ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRUNG TÂM PHÁT TRIỂN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

GIÁO TRÌNH TOÁN CAO CẤP A1

Mail : toloveh12l@yahoo.com

Sưu tầm và chỉnh sửa by hoangly85

Bài 1 Giới hạn và liên tục

I. SỐ THỰC VÀ HÀM SỐ

1.Các số thực và đường thẳng thực

Các số thực là những số có thể biểu diễn dưới dạng thập phân như :

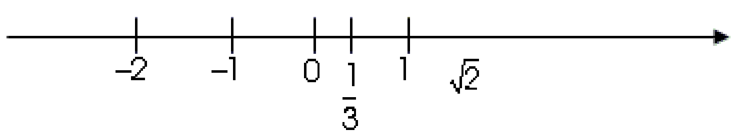
$\sqrt{2} - 1.4142....$

$\frac{1}{3} = 0.33333....$

$-\frac{3}{4} = -0.75000....$

trong đó dấu ba chấm (□) chỉ dãy các ký số sau dấu chấm thập phân kéo dài đến vô hạn .

Các số thực có thể được biểu diễn về mặt hình học bởi các điểm trên 1 đường thẳng, được gọi là đường thẳng thực như minh họa dưới đây:



Tập hợp tất cả các số thực (hay đừng thẳng thực) sẽ được ký hiệu là $\mathbb{R}$.

Trên tập hợp các số thực ta có hai phép toán cơ bản + và * với một số tính chất đại số quen thuộc đã biết . Từ đó ta cũng có phép toán trừ (-) và phép chia (/) cho số khác 0.

Ngoài ra trên $\mathbb{R}$ ta cũng có một thứ tự thông thường và với thứ tự này ta có một số tính chất được viết dưới dạng các bất đẳng thức như sau:

Nếu a,b, và c là các số thực thì ta có

$a < b \Rightarrow a+c < b+c$

$a < b \Rightarrow a-c < b-c$

$a < b$ và $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$a < b$ và $c< 0 \Rightarrow bc <ac$

đặc biệt : $a < b \Rightarrow -b <-a$

$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

Nếu (a và b cùng là số dương)

hay (a và b cùng là số âm)

Thì ta có :

$a < b \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

$\mathbb{R}$ có một số tập hợp con quen thuộc là tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$,tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$, và tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Theo thứ tự "bao hàm trong " thì

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Các số thực không thuộc $\mathbb{Q}$ được gọi là các số vô tỉ .

Ký hiệu các khoảng đoạn và nửa khoảng :

Với a và b là các số thực , ta ký hiệu :

(a ,b) là $\{ x \in \mathbb{R} / a< x <b\}$

$[a,b]$ là $\{x \in \mathbb{R} / a <=x <= b\}$

$[a,b)$ là $\{x \in \mathbb{R} / a <= x < b \}$

$(a ,b]$ là $\{ x \in \mathbb{R} / a < x <=b\}$

(a,∞) là $\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

$[a, \infty)$ là $\{ x \in \mathbb{R} /x >= a\}$

$(-\infty ,b)$ là $\{x \in \mathbb{R} /x < b \}$

$(-\infty\ b]$ là $\{x \in \mathbb{R} /x <= b\}$

$(- \infty , \infty)$ là $\mathbb{R}$

Ghi chú : Người ta còn chứng minh được rằng $\mathbb{R}$ có tính chất đầy đủ . Theo tính chất này thì mọi tập số thực khác rỗng bị chặn trên đều có cặn trên đúng (tức là chặn trên nhỏ nhất). Tương tự , mọi tập số thực khác rỗng bị có chặn dưới đúng.

Ký hiệu "giá trị tuyệt đối":

Giá trị tuyệt đối của một số thực x ,ký hiệu bởi |x|, được định nghĩa như sau :

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có một số tính chất dưới đây:

(1) $|x| \geq 0$ Với mọi $x \in \mathbb{R}$

(2) $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

(3) $\sqrt{x^2} = |x|$

(4) $|-x| = |x|$

(5) $|ab| = |a|.|b|$

(6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(7) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(8) $|x| = a \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \text{hay} \quad x = -a$

(9) $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$

(10) $|x \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$

Lưu ý rằng về mặt hình học , | x | biểu diễn khoảng cách từ điểm x đến điểm 0 trên đường thẳng thực . Tổng quát hơn là :

| x-y | = khoảng cách giữa x và y

2. Hàm số

Định nghĩa:

Một hàm số f từ một tập D vào IR là một quy tắc cho ứng với mỗi x ∈ D là một phần tử duy nhất f (x) ∈ ℝ.

Một hàm số thường được cho dưới dạng công thức như các ví dụ sau:

$$y = x^2$$
$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

Khi hàm số được cho bởi một công thức như hàm số g(x) ở trên thì tập hợp tất cả các x mà g(x) xác định được gọi là miền xác định của hàm số.

Ví dụ: Miền xác định của hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ là tập hợp các số thực x sao cho :

x^2 □4 ≥ 0

⇔ x ≤ -2 hay x ≥ 2

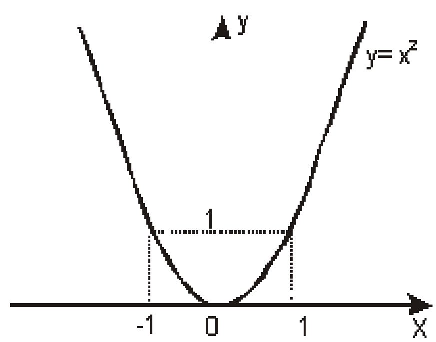
Vậy miền xác định là : (- ∞ , -2] ∪ [2 , ∞)

Đồ thị của hàm số:

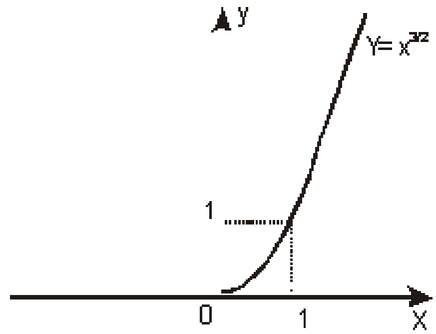
Đồ thị của hàm số f là đường biểu diễn trong mặt phẳng Oxy có phưng trình y=f(x). Nó bao gồm tất cả các điểm (x , f(x)) với x chạy trong miền xác định của hàm số.

Ví dụ :

1) Đồ thị hàm số $y = x^2$



2) Đồ thị hàm số $y = x^{3/2}$



Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số:

Cho f và g là 2 hàm số, và c là một hằng số. Ta định nghĩa các hàm f+g, f□g, f.g, f/g và c.f bởi các công thức sau:

(f + g) (x) = f(x) + g(x)

(f - g) (x) = f(x) - g(x)

(f . g) (x) = f(x) . g(x)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(c.f) (x) =c.f(x)

Hợp nối của các hàm số:

Hợp nối của f(x) và g(x) là 1 hàm số được ký hiệu là gof và được định nghĩa bởi :

(go f) (x) = g(f(x))

Miền xác định của go f là tập hợp các giá trị x sao cho f(x) $\in$ miền xác định của g.

Ví dụ: Hàm số y = $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ có miền xác định là tập hợp tất cả các số thực x sao cho

$$0 \le x^2 - 3x + 2$$

hay x $\notin$ (1, 2). Vậy miền xác định là D = $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

III. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

1 . Hàm tương đương ,VCB ,VCL

Định nghĩa 1:

Cho hai hàm số f(x)và g(x) không triệt tiêu trong một khoảng quanh x_o (có thể loại trừ x_o). Ta nói f(x) tương đương với g(x) khi x -> x_o nếu:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Khi ấy , ta viết :

f(x) ~ g(x) khi x -> xo

Hoặc là : khi x -> x_o , f(x) ~ g(x)

Tính chất : Khi x -> x_o

(i) f(x) ~ g(x)

(ii) f(x) ~ g(x) ⇒ g(x) ~ f(x)

(iii) f(x) ~ g(x) và g(x) ~ h(x) ⇒ f(x) ~ h(x)

<u>Ví dụ :</u> Khi x -> 0, ta có :

sin x ~ x ln(1+x) ~ x

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad (1-x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

tg x ~ x ex -1 ~ x

arcsin x ~ x arctg x ~ x

Định nghĩa 2:

Cho f (x) xác định quanh x_o (có thể loại trừ x_o). Ta nói f (x) là một đại lượng vô cùng bé khi x -> xo viết tắt là VCB , khi $\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$

Trong trường hợp ta có $\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$ (hoặc + ∞ , hoặc - ∞) ta nói f (x) là vô cùng lớn (viết tắt là VCL) khi x -> x_o

<u>Ví dụ:</u>

Khi x -> 0 , ta có x, ln(1+x), 1 cos x là các VCB.

Khi x -> 0^+, ta có ln(x), $\frac{1}{x^2}$ là các VCL

Khi x -> +∞ , ta có x, ln(x), ex là các VCL

Ghi chú : Các khái niệm về hàm tương đương, VCB và VCL cũng được định nghĩa tương tự như hai định nghĩa trên khi xét giới hạn ở vô tận, tức là khi xét x - > ∞ , hoặc x -> +∞ , hoặc x -> -∞ .

2. Bảy dạng vô định.

Giả sử ta xét giới hạn của f(x) và g(x)trong cùng một qúa trình biến đổi của x.Khi đó

1) Ta nói f (x) g (x) có dạng vô định ∞ - ∞ nếu f (x) và g (x) cùng tiến về + ∞ (hoặc là -∞).

2) Ta nói f(x).g (x) có dạng vô định o .∞ nếu:

f (x) là VCB và g (x) là VCL , hoặc là:

f (x) là VCL và g (x) là VCB

3) Ta nói $\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nếu f(x) và g (x) đều là các VCB

4) Ta nói $\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ nếu f(x) và g(x) đều là các VCL

5) Ta nói $f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định 0^0 khi f (x) và g (x) đều là các VCB.

6) Ta nói $f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định ∞^0 nếu f(x) -> + ∞ và g (x) là VCB.

7) Ta nói $f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định 1∞ nếu f(x) -> 1 và g (x) là VCL .

3. Quy tắc thay thế tương đương khi tính giới hạn.

Định lý : Giả sử ta xét giới hạn trong một quá trình biến đổi của x. khi ấy :

f (x) ~ g (x) và g (x) có giới hạn L

⇒ f(x) có giới hạn L. (L hữu hạn hoặc vô hạn)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x).g(x) \sim f_1(x).g_1(x) \ ,$$ và

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

<u>Ví dụ:</u> Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \,.\, \ln(1+x)}{1 - \cos x}$

Khi x -> 0, ta có : x . ln(1+x) ~ x . x = x^2

$$1 - \cos x \ \sim \ \frac{1}{2}x^2$$

=> $$\frac{x \,.\, \ln(1+x)}{1 - \cos x} \sim \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

Vậy: $$\lim_{x \to 0} \frac{x \,.\, \ln(1+x)}{1 - \cos x} = 2$$

4. So sánh các VCB , và các VCL

Định nghĩa: Xét x -> a (a ∈ ℝ , hoặc a là vô tận)

Giả sử u = f (x)và v = g (x) là các VCB . Khi đó:

(i) Ta nói u và v có cùng cấp nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u}{v} = L \in \Re \setminus \{0\}$

(ii) Ta nói u có cấp cao hơn v nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u}{v} = 0$

(iii) Ta nói u có cấp thấp hơn v nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u}{v} = \infty$

<u>Ví dụ :</u> Khi xét x -> 0, ta có 1 − cos x và x^2 là 2 VCB cùng cấp , 1 − cos x là VCB cấp cao hơn ln(1+x)

Định nghĩa: (So sánh VCL)

Giả sử f(x) và g (x) là 2 VCL khi x -> a . Ta nói

(i) f (x) có cùng cấp với g (x) nếu $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L \in \Re\setminus\{0\}$

(ii) f(x) có cấp cao hơn g (x) nếu $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

(iii) f(x) có cấp thấp hơn g(x) nếu $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ví dụ: Khi x -> + ∞ , ta có x và $\sqrt{x^2+1}$ cùng cấp , $x^{3/2}$ có cấp cao hơn $\sqrt[3]{x^3+x+1}$

Định lý: Giả sử f (x) và g(x) là các VCB khi x -> a .Ta có:

(i) Nếu f(x) có cấp nhỏ hơn g(x) thì f(x) ± g(x) ~ f(x) khi x->a

(ii) Nếu f(x) cùng cấp g(x) và f(x) ~ f_1(x), g(x) ~ g_1(x) thì :

f(x) - g(x) ~ f_1(x) - g_1(x)

với điều kiện f(x) và g(x) không tương đương.

Định lý: Giả sử f(x) và g(x) là các VCL khi x -> a. Ta có:

(i) Nếu f(x) có cấp lớn hơn g(x) thì:

f(x) ± g(x) ~ f(x) khi x->a

(ii) Nếu f và g cùng cấp nhưng không tương đương, và: f(x) ~ f_1(x), g(x) ~ g_1(x) thì :

f(x) - g(x) ~ f_1(x) - g_1(x)

Ví dụ: Khi x - > + ∞ , ta có:

$3x^4 + x + 1 \sim 3x^2$

IV. KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH

Như đã biết , ta có thể dùng các quy tắc tính giới hạn trong trường hợp không phải dạng vô định và các quy tắc thay thế tương đương để tính giới hạn . Trong trường hợp gặp các dạng vô định : ∞ - ∞ , 0. ∞ , $\frac{0}{0}$, và $\frac{\infty}{\infty}$ ta có thể phân tích biểu thức để đơn giản hay thực hiện các quy tắc thay thế tương đương , đặc biệt là áp dụng việc thế tương đương cho VCB và VCL được trình bày trong các định lý ở mục II ở trên . Đối với các dạng vô định 0^0 , 1∞ và ∞^0 ta thường dùng công thức biến đổi sau đây :

$$u^v = e^{v\ln u} \quad (u > 0)$$

rồi xét giới hạn của v. lnu

Ngoài ra , đối với các dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$ ta còn có thể áp dụng quy tắc L Hospitale. Quy tắc này sẽ được trình bày trong phần áp dụng của đạo hàm trong chương sau .

Dưới đây chúng ta sẽ xét một số ví dụ minh họa cho các phương pháp khử dạng vô định nêu trên.

Ví dụ 1:

Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2+3x+5}}{5x+1}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2+x^2+3x+5}}{5x+1}$

Khi x -> +∞ , ta có :

$$\frac{\sqrt{2+x^2+3x+5}}{5x-1} \sim \frac{\sqrt{2}.x}{5x} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$=> \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{5x+1} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Khi x -> +∞ , ta có :

$$\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{5x-1} \sim \frac{\sqrt{2}.x}{5x} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

=> $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{5x+1} = \dfrac{-\sqrt{2}}{5}$

Ví dụ 2:

Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sin 3x+\sin^2 x}{\sin 4x+\ln(1+x)-x^2}$

Khi x-> 0 , ta có :

2x + sin 3x ~ 5x

$\sin^2 x \sim x^2$

$\Rightarrow$ 2x + sin 3x + $\sin^2$ x ~ 5x

sin 4x + ln(1+x) ~ 4x + x =5x

$\Rightarrow$ sin 4x + ln(1+x) - x^2 ~ 5x

suy ra : $\dfrac{2x+\sin 3x+\sin^2 x}{\sin 4x+\ln(1+x)-x^2} \sim \dfrac{5x}{5x} = 1$

Vậy: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x+\sin 3x+\sin^2 x}{\sin 4x-\ln(1+x)-x^2} = 1$

Ví dụ 3:

Tìm $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x-1}}{3\sqrt[3]{1+x-1}}$

Khi x -> 0, ta có:

$\sqrt{1+x}-1 = (1+x)^{1/2}-1 \sim \dfrac{1}{2}x$

$\sqrt[3]{1+x}-1 = (1+x)^{1/3}-1 \sim \dfrac{1}{3}x$

=> $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \sim \dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x} = \dfrac{3}{2}$

Vậy: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 4:

Tính giới hạn $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

Ta có dạng vô định 1^∞. Biến đổi:

$$\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^2=e^{x.\ln\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)}$$

Khi $x\to\infty$,ta có:

$$\ln\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\ln\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)\sim\frac{2x-1}{x^2-4x+2}$$

Vì $\dfrac{2x-1}{x^2-4x+2}->0$

$\Rightarrow$ $x.\ln\left(\dfrac{x^2\ 2x+1}{x^2-4x+2}\right)\sim\dfrac{x.(2x-1)}{x^2-4x+2}=\dfrac{2x^2-x}{x^2-4x+2}\sim\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

Suy ra $\lim_{x\to 0}x.\ln\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)=2$

Và $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=e^2$

V. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1 . Định nghĩa

(i) Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa xo. Ta nói f(x) liên tục tại xo nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(ii) Cho f (x) xác định trên với [xo, xo + δ] với s > 0. Ta nói f (x) liên tục bên phải tại xo nếu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(iii) Cho f(x) xác định tên (xo - δ , xo] với s > 0

Ta nói f(x) liên tục bên trái tại xo nếu:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0)$$

Mệnh đề: f liên tục tại x_o <=> f liên tục bên trái và liên tục bên phải tại x_o

Định lý: Cho f(x) và g(x) là các hàm số liên tục tại xo. Khi đó ta có :

(i) f(x) + g(x) và f(x) . g (x) cũng liên tục tại xo

(ii) $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại xo với điều kiện $g(x_0) \neq 0$

(iii) $|f(x)|$ liên tục tại xo.

Định lý: Nếu hàm số f(x) liên tục tại x_o và hàm số g(u) liên tục tại $u_o = f(x_o)$ thì hàm số hợp h (x) =gof(x) liên tục tại x_o.

2.Tính chất của hàm hàm số liên tục trên một đoạn

Định nghĩa: Hàm số f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a,b] nếu:

(i) f(x) liên tục trên khỏang (a,b) ,tức là f (x) liên tục tại mọi xo∈ (a,b)

(ii) f(x) liên tục bên phải tại a.

(iii) f(x) liên tục bên trái tại b.

Liên quan đến hàm số liên tục trên một đoạn , người ta đã chứng minh được định lý sau đây:

Định lý: Cho hàm số f(x) liên tục trên [a,b]. Khi đó ta có:

(i) f có gía trị nhỏ nhất và gía trị lớn nhất trên [a,b]

(ii) Đặt m = min $\{f(x) / x \in [a,b]\}$

M = max $\{f(x) / x \in [a,b]\}$

Ta có f ([a,b]) =[m,M]

(iii) Cho một số thực yo tùy ý thuộc [m,M], ta có xo$\in$ [a,b] sao cho yo=f(xo)

Hệ quả: Nếu f liên tục trên [a,b] và:

f(a) .f(b) <0

Thì phương trình f(x) =0 có nghiệm trong khoảng (a,b).

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Tính các giới hạn sau:

$$(a) \lim_{x \to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$$

$$(b) \lim_{x \to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$$ (a > b)

$$(c) \lim_{x \to 1}\frac{\sqrt[3]{7\quad x^3}\quad \sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

$$(d) \lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

2.Tính giới hạn :

$$(a) \lim_{x \to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x.\sin 2x}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tgx}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cos x}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2, tg\dfrac{\pi}{x}$

3.Tính giới hạn :

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty}x.(\ln(x+a)-\ln x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

4.Xác định a và b sao cho các hàm số sau đây là liên tục trên IR.

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x}\\ a\cos x+b\\ \dfrac{\pi}{x}\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x\\ a\cos^2 x+b\\ \dfrac{tgx-\sin x}{x^3}\end{cases}$

5.Chứng minh rằng phương trình

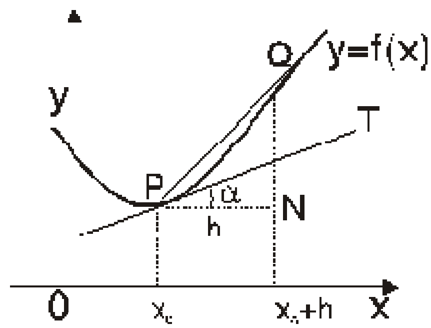
$2x^3 \square 6x+1=0$

Có 3 nghiệm trên đoạn [-2,2]

6.Chứng minh rằng các phương trình sau đây có nghiệm :

$2x^2 \square 5x^3-2x-1=0$

$2^x+3^x=6^x$



Bài 2 Đạo hàm và vi phân của một số biến

I. KHÁI NIỆM VỀ ĐẠO HÀM

1.Định nghĩa:

Cho hàm số f(x) xác định trong một khoảng chứa x_o. Nếu tỉ số $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ có giới hạn $\in$ R khi $x \to x_o$ thì ta nói f có đạo hàm tại x_o và giá trị của giới hạn trên được gọi là đạo hàm của hàm số f tại x_o . Đạo hàm của f tại x_o thường được ký hiệu là: $f'(x_o)$

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Các ký hiệu khác của đạo hàm :

Cho hàm số y = f(x). Ngoài cách ký hiệu đạo hàm là $f'(x)$ ta còn có một số cách ký hiệu khác như sau:

y' Hay y'_x

$\frac{dy}{dx}$

$\frac{df}{dx}$

$\frac{d}{dx}f(x)$

$\dot{y}$

Ý nghĩa hình học của đạo hàm :

$x = x_o+h$

$\overline{PN} = h = x - x_0$

$\overline{NQ} = f(x) - f(x_0)$

PT là tiếp tuyến tại $P(x_0, f(x_0))$

$\dfrac{\overline{NQ}}{\overline{PN}} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong là $tg^{2} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số y = f (x) tại Mo(xo f(x) là:

$y - y_o = f'(x_o) \cdot (x - x_o)$

trong đó $y_o = f(x_o)$

2. Liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

Định lý: nếu f(x) liên tục tại x_o thì f(x) liên tục tại x_o

3. Bảng đạo hàm thông dụng

(1) $C' = 0$ (C là hằng số)

(2) $(x^{\alpha})' = 2.x^{\alpha-1}$

đặc biệt: $(\sqrt[n]{x})' = (x^{1/n})' = \dfrac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

(3) $(\sin x)' = \cos x$

(4) $(\cos x) = -\sin x$

(5) $(tgx)' = 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(6) $(cotgx)' = -(1 + cotg^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(8) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(9) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(10) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(11) $(e^x)' = e^x$

(12) $(a^x)' = a^x.\ln a$

(13) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(14) $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$ $\qquad (0 < a \neq 1)$

II. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1.Đạo hàm của tổng, hiệu, tích , thương

Định lý: Nếu u(x) và v(x) đều có đạo hàm theo biến x thì ta có:

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u.v)' = u'.v + u.v'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2} \qquad (v \neq 0)$

Hệ quả :

$(u_1+u_2+\dots+u_n)' = u_1'+u_2'+\dots+u_n'$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Định lý:

Xét hàm số hợp y = f(u(x)). Giả sử u(x) có đạo hàm tại xo và f(u) có đạo hàm tại uo=u(xo). Khi ấy, hàm số y = f(u(x)) có đạo hàm tại xo và y(xo) = f(uo). u(xo).

Ví dụ:

$$(e^{-x})' = e^{-x}.(-x)' = -e^{-x}$$

$$(\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2}.(1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

3. Đạo hàm của hàm ngược

Định lý:

Nếu hàm số y = y(x) có đạo hàm y(xo) ≠ 0 và nếu có hàm ngược x = x(y) liên tục tại yo=y(xo), thì hàm ngược có đạo hàm tại yo và:

$$x(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$$

4. Đạo hàm của hàm số có dạng y = u(x)$^{v(x)}$ với u(x)>0

Ta có:

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{v(x).\ln u(x)}$$

$$\Rightarrow y' = e^{v\ln u}.(v.\ln u)'$$

$$= u^{v}.(v'.\ln u + v.\frac{1}{u}.u')$$

$$= u^{v}.(v'.\ln u + v.\frac{u'}{u})$$

Ví dụ:

$y = x^x$ (x > 0)

Ta có: $y = e^{(x\ln(x))}$

$$\Rightarrow y' = x^x.(\ln x + x.\frac{1}{x})$$

$= x^x\ .\ (\ln x+1)$

III. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Giả sử f(x) có đạo hàm tại mọi x thuộc một khoảng nào đó. Khi ấy $f'(x)$ là một hàm số xác định trên khoảng đó. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm này gọi là đạo hàm cấp 2 của f(x), ký hiệu là $f''(x)$. Vậy :

$f''(x) = (f'(x))'$

Ta còn ký hiệu đạo hàm cấp 2 là : $\frac{d^2f}{dx^2}$

Tổng quát, đạo hàm của đạo hàm cấp n-1 được gọi là đạo hàm cấp n. Đạo hàm cấp n của f(x) được ký hiệu là $f^{(n)}(x)$ vậy:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Đạo hàm cấp n của f(x) còn được ký hiệu là: $\frac{d^nf}{dx^n}$

Ví dụ : Tính $y^{(n)}$ với y=sinx

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

.

.

.

$$y^{n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (*)$$

Công thức (*) ở trên có thể được chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

IV .VI PHÂN

1.Vi phân cấp 1

Định nghĩa:

Xét hàm số f(x) xác định trên 1 khoảng quanh xo. Ta nói f khả vi tại xo . Khi ta có một hằng số Δ sao cho ứng với mọi số gia Δ x đủ nhỏ của biến x, số gia của hàm là Δf (x_0 + Δx) - f (x_0) có thể viết dưới dạng :

$\Delta f = A.\Delta x + 0(\Delta x)$

Trong đó $0(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$

Biểu thức $A.\Delta x$ được gọi là vi phân của f(x) tại xo ứng với số gia Δx và được ký hiệu là df

Vậy: $df = A.\Delta x$

Định lý: Hàm số f(x) khả vi tại xo khi và chỉ khi f(x) có đạo hàm tại x_o. Khi đó ta có:

$df = f'(x_o) . \Delta x$

Từ định lý trên với f(x) = x ta có $dx = \Delta x$

Do đó biểu thức vi phân của một hàm số y=y(x) sẽ được viết dưới dạng :

$dy = y' dx$

Ghi chú:

Từ định nghĩa của vi phân ở trên và công thức : $dy = y'dx$

Ta có: nếu $y'(x) \neq 0$ thì dy và Δy là 2 VCB tương đương khi $\Delta x \to 0$

Giả sử y = f(x) và x = φ (t). Xét hàm hợp y = f(φ (t)), ta có:

$$\frac{dy}{dt} = y'_x . x'_t$$

Do đó $dy = y'_x . x'_t .dt = y'_x .dx$

Vậy dạng vi phân dy của hàm y = f(x) không thay đổi dù x là biến độc lập hay là hàm khả vi theo biến độc lập khác. Tính chất này được gọi là tính bất biến của biểu thức vi phân.

Từ các qui tắc tính đạo hàm, ta có các qui tắc tính vi phân như sau :

- d(u+v)=du + dv
- d(u.v)=v.du + u.dv
- $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.du \quad udv}{v^2} \qquad (v \neq 0)$

2. Vi phân cấp cao

Giả sử hàm số y=f(x) khả vi trên một khoảng nào đó. Như thế vi phân $dy=y'dx$ là một hàm theo x trên khoảng đó và nếu hàm này khả vi thì vi phân của nó được gọi là vi phân cấp 2 cuả y và được ký hiệu là d^2y.Vậy:

$$d^2y = d(dy)$$

Tổng quát, vi phân cấp n của hàm số y được ký hiệu là dny và được định nghĩa bởi:

$$d^ny = d(d^{n-1}y)$$

Ta có thể kiểm chứng dễ dàng công thức sau:

$$d^ny = y^{(n)}dx^n$$

Ví dụ : Với y= sin x, ta có:

dy= cosx dx

$$d^2y = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})dx^2$$

.

.

.

$$d^ny = \sin(x + n\frac{\pi}{2})dx^n$$

<u>Nhận xét:</u> Công thức vi phân cấp cao:

$$d^ny = y^{(n)}dx^n \quad (n \geq 2)$$

không còn đúng nữa nếu x không phải là biến độc lập

V. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

1. Cực trị địa phương và định lý Fermat

Định nghĩa:

Hàm số f(x) được gọi là đạt cực đại địa phương tại xo nếu có một lân cận quanh điểm xo sao cho với mọi x thuộc lân cận này ta có :

$f(x) \leq f(xo)$

Khái niệm cực tiểu địa phương cũng được định nghĩa tương tự. Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương.

Định lý (Fermat):

Nếu hàm số f(x) đạt cực trị địa phương tại x_o và có đạo hàm tại xo thì $f'(x_o)=0$

<u>Chứng minh:</u>

Giả sử f(x) đạt cực đại địa phương tại x_0 và có đạo hàm tại x_o. Khi đó f(x) xác định trên 1 khoảng ($x_o - \delta$, $x_o + \delta$)với một $\delta > 0$ và trên khoảng này ta có:

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$ Với mọi $|\Delta x| < \delta$

Do đó:

$$f(x_o) - \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$$

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$$

Suy ra $f'(x_0) = 0$

2. Định lý Rolle

Nếu f(x) liên tục trên [a,b], có đạo hàm trong khoảng (a,b) và f(a)=f(b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c)=0$

Chứng minh:

Nếu f(x) là hàm hằng trên [a,b], thì $f'(x) = 0. \forall x \in (a,b)$. Vậy ta có thể giả sử f(x) không hằng trên [a,b]. Vì f(x) liên tục trên đoạn [a,b] nên f([a,b]) = [m,M] với $m \neq M$. Ta có $f(a) \neq m$ hay $f(a) \neq M$. Ta xét trường hợp $m \neq f(a)$. (trường hợp $M \neq f(a)$ thì tương tự). Do $m \neq f(a) = f(b)$ và $m \in f([a,b])$ nên $\exists c \in (a,b)$ sao cho f(c) = m. Ta sẽ chứng minh $f'(c)=0$

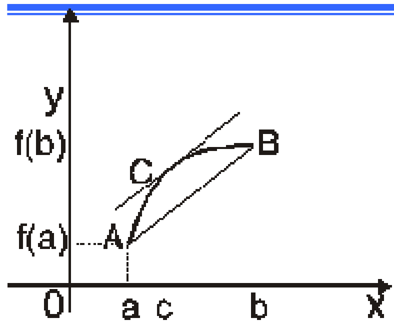
Với h đủ nhỏ để $c+h \in (a,b)$ ta có:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(x)}{h} \ge 0$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(x)}{h} \le 0$$

Vì $f(c+h) - f(c) \ge 0$

Suy ra $f'(c) = 0$



3. Định lý Lagrange

Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a,b] và có đạo hàm trên (a,b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho:

$f(b) - f(a) = f'(c) . (b-a)$.

Chứng minh

Đặt $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, và xét hàm $g(x) = f(x) - f(a) - k.(x-a)$. Ta thấy g(x) liên tục trên [a,b], có đạo hàm trên (a,b) và g(a) =g(b)=0. Do đó,theo định lý Rolle ta có $c \in (a,b)$ sao cho $c \in (a, b)$ sao cho: $g'(c) = 0$

Vì : $g'(x)=f'(x)-k$, nên:

$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - k = 0$

$\Leftrightarrow f'(c) = k$

$f(b)-f(a)=f'(c).(b-a)$

Minh họa hình học:

Giả sử cung AB là đồ thị của hàm số f(x) thoả điều kiện của định lý Lagrange trên [a,b] như hình vẽ. Khi đó trên cung AB phải có ít nhất một điểm C có hoành độ $c \in (a,b)$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại C là song song với đường thẳng AB.

Chú ý: Nếu đặt h = b-a thì đẳng thức trong định lý Lagrange có thể được viết lại như sau:

$f(a + b) - f(a)= h . f'(a+\theta h)$ với $0 < \theta < 1$

4. Định lý Cauchy

Nếu f(x) và g(x) là 2 hàm số liên tục trên [a,b], có đạo hàm trên (a,b) và $g'(x) \neq 0$ tại mọi $x \in (a,b)$, thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Chứng minh:

Đặt k = $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)\quad g(a)}$. Do $g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (a,b)$

Nên theo định lý Rolle ta phải có $g(a) \neq g(b)$. Vậy giá trị k là xác định .

Xét hàm số h(x) = f(x) - k.g(x)

Ta thấy h(x) liên tục trên [a,b], có đạo hàm trên (a,b) cho bởi :

$h'(x)=f'(x) - k.g'(x)$.

Hơn nữa h(a) = h(b) nên theo định lý Rolle ta có $c \in (a,b)$ sao cho $h'(c) = 0$.

Suy ra: $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$

Hay $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

VI. CÔNG THỨC TAYLOR

1.Định lý Taylor

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n+1 trong một khoảng chứa xo và x thì ta có công thức Taylor sau đây :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots\ldots\ldots + $$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} ,$$

trong đó c là một số nằm giữa xo và x

Trong công thức trên ta gọi:

$$R_n^{(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_c)^{n+1}$$

là phần dư Lagrange trong công thức Taylor

Chú ý:

1) Số c trong công thức Taylor còn được viết dưới dạng:

c = xo + θ (x- xo) với 0 < θ < 1

2) Phần dư Rn(x) cũng còn được viết dưới dạng:

$$R_n(x) = 0((x - x_0)^n)$$

tức là VCB cấp cao hơn (x - xo)^n. Dạng này được gọi là phần dư dạng Peano

Công thức Taylor của hàm số f(x) thường được gọi là khai triển Taylor của hàm số f.
Trong trường hợp $x_o = 0$, công thức Taylor có dạng :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(n)$$

Với

$$R_n^{(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad ,0 < \theta < 1$$

Và công thức này được gọi là công thức Maclaurin của hàm số f

2.Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp

Khai triển hàm số : y = e^x

Với mọi k ta có $y^{(k)}(x) = e^x$ và $y^{(k)}(0)=1$

$$e^x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}.x^{n+1}$$

Vậy : với $0 < \theta < 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n)$$

Trong đó 0(x^n) là VCB bậc cao hơn x^n khi x -> 0.

Khai triển hàm y=sin x

Ta có $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k.\frac{\pi}{2})$, nên:

$$y^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{Khi } k \\ (-1)^m & \text{Khi } k = 2m - 1 \end{cases}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + \dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1}$$

Vậy:

Với 0 < θ < 1

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + 0(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + 0(x^{2m})$$

Tương tự , ta có các khai triển Maclausin sau đây:

Khai triển cos x.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cos(\theta x + (m+1)\pi)}{(2m+2)} \cdot x^{2m+2}$$

với 0 < θ < 1

$$\cos = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0(x^{2m+1})$$

Khai triển $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > -1$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots\dots\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + 0(x^n)$$

Khai triển ln(1+x), x > -1

với 0 < θ < 1

Khai triển $\frac{1}{1+x}$ và $\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}.x^{n+1}$$

với $0<\theta<1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + 0(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + ... + x^n + \frac{1}{(1+\theta x)^{n+2}}.x^{n+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + 0(x^n)$$

Khai triển arctg x

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{m-1}.\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + 0(x^{2m})$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Tính đạo hàm của $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$

2. Tính gần đúng $\cos\dfrac{\pi}{18}$ chính xác đến 0,0001

3.Dùng công thức gần đúng:

$\ln(1+x) \cong x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$ để tính ln (1,5) và đánh giá sai số.

4. Tìm giới hạn của các hàm số sau đây khi $x \to 0$:

(a) $y = \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(b) $y = \dfrac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 x}$

(c) $y = \dfrac{1}{\ln(1-x)} - \dfrac{1}{x}$

(d) $y = x^2.e^{1/x^2}$

(e) $y = \operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$

(f) $y = \dfrac{1}{x^3} - \operatorname{cotg} x$

(g) $y = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(h) $y = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

5. Tìm giới hạn của các hàm số sau đây khi $x \to \infty$:

$(a)\ y = \dfrac{\pi - \operatorname{arctg} x}{\ln(1+\frac{1}{2})}$

$(b)\ y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

$(c)\ y = \sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x$

6. Áp dụng định lý Lagrange để chứng minh.

$(a) \arcsin x < \dfrac{x}{1-x^2}$ Với $x \in (0,1)$

$(b) \operatorname{arctg} x > \dfrac{x}{1+x^2}$ Với $x>0$

7. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

$(a)\ \ y = x + 1\dfrac{4}{(1-x)^2}$

$(b)\ \ y = \dfrac{x^3}{x-1}$

$(c)\ \ y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{x+1}$

$(c)\ \ y = \dfrac{\ln x}{x}$

$(e)\ \ y = \dfrac{x\ln x - x}{x+1}$

$(f)\ \ y = (x-1)e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}}$

8. Viết công thức khai triển Taylor của hàm số f(x) tại xo đến cấp n

$(a)\ \ f(x) = \sin x\ , x_0 = \dfrac{\pi}{4}, n = 4$

$(b)\ \ f(x) = \ln x\ \ , x_0 = 1, n = 6$

9. Tìm hiện của các đường cong theo hàm số :

$(a) x = \frac{1}{t}, y = \frac{t}{1+t}$

$(b) x = \frac{2e^t}{t-1}, y = \frac{te^t}{t-1}$

10. Phân tích 8 thành tổng của 2 số dương sao cho tổng lập phương của 2 số đó lớn nhất .

Bài 3 Ứng dụng của đạo hàm

VII .ỨNG DỤNG:TÍNH XẤP XỈ VÀ TÍNH GIỚI HẠN

1.Tính gần đúng (hay tính xấp xỉ) và tính giới hạn

Ta thường dùng khai triển Taylor và khai triển Maclaurin để tính xấp xỉ giá trị của hàm f(x) sau khi chọn n đủ lớn để phần dư Rn(x) có giá trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép.

Ví dụ: Tính số e chính xác đến 0,00001.

Trong công thức khai triển Maclaurin của hàm số e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$ Với $0 < \theta < 1$

ta lấy x=1 và n=8 thì phần dư R_8 thỏa:

$$R_8 < \frac{3}{9!} < 10^{-5}$$

Vậy ta có thể tính e chính xác đến 0,00001 bằng công thức xấp xỉ sau

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + .. + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828$$

Ta còn có thể dùng khai triển Maclaurin để tính giới hạn có dạng vô định như trong ví dụ sau đây :

Ví dụ:

1) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

Ta có: $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 . \sin^2 x}$

Sử dụng khai triển Maclaurin của sinx đến cấp 4, ta có thể viết sinx dưới dạng:

$$\sin x = x - \frac{x^6}{6} + x^4 \varepsilon(x)$$

Với $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Suy ra $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + x^4.\varepsilon(x))^2}{x^2.\sin^2 x}$

$\approx \dfrac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \dfrac{1}{3}$ Khi $x \to 0$

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{3}$

2) Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}$

Áp dụng khai triển Maclaurin của các hàm sinx và cosx ta có :

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + x^4.\varepsilon_1(x)$

$\cos x - 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^5.\varepsilon_2(1)$

trong đó $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1-\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}$

$= \dfrac{1-(1-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5.\varepsilon_2(x)) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3!} + x^4.\varepsilon_1(x))}{x^4}$

$= \dfrac{\frac{1}{8}x^4 + x^5.\varepsilon\ (x)}{x^4} \sim \dfrac{\frac{1}{8}x^4}{x^4} = \dfrac{1}{8}$ Khi $x \to 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4} = \dfrac{1}{3}$

2. Quy tắc L□Hospitale

Nhờ định lý Cauchy, người ta đã chứng minh được các định lý dưới đây mà ta gọi là quy tắc L'Hospitale. Quy tắc này rất thuận lợi để tìm giới hạn của các dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lý: (Quy tắc L'Hospitale 1)

Giả sử f(x) và g(x) có đạo hàm trong khoảng (a,b) và g' ≠ 0 trong khoảng đó. Khi ấy, nếu:

(i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g(x)} = l$

thì $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Định lý vẫn đúng khi thay cho quá trình $x \to a^+$, ta xét quá trình $x \to b^-$ hoặc $x \to c$ với $c \in (a,b)$. Trường hợp a= -∞ , b= + ∞ định lý vẫn đúng.

Định lý: (Quy tắc L'Hospitale 2)

Giả sử f(x) và g(x) có đạo hàm trong (a,b) và g'(x) ≠ 0 trong khoảng đó. Khi ấy nếu :

(i) f(x) và g (x) là các VLC khi $x \to a^+$,và

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (hữu hạn hoặc vô tận)

thì $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Định lý cũng đúng cho các quá trình $x \to b^-$, $x \to c \in (a,b)$ và cho các trường hợp a = - ∞ và b = + ∞

Chú ý:

1) Khi xét $\frac{f'}{g'}$ trong quy tắc l'Hospitale, nếu thấy $\frac{f'}{g'}$ vẫn có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ thì ta lại có thể áp dụng tiếp quy tắc l'Hospitale

2) Quy rắc l'Hospitale chỉ là điều kiện đủ để có giới hạn của $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ không phải là điều kiện cần. Do đó, nếu không tồn tại giới hạn của $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ thì ta chưa có kết luận gì về giới hạn của $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Ví dụ:

1) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

Đặt $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ và g(x) = x - sin x

Xét qúa trình $x \to 0$ ta có:

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ cũng có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

$\dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ cũng có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

$\dfrac{f'''(x)}{g'''(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{\sin x} \longrightarrow 2$

Vậy sau 3 lần áp dụng quy tắc l'Hospitale ta suy ra:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - \sin x)'}{(1 - \cos x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}x = 0$$

3) Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

Giới hạn này có dạng vô định ∞ - ∞ . Ta có thể biến đổi giới hạn về dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ để áp dụng quy tắc l'Hospitale như sau:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1).\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1).\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(\ln x+1-\dfrac{1}{x})'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

4) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

Giới hạn này có dạng vô định 1^∞. Ta biến đổi như sau:

$$(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}.\ln(e^x+x)}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}.\dfrac{1}{x}.\ln(e^x+x)=\lim\limits_{x\to 0}.\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(e^x+x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}.\frac{\dfrac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=2$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}=e^2$

VIII. ỨNG DỤNG :KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Chiều biến thiên và cực trị địa phương

Định lý:

Điều kiện cần và đủ để f(x) hằng trên khoảng (a,b) là $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a,b)$

Định lý:

Giả sử f có đạo hàm trên khoảng (a,b) . Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số tăng trên (a,b) là $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a,b)$. Tương tự , điều kiện cần và đủ để hàm số f(x) giảm trên (a,b) là $f'(x) \leq 0$.

Từ định lý này, để xét sự biến thiên của hàm số f(x) ta tính đạo hàm f'(x)và xét dấu đạo hàm. Việc xét dấu đạo hàm cũng cho ta biết cực trị địa phương của hàm số theo định lý sau đây:

Định lý: (điều kiện đủ để có cực trị địa phương)

Giả sử f(x) liên tục tại xo và có đạo hàm trong một khoảng quanh x_o (có thể trừ điểm x_o). Khi đó ta có:

(i) Nếu khi x vượt qua xo mà $f'(x)$ đổi dấu từ − sang + thì f(x) đạt cực tiểu địa phương tại x_o

(ii) Nếu khi x vượt qua xo mà f'(x) đổi dấu từ + sang − thì f(x) đạt cực đại địa phương tại x_o

(iii) Nếu khi x vượt qua xo mà f'(x) không đổi dấu thì không có cực trị địa phương tại x_o

Ngoài cách khảo sát cực trị địa phương bằng việc xét dấu đạo hàm cấp 1 f'(x), ta còn có thể xét dấu của đạo hàm cấp 2 f''(x) tại điểm x_o, nhờ vào định lý sau :

Định lý : Giả sử f(x) có đạo hàm cấp 2 liên tục $f''(x_o)$ và $f'(x_o)=0$.

Khi đó:

(i) Nếu $f''(x_o) > 0$ thì f(x) đạt cực tiểu địa phương tại x_o

(ii) Nếu $f''(x_o) < 0$ thì f(x) đạt cực đại địa phương tại x_o

Chú ý: Định lý trên có thể được mở rộng và được phát biểu như sau: Giả sử f(x) có đạo hàm cấp n liên tục trên một khoảng chứa xo và giả sử :

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots\ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Khi đó :

(i) Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị (địa phương) tại x_o Hơn nữa nếu $f^{(n)}(x_o) > 0$ thì f(x) đạt cực tiểu tại xo nếu $f^{(n)}(x_o) < 0$ thì f(x) đạt cực đại tại x_o

(ii) Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại x_o

Một vấn đề có liên quan đến cực trị là tìm gía trị nhỏ nhất và gía trị lớn nhất của một hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b]. Để tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của f(x) trên đoạn [a,b] ta chỉ cần so sánh các gía trị của f tại 3 loại điểm :

(1) Các điểm dừng (tức là f' tại đó bằng 0)

(2) Các điểm kỳ dị (tức là f' không tồn tại ở đó)

(3) Hai đầu nút a và b.

Ví dụ:

1) Tìm các khoảng tăng giảm của hàm số và tìm cực trị địa phương:

$$y = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

Ta có:

$$y' = \frac{4}{3}x^{1/3} - 4x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1)$$

$$= \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

y' = 0 tại tại x = 1 và y' không xác định tại x = 0

⇒ Bảng xét dấu của ý như sau:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'	-	‖	-	0	+	
y	$+\infty$	↘		-3	↗	$+\infty$

Vậy hàm số giảm trong khoảng($-\infty$,1) và tăng trong (1,$+\infty$). Hàm số y đạt cực tiểu tại x=1. Với y(1) = -3.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất cuả hàm số.

$L(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{2}{\sin\theta}$ với $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Ta có:

$$L'(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^3\theta - 2\cos^3\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}$$

Nhận xét rằng trên khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$ thì $\sin^2\theta\cos^2\theta > 0$ và $\sin^3\theta - 2\cos^3\theta$ tăng nghiêm ngặt từ −2 lên 1 trong $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Do tính liên tục của $\sin^3\theta - 2\cos^3\theta$ nên có duy nhất $\theta_0 \in (0,\frac{\pi}{2})$ sao cho:

$$\sin^3\theta_0 - 2\cos^3\theta_0 = 0$$

Khi đó ta có bảng xét dấu của L′(θ)như sau:

θ	0		θ_0		$\pi/2$
$L'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$L(\theta)$	$+\infty$	$\searrow$	$L(\theta_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra gía trị nhỏ nhất của L(θ) trên khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$ là:

$$L(\theta_0) = \frac{1}{\cos\theta_0} + \frac{2}{\sin\theta_0} = \sqrt{1+tg^2\theta_0} + \frac{2}{\cos\theta_0.tg\theta_0}$$
$$= \sqrt{1+\sqrt[3]{2^2}} + 2\sqrt{1+\sqrt[3]{2^2}}.\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{4})^2}$$

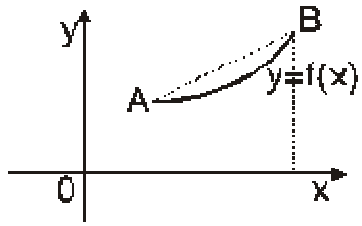
2.Tính lồi, lõm và điểm uốn

Định nghĩa:

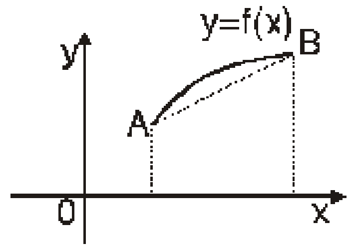
Hàm số f (x) liên tục trên khoảng (a,b) được gọi là lồi trên (a,b) nếu với mọi $x_1, x_2 \in$ (a,b) và mọi $x_1, x_2 \in$ (a,b) và mọi $\alpha \in [0,1]$ ta có:

$$f(\alpha.x_1 + (1-\alpha).x_2) \le \alpha.f(x_1) + (1-\alpha).f(x_2)$$

Hàm số f(x) được gọi là lõm trên (a,b) nếu −f (x) là lồi trên (a,b).



Hàm số f(x) là lồi



Hàm số f(x) là lõm

Về mặt hình học, hàm số f(x) là lồi trên 1 khoảng nghĩa là mọi cung AB của đồ thị hàm số đều nằm dưới dây cung AB.

<u>Lưu ý:</u> Trong một số giáo trình khác, người ta có thể dùng thuật ngữ lồi và lõm theo nghĩa ngược với ở đây.

Định nghĩa điểm uốn:

Điểm phân cách giữa khoảng lồi và khoảng lõm của hàm số y=f(x) được gọi là điểm uốn.

Định lý dưới đây cho ta cách dùng đạo hàm để khảo sát tính lồi, lõm và tìm điểm uốn.

Định lý:

(i) Giả sử f(x) có đạo hàm cấp 2 $f''(x)$ trong khoảng (a,b). Khi đó hàm số f là lồi (tương ứng lõm) trên khoảng (a,b) nếu và chỉ nếu $f''(x) \geq 0$ (tương ứng, $f''(x) \leq 0$) trên (a,b).

(ii) Nếu $f''(x)$ đổi dấu khi x vượt qua xo thì điểm (xo,f(xo)) trên đồ thị của hàm số f(x) là một điểm uốn.

Ví dụ: Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn cho hàm số :

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Miền xác định của hàm số là $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.

Tính đạo hàm :

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Bảng xét dấu của y'':

x	$-\infty$	-1				1	$+\infty$
y''	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
y	lõm		lõm		lồi		lồi

Vậy hàm số y lõm trên các khoảng $(-\infty, -1)$ và $(-1,0)$; lồi trên các khoảng $(0,1)$ và $(1,+\infty)$. Từ đó, đồ thị hàm số có 1 điểm uốn là M(0,0).

3. Sơ đồ khảo sát hàm số

1) Tìm miền xác định của hàm số y =f(x) đồng thời nhận xét về tính chẳn lẻ, tính tuần hoàn cuả hàm số để rút gọn miền khảo sát.

2) Khảo sát sự biến thiên của hàm số và tìm các cực trị địa phương. Tính một số giới hạn quan trọng và lập bảng biến thiên của hàm số.

3) Khảo sát tính lồi lõm và điểm uốn.

4) Tìm các đường tiệm cận.

5) Vẽ đồ thị. Để vẽ được đồ thị chính xác ta cần xác định các điểm cực trị , điểm uốn, giao điểm với các trục toạ độ và có thể xác định cả tiếp tuyến tại các điểm đó.

Chú ý: Cần lưu ý các trường hợp sau đây khi tìm tiện cận .

- Khi $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ hay $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ hay $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$

Thì đường thẳng x = a là tiệm cận đứng

- Khi $\lim_{x\to +\infty} f(x)=b$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=b$ hay $\lim_{x\to \infty} f(x)=b$

Thì đường thẳng y = b là một tiệm cận ngang

- Nếu y = f(x) có dạng f(x) = ax + b + φ x

Với $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x)=0$, $\lim_{x\to -\infty} \varphi(x)=0$ hay $\lim_{x\to \infty} \varphi(x)=0$

Thì đường thẳng y = ax + b là một tiện cận

Trong trường hợp $a \neq 0$, ta nói tiệm cận này là tiệm cận xiên .

Lưu ý rằng các hệ số a,b cuả tiệm cận y = ax + b khi xét $x \to \infty$ ($+\infty$ hay $-\infty$) có thể được tính bởi:

$$a = \lim_{\substack{x \to \infty \\ (+\infty \text{ hay } -\infty)}} f(x)/x$$

$$b = \lim_{\substack{x \to \infty \\ (+\infty \text{ hay } -\infty)}} [f(x) - ax]$$

Ví dụ : Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Miền xác định : $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1,+1\}$. Hàm số y là hàm số lẻ.

Các đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$

$$y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Ta có y′ cùng dấu với $1-x^2$ và:

y′′ cùng dấu với 2x và y′′ triệt tiêu tại x = 0

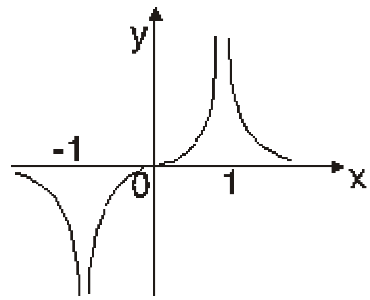
⇒ Bảng biến thiên:

x	-∞		-1		0		1		+∞
y'		-	‖	+		+	‖	-	
y''		-	‖	-	0	+	‖	+	
y	0 ↘	-∞	‖	-∞ ↗	0	↗ +∞	‖	+∞ ↘	0
		lõm		lõm		lồi		lồi	

Tiện cận ngang : y = 0

Tiện cận đứng : x = 1 ; x = -1

⇒ Đồ thị của hàm số như sau :



IX. ĐƯỜNG CONG THEO THAM SỐ VÀ ĐƯỜNG CONG TRONG TOẠ ĐỘ CỰC

1 .Đường cong theo tham số

Phương trình tham số của đường cong trong mặt phẳng Oxy cho bởi hệ 2 hàm:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Trong đó t là tham số chạy trên một tập $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$.

Khi t thay đổi điểm M(x(t),y(t)) vạch nên một đường cong trong mặt phẳng Oxy.

Ví dụ: ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có phương trình tham số là:

9; $\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

Để khảo sát đường cong theo tham số ta cũng tiến hành tiến các bước như đối với hàm số y = f(x).

- Tìm miền xác định , xét tính chẵn lẻ, tính tuần hoàn nếu có.
- Khảo sát sự biến thiên của x và y bằng cách xét dấu các đạo hàm x□(t) và y□(t) theo t.
- Tìm các tiệm cận
- Vẽ đồ thị

2. Đường cong trong tọa độ cực

Tọa độ cực:

Để xác định vị trí của các điểm trong mặt phẳng, ngoài cách dùng tọa độ Descartes(x,y) ta còn có thể dùng tọa độ cực như sau :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots\dots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}$$
$$+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots\dots + \frac{B_k}{(x-\beta)^k}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + $$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots\dots\dots \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + $$
$$+ \frac{R_1x+S_1}{x^2+p'x+q'} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+p'x+q')^2} + \dots\dots\dots \frac{R_lx+S_l}{(x^2+p'x+q')^{l'}}$$

Trong đó các hệ số A_1, □ , Am, B_1,□ ., Bk, M_1, N_1,□ ., Ml, Nl,□ □ , R_1, S_1,□ ..,Rl□,Sl□là các hằng số, và ta có thể tính được các hằng số này bằng phương pháp hệ số bất định, phương pháp trị riêng hay phương pháp phân tích từng bước. (Các phương pháp này sẽ được minh họa qua các ví dụ bên dưới).

Như vậy việc tính tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ được đưa về việc tính 2 loại tích phân sau :

$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ Và:

$$I_2 = \int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n}$$

với $p^2 - 4q < 0$ (Tức là $x^2 + px + q$ không có nghiệm thực).

Để tính I_1 ta chỉ cần đặt u = x □a

Để tính I_2 ta có thể phân tích I_2 dưới dạng:

$$I_2 = \frac{C}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(D - \frac{PC}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

Tích phân $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx$ được tính dễ dàng bằng cách đặt: $u = x^2 + px + q$.

Đối với $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$. Ta biến đổi $x^2 + px + q = (x-b)^2 + c^2$ và đặt u = x □b để đưa về dạng: $\int \frac{du}{(u^2+c^2)^n}$ mà ta đã biết cách tính trong ví dụ 6), Mục II.3.

Ví dụ :

1) Tính $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$

x^5 - x^2 = x^2(x^3 □1) = x^2 (x □1) (x^2 + x + 1)

Do đó: $\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1}$

Nhân 2 vế cho x^5 □x^2 ta được:

$$1 = Ax(x^3 - 1) + B(x^3 - 1) + Cx^2(x^2 + x + 1) + (Dx + E)x^2(x - 1)$$

Thay x = 0, rồi x = 1 vào ta được :1 = -B và 1 = 3c

$\Rightarrow$ B=-1; C = $\frac{1}{3}$

Đồng nhất các hệ số của x^4, x^3, x^2 ở 2 vế của đẳng thức trên (đúng với mọi x) ta được:

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ B + C - D + E = 0 \\ C - E = 0 \end{cases}$$

Thay B= -1 và C= $\frac{1}{3}$ vào, rồi giải hệ này sẽ được:

$A = 0;\qquad D = -\frac{1}{3};\qquad E = \frac{1}{3}$

Vậy:

$$\frac{1}{x^5 - x^3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2 + x + 1)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^5 - x^3} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2 + x +} dx$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x + 1 - 3}{x^2 + x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

Ta có:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{du}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \qquad u = x+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} + C_1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1$$

Suy ra:

$$\int \frac{dx}{x^5-x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{arctg}} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

2) Tính $I = \int \frac{dx}{(x-2)(x^2+1)^2}$

Phân tích phân thức $\frac{1}{(x-2)(x^2+1)^2}$ ta được:

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{-x-2}{25(x^2+1)} + \frac{-x-2}{5(x^2+1)^2}$$

Ta có :

$$\frac{1}{25} \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{1}{25} \ln|x-2| + C_1$$

$$\int \frac{-x-2}{25(x^2+1)} dx = \int \left(-\frac{1}{50} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{50} \ln(x^2+1) - \frac{2}{25} \operatorname{arctg} x + C_2$$

$$\int \frac{-x-2}{5(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{10} \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x}{10(x^2+1)} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Theo công thức truy hồi trong ví dụ 6) mục II,3, ta có

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2-1)}$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\text{artgx} + C_3$$

$$\Rightarrow \int \frac{-x-2}{5(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{10(x^2+1)} - \frac{x}{5(x^2-1)} - \frac{1}{5}\text{artcgx} + C_4$$

Vậy

$$\int \frac{dx}{5(x^2+1)^2} = \frac{1}{25}\ln|x-2| - \frac{1}{50}\ln(x^2+1)$$

$$-\frac{2}{25}\text{arctgx} + \frac{1}{10(x^2+1)} - \frac{x}{5(x^2+1)} - \frac{1}{5}\text{arctgx} + C$$

$$= \frac{1}{50}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - \frac{x}{10(x^2+1)} - \frac{x}{5(x^2+1)} - \frac{7}{25}\text{arctgx} + C$$

3) Tính $I = \int \frac{(2x^2+1)}{x^4+1}dx$

Trước hết ta đổi biến để đơn giản hóa tính phân trên bằng cách đặt u = x2 ,du = 2xdx

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{2u+1}{u^2+1}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u.du}{u^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \frac{1}{2}\text{arctgu} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^4+1) + \frac{1}{2}\text{arctg}(x^2) + C$$

IV. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Xét tích phân I = ∫ R(sinx, cosx)dx, trong đó R(u, v) là hàm hữu tỉ đối với u và v. Để tính tích phân này ta có thể dùng các phương pháp đổi biến sau :

1. Phương pháp chung

Đặt $t = tg\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{1}{2}(1 + tg^2\frac{x}{2})dx$

hay $dx = \dfrac{2dt}{21+t^2}$

Ta có:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\cos x = \frac{2dt}{1+t^2}]$$
$$tgx = \frac{2t}{1-t^2}$$

Suy ra:

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Tích phân này có dạng tích phân của phân thức hữu tỉ đã xét trong mục III.

Ví dụ:

1) Tính: $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

Đặt: $t = tg\dfrac{x}{2} \Rightarrow$ #9; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

Suy ra:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \int \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t}$$
$$= \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

2) Tính: $I = \displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$

Đặt: $t = tg\dfrac{x}{2} \Rightarrow$ 9; $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

Suy ra:

$$I = \int \frac{2 - \dfrac{2t}{1+t^2}}{2 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 4\int \frac{t^2 - t + 1}{(t^2+3)(t^2+1)}dt$$

Phân tích phân thức hữu tỉ ta được:

$$\frac{4(t^2 - t + 1)}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{2t+4}{t^2+3} - \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{2t+4}{t^2+3}dt - \int \frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{t^2+3} + 4\int \frac{dt}{t^2+3} - \int \frac{2t\,dt}{t^2+1}$$

$$= \ln(t^2+3) + \frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{t\sqrt{3}}{3} + C$$

$$= \ln\frac{t^2+3}{t^2+1} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{t\sqrt{3}}{3} + C$$

$$= \ln\left(\frac{\text{tg}^2\frac{x}{2}+3}{\text{tg}^2\frac{x}{2}+1}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}.\text{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

2. Một số trường hợp đặc biệt

(1) Nếu R(-sinx, -cosx) = R(sinx,cosx)
thì đặt u=tgxhoặc u=cotgx

(2) Nếu R(sinx, -cosx) = -R(sinx,cosx)
thì đặt u = sinx.

(3) Nếu R(-sinx, cosx) = -R(sinx,cosx)
thì đặt u = cosx

(4) Tích phân dạng ∫ sinmx cosnx dx với m và n là các số chẵn dương.Ta có thể đổi biến bằng cách dùng công thức :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)1$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Ví dụ :

1) Tính: $I = \int \frac{tgx\,dx}{(\cos x - \sin x).\cos x}$

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{tgx}{1 - tgx} dx$$

Đặt $t = tgx \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Suy ra:

$$I = \int \frac{t}{1-t} dt$$

$$= \int (-1 - \frac{1}{t-1}) dt$$

$$= -t - \ln|t-1| + C$$

$$= -tgx - \ln|tgx - 1| + C$$

2) Tính: $I = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^4 x - 4\sin^2 x + 4}$

Đặt u = sinx $\Rightarrow$ du = cosx dx

Suy ra:

$$I = \int \frac{du}{(1-u^2)^2 - 4u^2 + 4} = \int \frac{du}{u^4 - 6u^2 + 5}$$

$$= \int \frac{du}{(u^2-1)(u^2-5)} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2-5} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2-1}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{5}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}\right| - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sin x - \sqrt{5}}{\sin x + \sqrt{5}}\right| - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C$$

3) Tính: $I = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

Đặt u = cosx $\Rightarrow$ du = -sinx dx.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,.\sin x\,dx \\
&= \int \frac{-(1-u^2)}{2+u}\,du \\
&= \int \left(u-2+\frac{3}{2+u}\right) du \\
&= \frac{u^2}{2} - 2u + 3\ln(2+u) + C \\
&= \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(2+\cos x) + C
\end{aligned}
$$

4) Tính: $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
\sin^4 x.\cos^2 x &= \sin^2 x\,.\,(\sin x \cos x)^2 = \frac{1-\cos x}{2}\,.\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\sin^2 2x - \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x \\
&= \frac{1}{8}\,.\,\frac{1-\cos^4 x}{2} - \frac{1}{8}\sin^2 x \cos 2x
\end{aligned}
$$

Suy ra:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x.\cos^2 x\,dx &= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos^4 x dx - \frac{1}{3}\int \sin^2 2x \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin^4 x - \frac{1}{48}.\sin^3 2x + C
\end{aligned}
$$

Chú ý:

Đối với các tích phân dạng

$$\int \sin ax \cos bx dx,\ \int \sin ax \sin bx dx,\ \int \cos ax \cos bx dx$$

ta dùng các công thức biến đổi tích thành tổng:

$$
\begin{aligned}
\sin u\,.\,\cos v &= \frac{1}{2}\left[\sin(u+v) + \sin(u-v)\right] \\
\sin u\,.\,\sin v &= \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right] \\
\cos u\,.\,\cos v &= \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]
\end{aligned}
$$

V. TÍCH PHÂNHÀM HỮU TỈ ĐỐI VỚI X VÀ $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Xét tích phân $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, trong đó R(u,v) là hàm hữu tỉ đối với u và v và $a^2x + bx + c$ là một tam thức bậc 2 không có nghiệm kép.

1. Phương pháp tổng quát

Tùy theo dấu của hệ số a ta đưa tam thức $a^2x + bx + c$ về dạng tổng hay hiệu hai bình phương . Khi đó tích phân I có một trong ba dạng sau:

(a) $I=\int R(x,\sqrt{(\alpha x+\beta)^2+\partial^2})dx$

Đặt: $\alpha x+\beta=\partial.\mathrm{tgt}$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t=\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha x+\beta}{\partial}$

(b) $I=\int R(x,\sqrt{(\alpha x-\beta)^2-\partial^2})dx$

Đặt: $\alpha x+\beta=\frac{\partial}{\cos t}$, $0\le t\le\pi,\ t\ne\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t=\arccos\frac{\partial}{\alpha x+\beta}$

(c) $I=\int R(x,\sqrt{(\partial^2-\alpha x+\beta)^2})dx$

Đặt: $\alpha x+\beta-\partial.\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t=\arcsin\frac{\alpha x+\beta}{\partial}$

Ví dụ :

1) $I_1=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x}}$

Biến đổi : $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

Xét trường hợp x+1 ≥ 1

Đặt $x+1=\frac{1}{\cos t}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \arccos\frac{1}{x+1}$

Ta có:

$$dx = \frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{x^2+2x} = \frac{\sin t}{\cos t} = tgt$$

Do đó:

$$\int\frac{dt}{\cos^2 t} = \int\left(\frac{1}{\cos t}-1\right)\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int\frac{dt}{\cos^2 t} - \int\frac{dt}{\cos t} = tgt + \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right| + C$$

Mà:

$$tgt = \sqrt{x^2+2x}$$

$$tgt\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right) = \frac{1-tg\frac{1}{2}}{1+tg\frac{1}{2}} = \frac{1-\sin t}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{\cos t} - tgt = x+1-\sqrt{x^2+2x}$$

$\Rightarrow$ $I_1 = \sqrt{x^2+2x} + \ln\left|x+1-\sqrt{x^2+2x}\right| + C$

Trường hợp x + 1 < -1 ; công thức (*) ở trên vẫn đúng vì đạo hàm của hàm số ở vế phải (*) luôn bằng: $\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$

2) $I_2 = \int\frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$

Đặt $x = tg\,t \quad ,-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = arctg\ x$

Ta có dx = (1 + tg^2 t) dt

$$I_2 = \int \frac{(1+tg^2t)\,dt}{tg^2t(tgt + \sqrt{1+tg^2t})} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t(\sin t+1)}$$

Đặt u = sin x ⇒ du = cost dt. Khi đó:

$$I_2 = \int \frac{du}{u^2(u+1)} = \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{u-1}{u^2}\right) du$$
$$= \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du = \ln|u+1| - \ln|u| - \frac{1}{u} + C$$
$$= \ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t}\right| - \frac{1}{\sin t} + C$$

Mà

$$\sin^2 t = \frac{tg^2t}{1+tg^2t} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ sint và tgt cùng dấu với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

2.Tích phân dạng

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Để tính tích phân dạng này ta có thể đặt :

$$x - \alpha = \frac{1}{u}$$

3. Tích phân dạng

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Để tính các tích phân dạng ta biến đổi tam thức $ax^2 + bx + c$ thành tổng hoặc hiệu của hai bình phương rồi đổi biến để đưa về các dạng tích phân đã biết sau đây:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad , \qquad \int \sqrt{x^2 + h}\,dx$$

Ví dụ : Tính các tích phân:

1) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

Biến đổi: $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$

Đặt u = x □2 ⇒ du = dx

Ta có :

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C$$

$$= \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) + C$$

2) $I = \int \sqrt{3 - 4x - 4x^2}\,dx$

Biến đổi: 3 □4x □4x^2 = 4 □(2x+1)^2

Đặt u = 2x + 1 ⇒ du = 2dx

Ta có:

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{4 - u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\sqrt{4 - u^2} + \frac{4}{2}\arcsin\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{x - 2}{4}.\sqrt{3 - 4x - x^2} + \arcsin\frac{x - 2}{2} + C$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Tính các tích phân:

a) $\int \frac{xdx}{x^4-1}$ b) $\int \frac{x^2dx}{(x^3+2)^3}$

c) $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$ d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

2.Tính các tích phân:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ b) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$

c) $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}dx$ d) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

3.Tính tích phân bằng phương pháp tích phân toàn phần:

a) $\int (x^2+1)\ln x\,dx$ b) $\int x^2 \text{arctg} x\,dx$

c) $\int e^x.\sin x\,dx$ d) $\int \frac{x\,\text{arctg}\,x}{(1+x^2)^2}dx$

4.Tính tích phân hàm hữu tỉ.

a) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$ b) $\int \frac{3x^2+x+2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$

c) $\int \frac{1-x^4}{1+x^4}dx$ d) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+4)}$

5. Tính tích phân hàm lượng giác.

a) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$ b) $\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx$

c) $\int \sin^6 x dx$ d) $\int \sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{3}dx$

6. Tính tích phân hàm vô tỉ.

a) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ b) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$

c) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\frac{dx}{x^2}$ d) $\int \frac{dx}{(x+1).\sqrt{x^2+x+1}}$

7. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x+\cos 2x}dx$ b) $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx$

c) $\int \frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$ d) $\int e^{-2x}.\cos 3x dx$

8. Tính tích phân:

a) $\int \frac{\operatorname{tg}x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$ b) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$

c) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$ d) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9. Lập công thức truy hồi và tính tích phân:

a) $I_n = \int (\ln x)^n dx$ và tính I_4

b) $I_n = \int \sin^n x dx$ và tính I_6, I_7

10. Tính tích phân:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ b) $\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx$

c) $\int x(\operatorname{arctg}x)^2 dx$ d) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}.\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Bài 6 Một số dạng tích phân khác

VI. MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN KHÁC

1. Tích phân dạng

$$I = \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\ldots\ldots, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Trong đó R là một hàm hữu tỉ và m,□ ,k là các số nguyên dương; a, b, c, d là các hằng số

Để tính tích phân này ta gọi x là một bội số chung nhỏ nhất của m,□ ,k và đặt:

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ax+b}{cx+d} = u^n$$

Từ đó, tích phân sẽ được chuyển về dạng:

$$I = \int R_1(u)\, du$$

Trong đó R_1 là một hàm hữu tỉ đối với u

Ví dụ: Tính $I = \int \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{dx}{x}$

Đặt $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Ta có: $dx = \frac{-4u\, du}{(1+u^2)^2}$

$\Rightarrow$

$$I = \int u.\frac{1+u^2}{1-u^2}.\frac{(-4u)}{(1+u^2)^2}du$$

$$= \int \frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du = 2\int \frac{du}{1+u^2} + 2\int \frac{du}{u^2-1}$$

$$= 2\text{arctg}\, u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$= 2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C$$

2. Tích phân hàm hữu tỉ đối với e^{ax}

$$I = \int R(e^{ax})dx$$

Trong đó R là một hàm hữu tỉ đối và a ≠ 0

Để tính phân tích này ta đặt : u = eax

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{a}\ln u$$

Khi đó dx = $\frac{1}{a\,.\,u}$ và:

$$I = \int R(u).\frac{1}{au}du$$

Có dạng tích phân hàm hữu tỉ.

Ví dụ: $I = \int \frac{e^x(1-e^x)}{e^{2x}+1}dx$

Đặt: $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$$I = \int \frac{1-u}{u^2+1}du = \int \left(-\frac{1}{2}.\frac{2u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du + \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \text{arctg}\, u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \text{arctg}(e^x) + C$$

3.Các tích phân có dạng:

$\int P(x).\sin axdx$, $\int P(x).\cos axdx$, $\int P(x)e^{ax}dx$

Trong đó p(x) là một đa thức theo biến x.

Để tính các tích phân này ta dùng phương pháp tích phân toàn phần bằng cách đặt :

u = p(x)

Ví dụ:

$I = \int x.\sin xdx$

Đặt:

$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra

$$I = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

4.Các tích phân có dạng :

$\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}\,xdx$,

$\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\mathrm{arc}\cot gxdx$

Để tính các tích phân này ta dùng phương pháp tích phân toàn phần bằng cách đặt:

dv= p (x) dx

Ví dụ: Tính ∫ xarctgxdx

Đặt u = arctgx $du = \frac{1}{1+x^2}dx$

du= xdx , $v = \frac{x^2}{2}$

Suy ra $\int x\mathrm{arctg}\,dx = \frac{x^2}{2}.\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

Ta có

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= x - \text{arctg}\, x + C$$

Vậy:

$$\int x\,\text{arctg}\, x\,dx = \frac{1}{2}x.\text{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctg}x + C$$

VII. MỘT SỐ TÍCH PHÂN KHÔNG BIỂU DIỄN ĐƯỢC DƯỚI DẠNG HÀM SƠ CẤP

Nếu hàm số f(x) liên tục trên (a,b) thì f (x) luôn luôn có nguyên hàm trên khoảng đó , tức là tích phân ∫ f(x) dv tồn tại . Tuy nhiên có một số tích phân không thể biểu diễn dưới dạng hàm sơ cấp , chẳng hạn các tích phân như sau đây:

$$\int e^{-x^2}dx \quad , \int \frac{e^x}{x}dx \quad , \int \frac{dx}{\ln x}$$
$$\int \sin(x^2)dx \quad , \int \cos(x^2)dx \quad , \int \frac{\sin x}{x}dx$$
$$\int \frac{\cos x}{x}dx \quad , \int \sqrt{1-a^2\sin^2 x}\,dx \quad (a \neq 0 \qquad a \neq 1$$

Bài 7 Tích phân xác định

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT

1.Định nghĩa

Cho hàm f(x) trên đoạn [a.b]. Chia đoạn [a.b] một cách tùy ý thành n đoạn nhỏ bởi các điểm a = xo < x_1 < … < xn = b. Đặt Δ xi = xi − xi_{-1} và trên

[xi_{-1}, xi] lấy một điểm ti tùy ý, i = 1, 2 , … , n. Lập tổng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

Và gọi Sn là tổng tích phân của hàm f(x) trên đoạn [a,b] . Nếu Sn có giới hạn hữu hạn I khi n → ∞ sao cho max{ Δ xi } → 0 và I không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a,b] và cách chọn các ti, thì I được gọi là tích phân xác định của f(x) trên đoạn [a,b] và được ký hiệu là:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Vậy:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Khi đó ta nói f(x) là khả tích trên [a,b]; [a,b] là khoảng lấy tích phân, a là cận dưới, b là cận trên , f là hàm dưới dấu tích phân và x là biến tích phân.

Chú ý :

(i) $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến tích phân, tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

(ii) Trường hợp a > b , ta định nghĩa :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(iii) Trường hợp a = b, định nghĩa

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

(iv) Từ định nghĩa, ta thấy ngay hàm f(x) bị chặn trên [a,b] nếu f(x) khả tích trên [a,b].

Ý nghĩa hình học:

Nếu $f(x) \geq 0$ trên [a,b] và f(x) khả tích trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi các đường :

x = a; x = b; y = f(x) và trục hoành y=0.

$$s = \int_a^b f(x)dx$$

2.Các tính chất

(1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$

(3) Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (a,b)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)cx$$

Hệ quả: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(4) Với $c \in [a,b]$ ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(5) Giả sử f(x) khả tích trên [-a, a]. Khi đó:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

nếu f(x) là hàm số chẵn

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$ nếu f (x) là hàm số lẻ

3.Tổng Darboux & điều kiện khả tích

Do hàm khả tích thì bị chặn nên ta chỉ xét các hàm bị chặn trên [a, b]. Mỗi phép chia nhỏ đoạn [a,b] bởi các điểm a = xo < x_1 < □ □ < xn được gọi là một phân hoạch của[a,b] , ký hiệu P = { xo, x_1□ □ . xn }. Đặt:

$$M_i = \sup|f(x) / x \in [x_{i-1}]\,|$$

(cận trên đúng cuả f(x) trên [xi_{-1}, xi])

$$m_i = \inf|f(x) / x \in [x_{i-1} x_i]\,|$$

(cận dưới đúng cuả f(x) trên [xi_{-1}, xi])

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i . \Delta x_i$$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i . \Delta x_i$$

Ta gọi U(f,P) và L(f,P) là các tổng (Darboux) trên và dưới của f ứng với phân hoạch P. Người ta đã chứng minh được một điều kiện khả tích được phát biểu trong định lý sau đây :

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để f khả tích là:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[U(f,p) - L(f,p)\right] = 0$$

Từ định lý này ta có thể chứng minh một số lớp hàm khả tích được phát biểu trong các định lý dưới đây.

Định lý 2: Hàm f(x) liên tục trên [a,b] thì khả tích trên [a,b].

Định nghĩa:

Nếu hàm số f(x) xác định tại x_o và không liên tục tại x_o nhưng có giới hạn 2 phía tại x_o thì ta nói x_o là điểm gián đoạn loại 1 tại x_o.

Định lý 3:

Nếu f chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trên [a,b] thì f khả tích trên [a,b].

Định lý 4: Hàm bị chặn và đơn điệu trên [a,b] thì khả tích trên [a,b].

II- LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ NGUYÊN HÀM

1.Tích phân xác định như hàm của cận trên

Cho f là một hàm khả tích trên [a ,b]với x ∈ [a , b],

$$f(x)=\int_a^x f(t)ct$$

Xác định và là một hàm số theo biến x. Hàm số này đã được chứng minh là có những tính chất phát biểu trong mệnh đề sau đây:

Mệnh đề:

(i) Nếu f khả tích trên [a,b] thì F(x)= $f(x)=\int_a^x f(t)dt$ là hàm liên tục trên [a,b].

(ii) Nếu f(t) liên tục tại $t = x_o \in (a,b)$, thì F(x) có đạo hàm tại x_o và $F'(x_o)=f(x_o)$.

Nhận xét :

Nếu f liên tục trên [a,b] thì hàm số $f(x)=\int_a^x f(t)dt$ là nguyên hàm của f trên [a,b].

2.Định lý cơ bản

Định lý : Giả sử f liên tục trên [a,b]. Khi đó :

(i) $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của f(x) trên [a,b].

(ii) Nếu G(x) là một nguyên hàm bất kỳ của f(x) trên [a,b] thì:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$$

(Công thức này được gọi là công thức Newton-Leibnitz)

<u>**Chứng minh:**</u> Ta chỉ cần chứng minh phần (ii).

Do F(x) và G(x) là các nguyên hàm của f(x) trên [a,b] nên ta có hằng số C sao cho F(x) = G(x) + C, ∀ x ∈ [a,b]. Cho x = a ta được 0 = G(a) + C, suy ra:

G(a) = - C

Vậy F(b) = G(b) - G(a), tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Hiệu số G(b) - G(a) trong công thức Newton-Leibnitz của định lý trên thường được viết dưới các ký hiệu sau:

$[G(x)]_{x=a}^{x=b}$, hay vắn tắt là $[G(x)]_a^b$

$G(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ hay vắn tắt là $G(x)\Big|_a^b$

Ví dụ:Tính tích phân xác định :

1) $I_1 = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$

$$\int \frac{cx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{4-(\ln x)^2}} = \arcsin\left(\frac{\ln c}{2}\right) + c$$

$$I_1 = \left[\arcsin\left(\tfrac{\ln x}{2}\right)\right]_1^e = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

2) $I_2 = \int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

□ ⇒□ $I_2 = \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_3^4 = \ln\frac{2}{3} - .n\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$

3) $I_3 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$I_3 = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1.Tính các tích phân :

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x.\cos^2 x dx$

b) $\int\limits_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+4x}}$

c) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$

d) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

2/ Tính các tích phân :

a) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$ c) $\int\limits_{-1}^1 \text{arctg} x dx$

b) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$ d) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx$

3. Tính tích phân suy rộng:

a) $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x dx$ c) $\int\limits_0^1 x\ln^2 x dx$

b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$ d) $\int\limits_{-2}^2 \frac{xdx}{x^2-1}$

4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y=x^2-5$, $y=3-x^2$

b) $y=\frac{2}{x}$, $y=2x, x=4$

c) $y=x^3$, $y=x, y=2x$

d) $y=e^{-x}\sin x$, $y=0, x=0, x=\pi$

5. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi:

a) $y = \cos^2 x, y = 0, x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}$ quay quanh Ox

b) $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = 2$ quay quanh Ox

c) $x = y.e^y, x = 0, y = 0, y = 1$ quay quanh Oy

6. Một hình cầu bán kính R và một nón tròn xoay có bán kính đáy r và đường cao h > R sao cho đỉnh nón trùng với tâm cầu. Tìm thể tích phần giao của hai hình.

7. Tính độ dài đường cong:

a) $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$ từ $x = 1$ đến $x = 4$

b) $y = \ln(1 - x^2)$ từ $x = -\dfrac{1}{2}$ đến $x = \dfrac{1}{2}$

c) $x^2 = t^2 \sin t, y = t^2 \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

d) $r = e^{a\varphi}, \quad -\pi \le \varphi \le \pi$

8. tính diện tích mặt tròn xoay:

a) $y = x\sqrt{x}, 0 \le x \le 1,$ quay quanh Oy

b) $y = \sin x, 0 \le x \le \pi,$ quay quanh Ox

Bài 8 Phương pháp tính tích phân xác định

III- ĐỔI BIẾN VÀ TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN ĐỐI VỚI TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Tương tự như đối với tích phân bất định, trong tích phân xác định ta cũng có thể đổi biến hoặc dùng phương pháp tích phân từng phần.

1.Phương pháp đổi biến

Dạng 1:

Đặt x = φ (t) thỏa các điều kiện:

a) φ (t) và φ '(t) liên tục trên [α , β]

b) φ (α) =a và φ (β) = b

c) Khi t biến thiên trong [α , β] thì x biến thiên trong [a.,b]

Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$$

Dạng 2:

Giả sử hàm u = u(x) khả vi liên tục trên [a,b] và hàm số g liên tục trên miền giá trị của u. Khi đó:

$$\int_a^b g(u(x)).u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$$

Ví dụ:

1) Tính: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$

Đặt u = sinx ta có du = cosx dx và:

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\operatorname{arctg} u]_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}$$

2) $I = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

Đặt $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx$

$$\Rightarrow I = -\int_1^{1/2} e^u du = \int_{1/2}^{1} e^u du$$
$$= [e^u]_{1/2}^{1} = e - e^{1/2} = e - \sqrt{e}$$

3) $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $x = \sin t \quad ,0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \cos t dt$

Ta có $\sin 0 = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1$ và khi $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Thì $0 \le x \le 1$. Vậy:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t.\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt$$
$$= \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

4) Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \forall n \in N$$

Đặt $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$

Ta có du = - du

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = -\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} \cos^n(\frac{\pi}{2} - u)du$$
$$= -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n u du = \int_0^{\pi/2} \sin^n u du = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử các hàm số u = u(x) và v = v(x) có các đạo hàm theo biến x: u′= u′(x) và v′= v′(x) có các đạo hàm theo biến x: u′= u′(x) và v′= v′(x) liên tục trên [a,b]. Khi đó ta có công thức tích phân từng phần sau đây:

$$\int_a^b u.v'dx = [u.v]_a^b - \int_a^b v.u'dx$$

Trong đó :

$$[uv]_a^b = u(b).v(b) - u(a).v(a)$$

Ví dụ: Tính tích phân xác định:

1) $I_1 = \int_0^{\pi} x.\sin x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\sin x \end{cases}$

Suy ra:

$$I_1 = [-x.\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx$$
$$= \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

2) $I_2 = \int_0^{\pi/2} e^x.\cos x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra:

$$I_2 = [e^x.\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$$
$$= e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^2.\sin x dx$$

Để tính: $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx,$ ta lại đặt:

$$\begin{cases} u = e^x \\ v' = \sin x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Suy ra:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = [-e^x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$$
$$= 1 + I_2$$

Vậy:

$$I_2 = e^{\pi/2} - (1 + I_2)$$
$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

3) $I_3 = \int_1^e 32x^3 (\ln x)^2 dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 16x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = 4x^4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \left[8x^4 (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 8x^4 . \frac{2\ln x}{x} dx$$
$$= 8e^4 - \int_1^e 16x^3 . \ln x dx$$

Để tính $\int_1^e 16x^3 . \ln x dx$ ta lại đặt:

$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ v' - 32x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v - 8x^4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \int_1^e 16x^3 enxdx = [4x^4 . enx]_1^e - \int_1^e 4x^4 . \frac{1}{x} dx$$
$$= 4e^4 - \int_1^e 4x^3 dx = 4e^4 - [x^4]_1^e$$
$$= 4e^4 - (e^4 - 1) = 3e^4 + 1$$

Vậy:

$$I_3 = 8e^4 - (3e^4 + 1)$$
$$= 5e^4 - 1$$

Bài 9 Tích phân suy rộng

IV. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

1. Tích phân suy rộng có cận vô tận

Định nghĩa:

a) Giả sử f(x) xác định trên [a,+∞] và khả tích trên[a,b] với mọi b ∈ [a,∞]. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ là hữu hạn hoặc vô cùng thì giới hạn này được gọi là tích phân suy rộng của f(x) trên [a,∞] ký hiệu là $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Vậy:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Khi tích phân suy rộng là hữu hạn thì ta nói là tích phân suy rộng hội tụ, ngược lại, nếu tích phân suy rộng không tồn tại hoặc là vô cùng thì ta nói tích phân suy rộng là phân kỳ.

b) Hoàn toàn tương tự, đối với các hàm số f(x) xác định trên (-∞ ,a] và khả tích trên [c,a] với mọi c∈ (-∞ ,a] ta định nghĩa tích phân suy rộng của f(x) trên (-∞ ,a] bởi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx$$

c) Đối với hàm số f(x) xác định trên (-∞ ,+∞) ta định nghĩa tích phân suy rộng bởi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

và tích phân này hội tụ khi các tích phân suy rộng: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là hội tụ.

Ví dụ:

1)Tính $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}$

$= \lim_{b\to+\infty}[\mathrm{arctg}x]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \mathrm{arctg}b = \frac{\pi}{2}$

2) Tính $\int_0^{+\infty} xe^x dx$

Cho b ∈ [o+∞), ta tính $\int_0^b xe^x dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần. Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$$

Suy ra:

$$\int_0^b xe^x dx = [xe^x]_0^b - \int_0^b e^x dx$$
$$= be^b - (e^b - e^0) = be^b - e^b + 1$$
$$= (b-1)e^b + 1$$

Vậy $\int_0^{+\infty} xe^x dx = \lim_{b\to+\infty} [(b-1)e^b + 1] = +\infty$

Do đó tích phân suy rộng là phân kỳ

3) Tính $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

Ta có:

$$\int_b^0 ex^x dx = [xe^x]_b^0 - \int_b^0 e^x dx$$
$$= -be^b - (1 - e^b) = (1-b)e^b - 1$$

Suy ra

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 xe^x dx = \lim_{b\to-\infty} [(1-b)e^b - 1]$$

mà $\lim_{b\to-\infty} (1-b)e^b = \lim_{b\to-\infty} \frac{1-b}{e^{-b}} = \lim_{b\to-\infty} \frac{-1}{e^{-b}} = 0$

(áp dụng quy tắc l' hospitale)

Vậy: $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = -1$

4) Xét sự hội tụ của phân tích suy rộng:

$I = \int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}, a > 0, \alpha > 0$

Tích phân này được tính theo 3 trường hợp của α như sau:

- $\alpha = 1$

$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{a}^{b} = \ln b - \ln a \to +\infty$ khi $b \to +\infty$

Vậy $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x} - +\infty$ là phân kỳ

- $\alpha > 1$

$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left[\frac{1}{1-\alpha}.x^{1-\alpha}\right]_{a}^{b} = \frac{1}{\alpha - 1}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})$

do $\lim_{b \to +\infty} b^{1-\alpha} = 0$

nên $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Vậy tích phân $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ hội tụ với $\alpha > 1$

- $\alpha < 1$

Trong trường hợp này ta có $\lim_{b \to +\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$

Suy ra tích phân $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ là phân kỳ

2.Tích phân của hàm số không bị chặn

Định nghĩa:

Giả sử f(x) khả tích trên [a.c], $\forall$ c $\in$ [a,b] và không bị chặn tại b (nghĩa là $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$). Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn hay vô cùng)

$\lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$

thì giới hạn này sẽ được gọi là tích phân suy rộng của f(x) trên [a,b], ký hiệu là:

$\int_a^b f(x)dx$

Nếu giới hạn là hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, nếu giới hạn không tồn tại hoặc là vô cùng thì ta nói tích phân suy rộng này là phân kỳ.

Vậy:

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$

Hoàn toàn tương tự, nếu hàm số f(x) khả tích trên [c,b] với mọi c ∈ (a,b] và f không bị chặn tại a thì ta định nghĩa tích phân suy rộng của f(x) trên [a.b] bởi:

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$

Trường hợp f(x) không bị chặn tại một điểm c ∈ (a,b), ta định nghĩa tích phân suy rộng của f trên [a,b] bởi:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Khi đó tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ được xem là hội tụ .Khi cả hai tích phân $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ đều hội tụ .

Ví dụ: Khảo sát tính hội tụ của các tích phân suy rộng sau và tính giá trị tương ứng trong trường hợp tích phân hội tụ

1) $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Ta có: $I_1 = \lim\limits_{a \to 0^+} \int_a^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Đặt: $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, và:

$$\int_a^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int_{\sqrt{a}}^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{1 \quad u^2}} = 2[\arcsin u]_{\sqrt{a}}^{1/\sqrt{2}}$$

$$= 2(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin \sqrt{a})$$

$$= 2(\frac{\pi}{4} - \arcsin \sqrt{a})$$

Suy ra: $I_1 = \lim_{a \to 0^+} 2(\frac{\pi}{4} - \arcsin\sqrt{a}) = \frac{\pi}{2}$

2) $I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Ta có: $I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$

Xét tích phân suy rộng: $J_1 = \int_0^1 \frac{cx}{(x-1)^2}$

Ta có: $J_1 = \lim_{b \to 1^-} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^b$

$$= \lim_{b \to 1^-} \left(-\frac{1}{b-1} - 1\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ J_1 Phân kỳ và do đó I_2 cũng phân kỳ.

3) $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

Ta có $I_3 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to -1^+} \int_c^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to -1^+} [\arcsin x]_c^0$$

$$= \lim_{c \to -1^+} (-\arcsin c) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to 1^-} \arcsin c = \frac{\pi}{2}$$

Vậy I_3 hội tụ và $_{-3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

4) $I_4 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ b > a và α là tham số .

Với α = 1, ta có: $I_4 = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{c \to b^-} \int_a^c \frac{dx}{b-x}$

$$I_4 = \lim_{c \to b^-} [-\ln|b-x|]_a^c$$
$$= \lim_{c \to b^-} (-\ln(b-c) + \ln(b-a))$$
$$\Rightarrow \; = +\infty$$

Vậy tích phân I_4 phân kỳ khi α =1

Với α ≠ 1, ta có:

$$I_4 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c \to b^-} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

$$= \lim_{c \to b^-} \left[\frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}} \right]_a^c$$
$$- \frac{1}{\alpha-1} \lim_{c \to b^-} \left(\frac{1}{(b-c)^{\alpha-1}} \right)$$

Suy ra:

+ Nếu α < 1 thì tích phân I_4 hội tụ và

$$I_4 = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

+ Nếu α > 1 thì tích phân I_4 phân kỳ . Vì $I_4 = +\infty$

3.Một số tiêu chuẩn hội tụ

Trong phần này ta sẽ phát biểu một số tiêu chuẩn hội tụ của tích suy rộng

Định lý 1:

(i) Cho f(x) ≥ 0 trên [a,+ ∞). Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi có M > 0 sao cho:

$\int_a^b f(x)dx \le M, \forall b \in [a,+\infty)$

(ii) Cho f(x) ≥ 0 trên [a,b] và $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Khi đó tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi có M > 0 sao cho:

$\int_a^c f(x)dx \le M, \forall c \in [a,b)$

Định lý 2:

Giả sử f(x) và g(x) không âm và khả tích trên [a,b] với mọi b ∈ [a,+∞) và f(x) ≤ g(x) với x đủ lớn. Khi đó:

(i) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

(ii) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

Định lý 3:

Giả sử f(x) và g(x) không âm và khả tích trên [a,b] với mọi b ∈ [a, +∞) và:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

(i) Nếu l = 0 ta có $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ ⇒ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, và:

Phân kỳ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ⇒ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

(ii) Nếu l = + ∞ ta có:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ ⇒ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ ,và

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ ⇒ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

(iii) Nếu l ∈ (0 ,+ ∞) ta có hai tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

Định lý 4:

Cho f(x) và g(x) không âm và khả tích trên [a,c] với mọi c $\in$ [a,b) . Giả sử f (x) $\leq$ g(x) ở một lân cận trái của b . Khi đó ta có:

(i) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

(ii) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

Định lý 5:

Giả sử f(x) và g(x) không âm và khả tích trên [a,c] với mọi c$\in$ [a,b), và:

(i) Nếu l= 0 ta có: $\lim\limits_{x->b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

$\int_a^b g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ hôi tụ

$\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

(ii) Nếu l=+ ∞ ta có:

$\int_a^b f(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ

$\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

(iii) Nếu l $\in$ (0, +∞) Thì hai tích phân suy rộng $\int_a^b g(x)dx$ và $\int_a^b f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ

Ví dụ:

1) Xét sự hội tụ của $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}{1+x}dx$

Với x > 1 ta có:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}{1+x} > \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}{x+x} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

Vì 2/3 < 1 nên $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2/3}}$ phân ky ø

Suy ra: $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{1+x} dx$ cũng là phân kỳ

2) Xét sự hội tụ của $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1-x^2} dx$

Khi x → + ∞ ta có:

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1+x^2} = \frac{x^{1/2} + x^{1/3}}{1+x^2} \sim \frac{x^{1/2}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ hội tụ $(\text{do } \frac{3}{2} > 1)$

Vậy $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx$ cũng hội tụ

3) Xét sự hội tụ của $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$

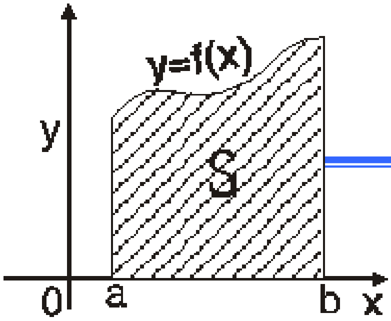
Khi x → 0, ta có:

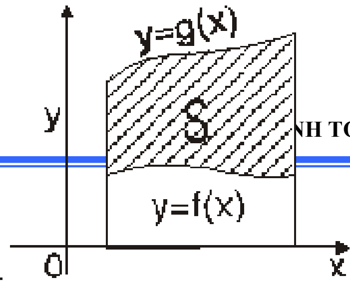
$$\ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{x^{1/2}}{x} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

mà $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên tích phân suy rộng I cũng hội tụ





V. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Tính diện tích

Diện tích hình thang cũng giới hạn bởi các đường

$y = 0$, $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$

được tính bởi công thức: $S = \int_a^b f(x)dx$

Hình thang cong giới hạn bởi các đường :

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ với $f(x) \leq g(x)$ trên $[a, b]$

có diện tích được tính bởi công thức :

$$s = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

1) $y = -x^2$ và $y = -x - 2$

Hoành độ giao điểm của 2 đường $y = -x^2$ và $y = -x - 2$ là nghiệm cuả phương trình.

$-x^2 = -x - 2 \Leftrightarrow x = -1$, $x = 2$.

Trên $[-1,2]$ ta có $-x - 2 \leq -x^2$ nên diện tích cần tính là :

$$s = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\text{dvdt}$$

2) $y = \frac{x^2}{4a}$ và $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ $(a > 0)$

Hai đường cong cắt nhau tại A(-2a, a) và B(2a, a).

Hơn nữa ta có $\frac{x^2}{4a} \le \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ trên [-2a,2a].

Suy ra:

$$s = \int_{-2a}^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2} - \frac{x^2}{4a} \right) dx$$
$$= 2a^2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right) dvdt$$

2.Tính thể tích

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường :

y = f(x),

trục Ox

x = a, x = b

quay xung quanh trục Ox được cho bởi công thức :

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Tương tự, thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường :

x = g(y), trục Oy

y = c, y = d

quay xung quanh trục Oy được cho bởi công thức :

$$v = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

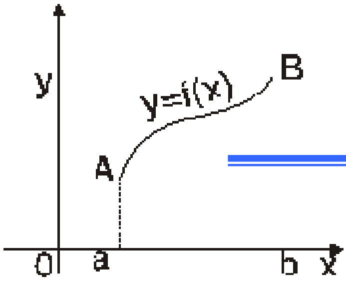
Ví dụ: Tính thể tích khối tròn xoay

1) Cho miền phẳng giới hạn bởi các đường :

$y = \sin^2 x$, trục Ox , x= 0 , $x = \frac{\pi}{4}$

quay xung quanh trục Ox.

Ta có :



$$v = \pi \int_0^{\pi/4} \sin^4 x dx = \pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{3\pi}{8} - 1\right)$$ đ.v.t.t

2) Do miền phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = x - 4$ và $x = 0$ quay quanh Oy.

Ta có tọa độ giao điểm của đường cong $y^2 = x$ □4 với trục Oy là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 4 - x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Suy ra :

$$v = \pi \int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8y^2 + y^4) dy$$

$$= \pi\left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{512}{15}\pi$$

3.Tính độ dài cung

Độ dài cung AB của đường cong y=f(x) với A(a,f(a)), B(b,f(b)) và a<b được tính theo công thức :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Ví dụ:

Tính độ dài cung của đường cong $2y = x^2 - 2$ giữa hai giao điểm của đường cong với trục hoành.

Đường cong cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-\sqrt{2},0)$ và $B(\sqrt{2},0)$. Suy ra độ dài cung AB của đường cong là:

$$L = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{2} \sqrt{1 + x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

Lưu ý:

(1) Nếu đường cong cho bởi phương trình :

$x = g(y)$ với $c \le y \le d$

thì độ dài của đường cong là: $l = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2}\,dy$

(2) Trường hợp đường cong có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{với} \quad t_o \le t \le t_1$$

thì độ dài của đường cong được tính bởi:

$$l = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

(3) Trường hợp đường cong trong tọa độ cực có phương trình

$r = r(\varphi)$,$\alpha \le \varphi \le \beta$

thì ta có :

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} (\alpha \le \varphi \le \beta)$$

Do đó độ dài đường cong là:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\,d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$$

$$s = 2\pi\int_{-a}^{a}\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx$$

$$+ 2\pi\int_{-a}^{a}\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx$$

$$= 4\pi ab\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2 \quad x^2}} = 4\pi ab[\arcsin\frac{x}{a}]_{-a}^{a}$$

$$= 4\pi^2 ab$$

4.Diện tích mặt tròn xoay

Cho đường cong y=f(x) , $a \le x \le b$ khi đường cong này quay quang trục Ox trong không gian sẽ tạo ra một mặt tròn xoay. Diện tích của mặt tròn xoay này được tính theo công thức.

$$s = 2\pi\int_a^b |f(x)|.\sqrt{1+f'(x)^2}cx$$

Ví dụ: Tính diện tích của vòng xuyến sinh bởi đường tròn :

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2 (a < b)$$

quay quanh trục Ox.

Diện tích S của vòng xuyến bằng tổng hai diện tích của hai mặt tròn xoay sinh bởi nửa đường tròn trên có phương trình

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

và nửa đường tròn dưới có phương trình $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$

Khi chúng quay quanh trục Ox. Với cả 2 phương trình trên

ta có : $y'^2 = \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$

do đó:

Lưu ý :

Khi đường cong được cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad \text{với} \quad t_0 \le t \le t_1 \end{cases}$$

thì diện tích mặt tròn xoay sinh ra bởi đường cong quay quanh Ox được tính bởi :

$$s = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |y(t)|.\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Nếu đường cong quay quanh Oy thì diện tích mặt tròn xoay là:

$$s = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|.\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Bài 11 Chuỗi số và tiêu chuẩn hội tụ

I. KHÁI NIỆM CHUỖI SỐ

1.Định nghĩa:

Cho dãy số thực { un} với n = 1, 2, 3, … . Biểu thức tổng vô hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

được gọi là một *chuỗi số*, và un được gọi là số hạng tổng quát (thứ n) của chuỗi số. Tổng số

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

được gọi là *tổng riêng* thứ n của chuỗi số. Nếu dãy các tổng riêng { Sn} có giới hạn là một số thực S khi n → ∞ thì chuỗi số được gọi là *hội tụ* và S được gọi là tổng của chuỗi; trong trường hợp này ta viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

Ngược lại, nếu dãy { Sn} không hội tụ thì chuỗi số được gọi là *phân kỳ*.

Ví dụ: Xét chuỗi hình học có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{(n-1)}$$

trong đó a là số khác 0.

Ta có:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a\,q^{(i-1)} = \frac{a\,(1-q^n)}{1-q}$$ khi q ≠ 1.

Nếu |q| < 1 thì $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

Ta có chuỗi hội tụ và có tổng là $\frac{a}{1-q}$.

Nếu |q| > 1 thì $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$. Suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$.

Ta có chuỗi phân kỳ.

Trong trường hợp |q| = 1, ta dễ thấy rằng chuỗi phân kỳ.

Kết luận: chuỗi hình học hội tụ khi và chỉ khi |q| < 1. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{\infty} a\, q^{(i-1)} = \frac{a}{1-q}$$

2. Các tính chất của chuỗi số:

Trong mục này sẽ phát biểu một số tính chất của chuỗi số. Các tính chất này có thể kiểm chứng dễ dàng từ định nghĩa của chuỗi số.

Định lý:

Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số sẽ không đổi khi ta bỏ đi một số hữu hạn số hạng đầu của chuỗi số.

Hệ quả:

Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số sẽ không đổi nếu ta bỏ đi hay thêm vào một số hữu hạn số hạng ở những vị trí bất kỳ.

Định lý:

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng bằng S thì vớc ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a\, u_n$ cũng hội tụ và

$\sum_{n=1}^{\infty} a\, u_n$ = a S.

Định lý:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là các chuỗi số hội tụ thì các chuỗi tổng và chuỗi hiệu sau đây

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$$ và $$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$$

cũng là các chuỗi hội tụ. Hơn nữa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\right)$$

và

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\right)$$

3.Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (*)$$

hội tụ là với mọi ε > 0 bất kỳ, tồn tại số N (phụ thuộc ε) sao cho với mọi n tùy ý lớn hơn N điều kiện sau đâu được thỏa mãn:

| $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$ | < ε , với mọi p = 0, 1, 2, …

Từ định lý trên ta suy ra định lý về điều kiện cần cho sự hội tụ của một chuỗi số sau đây.

Định lý:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ nếu { u_n} không tiến về 0 khi n→ ∞ .

Ví dụ:

Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=1$ khác 0.

Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kỳ vì $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ không tồn tại.

II.CHUỖI SỐ DƯƠNG

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu tất cả các số hạng của chuỗi số đều là số dương. Trường hợp tất cả các số hạng đều là số không âm thì chuỗi số được gọi là chuỗi số không âm. Lưu ý rằng khi xét tính hội tụ hay phân kỳ cũng như tính tổng của chuỗi số không âm ta có thể loại bỏ ra các số hạng bằng 0, nên chuỗi số không âm cũng thường được gọi là chuỗi số dương.

Nhận xét rằng dãy các tổng riêng { Sn} của chuỗi số dương là dãy tăng nên chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy { Sn} bị chặn trên.

1.Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý:

Giả sử hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa điều kiện un ≤ vn với n khá lớn (nghĩa là ứng với mọi n lớn hơn một số n_0 nào đó). Khi đó

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Nhận xét:

Hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ.

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$$

Với mọi n = 1, 2, 3, □ ta có:

$$0 < \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Vì chuỗi hình học có số hạng tổng quát $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh được phát biểu trong định lý trên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$ hội tụ.

Hệ quả:

- Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = L$ với L là một số thực dương thì các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

- Nếu $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ thì từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sẽ kéo theo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, và từ sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sẽ kéo theo sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n-1}^{\infty} v_n$.

- Nếu $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ thì từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sẽ kéo theo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, và từ sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sẽ kéo theo sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n-1}^{\infty} u_n$.

Ghi chú:

Trong trường hợp $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ta nói un tương đương với vn (khi n $\to \infty$) và viết là un ~ vn . Vậy: nếu un ~ vn thì các chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Để áp dụng các tiêu chuẩn so sánh ta phải ghi nhớ tính chất hội tụ hay phân kỳ của một số chuỗi thường gặp, chẳng hạn chuỗi hình học. Ở đây ta công nhận kết quả sau đây về sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (α là tham số):

Chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Kết quả này có thể được chứng minh bằng cách áp dụng tiêu chuẩn tích phân Cauchy sẽ được trình bày sau. Ứng với trường hợp $\alpha = 1$ ta có chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Ví dụ:

1) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Ta có: $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ và π là một hằng số khác 0 nên chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ cũng phân kỳ.

2) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n - n}\right)$$

Khi n $\to \infty$, ta có $\frac{1}{2^n - n} \to 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{2^n - n}\right) \sim \frac{1}{2^n - n} \sim \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Vì chuỗi hình học có số hạng tổng quát $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n - n}\right)$ cũng hội tụ.

3) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$\sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Khi $n \to \infty$, ta có $\frac{1}{n} \to 0$.

$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

Vì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ cũng phân kỳ.

2. Tiêu chuẩn d'Alembert.

Định lý: (Tiêu chuẩn d'Alembert) Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Đặt $D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ta có:

Nếu có một số $q < 1$ và có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall\, n > n_0$, $D_n \le q$

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall\, n > n_0$, $D_n \ge 1$

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Từ định lý trên ta rút ra hệ quả sau đây, cũng được gọi là tiêu chuẩn hội tụ d'Alembert:

Hệ quả: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.

(i) Nếu $\lambda < 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

(ii) Nếu $\lambda > 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Lưu ý:

Trong trường hợp $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (*) thì ta chưa kết luận được một cách chính xác chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ hay phân kỳ. Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương phân kỳ thỏa mãn điều kiện (*), và chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương hội tụ thỏa mãn điều kiện (*).

Các khẳng định (i) và (ii) trong hệ quả trên cũng đúng cho chuỗi bất kỳ với giả thiết rằng

$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lambda$.

Ví dụ:

1) Xét chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ với x là một số thực cho trước. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số.

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Nhận xét rằng với x = 0 thì các số hạng đều bằng 0 nên chuỗi hội tụ. Xét trường hợp x ≠ 0, ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

Vậy chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ với mọi x.

2) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{n^n}{n!}$. Ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)} n!}{(n+1)!\, n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

và $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$

Suy ra chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ phân kỳ.

3. Tiêu chuẩn căn thức Cauchy.

Định lý: (Tiêu chuẩn căn thức Cauchy) Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Đặt Cn = $\sqrt[n]{u_n}$.

Nếu có một số q < 1 và có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall\ n > n_0$, $Cn \leq q$

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall\ n > n_0$, $Cn \geq 1$

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Từ định lý trên ta rút ra hệ quả sau đây, cũng được gọi là tiêu chuẩn căn thức Cauchy:

Hệ quả: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.

Nếu $\lambda < 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $\lambda > 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Lưu ý:

Trong trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ (*) thì ta chưa kết luận được một cách chính xác chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ hay phân kỳ. Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương phân kỳ thỏa mãn điều kiện (*), và chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương hội tụ thỏa mãn điều kiện (*).

Các khẳng định (i) và (ii) trong hệ quả trên cũng đúng cho chuỗi bất kỳ với giả thiết rằng

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$.

Ví dụ:

Xét chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ với x là một số thực cho trước. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số.

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{x^n}{n^n}$. Ta có:

$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$

Từ tiêu chuẩn Cauchy ta suy ra chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ hội tụ với mọi x.

Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$$

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$. Ta có:

$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2$ khi $n \to \infty$

Suy ra chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$ phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

4. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy.

Định lý: (tiêu chuẩn tích phân Cauchy)

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có dạng $\sum_{i=1}^{\infty} f(n)$, nghĩa là $u_n = f(n)$ với mọi n; trong đó f là một hàm số liên tục, không âm và giảm trên [1, +∞) thì ta có:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ ⇔ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

Ví dụ:

1) Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa mở rộng $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Trước hết ta thấy rằng nếu α ≤ 0 thì $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ (≥ 1) không hội tụ về 0 nên chuỗi phân kỳ. Xét trường hợp α > 0. Dễ thấy rằng các tiêu chuẩn d'Alembert và tiêu chuẩn căn thức Cauchy đều không cho ta kết luận được về tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số.

Hàm số f(x) = $\frac{1}{x^{\alpha}}$ thỏa các điều kiện giả thiết trong tiêu chuẩn tích phân Cauchy. Do tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ hội tụ khi và chỉ khi α > 1 nên chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi và chỉ khi α >1. Tóm lại ta có:

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ ⇔ α > 1.

2) Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$. Ta có:

$u_n = f(n)$, với $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

Hàm số f(x) thỏa các điệu kiện của tiêu chuẩn tích phân Cauchy. Xét tích phân

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)}\, dx$$

Đổi biến: u = ln(x), thì được

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)}\, dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u}\, du = +\infty$$

Vậy chuỗi $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ phân kỳ.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Dùng định nghĩa để khảo sát sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của chuỗi số:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n+2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(n+1)}}{3^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$

2. Khảo sát dự hội tụ của các chuỗi số.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{3^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n+3}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

3. Sử dụng tiêu chuẩn căn thức Cauchy khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n^2)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n2^n}\right)^{(n^2)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{arctg^n n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right)^n$

4. Sử dụng tiêu chuẩn d'Alembert khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+3}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}$

5. Sử dụng tiêu chuẩn tích phân Cauchy khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{tg}(n)\,(n^2+1)}$

6. Các chuỗi sau đây hội tụ hay phân kỳ:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln^2 n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\ln^4(n+1)}$

7. Chứng minh rằng nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\ 2}$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ tuyệt đối.

8. Các chuỗi số sau đây hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ hay phân kỳ?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{(n+1)\ln(n+1)}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$

9. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{(2n)}}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{(-nx)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n}{2n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n}$

10. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau đây:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n\,x)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{(2n)}}{(n+1)\ln(n+1)}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{(n^2)}}{n^n}$

11. Cho hàm số y = f(x) = $x + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\,(n-1)} \right)$.

a) Tìm miền xác định của f(x).

b) Chứng minh rằng hàm số y = f(x) nghiệm đúng phương trình

(1-x) y□= 1 + x □y

12. Khai triển Maclaurin các hàm sau:

a) y = x^2ex

b) y = $\sin^2 x$

Bài 12 Chuỗi số và tiêu chuẩn hội tụ (tt)

II.CHUỖI SỐ DƯƠNG

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu tất cả các số hạng của chuỗi số đều là số dương. Trường hợp tất cả các số hạng đều là số không âm thì chuỗi số được gọi là chuỗi số không âm. Lưu ý rằng khi xét tính hội tụ hay phân kỳ cũng như tính tổng của chuỗi số không âm ta có thể loại bỏ ra các số hạng bằng 0, nên chuỗi số không âm cũng thường được gọi là chuỗi số dương.

Nhận xét rằng dãy các tổng riêng { Sn} của chuỗi số dương là dãy tăng nên chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy { Sn} bị chặn trên.

1.Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý:

Giả sử hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa điều kiện un ≤ vn với n khá lớn (nghĩa là ứng với mọi n lớn hơn một số n_0 nào đó). Khi đó

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Nhận xét:

Hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ.

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$$

Với mọi n = 1, 2, 3, □ ta có:

$$0 < \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Vì chuỗi hình học có số hạng tổng quát $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh được phát biểu trong định lý trên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$ hội tụ.

Hệ quả:

- Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} - L$ với L là một số thực dương thì các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

- Nếu $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ thì từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sẽ kéo theo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, và từ sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sẽ kéo theo sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

- Nếu $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ thì từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sẽ kéo theo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, và từ sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sẽ kéo theo sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ghi chú:

Trong trường hợp $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ta nói un tương đương với vn (khi n → ∞) và viết là un ~ vn . Vậy: nếu un ~ vn thì các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Để áp dụng các tiêu chuẩn so sánh ta phải ghi nhớ tính chất hội tụ hay phân kỳ của một số chuỗi thường gặp, chẳng hạn chuỗi hình học. Ở đây ta công nhận kết quả sau đây về sự hội tụ của chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (α là tham số):

Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ ⇔ α > 1.

Kết quả này có thể được chứng minh bằng cách áp dụng tiêu chuẩn tích phân Cauchy sẽ được trình bày sau. Ứng với trường hợp α = 1 ta có chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Ví dụ:

1) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Ta có: $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$. Mà chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ và π là một hằng số khác 0 nên chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ cũng phân kỳ.

2) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n - n}\right)$$

Khi n → ∞ , ta có $\frac{1}{2^n - n} \to 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{2^n - n}\right) \sim \frac{1}{2^n - n} \sim \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Vì chuỗi hình học có số hạng tổng quát $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n - n}\right)$ cũng hội tụ.

3) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$\sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Khi n $\to \infty$, ta có $\frac{1}{n} \to 0$.

$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

Vì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ cũng phân kỳ.

2. Tiêu chuẩn d'Alembert.

Định lý: (Tiêu chuẩn d'Alembert) Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Đặt $D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ta có:

- Nếu có một số q < 1 và có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall$ n > n_0, Dn $\le$ q

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

- Nếu có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall$ n > n_0, Dn $\ge$ 1

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Từ định lý trên ta rút ra hệ quả sau đây, cũng được gọi là tiêu chuẩn hội tụ d'Alembert:

Hệ quả: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.

(i) Nếu $\lambda < 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

(ii) Nếu $\lambda > 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Lưu ý:

Trong trường hợp $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (*) thì ta chưa kết luận được một cách chính xác chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ hay phân kỳ. Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương phân kỳ thỏa mãn điều kiện (*), và chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương hội tụ thỏa mãn điều kiện (*).

Các khẳng định (i) và (ii) trong hệ quả trên cũng đúng cho chuỗi bất kỳ với giả thiết rằng

$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lambda$.

Ví dụ:

1) Xét chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ với x là một số thực cho trước. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số.

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Nhận xét rằng với x = 0 thì các số hạng đều bằng 0 nên chuỗi hội tụ. Xét trường hợp x ≠ 0, ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1}$$ = 0.

Vậy chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ với mọi x.

2) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{n^n}{n!}$. Ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)} n!}{(n+1)!\, n^n}$$

= $$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

và $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ > 1.

Suy ra chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ phân kỳ.

3. Tiêu chuẩn căn thức Cauchy.

Định lý: (Tiêu chuẩn căn thức Cauchy) Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Đặt Cn = $\sqrt[n]{u_n}$.

Nếu có một số q < 1 và có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall\ n > n_0$, $Cn \le q$

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu có một số tự nhiên n_0 sao cho

$\forall\ n > n_0$, $Cn \ge 1$

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Từ định lý trên ta rút ra hệ quả sau đây, cũng được gọi là tiêu chuẩn căn thức Cauchy:

Hệ quả: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.

Nếu $\lambda < 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $\lambda > 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Lưu ý:

Trong trường hợp $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ (*) thì ta chưa kết luận được một cách chính xác chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ hay phân kỳ. Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương phân kỳ thỏa mãn điều kiện (*), và chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là một ví dụ cho trường hợp chuỗi số dương hội tụ thỏa mãn điều kiện (*).

Các khẳng định (i) và (ii) trong hệ quả trên cũng đúng cho chuỗi bất kỳ với giả thiết rằng

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda .$$

Ví dụ:

Xét chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ với x là một số thực cho trước. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số.

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{x^n}{n^n}$. Ta có:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Từ tiêu chuẩn Cauchy ta suy ra chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ hội tụ với mọi x.

Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$$

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$. Ta có:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2 \text{ khi } n \to \infty$$

Suy ra chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$ phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

4. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy.

Định lý: (tiêu chuẩn tích phân Cauchy)

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có dạng $\sum_{i=1}^{\infty} f(n)$, nghĩa là $u_n = f(n)$ với mọi n; trong đó f là một hàm số liên tục, không âm và giảm trên [1, +∞) thì ta có:

$\sum_{n-1}^{\infty} u_n$ hội tụ ⇔ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

Ví dụ:

1) Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa mở rộng $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Trước hết ta thấy rằng nếu α ≤ 0 thì $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ (≥ 1) không hội tụ về 0 nên chuỗi phân kỳ. Xét trường hợp α > 0. Dễ thấy rằng các tiêu chuẩn d□Alembert và tiêu chuẩn căn thức Cauchy đều không cho ta kết luận được về tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số.

Hàm số f(x) = $\frac{1}{x^{\alpha}}$ thỏa các điều kiện giả thiết trong tiêu chuẩn tích phân Cauchy. Do tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ hội tụ khi và chỉ khi α > 1 nên chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi và chỉ khi α >1. Tóm lại ta có:

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ ⇔ α > 1.

2) Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{i-2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

Số hạng thứ n của chuỗi số là $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$. Ta có:

$u_n = f(n)$, với $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

Hàm số f(x) thỏa các điệu kiện của tiêu chuẩn tích phân Cauchy. Xét tích phân

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)}\, dx$$

Đổi biến: u = ln(x), thì được

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)}\, dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u}\, du = +\infty$$

Vậy chuỗi $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ phân kỳ.

Bài 13 Chuỗi tổng quát, chuỗi hàm

III. CHUỖI TỔNG QUÁT

1. Chuỗi đan dấu

Cho dãy { a_n} các số dương, chuỗi số có số hạng tổng quát $u_n = (-1)^{n}a_n$ hay $u_n = (-1)^{n+1}a_n$ được gọi là chuỗi đan dấu. Liên quan đến chuỗi đan dấu ta có tiêu chuẩn hội tụ leinitz như sau:

Định lý: (tiêu chuẩn Leibnits)

Nếu chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} a_n$ thỏa mãn 2 điều kiện:

Dãy { a_n} là dãy dương giảm, và

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$;

thì chuỗi hội tụ. Hơn nữa tổng S của chuỗi thỏa $0 < S \le u_1$.

Chú thích:

Chuỗi thỏa điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz trong định lý trên được gọi là chuỗi Leibnitz. Nếu dùng tổng

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

để xấp xĩ tổng của chuỗi Leibnitz thì phần dư thứ n của chuỗi là Rn thỏa:

$| R_n | \le | u_{n+1} |$

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Chuỗi số là chuỗi đan dấu có số hạng thứ n là $u_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n a_n$, với $a_n = \frac{1}{n}$ là dãy số dương giảm và hội tụ về 0. Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi Leibnitz nên chuỗi hội tụ.

2. Hội tụ tuyệt đối

Định nghĩa:

Chuỗi số (có dấu bất kỳ) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *bán hội tụ* nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

Ghi chú: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không dẫn tới sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Ví dụ:

1) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz nhưng chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là bán hội tụ.

2) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 2}{n^3 + \sqrt{n}}$ có số hạng tổng quát $u_n = \frac{(-1)^n n + 2}{n^3 + \sqrt{n}}$.

Ta có:

$$|u_n| = \frac{|(-1)^n n + 2|}{n^3 + \sqrt{n}} \sim \frac{n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$$

và chuỗi điều hòa mở rộng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ. Suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n+2}{n^3+\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối.

Định lý:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Dưới đây là một số tính chất đã được chứng minh liên quan đến các chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Định lý: (Riemann)

Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ. Khi đó với mọi số S hữu hạn hoặc là S = ± ∞ , tồn tại một cách thay đổi vị trí của các số hạng của chuỗi để được một chuỗi mới có tổng là S.

Định lý:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối thì khi thay đổi vị trí các số hạng của chuỗi một cách tùy ý ta vẫn được một chuỗi mới hội tụ tuyệt đối và có cúng tổng với chuỗi ban đầu.

Định lý: (Cauchy)

Nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng lần lượt là S và T thì chuỗi gồm mọi số hạng $u_i v_j$ (i = 1, 2, □ , n; j = 1, 2, □ , n) theo một thứ tự bất kỳ luôn hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng ST.

IV. CHUỖI HÀM

1. Định nghĩa

Cho dãy hàm số $f_n(x)$ với n = 1, 2, … cùng xác định trên một tập E các số thực. Khi đó với mỗi x ∈ E ta có chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Khi xét x biến thiên trong E, ta gọi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ là một *chuỗi hàm*. Điểm x_0 ∈ E mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ được gọi là *điểm hội tụ*; ta cũng nói chuỗi hàm hội tụ tại x_0. Tập tất cả các điểm hội tụ được gọi là *miền hội tụ* của chuỗi hàm. Gọi D là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta có:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

là các hàm số của x xác định trên D. Sn(x) được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm, S(x) là tổng của chuỗi hàm và Rn(x) là phần dư thứ n của chuỗi hàm. Tổng S(x) có thể biểu diễn dưới dạng

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

Với mọi x ∈ D ta có $S(x) = \lim_{x \to \infty} S_n(x)$, nên $\lim_{x \to \infty} R_n(x) = 0$, nghĩa là phần dư của chuỗi hàm hội tụ đến 0 khi n → +∞ .

Ví dụ:

1) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(x)}}$$

Đã biết rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi và chỉ khi α > 1. Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(x)}}$ hội tụ khi và chỉ khi ln(x) > 1, hay x > e. Suy ra miền hội tụ của chuỗi hàm là D = (e, +∞).

2) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} n\, e^{(n\,x)}$$

Với mỗi x, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} n\, e^{(n\,x)}$ (*) có số hạng tổng quát $u_n = (-1)^{(n-1)} n\, e^{(n\,x)}$, với

λ = $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$

= $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, e^{((n+1)\,x)}}{n\, e^{(n\,x)}}$ = ex.

Theo tiêu chuẩn hội tụ d'Alembert ta có:

- λ < 1 ⇔ x < 0 : chuỗi (*) hội tụ.
- λ > 1 ⇔ x > 0 : chuỗi (*) phân kỳ.
- λ = 1 ⇔ x = 0 : chuỗi (*) có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ là chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} n\, e^{(n\,x)}$ là D = (-∞ , 0).

3) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$$

Với mỗi x, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$ (*) có có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n^n}{(1+x^2)^n}$, với

$\lambda = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{1+x^2} = +\infty$.

Theo tiêu chuẩn căn Cauchy ta có chuỗi phân kỳ (với mọi x). Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là tập hợp rỗng.

2. Hội tụ đều

Định nghĩa:

Xét x biến thiên trong một tập X nào đó nằm trong miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Gọi S(x) là tổng của chuỗi hàm và Sn(x) là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm. Nếu với mọi ε > 0, tồn tại n_0(ε) sao cho

$$\forall\ n \geq n_0(\varepsilon),\forall\ x \in X,\ |\ Sn(x) - S(x)\ | < \varepsilon$$

thì ta nói chuỗi hàm *hội tụ đều* tới hàm S(x) trên tập X, hoặc dãy hàm Sn(x) hội tụ đều tới hàm S(x) trên tập X. Điều này cũng có nghĩa là dãy các phần dư Rn(x) = S(x) - Sn(x) hội tụ đều tới 0 trên X.

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn về sự hội tụ cũng như hội tụ đều của chuỗi hàm.

Định lý: (tiêu chuẩn Weierstrass)

Nếu $|f_n(x)| \leq u_n$ ứng với mọi n lớn hơn một n_0 nào đó và với mọi x ∈ X và chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối trên X.

Ví dụ:

1) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2}$$

Ta có:

$$\left|\frac{\sin(nx)}{1+n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

ứng với mọi x $\in$ **R** và do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ , nên chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2}$ hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối trên toàn trục số theo tiêu chuẩn Weierstrass.

2) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+x^2}$$

Do $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \ge n_0$ thì

$$\ln(n) \le \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Suy ra với mọi $n \ge n_0$ và với mọi số thực x ta có:

$$\frac{\ln(n)}{n^2+x^2} \le \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n^2+x^2} \le \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{(3/2)}}$$

mà chuỗi số điều hòa (mở rộng) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(3/2)}}$ hội tụ. Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+x^2}$ hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối trên toàn trục số.

3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Trong mục nầy sẽ phát biểu một số định lý về tính chất của các chuỗi hàm hội tụ đều.

Định lý: (Tính liên tục của hàm tổng)

Nếu mọi hàm $f_n(x)$ liên tục trên X và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều đến hàm S(x) trên X, thì S(x) cũng liên tục trên X.

Định lý: (tích phân từng số hạng)

Nếu mọi hàm $f_n(x)$ liên tục trên [a, b] và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều đến hàm S(x) trên [a, b], thì

$$\int_a^b S(x)\,dx \equiv \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Định lý: (đạo hàm từng số hạng)

Giả sử ta có các điều kiện sau đây:

- Các hàm $f_n(x)$ có đạo hàm liên tục trong khoảng (a, b);
- Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đến S(x) trong (a, b);
- Chuỗi các đạo hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ hội tụ đều trong (a, b).

Khi đó S(x) có đạo hàm trong khoảng (a, b) và

$$S'(x) \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

Bài 14 Chuỗi lũy thừa

V.CHUỖI LŨY THỪA

1.Định nghĩa

Ta gọi chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ . \ . \ .$$

là *chuỗi lũy thừa*. Các hằng số $a_0, a_1, a_2, \ . \ . \ .$ được gọi là các *hệ số* của chuỗi lũy thừa, hệ số a_n được gọi là hệ số tổng quát của chuỗi. Ta gọi $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ là số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa.

Nếu thực hiện phép đổi biến $X = x - x_0$ thì chuỗi lũy thừa trên trở thành chuỗi có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Do đó trong các mục tiếp theo dưới đây ta chỉ chuỗi lũy thừa có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (*).$$

Ví dụ:

1) Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

có hệ số tổng quát là $a_n = \frac{1}{n+1}$.

2) Chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}(x+2)^n}{n\,2^n}$$

có hệ số tổng quát là $a_n = \frac{(-1)^{(n-1)}}{n2^n}$. Bằng cách đổi biến X = x+2, chuỗi lũy thừa được chuyển về dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)} X^n}{n2^n}.$$

2. Bán kính hội tụ và miền hội tụ

Một trong những vấn đề được xem xét đối với chuỗi lũy thừa là tìm miền hội tụ. Cho chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (*).$$

Trước hết có thể thấy rằng chuỗi (*) hội tụ tại x = 0. Định lý sau đây là một trong những kết quả quan trọng liên quan đến vấn đề tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Định lý: (Abel)

Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì chuỗi cũng hội tụ tuyệt đối tại mọi x $\in (|x_0|, -|x_0|)$.

Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_1 thì chuỗi cũng phân kỳ tại mọi x $\notin [|x_1|, -|x_1|]$.

Chứng minh:

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$, nghĩa là chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ. Khi đó

$$\lim_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$$

$\Rightarrow$ có số dương M sao cho $|a_n x_0^n| \leq$ M với mọi số tự nhiên n.

Cho một số thực x ∈ $(|x_0|, -|x_0|)$. Ta có:

$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M q^n$

với 0 ≠ $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ < 1.

Chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ do q < 1, nên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối.

Tóm lại ta có chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối trên $(|x_0|, -|x_0|)$. Phần (i) của định lý được chứng minh.

Bây giờ giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_1, nghĩa là chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ phân kỳ. Nếu có số thực x ∉ $[\ |x_1|, |x_1|]$ mà chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ thì theo phần chứng minh ở trên ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ hội tụ (mâu thuẩn). Vậy chuỗi phân kỳ tại mọi x ∉ $[-|x_1|, |x_1|]$. Phần (ii) của định lý được chứng minh.

Từ định lý Abel ta có một số nhận xét về dạng của miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ như sau. Trước hết chuỗi hội tụ tại x = 0 với tổng bp sau đây:

- Trường hợp 1: Chuỗi chỉ hội tụ tại x = 0.
- Trường hợp 2: Chuỗi hội tụ trên toàn trục số.
- Trường hợp 3: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có điểm hội tụ $x_0 \neq 0$ và có điểm phân kỳ x_1. Tất nhiên là $|x_0| < |x_1|$ theo định lý Abel. Vậy miền hội tụ D của chuỗi lũy thừa phải thỏa D ⊂ $[-|x_1|, |x_1|]$ nên bị chặn. Do tính đầy đủ của tập số thực D có cận trên

đúng R. Có thể thấy rằng nếu $|x|$ > R thì chuỗi phân kỳ tại x, và nếu x ∈ (-R, R) thì chuỗi hội tụ tại x.

Định nghĩa: (bán kính hội tụ)

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Nếu tồn tại số dương R sao cho chuỗi lũy thừa hội tụ tại mọi x mà $|x|$ < R và chuỗi phân kỳ tại mọi x mà $|x|$ > R, thì R được gọi là bán kính ội tụ của chuỗi lũy thừa. Trường hợp chuỗi chỉ hội tụ tại x = 0 ta nói bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là R = 0; nếu chuỗi hội tụ trên toàn trục số thì ta nói bán kính hội tụ là R = +∞ .

Theo định nghĩa trên ta có các trường hợp về miền hội tụ của chuỗi lũy thừa như sau:

Nếu bán kính hội tụ R là một số thực dương thì miền hội tụ D của chuỗi lũy thừa là một trong 4 trường hợp sau:

1) D = (-R, R) khi chuỗi không hội tụ tại ± R.
2) D = [-R, R] khi chuỗi hội tụ tại ± R.
3) D = [-R, R) khi chuỗi hội tụ tại -R nhưng không hội tụ tại R.
4) D = (-R, R] khi chuỗi hội tụ tại R nhưng không hội tụ tại -R.

Nếu R = 0 thì miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là D = { 0} .

Nếu R = +∞ thì miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là D = **R**.

Vậy việc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là bước rất quan trọng cho việc tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa. Ta có thể tính bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa dựa theo định lý dưới đây.

Định lý: (Tìm bán kính hội tụ)

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ hay $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$. Khi đó bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa là

R = $\frac{1}{\rho}$ nếu ρ là số thực dương;

R = 0 nếu ρ = +∞ ;

R = +∞ nếu ρ = 0.

Ví dụ:

1) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} n x^n$$

Hệ số tổng quát của chuỗi lũy thừa là $a_n = (-1)^{(n+1)} n$. Ta có

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1$$

Để xác định miền hội tụ ta cần xét sự hội tụ của chuỗi tại các điểm -1 và +1. Xét tại x = -1, ta thấy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(2n+1)} n = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)$ phân kỳ. Tại x = 1, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} n$ cũng phân kỳ(do số hạng tổng quát của chuỗi số không dần về 0).

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là D = (-1, 1).

2) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Hệ số tổng quát của chuỗi lũy thừa là $a_n = \frac{1}{n}$. Ta có

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ R = 1.

Xét tại x = -1, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi Leibnitz nên hội tụ. Tại x = 1 ta có chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nên là chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là D = [-1, 1).

3) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n\ \ 1)}(x+2)^n}{n\,2^n}$$

Hệ số tổng quát của chuỗi lũy thừa là $a_n = \dfrac{(-1)^{(n+1)}}{n\,2^n}$, với $x_0 = -2$ Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = 1/2$$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ R = 2.

Xét tại $x = x_0$ □R = -4, ta được chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}(-2)^n}{n\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(2n+1)}}{n} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ phân kỳ. Tại $x = x_0 + R = 0$, ta được chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}(0+2)^n}{n\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là D = (-4, 0].

4) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$$

Có thể tính được bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là R = 0. Suy ra chuỗi chỉ hội tụ tại x = 0, tức là miền hội tụ D = { 0} .

5) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Có thể tính được bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là R = +∞ . Suy ra chuỗi hội tụ tại mọi x, tức là miền hội tụ D = **R**.

3. Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Trong mục này sẽ nêu lên một số tính chất của chuỗi lũy thừa liên quan đến sự hội tụ đều, tính liên tục, tính đạo hàm và tích phân.

Tính chất 1:

Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b] nằm trong khoảng hội tụ của nó.

Tính chất 2:

Tổng của chuỗi lũy thừa là một hàm liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

Tính chất 3:

Ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa trên đoạn [a, b] nằm trong khoảng hội tụ của nó. Nói cách khác ta có

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx$$

Ngoài ra, nếu gọi S(x) là hàm tổng của chuỗi lũy thừa và R là bán kính hội tụ thì với mọi x thuộc khoảng hội tụ (-R, R) ta có:

$$\int_0^x S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, dt$$

$$= a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \ldots + \frac{a_n x^{(n+1)}}{n+1} + \ldots$$

Tính chất 4:

Ta có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa trong khoảng hội tụ của nó và chuỗi mới nhận được cũng có cùng bán kính hội tụ với chuỗi ban đầu.

Ví dụ:

1) Tính tổng

$$S(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$$

Có thể tính được dễ dàng là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là R = 1, vậy khoảng hội tụ là (-1, 1). Trong khoảng hội tụ này, ta lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi thì được

$$S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}$$

2) Lấy tích phân của S(x) trên đoạn [0, x] sẽ được

$$S(x) = \int_0^x 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots dx + S(0)$$

$$-\int_0^x \frac{1}{1+t} dt + 0$$

Suy ra:

$$S(x) = \ln(|1+x|)$$

Tính tổng

$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$, $|x| < 1$.

Ta có:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Lấy đạo hàm từng số hạng trong khoảng (-1, 1) thì được

$$1 + 2x + 3x^3 + \ldots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$