

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

PH NG TRÌNH VI PHÂN TUY N TÍNH C P 2 CÓ H S LÀ H NG S

Là pt có d ng :

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

v i : a, b : h ng s

Pt thu n nh t liên k t là :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2)$$

Cách tìm 2 nghi m ltt c a pt thu n nh t : $y'' + ay' + by = 0$

G i pt :

$$k^2 + ak + b = 0 \quad (*)$$

là pt c tr ng c a (2), pt (*) có :

$$\Delta = a^2 - 4b$$

có các tr ng h p sau :

a. N u $\Delta > 0$: pt (*) có 2 nghi m phân bi t :

$$k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

thì pt (2) có 2 nghi m ltt là :

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ và } y_2 = e^{k_2 x}$$

VD : Gi i : $y'' - 5y' + 6y = 0$

Bài gi i :

- Pt c tr ng :

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 3$$

- 2 nghi m ltt c a pt là :

$$y_1 = e^{2x} \text{ và } y_2 = e^{3x}$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là :

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b. N u $\Delta = 0$: pt (*) có nghi m kép :

$$k_1 = k_2 = \frac{-a}{2}$$

thì pt (2) có 2 nghi m ltt là :

$$y_1 = e^{\frac{-a}{2}x} \text{ và } y_2 = xe^{\frac{-a}{2}x}$$

VD: Gi i: $y'' + 4y' + 4y = 0$

Bài gi i:

- Pt c tr ng:

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = -2$$

- 2 nghi m ltt c a pt là:

$$y_1 = e^{-2x} \text{ và } y_2 = xe^{-2x}$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x), (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

c. N u $\Delta < 0$: pt (*) không có nghi m th c, (*) có 2 nghi m ph c:

$$k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}i$$

thì pt (2) có 2 nghi m ltt là:

$$y_1 = e^{\frac{-a}{2}x} \sin \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x \text{ và } y_2 = e^{\frac{-a}{2}x} \cos \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x$$

VD 1: Gi i: $y'' + 2y' + 10y = 0$

Bài gi i:

- Pt c tr ng:

$$k^2 + 2k + 10 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 10 = -9$$

$$\Rightarrow \text{pt có 2 nghi m ph c: } k_{1,2} = -1 \pm 3i$$

- 2 nghi m ltt c a pt là:

$$y_1 = e^{-x} \sin 3x \text{ và } y_2 = e^{-x} \cos 3x$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là:

$$y = C_1 e^{-x} \sin 3x + C_2 e^{-x} \cos 3x, (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

$$\Leftrightarrow y = e^{-x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x), (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

VD 2: Gi i: $y'' + 3y' + 12y = 0$

Bài gi i:

- Pt c tr ng:

$$k^2 + 3k + 12 = 0$$

$$\Delta = 9 - 48 = -39$$

$$\Rightarrow \text{pt có 2 nghi m ph c: } k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{39}i}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2}i$$

- 2 nghi m ltt c a pt là:

$$y_1 = e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{39}}{2}x \text{ và } y_2 = e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{39}}{2}x$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là:

$$y = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{39}}{2}x + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{39}}{2}x, (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-\frac{3}{2}x} (C_1 \sin \frac{\sqrt{39}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{39}}{2}x), (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

V y: ptvptt c p 2 có h s là h ng s LUÔN có nghi m.

M T S D N G C B I T

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

1. $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, ($P(x)$ là a th c)

a. N u α không là nghi m c a pt c tr ng thì (1) có nghi m riêng đ ng :

$$y = e^{\alpha x} Q(x), \quad (Q(x) \text{ là a th c và b c } Q(x) = \text{b c } P(x))$$

VD: Gi i: $y'' + 2y' + 5y = e^{2x}(x^2 + 1)$

Bài gi i:

- Pt thu n nh t liên k t:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

- Pt c tr ng:

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 5 = -4$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = -1 + 2i$$

- 2 nghi m ltt c a pt là:

$$y_1 = e^{-x} \sin 2x \text{ và } y_2 = e^{-x} \cos 2x$$

- 1 nghi m riêng c a pt ã cho có đ ng:

$$y = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

- Có:

$$y' = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B)$$

$$\Leftrightarrow y' = e^{2x}(2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B + 2C)$$

$$y'' = 2e^{2x}(2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B + 2C) + e^{2x}(4Ax + 2A + 2B)$$

$$\Leftrightarrow y'' = e^{2x}(4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B + 4C)$$

- Th vào pt: $y'' + 2y' + 5y = e^{2x}(x^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(13Ax^2 + 12Ax + 13Bx + 2A + 6B + 13C) = e^{2x}(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 13A = 1 \wedge 12A + 13B = 0 \wedge 2A + 6B + 13C = 1$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{13} \wedge B = -\frac{12}{169} \wedge C = \frac{215}{2197}$$

\Rightarrow 1 nghi m riêng c a pt ã cho là:

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

$$y = e^{2x} \left(\frac{1}{13} x^2 - \frac{12}{169} x + \frac{215}{2197} \right)$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là :

$$y = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x + e^{2x} \left(\frac{1}{13} x^2 - \frac{12}{169} x + \frac{215}{2197} \right)$$
$$(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b. N u α là nghi m n c a pt c tr ng thì (1) có nghi m riêng đ ng :

$$y = e^{\alpha x} x Q(x), (Q(x) \text{ là a th c và b c } Q(x) = \text{b c } P(x))$$

VD : Gi i : $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(2x+1)$

Bài gi i :

- Pt thu n nh t liên k t :

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

- Pt c tr ng :

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 3$$

- 2 nghi m ltt c a pt là :

$$y_1 = e^{2x} \text{ và } y_2 = e^{3x}$$

- 1 nghi m riêng c a pt ã cho có đ ng :

$$y = e^{2x} x(Ax + B)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{2x} (Ax^2 + Bx)$$

- Có :

$$y' = 2e^{2x} (Ax^2 + Bx) + e^{2x} (2Ax + B)$$

$$\Leftrightarrow y' = e^{2x} (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)$$

$$y'' = 2e^{2x} (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B) + e^{2x} (4Ax + 2A + 2B)$$

$$\Leftrightarrow y'' = e^{2x} (4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)$$

- Th vào pt : $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(2x+1)$

$$\Leftrightarrow e^{2x} (-2Ax + 2A - B) = e^{2x} (2x+1)$$

$$\Rightarrow -2A = 2 \wedge 2A - B = 1$$

$$\Leftrightarrow A = -1 \wedge B = -3$$

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

\Rightarrow Nghi m riêng c a pt ã cho là :

$$y = e^{2x}(-1x^2 - 3x)$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là :

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{2x}(-x^2 - 3x), (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

c. N u α là nghi m kép c a pt c tr ng thì (1) có nghi m riêng d ng :

$$y = e^{\alpha x} x^2 Q(x), (Q(x) \text{ là a th c và b c } Q(x) = \text{b c } P(x))$$

VD : Gi i : $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Bài gi i :

- Pt thu n nh t liên k t :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- Pt c tr ng :

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$\Delta' = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = 2$$

- 2 nghi m ltt c a pt là :

$$y_1 = e^{2x} \text{ và } y_2 = x e^{2x}$$

- 1 nghi m riêng c a pt ã cho có d ng :

$$y = e^{2x} x^2 A$$

- Có :

$$y' = 2A e^{2x} x^2 + 2A e^{2x} x$$

$$\Leftrightarrow y' = e^{2x} (2Ax^2 + 2Ax)$$

$$y'' = 2e^{2x} (2Ax^2 + 2Ax) + e^{2x} (4Ax + 2A)$$

$$\Leftrightarrow y'' = e^{2x} (4Ax^2 + 8Ax + 2A)$$

- Th vào pt : $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

$$\Leftrightarrow e^{2x} 2A = e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2A = 1$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

\Rightarrow Nghi m riêng c a pt ã cho là :

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

$$y = \frac{1}{2} e^{2x} x^2$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là :

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} x^2, (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow y = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 + C_2 x + C_1 \right), (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2. $f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \sin \beta x + P_2(x) \cos \beta x]$, ($P_1(x), P_2(x)$ là a th c)

a. N u $\alpha + \beta i$ không là nghi m c a pt c tr ng thì (1) có nghi m riêng d ng :

$$y = e^{\alpha x} [Q_1(x) \sin \beta x + Q_2(x) \cos \beta x]$$

($Q_1(x), Q_2(x)$ là a th c có b c b ng nhau và b ng b c cao nh t c a $P_1(x), P_2(x)$)

VD: Gi i : $y'' + y = \sin 3x$

Bài gi i :

- Pt thu n nh t liên k t :

$$y'' + y = 0$$

- Pt c tr ng :

$$k^2 + 1 = 0$$

$$\Delta' = -1$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \pm i$$

- 2 nghi m ltt c a pt là :

$$y_1 = \sin x \text{ và } y_2 = \cos x$$

- Có : $y'' + y = \sin 3x = e^{0x} (1 \sin 3x + 0 \cos 3x)$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 3$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta i = 0 + 3i = 3i \neq k_{1,2}$$

- 1 nghi m riêng c a pt ã cho có d ng :

$$y = e^{0x} (A \sin 3x + B \cos 3x)$$

$$\Leftrightarrow y = A \sin 3x + B \cos 3x$$

- Có :

$$y' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x$$

$$y'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x$$

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

- Th vào pt: $y'' + y = \sin 3x$

$$\Leftrightarrow -8A \sin 3x - 8B \cos 3x = \sin 3x$$

$$\Rightarrow -8A = 1 \wedge -8B = 0$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{1}{8} \wedge B = 0$$

\Rightarrow Nghi m riêng c a pt ã cho là :

$$y = -\frac{1}{8} \sin 3x + 0 \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{8} \sin 3x$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là :

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{8} \sin 3x, (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b. N u $\alpha + \beta i$ là nghi m c a pt c tr ng thì (1) có nghi m riêng d ng :

$$y = e^{\alpha x} x [Q_1(x) \sin \beta x + Q_2(x) \cos \beta x]$$

($Q_1(x), Q_2(x)$ là a th c có b c b ng nhau và b ng b c cao nh t c a $P_1(x), P_2(x)$)

VD: Gi i: $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x$

Bài gi i:

- Pt thu n nh t liên k t:

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

- Pt c tr ng:

$$k^2 - 2k + 10 = 0$$

$$\Delta' = -9$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = 1 \pm 3i$$

- 2 nghi m ltt c a pt là :

$$y_1 = e^x \sin 3x \text{ và } y_2 = e^x \cos 3x$$

- Có: $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x = e^{1x} (0 \sin 3x + 1 \cos 3x)$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \wedge \beta = 3$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta i = 1 + 3i = k_1$$

- 1 nghi m riêng c a pt ã cho có d ng :

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

$$y = e^x x (A \sin 3x + B \cos 3x)$$

$$\Leftrightarrow y = e^x (Ax \sin 3x + Bx \cos 3x)$$

- Có:

$$y' = e^x (Ax \sin 3x + Bx \cos 3x) + e^x (A \sin 3x + 3Ax \cos 3x + B \cos 3x - 3Bx \sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow y' = e^x (Ax \sin 3x + Bx \cos 3x + A \sin 3x + 3Ax \cos 3x + B \cos 3x - 3Bx \sin 3x)$$

$$y'' = e^x (Ax \sin 3x + Bx \cos 3x + A \sin 3x + 3Ax \cos 3x + B \cos 3x - 3Bx \sin 3x) + e^x (A \sin 3x + 3Ax \cos 3x + B \cos 3x - 3Bx \sin 3x + 3A \cos 3x + 3A \cos 3x - 9Ax \sin 3x - 3B \sin 3x - 3B \sin 3x - 9Bx \cos 3x)$$

$$\Leftrightarrow y'' = e^x (-8Ax \sin 3x - 8Bx \cos 3x + 2A \sin 3x + 6Ax \cos 3x + 2B \cos 3x - 6Bx \sin 3x + 6A \cos 3x - 6B \sin 3x)$$

- Th vào pt: $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x$

$$\Leftrightarrow e^x 6A \cos 3x - e^x 6B \sin 3x = e^x \cos 3x$$

$$\Rightarrow 6A = 1 \wedge 6B = 0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{6} \wedge B = 0$$

\Rightarrow Nghi m riêng c a pt ã cho là:

$$y = e^x \frac{1}{6} x \sin 3x$$

- Nghi m t ng quát c a pt ã cho là:

$$y = C_1 e^x \sin 3x + C_2 e^x \cos 3x + e^x \frac{1}{6} x \sin 3x, (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Trao i tr c tuy n t i: http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

V BÀI THI

- C u trúc :

+ Tr c nghi m : 70%

+ T lu n : 30%

➤ Toán kinh t (c c tr toàn c c)

➤ Gi i ptvp tuy n tính c p 1 – Becnouly, ptvp tuy n tính c p 2 (các d ng c bi t)

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao i tr c tuy n t i:

http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html