu, với xác suất nẩy mầm của mỗi hạt là 0,99. Tính xác suất để có đúng 2 hạt không nẩy mầm.

Câu V.

1. Gieo 200 hạt giống thấy có 180 hạt nẩy mầm. Với độ tin cậy 99%, hãy ước lượng tỷ lệ nẩy mầm của loại hạt giống đó. Nếu muốn độ dài của khoảng tin cậy của tỷ lệ này không vượt quá 0,01 thì cần phải gieo bao nhiêu hạt?

2. Sau khi cải tiến kỹ thuật, với 30 lần quan sát thí nghiệm, ta nhận thấy thời gian làm việc trung bình của một chi tiết điện tử là 60 giờ, với độ lệch tiêu chuẩn là 1. Trong cùng điều kiện tương tự, tiến hành quan sát 20 lần khi chi tiết đó chưa được cải tiến thì thời gian làm việc trung bình của chi tiết là 55 giờ, cũng với độ lệch tiêu chuẩn là 1. Với mức ý nghĩa 0,05, hỏi sự cải tiến có thực sự tác dụng hay không?

Cho biết $\Phi_o(2,58)=0,495,\ \Phi_o(1,65)=0,45$ với $\Phi_o(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-0,5y^2}dy.$

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh : ....
Số báo danh :........................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

Môn thi : **LOGIC HỌC**

(dành cho Cao học)

Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu I. Anh (chị) hãy trình bày :

1. Nội dung, yêu cầu, công thức và ý nghĩa của quy luật loại trừ cái thứ ba (quy luật bài trung).
2. Nội dung quy tắc của luận chứng.

Câu II. Thu hẹp và mở rộng khái niệm là gì? Cho ví dụ minh họa.

Câu III. Cho phán đoán : "Nếu số m chia hết cho 9 thì số m chia hết cho 3".

1. Phán đoán đã cho được tạo thành từ những phán đoán nào?
2. Viết công thức của phán đoán đã cho.
3. Lập bảng giá trị của công thức phán đoán đã cho.
4. Tìm 3 phán đoán tương đương (đẳng trị) với phán đoán đã cho và phát biểu các phán đoán đó dưới dạng thành văn.
5. Viết công thức của 3 phán đoán tương đương vừa tìm được.

Câu IV. 1. Các suy luận sau đây có hợp lôgíc không? Vì sao?

a. ASP $\vdash$ APS; IPS $\vdash$ APS ; AAA; AII; AEI; EIE; AIO và EIO.

b. Kim loại dẫn điện
Cao su không phải là kim loại

Do đó, cao su không dẫn điện

c. Kim loại dẫn điện
Cao su không dẫn điện

Do đó, cao su không phải kim loại.

2. Cho suy luận:

"Hôm nay, ông ấy không đến trường. Vì nếu ông ấy đến trường thì tôi hoặc anh sẽ gặp. Nhưng hôm nay, tôi không gặp ông ấy mà anh cũng thế ".

Anh (chị) hãy :

a. Lập công thức cho suy luận trên
b. Suy luận trên có hợp lôgíc không? Chứng minh bằng bảng giá trị chân lý và biến đổi phán đoán.

Ghi chú : Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC HUẾ

Họ và tên thí sinh : ....
Số báo danh :.........................

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007

***Môn thi :* LOGIC HỌC**

(dành cho Cao học)

Thời gian làm bài: **180 phút**

Câu 1 : 1. Trình bày nội dung, yêu cầu, công thức và ý nghĩa của quy luật lý do đầy đủ.
2. Trình bày cấu trúc của chứng minh.

Câu 2 : Dùng sơ đồ hình tròn (Euler) để biểu diễn quan hệ về mặt ngoại diên giữa các khái niệm sau :

1. "Nước nóng" (A), "Nước lạnh" (B), "Nước muối" (C) và "Nước" (D).
2. "Người mù chữ" (A) và "Người không đọc được" (B).

Câu 3 : 1. Cho phán đoán: "Hôm nay, nếu không ông ấy thì chính tôi dự Hội nghị, còn anh trực văn phòng" (P).
Anh chị hãy:
a) Viết công thức cho P.
b) Xác định giá trị của P:
+ Bằng cách lập bảng giá trị.
+ Khi biết chỉ có một phán đoán thành phần sai (= 0).
c) Tìm phán đoán tương đương với P và phát biểu dưới dạng thành văn.

2. Bằng cách biến đổi phán đoán, hãy chứng minh:

$$[(b\rightarrow \overline{c})\wedge(a\rightarrow \overline{b})\wedge(c\rightarrow \overline{a})\ ]\rightarrow \overline{a}\vee \overline{b}\vee \overline{c}=1 \text{ (đúng).}$$

Câu 4 : 1. Cho suy luận: "Nếu có A thì có B, mà có B thì có C và D. Nó không có D. Do đó, nó không có A".
Anh chị hãy:
a) Viết công thức cho suy luận trên.
b) Cho biết suy luận trên hợp lôgíc không? Vì sao?

2. Những suy luận sau đây hợp lôgíc không? Vì sao?

a) $\dfrac{\text{ASP}}{\text{ISP}};\dfrac{\overline{\text{ISP}}}{\text{OSP}};\dfrac{\text{ASP}}{\overline{\text{OSP}}};\dfrac{\overline{\text{ISP}}}{\text{ESP}};\dfrac{\text{OSP}}{\overline{\text{ASP}}};\dfrac{\text{ESP}}{\text{OSP}}$

b) $\dfrac{(a\vee b)\wedge(a\rightarrow c)\wedge(c\rightarrow d)}{c\vee d}$

Ghi chú : Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2001
MÔN THI: TOÁN KINH TẾ

(PHẦN XÁC SUẤT THỐNG KÊ)

Câu 1. Cơ quan dự báo khí tượng thủy văn chia Thời tiết thành các loại: "Xấu", "Bình thường", và "Tốt" với các xác suất tương ứng 0,25 ; 0,45 và 0,3. Với tình trạng thời tiết trên thì khả năng sản xuất nông nghiệp được mùa tương ứng là 0,2 ; 0,6 và 0,7. Nếu như sản xuất nông nghiệp được mùa thì mức xuất khẩu lượng thực tương ứng với tình trạng thời tiết là 2,5 triệu tấn ; 3,3 triệu tấn và 3,8 triệu tấn. Hãy tính mức xuất khẩu lương thực có thể hy vọng (nếu được mùa).

Câu 2. Theo nhận định của cơ quan quản lý chất lượng thực phẩm tại thành phố A thì chỉ có 80% số cơ sở kinh doanh thực phẩm tại thành phố này là đạt yêu cầu vệ sinh an toàn thực phẩm. Nhân tháng "vệ sinh an toàn thực phẩm", người ta kiểm tra ngẫu nhiên 100 cơ sở sản xuất kinh doanh tại thành phố

a) Tính xác suất để trong số các cơ sở được kiểm tra có không ít hơn 85 cơ sở đạt tiêu chuẩn.
b) Tính xác suất để trong số các cơ sở được kiểm tra có từ 75 đến 85 cơ sở đạt yêu cầu.
c) Nếu trong số các cơ sở được kiểm tra có 26 cơ sở không đạt yêu cầu thì với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng nhận định của cơ quan quản lý là đáng tin cậy?

Câu 3. Năng suất một giống lúa tại vùng A ký hiệu là X_A, tại vùng B ký hiệu là X_B là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn. Ở vùng A người ta thu hoạch ngẫu nhiên 55ha, thu được số liệu sau

Năng suất (tạ/ha)	25	26	27	28	29	30	31
Số ha	7	8	10	11	8	6	5

a) Hãy tìm khoảng tin cậy đối xứng với hệ số tin cậy 95% cho mức năng suất trung bình ở vùng A
b. Hãy tìm khoảng tin cậy với hệ số tin cậy 95% cho phương sai của mức năng suất lúa vùng A
c) Thu hoạch một cách ngẫu nhiên 41ha ở vùng B, tính được $\overline{x}_B = 30$ và $\sum_{i=1}^{41}(x_{Bi} - \overline{x}_B)^2 = 160$. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng năng suất giống lúa này ở hai vùng là như nhau hay không?
d) Giả sử rằng ở vùng B phương sai của XB là 3, lấy mẫu ngẫu nhiên khác, kích thước 100, hãy tính xác suất để $\sum_{i=1}^{100}(x_{Bi} - \overline{x}_B)^2$ ít nhất bằng 270.

Cho $P[U < 1,645] = 0,95$ $P[U < 1,96] = 0,975$
$P[\chi^2(99) < 90] = 0,2702$ $P[\chi^2(54) > 76,192] = 0,025$ $P[\chi^2(54) > 35,568] = 0,975$

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI: TOÁN KINH TẾ

(PHẦN XÁC SUẤT THỐNG KÊ)

Câu 1. a) Trong một nhà máy có ba phân xưởng dệt, mỗi phân xưởng có 100 máy dệt hoạt động độc lập nhau. Xác suất để trong một ca sản xuất mỗi máy dệt bị hỏng là như nhau và bằng 2,5%.

- Tìm quy luật phân bố xác suất của số máy hỏng trong một ca sản xuất của từng phân xưởng. Trung bình trong một ca sản xuất toàn nhà máy có bao nhiêu máy dệt bị hỏng?
- Nếu mỗi kỹ sư máy chỉ có thể sửa chữa tối đa được 2 máy dệt bị hỏng trong một ca sản xuất thì nhà máy nên bố trí trực sửa chữa máy dệt mỗi ca bao nhiêu kỹ sư là hợp lý nhất?

b) Giả sử tỷ lệ người dân thành phố A mua bảo hiểm nhân thọ là 0,25

- Tính xác suất để có nhiều hơn 28% số người trong một mẫu ngẫu nhiên gồm 120 người của thành phố này có mua bảo hiểm nhân thọ.
- Vẫn sử dụng mẫu 120 người ở trên, với xác suất 0,1 thì tần suất mẫu lớn hơn tỷ lệ của cả tổng thể một lượng là bao nhiêu?

Câu 2. a) Tuổi thọ (năm) của một thiết bị điện tử là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x) = \begin{cases} k.e^{-2x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{với } k \text{ là hằng số}$$

Tính k và tính xác suất để thiết bị này sử dụng được ít nhất là 2 năm

b) Cho mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1}, X_{2n})$ được lấy ra từ tổng thể phân bố chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Xây dựng hai thống kê $\overline{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{2k-1}$ và $\overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{2k}$

$\overline{X}_1$ & $\overline{X}_2$ có là ước lượng không chệch, hiệu quả của μ hay không, tại sao?

Câu 3. Gọi X là chỉ số thông minh (IQ) của học sinh lứa tuổi 12-15. Giả sử X có phân phối chuẩn. Đo IQ ở 50 học sinh trường A có số liệu sau:

Chỉ số thông minh (IQ)	75 – 78	78 – 81	81 – 84	84 – 87	87 – 90	90 – 93
Số học sinh	3	8	9	12	10	8

a) Từ kết quả trên có thể nói chỉ số IQ trung bình đang xét là trên 84 không? Với α = 5%

b) Với độ tin cậy 95% có thể nói chỉ số IQ trung bình thấp nhất là bao nhiêu?

c) Trong số 50 học sinh trên có 20 học sinh nam có chỉ số IQ tối thiểu bằng 84 và 10 học sinh nữ có chỉ số IQ nhỏ hơn 84. Với α = 5% có thể cho rằng chỉ số thông minh phụ thuộc vào giới tính được hay không?

d) Đo IQ ở 50 học sinh trường B tính được $\overline{x}_B = 80$ và $\overline{x_B^2} = 6412{,}005$. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng chỉ số IQ của học sinh hai trường là như nhau không?

Cho biết $P[U < 1{,}645] = 0{,}95$ $P[U < 1{,}96] = 0{,}975$ $P[U < 0{,}7589] = 0{,}7764$
$P[U < 1{,}28] = 0{,}9$ $P[\chi^2(1) < 3{,}841] = 0{,}95$

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI: TOÁN KINH TẾ

(PHẦN XÁC SUẤT THỐNG KÊ)

Câu 1. Một sinh viên phải thi 3 môn một cách độc lập với nhau, xác suất nhận được cùng một điểm số nào đó ở cả ba môn đều như nhau. Xác suất để thi một môn được điểm tám là 0,18; được điểm dưới điểm tám là 0,65. Xác suất để cả ba môn đều được điểm mười là 0,000343. Tính xác suất để sinh viên thi ba môn được ít nhất 28 điểm. Biết rằng điểm thi được cho theo thang điểm mười, không có điểm lẻ.

Câu 2. Khi nghiên cứu giống lúa A, qua thí nghiệm, người ta đã kết luận: năng suất của nó là biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn có kỳ vọng 8 tấn/ha, độ phân tán 1,25 tấn/ha. Khi đưa ra gieo trồng đại trà, điều tra ngẫu nhiên 144ha, người ta thu được các số liệu sau:

$\overline{x}_A = 7{,}5$ tấn/ha; $\sum\limits_{i=1}^{144} x_{Ai}^2 = 8380{,}28$ trong đó x_{Ai} là năng suất giống lúa A ở ha thứ i (tấn/ha).

a) Khi gieo trồng đại trà người ta chỉ biết năng suất của A tuân theo quy luật phân bố chuẩn, hãy cho biết:
   - Phải chăng năng suất lúa A không đạt mức thí nghiệm?
   - Phải chăng năng suất lúa A không ổn định như thí nghiệm?

b) Điều tra ngẫu nhiên 144 ha trồng lúa B, người ta thu được $\sum\limits_{i=1}^{144} (x_{Bi} - \overline{x}_B)^2 = 288{,}86$ trong đó x_{Bi} là năng suất lúa B ở ha thứ i (tấn/ha). Năng suất lúa B cũng phân bố chuẩn. Giống lúa A có năng suất ổn định hơn giống lúa B hay không?

c) Trong mẫu đối với lúa A có 88 ha có năng suất ít nhất 7 tấn/ha, mẫu đối với lúa B có 64 ha có năng suất nhỏ hơn 7 tấn/ha. Hãy cho biết tỉ lệ số ha có năng suất ít nhất 7 tấn/ha của hai loại lúa trên có như nhau không?

Cho $\alpha = 5\%$.

Câu 3. Biến ngẫu nhiên X có phân phối A(p), với công thức xác suất $P_x = p^x(1-p)^{1-x}$. Chứng minh rằng tần suất mẫu là ước lượng hiệu quả nhất của p.

Cho các giá trị tới hạn: $U_{0,05} = 1{,}645$; $U_{0,025} = 1{,}96$; $\chi^2_{0,05}(143) = 171$ $F_{0,05}(143,143) = 0{,}76$

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI: TOÁN KINH TẾ

(PHẦN XÁC SUẤT THỐNG KÊ)

Câu 1. 1. Có hai lô sản phẩm do một máy tự động sản xuất ra. Lô I gồm 6 chính phẩm và 4 phế phẩm; lô II gồm 6 chính phẩm và 3 phế phẩm.

a) Chọn ngẫu nhiên một lô và từ đó lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Tìm xác suất để được chính phẩm

b) Giả sử đã lấy được chính phẩm, nếu từ lô đó lấy tiếp 2 sản phẩm thì xác suất để được 2 chính phẩm nữa là bao nhiêu?

2. Ba người đi săn cùng bắn một con nai. Con nai chỉ bị trúng một viên đạn. Biết rằng xác suất bắn trúng của 3 người tương ứng là 0,7 ; 0,6 và 0,5. Ai là người có khả năng bắn trúng lớn nhất?

3. Cho X là biến ngẫu nhiên phân phối A(p) và $Y = aX + (1 - a)X^2$, với a là hằng số. Hãy tính kỳ vọng toán và phương sai của Y.

Câu 2. Ở một khu vực, các hộ gia đình chỉ có thể mua gas ở một trong hai cửa hàng A hoặc B. Điều tra ngẫu nhiên 1200 hộ thấy có 500 hộ dùng gas, trong đó 265 hộ dùng gas của cửa hàng A, số còn lại dùng gas của cửa hàng B.

a. Với mức ý nghĩa 5%, có thể kết luận cửa hàng A thu hút khách hơn cửa hàng B được không?

b. Khu dân cư này có 5000 hộ, vậy tối đa có bao nhiêu hộ dùng gas với độ tin cậy 95%?

Câu 3. Năng suất một loại cây trồng tại vùng A và B là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn. Có kết quả điều tra sau của vùng A:

Năng suất (tạ/ha)	24	25	26	27	28	29	30	31
Số điểm thu hoạch	8	12	17	19	17	14	8	5

a) Với hệ số tin cậy 95% hãy ước lượng năng suất trung bình tối thiểu của vùng A

b) Người ta thu hoạch ngẫu nhiên tại 100 điểm của vùng B và tính được năng suất trung bình 27,75 tạ/ha và độ lệch chuẩn mẫu là 2,5 tạ/ha. Với mức ý nghĩa 0,05 có thể cho rằng năng suất loại cây trồng trên ở hai vùng A và B là ổn định như nhau ?

Cho biết $P(U < 1{,}645) = 0{,}95$; $P(U < 1{,}96) = 0{,}975$; $P(F(99,99) < 1{,}48) = 0{,}975$

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN THI: TOÁN KINH TẾ

(PHẦN XÁC SUẤT THỐNG KÊ)

Câu 1. Giá của cổ phiếu A, cổ phiếu B là các biến ngẫu nhiên X_A, X_B tương ứng (đơn vị: ngàn đồng) và bảng phân bố xác suất đồng thời của chúng như sau:

$X_A \setminus X_B$	15	16	17
15	0,15	0,2	0,25
17	0,05	0,2	0,15

a) Tính giá trung bình của các cổ phiếu nói trên

b) X_A, X_B có độc lập? Khả năng để giá cổ phiếu B cao hơn giá trung bình cổ phiếu A là bao nhiêu?

c) Nếu phương sai của giá cổ phiếu phản ánh mức độ rủi ro của cổ phiếu thì cổ phiếu nào rủi ro hơn?

Câu 2. Tại một trường đại học có 10000 sinh viên, theo dõi kết quả thi hết môn của toàn bộ sinh viên trong học kỳ một, thấy có 40% số sinh viên phải thi lại ít nhất một môn học. Sau khi nhà trường áp dụng quy chế mới, ở học kỳ hai, chọn ngẫu nhiên 1600 sinh viên dự thi, thấy có 1040 sinh viên không phải thi lại.

a) Với mức ý nghĩa 5%, có thể cho rằng việc nhà trường áp dụng quy chế thi mới đã làm giảm tỉ lệ sinh viên phải thi lại?

b) Với độ tin cậy 95%, cho biết có ít nhất bao nhiêu sinh viên không phải thi lại?

Câu 3. Cho X_A, X_B là tiền lãi hàng tháng (triệu đồng) của hộ kinh doanh mặt hàng A, B. X_A, X_B là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn. Giả thiết rằng mỗi hộ chỉ được phép kinh doanh một mặt hàng. Điều tra ngẫu nhiên 100 hộ kinh doanh mặt hàng A và 100 hộ kinh doanh mặt hàng B ta có các số liệu sau:

X_A	10	12	14	16	18	20
Số hộ	4	10	20	36	22	8

$\overline{x}_B = 18$ và $s_B = 2{,}763$

a) Cơ quan thuế cho rằng tiền lãi trung bình của các hộ kinh doanh mặt hàng A là 15 triệu đồng và căn cứ theo mức này cơ quan sẽ tính thuế. Với mức ý nghĩa 5%, theo bạn có nên điều chỉnh căn cứ tính thuế hay không?

b) Từ các kết quả điều tra trên, với mức ý nghĩa 5%, hãy cho biết: Nếu muốn tiền lãi cao hơn thì nên kinh doanh mặt hàng nào? Nếu muốn tiền lãi ổn định hơn thì nên kinh doanh mặt hàng nào?

Cho $P(U < 1{,}645) = 0{,}95$; $P(U > 1{,}96) = 0{,}025$; $P[F(99{,}99) > 1{,}39] = 0{,}05$

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006
MÔN THI: TOÁN KINH TẾ
(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu 1 (1,5điểm) Y là thu nhập, S là tiết kiệm. Biết rằng mức tiết kiệm sẽ là S = –7,42 khi thu nhập Y bằng 5.

a) Hãy xác định hàm tiết kiệm nếu biết khuynh hướng tiết kiệm cận biên MPS = Y – 0,4
b) Kể từ mức thu nhập dương nào trở lên sẽ có tiết kiệm dương?

Câu 2 (1,5điểm) Cho mô hình thu nhập quốc dân:

$$Y = C + I + G_0 \ ; C = b_0 + b_1Y \ ; \ I = a_0 + a_1Y - a_2R_0$$

Trong đó $a_i > 0$; $b_i > 0$ với mọi i, đồng thời $a_1 + b_1 < 1$; G_0 là chi tiêu chính phủ, R_0 là lãi suất, I là đầu tư, C là tiêu dùng, Y là thu nhập

a) Hãy xác định Y, C ở trạng thái cân bằng
b) Với $b_0 = 200$; $b_1 = 0,7$; $a_0 = 100$; $a_1 = 0,2$; $a_2 = 10$; $R_0 = 7$; $G_0 = 500$, khi tăng chi tiêu chính phủ 1% thì thu nhập cân bằng thay đổi bao nhiêu %?

Câu 3 (2điểm) Một công ty độc quyền tiến hành sản xuất một loại sản phẩm ở hai cơ sở với các hàm chi phí tương ứng là: $C_1 = 128 + 0,2Q_1^2$; $C_2 = 156 + 0,1Q_2^2$ (Q_1, Q_2 là lượng sản phẩm sản xuất tại cơ sở 1 và 2). Hàm cầu ngược về sản phẩm của công ty có dạng: p = 600 – 0,1Q, trong đó $Q = Q_1 + Q_2$ và Q < 6000.

a) Hãy xác định lượng sản phẩm cần sản xuất ở mỗi cơ sở để tối đa hóa lợi nhuận.
b) Tại mức sản lượng tối đa hóa lợi nhuận, hãy tính độ co dãn của cầu theo giá.

Câu 4 (1,0điểm). Cho X là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$, chứng tỏ rằng trung bình mẫu $\overline{X}$ là ước lượng hiệu quả nhất của kỳ vọng μ.

Câu 5 (2,5điểm) Cho X_A, X_B là các biến ngẫu nhiên, trong đó X_B phân phối chuẩn. Với hai mẫu độc lập có kích thước $n_A = 100$, $n_B = 144$, tính được $\overline{x}_A = 46,85$; $s_A = 8,5474$; $\overline{x}_B = 48,75$; $s_B = 11,25$; $\sum_{i=1}^{100}(x_{Ai} - \overline{x}_A)^3 = 4350,075$; $\sum_{i=1}^{100}(x_{Ai} - \overline{x}_A)^4 = 1402488,573$. Với mức ý nghĩa 5%

a) Hãy cho biết X_A có phân phối chuẩn hay không?
b) Hãy cho biết kỳ vọng của X_B có lớn hơn kỳ vọng của X_A hay không?
c) Phương sai của X_B có lớn hơn phương sai của X_A hay không?

Câu 6 (1,5điểm) Để nghiên cứu mối quan hệ giữa tình trạng nghèo đói và quy mô hộ gia đình (được xác định bởi số người trong hộ và ký hiệu là X), người ta điều tra và thu được số liệu sau đây

	$X \le 3$	$4 \le X \le 5$	$X > 5$	Tổng
Số hộ nghèo	10	100	90	200
Số hộ không nghèo	130	570	350	1050
Tổng	140	670	440	1250

a) Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho biết giữa quy mô hộ gia đình và tình trạng nghèo đói có độc lập nhau hay không?
b) Giả thiết rằng tỉ lệ nghèo đói của hộ gia đình bằng 16%, nếu điều tra ngẫu nhiên 144 hộ thì xác suất để tần suất mẫu lớn hơn 15% bằng bao nhiêu?

Cho $P(U > 1,645) = 0,05$; $P(U > 1,96) = 0,025$; $P(U > 0,327) = 0,3717$
$P(\chi^2(2) < 5,99) = 0,95$; $P(F(143,99) > 1,364) = 0,05$.

Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN	MÔN THI: TOÁN KINH TẾ
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC	(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu 1 (1 điểm) Tỷ lệ phế phẩm của một loại sản phẩm là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 100 sản phẩm.

a) Tìm xác suất để trong đó có không quá 5 phế phẩm.

b) Với xác suất 0,95 thì trong số các sản phẩm được kiểm tra có ít nhất bao nhiêu chính phẩm?

Câu 2 (1 điểm) Hai mẫu ngẫu nhiên độc lập kích thước bằng 4 và 5 được rút ra từ một tổng thể phân phối A(p) và tìm được các tần suất mẫu là f_1 và f_2. Xét tập hợp các ước lượng $G = \alpha f_1 + (1-\alpha)f_2$. Tìm ước lượng hiệu quả nhất của p trong tập hợp các ước lượng nói trên.

Câu 3 (3 điểm) Đo chiều cao của 200 thanh niên được chọn ngẫu nhiên ở một vùng dân cư A được số liệu sau:

Chiều cao (cm)	155	160	165	170	175
Số thanh niên	30	50	60	50	10

a) Với độ tin cậy 0,95 hãy ước lượng số thanh niên vùng A có chiều cao từ 170 cm trở lên. Biết rằng vùng A có 4000 thanh niên.

b) Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng số thanh niên vùng A có chiều cao từ 165cm trở lên nhiều hơn số thanh niên còn lại của vùng này hay không?

c) Ở vùng B người ta cũng đo ngẫu nhiên chiều cao của 200 thanh niên và tính được: $\sum_{i=1}^{200} x_{Bi} = 32900$, $\sum_{i=1}^{200} x_{Bi}^2 = 5418450$, trong đó x_{Bi} là chiều cao của thanh niên thứ i ($i=\overline{1,200}$). Vậy có thể cho rằng độ đồng đều về chiều cao của thanh niên vùng A là hơn vùng B hay không? Kết luận với mức ý nghĩa 5%.

Giả thiết chiều cao của thanh niên vùng A và B là các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn.

Câu 4 (2 điểm) Một doanh nghiệp độc quyền bán hàng ở hai thị trường với giá khác nhau. Hàm cầu của các thị trường về hàng hóa này: $Q_1 = 20 - 0,5\ P_1$; $Q_2 = 31,2 - 0,4\ P_2$; Hàm chi phí cận biên của doanh nghiệp là MC = 15 + Q ; trong đó $Q = Q_1 + Q_2$. Doanh nghiệp nên chọn giá bán và sản lượng ở mỗi thị trường bao nhiêu để lợi nhuận cực đại? Biết chi phí cố định bằng 100.

Câu 5 (2 điểm) Cho hàm cung S, hàm cầu D về một loại hàng hóa:

$$S = 0,1P^2 + 5P - 10; D = \frac{50}{P-2} \qquad \text{với P là giá hàng hóa.}$$

a) Với điều kiện nào của P thì cung và cầu đều dương? Với điều kiện trên hãy viết phương trình cân bằng thị trường.

b) Xác định hàm dư cầu và khảo sát tính đơn điệu của hàm này. Chứng tỏ rằng luôn tồn tại duy nhất giá cân bằng trong khoảng (3;5).

Câu 6 (1 điểm) Cho hàm sản xuất $Y = 0,3\ K^{0,5}\ L^{0,5}$; Y - sản lượng; K - vốn; L - lao động.

a) Hãy tính sản phẩm biên của vốn và lao động tại K = 4 ; L = 9.

b) Quá trình công nghệ thể hiện bằng hàm số trên có năng suất cận biên giảm dần hay không? Hãy giải thích.

c) Nếu K tăng 8%, L không đổi thì Y tăng bao nhiêu %?

Cho $P(U < 1,645) = 0,95$; $P(F(199,199) > 1,26) = 0,05$; $P(U < 1,96) = 0,975$.

Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm !

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2008**
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN	**MÔN THI: TOÁN KINH TẾ**
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC	**(Thời gian làm bài : 180 phút)**

<u>Câu 1</u> (1 điểm) Một công ty độc quyền kinh doanh mặt hàng A có hàm doanh thu cận biên: MR = 120 – 2Q; Q là sản lượng mặt hàng A. Tìm điều kiện đối với Q để doanh thu dương, với điều kiện này giá hàng A có dương không?

<u>Câu 2</u> (2 điểm) Cho mô hình:

$$\begin{aligned} Y &= C + I & \\ C &= C_0 + aY & 0 < a < 1 \\ I &= I_0 - b\,r & b > 0 \\ L &= L_0 + mY - n\,r & m, n > 0 \\ M_s &= L & \end{aligned}$$

trong đó Y là thu nhập quốc dân, I: đầu tư, C: tiêu dùng, L: mức cầu tiền, M_s: mức cung tiền, r : lãi suất.

a) Hãy xác định thu nhập quốc dân và lãi suất cân bằng.

b) Với a = 0,7; b = 1800; C_0 = 500; I_0 = 400; L_0 = 800; m = 0,6; n = 1200; M_s = 2000, tính hệ số co giãn của thu nhập, lãi suất theo mức cung tiền tại điểm cân bằng và giải thích ý nghĩa của chúng.

<u>Câu 3</u> (2 điểm) Một trung tâm thương mại nhận thấy rằng doanh thu của trung tâm phụ thuộc vào thời lượng quảng cáo trên đài phát thanh (*x* - phút) và trên truyền hình (*y* - phút) với hàm doanh thu như sau:

$$TR = 320x - 2x^2 - 3xy - 5y^2 + 540y + 2000$$

Chi phí cho mỗi phút quảng cáo trên đài phát thanh là 1 triệu đồng, trên truyền hình là 4 triệu đồng. Ngân sách chi cho quảng cáo là 180 triệu đồng.

a) Hãy xác định *x*, *y* để cực đại doanh thu.

b) Nếu ngân sách chi cho quảng cáo tăng 1 triệu đồng thì doanh thu cực đại sẽ tăng bao nhiêu?

<u>Câu 4</u> (1 điểm) Cho biến ngẫu nhiên X ~ A(p). Chứng minh rằng tần suất mẫu là ước lượng hợp lý tối đa của p.

<u>Câu 5</u> (1 điểm) W = (X_1, X_2, X_3) là một mẫu ngẫu nhiên từ tổng thể phân bố chuẩn N(μ, σ^2). Lập thống kê $G = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{1}{2}X_3$. Tính kỳ vọng và phương sai của G. G có phải là ước lượng hiệu quả của μ không? Vì sao?

<u>Câu 6</u> (3 điểm) Điều tra doanh thu trong tuần (*x*: triệu đồng) của một số đại lý xăng dầu ở vùng A, người ta thu được các số liệu sau đây:

x	21	22	23	24	25	26
Số đại lý	7	17	29	27	15	5

a) Với hệ số tin cậy 95% hãy tìm khoảng tin cậy cho độ phân tán của doanh thu/tuần.

b) Năm trước, doanh thu trung bình/tuần của các đại lý trên cùng địa bàn là 20 triệu đồng. Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho biết doanh thu trung bình/tuần năm nay có cao hơn so với năm trước hay không?

c) Điều tra 100 đại lý kinh doanh xăng dầu ở vùng B người ta tính được phương sai mẫu bằng 2 và thấy có 35 đại lý có doanh thu từ 25 triệu đồng/tuần trở lên. Với mức ý nghĩa 5% hãy cho biết:

- Tỷ lệ đại lý có doanh thu từ 25 triệu đồng/tuần trở lên của hai vùng là như nhau không?
- Độ phân tán của doanh thu /tuần của các đại lý vùng B có cao hơn vùng A không?

Giả thiết rằng doanh thu/tuần của các đại lý vùng A và B đều là biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn.

Cho: P(U<1,645) = 0,95; P(U<1,96) = 0,975; P(χ^2(99) >128,42) = 0,025; P(χ^2(99)<73,36) = 0,025; P(F(99,99) > 1,39) = 0,05.

Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm !