Trao đổi trực tuyến tại:

www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

Mục lục

Chương 1.

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Một vài bài toán thực tế

1.1.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Bài toán: Một cơ sở sản xuất dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng dự trữ của từng loại và số lượng từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra một sản phẩm được cho bằng bảng sau:

Loại Nguyên liệu	Nguyên liệu dự trữ	Nguyên liệu cần dùng để sản xuất một đơn vị sản phẩm	
		A	B
I	18	2	3
II	30	5	4
III	25	1	6

Hãy lập quy hoạch sản suất để thu được tiền lãi là lớn nhất, biết rằng tiền lãi thu được khi bán một sản phẩm A là 3 triệu đồng, một sản phẩm B là 2 triệu đồng.

Ta xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên: Gọi x, y theo thứ tự là số sản phẩm A, B cần sản xuất theo kế hoạch. Khi đó, tiền lãi thu được là:

$$Z = 3x + 2y \qquad \text{(triệu đồng)}$$

Những ràng buộc về nguyên liệu dự trữ, đó là:

$$2x + 3y \leq 18 \qquad \text{(Ràng buộc về nguyên liêu I)}$$

$$5x + 4y \leq 30 \qquad \text{(Ràng buộc về nguyên liêu II)}$$

$$x + 6y \leq 25 \qquad \text{(Ràng buộc về nguyên liêu III)}$$

Ngoài ra, còn các ràng buộc tự nhiên là $x, y \geq 0$. Vì số đơn vị sản phẩm không thể âm. Như vậy, bằng ngôn ngữ toán học, bài toán có thể phát biểu như sau: Tìm x và y sao cho tại đó biểu thức $Z = 3x + 2y$ đạt giá trị lớn nhất, với các ràng buộc:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leqslant 18 \\ 5x + 4y \leqslant 30 \\ x + 6y \leqslant 25 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Bài toán tổng quát của bài toán trên là: Hãy tìm véc tơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sao cho hàm $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ với các ràng buộc :

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, i = 1...m \\ x_j \geqslant 0, j = 1..n \end{cases}$$

1.1.2 Bài toán vận tải

Bài toán. Cần vận chuyển hàng từ hai kho (trạm phát) P_1 và P_2 tới ba nơi tiêu thụ (trạm thu) T_1, T_2, và T_3. Bảng dưới đây cho biết cho biết số lượng hàng vận chuyển cùng với cước phí vận chuyển một đơn vị hàng từ mỗi kho tới mỗi nơi tiêu thụ tương ứng.

Trạm phát \ Trạm thu		T_1	T_2	T_3
		35	25	45
P_1	30	5	2	3
P_2	75	2	1	1

Hãy lập lập kế hoạch vận chuyển thỏa mãn yêu cầu bài toán sao cho chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Ta xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên.

Gọi x_{ij} là lượng hàng hóa cần vận chuyển từ P_i đến T_j, $(i = 1..2vj = 1..3)$ thì ta có mô hình toán học bài toán là:

Tìm $X = (x_{ij})$ sao cho: $f = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \longrightarrow$ min với các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_{11} \quad +x_{12} \quad +x_{13} \qquad\qquad\qquad = 30 \\ \qquad\qquad\qquad x_{21} \quad +x_{22} \quad +x_{23} = 75 \\ x_{11} \qquad\qquad +x_{21} \qquad\qquad = 35 \\ \quad x_{12} \qquad\qquad\qquad +x_{22} \qquad = 25 \\ \qquad x_{13} \qquad\qquad\qquad\qquad +x_{23} = 45 \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1..2, j = 1..3 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Bài toán tổng quát của bài toán vận tải.

Bài toán có m trạm phát, lượng phát là $a_i, i = 1, ..., m$, n trạm thu, lương thu tương ứng là $b_j, j = 1, ..., n; c_{ij}$ là cước phí, x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ trạm phát thứ i đến trạm thu j. Khi đó, bài toán có mô hình toán học như sau: Tìm $x = (x_{ij})$ sao cho $f = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow$ min với các ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, ..., m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, ..., n \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n \end{cases} \tag{1.1.3}$$

1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính

1.2.1 Dạng tổng quát

Bài toán quy hoạch tuyến tính là bài toán tìm biến (hoặc phương án) thỏa mãn các ràng buộc sao cho làm hàm mục tiêu đạt cực đại hoặc cực tiểu. Với cả hàm mục tiêu và các ràng buộc đều tuyến tính theo biến.

Nhận xét, $\max(z) = -\min(-z)$. Do đó, quy hoạch tuyến tính là:

Tìm $x = (x_1, \cdots, x_n)$ sao cho

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow \min \ (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \begin{bmatrix} \leqslant \\ \geqslant \\ = \end{bmatrix} b_i, i \in I_k, k = 1, 2, 3 \ (2) \\ x_j \begin{bmatrix} \geqslant \\ \leqslant \end{bmatrix} 0, j \in N_l, l = 1, 2 \ (3) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Trong đó, véc tơ x thỏa các ràng buộc (2) và (3) được gọi là phương án. Phương án là hàm mục tiêu $f(x)$ đạt giá trị cực trị theo yêu cầu được gọi là phương án tối ưu. Giải quy hoạch tuyến tính là tìm phương án tối ưu của bài toán.

1.2.2 Dạng chính tắc và dạng chuẩn tắc

- Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là quy hoạch tuyến tính dạng

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow \min \ (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i, i = 1, \cdots, m \ (2) \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2 \ , \cdots, \text{n} \ (3) \end{cases}$$

- Dạng ma trận của quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{aligned} & f(x) = c^T x \rightarrow \min && (1) \\ & Ax = b && (2) \\ & x \geqslant 0 && (3) \end{aligned}$$

  Trong đó, c, x là véc tơ cột của $\mathbb{R}^n$, b là véc tơ cột của $\mathbb{R}^m$. A là ma trận cấp $n \times m$

- **Nhận xét:** Mọi quy hoạch tuyến tính đều đưa được về dạng chính tắc. Thật vậy, nếu $A_i x \geq b_i$ (hoặc $A_i x \leq b_i$) thì ta chọn biến bù x_{n+i} đưa về dạng $A_i x - x_{n+i} = b_i$ (hoặc $A_i x + x_{n+i} = b_i$).

Khi $x_j \leq 0$ (hoặc $x_j \in \mathbb{R}$) thì ta thay $x_j = -x_j$ (hoặc $x_j = x_j^+ x_j^-$) mà x_j, x_j^+, x_j^- là các biến không âm.

Ví dụ 1. Đưa bài toán sau về dạng chính tắc

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 & +7x_2 & +x_3 & \geqslant 3 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & \leqslant -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & = 11 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

Bài giải

Ta chọn biến bù x_4, x_5 cho cho ràng buộc thứ nhất, thứ hai. Chọn ẩn phụ x_3^+, x_3^- và thay $x3 = x_3^+ - x_3^-$ cho sự không mang dấu của x_3.

Từ đó, ta đưa bài toán sau về dạng chính tắc như sau:

$$-f(x) = -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 & +7x_2 & +x_3 & -x_4 = 3 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_5 = -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & = \ 11 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 4, 5; x_3^* \geqslant 0, * = +, -$$

- Dạng ma trận của quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc :

$$f(x) = c^T x \to \min \qquad (1)$$
$$Ax \leqslant b \qquad (2)$$
$$x \geqslant 0 \qquad (3)$$

- Khi đưa từ dạng chuẩn tắc về chính tắc ta chỉ cần thêm biến bù cho các ràng buộc.

1.3. ý nghĩa hình học và phương pháp đồ thị

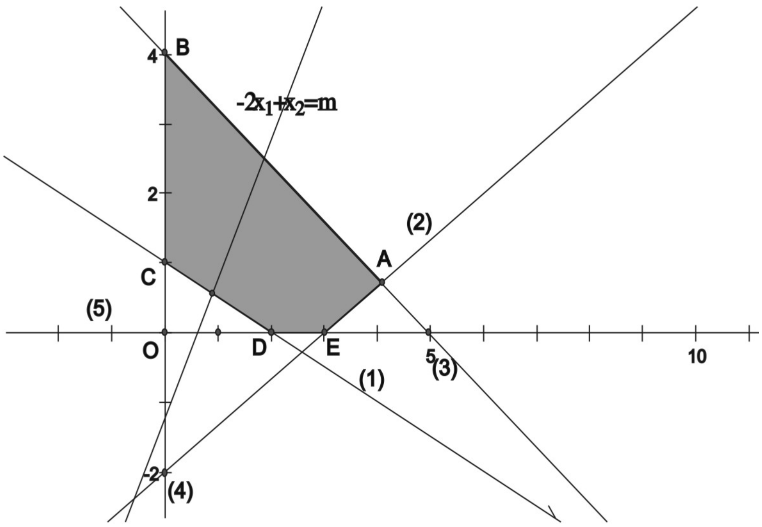
Xét quy hoạch tuyến tính hai ẩn

$$f(x) = -2x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & \geqslant & 2 & (1) \\ 2x_1 & -3x_2 & \leqslant & 6 & (2) \\ 4x_1 & +5x_2 & \leqslant & 20 & (3) \\ x_1 & & \geqslant & 0 & (4) \\ & x_2 & \geqslant & 0 & (5) \end{cases}$$

Sau đây ta đây ta đưa ra cách giải hình học bài toán (phương pháp đồ thị). Trước hết ta biểu diễn hình học tập phương án (Hình 1).

Trên mặt phẳng tọa độ $0x_1x_2$, các ràng buộc được biểu diễn bởi các nửa mặt phẳng . Giao của chúng là tập phương án của bài toán. Tập phương án bài toán là ngũ giác $ABCDE$.



Tập các điểm (x_1, x_2) sao cho hàm mục tiêu nhận giá trị $m : -2x_1 + x_2 = m$, là đường thẳng, được gọi là đường mức (với mức là m). Khi m thay đổi cho ta họ đường thẳng song song, có véc tơ pháp tuyến $v = (-2, 1)$.

Khi cho m giảm dần ta thấy điểm cuối cùng mà đường mức (m) còn cắt tập phương án là đỉnh A. A là giao điểm của đường thẳng (2) và (3) nên $A = (45/11, 8/11)$.

Vậy, $x* = \left(\dfrac{45}{11}, \dfrac{8}{11}\right)$ là phương án tối ưu và $f_{\min} = f(x*) = 82/11$.

Nhận xét

+ Trong trường hợp tập phương án khác rỗng mà không có vị trí giới hạn thì bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn

+ Phương pháp đồ thị có thể áp dụng cho trường hợp nhiều biến nhưng chỉ có hai ràng buộc cưỡng bức.

1.4. Bài tập chương 1

Bài 1.1. Một cơ sở sản xuất có thể làm được hai loại hàng I và hàng II, từ nguyên liệu A và B. Trữ lượng các nguyên liệu A và B hàng ngày có được theo thứ tự là 6 và 8 đơn vị. Để sản xuất một đơn vị hàng I cần 2 đơn vị nguyên liệu loại A và 3 đơn vị nguyên liệu loại B; sản xuất một đơn vị hàng II cần 1 đơn vị nguyên liệu loại A và 4 đơn vị nguyên liệu loại B. Giá bán một đơn vị hàng I và hàng II theo thứ tự là 7 và 5 đơn vị tiền tệ. Qua tiếp thị được biết, trong một ngày nhu cầu tiêu thụ hàng II không quá 2 đơn vị; nhu cầu hàng I hơn hàng II không quá 1 đơn vị. Vấn đề đặt ra là cần sản xuất mỗi ngày bao nhiêu đơn vị hàng mỗi loại để doanh thu lớn nhất.

Hãy thiết lập mô hình toán học cho bài toán đó?

Bài 1.2. Một máy bay có trọng tải M. Có n loại hàng hóa cần xếp lên máy bay đó. Mỗi đơn vị loại j có khối lượng là a_j và giá cước phí là $b_j, (j = 1n)$. Cần xếp lên máy bay mỗi loại hàng bao nhiêu đơn vị để tổng cước phí thu được là nhiều nhất.

Hãy thiết lập mô hình toán học cho bài toán đó?

Bài 1.3. Giả sử một nhà máy cần phân công cho m phân xưởng cùng sản xuất một loại máy có n chi tiết khác nhau, trong đó mỗi máy cần k_j chi tiết thứ $j\,(j = 1, \ldots, n).a_{ij}$ là số chi tiết thứ j mà phân xưởng thứ i có thể sản xuất trong một đơn vị thời gian.

Hãy lập mô hình toán học bài toán xác định số đơn vị thời gian cần dành sản xuất chi tiết j của phân xưởng i trong một đơn vị thời gian?

Bài 1.4. Dùng định nghĩa, chứng tỏ x^* là phương án tối ưu của các bài toán sau

(a) $f(x) = 84x_1 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 1 \\ 4x_1 - x_3 \geqslant -3 \end{cases}$$

$x_1 \geqslant 0$

$x^* = (0, 2, 3)$

(b) $f(x) = x_2 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 = 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 2 \\ & 3x_2 & + & 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_1 \geqslant 0$

$x^* = (0, -1,\ 0,\ 3)$

(c) $f(x) = x_1 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & \leqslant 4 \\ -x_1 & +x_2 & +9x_3 & +4x_4 & = 16 \end{cases}$$

$x_1 \geqslant 0$

$x^* = (0, 1, 3, -3)$

Bài 1.5. Chứng tỏ rằng các bài toán sau có tập phương án khác rỗng nhưng hàm mục tiêu không bị chặn.

(a)
$$f(x) = 3x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

(b)
$$f(x) = x_1 - x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 3 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

Bài 1.6. Tìm phương án tối ưu của bài toán sau:

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geqslant 10 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_3 - 5x_4 \leqslant -13 \\ 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Bài 1.7. Chứng tỏ rằng, đối với các bài toán sau, mọi phương án đều là phương án tối ưu:

(a)
$$f(x) = -3x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -7 \\ -4x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = 100x_1 + 70x_2 - 30x_3 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} x_1 & -8x_2 & -9x_3 & \geqslant -19 \\ x_1 & -3x_2 & -4x_3 & = -13 \\ 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = -15 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0$$

Bài 1.8. Giải bằng phương pháp đồ thị các bài toán sau:

(a)
$$f(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & \leqslant 2 \\ x_1 & -2x_2 & \leqslant 2 \\ x_1 & +x_2 & \leqslant 5 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

(b)
$$f(x) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 & +3x_2 & \geqslant 12 \\ -x_1 & +x_2 & \leqslant 5 \\ x_1 & +5x_2 & \leqslant 6 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0,$$

Bài 1.9. Đưa bài toán về dạng chính tắc:

(a)
$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 - x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

(b)
$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\ x_2 \geqslant -5 \end{cases}$$

Bài 1.10. Cho bài toán

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ \lambda x_1 + x_2 \leqslant 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

Tìm tất cả giá trị của sao sao cho

(a) Tập phương án là rỗng.

(b) Tập phương án khác rỗng nhưng hàm mục tiêu không bị chặn.

(c) Bài toán có phương án tối ưu duy nhất .

(d) Bài toán có vô số phương án tối ưu.

Bài 1.11. Cho quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 4x_1 + 8x_2 + x_3 - 6x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & \leqslant 50 \\ 4x_1 & +8x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 80 \\ 4x_1 & +4x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 40 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1..4$$

(a) Chứng minh mọi phương án của bài toán đều có $x_1 = x_4 = 0$.

(b) Xác định tập phương án. Từ đó tìm phương án tối ưu của bài toán đã cho.

Chương 2.

TÍNH CHẤT CỦA TẬP PHƯƠNG ÁN VÀ TẬP PHƯƠNG ÁN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1. Tập hợp lồi

Định nghĩa 2.1.1 (Tổ hợp lồi). Giả sử $x^1, x^2, \ldots, x^m$ là các điểm của $\mathbb{R}^n$. Điểm x được gọi là *tổ hợp lồi* của các điểm ấy nếu tồn tại $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, .., m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sao cho x $= \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$

Trong trường hợp x là tổ hợp lồi của hai điểm x^1, x^2 ta thường viết

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Tập hợp các điểm là tổ hợp lồi của hai điểm x^1, x^2 được gọi là *đoạn thẳng* nối hai điểm ấy. Khi đó, hai điểm x^1, x^2 gọi là đầu mút, các điểm còn lại của đoạn thẳng gọi là điểm trong của đoạn thẳng ấy.

Định lý 2.1.2 (Tính chất bắc cầu của tổ hợp lồi). *Điểm x là tổ hợp lồi của các điểm x^j, $j = 1, .., m$ và mỗi điểm x^j là tổ hợp lồi của các điểm y^i, $i = 1, .., k$. Khi đó x là tổ hợp lồi của các điểm y^i, $i = 1, .., k$.*

Định nghĩa 2.1.3 (Tập lồi). Tập $L \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* nếu L chứa hai điểm nào đó thì nó chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Tập rỗng và tập đơn tử được coi như tập lồi.

Định lý 2.1.4 (Tính chất tập lồi).

(a) *Giao của các tập lồi là tập lồi.*

(b) *Nếu L là tập lồi thì nó chứa mọi tổ hợp lồi của hữu hạn điểm của tập đó.*

Định nghĩa 2.1.5 (Điểm cực biên của tập lồi). Điểm x^0 của tập lồi L được gọi là *điểm cực biên* của tập lồi ấy nếu nó không là điểm trong của đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt trong L, tức là không tồn tại trong L hai điểm phân biệt x^1, x^2 sao cho $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, $0 < \lambda < 1$.

Định nghĩa 2.1.6 (Đa diện lồi và tập lồi đa diện).

(a) Tập L gồm các điểm là tổ hợp lồi của các điểm x^i, $i = 1, .., m$ cho trước được gọi là *đa diện lồi* sinh bởi hệ điểm đó x^i.

(b) Giao của một số hữu hạn các nữa không gian trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi đa diện.*

Người ta chứng minh được rằng, một tập lồi đa diện không rỗng và giới nội là một đa diện lồi.

2.2. Tính chất của tập phương án và tập phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

Định lý 2.2.1 (Tính lồi của tập phương án).

(a) Tập các phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính là tập lồi.

(b) Tập các phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính là tập lồi.

Định lý 2.2.2 (Phương án cực biên).

(a) *Nếu tập phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính không rỗng và là đa diện lồi thì bài toán đó có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.*

(b) *Giả sử* $\overline{x}$ *là một điểm của* $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad A_i x \geqslant b_i, i = 1, \ldots, m\}$, *trong đó* A_i *là ma trận dòng thứ i của ma trận* A *cỡ* $n \times m$. *Khi đó,* $\overline{x}$ *là điểm cực biên của* P *khi và chỉ khi thỏa mãn với dấu bằng đối với n bất phương trình độc lập tuyến tính trong m bất phưng trình* $A_i x \geqslant b_i$, $i = 1..m$.

2.3. Tính chất của quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Định lý 2.3.1 (Điều kiện của phương án cực biên). *Giả sử* $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ *là phương án khác* 0 *của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc, với tập phưng án*

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; x_1 A^1 + x_2 A^2 + ... + x_n A^n = b; \; x \geqslant 0\right\}.$$

Khi đó, x^0 *là phương án cực biên của tập* P *khi và chỉ khi hệ véc tơ liên kết với nó, tức là hệ* $H(x^0) = \left\{A^j : \; x_{j0} > 0\right\}$ *độc lập tuyến tính.*

Hệ quả 2.3.2 (Tính hữu hạn của phương án cực biên). *Số phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.*

Định lý 2.3.3 (Phương án cực biên tối ưu). *Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì nó có ít nhất một phương án cực biên tối ưu.*

Định lý 2.3.4 (Điều kiện có phương án tối ưu). *Điều kiện cần và đủ để bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu là tập phương án khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn.*

2.4. Bài tập chương 2

Bài 2.1. Chứng minh các bài toán sau có phương án tối ưu

(a) $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, 3$$

(b) $g(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

(c) $\varphi(x) = 3x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

Bài 2.2. Chứng minh rằng hình tròn trong $\mathbb{R}^2$ là một tập lồi.

Bài 2.3. Giả sử x là điểm của tập lồi L. Chứng minh rằng x là điểm cực biên của L khi và chỉ khi $L \setminus \{x\}$ là tập lồi.

Bài 2.4. Trên $\mathbb{R}^2$, cho hai điểm $A(2,1)$ và $B(3,4)$ và hệ bất phương trình với m-tham số

$$\begin{cases} 2x - y \geqslant m - 2 \\ x - 3y \leqslant m + 3 \\ x + y \geqslant 2 - 3m \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho mọi điểm thuộc đoạn thẳng AB đều là nghiệm của hệ đã cho.

Bài 2.5. Cho hai tập lồi đa diện $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geqslant b, \ x \geqslant 0\}$, trong đó A là ma trận cỡ $n \times m$ và $Y = \{(x,y) : \ x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^m, \ Ax - y = b, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$. Chứng minh rằng $\overline{x}$ là điểm cực biên của X thì $(\overline{x}, \overline{y})$ là điểm cực biên của Y, ở đó $\overline{y} = A\overline{x} - b$ và ngược lại.

Bài 2.6. Tìm tất cả các điểm cực biên của các tập lồi cho bởi hệ sau

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 3 \\ -3x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leqslant 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, .., 5 \end{cases}$

Bài 2.7. Trên $\mathbb{R}^2$ cho các điểm $O(0,0), A(0,2), B(1,3), C(2,0)$.

(a) Viết hệ ràng buộc cho quy hoạch tuyến tính nhận tứ giác $OABC$ làm tập phưng án.

(b) Với giá trị nào của tham số λ thì B là phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính có tập phương án là $OABC$ và hàm mục tiêu $f(x) = x - 2y \longrightarrow \min$

(c) Tìm miền giá trị của hàm số $g(x) = x - 2y$ trên $OABC$.

Bài 2.8. Cho quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + \lambda x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0$$

(a) Đối với mỗi giá trị của λ hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đã cho.

(b) Với giá trị nào của λ thì giá trị tối ưu hàm mục tiêu nhỏ nhất.

Bài 2.9. Tìm tất cả các điểm cực biên của các tập lồi được xác định bởi các hệ sau

(a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 20 \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$

(b) $$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad +2x_4 = 1 \\ x_1 \quad +x_2 \quad +4x_3 \quad -2x_4 = 2 \\ x_1 \geqslant 0 \quad j = 1, ..., 4 \end{cases}$$

Bài 2.10. Chứng tỏ các bài toán sau có phương án cực biên nhưng hàm mục tiêu không bị chặn.

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 \to \max$$

(a) $$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geqslant 10 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_3 - 5x_4 \leqslant -13 \\ 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$f(x) = -4x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \to \min$$

(b) $$\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ 6x_1 \quad -2x_2 \geqslant 6 \\ x_3 \leqslant -7 \\ x_3 \quad +5x_4 = -12 \end{cases}$$

Bài 2.11. Cho quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị tham số a, b sao cho

(a) Tập phương án khác rỗng.

(b) Bài toán đã cho có phương án tối ưu.

(c) Hàm mục tiêu không bị chặn.

Bài 2.12. Đối với mỗi bài toán sau, chứng tỏ rằng, x^* là phương án cực biên tối ưu.

(a) $f(x) = 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 \geqslant 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\ -x_1 \quad - 2x_3 \leqslant -2 \\ -3x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ x_1 - x_2 \geqslant -2 \end{cases}$$

$x^* = (2, 1, 0)$

(b)

$$f(x) = x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad x_5 = 4 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_4 - x_5 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_j \geqslant 0 \quad , j = 1, .., 5 \end{cases}$$

$x* = (1, 2, 0, 0, 0)$

Bài 2.13. Cho quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leqslant -1 \\ x_2 \leqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 3 \end{cases}$$

Trong các điểm $x^1 = (-1, 0)$, $x^2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right), x^3 = (-7, -1), x^4 = \left(-\frac{7}{9}, -\frac{1}{9}\right)$, điểm nào là phương án cực biên, phương án tối ưu của bài toán đã cho?

Chương 3.

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ

3.1. Cơ sở lí luận

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(x) = c^T x \to \min \qquad (1)$$

$$Ax = b \ (2)$$

$$x \geqslant 0 \ (3)$$

Với A là ma trận $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, c và $x \in \mathbb{R}^n$, trong đó, A có hạng là m ($m \leq n$). Bài toán quy hoạch là không suy biến, tất cả phương án cực biên của nó đều có số thành phần dương bằng m và $x^* = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$ là một phương án cực biên. Ký hiệu $J_0 = \{j : x_{0j} > 0\}$. Hệ véc tơ $\{A^j : j \in J_0\}$ độc lập tuyến tính, cho nên các véc tơ $A^i, i = 1, .., n$ đều biểu thị duy nhất qua cơ sở $\{A^j : j \in J_0\}$

$$A^i = \sum_{j \in J} x_{ij} A^j, \text{ i = 1,..,n} \qquad (4)$$

Nếu gọi B là ma trận có các cột là $\{A^j, j \in J_0\}$ và đặt $x^i = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^m$, $j \in J_0$ thì $A^i = Bx^i$ hay $x^i = B^{-1}A^i$, $i = 1, ..., n$.

Nếu đặt $x^0 = (x_j^0) \in \mathbb{R}^m$, $c_0 = (c_j^0) \in \mathbb{R}^m$ với $j \in J_0$ thì $f(x_0) = c_0^T x_0 = \sum\limits_{j \in J_0} c_j^0 x_{0j}$, $Bx^0 = b$.

Định nghĩa 3.1.1 (Ước lượng). Ta gọi $\Delta_i = c^{0T} x^i - c_i$, $i = 1, \ldots, n$ là *ước lượng* của biến x^i (hay của véc tơ A^i) ứng với cơ sở J_0.

Định lý 3.1.2 (Dấu hiệu tối ưu). *Nếu phương án cực biên x^* của quy hoạch tuyến tính có $\Delta_i \leqslant 0$, $i = 1, \dots, n$ thì x^* là phương án tối ưu của bài toán* (1),(2),(3).

Chứng minh.

Xét phương án bất kì $y = (y_i)$, ta có:

$$b = \sum_{i=1}^{n} y_i.A^i = \sum_{i=1}^{n} y_i(\sum_{j\in J_0} x_{ij}.A^j) = \sum_{j\in J_0}(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_i.)A^j;\ b = \sum_{j\in J_0} x_{0j}A^j(\text{do } (4))$$

$$\Rightarrow x_{0j} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_i.\ j = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

Từ $\Delta_i \leqslant 0$ $(\forall i)$ suy ra $c^{0T}x^i \leqslant c_i$. Do đó, ta được:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} (c^{0T}x^i)y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j\in J_0} x_{ij}c_j)y_i \\ &= \sum_{j\in J_0}(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_i)c_j \\ &= \sum_{j\in J_0} c_j.x_{0j} = f(x_0) \end{aligned}$$

Vậy, x^0 là phương án tối ưu. □

Định lý 3.1.3 (Dấu hiệu hàm mục tiêu không bị chặn). *Nếu phương án cực biên x^0 của quy hoạch tuyến tính mà có j sao cho $\Delta_j > 0$ và $x^j \leq 0$ thì bài toán* (1),(2),(3) *có hàm mục tiêu không bị chặn.*

Chứng minh.

Ta có:

$$A^i = \sum_{j\in J_0} x_{ij}A^j \quad (\forall i) \qquad\qquad (\text{theo } (4))$$

Gọi

$$d_i = (dij) : dij = \begin{cases} x_{ij} & j \in J_0 \\ -1 & j = i \\ 0 & j \notin J_0 \cup \{i\} \end{cases}$$

Xét véc tơ $x(\theta) = x^0 - \theta d_i(\theta \geq 0)$, ta có:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(\theta)A^j = \sum_{j\in Jo}(x_{0j} - \theta x_{0j})A^j + \theta A^i$$
$$= \sum_{j\in Jo} x_{0j}A^j + \theta(A^i - \sum_{j\in J_0} x_{0j}A^j) = b + 0 = b.$$

Và $x_{ji} \leq 0$ nên $d_i \leq 0$ mà $x_0 \geq 0$, cho nên $x(\theta) \geq 0$ với mọi $\theta \geq 0$.

Do đó, $x(\theta)$ là phương án của bài toán.

Mặt khác, ta thấy

$$f(x(\theta)) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(\theta) = \sum_{j\in J_0} c_j(x_{0j} - \theta x_{ij}) + \theta c_i$$
$$= \sum_{j\in J_0} c_j x_{0j} + \theta\Big((c_i) - \sum_{j\in J_0} c_j x_{ij}\Big)$$
$$= f(x_0) - \theta\Delta_i \to -\infty \quad \text{khi} \quad \theta \to +\infty \quad \text{do} \quad \Delta_i > 0.$$

Do đó, hàm mục tiêu không bị chặn. □

Định lý 3.1.4 (Dấu hiệu xây dựng được phương án tối hơn). *Nếu phương án cực biên x^0 của quy hoạch tuyến tính tồn tại j sao cho $\Delta_j > 0$ và x_j có ít nhất một thành phần dương thì có thể xây dựng được phương án tốt hơn x^0.*

Chứng minh.

Xét véc tơ $x(\theta) = x_0 - \theta di(\theta > 0)$. với

$$d_i = (dij) : dij = \begin{cases} x_{ij} & j \in J_0 \\ -1 & j = i \\ 0 & j \notin J_0 \cup \{i\} \end{cases}$$

Theo trên, $Ax(\theta) = b$ và $f(x(\theta)) = f(x_0) - \theta\Delta_i < f(x_0)$ vì $\theta > 0$ và $\Delta_i > 0$.

Tuy nhiên, x_{ji} còn có j mà $x_{ji} > 0$ nên không bảo đảm cho $x(\theta) \geq 0$, với mọi $\theta > 0$.

Giá trị lớn nhất của θ để có $x(\theta) \geq 0$ là

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{x_{0j}}{x_{ij}} : \ x_{ij} > 0, \ j = 1, 2, ..., m\right\} = \frac{x_{0r}}{x_{ir}}$$

Bằng cách đặt $\overline{x} = x(\theta_0)$ được phương án mới tốt hơn phương án đã cho. □

Nhận xét 3.1.5. A^r là véc tơ đưa ra ngoài cơ sở (J_0'), còn A^i là véc tơ (vào) cơ sở (J_0'). Việc chọn véc tơ vào cơ sở, thường theo quy tắc: $\max\{\Delta_i : i = 1, \ldots, n\} = \Delta v$ khi đó Av là véc tơ vào cơ sở.

3.2. Thuật toán đơn hình

3.2.1 Thuật toán đơn hình

Thuật toán đơn hình để giải quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc khi biết phương án cực biên x^*.

B1. Kiểm tra tối ưu.

Xác định: $c^0, x^i = B^{-1}A^i, i = 0, 1, \ldots, n$. Tính $\Delta_i = c^{0T}x^i - c_i,\ i = 1, \ldots, n$. Nếu $\Delta_i > 0,\ \forall i$ thì x^* là phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc. Ngược lại, chuyển sang B2.

B2. Kiểm tra hàm mục tiêu bài toán không bị chặn.

Nếu tồn tại $k : \Delta_k > 0$ và $x_k \leq 0$ thì bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn. Thuật toán kết thúc. Ngược lại, chuyển sang B3.

B3. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn.

(i) Tìm véc tơ đưa vào cơ sở: Nếu $\max \Delta_i :\ i = 1, \ldots, n = \Delta^v$ thì A^v được chọn đưa vào cơ sở.

(ii) Tìm véc tơ đưa ra cơ sở: Nếu $\min\left\{\dfrac{x_{0i}}{x_{vi}} : x_{vi} > 0\right\} = \dfrac{x_{0r}}{x_{v.r}}$ thì ta chọn A^r đưa ra cơ sở.

(iii) Xây dựng phương án cực biên mới (ứng với cơ sở vừa xác định mới). Bằng phép biến đổi dòng, người ta gọi là phép xoay, ta có phương án cực biên mới. Chuyển trở lại B1.

3.2.2 Bảng đơn hình

Thuật toán đơn hình thường được biểu diễn dưới dạng bảng. Mỗi bước ứng với một phương án cực biên là một bảng đơn hình.

Mỗi bảng đơn hình gồm $3+n$ cột: cột c_0, cột thứ hai ghi các véctơ trong cơ sở, cột thứ ba ghi x^0. Dòng trên cùng ghi véctơ hệ số hàm mục tiêu c, dòng thứ hai ghi các véctơ x^j mà các thành phần của nó được ghi vào cột tương ứng. Dòng cuối cùng ghi $f = f(\overline{x})$ và các Δ_j, $j = 1, \ldots, n$ mà các giá trị của nó được tính ngay trên bảng đơn hình này.

- $f(\overline{x}) = c^{0T}x^0$: Tích vô hướng của c^0 và x^0.
- $\Delta_j = c^{0T}x^j - c_j$: Tích vô hướng của c^0 và x^j trừ đi c_j.

Sau khi tính các ước lượng ta tiến hành kiểm tra tính tối ưu, tính không bị chặn của hàm mục tiêu. Nếu thỏa một trong hai tính chất trên thì thuật toán kết thúc, còn không thì ta xây dựng phương án cực biên mới, tương ứng với bảng đơn hình mới.

Để xây dựng bảng đơn hình tiếp theo, ta lần lượt làm các việc sau:

(I) Tìm cột xoay: Nếu phương án chưa thỏa tính tối ưu thì cột (v) ứng với véc tơ đưa vào cơ sở A^v là cột xoay.

(II) Tìm dòng xoay: Theo quy tắc tìm véc tơ đưa ra cơ sở, nếu tìm được véc tơ đưa ra là A^r thì dòng r là dòng xoay.

(III) Thực hiện phép xoay: Ta có dòng A^r của ma trận A là dòng xoay, cột A^v của ma trận A là cột xoay,thì (x_{vr}) gọi là phần tử trục. Khi đó, ta xây dựng được bảng đơn hình mới bằng phép xoay.

Từ bảng đơn hình, ta lập bảng tiếp theo như sau:

- Trên dòng xoay thay A^r bởi A^v sau đó thực hiện phép xoay.
- Chia mỗi phần tử của dòng xoay cho phần tử của trục x_{vr}, như vậy số 1 xuất hiện tại vị trí trục.
- Để tính dòng i mới $i \in J \setminus \{r\}$, ta lấy dòng i củ trừ đi tích của dòng xoay đã biến đổi với phần tử nằm giuao giữa hai dòng đang tính và cột xoay (kể cả dòng ước lượng).

Ví dụ 3.2.3. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{array}{lllllll} f(x) = & x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & & -3x_6 \to \min \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & & -x_6 & = 2 \\ & x_2 & & +x_4 & & +x_6 & = 12 \\ & & 4x_3 & +2x_4 & +x_5 & +3x_6 & = 9 \end{array}$$

$x_j \geqslant 0,\ j = 1, ..., 6$

Giải

Bài toán có dạng chuẩn tắc.

C^0	Cơ		1	-1	2	-2	0	-3
	sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	A^1	2	1	0	1	1	0	-1
-1	A^2	12	0	1	0	1	0	1
0	A^5	9	0	0	4	2	1	3
	f	-10	0	0	-1	**(2)**	0	1
	A^4	2	1	0	1	1	0	-1
	A^2	10	-1	1	-1	0	0	2
	A^5	5	-2	0	2	0	1	5
	f	-14	-2	0	-3	0	0	**(3)**
	A^4	3	0.6	0	1.4	1	0.2	0
	A^3	8	-0.2	1	-1.8	0	-0.4	0
	A^6	1	-0.4	0	0.4	0	0.2	1
	f	-17	-0.8	0	-42	0	-0.6	0

Ta thấy ngay phương án phương án cực biên $x^* = (2, 12, 0, 0, 9, 0)$ tương ứng với cơ sở $\{A^1, A^2, A^5\}$.

3.2.4 Trường hợp bài toán suy biến

Trường hợp bài toán suy biến, để tránh xoay vòng ta có thể sử dụng quy tắc **Blac** để chọn véc tơ vào cơ sở:

$$A^v \quad \text{là véc tơ vào nếu } v = \min\{i : \ \Delta_i > 0\}.$$

Tuy nhiên, xoay vòng hiến gặp.

3.2.5 Tìm phương án cực biên và cơ sở ban đầu

Thuật toán đơn hình gốc, áp dụng giải quy hoạch tuyến tính khi đưa dạng chính tắc, có sẵn cơ sở đơn vị và phương án cực biên. Tuy nhiên không phải lúc nào cũng gặp may như vậy. Trong trường hợp đó, ta phải tìm cách đưa về dạng có thể áp dụng thuật toán đơn hình mà tìm ra phương án cực biên xuất phát. Một trong những cách đó là dùng biến giả sẽ được trình bày dưới đây, có hai dạng: Hai pha và đánh thuế.

Thuật toán đơn hình hai pha

Bài toán gốc, bài toán bổ trợ

Giả sử cần giải bài toán (mà ta sẽ gọi là bài toán gốc):

$$\begin{cases} f(x) = c^T x \to \min \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$b \geqslant 0$$

Tương ứng với bài toán gốc, ta lập bài toán bổ trợ sau:

$$\begin{cases} F(x, w) = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots.. + x_{n+m} \to \min \\ Ax + w = b \\ x \geqslant 0; \ W \geqslant 0 \end{cases}$$

Trong đó, $w^T = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ và x_{n+i} là các biến thêm vào, gọi là biến giả $i = 1, 2, .., m$. Các véc tơ A^{n+i} là các véc tơ đơn vị giả $i = 1, 2, \ldots, m$.

Mối liên hệ bài toán gốc và bài toán bổ trợ

Gọi tập phương án bài toán gốc và bổ trợ là P và P'.

Ta thấy, $x \in P$ khi và chỉ khi $(x, 0) \in P'$; x là phương án cực biên bài toán gốc khi và chỉ khi $(x, 0)$ là phương án cực biên bài toán bổ trợ.

Xét bài toán bổ trợ.

+ $P' \neq \emptyset$ vì $(0, b) \in P'$ và $F(x, w) \geq 0$. Do đó, bài toán bổ trợ luôn có phương án tối ưu.

+ Bài toán bổ trợ có dạng chính tắc, có sẵn cơ sở đơn vị và phương án cực biên nên áp dụng phương pháp đơn hình gốc để giải. Tìm được phương án cực biên tối ưu là $(\overline{x}, \overline{w}) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}, \ldots, \overline{x}_{n+m})$. Hãy xét hai trường hợp $\overline{w} = 0$ và $\overline{w} \neq 0$.

  * $\overline{w} \neq 0$, suy ra, tồn tại $\overline{x}_{n+i} > 0$. Khi đó, bài toán gốc có tập phương án $P = \emptyset$.

    Thật vậy, nếu tồn tại $x \in P$ thì $(x, 0) \in P'$ và $F(x, 0) = 0$ và tại $x_{n+i} > 0$ thì $F_{\min} = F(\overline{x}, \overline{w}) > 0 > F(x, 0)$ vô lí. Do đó, $P = \emptyset$.

  * $\overline{w} = 0$. Tức là mọi biến giả bằng 0, khi đó, $\overline{x}$ là phương án cực biên của bài toán gốc.

    Lúc $\overline{w} = 0$ thì $F_{\min} = F(\overline{x}, \overline{w}) = 0$ và $(\overline{x}, 0)$ là phương án cực biên của bài toán bổ trợ nên là phương án cực biên của bài toán gốc.

Thuật toán hai pha.

Pha 1. Tìm phương án cực biên cho bài toán gốc.

(i) Lập bài toán bổ trợ. Lập biến giả ứng cho những véc tơ đơn vị còn thiếu.

(ii) Giải bài toán bồ trợ, áp dụng phương pháp đơn hình để giải, tìm $F_{\min}$.

Nếu $F_{\min} \neq 0$ thì tập $P = \emptyset$. Dừng.

Nếu $F_{\min} = 0$ thì tìm được x^* là phương án cực biên cho bài toán gốc chuyển sang pha 2.

Pha 2. Tìm phương án cực biên tối ưu, áp dụng phương pháp đơn hình để giải.

Ví dụ 3.2.6. Giải quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 \quad -4x_2 \quad +2x_3 \quad -5x_4 \quad +9x_5 = 3 \\ \qquad x_2 \quad -3x_3 \quad +4x_4 \quad -5x_5 = 6 \\ \qquad x_2 \quad -x_3 \quad +x_4 \quad -x_5 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, .., 5$$

Giải

Ta đưa vào hai biến giả là x_6, x_7 cho các ràng buộc thứ (2) và (3). Khi đó, ta được bài toán bổ trợ sau.

$$F(x) = x_6 + x_7 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 \quad -4x_2 \quad +2x_3 \quad -5x_4 \quad +9x_5 = 3 \\ \qquad x_2 \quad -3x_3 \quad +4x_4 \quad -5x_5 + x_6 = 6 \\ \qquad x_2 \quad -x_3 \quad +x_4 \quad -x_5 + x_7 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, .., 7$$

Các bảng đơn hình giải bài toán trên là

C^0	Cơ sở	X^0	2	6	-5	1	4
		0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	A1	3	1	-4	2	-5	9
1	A6	6	0	1	-3	4	-5
1	A7	1	0	1	-1	1	-1
	F	7	0	2	-4	5	-6
	A1	8	1	1	-3	0	4
	A6	2	0	-3	1	0	-1
	A4	1	0	1	-1	1	-1
	F	2	0	-3	1	0	-1
2	A1	14	1	-8	0	0	1
-5	A3	2	0	-3	1	0	-1
1	A4	3	0	-2	0	1	-2
	F	0	0	0	0	0	0
	f	21	0	-9	0	0	1
	A1	14	1	-8	0	0	1
	A3	16	1	-11	1	0	0
	A4	31	2	-18	0	1	0
	f	7	-1	-1	0	0	0

Vậy, phương án tối ưu $x = (14, 0, 16, 31, 0)$ và $f_{\min} = 7$.

Nhận xét 3.2.7.

+ Nhập số liệu lúc đầu hệ số x_i của F là 0 nếu nó là biến, còn biến giả là 1.

+ **Pha 1**. Kết thúc sau 3 bước lặp, dấu hiệu tối ưu bài toán bổ trợ xuất hiện, trong cơ sở không có biến giả. Ta tìm được phương án cực biên cho bài toán gốc.

+ **Pha 2.** Ta phải tính ước lượng tương ứng phương án tìm được.

Ví dụ 3.2.8. Giải quy hoạch tuyến tính.

$$f(x) = 7x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -6x_1 & +4x_2 & +5x_3 \geqslant -20 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 = 8 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 \leqslant -8 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3$$

Giải

Ta chọn biến bù x_4, x_5 ta đưa bài toán dạng chính tắc với $b \geq 0$ như sau.

$$f(x) = 7x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 6x_1 & -4x_2 & -5x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 = 8 \\ -3x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_5 = 8 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Tiếp tục chọn biến giả x_6, x_7, ta có bài toán bổ trợ sau.

$$F(x) = x_6 + x_7 \to \min$$
$$\begin{cases} 6x_1 & -4x_2 & -5x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 + x_6 = 8 \\ -3x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_5 + x_7 = 8 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Ta có bảng đơn hình sau:

C_0	Cơ	0	7	1	-4	0	0
	sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
0	A^4	20	6	-4	-5	1	0
1	A^6	8	1	2	1	0	0
1	A^7	8	-3	2	1	0	-1
	F	16	-2	4	2	0	-1
0	A^4	36	8	0	-3	1	1
1	A^2	4	0.5	1	0.5	0	0
0	A^7	0	-4	0	0	0	-1
	F	0	-4	0	0	0	-1
	f	4	-6.5	0	4.5	0	0
	A^4	60	11	6	0	1	1
	A^3	8	1	2	1	0	0
	A^7	0	-4	0	0	0	-1
	f	-32	-11	-9	0	0	0

Vậy, phương án tối ưu $x = (0, 0, 8)$ và $f_{\min} = -32$.

Nhận xét 3.2.9. Bước 2 kết thúc pha 1, tuy cơ sở còn biến giả nhưng giá trị bằng là 0. Do đó, ta tìm được phương án cực biên suy biến cho bài toán gốc.

Thuật toán đánh thuế (Thuật toán bài toán(M)).

Bài toán M-lớn

Ta có thể kết hợp hai pha của phương pháp hai pha thành một nhờ phương pháp đánh thuế vào biến giả. Từ bài toán xuất phát dạng chính tắc, ta lập bài toán M-lớn như sau.

$$F(x, w) = c^T x + M(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}) \to \min$$

$$\begin{cases} Ax + w = 0 \\ x \geqslant 0, w \geqslant 0 \end{cases}$$

Trong đó $w = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$, $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ gọi là các biến giả. M là số dương rất lớn (lớn hơn bất cứ số nào cần so sánh). Ứng với mỗi biến giả thì có hệ số hàm mục tiêu của nó là M, như là sự đánh thuế vào biến giả.

Mối liên hệ bài toán gốc và bài toán M-lớn

Định lý 3.2.10 (Quan hệ giữa bài toán gốc và M-lớn). *Xem bài toán gốc và bài toán M -lớn tương ứng thì*

(a) *Nếu bài toán gốc có phương án thì mọi phương án cực biên tối ưu của bài toán M-lớn phải có $w = 0$.*

(a) *Nếu bài toán gốc có phương án tối ưu x thì bài toán M-lớn phải có ít phương án tối ưu $(x, 0)$ và ngược lại.*

Nhận xét 3.2.11. Như vậy, để giải bài toán gốc, ta có thể giải bài toán M-lớn tương ứng. Khi bài toán M-lớn không có phương án hoặc có phương án cực biên tối ưu (x, w).

Với $w \neq 0$ thì bài toán gốc không có phương án nào cả; nếu nó có phương án tối ưu dạng $(x, 0)$ thì x là phương án tối ưu bài toán gốc.

Thuật toán đánh thuế

(i) Lập bài toán M-lớn. Lập biến giả ứng cho những véc tơ đơn vị còn thiếu. Lập bảng đơn hình xuất pháp: Các ước lượng có dạng $\Delta_i = \alpha_i + \beta_i M$ nên tách ra hai dòng. Dòng trên là α_i, dòng dưới là β_i. Ta có thể bỏ cột biến giả không lập.

(ii) Áp dụng phương pháp đơn hình giải.

Khi giải, so sánh các ước lượng $\Delta_i = \alpha_i + \beta_i M$, ta áp dụng theo quy tắc:

(a) $\Delta_i < 0$ nếu $\beta_i < 0$ hoặc ($\beta_i = 0$ và $\alpha_i < 0$).

(b) $\Delta_i > 0$ nếu $\beta_i > 0$ hoặc ($\beta_i = 0$ và $\alpha_i > 0$).

(c) $\Delta_i < \Delta_j$ nếu $\beta_i < \beta_j$ hoặc ($\beta_i = \beta_j$ và $\alpha_i < \alpha_j$).

Dấu hiệu bài toán gốc có tập phương án rỗng là phương án tối ưu của bài toán M-lớn là (x, w) mà $w \neq 0$ hoặc $F_{\min}(x, w) == \alpha_0 + \beta_0 M$ mà $\beta_0 \neq 0$.

Ví dụ 3.2.12. Giải quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 = 2 \\ 2x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +3x_4 = 9 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4$$

Giải

Ta chọn biến giả x_5, x_6, x_7, ta có bài toán M-lớn tương ứng sau

$$F(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7) \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +3x_4 + x_6 = 9 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 + x_7 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Ta có các bảng đơn hình.

C_0	Cơ	0	-3	1	3	-1
	sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
M	A^5	2	1	2	-1	1
M	A^6	9	2	-6	3	3
M	A^7	6	1	-1	1	-1
	F	0	3	-1	-3	1
		17	4	-5	3	3
	A^1	2	1	2	-1	1
	A^6	5	0	-10	5	1
	A^7	4	0	-3	2	-2

	F	-6		0	-7 0	-2
		9	0	-13	7	-1
	A^1	3	1	0	0	1.2
	A^3	1	0	-	2 1	0.2
	A^7	2	0	1	0	-2.4
	F	-6	0	-7	0	-2
		2	0	1	0	-2.4
	A^1	3	1	0	0	1.2
	A^3	5	0	0	1	-4.6
	A^2	2	0	1	0	-2.4
	F	8	0	0	0	-18.8
		0	0	0	0	0

Vậy, nghiệm tối ưu bài toán $x = (3, 2, 5, 0)$ và $f_{\min} = 8$.

Ví dụ 3.2.13. Giải quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \geqslant 1 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3$$

Giải

Gọi hai biến bù x_4, x_5, đưa bài toán về dạng chính tắc và x_6 là biến giả, ta có bài toán M -lớn sau.

$$F(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + Mx_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Ta có các bảng đơn hình sau:

C_0	Cơ sở	0 x^0	2 x^1	-2 x^2	3 x^3	0 x^4	0 x^5
0	A^4	1	2	2	-1	1	0
M	A^6	1	1	-1	-3	0	-1
	F	0	-2	2	-3	0	0
		1	1	-1	-3	0	-1
	A^1	0.5	1	1	-0.5	0.5	0
	A^6	0.5	0	-2	-2.5	-0.5	-1
	F	1	0	4	-4	1	0
		0.5	0	-2	-2.5	-0.5	-1

Vậy, bài toán đã cho có tập phương án rỗng. Do bài toán M-lớn có phương án tối ưu $x = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0.5)$ có biến giả $x_6 = 0.5 > 0$.

3.3. Bài tập chương 3

Bài 3.1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \to \min \tag{3.3.1}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad +7x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_3 - x_4 + x_5 = 16 \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3.3.2}$$

(a) Tìm phương án cực biên x ứng với cơ sở A^3, A^4, A^5.

(b) Đối với phương án cực biên x hãy tính các ước lượng $\Delta_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$. Từ đó suy ra tính tối ưu của x.

Bài 3.2. Giải các bài toán quy hoạch sau bằng thuật toán đơn hình (tên gọi chung cho thuật toán đơn hình gốc, thuật toán hai pha, thuật toán bài toán M và cả thuật toán đơn hình đối ngẫu)

(a) $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 \quad +7x_3 \ -3x_4 = 7 \\ x_2 \ -2x_3 \ +x_4 = 1 \\ 3x_3 \ -x_4 \ +x_5 = 16 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$

(b) $f(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$

(c) $f(x) = x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

(d) $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$

(e) $f(x) = -3x_2 + 2x_4 + 2x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_4 + x_5 + 2x_6 = 10 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 8x_6 = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(f) $f(x) = -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + 2x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 8x_4 + x_6 = 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(g) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & & & -x_4 & & -2x_6 & = 5 \\ & x_2 & & +2x_4 & -3x_5 & x_6 & = 3 \\ & & +x_3 & +2x_4 & -5x_5 & +6x_6 & = 5 \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

(h) $f(x) = x_2 - 3x_4 + x_5 + 6x_6 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 & & & -x_4 & & -2x_6 & = 7 \\ & x_2 & +x_3 & & 4x_5 & 7x_6 & = 9 \\ & x_2 & & & & 3x_6 & = 4 \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Xuất phát từ phương án cực biên $\overline{x} = (1, 4, 3, 0, 0, 0)$

(i) $f(x) = -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & & \leq 7 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -3x_4 & \leq 9 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 30 \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

(j) $f(x) = -11x_1 + 3x_2 - x_3 + 11x_4 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +4x_3 & -3x_4 & \leq 5 \\ x_1 & & -2x_3 & -2x_4 & \leq 4 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq 6 \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

Bài 3.3. Giải và biện luận bài toán sau theo tham số t:

$f(x) = 2x_1 + tx_2 + x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 6x_1 & +8x_2 & -2x_3 & \leq 1 \\ 2x_1 & -8x_2 & +x_3 & \leq 3 \\ -x_1 & -5x_2 & +x_3 & \leq 2 \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

Bài 3.4. Giải bài toán sau xuất phát từ phương án cực biên $\overline{x} = (1, 2, 0, 3)$

$f(x) = 2x_1 - x_2 - 15x_3 + 4x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & x_4 & = 8 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = -2 \\ 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 4 \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

Bài 3.5. Cho bài toán quy hoạch

$$f(x) = -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} & 3x_2 & & -4x_4 & +3x_5 & \leq 34 \\ x_1 & +4x_2 & & +x_4 & -2x_5 & = 24 \\ & 7x_2 & & +2x_4 & -3x_5 & \leq 12 \\ & \frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & -\frac{1}{2}x_5 & = 5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(a) Hãy giải bài toán trên bằng thuật toán đơn hình.

(b) Hãy giải bài toán đã cho khi có thêm ràng buộc $f(x) \geq -106$.

Bài 3.6. Cho bài toán với tham số t

$$f(x) = -x_1 + x_3 - tx_4 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & 12x_3 & -2tx_4 & +4x_5 & = 9 \\ 2x_1 & & +8x_3 & +(1-t)x_4 & +2x_5 & = 14 \\ x_1 & & & +(t-1)x_4 & -3x_5 & = 4 \\ & \frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & -\frac{1}{2}x_5 & = 5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(a) Biết rằng $\overline{x}$ là một phương án cực biên ứng với cơ sở A^1, A^2, A^5. Hãy lập bảng đơn hình ứng với $\overline{x}$.

(b) Từ bảng đơn hình vừa lập được, hãy tìm tập tất cả các giá trị của t sao cho $\overline{x}$ là phương án tối ưu.

(c) Giải bài toán đã cho khi $t = 1$ và $t = 3$.

Bài 3.7. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng thuật toán hai pha

(a) $f(x) = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -5x_4 & +9x_5 & = 3 \\ & x_2 & -3x_3 & +4x_4 & -5x_5 & = 6 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$

(b) $f(x) = 7x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -6x_1 & +4x_2 & +5x_3 & \geq -20 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 8 \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq -8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

(c) $f(x) = -x_1 + 3x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = 2 \\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & & = 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

(d) $f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & 4x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

(e) $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq 1 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq -2 \\ 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & \leq 3 \\ & & x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Bài 3.8. Giải các bài toán sau bằng thuật toán M:

(a) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & +x_3 & \leq 6 \\ 2x_1 & 3x_2 & -x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

(b) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 2 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \leq 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

(c) $f(x) = x_1 - 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 & +3x_2 & \leq 12 \\ -x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ x_1 & +5x_2 & \leq 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0.$

(d) $f(x) = -3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 & -tx_2 & \leq 1 \\ -x_1 & +x_2 & \geq 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$

(Biện luân theo tham số $t > 0$).

(e) $f(x) = 5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & -x_3 & & & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = 7 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$

(f) $f(x) = x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} & 2x_2 & -x_3 & -x_4 & x_5 & \geq 0 \\ 2x_1 & & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & \geq 0 \\ x_1 & -2x_2 & & -x_4 & +x_5 & \geq 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$

(g) $f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = 9 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 6 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

Chương 4.

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU VÀ THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

4.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu

Định nghĩa 4.1.1 (Bài toán đối ngẫu). Cho các bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = c^T x \to \min \qquad\qquad g(x) = b^T y \to \max$$

$$(a)\ \begin{cases} A_i^T x \geqslant b_i\ ; i \in M_1 \\ A_i^T x \leqslant b_i\ ; i \in M_2 \\ A_i^T x = b_i\ ; i \in M_3 \end{cases} \qquad\qquad (b)\ \begin{cases} y_i \geqslant 0\ ,\ i \in M_1 \\ y_i \leqslant 0,\ i \in M_2 \\ y_i \in R\ ,\ i \in M_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_j \geqslant 0\ ; j \in N_1 \\ x_j \leqslant 0\ ; j \in N_2 \\ x_j \in R;\ j \in N_3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y^T A^J \leqslant c_j,\ j \in N_1 \\ y^T A^J \geqslant c_j,\ j \in N_2 \\ y^T A^J = c_j,\ j \in N_3 \end{cases}$$

Người ta gọi bài toán (a) là *bài toán gốc* và (b) là *bài toán đối ngẫu.*

Trong đó A_i^T là véc tơ dòng i của ma trận A, A^j là véc tơ cột j của ma trậm A.

Mỗi ràng buộc bất đẳng thức của bài toán này ứng với một biến trong ràng buộc về dấu của bài toán kia, gọi là *cặp ràng buộc đối ngẫu.* Đồng thời các chiều của bất đẳng thức có quan hệ với nhau thể hiện ở bảng sau:

Góc	min	max	Đối ngẫu
	$= b_i$	$\in \mathbb{R}$	
Ràng buộc	$\leq b_i$	≤ 0	Biến
	$\geq b_i$	≥ 0	
	≥ 0	$\leq c_i$	
Biến	≤ 0	$\geq c_i$	Ràng buộc
	$\in \mathbb{R}$	$= c_i$	

Ví dụ 4.1.2. Xét quy hoạch tuyến tính ở bên trái và bài toán đối ngẫu bên phải, các bài toán sau:

$$g(y) = 5y_1 + 6y_2 + 4y_3 \to \max$$

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} -x_1 & +3x_2 & & = 5 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \geqslant 6 \\ & & x_3 & \leqslant 4 \end{cases}$$

$$y_2 \geqslant 0, \ y_3 \leqslant 0$$

$$f(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} -y_1 & +2y_2 & & \leqslant 1 \\ 3y_1 & -y_2 & & \geqslant 1 \\ & 3y_2 & +y_3 & = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0$$

Nhận xét 4.1.3. Quan hệ đối ngẫu giữa các bài toán quy hoạch tuyến tính có tính chất đối xứng.

Định lý 4.1.4 (Đối ngẫu yếu). *Nếu x, y lần lượt là phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc và đối ngẫu thì $g(y) \leq f(x)$.*

Chứng minh.

Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= y_i(A_i^T x - b_i), \ i = 1, \ldots, m \\ v_j &= (c_j - y^T A^j)x_j, \ j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Theo định nghĩa bài toán đối ngẫu, thì y_i và $A_i^T x - b_i$ cùng dấu, $c_j - y^T A^j$ và x_j cùng dấu. Do đó, $u_i \geq 0$ và $v_j \geq 0$ với mọi i, j.

Ta có

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = y^T Ax - y^T b;$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = c^T x - y^T Ax;$$

Do đó, $0 \leqslant \sum_i u_i + \sum_j v_j = c^T x - y^T b = f(x) - g(y) \Rightarrow g(y) \leqslant f(x)$ □

Hệ quả 4.1.5. *Giả sử $\overline{x}, \overline{y}$ là phương án của bài toán gốc và đối ngẫu. Nếu $f(\overline{x}) = g(\overline{y})$ thì $\overline{x}, \overline{y}$ lần lượt là phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu.*

Chứng minh.

Đối với mọi x, y là phương án bài toán gốc và đối ngẫu thì $g(y) \leq f(\overline{x}) = g(\overline{y}) \leq f(x)$. Chứng tỏ tính tối ưu của $\overline{x}, \overline{y}$. □

Định lý 4.1.6 (Đối ngẫu mạnh). *Một cặp bài toán đối ngẫu, nếu bài toán này có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu và giá tri tối ưu của chúng bằng nhau.*

Chứng minh.

Giả sử bài toán gốc có phương án tối ưu. Do đó bài toán dạng chính tắc tương ứng nó có phương án tối ưu là $\widehat{x^0}$ với ma trận cơ sở $\widehat{B}$. Khi đó, $y^0 = \widehat{c^0}^T \hat{B}^{-1}$ là phương án của bài toán đối ngẫu. Gọi x^0 là phương án tối ưu bài toán gốc thu được từ $\widehat{x^0}$. Ta có:

$$g(y^0) = y^{0T} b = (\widehat{c}^{0T} \widehat{B}^{-1}) b = c^{0T} \widehat{x}^0 = f(x^0)$$

Vậy, y^0 là phương án tối ưu bài toán đối ngẫu. □

Định lý 4.1.7 (Sự tồn tại phương án). *Đối với cặp bài toán gốc-đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính chỉ có một trong ba trường hợp sau xảy ra:*

(i) Cả hai cùng có tập phương án rỗng.

(ii) Cả hai cùng có phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu của chúng bằng nhau.

(iii) Bài toán này có hàm mục tiêu không bị chặn, còn bài toán kia có tập phương án rỗng

Chứng minh.

Theo định lí đối ngẫu mạnh, ta có (ii). Nếu không có (ii) thì xảy ra (i) hoặc (iii).

Theo định lí đối ngẫu yếu, thì có (iii). Bằng ví dụ chỉ ra có (i). □

Định lý 4.1.8 (Độ lệch bù). *Giả sử x và y là phương án của bài toán gốc-đối ngẫu tương ứng. Khi đó, x và y là tối ưu khi và chỉ khi*

$$y_i(A_i^T x - b_i) = 0 \qquad \forall i \tag{4.1.2}$$

$$\left(c_j - y^T A^J\right) x_j = 0 \qquad \forall j \tag{4.1.3}$$

Chứng minh.

Ta có $0 \leqslant \sum\limits_i u_i + \sum\limits_j v_j = c^T x - y^T b = f(x) - g(y)$ và x, y là cặp phương án tối ưu thì $f(x) = g(y)$. Khí đó, $u_i = 0$ và $v_j = 0$ với mọi i, j. Do đó

$$y_i(A_i^T x - b_i) = 0 \qquad \forall i \tag{4.1.4}$$

$$\left(c_j - y^T A^J\right) x_j = 0 \qquad \forall j \tag{4.1.5}$$

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 4.1.9. Kiểm tra tính tối ưu của phương án $x^* = (2, 0, 1, -2, 3)$ của bài toán quy hoạch tuyến tính.

$$f(x) = -4x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 8x_4 - 20x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 & +4x_2 & -x_3 & +3x_4 & +x_5 \geqslant 5 \\ -x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -2x_4 & -5x_5 \geqslant -9 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & +3x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3$$

Giải

Gọi $y = (y_1, y_2, y_3)$ là phương án bài toán đối ngẫu tương ứng x^*.

Ta có $A_1 x^* = 6 > 5, A_2 x^* = -9, A_3 x^* = 2$ nên $y_1 = 0$. Mặt khác, xét x^* ta có $x_1^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*$ khác 0 nên

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \\ -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -8 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 4 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

và $f(x^*) = -36,\ g(y) = -36.$

Vậy, x^* là phương án tối ưu.

Ví dụ 4.1.10. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 5x_5 - 9x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & -x_3 & +3x_4 & & +2x_5 \geqslant 7 \\ & -3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & & -x_5 - 3x_6 \geqslant -8 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & & -5x_5 - 3x_6 = -22 \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(a) Chứng tỏ $x^* = (0, 0, 9, 0, 8, 6)$, $y^* = (3, 1, 2)$ tương ứng là phương án tối ưu của bài toán đã cho và bài toán đối ngẫu của nó.

(b) Tìm tập phương án tối ưu của bài toán đã cho.

Giải

(a) Xét x^*, ta thấy $x_j^* \geq 0$ với mọi j.

$A_1x^* = 7$, $A_2x^* = -8$, $A_3x^* = -22$. Nên x^* là phương án và $f(x*) = -31$.

Tương tự, xét y^*, ta thấy $y_i^* \geq 0$ với mọi i.

$$A_1^T y^* = -4 \leq 6,\ A_2^T y^* = -4 \leq 2,\ A_3^T y^* = 7 \leq 7$$
$$A_4^T y^* = 7 \leq 8,\ A_5^T y^* = -5 \leq -5,\ A_6^T y^* = -9 \leq -9$$

Do đó, y^* là phương án và $g(y^*) = -31$.

Vậy x^*, y^* tương ứng là phương án tối ưu của bài toán đã cho và bài toán đối ngẫu của nó.

(b) Tìm tập phương án tối ưu của bài toán đã cho.

Gọi $x(x_i)$ là phương án tối ưu bài toán đã cho tương ứng y^*.

Từ $A_1^T y^* = -4 < 6,\ A_2^T = -4 < 2,\ A_4^T = 7 < 8$ mà ta lại có $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

và

$$\begin{cases} f(x) = 7x_3 - 5x_5 - 9x_6 = -31 \\ -x_3 + 2x_5 \geq 7 \\ 2x_3 - x_5 - 3x_6 \geq -8 \\ 4x_3 - 5x_5 - 3x_6 = -22 \\ x_j \geq 0, =; j = 3, 5, 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 - 2x_6 = -3 \\ -x_5 + x_6 = -2 \\ -x_3 + 2x_5 \geq 7 \\ 2x_3 - x_5 - 3x_6 \geq -8 \\ x_j \geq 0, =; j = 3, 5, 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -3 + 2t \\ x_5 = 2 + t \\ x_6 = t \\ t \geq 3/2 \end{cases}$$

Vậy, tập phương án tối ưu của bài toán đã cho là $T = \{(0, 0, -3 + 2t, 0, 2 + t, t) : t \geq 3/2\}$

4.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Thuật toán đơn hình đối ngẫu là thuật toán đơn hình áp dụng vào giải bài toán đối ngẫu của quyb hoạch tuyến tính đã cho nhưng các bước tiến hành lại được diễn tả trên bài toán gốc. Sau đây ta tìm hiểu nội dung của thuật toán đơn hình đối ngẫu.

4.2.1 Cơ sở lí luận

Dấu hiệu tối ưu.

Ta xét bai toán dạng chính tắc

$$f(x) = c^T x \longrightarrow \min \tag{4.2.6}$$

$$Ax = b \tag{4.2.7}$$

$$x \geq 0 \tag{4.2.8}$$

và bài toán đối ngẫu của nó

$$g(y) = b^T y \longrightarrow \max$$

$$A^T y \leq c$$

Trong đó A là ma trận cở $m \times n$ và A có hạng là m. $B = \{A^j : \ j \in J_B\}$ là một cơ sở của ma trận A. B được gọi là cơ sở đối ngẫu nếu $\begin{cases} \overline{y}^T A^j = c_j; j \in J \\ \overline{y}^T A^j \leq C_j; \ j \notin J_B \end{cases}$, tức là tồn tại phương án cực biên $\overline{y}$ ứng với cơ sở B của bài toán đối ngẫu.

Nhận xét.

- Ta có $\overline{y}^T = c^{0T} B^{-1}$, suy ra $\overline{y}^T A^j = (c^{0T} B^{-1}) A^j = c^{0T}(B^{-1} A^j) = c^{0T} x^j = \Delta_j + c_j$ vậy B là cơ sở đối ngẫu khi và chỉ khi $\Delta_j \leq 0, \ \forall j$.
- Giả phương án. Đặt $x^0 = B^{-1} b = (x_{0j}), \ j \in j_B$ và $\overline{x} = \begin{cases} \overline{x}_j = x_{0j} \quad \text{khi} \quad j \in j_B \\ \overline{x}_j = 0 \quad \text{khi} \quad j \notin j_B \end{cases}$

Ta gọi $\overline{x}$ là giả phương án của bài toán gốc thì đó là phương án cực biên tối ưu. Từ đó ta có dấu hiệu tối ưu sau.

Định lý 4.2.2 (Dấu hiệu tối ưu). *B là cơ sở đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính. Nếu $x^0 = B^{-1} b \geq 0$ thì $\overline{y}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và giả phương án $\overline{x}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc.*

Định lý 4.2.3 (Dấu hiệu tập phương án rỗng). *Nếu tồn tại $j \in J_b$ sao cho $x_{0j} < 0$ và $x_{ji} \geq 0$ với mọi i thì bài toán đối ngẫu có hàm mục tiêu không bị chặn. Cho nên bài toán gốc có tập phương án rỗng.*

Định lý 4.2.4 (Dấu hiệu phương án cực biến tốt hơn). *Nếu tồn tại j sao cho $x_{0j} < 0$, đồng thời với tồn tại i sao cho $x_{ji} < 0$ thì có thể xây dựng được phương án cực biên cho bài toán đối ngẫu tốt hơn.*

4.2.5 Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Giả sử đã có sẵn một cơ sở đơn vị là cơ sở đối ngẫu của bài toán (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3). Ta lập bảng đơn hình giống như thuật toán đơn hình gốc theo các bước sau:

Bước 1. Đặt $x^j = A^j$, $(j = 0, 1, \ldots, n)$, tính $\Delta_j = c^t x^j - c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ và $c^{t0} x^0$.

Chuyển sang bước 2.

Bước 2. Nếu $x^0 \geq 0$ thì giả phương án $\overline{x}$ là phương án tối ưu và kết thúc thuật toán.

Nếu trái lại chuyển sang bước 3.

Bước 3. Nếu tồn tại $i \in J_0$ sao cho $x_{10} < 0$ và $x_{ij} \geq 0$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$ thì kết luận tập phương án là rỗng.

Nếu trái lại thì chọn $\Delta_{s0} = \min\{x_{10} :\ i \in J_0\}$ và giả sử

$$\theta = \frac{\Delta_k}{x_{sk}} = \min\left\{\frac{\Delta_k}{x_{sk}} :\ x_{sj} < 0\right\} \qquad (4.2.9)$$

Chuyển sang bước 4.

Bước 4. Thực hiện phép quay xung quanh phần trục x_{sk} ta thu được giả phương án mới, coi nó như giả phương án ban đầu rồi quay lại bước 2.

Chú ý 4.2.6. Bảng đơn hình được lập như trong thuật toán đơn hình gốc, chỉ khác nhau ở chổ, tại vị trí ghi giá trị hàm mục tiêu ở cột x^0 không ghi $f(\overline{x})$ như trước mà là $g(\overline{y})$, riêng bảng đã xuất hiện dấu hiệu tối ưu thì hai giá trị nói trên trùng nhau.

Ví dụ 4.2.7. Giải bài toán

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 5$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 3$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Giải

Đưa vào hai ẩn bù không âm x_5, x_6 ta được hệ ràng buộc mới.

$$\begin{cases} -x_1 \quad -x_2 \quad -3x_3 \quad -2x_4 \quad +x_5 \qquad = -5 \\ -x_1 \quad -4x_2 \quad -2x_3 \quad -4x_4 \qquad +x_6 \quad = -3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Các ràng buộc của bài toán đối ngẫu là:

$${}^t yA^1 = -y_1 - y_2 \leq 4 \qquad {}^t yA^2 = -y_1 - 4y_2 \leq 6$$
$${}^t yA^3 = -3y_1 - 2y_2 \leq 5 \qquad {}^t yA^4 = -2y_1 - y_2 \leq 3$$
$${}^t yA^5 = -y_1 \leq 4 \qquad {}^t yA^6 = y_2 \leq 0$$

Ta thấy ngay $\overline{y} = (0, 0)$ là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu vì dễ thấy nó là phương án, ngoài ra còn thỏa mãn dấu $'' ='' $ đối với hai ràng buộc độc lập tuyến tính cuối cùng; cơ sở đối ngẫu tương ứng là cơ sở đơn vị gồm hai vectơ A^5, A^6. Ứng với cơ sở đó là giả phương án $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, -5, -3)$. Các kết quả tính toán được thể hiện trên các bảng đơn hình dưới đây.

Ở bước lặp đầu tiên ta thấy $x^0 = (-5, -3) < 0,\ \min(x_{50}, x_{60}) = \min(-5, -3) = -5$. Do đó A^5 ra khỏi cơ sở. Vì

$$\min\left\{\frac{\Delta_j}{x_{5j}} : x_{5j} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-4}{-1}, \frac{-6}{-1}, \frac{-5}{-3}, \frac{-3}{-2}\right\} = \frac{\Delta_4}{x_{54}} \tag{4.2.10}$$

nên đưa A^4 vào cơ sở thay A^5. Thực hiện phép quay xung quanh phần tử trục $x_{54} = -2$ ta có bước lặp thứ hai.

Ở bước cuối, ta thấy $x^0 = (1, 1) > 0$, từ đó ta thu được phương án tối ưu $x^* = (0, 0, 1, 1)$.

c^0	Cơ sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
			4	6	5	3	0	0
0	A^5	**(-5)**	-1	-1	-3	**(-2)**	1	0
0	A^6	-3	-1	-4	-2	-1	0	1
		0	-4	-6	-5	-3	0	0
3	A^4	5/2	1/2	1/2	3/2	1	-1/2	0
0	A^6	**(-1/2)**	-1/2	-7/2	**(-1/2)**	0	-1/2	1
		15/2	-5/2	-9/2	-1/2	0	-3/2	0
3	A^4	1	-1	-10	0	1	-2	3
5	A^3	1	1	7	1	0	1	-2
		8	-2	-1	0	0	-1	-1

Ví dụ 4.2.8. Cho bài toán

$$f(x) = x_1 + 10x_2 + 8x_3 \to \min$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

(a) Hãy tìm tất cả các cơ sở đối ngẫu. Trong các cơ sở đối ngẫu đó, cơ sở nào là cơ sở tối ưu của bài toán đã cho và khi đó hãy xác định phương án tối ưu.

(b) Xuất phát từ cơ sở đối ngẫu không phải là cơ sở tối ưu, giải bài toán đã cho bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Giải

(a) Bài toán đối ngẫu

$$
\begin{aligned}
& f(x) = y_1 + y_2 \to \max \\
& -y_1 + y_2 \le 1 \\
& 2y_1 + y_2 \le 10 \\
& y_1 + 2y_2 \le 8 \\
& x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Các hệ $\left\{A^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\left\{A^2, A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ và hệ $\{A^3, A^1\}$ đều độc lập tuyến tính.

- Xét hệ $\{A^1, A^2\}$:

$$
\begin{cases} {}^t y A^1 = c_1 \\ {}^t y A^2 = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -y_1 + y_2 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases} \tag{4.2.11}
$$

  Vectơ $(3, 4)$ không thỏa mãn ràng buộc (3) nên hệ $\{A^1, A^2\}$ không phải là cơ sở đối ngẫu.

- Xét hệ $\{A^1, A^3\}$:

$$
\begin{cases} {}^t y A^1 = c_1 \\ {}^t y A^3 = c_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases} \tag{4.2.12}
$$

  Vectơ $(2, 3)$ thỏa mãn ràng buộc (2) nên hệ $\{A^1, A^2\}$là cơ sở đối ngẫu.
  Ta tìm phương án tương ứng: Các thành phần cơ sở của giả phương án được xác định bởi hệ $x_1 A^1 + x_3 A^3 = b$, tức là hệ:

$$
\iff \begin{cases} -x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -1/3 \\ x_2 = 2/3 \end{cases} \tag{4.2.13}
$$

  trong giả phương án có thành phần âm nên $\{A^1, A^3\}$ không phải là cơ sở tối ưu của bài toán đã cho.

- Xét hệ $\{A^2, A^3\}$:

$$\begin{cases} {}^t y A^2 = c_2 \\ {}^t y A^3 = c_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 10 \\ y_1 + 2y_2 = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 2 \end{cases} \tag{4.2.14}$$

Vectơ $(2,3)$ thỏa mãn ràng buộc (1) nên hệ $\{A^2, A^3\}$là cơ sở đối ngẫu.

Các thành phần cơ sở của giả phương án được xác định bởi hệ $x_2A^2 + x_3A^3 = b$, tức là hệ

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/3 \\ x_2 = 1/3 \end{cases} \tag{4.2.15}$$

Vì đó là nghiệm không âm của hệ trên nên $x = (0, 1/3, 1/3)$ là phương án tối ưu.

(b) Ta sẽ giải bài toán đã cho bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu với cơ sở đối ngẫu xuất phát $\{A^1, A^3\}$.

Thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận ràng buộc A để đưa một ma trận có cơ sở đơn vị tương ứng vơi A^1, A^3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & -1 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Ta có bảng đơn hình sau (để đơn giản cách viết mà vẫn không làm thay đổi bản chất, ta vẫn dùng các ký hiệu như thuật toán đơn hình trước đây).

c^0	cơ sở	x^0	1	10	8
			x^1	x^2	x^3
8	A^1	2/3	0	1	1
1	A^1	-1/3	1	**(-1)**	0
			0	-3	0
8	A^3	1/3	1	0	1
10	A^2	1/3	-1	1	0
		6	-3	0	0

Ở bước 2, do $x^0 \geq 0$ nên suy ra $\overline{x} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ là phương án tối ưu.

4.3. Vấn đề tìm phương án cực biên xuất phát của bài toán đối ngẫu

Từ lý luận và các ví dụ trên đây ta thấy rằng, để tiến hành giải bài toán $(1), (2), (3)$ bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu ta cần phải biết một phương án cực biên của bài toán đối ngẫu (coi nó là phương án cực biên xuất phát để tiến hành thuật toán).

1) *Trường hợp thứ nhất*

Giải sử cần giải bài toán (được gọi là bài toán chính):

$$f(x) =^t cx \to \min$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

trong đó $c \geq 0;$ A là ma trận cở $m \times n$.

Đưa bài toán trên về bài toán dạng chính tắc, nó có dạng:

$$f(x, w) =^t cx \to \min$$
$$-Ax + w = -b$$
$$x \geq 0,\ w \geq 0,$$

trong đó $w = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$.

Các ràng buộc của bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chính tắc là:

$${}^t y(-A^j) \leq c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$${}^t yI^i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Dễ thấy rằng $\overline{y} = 0$ là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu đó, ứng với cơ sở đối ngẫu là cơ sở đơn vị, giả phương án tương ứng là $\overline{x} = (0, -b)$. Xuất phát từ phương án cực biên đó ta tiến hành thuật toán đơn hình đối ngẫu để giải bài toán đã cho. 2) *Trường hợp tổng quát*

Đối với bài toán $(1), (2), (3)$, giả sử chưa biết một cơ sở đối ngẫu nào nhưng đã biết một hệ độc lập tuyến tính gồm m cột của ma trận A, đó là hệ

$$H = \{A^j : \ j \in J_0\} \tag{4.3.16}$$

Chúng ta xét hai trường hợp sau đây.

(a) Nếu biết được rằng hệ

$$\begin{cases} {}^t A^i = c_i & i \in J_0 \\ {}^t A^j \leq c_j & j \notin J_0 \end{cases}$$

có nghiệm hoặc biết được rằng $\Delta_j \leq 0$ với mọi j (ứng với H) thì H chính là một cơ sở đối ngẫu.

Nếu may mắn gặp trường hợp trên thì:

Thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận $[A|b]$ để thu được ma trận mới có m cột vectơ đơn vị khác nhau tương ứng với cơ sở đối ngẫu H. Xuất phát từ đó tiến hành thuật toán đơn hình đối ngẫu để giải bài toán đã cho.

Nếu H không phải là cơ sở đối ngẫu hoặc chưa biết nó có phải là cơ sở đối ngẫu hay không thì ta xét bài toán sau đây mà ta gọi là *bài toán mở rộng.*

$$\begin{aligned} & F(x_0, x) =^t cx \to \min \\ & x_0 + \sum_{j \notin J_0} x_j = M \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad x_0 \geq 0. \end{aligned}$$

trong đó x_0 là một ẩn mới được bổ sung, M là tham số dương được coi là rất lớn.

Ví dụ 4.3.1. Giải bài toán sau bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu

$$\begin{aligned} & f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min \\ & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Giải

Đưa vào hai ẩn bù x_4 và x_5 ta được bài toán dạng chính tắc

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Có thể thấy hệ gồm 3 vectơ A^1, A^4, A^5 là độc lập tuyến tính.

Bổ sung vào bài toán trên một ràng buộc giả tạo ta có bài toán

$$f(x_0, x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$x_0 + x_2 + x_3 = M \qquad -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_j \geq 0,\ j = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Bằng cách giải hệ $Bx^j = A^j$ với $j = 0, 2, 3$, ta được:

$$x^0 = (2, 8, -4) \qquad x^2 = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\Big)$$

hoặc có thể tìm được chúng bằng cách thực hiện các phép biến sơ cấp trên các dòng của ma trận.

Việc tính toán được thể hiện trên bảng dưới đây. Do các thành phần của giả phương án có dạng $pM + q$ nên cột x^0 và hệ số p trùng nhau.

c^0	cơ sở	$\widetilde{x}^0$		x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
			M	0	-1	-2	1	0	0
0	A^0	0	1	1	0	**(1)**	1	0	0
-1	A^1	2	0	0	1	-1/2	1	0	0
0	A^4	8	0	0	0	7/2	-1	1	0
0	A^5	-4	0	0	0	-3/2	-1	0	1

			0	0	0	5/2	-2	0	0
-2	A^2	0	1	1	0	1	1	0	0
-1	A^1	2	1/2	1/2	1	0	3/2	0	0
0	A^4	8	-7/2	**(-7/2)**	0	0	-9/2	1	0
0	A^5	-4	3/2	3/2	0	0	1/2	0	1
				-5/2	0	0	-9/2	0	0
-2	A^2	16/7	0	0	0	1	-2/7	2/7	0
-1	A^1	22/7	0	0	1	0	6/7	1/7	0
0	A^0	-16/7	1	1	0	0	9/7	-2/7	0
0	A^5	-4/7	0	0	0	0	**(-10/7)**	3/7	0
				0	0	0	-9/7	-5/7	0
-2	A^2	12/5	0	0	0	1	0	1/5	-1/5
-1	A^1	14/5	0	0	1	0	0	2/5	3/5
0	A^0	-14/5	1	1	0	0	0	1/10	9/10
1	A^3	2/5	0	0	0	0	1	-3/10	-7/10
			-36/5	0	0	0	0	-11/10	-9/10

Vì A^0 thuộc cơ sở ứng với phương án tối ưu đó nên phương án tối ưu của bài toán ban đầu là $x^* = \left(\frac{14}{5}, \frac{12}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

4.4. Vấn đề hậu tối ưu

H!Hậu tối ưu Giả sử ta đã giải xong bài toán

$$f(x) =^t cx \to \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

bằng thuật toán đơn hình và thu được phương án tối ưu $\overline{x}$ ứng với cơ sở J_0 khi dấu hiệu tối ưu đã xuất hiện (mọi ước lượng đều không dương). Giả sử x^0 là vectơ các thành phần cơ sở của $\overline{x}$ và B là ma trận gồm các vectơ trong cơ sở tối ưu.

Trong thực tế thường phát sinh các trường hợp cần xử lí sau đây:

1) *Trường hợp thứ nhất*

Thay đổi vế phải của hệ ràng buộc cưỡng bức, trước là b, bây giờ là $\overline{b}$ và ta có bài toán cần phải giải là

$$\begin{aligned}&f(x) =^t cx \to \min\\&Ax = \overline{b}\\&x \geq 0\end{aligned}$$

Khi đó không cần giải bài toán mới từ đầu mà chỉ cần tính $\overline{x}^0 = B^{-1}\overline{b}$. Nếu $\overline{x}^0 \geq 0$ thì B vẫn là cơ sở tối ưu đối với bài toán mới và $\overline{x}^0$ chính là vectơ các thành phần cơ sở trong phương án tối ưu của bài toán mới. Nếu trái lại, tức là $\overline{x}^0$ có ít nhất một thành phần âm thì trong bảng đơn hình cuối cùng ta thay x^0 bởi $\overline{x}^0$ và như vậy ta có bảng đơn hình xuất phát để giải bài toán mới bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu.

2) *Trường hợp thứ hai*

Bổ sung vào bài toán ban đầu ràng buộc $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{m+1,j}x_j \leq b_{m+1}$, tức là cần giải bài toán mới sau đây:

$$\begin{aligned}&f(x) =^t cx \to \min\\&Ax = b\\&\sum_{j=1}^{m} a_{m+1,j}x_j \leq b_{m+1}\\&x \geq 0\end{aligned}$$

Nếu $\overline{x}$ thỏa mãn ràng buộc bổ sung thì nó cũng là phương án tối ưu của bài toán mới.

Trong trường hợp ngược lại, ta sẽ dùng các ràng buộc cưỡng bức của bài toán ban đầu, có mặt dưới dạng tương đương ngay trong bảng đơn hình cuối cùng, để khử các ẩn cơ sở $x_j,\ j \in J_0$ trong ràng buộc bổ sung:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{m+1,j}x_j + x_{n+1} = b_{m+1} \tag{4.4.17}$$

trong đó x_{n+1} là ẩn bù không âm. Sau đó đặt dòng các hệ số mới của ràng buộc bổ sung vào dòng cuối cùng (tức dòng thứ $m+1$) của bảng đơn hình cuối cùng. Và như vậy, do các ước lượng vẫn không thay đổi và $\Delta_{n+1} = 0$ (lưu ý rằng hệ số của ẩn bù x_{n+1} trong hàm mục tiêu bằng 0) ta có bảng đơn hình xuất phát để giải bài toán mới bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Nếu $J_0 = \{1, 2, \ldots, m\}$ thì bảng đơn hình xuất phát đó là

c^0	cơ sở	x^0	c_1	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	0
			x^1	$\cdots$	x^i	$\cdots$	x^m	$\cdots$	x^j	$\cdots$	x^{n+1}
c_1	A^1	x_{10}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_i	A^i	x_{i0}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_m	A^m	x_{m0}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	0
0	A^{n+1}	b'_{m+1}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$x_{m+1,j}$	$\cdots$	1
			0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\Delta_j \leq 0$	$\cdots$	0

trong đó:

$$b'_{m+1} = b_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,i} x_{i0} \tag{4.4.18}$$

$$x_{m+1,j} = a_{m+1,j} - \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,i} x_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.4.19}$$

Nói cách khác là nhân dòng i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ của bảng cuối cùng với $-a_{m+1,j}$ cộng tất cả lại, rồi cộng với hệ số tương ứng của ràng buộc bổ sung, kết quả được đặt vào dòng $m + 1$.

Ví dụ 4.4.1. Cho bài toán

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 - 9x_5 = 5 \\ 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 7x_5 \leq 19 \\ 3x_2 - 3x_3 + x_5 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(a) Giải bài toán đã cho.

(b) Giải bài toán đã cho khi vế phải $b = (5, 19, 15)$ được thay bởi $\overline{b} = (3, 14, 6)$.

Giải

Ta dùng thuật toán hai pha. Đưa vào hai ẩn giải x_6, x_7 ta có bài toán phụ

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & & +2x_4 & -9x_5 & & & = 5 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & -7x_5 & +x_6 & & = 19 \\ & 3x_2 & -3x_3 & & +x_5 & & +x_7 & = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Ta có bảng sau:

c^0	cơ	x^0		-1	3	1	2	1	1	1
	sở	b	$\bar{b}$	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
0	A^1	5		1	0	3	2	-9	0	0
1	A^6	19		0	3	-2	2	-7	1	0
1	A^7	15		0	**(3)**	-3	0	1	0	1
				0	6	-5	2	-6	0	0
0	A^1	5		1	0	3	2	-9	0	
1	A^6	4		0	0	1	**(2)**	-8	1	
0	A^2	5		0	1	-1	0	1/3	0	
				0	0	1	2	-8	0	
-1	A^1	1	**-5**	1	0	2	0	**(-1)**		
2	A^4	2	**4**	0	0	1/2	1	-4		
3	A^2	5	**2**	0	1	-1	0	1/3		
		18		0	0	-5	0	-7		
1	A^5		**5**	-1	0	-2	0	1		
2	A^4		**24**	-4	0	-15/2	1	0		
3	A^2		**1/3**	1/3	1	-1/3	0	0		
			54	-7	0	-19	0	0		

Đối với bài toán đã cho, ở bước 3 đã xuất hiện dấu hiệu tối ưu với phương án tối ưu là $x^* = (1, 5, 0, 2, 0)$ và $f(x) = 18$.

2) Cơ sở tối bước 3 đối với bài toán đã cho là $\{A^1, A^4, A^2\}$

$$B = [A^1 A^4 A^2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Đặt $\overline{x}^0 = (x_1, x_4, x_2)$. Khi đó hệ $\overline{x}^0 = B^{-1}\overline{b}$ tương đương với $B\overline{x}^0 = \overline{b}$ và có dạng

$$\begin{cases} x_1 \quad +3x_4 \qquad\qquad = 3 \\ \qquad\quad 2x_4 \quad +3x_2 \quad = 14 \\ \qquad\qquad\qquad 3x_2 \quad = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{x}^0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Do $\overline{x}^0$ có thành phần âm nên x^* không phải là phương án tối ưu của bài toán mới và cần phải tiếp tục tính toán.

Đặt $\overline{x}^0$ vào cột $\overline{b}$ ở bước thứ 3 rồi tiếp tục thuật toán đơn hình đối ngẫu (chú ý rằng, chỉ biến đổi cột $\overline{b}$ theo phần tử trục đã xác định khi giải bài toán ban đầu). Ở bước 4, dấu hiệu tối ưu đối với bài toán mới xuất hiện là $\widetilde{x} = (0, 1/3, 0, 24, 5)$ giá trị tối ưu của hàm mục tiêu tại $\widetilde{x}$ là 54.

4.5. Bài tập chương 4

Bài 4.1. Tìm giá trị tối ưu của hàm mục tiêu của các bài toán sau:

(a) $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leq \beta$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$

trong đó $\beta, c_j, a_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ là các số dương.

(b) $\sum\limits_{j=1}^{n} j x_j \to \min$

$\sum\limits_{j=1}^{i} x_j \leq i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Bài 4.2. Chứng tỏ bài toán sau có hàm mục tiêu không bị chặn

$$f(x) = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 \geq 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 6x_4 \geq 16 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Bài 4.3. Chứng minh rằng bài toán $\{{}^t cx \to \max :\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ có phương án tối ưu nếu $b \geq 0$ và ma trận A có ít nhất một dòng gồm toàn các số dương.

Bài 4.4. Chứng tỏ rằng $\overline{x} = (0, 1, 0, 3)$ là phương án tối ưu của bài toán

$$f(x) = -x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 + 4x_4 = 24 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3 \\ 4x_1 - 18x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq -33 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Bài 4.5. Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\overline{x} = (0, 0, 2, -2, 0)$ của bài toán:

$$f(x) = -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq -1 \\ 4x_1 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 \geq 5 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

Bài 4.6. Biết rằng phương án tối ưu của bài toán

$$f(x) = 15x_1 + 10x_2 + 6x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 & & +2x_3 & = 24 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \geq 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 2 \\ 4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \geq 1 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

là $x = (1, 5/4, 11/4)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài 4.7. Tìm tập phương án tối ưu của bài toán

$$f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = 8 \\ -2x_1 & & -x_3 & +x_4 & -x_5 & \geq -21 \\ 3x_1 & & +5x_3 & -3x_4 & +2x_5 & = 25 \\ 2x_1 & & & +x_4 & +4x_5 & \leq 20 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

biết rằng $\overline{y} = (1, 0, 1, -1)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài 4.8. Cho bài toán

$$f(x) = x_1 + x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 7 \\ 4x_1 & +3x_2 & -6x_3 & \leq 9 \\ 2x_1 & -x_2 & -8x_3 & \leq -6 \\ & -2x_2 & +x_3 & \leq 2 \\ -2x_1 & -x_2 & +5x_3 & \leq 1 \\ -x_1 & & +3x_3 & \leq 1 \\ & & x_3 & \leq 0 \end{cases}$$

(a) Chứng tỏ rằng các phương án $\overline{x} = (-4, 6, -1)$, $\overline{y} = (4/5, 0, 3.5, 0, 0, 1)$ theo thứ tự là phương án tối ưu của bài toán đã cho và bài toán đối ngẫu của nó.

(b) Tìm tập phương án tối ưu của bài toán đã cho và bài toán đối ngẫu của nó.

Bài 4.9. Cho bài toán

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq 5 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & \geq 3 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

(a) Chứng tỏ rằng phương án $\overline{x} = (0, 1, 1, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đã cho.

(b) Tìm tất cả các phương án tối ưu của bài toán đã cho thỏa mãn điều kiện $c_3 + 5x_4 = 1$.

Bài 4.10. Cho bài toán:

$$f(x) = 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 3x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -2x_4 & +x_5 & \leq -4 \\ 8x_1 & & +2x_3 & +4x_4 & -x_5 & = 20 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & \geq -1 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 2, 3, 4, 5.$$

(a) Chứng tỏ rằng phương án $\overline{x} = (0, 1, 0, 5, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đã cho. Tìm tập phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

(b) Hãy tìm tất cả các phương án tối ưu của bài toán đã cho có thành phần thứ ba là $x_3 = 4$.

Bài 4.11. Cho bài toán

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 - 12x_3 + \alpha x_4 + \beta x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 & & & +5x_4 & +x_5 & \geq b_1 \\ & 3x_2 & & -7x_4 & -x_5 & \geq b_2 \\ & & -4x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \geq b_3 \end{cases}$$
$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

(a) Tìm tất cả các phương án cực biên của bài toán đã cho.

(b) Tìm điều kiện cần và đủ về các tham số α, β để bài toán đã cho có phương án tối ưu với mọi b_1, b_2, b_3.

(c) Với giá trị nào của α, β bài toán đã cho có hàm mục tiêu không bị chặn?

Bài 4.12. Cho bài toán

$$f(x) = x_1 + 3x_2 - 12x_3 + \alpha x_4 + \beta x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 & & & +5x_4 & +x_5 & \geq b_1 \\ & 3x_2 & & -7x_4 & -x_5 & \geq b_2 \\ & & -4x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \geq b_3 \end{cases}$$
$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

(a) Giải bài toán đã cho.

(b) Tìm tập phương án tối ưu của bài toán đã cho.

Bài 4.13. Cho bài toán

$$f(x) = -4x_1 - x_2 - 8x_3 + 5x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +4x_4 & = 3 \\ 5x_1 & +3x_2 & +6x_3 & -x_4 & = 8 \end{cases}$$
$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Hãy tìm tất cả các cơ sở đối ngẫu. Trong các cơ sở đối ngẫu hãy chỉ ra các cơ sở tối ưu của bài toán đã cho.

Chương 5.

BÀI TOÁN VẬN TẢI VÀ THUẬT TOÁN THẾ VỊ

5.1. Bài toán vận tải

Trong mục 1.1., ta đã nêu dạng tổng quát của bài toán vận tải là

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4)$$

trong đó $a_i > 0,\ (i = 1, 2, \ldots, m, b_j > 0,\ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Đó là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc nhưng có cấu trúc khá đặc biệt mà ta gọi nó là *bài toán vận tải cổ điển*.

Đặt $\overline{a} = \sum_{i=1}^{m} a_i$, $\overline{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Nếu $\overline{a} = \overline{b}$ thì bài toán vận tải (1),(2),(3),(4) được gọi là *bài toán cân bằng thu phát.*.

Kí hiệu A là ma trận ràng buộc và

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn} \qquad (5.1.1)$$

$$c = (c_{11}, \ldots, c_{1n}, \ldots, c_{21}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn} \qquad (5.1.2)$$

Thì bài toán vận tải được viết lại dưới dạng

$$f(x) =^t cx \to \min$$

$$Ax = A^0$$

$$x \geq 0.$$

Trong bài toán vận tải, hệ $Ax = A^0$ gồm $m + n$ phương trình với $n \times m$ ẩn, trong đó chỉ có $m + n - 1$ phương trình độc lập tuyến tính, mỗi phương trình là hệ quả của các phương trình còn lại.

Sau này mỗi phương án ta viết dưới dạng ma trận cở $m \times n$: $x = (x_{ij})$. Ta cũng có *ma trận cước phí* cỡ $m \times n : c = (c_{ij})$.

Như vậy, bài toán vận tải được coi là đã cho nếu biết vectơ lượng phát $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, vectơ lượng thu $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và ma trận cước phí $c = (c_{ij})$. Ta kí hiệu bài toán vận tải đó là $\langle a, b, c\rangle$.

Định lý 5.1.1 (Điều kiện có phương án tối ưu). *Để bài toán vận tải (1),(2),(3),(4) có phương án tối ưu, điều kiện cần và đủ là có điều kiện cân bằng thu phát $\overline{a} = \overline{b}$.*

5.2. Các Tính chất của bài toán vận tải

5.2.1 Chu trình

Một dãy ô có dạng

$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \cdots, (i_k, j_k), (i_k, j_1)$ hay

$(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_k, j_k), (i_1, j_k)$ được gọi là một *chu trình* (hai ô kế tiếp cùng mằn trong một dòng hay một cột, ba ô liên tiếp không cùng mằn trên một dòng hay một cột, ô đầu tiên và ô cuối cùng cũng được coi là hai ô liên tiếp).

Như vậy số ô trong một chu trình là một số chẵn không nhỏ hơn 4.

Tập ô $\Gamma \subset U = \{(i, j) : i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ được gọi là *chứa chu trình* nếu như từ các ô của Γ có thể lập được ít nhất một chu trình. Nếu trái lại thì ta nói Γ *không chứa chu trình.*

Định lý 5.2.2 (Điều kiện không chứa chu trình). *Điều kiện cần và đủ để tập ô $\Gamma \subset U$ không chứa chu trình là hệ vectơ tương ứng với nó, tức là hệ $\{A^{ij} : (i, j) \in \Gamma\}$, độc lập tuyến tính.*

Hệ quả 5.2.3 (Số ô tối đa không chứa chu trình). *Nếu bảng vận tải gồm m dòng và n cột thì tập ô không chứa chu trình có tối đa là $n + m - 1$ ô.*

Định lý 5.2.4 (Chu trình duy nhất). *Giả sử bảng vận tải gồm m dòng và n cột, E là tập ô gồm $m+n-1$ ô không chứa chu trình, (i,j) là một ô của bảng không thuộc E. Khi đó $F = E \cup \{i,j\}$ có một chu trình duy nhất qua ô (i,j).*

Định lý 5.2.5 (Dấu hiệu tập không chứa chu trình). *Giả sử F là một tập gồm $m+n$ ô chứa chu trình duy nhất V và $(i,j) \in V$. Khi đó tập ô $E = F \setminus \{(i,j)\}$ sẽ không chứa chu trình.*

Định lý 5.2.6 (Điều kiện cực biên). *Phương án $x = (x_{ij})$ của bài toán vận tải* (1),(2),(3),(4) *là phương án cực biên khi và chỉ khi tập ô chọn tương ứng với nó, tức là tập ô*

$$H(x) = \{(i,j):\ x_{ij} > 0\} \tag{5.2.3}$$

không chứa chu trình.

Định lý 5.2.7 (Điều kiện chứa ít nhất một chu trình). *Tập ô không rỗng $\Gamma \subset U$ sẽ chứa ít nhất một chu trình nếu trong mỗi dòng và mỗi cột của bảng vận tải hoặc là không có ô nào của Γ, hoặc có ít nhất hai ô của Γ.*

5.3. Vấn đề tính các ước lượng

Giả sử bằng cách nào đó ta đã tìm được phương án cực biên $x = (x_{ij})$ của bài toán vận tải với tập ô chọn $H(x)$ gồm $m+n-1$ ô (kể cả ô chọn-không) không chứa chu trình. Theo thuật toán đơn hình để xét tính tối ưu của x ta phải tìm được các ước lượng Δ_{ij} ứng với mỗi vectơ A^{ij} ngoài cơ sở của x, tức là ứng với mỗi ô loại (i,j).

Chúng ta dễ dàng chứng minh được

$$\Delta_{ij} = \sum_{(i,j)\in V^c} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in V^l} c_{ij} \tag{5.3.4}$$

trong đó, V^c và V^l theo thứ tự là tập hợp các ô mang số hiệu chẵn lẻ của V.

Ví dụ 5.3.1. Bài toán vận tải và phương án cực biên x ban đầu của nó được cho bởi bảng

Phát \ Thu	40	70	50	30
80	40 ***10***	15 ***70***	35	100
30	68 ***20***	51	53	18 ***10***
20	120	30	150	16 ***20***
60	30 ***10***	54	13 ***50***	80

trong đó các cước phí ghi ở góc trên bên trái mỗi ô, các thành phần cơ sở của phương án cực biên x ban đầu được ghi ở góc đối diện (các thành phần phi cơ sở bằng 0). Có 9 ô loại là các ô $(1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,2), (4,4)$.

Ta hãy lập bảng tính Δ_{ij} với A^{ij} ngoài cơ sở, tức là với các ô loại (i,j). Trước hết ta hãy tính Δ_{32}. Tập ô gồm ô $(3,2)$ và các ô chọn chứa chu trình duy nhất gồm 6 ô, được thể hiện bởi được thể hiện bởi đường nét đứt trên bảng. Các ô này cùng với số hiệu của nó và cước phí tương ứng là

Ô trong chu trình	(3,2)	(3,4)	(2,4)	(2,1)	(1,1)	(1,2)
Số hiệu	1	2	3	4	5	6
c_{ij}	30	16	18	68	40	15

Theo công thức (5.3.4) ta có

$$\Delta_{32} = 16 - 18 + 68 - 40 + 15 - 30 = 11$$

Tương tự ta cũng tính được

$$\Delta_{13} = 40 - 30 + 13 - 35 = -12,$$

$$\Delta_{14} = 40 - 68 + 18 - 100 = -100,$$

$$\Delta_{22} = 68 - 40 + 15 - 51 = -8,$$

$$\Delta_{23} = 68 - 30 + 13 - 53 = -2$$

$$\Delta_{31} = 16 - 18 + 68 - 120 = -54$$

$$\Delta_{33} = 16 - 18 + 68 - 30 + 13 - 150 = -101$$

$$\Delta_{42} = 30 - 40 + 15 - 54 = -49$$

$$\Delta_{44} = 30 - 68 + 18 - 80 = -100$$

Việc tính các ước lượng theo công thức (5.3.4) là khá đơn giản nhờ hình ảnh trực quan của khái niệm chu trình, nhưng sẽ đơn giản hơn nếu ta ứng dụng định lý dưới đây

Định lý 5.3.2 (Phương pháp đơn giản xác định các ước lượng). *Nếu ta thay ma trận cước phí $c = (c_{ij})$ bởi ma trận $c' = (c'_{ij})$, trong đó $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$, tức là nếu ta cộng vào cước phí ở mỗi ô của dòng i với cùng một số r_i, cộng vào cước phí ở mỗi ô của cột j với cùng một số s_j thì sẽ được một bài toán vận tải mới tương đương với bài toán vận tải ban đầu (theo nghĩa hai bài toán có chung tập tập phương án tối ưu).*

Định lý 5.3.3 (Dấu hiệu tối ưu). *Giả sử $x = (x_{ij})$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải với tập ô chọn $H(x)$ và $c'_{ij} = 0$ với mọi ô $(i, j) \in H(x)$ (tức là đã quy-không các ô chọn).*

(a) Nếu $c'_{ij} \geq 0$ với mọi ô $(i, j) \notin H(x)$ thì x là phương án tối ưu của bài toán.

(b) Nế tồn tại ô $(i, j) \notin H(x)$ sao cho $c'_{ij} < 0$ thì ta có thể xây dựng được phương án cực biên x' tốt hơn x, nếu x không suy biến (nói chung x' không xấu hơn x).

5.4. Một số phương pháp xây dựng phương án cực biên ban đầu

Dưới đây ta nêu ra ba phương pháp, đó là phương pháp góc tây bắc, phương pháp cực tiểu theo bảng và phương pháp Vaugen. Đối với bảng vận tải gồm m dòng và n cột, việc tìm tập ô chọn gồm $m+n-1$ ô không chứa chu trình được tiến hành bằng phương pháp quy nạp theo $m+n$ là tổng số dòng và cột của bảng vận tải.

Nếu $m+n=2$ thì bảng gồm một ô duy nhất. Do điều kiện cân bằng thu phát nên $a_1=b_1$. Đối với cả ba phương pháp ấy điều chọn ô (1,1) và đặt $x_{11}=a_1$. Đó là phương án cực biên vì $A^{11}\neq 0$và rõ ràng có $n+m-1=1$ ô chọn không chứa chu trình.

Giả sử đã biết cách xây dựng phương án cực biến ban đầu theo cả ba phương pháp với bảng có $m+n\leq k-1$, khi đó đối với bảng mà $m+n=k$ ta sẽ tiến hành như sau:

Nếu $a_s\leq b_t$ thì $x_{st}=a_s$ và xóa ngay dòng s; b_t được thay bởi $b'_t=b_t-a_s$.

Nếu $a_s>b_t$ thì $x_{st}=b_t$ và xóa ngay cột t; a_s được thay bởi $a'_s=a_s-b_t$.

Sau khi xóa đi, ta được bảng mới gồm $m+n=k-1$, trên đó đã xây dựng được phương án cực biên (theo giả thuyết qui nạp) với tập ô chọn H gồm $n+m-1=k-2$ ô. Dễ thấy rằng $H\cup\{s,t\}$ là tập gồm $k-1$ ô chọn (đối với bảng mới) không chứa chu trình, bởi vì nếu trái lại thì chu trình ắt phải qua ô (s,t) nhưng điều này không thể được vì dòng s cột t đã bị xóa. Như vậy, với bảng mà $m+n=k$ ta xây dựng được phương án cực biên với tập ô chọn $H\cup\{s,t\}$ gồm $k-1$ ô.

Như vậy, ở mỗi bảng hình thành trong quá trình phân phối (kể cả bảng đầu tiên) sau khi phân phối tối đa vào ô (s,t) nào đó ta xóa chỉ một dòng hoặc một cột để được một bảng mới.

Việc chọn ô (s,t) là ngẫu nhiên, nhưng ta thường dùng các phương pháp sau:

(1) *Phương pháp góc tây bắc*: (s,t) là ở góc trên bên trái của bảng (ở mỗi bước).

(2) *Phương pháp cực tiểu theo bảng* (s,t) là ô sao cho $c_{st}=\min c_{ij}$ trong đó cực tiểu được chọn theo ô (i,j) của bảng (ở mỗi bước).

Phát \ Thu	40	70	20
80	10 ***40***	9 ***40***	2
30	4	3 ***30***	1
20	2	6 ***0***	2 ***20***

Bảng 5.4.1: Phương pháp tây bắc

Phát \ Thu	40	70	20	
80	10 ***20***	9 ***40***	2 ***20***	[7]
30	4	3 ***30***	1	2
20	2 ***20***	6	2	0
	2	3	1	

Bảng 5.4.2: Phương pháp Vaugen

(3) *Phương pháp Vaugen* Với mỗi dòng và mỗi cột ta điều tính hiệu của cước phí thấp thứ nhì và thấp thứ nhất (ta gọi hiệu đó là độ chênh lệch của dòng hay cột đó). Chọn dòng (hay cột) có độ chênh lệch lớn nhất. Trên dòng (hay cột) đã chọn ta sẽ chọn ô (s,t) có cước phí thấp nhất.

Ví dụ 5.4.1. Dưới đây là các phương án cực biên ban đầu tìm được bằng phương pháp góc tây bắc và phương pháp Vaugen.

5.5. Thuật toán thế vị

Phương pháp đã nêu trên đây để tìm phương án tối ưu của bài toán vận tải với các bước cụ thể sau đây được gọi là *thuật toán thế vị*.

Bước 1. Tìm phương án cực biên ban đầu $x = (x_{ij})$.

Bước 2. Quy-không các ô chọn. Nếu $c'_{ij} \geq 0$ với mọi ô (i, j) của bảng thì kết thúc việc tính toán và kết luận x là phương án tối ưu. Nếu trái lại, tức là tồn tại ô (i,j) sao cho $c_{ij} < 0$ thì chọn $c'_{st} = \min\{c'_{ij} : \ c'_{ij} < 0\}$ và chuyển sang bước 3.

Bước 3. Lập chu trình V đi qua ô (s,t) và số ô xác định nào đó của $H(x)$. Tính

$$\theta = \min\{x_{ij} : \ ij \in V^c\}. \tag{5.5.5}$$

chuyển sang bước 4.

Bước 4. Xây dựng $x' = (x_{ij})$ theo công thức

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta & \text{nếu} (i, j) \in V^l \\ x_{ij} - \theta & \text{nếu} (i, j) \in V^c \\ x_{ij} & \text{nếu} (i, j) \in V \end{cases} \tag{5.5.6}$$

cho x' đóng vai trò của x và quay lại bước 2.

Ví dụ 5.5.1. Giải bài toán vận tải $\langle a, b, c\rangle$ với vectơ lượng phát $a = (100, 400, 230)$ vectơ lượng thu $b = (320, 180, 110, 120)$ và ma trận cước phí

$$c = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 16 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Giải

Bằng phương pháp góc tây bắc ta thu được phương án cực biên đấu tiên suy biến, trong đó có một ô-chọn-không, đó là ô (2,3) (sau khi phân phối tối đa lần thứ bao với $x_{22} = 180$, nếu xóa dòng 2 thì ô-chọn-không là ô (3,2)).

Phát \ Thu	320	180	110	120	
100	6 ***100***	3	16	9	0
400	5 ***220***	3 ***180***	7 ***0***	8	1
230	1	8	12 ***110***	10 ***120***	-4
	-6	-4	-8	-6	

0 ***100***	-1	8	3	0
0 ***110***	0 ***180***	0 ***110***	3	0
-9 ***110***	0	0	0 ***120***	9
0	0	0	-9	

0	-1	8	-6 ***100***	0
0 ***110***	0 ***180***	0 ***110***	-6	-6
0 ***210***	9	9	0 ***20***	-6
6	6	6	6	

6	5	14	0 ***100***	0
0 ***90***	0 ***180***	0 ***110***	-6 ***20***	6
0 ***230***	9	9	0	6
-6	-6	-6	0	

0	-1 *100*	8	0	0
0 *90*	0 *80*	0 *110*	0 *20*	-1
0 *230*	9	9	6	-1
1	1	1	1	

1	0	9	1
0	0	0	0
0	9	9	6

Từ đó ta có phương án tối ưu

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 90 & 80 & 110 & 120 \\ 230 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

với giá trị tối ưu của hàm mục tiêu là

$$f^* = 110.3 + 90.5 + 80.3 + 110.7 + s120.8 + 230.1 = 2950.$$

5.6. Tiêu chuẩn tối ưu. Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải

5.6.1 Tiêu chuẩn tối ưu

Giả sử $x = (x_{ij})$ là một phương án của bài toán vận tải (1),(2),(3),(4).

Theo 4.1.6 thì điều kiện cần và đủ để phương án x là phương án tối ưu của bài toán vận tải là tồn tại vectơ

$$\overline{y} = (u, v) = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+n} \tag{5.6.7}$$

sao cho

$$\begin{aligned} \overline{y}^t A^{ij} &\le c_{ij} \qquad \text{nếu } x_{ij} = 0 \\ \overline{y}^t A^{ij} &= x_{ij} \qquad x_{ij} > 0 \end{aligned}$$

Do tính chất đặc biệt của vectơ A^{ij} nên ta có

$$\overline{y}^t A^{ij} = u_i + v_j \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.6.8}$$

Từ đó suy ra rằng:

Điều kiện cần và đủ để phương án $x = (x_{ij})$ là phương án tối ưu của bài toán (1),(2),(3),(4) là tồn tại các số u_i với $i = 1, 2, \ldots, m$ và v_j với $j = 1, 2, \ldots, n$ sao cho

$$\begin{aligned} u_i + v_j &\le c_{ij} \qquad x_{ij} = 0 \\ u_i + v_j &= c_{ij} \qquad x_{ij} > 0 \end{aligned}$$

Nếu x là phương án tối ưu của bài toán vận tải (1),(2),(3),(4) thì $\overline{y} = (u, v)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

5.6.2 Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải

Bài toán vận tải là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Chú ý đến (5.6.8), bài toán đối ngẫu của nó dạng

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Từ điều kiện cần và đủ để bài toán vận tải (1),(2),(3),(4) nhận phương án x làm phương án tối ưu nêu trên, ta rút ra kết luận:

Nếu $(r, s) = (r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots, s_n)$ là một hệ thống thế vị ứng với phương án tối ưu thì

$$(-r, -s) = (-r_1, \ldots, -r_m, -s_1, \ldots, -s_n)$$

là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Chỉ mục

T

V

DANH SÁCH ĐỊNH LÝ