

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

I. Sai phân và phương trình sai phân

1/ Sai phân

- Giả sử $y(t)$ là một hàm trên tập I ; $t \in I$. Khi đó

$$\Delta y(t) = y(t+h) - y(t)$$

gọi là sai phân cấp một của hàm $y(\cdot)$ tại t

- $\Delta^2 = \Delta(\Delta(y(t))) = (y(t+2h) - y(t+h)) - (y(t+h) - y(t))$
 $= y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)$

gọi là sai phân cấp hai. Tương tự

- $\Delta^k y(t) = \Delta(\Delta^{k-1}y(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_k^i y(t+ih)$

gọi là sai phân cấp k

**** ý nghĩa ****

- Giả sử $y(t)$ là một hàm khả vi trên \mathbb{R} . Khi $h > 0$ là một khoảng thời gian nhỏ thì ta có xấp xỉ

$$y(t+h) - y(t) \approx y'(t).h$$

nhìn vậy, với hàm số khả vi khi bước h là bé thì là sai phân có thể coi là xấp xỉ tích phân của hàm và dài bước h

- Giả sử $y(n)$ là một hàm trên tập I của \mathbb{Z} . ta có thể dùng ký hiệu

$$y(\cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : n \mapsto y(n) \text{ hoặc}$$

$$y(\cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : n \mapsto y_n$$

giá trị của hàm $y(\cdot)$ tại $n \in \mathbb{Z}$ ký hiệu là $y(n)$ hoặc y_n .

Nhìn vậy, trên tập I của \mathbb{Z} theo các định nghĩa trên, ta có:

Trao i tr c tuy n t i:
http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(n) &= \Delta(\Delta y(n)) = [y(n+2) - y(n+1)] - [y(n+1) - y(n)] \\ &= y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)\end{aligned}$$

$$\Delta^k y(n) = \Delta(\Delta^{k-1} y(n)) = \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^i c_k^i y(n+k-i)$$

****Tính chất của sai phân****

1) $\Delta C = 0$ (C – hằng số)

2) $\Delta[\alpha y(n) + \beta y(n)] = \alpha \Delta y(n) + \beta \Delta y(n)$
($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

3) $\Delta^k n^m = \begin{cases} 0 & \text{khi } k > m \\ a \text{ thức bậc } m-k & \text{khi } k \leq m \end{cases}$

4) $\sum_{n=M}^N \Delta^k y(n) = \Delta^{k-1} y(N+1) - \Delta^{k-1} y(M)$
($k = 1, 2, 3 \dots$)

****H qu ****

$$\sum_{n=M}^N \Delta y(n) = y(N+1) - y(M)$$

2/ Phương trình sai phân

Giả sử $y(n)$ là một hàm số nguyên, chia hết cho n
tìm nghiệm của

$$F(n, \Delta^k y(n), \Delta^{k-1} y(n), \dots, \Delta y(n), y(n)) = 0 \quad (*)$$

Trong đó không có khuỷu tay $\Delta^k y(n)$. Khi đó nghiệm của
trên đây là một phương trình sai phân cấp k

Nhận xét

⊕ Phương trình (*) có thể viết dưới dạng như sau

$$F_1(n, y(n+k), y(n+k-1), \dots, y(n+1), y(n)) = 0$$

⊕ Trong trường hợp cấp k , phương trình sau

$$y(n+k) = f(n, y(n+k-1), y(n+k-2), \dots, y(n+1), y(n))$$

đây là phương trình sai phân cấp k dạng chính tắc

Nhận định

Một hàm số rời rạc thỏa mãn phương trình
 $\forall n=0, 1, 2, \dots$ đây là nghiệm của phương trình.

- Khi giải phương trình cấp k nghiệm tổng quát

$$y_n = \phi(n, C_1^0, C_2^0, \dots, C_k^0)$$

(với C_1, C_2, \dots là hằng số tùy ý) --- là nghiệm tổng quát

- Khi cho $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0 \dots$ ta có nghiệm riêng

Trao đổi trực tuyến:
http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

$$y = \phi(n, c_1^0, c_2^0, \dots, c_k^0)$$

**** i u k i n b a n u ****

Cho K s th c S_0, S_1, \dots, S_{k-1} v i

$$\begin{cases} y_0 = S_0 \\ y_1 = S_1 \\ \dots \dots \dots \\ y_{k-1} = S_{k-1} \end{cases}$$

c g i là i u k i n b a n u c a p h n g tr ì n h

**** VÍ D ****

Cho ph ã n g tr ì n h sai p h a n $2y(n+2) = y(n+1) + y(n) + 12$ (*)

- Ch ã n g t p h ã n g tr ì n h c ó n g h i m t ã n g q u á t $y(n) = C + 12n$
- T ì m n g h i m r i ê n g t h a m ấ n $y(0) = 7$

* *
 *

- Ta c ó : $y(n) = C + 12n$
 $y(n+1) = C + 12(n+1)$
 $y(n+2) = C + 12(n+2)$

th a y v à o (*) t h y t h a m ấ n

V y p h ã n g tr ì n h c ó n g h i m t ã n g q u á t là $y(n) = C + 12n$ (dpcm)

- v ì $y(0) = 7$ n ê n t a c ó

Trao i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

$$C + 12 \times 0 = 7$$

$$\Rightarrow C = 7$$

V y nghi m riêng c a (*) là $y = 1 + 3n$

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html