ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

PGS. TS My Vinh Quang

Ngày 11 tháng 10 năm 2004

Mở Đầu

Trong các kỳ thi tuyển sinh sau đại học, Đại số tuyến tính là môn cơ bản, là môn thi bắt buộc đối với mọi thí sinh thi vào sau đại học ngành toán - cụ thể là các chuyên ngành : PPGD, Đại số, Giải tích, Hình học.

Các bài viết này nhằm cung cấp cho các bạn đọc một cách có hệ thống và chọn lọc các kiến thức và kỹ năng cơ bản nhất của môn học Đại số tuyến tính với mục đích giúp những người dự thi các kỳ tuyển sinh sau đại học ngành toán có được sự chuẩn bị chủ động, tích cực nhất.

Vì là các bài ôn tập với số tiết hạn chế nên các kiến thức trình bày sẽ được chọn lọc và bám sát theo đề cương ôn tập vào sau đại học. Tuy nhiên, để dễ dàng hơn cho bạn đọc thứ tự các vấn đề có thể thay đổi. Cũng chính bởi các lý do trên các bài viết này không thể thay thế một giáo trình Đại số tuyến tính hoàn chỉnh. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo thêm một số sách viết về Đại số tuyến tính, chẳng hạn :

1. Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương ...
   Toán cao cấp Tập 2 - Nxb Giáo dục 1998

2. Jean - Marie Monier.
   Đại số 1 - Nxb Giáo dục 2000

3. Ngô Thúc Lanh
   Đại số tuyến tính - Nxb Đại học và Trung học chuyên nghiệp 1970

4. Bùi Tường Trí.
   Đại số tuyến tính.

5. My Vinh Quang
   Bài tập đại số tuyến tính.

Bài 1: ĐỊNH THỨC

Để hiểu được phần này, người đọc cầnphải nắm được khái niệm về ma trận và các phép toán trên ma trận (phép cộng, trừ, nhân hai ma trận). Các khái niệm trên khá đơn giản, người đọc có thể dễ dàng tìm đọc trong các sách đã dẫn ở trên.

1 Định nghĩa định thức

1.1 Định thức cấp 2, 3

- Cho A là ma trận vuông cấp 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp 2) của A là một số, ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$) xác định như sau :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

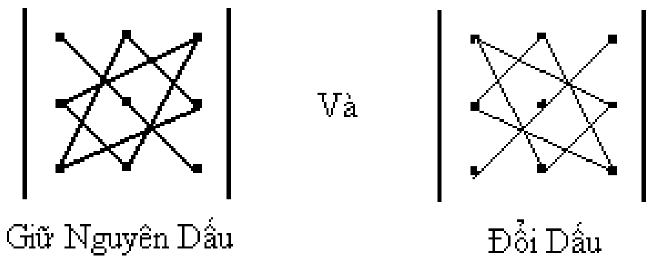
- Cho A là ma trận vuông cấp 3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp 3) của A là một số ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$), xác định như sau : $\det A =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{2}$$

Công thức khai triển (2) thường được nhớ theo quy tắc *Sarrus* như sau :



Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = [(-1)(-2).4 + 2.1.(-1) + 1.0.3] - [3.(-2).(-1) + 1.0.(-1) + 2.1.4] = -8$$

Nếu ta ký hiệu S_n là tập hợp các phép thế bậc n thì các công thức (1) và (2) có thể viết lại như sau :

$$\det A = \sum_{f \in S_2} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \text{ và } \det A = \sum_{f \in S_3} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} a_{3f(3)}$$

Từ đó gợi ý cho ta cách định nghĩa định thức cấp n như sau.

1.2 Định thức cấp n

Cho A là ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

định thức (cấp n) của ma trận A là một số, ký hiệu $\det A$ (hoặc $|A|$), xác định như sau :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} ... a_{nf(n)} \tag{3}$$

Chắc chắn là đối với một số bạn đọc, (nhất là bạn đọc không thạo về phép thế) định nghĩa định thức tương đối khó hình dung. Tuy nhiên, rất may là khi làm việc với định thức, (kể cả khi tính định thức) định nghĩa trên hiếm khi được sử dụng mà ta chủ yếu sử dụng các tính chất của định thức. Bởi vậy, bạn đọc nếu chưa có đủ thời gian có thể tạm bỏ qua định nghĩa trên và cần phải nắm vững các tính chất sau của định thức.

2 Các tính chất của định thức

2.1 Tính chất 1

Định thức không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là : $\det A^t = detA$ (A^t : ma trận chuyển vị của ma trận A)

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Từ tính chất này, một mệnh đề về định thức nếu đúng với dòng thì cũng đúng với cột và ngược lại.

2.2 Tính chất 2

Nếu ta đổi chổ hai dòng bất kỳ (hoặc 2 cột bất kỳ) của định thức thì định thức đổi dấu.

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.3 Tính chất 3

Nếu tất cả các phần tử của một dòng (hoặc một cột) của định thức được nhân với λ thì định thức mới bằng định thức ban đầu nhân với λ.

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Từ tính chất này ta có nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

2.4 Tính chất 4

Cho A là ma trận vuông cấp n. Giả sử dòng thứ i của ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng : $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ với $j = 1, 2, ..., n$. Khi đó ta có :

$$\det A = \begin{vmatrix} ... & ... & ... & ... \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & ... & a'_{in} + a''_{in} \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} ... & ... & ... & ... \\ a'_{i1} & a'_{i2} & ... & a'_{in} \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ... & ... & ... & ... \\ a''_{i1} & a''_{i2} & ... & a''_{in} \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix}$$

Trong đó các dòng còn lại của 3 định thức ở 2 vế là hoàn toàn như nhau và chính là các dòng còn lại của ma trận A. Tất nhiên ta cũng có kết quả tương tự đối với cột.
Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Chú ý : Các *tính chất 2, 3, 4* chính là tính đa tuyến tính thay phiên của định thức.

Từ các tính chất trên, dễ dàng suy ra các tính chất sau của định thức :

2.5 Tính chất 5

Định thức sẽ bằng 0 nếu :

1. Có hai dòng (hai cột) bằng nhau hoặc tỉ lệ.
2. Có một dòng (một cột) là tổ hợp tuyến tính của các dòng khác (cột khác).

2.6 Tính chất 6

Định thức sẽ không thay đổi nếu :

1. Nhân một dòng (một cột) với một số bất kỳ rồi cộng vào dòng khác (cột khác).
2. Cộng vào một dòng (một cột) một tổ hợp tuyến tính của các dòng khác (cột khác)

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

(Lý do: nhân dòngmộtvới (-2) cộng vào dòng 2, nhân dòng một với 1 cộng vào dòng 3, nhân dòngmộtvới 3 cộng vào dòng 4).

Để tính định thức, ngoài việc sử dụng các tính chất trên của định thức ta còn rất hay sử dụng *định lý Laplace* dưới đây.

3 Định lý Laplace

3.1 Định thức con và phần bù đại số

Cho A là ma trận vuông cấp n, k là số tự nhiên $1 \leq k \leq n$. Các phần tử nằm trên giao của k dòng bất kỳ, k cột bất kỳ của A làm thành một ma trận vuông cấp k của A. Định thức của ma trận này gọi là một định thức con cấp k của ma trận A.

Đặc biệt, cho trước $1 \leq i, j \leq n$, nếu ta xóa đi dòng i, cột j của A ta sẽ được ma trận con cấp $n-1$ của A, ký hiệu là M_{ij}. Khi đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ được gọi là phần bù đại số của phần tử $(A)_{ij}$. ($(A)_{ij}$ là phần tử nằm ở hàng i, cột j của ma trận A)

3.2 Định lý Laplace

Cho A là ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có :

1. Khai triển định thức theo dòng i

$$\det A = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \dots + a_{in}.A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik}$$

2. Khai triển định thức theo cột j

$$\det A = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \dots + a_{nj}.A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj}$$

Từ *định lý Laplace*, ta có thể chứng minh được 2 tính chất quan trọng sau của định thức :

3.3 Tính chất 1

Nếu A là ma trận tam giác trên, (hoặc tam giác dưới) thì $\det A$ bằng tích của tất cả các phần tử trên đường chéo chính, tức là :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}...a_{nn}$$

3.4 Tính chất 2

Nếu A, B là các ma trận vuông cấp n thì $\det(AB) = \det A \det B$

4 Các ví dụ và áp dụng

Nhờ có *định lý Laplace*, để tính một định thức cấp cao (cấp > 3) ta có thể khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột bất kỳ để đưa về tính các định thức cấp bé hơn. Cứ như vậy sau một số lần sẽ đưa được về việc tính các định thức cấp 2, 3. Tuy nhiên, trong thực tế nếu làm như vậy thì số lượng phép tính khá lớn. Bởi vậy ta làm như sau thì số lượng phép tính sẽ giảm đi nhiều :

1. Chọn dòng (cột) có nhiều số 0 nhất để khai triển định thức theo dòng (cột) đó.
2. Sử dụng *tính chất 2.6* để biến đổi định thức sao cho dòng đã chọn (cột đã chọn) trở thành dòng (cột) *chỉ có một số khác 0.*
3. Khai triển định thức theo dòng (cột) đó. Khi đó việc tính một định thức cấp n quy về việc tính một định thức cấp $n-1$. Tiếp tục lặp lại quá trình trên cho định thức cấp $n-1$, cuối cùng ta sẽ dẫn về việc tính định thức cấp 2, 3.

Ví dụ 1

Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ta chọn cột 2 để khai triển nhưng trước khi khai triển, ta biến đổi định thức như sau : nhân dòng 2 với (-2) cộng vào dòng 3. Nhân dòng 2 với (-1) cộng vào dòng 5. Định thức đã cho sẽ bằng (*Tính chất 2.6*)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Khai triển theo cột 2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Để tính định thức cấp 4, ta lại chọn dòng 4 để khai triển, trước khi khai triển ta lại biến đổi định thức như sau : nhân cột 1 với (-1) rồi cộng vào cột 3, nhân cột 1 với 2 rồi cộng vào cột 4. Định thức đã cho sẽ bằng :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{(Khai triển theo dòng 4)}}{=} (-1).(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Ví dụ 2 Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+2 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x & 1 & x & x-2 \\ 0 & 0 & x^5+1 & x^{100} \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

$$VT \overset{\text{(Khai triển theo dòng 2)}}{=} (-1)^5(x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x+2 \\ x & 1 & x-2 \\ 0 & 0 & x^{100} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(Khai triển theo dòng 3)}}{=} (1-x^2).x^{100} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = (1-x^2)^2.x^{100}$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $(1-x^2)^2.x^{100} = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ x = \pm 1$

Bài Tập

1. Tính

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} \text{ trong đó } \alpha, \beta, \gamma, \text{ là các nghiệm của phương trình :} x^3 + px + q = 0$$

2. Giải phương trình :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

3. Chứng minh :

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Chứng minh :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS. TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 10 năm 2004

Bài 2 : Các Phương Pháp Tính Định Thức Cấp n

Định thức được định nghĩa khá phức tạp, do đó khi tính các định thức cấp cao (cấp lớn hơn 3) người ta hầu như không sử dụng định nghĩa định thức mà sử dụng các tính chất của định thức và thường dùng các phương pháp sau.

1 Phương pháp biến đổi định thức về dạng tam giác

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột) của ma trận và các tính chất của định thức để biến đổi ma trận của định thức về dạng tam giác. Định thức sau cùng sẽ bằng tích của các phần tử thuộc đường chéo chính (theo *tính chất 3.3*).

Ví dụ 1.1: Tính định thức cấp n $(n \geqslant 2)$ sau đây:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Nhân dòng (2) với (-1) rồi cộng vào dòng (3), (4), ..., (n). Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = (-2)(n-2)!$$

(1): nhân dòng (1) với (-2) cộng vào dòng (2).

Ví dụ 1.2: Tính định thức cấp n

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Bài giải: Đầu tiên công các cột (2), (3),..., (n) vào cột (1). Sau đó nhân dòng (1) với (-1) cộng vào các dòng (2), (3),..., (n). Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$
$$= \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$$

2 Phương pháp qui nạp

Áp dụng các tính chất của định thức, biến đổi, khai triển định thức theo dòng hoặc theo cột để biểu diễn định thức cần tính qua các định thức cấp bé hơn nhưng có cùng dạng. Từ đó ta sẽ nhận được công thức truy hồi.

Sử dụng công thức truy hồi và tính trực tiếp các định thức cùng dạng cấp 1, cấp 2, ..., để suy ra định thức cần tính.

Ví dụ 2.1: Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Sử dụng *tính chất 2.4*, tách định thức theo cột n, ta có:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức đầu theo cột (n) ta sẽ có định thức đầu bằng D_{n-1}.

Nhân cột (n) của định thức thứ hai lần lượt với $(-b_i)$ rồi cộng vào cột i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.

Ta được:

$$D_n = D_{n-1} + b_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_n b_n$$

Vậy ta có công thức truy hồi $D_n = D_{n-1} + a_n b_n$. Vì công thức trên đúng với mọi n nên ta có

$$D_n = D_{n-1} + a_n b_n = \big(D_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1}\big) + a_n b_n = \cdots = D_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n$$

Vì $D_1 = a_1 b_1 + 1$ nên cuối cùng ta có

$$D_n = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n$$

Ví dụ 2.2: Cho $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

Bài giải: Khai triển định thức theo dòng đầu, ta được:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

Tiếp tục khai triển định thức sau theo cột (1) ta có công thức:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \text{ với } n \geqslant 3 \qquad (*)$$

Do đó:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

Công thức này đúng với mọi $n \geqslant 3$ nên ta có

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

Tính toán trực tiếp ta có $D_2 = a^2 + b^2 + ab$ và $D_1 = a + b$ do đó $D_2 - aD_1 = b^2$. Bởi vậy

$$D_n - aD_{n-1} = b^n \qquad (1)$$

Tiếp tục, từ công thức $(*)$ ta lại có $D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$. Do công thức này đúng với mọi $n \geqslant 3$ nên tương tự như trên ta lại có

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-3} - bD_{n-4})$$
$$= \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1) = a^n \text{ vì } D_2 - bD_1 = a^2$$

Vậy ta có

$$D_n - bD_{n-1} = a^n \qquad (2)$$

Khử D_{n-1} từ trong (1) và (2) ta sẽ được kết quả

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

3 Phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức

Nhiều định thức cấp n có thể tính được dễ dàng bằng các tách định thức (theo các dòng hoặc theo các cột) thành tổng của các định thức cùng cấp. Các định thức mới này thường bằng 0 hoặc tính được dễ dàng.

Ví dụ 3.1: Ta sẽ tính định thức D_n trong Ví dụ 2.1 bằng phương pháp này.

Bài giải: Mỗi cột của D_n được viết thành tổng của 2 cột mà ta ký hiệu là cột loại (1) và loại (2) như sau:

$$D_n = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 0+a_1b_2 & \dots & 0+a_1b_n \\ 0+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & 0+a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0+a_nb_1 & 0+a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix} \\ (1)\ \ (2)\quad (1)\ \ (2)\qquad\qquad (1)\ \ (2) \end{array}$$

Sử dụng *tính chất 2.4* của định thức, ta lần lượt tách các cột của định thức. Sau n lần tách ta có D_n là tổng của 2^n định thức cấp n. Cột thứ i của các định thức này chính là cột loại (1) hoặc loại (2) của cột thứ i của định thức ban đầu D_n. Ta chia 2^n định thức này thành ba dạng như sau:

Dạng 1: Bao gồm các định thức có từ 2 cột loại (2) trở lên. Vì các cột loại (2) tỉ lệ nên tất cả các định thức loại này có giá trị bằng 0.

Dạng 2: Bao gồm các định thức có đúng một cột loại (2), còn các cột khác là loại (1). Giả sử cột i là loại (2) ta có định thức đó là

$$D_{n,i} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_1b_i & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_2b_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_nb_i & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ \text{cột } i \end{array} = a_ib_i$$

(khai triển theo cột i). Có tất cả n định thức dạng 2 (ứng với $i = 1, 2, \dots, n$) và tổng của tất cả các định thức dạng 2 là

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Dạng 3: Bao gồm các định thức không có cột loại (2), nên tất cả các cột đều là loại (1) và do đó có đúng một định thức dạng 3 là

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy D_n bằng tổng của tất cả các định thức ba dạng trên và bằng

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + 1$$

Nhận xét: Tất cả các định thức mà các cột (dòng) có thể biểu diễn dưới dạng tổng 2 cột (2 dòng) trong đó các cột loại (2) (dòng loại (2)) tỉ lệ với nhau đều có thể tính được dễ dàng bằng phương pháp 3 với cách trình bày giống hệt như trên.

4 Phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức

Giả sử ta cần tính định thức D cấp n. Ta biểu diễn ma trận tương ứng A của D thành tích các ma trận vuông cấp n đơn giản hơn: $A = B.C$. Khi đó ta có

$$D = \det A = \det(B.C) = \det B. \det C$$

với các định thức $\det B$, $\det C$ tính được dễ dàng nên D tính được.

Ví dụ 4.1: Tính định thức cấp n $(n \geqslant 2)$ sau

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geqslant 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B. \det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2 \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4.2: Tính định thức cấp n $(n \geqslant 2)$

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin 2\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geqslant 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B.\det C = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n > 2 \\ -\sin^2(\alpha_1-\alpha_2) \text{ nếu } n = 2 \end{cases}$$

Bài Tập

Tính các định thức cấp n sau:

6. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

11. $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$$

Tính các định thức cấp $2n$ sau

12. $$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$$

(đường chéo chính là a, đường chéo phụ là b, tất cả các vị trí còn lại là 0)

13. $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix}$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS. TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 11 năm 2004

Bài 3 : Giải Bài Tập Định Thức

1. **Tính**
   $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$ trong đó α, β, γ là các nghiệm của phương trình :$x^3 + px + q = 0$

Giải :

Theo định lí Viet ta có $\alpha + \beta + \gamma = 0$
Cộng cột (1), cột (2) vào cột (3) ta có:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. **Giải phương trình**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

Giải :

Khai triển định thức vế trái theo dòng đầu, ta sẽ có vế trái là một đa thức bậc 3 của x, kí hiệu là $f(x)$. Ta có $f(2) = 0$ vì khi đó định thức ở vế trái có 2 dòng đầu bằng nhau. Tương tự $f(3) = 0, f(4) = 0$. Vì $f(x)$ là đa thức bậc 3, có 3 nghiệm là 2, 3, 4 nên phương trình trên có nghiệm là 2, 3, 4.

3. **Chứng minh**

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

Nhân cột (2) với (-1), cột (3) với 1 rồi cộng vào cột (1), ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \begin{vmatrix} 2a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ 2a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ 2a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} \\ &\overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Giải thích:
(1) : nhân cột (1) với (-1) cộng vào cột (3)
(2) : nhân cột (3) với (-1) cộng vào cột (2)

4. **Chứng minh**

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

$$VT \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 0$$

Giải thích:
(1) : Nhân cột (1) với (-1) cộng vào cột (4), nhân cột (2) với (-1) cộng vào cột (3)
(2) : Định thức có 2 cột tỷ lệ

5. **Tính định thức**

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Giải :

$$VT \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+\ldots+a_n & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_1+\ldots a_n & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+\ldots+a_n$$

Giải thích:

(1): Cộng các cột (2), (3),..., (n) vào cột (1)

(2): Nhân dòng (1) với (-1) rồi cộng vào các dòng (2), (3), ..., (n)

6. **Tính định thức**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Giải :

Với $x \neq 0$

$$VT \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} \dfrac{n-1}{x} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}$$

$= \dfrac{n-1}{x}(-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$ $(n \geq 2)$
Giải thích:
(1): Nhân dòng (1) với (-x) cộng vào dòng (2), (3), ..., (n)
(2): Nhân cột (2), (3), ..., (n) với $\dfrac{1}{x}$ rồi cộng tất cả vào cột (1)
Dễ thấy khi $x = 0$, đáp số trên vẫn đúng do tính liên tục của định thức.

7. **Tính định thức**

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Giải :

Khai triển định thức theo dòng đầu ta có :

$$D_n = 5D_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục khai triển định thức theo cột (1) ta có công thức truy hồi :

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \quad (*) \quad (n \geq 3)$$

Từ (*) ta có :

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$$

Do công thức đúng với mọi $n \geq 3$ nên ta có:

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = 3^2(D_{n-2} - 2D_{n-3}) = \ldots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$$

Tính toán trực tiếp ta có $D_2 = 19$, $D_1 = 5$ nên $D_2 - 2D_1 = 9$. Bởi vậy ta có:

$$D_n - 2D_{n-1} = 3^n \quad (1)$$

Mặt khác, cũng từ công thức (*) ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$$

Tương tự như trên ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = 2^2(D_{n-2} - 3D_{n-3}) = \ldots = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1) = 2^n$$

Vậy ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2^n \quad (2)$$

Khử D_{n-1} từ trong (1) và (2) ta có:

$$D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

(Bạn đọc có thể so sánh cách giải bài này với cách giải ở ví dụ 4)

8. **Tính định thức**

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & \ldots & x \\ x & a_2 & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Giải :

Định thức này có thể tính bằng phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức. Trước hết ta viết định thức dưới dạng:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - x + x & 0 + x & \ldots & 0 + x \\ 0 + x & a_2 - x + x & \ldots & 0 + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 + x & 0 + x & \ldots & a_n - x + x \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} (1)\ (2) & (1)\ (2) & & (1)\ (2) \end{matrix}$$

Lần lượt tách các cột của định thức, sau n lần tách ta có định thức D bằng tổng của 2^n định thức cấp n. Cột thứ i của các định thức này chính là cột loại (1) hoặc loại (2) của cột thứ i của định thức ban đầu D. Chia 2^n định thức này thành 3 dạng như sau:

Dạng 1: Bao gồm các định thức có từ 2 cột loại (2) trở lên. Vì các cột loại (2) bằng nhau nên tất cả các định thức dạng này đều bằng 0.

Dạng 2: Bao gồm các định thức có đúng một cột loại (2), còn các cột khác là loại (1).

Giả sử cột i là loại (2). Ta có định thức đó là:

$$D_i = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & x & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \dots & a_n - x \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ \text{cột} i \end{array}$$

$$\stackrel{(1)}{=} x(a_1 - x)\dots(a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x)\dots(a_n - x) \quad = \frac{x \prod_{k=1}^{n} (a_k - x)}{a_i - x}$$

((1) khai triển định thức theo cột i)
Có tất cả n định thức dạng 2 (ứng với $i = 1, 2, \dots, n$) và tổng của tất cả các định thức dạng 2 là:

$$x(a_1 - x)\dots(a_n - x)\left[\frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right]$$

Dạng 3: Bao gồm các định thức không có cột loại (2), nên tất cả các cột đều là loại (1). Và do đó có đúng 1 định thức dạng (3) là:

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} = (a_1 - x)\dots(a_n - x)$$

Vậy D bằng tổng của tất cả các định thức của 3 dạng trên và bằng:

$$x(a_1 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right)$$

9. **Tính**

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_3 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

Định thức này có thể được tính bằng phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức với cách giải tương tự như bài 8. *Chi tiết của cách giải này xin dành cho bạn đọc.* Ở đây chúng tôi đưa ra một cách tính nửa dựa vào phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức. Với $n \geq 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy, ta có:

$$D = detA = det(BC) = detB.detC = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad n > 2 \\ (a_1 - a_2)(b_2 - a_1) & \text{nếu} \quad n = 2 \end{cases}$$

10. **Tính**

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$$

Để tính định thức này ta dùng phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức. Với $n \geq 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \dots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \dots & \sin\beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy ta có:

$$D = detA = det(BC) = detB.detC = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad n > 2 \\ \sin(\alpha_2 - \alpha_1).\sin(\beta_2 - \alpha_1) & \text{nếu} \quad n = 2 \end{cases}$$

11. **Tính định thức cấp 2n**

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ \\ (n-1) \\ (n) \\ (n+1) \\ (n+2) \\ \\ (2n-1) \\ (2n) \end{array}$$

Giải :

Xét khi $a \neq 0$

- Nhân dòng (1) với $-\dfrac{b}{a}$ cộng vào dòng (2n)
- Nhân dòng (2) với $-\dfrac{b}{a}$ cộng vào dòng (2n-1)

....

- Nhân dòng (n) với $-\dfrac{b}{a}$ cộng vào dòng (n+1)

Ta có :

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{a^2-b^2}{a} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & \dfrac{a^2-b^2}{a} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{a^2-b^2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{a^2-b^2}{a} \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^n$$

Khi $a \neq 0$, do tính liên tục của định thức công thức trên vẫn đúng. Vậy ta có: $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$

Chú ý : Khai triển định thức theo dòng (1), sau đó khai triển các định thức cấp $(2n-1)$ vừa nhận được theo dòng $(2n-1)$. Ta sẽ có công thức truy hồi:

$$D_{2n} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)}$$

Do công thức trên đúng với mọi $n \geq 2$ nên :

$$D_{2n} = (a^2-b^2)D_{2(n-1)} = (a^2-b^2)^2 D_{2(n-2)} = \ldots = (a^2-b^2)^{n-1} D_2 = (a^2-b^2)^n$$

(*Chi tiết của cách làm này xin dành cho bạn đọc*).

12. **Tính định thức cấp 2n**

$$D_{2n} = \begin{array}{|ccccccccc|l}
a_1 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \ldots & 0 & (1) \\
0 & a_2 & \ldots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \ldots & 0 & (2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
0 & 0 & \ldots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \ldots & b_n & (n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
c_1 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & d_1 & 0 & \ldots & 0 & (n+1) \\
0 & c_2 & \ldots & 0 & \vdots & 0 & d_2 & \ldots & 0 & (n+2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
0 & 0 & \ldots & c_n & \vdots & 0 & 0 & \ldots & d_n & (2n)
\end{array}$$

Xét khi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đều khác 0 :
- Nhân dòng (1) với $-\dfrac{c_1}{a_1}$ rồi cộng vào dòng $(n+1)$
- Nhân dòng (2) với $-\dfrac{c_2}{a_2}$ rồi cộng vào dòng $(n+2)$
....
- Nhân dòng (n) với $-\dfrac{c_n}{a_n}$ rồi cộng vào dòng $(2n)$

Ta có :

$$D_{2n} = \left| \begin{array}{ccccccccc}
a_1 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & a_2 & \ldots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \ldots & b_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & \dfrac{a_1d_1 - b_1c_1}{a_1} & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & 0 & \dfrac{a_2d_2 - b_2c_2}{a_2} & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{a_nd_n - b_nc_n}{a_n}
\end{array} \right|$$

$$= (a_1d_1 - b_1c_1)\ldots(a_nd_n - b_nc_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

Khi các $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bằng 0, do tính liên tục của định thức công thức trên vẫn đúng.
Vậy ta có :

$$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

Chú ý : Khai triển định thức theo dòng thứ n, sau đó khai triển các định thức cấp $2n-1$ vừa nhận được theo dòng $(2n-1)$ ta sẽ có công thức truy hồi:

$$D_{2n} = (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} \quad \forall n \geq 2$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned}
D_{2n} &= (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} = (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)} \\
&= \ldots = (a_nd_n - b_nc_n)\ldots(a_2d_2 - b_2c_2)D_1 \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)
\end{aligned}$$

(*Chi tiết của cách này xin dành cho bạn đọc*)
[1]

[1]Người đánh máy : Nguyễn Ngọc Quyên

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 15 tháng 11 năm 2004

Hạng Của Ma Trận

Cùng với định thức, ma trận (đặc biệt là hạng của ma trận) là các công cụ cơ bản để giải quyết các bài toán về hệ phương trình tuyến tính nói riêng và đại số tuyến tính nói chung. Bài viết này sẽ giới thiệu định nghĩa, các tính chất cơ bản của hạng ma trận, và hai phương pháp cơ bản để tính hạng của ma trận.

1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Trước hết, cần nhớ lại khái niệm định thức con cấp k của một ma trận. Cho A là ma trận cấp $m \times n$; k là số tự nhiên $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Chọn ra k dòng, k cột bất kỳ của A. Các phần tử thuộc giao của k dòng, k cột này tạo thành ma trận vuông cấp k, gọi là ma trận con cấp k của ma trận A. Định thức của ma trận con cấp k này gọi là một định thức con cấp k của A.

1.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Cho A là ma trận cấp $m \times n$ khác không.
Hạng của ma trận A là số tự nhiên r, $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Tồn tại ít nhất một định thức con cấp r của ma trận A khác 0.
2. Mọi định thức con cấp lớn hơn r (nếu có) của ma trận A đều bằng 0.

Nói cách khác, hạng của ma trận $A \neq O$ chính là *cấp cao nhất của các định thức con khác không* của ma trận A.
Hạng của ma trận A ký hiệu là $r(A)$ hoặc $\operatorname{rank}(A)$.
Qui ước: hạng của ma trận không O là 0.

1.2 Các tính chất cơ bản về hạng của ma trận

1.2.1 Tính chất 1

Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là $\operatorname{rank} A^t = \operatorname{rank} A$.

1.2.2 Tính chất 2

Nếu A là ma trận vuông cấp n thì

$$\operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0$$

$$\operatorname{rank} A < n \iff \det A = 0$$

Nếu xảy ra trường hợp đầu, ta nói A là *ma trận vuông không suy biến*. Nếu xảy ra trường hợp thứ hai, ta nói A là *ma trận vuông suy biến*.

1.2.3 Tính chất 3

Nếu A, B là các ma trận cùng cấp thì

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

1.2.4 Tính chất 4

Cho A, B là các ma trận sao cho tồn tại tích AB. Khi đó

1. $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$
2. Nếu A là ma trận vuông không suy biến thì $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} B$.

2 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp định thức

2.1 Từ định nghĩa hạng của ma trận ta có thể suy ra ngay thuật toán sau đây để tìm hạng của ma trận A cấp $m \times n$ $(A \neq O)$

Bước 1
Tìm một định thức con cấp k khác 0 của A. Số k càng lớn càng tốt. Giả sử định thức con cấp k khác không là D_k.

Bước 2
Xét tất cả các định thức con cấp $k+1$ của A chứa định thức D_k. Xảy ra 3 khả năng sau

1. Không có một định thức con cấp $k+1$ nào của A. Khả năng này xảy ra khi và chỉ khi $k = \min\{m, n\}$. Khi đó $\operatorname{rank} A = k = \min\{m, n\}$. Thuật toán kết thúc.
2. Tất cả các định thức con cấp $k+1$ của A chứa định thức con D_k đều bằng 0. Khi đó $\operatorname{rank} A = k$. Thuật toán kết thúc.
3. Tồn tại một định thức con cấp $k+1$ của A là D_{k+1} chứa định thức con D_k khác 0. Khi đó lặp lại bước 2 với D_{k+1} thay cho D_k. Và cứ tiếp tục như vậy cho đến khi xảy ra trường hợp (1) hoặc (2) thì thuật toán kết thúc.

2.2 Ví dụ

Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải

Đầu tiên ta thấy A có định thức con cấp 2, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (Định thức này được tạo thành bởi 2 dòng đầu, 2 cột đầu của A)

Xét các định thức con cấp 3 của A chứa D_2, ta thấy có định thức con cấp 3 khác 0. Đó là định thức

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(Định thức này được thành bởi các dòng 1, 2, 3, các cột 1, 2, 4 của A)

Tiếp tục, xét các định thức con cấp 4 của A chứa D_3. Có tất cả 2 định thức như vậy, đó là

$$D_{4,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

và

$$D_{4,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cả 2 định thức này đều bằng 0. Do đó $\operatorname{rank} A = 3$.

Chú ý. Có thể nhận xét dòng (4) của ma trận A là tổ hợp tuyến tính của dòng (1) và dòng (2); dòng (4) = dòng (1) - dòng (2), nên dễ dàng thấy được $D_{4,1} = 0$, $D_{4,2} = 0$.

Việc tìm hạng của ma trận bằng định thức như trên phải tính toán khá phức tạp nên trong thực tế người ta ít sử dụng mà người ta thường sử dụng phương pháp tìm hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp sau đây.

3 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp sử dụng các phép biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss)

Trước khi giới thiệu phương pháp này, ta cần nhớ lại một số khái niệm sau

3.1 Ma trận bậc thang

3.1.1 Định nghĩa

Ma trận A cấp $m \times n$ khác không gọi là một ma trận bậc thang nếu tồn tại số tự nhiên r, $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ thỏa các điều kiện sau:

1. r dòng đầu của A khác không. Các dòng từ thứ $r+1$ trở đi (nếu có) đều bằng 0.

2. Xét dòng thứ k với $1 \leq k \leq r$. Nếu $(A)_{ki_k}$ là phần tử đầu tiên bên trái (tính từ trái sang phải) khác 0 của dòng k thì ta phải có $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$.

Các phần tử $(A)_{ki_k}$ gọi là các phần tử *được đánh dấu* của ma trận A. Các cột chứa các phần tử được đánh dấu (các cột i_1, i_2, ..., i_r) gọi là cột đánh dấu của ma trận A. Như vậy, điều kiện (2) có thể phát biểu lại như sau: *Nếu đi từ dòng trên xuống dưới thì các phần tử đánh dấu phải lùi dần về phía phải.* Và như vậy, ma trận bậc thang có dạng như sau:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & i_1 & & i_2 & & i_r & \end{array} \\
A = & \begin{bmatrix}
0\ldots0 & (A)^*_{1\,i_1}\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
0\ldots0 & 0\ldots0 & (A)^*_{2\,i_2} & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & (A)^*_{r\,i_r} & \ldots \\
0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots. & \ldots & 0\ldots & \ldots0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots. & \ldots & 0\ldots & \ldots0
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ \\ (r) \\ (r+1) \\ \\ (m) \end{array}
\end{array}
$$

Ta có nhận xét quan trọng sau:
Nếu A là ma trận bậc thang thì số r trong định nghĩa chính là $\operatorname{rank} A$.

Thật vậy, có thể chỉ ra một định thức con cấp r của A khác 0 chính là định thức D_r tạo bởi r dòng đầu và r cột đánh dấu i_1, i_2, ..., i_r.

$$
D_r = \begin{vmatrix}
(A)_{1\,i_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & (A)_{2\,i_2} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & (A)_{r\,i_r}
\end{vmatrix} = (A)_{1\,i_1}(A)_{2\,i_2}\ldots(A)_{r\,i_r} \neq 0
$$

Ngoài ra, các định thức con cấp $r+1$ của A đều tạo bởi $r+1$ dòng nào đó nên có ít nhất một dòng bằng không. Do đó, chúng đều bằng 0.

3.1.2 Ví dụ về các ma trận bậc thang

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & 1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3^* & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^* & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
B = \begin{pmatrix}
1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4^* & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5^*
\end{pmatrix}
$$

Các ma trận A, B đều là các ma trận bậc thang, và ta có $\operatorname{rank} A = 4$ (bằng số dòng khác không của A), $\operatorname{rank} B = 5$ (bằng số dòng khác không của B).

3.2 Phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Ba phép biến đổi sau gọi là phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận:

1. Đổi chỗ 2 dòng cho nhau.
2. Nhân một dòng cho một số khác 0.
3. Nhân một dòng cho một số bất kỳ rồi cộng vào dòng khác.

Tương tự, bằng cách thay dòng thành cột, ta có 3 phép biến đổi sơ cấp trên các cột của ma trận.

3.3 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp sử dụng các phép biến đổi sơ cấp

Nội dung của phương pháp này dựa trên hai nhận xét khá đơn giản sau

1. Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.
2. Một ma trận khác O bất kỳ đều có thể đưa về dạng bậc thang sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Như vậy, muốn tìm hạng của ma trận A, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa A về dạng bậc thang, do nhận xét (1), hạng của A bằng hạng của ma trận bậc thang, và ta đã biết hạng của ma trận bậc thang chính bằng số dòng khác không của nó.

Cần lưu ý bạn đọc rằng: kỹ năng đưa một ma trận về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp là một kỹ năng cơ bản, nó cần thiết không chỉ trong việc tìm hạng của ma trận mà còn cần để giải nhiều bài toán khác của Đại số tuyến tính.

Sau đây, chúng tôi xin đưa ra một thuật toán để đưa một ma trận về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp:

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3.3.1 Bước 1

Bằng cách đổi chỗ 2 dòng cho nhau (nếu cần), ta luôn có thể giả sử $a_{11} \neq 0$.

Nhân dòng (1) với $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, cộng vào dòng (2),

Nhân dòng (1) với $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, cộng vào dòng (3),

$\vdots$

Nhân dòng (1) với $-\dfrac{a_{n1}}{a_{11}}$, cộng vào dòng (n).

Ta nhận được ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Chú ý. Nếu toàn bộ cột 1 bằng 0 ($a_{11} = 0$, $a_{21} = 0$, ..., $a_{n1} = 0$ thì ta có thể bỏ qua cột 1 mà thực hiện bước 1 với cột kế tiếp.

3.3.2 Bước 2

Xét ma trận

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Nếu $B = O$ hoặc B có dạng bậc thang thì A_1 là ma trận bậc thang, thuật toán kết thúc.

Trong trường hợp ngược lại, tiếp tục lặp lại bước 1 cho ma trận B.

Cần chú ý rằng ma trận B có ít hơn ma trận A 1 dòng và 1 cột. Do đó, sau một số hữu hạn bước lặp, B sẽ là ma trận không hoặc ma trận bậc thang. Khi đó, thuận toán sẽ kết thúc.

3.4 Ví dụ

3.4.1 Ví dụ 1

Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải

$$A \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to 2d_1 + d_4]{d_3 \to 3d_1 + d_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 10 & 12 & 2 \\ 0 & -3 & 13 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4 \to 3_d 2 + d_4]{d_3 \leftrightarrow 4d_2 + d_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 \to -d_1 + d_4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $\operatorname{rank} A = 3$

3.4.2 Ví dụ 2

Tìm hạng của ma trận vuông cấp n

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

Giải

$$B \xrightarrow{c_1 \to c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 = d_3 - d_1 \\ \cdots\cdots \\ d_n = d_n - d_1}]{d_2 = d_2 - d_1} \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix} = C$$

Xảy ra 3 trường hợp sau:

1. $a \neq 1-n$, $a \neq 1$, khi đó ma trận C là ma trận bậc thang và $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = n$
2. $a = 1$, khi đó ma trận C là ma trận bậc thang và $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = 1$
3. $a = 1-n$, khi đó

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}$$

Do đó, C không là ma trận bậc thang nhưng có định thức con cấp $n-1$ khác không, đó là định thức con tạo bởi $n-1$ dòng cuối, $n-1$ cột cuối

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} = (-n)^{n-1} \neq 0$$

và $\det C = 0$

Do đó, $\operatorname{rank} C = n-1$ Bởi vậy, $\operatorname{rank} B = n-1$.

BÀI TẬP

Tìm hạng của các ma trận sau

13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Tìm hạng của các ma trận vuông cấp n

19. $\begin{pmatrix} 1+a & a & \cdots & a \\ a & 1+a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ a & a & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
GIẢI BÀI TẬP HẠNG CỦA MA TRẬN

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 3 tháng 12 năm 2004

13) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\substack{d3 \to -d1+d3 \\ d4 \to (-2)d1+d4}]{d2 \to (-2)d1+d2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[d4 \to (-3)d2+d4]{d3 \to -d2+d3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$.

14) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi dòng}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \to -5d1+d3 \\ d4 \to -2d1+d4}]{\text{d2} \to \text{ - 3d1 + d2}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 12 & -23 & 3 & -31 \\ 0 & 16 & -34 & 4 & -48 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d4 \to -7d1+d4]{\text{d3} \to \frac{-3}{2}\text{d2 + d3}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{d4 \to -2d3+d4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 4$.

15) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>

$$\mathbf{A} \xrightarrow{d1 \leftrightarrow d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \to -3d1+d3 \\ d4 \to -5d1+d4}]{d2 \to -2d1+d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d2 \leftrightarrow -\frac{1}{3}d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[d4 \to 5d2+d4]{d3 \to 2d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d3 \leftrightarrow d4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$.

16) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Giải:</u>

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi dòng}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d4 \to -d1+d4 \\ d5 \to -d1+d5 \\ d6 \to -d1+d6}]{\substack{d2 \to -2d1+d2 \\ d3 \to -d1+d4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d6 \to d2+d6]{d3 \to 2d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d3 \leftrightarrow d6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d6\to 2d3+d6]{d4\to -3d3+d4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&-6\\0&0&0&4\\0&0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[d6\to\frac{1}{3}d4+d6]{d5\to\frac{2}{3}d4+d5}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 4$.

17) Tìm hạng của ma trận :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3&1&1&4\\a&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>:

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{đổi cột}}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\4&10&1&a\\7&17&3&1\\2&4&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{d3\to -7d1+d3\\ d4\to -2d1+d4}]{d2\to -4d1+d2}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\0&6&0&a-12\\0&10&-25&-20\\0&2&-5&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{đổi dòng}}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\0&2&-5&-4\\0&6&0&a-12\\0&10&-15&-20\end{bmatrix}\xrightarrow[d4\to -5d2+d4]{d3\to -3d2+d3}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\0&2&-5&-4\\0&0&15&a\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$. Với mọi a.

18) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1&2&1&-1&1\\a&-1&1&-1&-1\\1&a&0&1&1\\1&2&2&-1&1\end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>:

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{đổi cột}}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\-1&-1&1&a&-1\\1&1&0&1&a\\1&-1&2&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[d4\to -d1+d4]{\substack{d2\to d1+d2\\ d3\to -d1+d3}}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&-2&2&a-1&1\\0&2&-1&2&a-2\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d3\to d2+d3}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&-2&2&a-1&1\\0&0&1&a+1&a-1\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{d4\to -d3+d4}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&-2&2&a-1&1\\0&0&1&a+1&a-1\\0&0&0&a-1&1-a\end{bmatrix}$$

Vậy : nếu $a \neq 1$ thì rank $\mathbf{A} = 4$.

. nếu $a = 1$ thì rank $\mathbf{A} = 3$.

19) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+a & a & \dots & a \\ a & 1+a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & 1+a \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{c1 \to c1+c2+...+cn} \begin{bmatrix} 1+na & a & \dots & a \\ 1+na & 1+a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+na & a & \dots & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow[dn \to -d1+dn]{d2 \to -d1+d2} \begin{bmatrix} 1+na & a & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nếu $a \neq -\dfrac{1}{n}$. Khi đó $1 + na \neq 0$ và rank $\mathbf{A} = n$.

Nếu $a = -\dfrac{1}{n}$. Khi đó $1 + na = 0$ và rank $\mathbf{A} = n - 1$ vì có định thức con cấp $n - 1$ gồm $n - 1$ dòng cuối, cột cuối .

$$\mathbf{D}_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Còn định thức cấp n bằng 0 .

20) Tìm hạng của ma trận ($n \geq 2$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Giải:

Nếu $x \neq 0$:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[d1 \to xd1]{c1 \to xc1} \begin{bmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c1 \to c1+c2+...+cn} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ (n-1)x & 0 & x & \dots & x \\ (n-1)x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d3 \to -d1+d3 \\ dn \to -d1+dn}]{d2 \to -d1+d2} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = n$

Nếu $x = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[dn \to -d2+dn]{d3 \to -d2+d3 \atop \dots\dots\dots} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$rank\mathbf{A} = 2$.
Vậy

$$rank\mathbf{A} = n \text{ nếu } x \neq 0$$

$$rank\mathbf{A} = 2 \text{ nếu } x = 0$$

21) Tìm hạng của ma trận vuông cấp n:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{c1 \to c1+c2+\dots+cn} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{bmatrix} \xrightarrow[dn \to -d1+dn]{d2 \to -d1+d2 \atop {d3 \to -d1+d3 \atop \dots\dots\dots}} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. Nếu $a \neq (1-n)b, a \neq b$ thì $rank\mathbf{A} = n$
2. $a = b \neq 0$ thì $rank\mathbf{A} = 1$
   $a = b = 0$ thì $rank\mathbf{A} = 0$
3. $a = (n-1)b = 0$ thì $rank\mathbf{A} = n-1$
   Vì có định thức con cấp $n-1$ (bỏ dòng đầu, cột đầu)

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} \neq 0$$

   Còn định thức cấp n bằng 0.

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 6 tháng 12 năm 2004

1 Ma trận khả nghịch

1.1 Các khái niệm cơ bản

Cho A là ma trận vuông cấp n, ma trận A gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho

$$AB = BA = E_n \tag{1}$$

(E_n là ma trận đơn vị cấp n)

Nếu A là ma trận khả nghịch thì ma trận B thỏa điều kiện (1) là duy nhất, và B gọi là ma trận nghịch đảo (ma trận ngược) của ma trận A, ký hiệu là A^{-1}.

Vậy ta luôn có: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E_n$

1.2 Các tính chất

1. A khả nghịch $\Longleftrightarrow$ A không suy biến ($\det A \neq 0$)
2. Nếu A, B khả nghịch thì AB cũng khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

1.3 Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

1.3.1 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo nhờ định thức

Trước hết, ta nhớ lại phần bù đại số của một phần tử. Cho A là ma trận vuông cấp n, nếu ta bỏ đi dòng i, cột j của A, ta được ma trận con cấp $n-1$ của A, ký hiệu M_{ij}. Khi đó $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$ gọi là phần bù đại số của phần tử nằm ở dòng i, cột j của ma trận A.

Ma trận

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A.

Ta có công thức sau đây để tìm ma trận nghịch đảo của A.
Cho A là ma trận vuông cấp n.
Nếu $\det A = 0$ *thì A không khả nghịch (tức là A không có ma trận nghịch đảo).*
Nếu $\det A \neq 0$ *thì A khả nghịch và*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Giải
Ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Vậy A khả nghịch.
Tìm ma trận phụ hợp P_A của A. Ta có:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

và do đó

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nhận xét. Nếu sử dụng định thức để tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông cấp n, ta phải tính một định thức cấp n và n^2 định thức cấp $n-1$. Việc tính toán như vậy khá phức tạp khi $n > 3$.

Bởi vậy, ta thường áp dụng phương pháp này khi $n \leq 3$. Khi $n \geq 3$, ta thường sử dụng các phương pháp dưới đây.

1.3.2 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo bằng cách dựa vào các phép biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss)

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A vuông cấp n, ta lập ma trận cấp $n \times 2n$

$$[A \,|\, E_n]$$

(E_n là ma trận đơn vị cấp n)

$$[A \,|\, E_n] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Sau đó, *dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng* đưa ma trận $[A \,|\, E_n]$ về dạng $[E_n \,|\, B]$. Khi đó, B chính là ma trận nghịch đảo của A, $B = A^{-1}$.

Chú ý. Nếu trong quá trình biến đổi, nếu khối bên trái xuất hiện dòng gồm toàn số 0 thì ma trận A không khả nghịch.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải

$$[A \,|\, E_4] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_1 \to d_1+d_2+d_3+d_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1 \to \frac{1}{3}d_1]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_3 \to -d_1+d_3 \\ d_4 \to -d_1+d_4}]{d_2 \to -d_1+d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1 \to d_1+d_2+d_3+d_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_4 \to -d_4 \\ d_3 \to -d_3}]{d_2 \to -d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1.3.3 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải hệ phương trình

Cho ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Để tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}, ta lập hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

trong đó x_1, x_2, $\ldots$, x_n là ẩn, y_1, y_2, $\ldots$, y_n là các tham số.

* Nếu với mọi tham số y_1, y_2, $\ldots$, y_n, hệ phương trình tuyến tính (2) luôn có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

* Nếu tồn tại y_1, y_2, $\ldots$, y_n để hệ phương trình tuyến tính (2) vô nghiệm hoặc vô số nghiệm thì ma trận A không khả nghịch.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Giải

Lập hệ

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = y_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = y_4 & (4) \end{cases}$$

Ta giải hệ trên, cộng 2 vế ta có

$$(a+3)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \qquad (*)$$

1. Nếu $a = -3$, chọn các tham số y_1, y_2, y_3, y_4 sao cho $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \neq 0$. Khi đó (*) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm, bởi vậy A không khả nghịch.

2. $a \neq -3$, từ (*) ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{a+3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \qquad (**)$$

   Lấy (1), (2), (3), (4) trừ cho (**), ta có

$$(a-1)x_1 = \frac{1}{a+3}((a+2)y_1 - y_2 - y_3 - y_4)$$

$$(a-1)x_2 = \frac{1}{a+3}(-y_1 + (a+2)y_2 - y_3 - y_4)$$

$$(a-1)x_3 = \frac{1}{a+3}(-y_1 - y_2 + (a+2)y_3 - y_4)$$

$$(a-1)x_4 = \frac{1}{a+3}(-y_1 - y_2 - y_3 + (a+2)y_4)$$

   (a) Nếu $a = 1$, ta có thể chọn tham số y_1, y_2, y_3, y_4 để $(a+2)y_1 - y_2 - y_3 - y_4$ khác 0. Khi đó hệ và nghiệm và do đó A không khả nghịch.

   (b) Nếu $a \neq 1$, ta có

$$x_1 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}((a+2)y_1 - y_2 - y_3 - y_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}(-y_1 + (a+2)y_2 - y_3 - y_4)$$

$$x_3 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}(-y_1 - y_2 + (a+2)y_3 - y_4)$$

$$x_4 = \frac{1}{(a-1)(a+3)}(-y_1 - y_2 - y_3 + (a+2)y_4)$$

Do đó

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+3)}\begin{pmatrix} a+2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & a+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a+2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Tóm lại:
Nếu $a = -3$, $a = 1$ thì ma trận A không khả nghịch.
Nếu $a \neq -3$, $a \neq 1$, ma trận nghịch đảo A^{-1} được xác định bởi công thức trên.

BÀI TẬP

Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận vuông cấp n

26. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản chưa chỉnh sửa

PGS TS. Mỵ Vinh Quang

Ngày 19 tháng 12 năm 2004

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa

Hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn, $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ là các hằng số, gọi là *hệ phương trình tuyến tính* (m phương trình, n ẩn).

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận các hệ số của hệ (1).

Ma trận

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

gọi là ma trận các hệ số mở rộng của hệ (1). Một hệ phương trình hoàn toàn xác định khi ta biết ma trận các hệ số mở rộng của nó.

Cột

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

gọi là cột tự do của hệ (1).

Chú ý rằng, hệ phương trình (1) có thể cho dưới dạng ma trận như sau

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

trong đó A là ma trận các hệ số của hệ (1).

Nhận xét: Nếu ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của một hệ phương trình tuyến tính ta được hệ mới tương đương với hệ đã cho.

1.2 Một vài hệ phương trình đặc biệt

a. Hệ Cramer

Hệ phương trình tuyến tính (1) gọi là hệ Cramer nếu $m = n$ (tức là số phương trình bằng số ẩn) và ma trận các hệ số A là không suy biến ($\det A \neq 0$).

b. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính (1) gọi là hệ thuần nhất nếu cột tự do của hệ bằng 0, tức là $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

2 Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

2.1 Phương pháp Cramer

Nội dung của phương pháp này cũng chính là định lý sau đây:

Định lý 1 (Cramer) *Cho hệ Cramer*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

là ma trận các hệ số.

Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

trong đó A_i chính là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay cột i của A bằng cột tự do

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ cx_2 + ax_3 = b \\ cx_1 + bx_3 = a \end{cases}$$

trong đó a, b, c là ba số khác 0.
Giải: Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

nên hệ trên là hệ Cramer. Hơn nữa

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & c & a \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2 + c^2\right) b$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \left(-a^2 + b^2 + c^2\right) a$$

và

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 + b^2 - c^2\right) c$$

Do đó, hệ có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}, x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

2.2 Sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss) để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Nội dung cơ bản của phương pháp này dựa trên định lý quan trong sau về nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính.

Định lý 2 (Định lý Cronecker-Capelly) *Cho hệ phương trình tuyến tính tổng quát* (1)*, A và $\overline{A}$ lần lượt là ma trận các hệ số và ma trận các hệ số mở rộng. Khi đó:*

1. *Nếu* $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \overline{A}$ *thì hệ* (1) *vô nghiệm.*

2. *Nếu* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r$ *thì hệ* (1) *có nghiệm. Hơn nữa:*

   (a) *Nếu* $r = n$ *thì hệ* (1) *có nghiệm duy nhất.*

(b) Nếu $r < n$ thì hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

Ta có thuật toán sau để giải hệ phương trình tuyến tính:

Lập ma trận các hệ số mở rộng $\overline{A}$. Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang. Ma trận bậc thang cuối cùng có dạng:

$$\overline{A} \to C = \left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \dots & c^*_{1i_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & c^*_{2i_2} & \dots & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & & \dots & c^*_{ri_r} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right]$$

Hệ phương trình tương ứng với ma trận C tương đương với hệ ban đầu. Do đó

1. Nếu tồn tại ít nhất d_i với $r + 1 \leqslant i \leqslant m$ khác 0 thì hệ vô nghiệm.

2. Nếu $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$ thì hệ có nghiệm. Khi đó các cột $i_1, i_2, \dots, i_r$ (là các cột được đánh dấu *) giữ lại bên trái và các $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ là các ẩn còn các cột còn lại chuyển sang bên phải, các ẩn x_k ứng với các cột này sẽ trở thành tham số. Vậy ta có $n - r$ tham số và hệ đã cho tương đương với hệ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{1i_1} & c_{1i_2} & \dots & c_{1i_r} & d_1(x_k) \\ 0 & c_{2i_2} & \dots & c_{2i_r} & d_2(x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ri_r} & d_r(x_k) \end{array}\right] \tag{3}$$

   trong đó $d_i(x_k)$ là các hàm tuyến tính của x_k với $k \neq i_1, i_2, \dots, i_r$. Hệ phương trình (3) là hệ phương trình dạng tam giác, ta có thể dễ dàng giải được bằng phương pháp thế dần từ dưới lên, tức là tính lần lượt $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$.

Chú ý : Nếu trong quá trình biến đổi xuất hiện 1 dòng mà bên trái bằng 0 còn bên phải khác 0 thì ta có thể kết luận hệ vô nghiệm mà không cần phải làm tiếp.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2m - 8 \end{cases}$$

Giải:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2m-8 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_3 \to (-3)d_1 + d_3 \\ d_4 \to (-1)d_1 + d_4}]{d_2 \to (-2)d_1 + d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & m-3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2m-9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4 \to (-1)d_2 + d_4]{d_3 \to (-2)d_2 + d_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2m-10 \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 \to (-1)d_3 + d_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right]$$

* Nếu $m \neq 5$ hệ phương trình vô nghiệm.
* Nếu $m = 5$, hệ đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 2 tham số là x_2 và x_5. Chuyển cột 2 và cột 5 sang bên phải, hệ có dạng

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 &= 1 - 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 - x_4 &= 1 + 2x_5 \\ -x_4 &= -2x_5 \end{cases}$$

Giải từ dưới lên ta sẽ có

$$\begin{aligned} &x_4 = 2x_5 \\ &x_3 = x_4 + 2x_5 + 1 = 4x_5 + 1 \\ &x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_5 - 2x_4 = -2x_2 - 5x_5 + 1 \end{aligned}$$

Tóm lại, trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = -2a - 5b + 1 \\ x_2 = a \\ x_3 = 4b + 1 & a, b \text{ tùy ý.} \\ x_4 = 2b \\ x_5 = b \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 \to (-m)d_1 + d_4]{\substack{d_2 \to (-1)d_1 + d_2 \\ d_3 \to (-1)d_1 + d_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_4 \to d_2 + d_3 + d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2m-m^2 & 1-m \end{array}\right] = C$$

Chú ý rằng $3 - 2m - m^2 = (1-m)(m+3)$. Bởi vậy:

1) $m = 1$, khi đó

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 3 tham số x_2, x_3, x_4. Nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b - c \\ x_2 = a \\ x_3 = b \\ x_4 = c \end{cases}$$

2) $m = -3$, khi đó

$$C = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Hệ vô nghiệm.

3) $m \neq 1$ và $m \neq -3$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x_4 = \frac{1-m}{3-2m-m^2} = \frac{1}{m+3}$$

$$x_3 = x_4 = \frac{1}{m+3}, \; x_2 = x_4 = \frac{1}{m+3}$$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - mx_4 = \frac{1}{m+3}$$

Vậy: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{m+3}$.

Tóm lại:

- $m = 1$ hệ có vô số nghiệm;
- $m = -3$ hệ vô nghiệm;
- $m \neq 1, -3$, hệ có một nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{m+3}$.

Bài tập

Giải và biện luận các hệ sau:

27. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ 5x_1 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 9 - m \end{cases}$$

29. $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

31. Cho a_{ij} là các số nguyên. Giải hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

32. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \ldots \\ x_1 + nx_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$$

33. Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ và n lẽ, có nghiệm khác 0.

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
§8. Giải bài tập về ma trận nghịch đảo

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 29 tháng 12 năm 2004

Bài 21. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải

Cách 1. *Sử dụng phương pháp định thức*

Ta có: $\det A = 2 + 12 - 9 - 2 = 3$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cách 2. *Sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp*

Xét ma trận

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to -3d_1 + d_3]{d_2 \to -2d_1 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 = -2d_2 + d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 = \frac{1}{3}d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Bài 22. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta sử dụng phương pháp định thức.

Ta có $\det A = 1 + 27 + 8 - 6 - 6 - 6 = 18$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

(Bạn đọc cũng có thể sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp để giải bài này)

Bài 23. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_4 & (4) \end{cases}$$

$(1) + (2) + (3) + (4) \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \qquad (*)$

$(*) - (1) \Longrightarrow x_1 = \dfrac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

$(*) - (2) \Longrightarrow x_2 = \dfrac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 + y_4)$

$(*) - (3) \Longrightarrow x_3 = \dfrac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 + y_4)$

$(*) - (4) \Longrightarrow x_4 = \dfrac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4)$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài 24. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ -x_1 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ -x_1 - x_2 + x_4 = y_3 & (3) \\ -x_1 - x_2 - x_3 = y_4 & (4) \end{cases}$$

$(1) + (2) - (3) + (4) \Longrightarrow -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \qquad (*)$

$(1) - (*) \Longrightarrow x_1 = -y_2 + y_3 - y_4$

$(*) - (2) \Longrightarrow x_2 = y_1 - y_3 + y_4$

$(4) \Longrightarrow x_3 = -x_1 - x_2 - y_4 = -y_1 + y_2 - y_4$

$(3) \Longrightarrow x_4 = x_1 + x_2 + y_3 = y_1 - y_2 + y_3$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài 25. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 & (1) \\ x_2 + \cdots + x_n = y_2 & (2) \\ \vdots & \\ x_{n-1} + x_n = y_{n-1} & (n-1) \\ x_n = y_n & (n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1)-(2) &\Longrightarrow x_1 = y_1 - y_2 \\ (2)-(3) &\Longrightarrow x_2 = y_2 - y_3 \\ &\vdots \\ (n-1)-(n) &\Longrightarrow x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \\ (n) \quad &\Longrightarrow x_n = y_n \end{aligned}$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 26. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 & (1) \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_2 & (2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a)x_n = y_n & (n) \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2) + \cdots + (n)$, ta có

$$(n+a)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

1. Nếu $a = -n$, ta có thể chọn tham số $y_1, y_2, \ldots, y_n$ thỏa $y_1 + \cdots + y_n \neq 0$. Khi đó hệ vô nghiệm và do đó ma trận A không khả nghịch.

2. Nếu $a \neq -n$, khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{n+a}(y_1 + \cdots + y_n) \qquad (*)$$

$$(1) - (*) \Longrightarrow ax_1 = \frac{1}{n+a}((n+a-1)y_1 - y_2 - \cdots - y_n)$$

   (a) Nếu $a = 0$, ta có thể chọn tham số $y_1, y_2, \ldots, y_n$ để phương trình trên vô nghiệm. Do đó hệ vô nghiệm và ma trận A không khả nghịch.

   (b) Nếu $a \neq 0$, ta có

$$x_1 = \frac{1}{a(n+a)}((n+a-1)y_1 - y_2 - \cdots - y_n)$$

$$(2) - (*) \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{a(n+a)}(y_1 - (n+a-1)y_2 - y_3 - \cdots - y_n)$$

$$\vdots$$

$$(n) - (*) \Longrightarrow x_n = \frac{1}{a(n+a)}(y_1 - y_2 - y_3 - \cdots - (n+a-1)y_n)$$

   Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{a(n+a)} \begin{pmatrix} n+a-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n+a-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n+a-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n+a-1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 24 tháng 1 năm 2005

§9. Giải Bài Tập Về Hệ Phương Trình Tuyến Tính

27) Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng $\overline{A}$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang. Nhận xét rằng hệ ban đầu tương đương với hệ có ma trận các hệ số mở rộng là ma trận bậc thang sau cùng. Cụ thể ta có

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \to -d_1 + d_3 \\ d_4 \to -4d_1 + d_4}]{d_2 \to -2d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \leftrightarrow d_2]{d_2 \to 2d_2 + d_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to -3d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6 & 14 & -3m+21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

- Nếu $m \neq 7$ thì hệ vô nghiệm
- Nếu $m = 7$ hệ tương đương với

$$\left[\begin{array}{cccc|l} 1^* & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1^* & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6^* & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_4. Ta có

$$x_3 = \frac{7}{3}x_4, \quad x_2 = 3x_3 - 7x_4 + 1 = 1$$
$$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = \frac{7}{3}x_4 - 4x_4 = \frac{-5}{3}x_4$$

Vậy, trong trường hợp này, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = -5a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 7a \\ x_4 = 3a \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

28) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ 5x_1 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 9 - m \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -5 & 4 & 9-m \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -5 & 4 & 9-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \to -3d_1 + d_3 \\ d_4 \to -5d_1 + d_4}]{d_2 \to -2d_1 + d_2} \left[\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & 2 & 4-m \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_3} \left[\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & 2 & 4-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4 = -5d_2 + d_4]{d_3 \to -2d_2 + d_3} \left[\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 2 & 9-m \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 \to -2d_3 + d_4} \left[\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9-m \end{array}\right]$$

- Nếu $m \neq 9$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 9$ thì hệ có dạng

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1^* & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1^* & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số là x_4, x_5, ta có

$$x_3 = -\frac{1}{6}x_5$$
$$x_2 = -x_3 + 1 = \frac{1}{6}x_5 + 1$$
$$x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 - x + 5 + 1$$
$$= -\frac{1}{6}x_5 - 1 - \frac{1}{6}x_5 + x_4 - x_5 + 1 = -\frac{4}{3}x_5 + x_4$$

Vậy, trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = a - 8b \\ x_2 = b + 1 \\ x_3 = -b & \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ x_4 = a \\ x_5 = 6b \end{cases}$$

29) Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{array}\right]$$

Chú ý rằng $2 - m - m^2 = (2+m)(1-m)$. Ta có

• $m = 1$, hệ trở thành

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 1$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_1, x_2. Nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b \\ x_2 = a & \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ x_3 = b \end{cases}$$

• $m = -2$, hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \text{hệ vô nghiệm}$$

• $m \neq 1, m \neq -2$, hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1+m-m^2-m^3}{(2+m)(1-m)} = \dfrac{m^2+2m+1}{m+2} \\ x_2 = x_3 - m = \dfrac{m^2+2m+1}{m+2} - m = \dfrac{1}{m+2} \\ x_1 = m^2 - x_2 - mx_3 = \dfrac{m^3+2m^2-1-m(m^2+2m+1)}{m+2} = \dfrac{-m-1}{m+2} \end{cases}$$

30) Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 \to -md_1 + d_3]{d_2 \to -d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m & 1-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m & 1-m \end{array}\right] \quad (*)$$

Chú ý rằng $2 - m - m^2 = (1-m)(2+m)$. Ta có các khả năng sau

• $m = 1$ hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 1$, trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc ba tham số x_2, x_3, x_4. Nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b - c \\ x_2 = a \\ x_3 = b \\ x_4 = c \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

• $m = -2$ hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3^* & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^* & 3 \end{array}\right]$$

Ta có $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3. Ta có

$$x_4 = 1,\ 3x_2 = 3x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$$
$$x_1 = -x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = x_3$$

Trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \\ x_4 = 1 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

• $m \neq 1, -2$. Khi đó, từ $(*)$ ta thấy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số x_4 và m. Ta có

$$(2 - m - m^2)x_3 = (1-m) - (1-m)x_4 \Rightarrow x_3 = \frac{(1-m) - (1-m)x_4}{(2-m-m^2)} = \frac{1 - x_4}{m+2}$$

$$(m-1)x_2 = (m-1)x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$$

$$x_1 = 1 - x_2 - mx_3 - x_4 = \frac{(m+2) - (1-x_4) - m(1-x_4) - (m+2)x_4}{m+2} = \frac{1 - x_4}{m+2}$$

Vậy, trong trường hợp này hệ có nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_2 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_3 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_4 = a \end{cases}$$

31) Cho a_{ij} là các số nguyên, giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ \dfrac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Giải: Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)\,x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22}-1)\,x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + (2a_{nn}-1)\,x_n = 0 \end{cases}$$

Gọi ma trận các hệ số của hệ phương trình trên là A_n, ta có

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & \dots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \dots & 2a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & \dots & 2a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

Chú ý rằng a_{ij} là các số nguyên nên các phần bù đại số của $(A_n)_{ij}$ cũng là các số nguyên, do đó nếu khai triển định thức theo dòng cuối ta sẽ có

$$\begin{aligned} \det A_n &= 2k + (2a_{nn}-1)\begin{vmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & \dots & 2a_{1,n-1} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \dots & 2a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a_{n-1,1} & 2a_{n-1,2} & \dots & 2a_{n-1,n-1}-1 \end{vmatrix} \\ &= 2k + (2a_{nn}-1)\det A_{n-1} \\ &= 2k + 2a_{nn}\det A_{n-1} - \det A_{n-1} \\ &= 2l - \det A_{n-1} \end{aligned}$$

Do đó, $\det A_n + \det A_{n-1} = 2l$ là số chẵn, Suy ra $\det A_n$ và $\det A_{n-1}$ có cùng tính chẵn lẽ với mọi n, mà $\det A_1 = 2a_{11} - 1$ là số lẽ nên $\det A_n$ là số lẽ và do đó $\det A_n \neq 0$ (vì 0 là số chẳn). Vì hệ phương trình có $\det A_n \neq 0$ nên hệ trên là hệ Cramer và có nghiệm duy nhất là $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

32) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \cdots \\ x_1 + nx_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$$

Giải: Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Xét đa thức

$$f(X) = x_n X^{n-1} + x_{n-1}X^{n-2} + \cdots + x_2 X + x_1 - 1 = 0$$

Vì $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của hệ nên $X = 1, 2, \ldots, n$ là các nghiệm của đa thức trên. Vì $f(X)$ có bậc $\leqslant n-1$ mà lại có n nghiệm phân biệt nên $f(X) \equiv 0$ ($f(X)$ là đa thức không), do đó ta có $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_2 = 0$, $x_1 = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.

33) Chứng minh hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ và n lẽ, có nghiệm không tầm thường.

Giải: Gọi A là ma trận các hệ số, theo giả thiết $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$ do đó $A = A^t$. Do tính chất định thức $\det A = \det A^t$ nên ta có

$$\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det A^t = (-1)^n \det A = -\det A(\text{ do } n \text{ lẽ})$$

Bởi vậy suy ra $\det A = -\det A$ hay $\det A = 0$, tức là $\operatorname{rank} A = r < n$. Theo Định lý Cronecker-Capelly hệ có vô số nghiệm (phụ thuộc $n - r$ tham số) do đó hệ có nghiệm khác $(0, 0, \ldots, 0)$.

ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 10. Không gian vectơ

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 18 tháng 3 năm 2005

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa không gian vectơ

Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập các số thực, V là tập tùy ý khác $\varnothing$. V gọi là không gian vectơ (trên $\mathbb{R}$) (mỗi phần tử của V gọi là một vectơ) nếu trong V có 2 phép toán:

- Phép cộng 2 vectơ, tức là với mỗi cặp vectơ $\alpha, \beta \in V$ xác định được một vectơ tổng $\alpha + \beta \in V$.
- Phép nhân vô hướng một số với một vectơ, tức là với mỗi $a \in \mathbb{R}$ và vectơ $\alpha \in V$ xác định được một vectơ tích $a\alpha \in V$.

Ngoài ra, phép cộng và phép nhân trên phải thỏa mãn 8 điều kiện sau:

1. Phép cộng kết hợp; với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in V$:

   $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

2. Phép cộng giao hoán, với mọi $\alpha, \beta \in V$:

   $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

3. Phép cộng có vectơ-không, tồn tại vectơ $O \in V$ (vectơ-không) có tính chất:

   $\alpha + O = O + \alpha = \alpha$ với mọi $\alpha \in V$

4. Có vectơ đối, với mọi vectơ $\alpha \in V$, tồn tại vectơ $-\alpha \in V$ (vectơ đối của α) có tính chất:

   $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = O$

5. Phép nhân phân phối với phép cộng, với mọi $a \in \mathbb{R}$ và các vectơ $\alpha, \beta \in V$:

   $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$

6. Phép nhân phân phối với phép cộng, với mọi số thực $a, b \in \mathbb{R}$, mọi vectơ $\alpha \in V$:

   $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

7. Phép nhân kết hợp. Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, với mọi vectơ $\alpha \in V$:

   $(ab)\alpha = a(b\alpha)$

8. $1.\alpha = \alpha$ với mọi vectơ $\alpha \in V$

Như vậy, để kiểm tra tập hợp V cùng với 2 phép toán cộng và nhân vô hướng có phải là không gian vectơ hay không, ta phải kiểm tra xem chúng có thỏa mãn 8 điều kiện trên hay không. Bạn đọc có thể dễ dàng tự kiểm tra các ví dụ sau.

1.2 Các ví dụ về không gian vectơ

1. $V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$ với:

   - Phép cộng: $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$:

   $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$

   - Phép nhân vô hướng: với mọi $a \in \mathbb{R}$, $a.\alpha = a(a_1, \dots, a_n) = (aa_1, \dots, aa_n)$
   thì V là một không gian vectơ.

2. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ - tập các ma trận cấp $m \times n$ với hệ số thực - với phép cộng là phép cộng 2 ma trận, phép nhân vô hướng là phép nhân một số thực với một ma trận, là một không gian vectơ.

3. $\mathbb{R}[x]$ - tập các đa thức với hệ số thực - với phép cộng là phép cộng hai đa thức, phép nhân vô hướng là phép nhân một số với một đa thức, là không gian vectơ.

4. $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong $\mathbb{R}^+$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân vô hướng.

   - Phép cộng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$

   - Phép nhân vô hướng: với mọi $a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ : a * \alpha = \alpha^a$

   Khi đó, $(\mathbb{R}^+, \oplus, *)$ là một không gian vectơ với vectơ-không là 1, vectơ đối của vectơ α là vectơ $\dfrac{1}{\alpha}$

1.3 Các tính chất cơ bản

1. Vectơ O và vectơ đối $(-\alpha)$ là duy nhất.

2. Phép cộng có luật giản ước: với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in V$, nếu $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ thì $\beta = \gamma$

3. $0.\alpha = O$, với mọi $\alpha \in V$,

   $a.O = O$, với mọi $a \in \mathbb{R}$,

   $(-1).\alpha = -\alpha$ với mọi $\alpha \in V$

4. Nếu $a.\alpha = O$ thì $a = 0$ hoặc $\alpha = O$

5. Nếu $\alpha \neq O$ thì $a\alpha = b\alpha \Leftrightarrow a = b$

6. $(-a)\alpha = a(-\alpha) = -(a\alpha)$ với mọi $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in V$

2 Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

2.1 Các khái niệm cơ bản

Cho V là không gian vectơ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là một hệ vectơ của V.

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gọi là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính (PTTT) nếu tồn tại các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho
$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = O$$
tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = O$ có nghiệm khác $(0, \ldots, 0)$

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gọi là hệ vectơ độc lập tuyến tính (ĐLTT) nếu nó không phụ thuộc tuyến tính, nói cách khác hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ĐLTT khi và chỉ khi: nếu $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = O$ với $a_i \in \mathbb{R}$ thì $a_i = 0$ với mọi i, tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = O$ có nghiệm duy nhất là $(0, \ldots, 0)$

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ $\alpha_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (1, 2, 3, 4)$. Hệ trên ĐLTT hay PTTT?

Giải. Xét hệ phương trình vectơ
$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = O$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
Ma trận các hệ số của hệ trên là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Dễ thấy $\operatorname{rank} A = 3$ nên hệ trên có nghiệm duy nhất $(0, 0, 0)$. Vậy hệ vectơ trên độc lập tuyến tính.

Nhận xét. Để xét hệ m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ĐLTT hay PTTT trong $\mathbb{R}^n$, ta lập ma trận A với các cột là các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ rồi tìm $\operatorname{rank} A$. Nếu $\operatorname{rank} A = m$ (số vectơ) thì hệ ĐLTT, nếu $\operatorname{rank} A < m$ thì hệ PTTT.

- Vectơ $\beta \in V$ gọi là biểu thị tuyến tính (BTTT) được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nếu tồn tại các số $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sao cho $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$ (tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ có nghiệm)

2.2 Các tính chất cơ bản

1. Hệ chức vectơ-không luôn PTTT.

2. Hệ gồm 1 vectơ PTTT khi và chỉ khi vectơ đó bằng O, hệ gồm 2 vectơ PTTT khi và chỉ khi 2 vectơ đó tỷ lệ.

3. Nếu một hệ ĐLTT thì mọi hệ con của nó cũng ĐLTT.

4. Hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ PTTT khi và chỉ khi có một vectơ trong hệ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại của hệ.

5. Nếu hệ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ĐLTT thì hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ ĐLTT khi và chỉ khi β không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

3 Hạng của một hệ vectơ

3.1 Hệ vectơ tương đương

Trong không gian vectơ V cho hai hệ vectơ:
(α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$
(β) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$
Ta nói hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) nếu mỗi vectơ của hệ (α) đều biểu thị tuyến tính được qua hệ (β).

Ta nói hệ (α) tương đương với hệ (β) (ký hiệu $(\alpha) \sim (\beta)$) nếu hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) và ngược lại.

Từ định nghĩa, ta có ngay quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương.

3.2 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong không gian vectơ V cho hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ của hệ (α) gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ (α) nếu $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ độc lập tuyến tính và mọi vectơ α_i của hệ (α) đều biểu thị tuyến tính được qua hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$

Từ định nghĩa, ta có ngay hệ con độc lập tuyến tính của một hệ vectơ tương đương với hệ vectơ đó.

3.3 Bổ đề cơ bản về sự độc lập tuyến tính

Trong không gian vectơ V cho hai hệ vectơ
(α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$
(β) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$
Nếu hệ (α) độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) thì $m \leq n$, và ta có thể thay m vectơ của hệ (β) bằng các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ của hệ (α) để được hệ mới tương đương với hệ (β).

Từ bổ đề cơ bản, ta có ngay hai hệ vectơ ĐLTT tương đương thì có số vectơ bằng nhau.

3.4 Hạng của hệ vectơ

Trong không gian vectơ V, cho hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

Hệ (α) có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại khác nhau. Tuy nhiên tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ (α) đều tương đương với nhau (vì chúng cùng tương đương với hệ (α)). Do đó, theo bổ đề cơ bản, tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều có số vectơ bằng nhau. Số đó gọi là *hạng của hệ vectơ* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; ký hiệu $\text{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$

Như vậy ta có
$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} =$ Số vectơ của hệ con độc lập tuyến tính của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

3.5 Cách tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong $\mathbb{R}^n$ cho hệ vectơ
$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$
$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$
....

$\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$
Để tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ta làm như sau:

- Lập ma trận A là ma trận dòng của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, đưa ma trận A về dạng bậc thang. Khi đó:

  $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} = \operatorname{rank} A$

  Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bao gồm các vectơ ứng với các dòng khác không của ma trận bậc thang.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^5$ cho hệ vectơ
$\alpha_1 = (3, 2, 0, 1, 4)$
$\alpha_2 = (4, 1, 0, 2, 3)$
$\alpha_3 = (3, 1, -1, 0, 1)$
$\alpha_4 = (1, 0, 1, 2, 2)$
Tìm một hệ con độc lập tuyến tính và hạng của hệ vectơ trên.

Giải

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}$$

$\operatorname{rank} A = 3$
Do đó, $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$
Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$.

Bài tập

1. Xét xem $\mathbb{R}^2$ có là không gian vectơ hay không? với phép cộng và phép nhân vô hướng sau:

   $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

   $a(a_1, a_2) = (aa_1, 0)$

2. Chứng minh rằng một không gian vectơ hoặc chỉ có một vectơ, hoặc có vô số vectơ.

3. Xét sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính. Tìm hạng và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ sau:

   (a) $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (3, 2, 3, 2)$, $\alpha_4 = (1, 1, 2, 1)$

   (b) $\alpha_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_5 = (0, 1, 2, 3)$

4. Cho hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ĐLTT trong không gian vectơ V. Chứng minh:

   (a) Hệ vectơ $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\ldots$, $\beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ cũng ĐLTT.

   (b) Hệ vectơ

   $\gamma_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m$

   $\gamma_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m$

   ....

   $\gamma_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mm}\alpha_m$

   độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det A \neq 0$, trong đó

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

5. Hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Chứng minh rằng:

   $\text{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \leq \text{rank}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$

6. Cho hai hệ vectơ cùng hạng. Hệ đầu biểu thị tuyến tính được qua hệ sau. Chứng minh hai hệ vectơ đã cho tương đương.

7. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ:

   $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 3, -1, 0)$, $u_3 = (-1, -1, 1, 1)$

   Tìm điều kiện cần và đủ để vectơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3.