Giới hạn dạng vô định là những giới hạn mà ta không thể tìm chúng bằng cách áp dụng trực tiếp các định lý về giới hạn và các giới hạn cơ bản trình bày trong Sách giáo khoa. Do đó muốn tính giới hạn dạng vô định của hàm số, ta phải tìm cách khử các dạng vô định để biến đổi thành dạng xác định của giới hạn

Trong chương trình toán THPT, các dạng vô định thường gặp là :

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0.\infty,\ 1^{\infty}$$

Sau đây là nội dung từng dạng cụ thể.

I. GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$

Giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$ là một trong những giới hạn thường gặp nhất đối với bài toán tính giới hạn của hàm số. Để tính các giới hạn dạng này, phương pháp chung là sử dụng các phép biến đổi (phân tích đa thức thành nhân tử, nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp, thêm bớt, …) để khử các thành phần có giới hạn bằng 0, đưa về tính giới hạn xác định. Chính các thành phần có giới hạn bằng 0 này gây nên dạng vô định.

Để tính giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$, trước hết giáo viên cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng nhận dạng.

1. Nhận dạng giới hạn vô định $\frac{0}{0}$

Để giải bài toán tìm giới hạn của hàm số, học sinh cần xác định giới hạn cần tìm thuộc dạng xác định hay vô định. Nếu giới hạn đó là vô định thì phải xét xem nó thuộc dạng vô định nào để có phương pháp giải thích hợp. Bởi vậy việc rèn luyện kỹ năng nhận dạng cho học sinh có quan trọng, giúp học sinh định hướng được cách giải, tránh những sai xót có thể mắc phải.

Đối với dạng vô định $\frac{0}{0}$, việc nhận dạng không khó khăn lắm vì học sinh thường gặp giới hạn :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ mà } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

Thực tế học sinh hay gặp trường hợp $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mà $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ngoài ra trong một số bài toán học sinh phải thực hiện các phép biến đổi để chuyển về dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, sau đó mới áp dụng các phương pháp khử các thành phần có giới hạn bằng 0.

Khi giảng dạy, giáo viên nên đưa ra một số bài toán để nhấn mạnh cho học sinh việc nhận dạng như :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ mà } \lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

Tránh tình trạng học sinh không nhận dạng mà áp dụng ngay phương pháp giải.

Ví dụ áp dụng :

(Yêu cầu chung của những bài tập là : " Tính các giới hạn sau").

Ví dụ 1 : $L_1 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x - 2}{x^2+1}$

Bài giải :

$$L_1 = \lim_{x\to 2}\frac{x - 2}{x^2+1} = \frac{2 - 2}{2^2+1} = 0$$

Ví dụ 2 : $L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

Bài giải :

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \infty \text{ vì } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 1+2 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3 : $L_3 = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^2-1}\right)$

Bài giải :

$$L_3 = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Dạng vô định $\frac{0}{0}$ được nghiên cứu với các loại cụ thể sau :

2. Loại 1 : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ mà f(x), g(x) là các đa thức và $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Phương pháp : Khử dạng vô định bằng cách phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $(x - x_0)$.

Giả sử : $f(x) = (x - x_0).f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0).g_1(x)$. Khi đó :

$$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\frac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình khử đến khi không còn dạng vô định.

Ví dụ áp dụng :

Ví dụ 4 : $L_4 = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$

Bài giải :

Ta phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung : x - 2

$$L_4 = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x - 2)(2x - 1)}{(x - 2)(x + 3)} =$$

$$= \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x - 1}{x + 3} = \frac{2.2 - 1}{2 + 3} = \frac{3}{5}$$

Vậy $L_4 = \frac{3}{5}$

Ví dụ 5 : $L_5 = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$

Bài giải :

$$L_5 = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)^2} =$$

$$= \lim\limits_{x\to 2}\frac{x - 1}{x - 2} = \infty$$

(Vì giới hạn của tử bằng 1, giới hạn của mẫu bằng 0)

Vậy $L_4 = \infty$

Ví dụ 6 : $L_6 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x+x^2+x^3+...+x^m-m}$ $(m, n \in N^*)$

Bài giải : Ta sẽ phân tích tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung : x – 1 bằng cách tách và nhóm như sau :

$$x + x^2 + x^3 + ... + x^n - n = (x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + ...+ (x^n-1)$$

$$x + x^2 + x^3 + ... + x^m - m = (x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + ...+ (x^m-1)$$

Khi đó:

$$L_6 = \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x+x^2+x^3+...+x^m-m} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+...+(x^n-1)}{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+...+(x^m-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)\right]}{(x-1)\left[1+(x+1)+...+(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+(x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)}{1+(x+1)+...+(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)} =$$

$$= \frac{1+(1+1)+...+(1^{n-1}+1^{n-2}+...+1+1)}{1+(1+1)+...+(1^{m-1}+1^{m-2}+...+1+1)} =$$

$$= \frac{1+2+3+...+n}{1+2+3+...+m} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{m(m+1)}{2}} = \frac{n(n+1)}{m(m+1)}$$

Vậy $L_6 = \dfrac{n(n+1)}{m(m+1)}$

Ví dụ 7 : $L_7 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-5x^3+3x^2+x-1}{3x^4-8x^3+6x^2-1}$

Bài giải :

$$L_7 = \lim_{x\to 1}\frac{2x^4-5x^3+3x^2+x-1}{3x^4-8x^3+6x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^3-3x^2+1)}{(x-1)(3x^3-5x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-5x^2+x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^2-x-1)}{(x-1)(3x^2-2x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-2x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x+1} = \frac{2.1+1}{3.1+1} = \frac{3}{4}$$

Vậy $L_7 = \frac{3}{4}$

Kết luận:

Phương pháp để giải bài tập loại này là phân tích đa thức thành nhân tử với nhân tử chung là **$x - x_0$**. Yêu cầu đối với học sinh là :

Phải nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, các hằng đẳng thức, công thức phân tích tam thức bậc hai, đa thức bậc ba thành nhân tử: $f(x) = ax^2 + bx + c = (x - x_0)\left(ax - \frac{c}{x_0}\right)$, ($f(x_0) = 0$)

Ngoài các hằng đẳng thức đáng nhớ, học sinh cần nhớ các hằng đẳng thức bổ xung là : $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \in N^*$

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, n là số tự nhiên lẻ.

Để học sinh dễ nhớ, cần lấy các trường hợp cụ thể như : n = 2, 3, 4 và trường hợp đặc biệt : $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$.

Tuỳ theo đặc điểm từng bài mà biến đổi một cách linh hoạt để khử dạng vô định. Trong quá trình thực hành, nhiều khi sau các biến đổi đã khử các thành phần có giới hạn bằng 0 ta vẫn gặp giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$ mới (thường là "đơn giản" hơn so với giới hạn ban đầu). Tới đây ta tiếp tục quá trình khử đến khi giới hạn cần tìm không còn dạng vô định $\frac{0}{0}$ thì thôi.

Bài tập tự luyện

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1} - (n+1) + n}{(x-1)^2}$

3. Loại 2 : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ mà f(x), g(x) chứa các căn thức cùng bậc và $f(x_0)=g(x_0)= 0$

Phương pháp : Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn thức (gọi tắt là *phương pháp nhân liên hợp* hay *dùng biểu thức liên hợp)* để trục các nhân tử $x - x_0$ ra khỏi các căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0. Biểu thức chứa căn thức có thể là tử, mẫu hay cả tử và mẫu của phân thức cần tìm giới hạn). Lưu ý là có thể nhân liên hợp một hay nhiều lần để khử dạng vô định.

Các công thức thường được sử dụng khi nhân liên hợp là :

$$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}) = A - B \text{ , } (A \geq 0,\ B \geq 0)$$
$$(\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B^2}) = A \pm B$$

Giáo viên cần cho học sinh thấy được hai công thức này xuất phát từ hai hằng đẳng thức sau để học sinh dễ nhớ :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$
$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

Ví dụ áp dụng:

Ví dụ 8 : $L_8 = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - x}{x^2 - 4}$

Bài giải : Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng, ta được :

$$L_8 = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{3x - 2} - x)(\sqrt{3x - 2} + x)}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x - 2} + x)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x - 2 - x^2}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x - 2} + x)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(-x + 1)}{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{3x - 2} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-x + 1}{(x + 2)(\sqrt{3x - 2} + x)} = \frac{-2 + 1}{(2 + 2)(\sqrt{3.2 - 2} + 2)} = -\frac{1}{16}$$

Vậy $L_8 = -\dfrac{1}{16}$

Ví dụ 9 : $L_9 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+5}-2}$

Bài giải :

$$L_9 = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+5}-2} = \lim_{x\to -1} \frac{\left[(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)\right](\sqrt{x+5}+2)}{\left[(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)\right](\sqrt{x+2}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+2-1)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+5-4)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{\sqrt{-1+5}+2}{\sqrt{-1+2}+1} = 2$$

Vậy $L_9 = 2$

Ví dụ 10 : $L_{10} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $(m, n \in N^*)$

Bài giải :

$$L_{10} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[n]{x}-1)\left[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}+...+\sqrt[n]{x}+1\right]\left[(\sqrt[m]{x})^{m-1}+(\sqrt[m]{x})^{m-2}+...+\sqrt[m]{x}+1\right]}{(\sqrt[m]{x}-1)\left[(\sqrt[m]{x})^{m-1}+(\sqrt[m]{x})^{m-2}+...+\sqrt[m]{x}+1\right]\left[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}+...+\sqrt[n]{x}+1\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+\sqrt[m]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+...+\sqrt[n]{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+\sqrt[m]{x}+1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+...+\sqrt[n]{x}+1} = \frac{m}{n}$$

Vậy $L_{10} = \dfrac{m}{n}$

Kết luận:

Phương pháp dùng biểu thức liên hợp là phương pháp chủ yếu được sử dụng để tính các giới hạn có chứa căn thức cùng bậc. Có thể xem đây là " thuật toán" cơ bản cho phép tính được khá nhiều giới hạn của hàm số chứa căn thức, phương hướng rõ ràng, dễ hiểu.Việc xác định biểu thức liên hợp là không quá khó khăn đối với học sinh. Tuy nhiên giáo viên cần rèn luyện kỹ năng xác định và nhân biểu thức liên hợp khi tính giới hạn. Theo cách này, nhiều bài toán tuy giải được nhưng phải qua các phép biến đổi dài dòng với biểu thức cồng kềnh. Nếu dùng các giải khác như thêm bớt, đổi biến sẽ cho lời giải ngắn gọn hơn.

Bài tập tự luyện

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{2+\sqrt[3]{3x-2}}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x^2-x+1}}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a}}{x}$

4. Loại 3: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mà f(x) chứa các căn thức không cùng bậc và $f(x_0)=g(x_0)=0$

Phương pháp : Sử dụng thuật toán thêm bớt đối với f(x) để có thể nhân biểu thức liên hợp. Chẳng hạn như :

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[m]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}}{g(x)},\left(\sqrt[m]{u(x_0)}-\sqrt[n]{v(x_0)}=0,g(x_0)=0\right)$$

Ta biến đổi :

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[m]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left[\sqrt[m]{u(x)}-c\right]+\left[c-\sqrt[n]{v(x)}\right]}{g(x)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[m]{u(x)}-c}{g(x)}-\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{v(x)}-c}{g(x)}$$

Tới đây các giới hạn $L_1=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[m]{u(x)}-c}{g(x)}$, $L_2=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{v(x)}-c}{g(x)}$ đều tính được bằng cách nhân liên hợp.

Ví dụ áp dụng :

Ví dụ 11 : $L_{11}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+7}}{x^2-3x+2}$

Bài giải :

$$L_{11}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+7}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)+(2-\sqrt[3]{x+7})}{x^2-3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}+\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{x+7}}{x^2-3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)}+\lim_{x\to 1}\frac{(2-\sqrt[3]{x+7})\left[4+2\sqrt[3]{x+7}+(\sqrt[3]{x+7})^2\right]}{(x^2-3x+2)\left[4+2\sqrt[3]{x+7}+(\sqrt[3]{x+7})^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)}+\lim_{x\to 1}\frac{8-(x+7)}{(x^2-3x+2)\left[4+2\sqrt[3]{x+7}+(\sqrt[3]{x+7})^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}+\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(x-2)\left[4+2\sqrt[3]{x+7}+(\sqrt[3]{x+7})^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}+\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-2)\left[4+2\sqrt[3]{x+7}+(\sqrt[3]{x+7})^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{(1-2)(\sqrt{1+3}+2)}+\frac{-1}{(1-2)\left[4+2\sqrt[3]{1+7}+(\sqrt[3]{1+7})^2\right]}=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=-\frac{1}{6}$$

Vậy $L_{11}=-\dfrac{1}{6}$

Ví dụ 12 : $L_{12}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

Bài giải :

$$L_{12}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{1+2x}-(x+1)\right]+\left[(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}\right]}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{1+2x}-(x+1)\right]\left[\sqrt{1+2x}+(x+1)\right]}{x^2\left[\sqrt{1+2x}+(x+1)\right]}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{\left[(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}\right]\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+(\sqrt[3]{1+3x})^2\right]}{x^2\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+(\sqrt[3]{1+3x})^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)-(x+1)^2}{x^2\left[\sqrt{1+2x}+(x+1)\right]}+\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-(1+3x)}{x^2\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+(\sqrt[3]{1+3x})^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+(x+1)}+\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+(\sqrt[3]{1+3x})^2}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+2.0}+(0+1)}+\frac{0+3}{(0+1)^2+(0+1)\sqrt[3]{1+3.0}+(\sqrt[3]{1+3.0})^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

Vậy $L_{12}=\frac{1}{2}$

Kết luận :

Phương pháp chung để tính các giới hạn của biểu thức chứa các căn thức không cùng bậc là thêm, bớt một lượng nào đó, tách thành nhiều giới hạn rồi nhân liên hợp. Cần lưu ý là có thể thêm bớt một hằng số (thường chọn là $u(x_0)$ hoặc $v(x_0)$) hay một biểu thức. Việc thêm bớt dựa trên đặc điểm từng bài và phải thật tinh tế. Thuật toán thêm bớt còn được áp dụng hiệu quả đối với các dạng vô định khác.

Bài tập tự luyện

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+11}-\sqrt[3]{8x+43}}{2x^2+3x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$

5) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$

5. Giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$ của hàm số lượng giác

Phương pháp : Thực hiện các phép biến đổi đại số và lượng giác để sử dụng các kết quả giới hạn cơ bản sau đây :

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin ax}{ax}.a)=a.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=a$

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin ax}{ax}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{ax}{bx})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin ax}{ax}.\dfrac{a}{\cos ax})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{\cos ax}=a$

Trong quá trình biến đổi, học sinh cần vận dụng linh hoạt các công thức lượng giác, thêm bớt, nhân liên hợp …

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 13 : $L_{13}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin ax - \cos ax}{1- \sin bx - \cos bx}$

Bài giải :

$$L_{13}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin ax - \cos ax}{1- \sin bx - \cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{1- \cos ax+\sin ax}{1- \cos bx - \sin bx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}+2\sin\frac{ax}{2}\cos\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}-2\sin\frac{bx}{2}\cos\frac{bx}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{ax}{2}\left(\sin\frac{ax}{2}+\cos\frac{ax}{2}\right)}{2\sin\frac{bx}{2}\left(\sin\frac{bx}{2}-\cos\frac{bx}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\sin\frac{bx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{ax}{2}+\cos\frac{ax}{2}}{\sin\frac{bx}{2}-\cos\frac{bx}{2}}=-\frac{a}{b}$$

Vậy $L_{13}=-\dfrac{a}{b}$

Ví dụ 14 : $L_{14}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

Bài giải :

$$L_{14}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2.\frac{a^2}{2}\right]=\frac{a^2}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

Vậy $L_{14}=\frac{a^2}{2}$

Ví dụ 15 : $L_{15}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$

Bài giải :

$$L_{15}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)+x\sin x}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+x\sin x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin x+x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x}{\sin x}\right)=2+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=2+1=3$$

Vậy $L_{15}=3$

Ví dụ 16 : $L_{16}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x...\cos nx}{x^2}$ $(n\in N^*)$

Bài giải :

$$L_{16}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x...\cos nx}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x+...+\cos x.\cos 2x...\cos(n-1)x-\cos x.\cos 2x...\cos nx}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+...+\cos x.\cos 2x...\cos(n-1)x(1-\cos nx)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}+...+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x.\cos 2x...\cos(n-1)x(1-\cos nx)}{x^2}$$

Theo kết quả bài 14 ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\cos x.\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{2^2}{2}$$

…

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x.\cos 2x...\cos(n\text{-}1)x(1\text{- }\cos nx)}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos x.\lim_{x\to 0}\cos 2x...\lim_{x\to 0}\cos(n\text{-}1)x.\lim_{x\to 0}\frac{1\text{- }\cos nx}{x^2}=\frac{n^2}{2}$$

Do đó $L_{16}=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2}+...+\frac{n^2}{2}=\frac{1^2+2^2+...+n^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

Trong bài tập này ta đã sử dụng thuật thêm bớt :

cosx, cosxcos2x,…, cosxcos2x…cos(n - 1)x

để biến đổi và tính giới hạn đã cho. Có thể nhận thấy thuật thêm bớt đóng vai trò quan trọng trong kỹ năng biến đổi đối với bài tập này.

Ví dụ 17 : $L_{17}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}$

Bài giải :

$$L_{17}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Vậy L_{17} = 1.

Kết luận :

Để khử dạng vô định đối với hàm số lượng giác, học sinh cần nắm vững và vận dụng linh hoạt các phép biến đổi đại số, lượng giác cũng như áp dụng các giới hạn cơ bản. Ở đây chỉ có giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ được sử dụng trực tiếp, các kết quả còn lại khi làm bài phải chứng minh lại.

Để vận dụng giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, cần đưa hàm số cần tính giới hạn về dạng : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\sin f(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\text{tg}f(x)}{f(x)}$ với $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ bằng cách thêm, bớt, đổi biến hay nhân, chia đồng thời với một lượng thích hợp nào đó. Trong khi giải bài tập, học sinh có thể gặp khó khăn, lúng túng để đưa về các dạng trên. Giáo viên cần khắc phục bằng cách cho học sinh làm các bài tập như :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x},\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2},\ \ldots$$

Bài tập tự luyện

Tính các giới hạn sau :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\text{tg}x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)\sin(a+x)-a\sin a}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\text{co}3x}{1-\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\text{cotg}^3x}{2-\text{cotg}x-\text{cotg}^3x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{1-\cos 2x}$

6. Giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$ của hàm số mũ và lôgarit.

Phương pháp : Thực hiện các phép biến đổi và sử dụng các giới hạn cơ bản sau đây :

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

+) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Các giới hạn trên đều được thừa nhận hoặc đã chứng minh trong Sách giáo khoa. Ngoài ra giáo viên cần đưa ra cho học sinh hai giới hạn sau :

+) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln a}-1}{x.\ln a}.\ln a\right)=\ln a$ (Vì $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=1$)

+) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x.\ln a}=\frac{1}{\ln a}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln a$

Ví dụ áp dụng :

Ví dụ 18 : $L_{18}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Bài giải :

$$L_{18}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(e^{bx}-1)}{x}=$$
$$=a.\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)}{ax}-b.\lim_{x\to 0}\frac{(e^{bx}-1)}{bx}=$$
$$=a-b$$

Vậy L_{18} = a - b.

Trong bài tập này để sử dụng giới hạn cơ bản ta đã thực hiện thêm bớt 1 và tách thành hai giới hạn. Cần nhấn mạnh cho học sinh khi $x\to 0$ thì $ax\to 0$, do vậy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)}{ax}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{bx}-1)}{bx}=1$.

Ví dụ 19 : $L_{19}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}$

Bài giải :

$$L_{19}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin 2x}-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}.2\cos x\right)-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\right).\lim_{x\to 0}(2\cos x)-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=$$
$$=2-1=1$$

Vậy $L_{19} = 1$.

Ví dụ 20 : $L_{20} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x - x^2}{x-2}$

Bài giải :

$$L_{20} = \lim_{x\to 2}\frac{2^x - x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(2^x-4)-(x^2-4)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2} - \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{4(2^{x-2}-1)}{x-2} - \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$$

$$= 4\lim_{x\to 2}\frac{2^{x-2}-1}{x-2} - \lim_{x\to 2}(x+2) = 4\ln 2 - 4$$

Vậy $L_{20} = 4\ln 2 - 4$

Ví dụ 21 : $L_{21} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{-2x^2}}{\ln(1+x^2)}$

Bài giải :

$$L_{21} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{-2x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)-(e^{-2x^2}-1)}{\ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)-(e^{-2x^2}-1)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\ln(1+x^2)} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{\ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)}{(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)\ln(1+x^2)} - \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}.\frac{-2x^2}{\ln(1+x^2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)\ln(1+x^2)} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}.\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{\ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}.\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x^2)} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}.\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{\ln(1+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{3}.1 - 1.(-2) = \frac{7}{3}$$

Vậy $L_{21} = \dfrac{7}{3}$

Kết luận :

Để tính các giới hạn dạng vô định của hàm số mũ và lôgarit, học sinh thực hiện các phép biến đổi để áp dụng các giới hạn cơ bản. Yêu cầu học sinh phải thành thạo các phép toán về luỹ thừa và lôgarit.

Để sử dụng các giới hạn cơ bản, bằng cách thêm, bớt, nhân liên hợp, … học sinh phải biến đổi hàm số cần tìm giới hạn về một trong các dạng :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)},\ \lim_{x\to x_0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)},\ \lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1+f(x)\right)}{f(x)},\ \lim_{x\to x_0}\frac{\log_a\left(1+f(x)\right)}{f(x)} \text{ với } \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

Bài tập tự luyện

Tính các giới hạn sau :

1)

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-5^x}{4^x-3^x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2}-\cos x}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)(1-\cos x)}{2x^3+3x^4}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}.\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{5x+\mathrm{tg}^2x}$

II. GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$

Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ có dạng là :

$$L=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ trong đó : } \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\infty$$

Để khử dạng vô định này, phương pháp thông thường là chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của tử và mẫu của phân thức $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Cụ thể như sau :

1) Nếu f(x), g(x) là các đa thức có bậc tương ứng là m, n thì ta chia cả f(x), g(x) cho x^k với k = max{m, n}

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0} \text{ với } a_m,b_n\neq 0,\ m,n\in \mathbb{N}^*$$

Khi đó xảy ra một trong ba trường hợp sau :

+) m = n (bậc của tử và mẫu bằng nhau), chia cả tử và mẫu cho x^n ta

được: $$L = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + ... + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{b_n} = \frac{a_m}{b_n}$$

+) m > n (bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu, k = m), chia cả tử và mẫu cho x^m ta được :

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{\frac{b_n}{x^{m-n}} + \frac{b_{n-1}}{x^{m-n+1}} + ... + \frac{b_1}{x} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m}{\frac{b_n}{x^{m-n}}} = \infty$$

+) m < n (bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu, k = n), tương tự như trên ta có :

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_m}{x^{n-m}} + \frac{a_{m-1}}{x^{n-m+1}} + ... + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + ... + \frac{b_0}{x^n}} = 0$$

Học sinh cần vận dụng kết quả :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0,\ \ \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$$

Sau khi xét ba trường hợp này, học sinh cần tự rút ra nhận xét kết quả giới hạn cần tìm dựa vào bậc của tử và mẫu. Lưu ý là có thể chia tử và mẫu cho x^h với

h min{m, n}.

2) Nếu f(x), g(x) là các biểu thức có chứa căn thức thì ta quy ước lấy giá trị $\frac{m}{k}$ (trong đó k là bậc của căn thức, m là số mũ cao nhất của các số hạng trong căn thức) là bậc của căn thức đó. Bậc của tử (mẫu) được xác định là bậc cao nhất các biểu thức trên tử (dưới mẫu). Sau đó ta áp dụng phương pháp khử như với trường hợp f(x), g(x) là các đa thức. Qua đó học sinh có thể dễ dàng phán đoán kết quả giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ cần tìm.

Ví dụ áp dụng :

Ví dụ 22 : $L_{22} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^3 - 6}$

Bài giải : Chia cả tử và mẫu cho x^3 ta được :

$$L_{22} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-6} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{5-\frac{6}{x^3}} = \frac{2}{5}$$

Vậy $L_{22} = \frac{2}{5}$.   Ta có thể trình bày theo cách sau :

$$L_{22} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-6} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(5-\frac{6}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{5-\frac{6}{x^3}} = \frac{2}{5}$$

Ví dụ 23 : $L_{23} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$

Bài giải :

$$L_{23} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{12x^4-(2x+1)(3x^2+x+2)}{4x^2(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3-5x^2+x+2}{8x^3+4x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{8+\frac{4}{x}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Vậy $L_{23} = -\frac{1}{2}$

Ví dụ 24 : $L_{24} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

Bài giải :

$$L_{24} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(5-\frac{1}{x}\right)^5} = \frac{1}{5^5}$$

Vậy $L_{24} = \frac{1}{5^5}$

Ví dụ 25 : $L_{25} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

Bài giải :

Chia cả tử và mẫu cho x ta được :

$$L_{25} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

Vì phải đưa x vào trong căn bậc hai nên ta xét hai trường hợp :

*) $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2}$

Khi đó : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

*) $x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}$

Khi đó, ta có : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} = -1$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

Ví dụ 26 : $L_{26} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt[4]{16x^4+3} - \sqrt[5]{x^4+7}}$

Bài giải : Chia cả tử và mẫu cho x ta được :

$$L_{26} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt[4]{16x^4+3} - \sqrt[5]{x^4+7}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2+4}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3}}{x} - \frac{\sqrt[5]{x^4+7}}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3}}{x} - \sqrt[5]{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^5}}}$$

Tương tự Bài 25, ta xét hai trường hợp :

*) $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2}, x = \sqrt[4]{x^4}$

Khi đó : $L_{26}^{+} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}}{\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+3}}{x} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^5}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}}{\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^5}}} = \dfrac{\sqrt{9}+0}{\sqrt[4]{16}+0} = \dfrac{3}{2}$

*) $x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}, x = -\sqrt[4]{x^4}$

Khi đó ta có :

$$L_{26}^{-} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}}{\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+3}}{x} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^5}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{-\sqrt{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}}{\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+3}}{-\sqrt[4]{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^5}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}}{-\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^5}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}}{-\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x^5}}} = \frac{-\sqrt{9}-0}{-\sqrt[4]{16}-0} = \frac{3}{2}$$

Vì $L_{26}^{+} = L_{26}^{-}$ nên ta có : $L_{26} = \dfrac{3}{2}$

Kết luận :

So với dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$ "dễ tìm" hơn. Học sinh cần xác định đúng dạng và chỉ cần quan tâm đến bậc của tử và mẫu để từ đó phán đoán kết quả giới hạn cần tìm. Chú ý đối với giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ của hàm số có chứa căn thức ta không nhân liên hợp. Đây là điểm khác biệt cân phân biệt để tránh nhầm lẫn.

Với giới hạn khi $x \to \infty$, cần lưu ý hai khả năng $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$ trong phép lấy giới hạn có chứa căn bậc chẵn. Nếu học sinh không để ý đến vấn đề này thì rất dễ mắc phải sai lầm. Hơn nữa trường hợp này còn liên quan tới bài toán tìm tiệm cận của hàm số chứa căn thức.

Bài tập tự luyện

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^2(4x+7)^3}{(3x^2+1)(10x^2+9)}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)...(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+4}-x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+1}-\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^3+2}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

III. GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty-\infty$

Dạng tổng quát của giới hạn này là :

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\left[f(x)-g(x)\right]$ trong đó $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$

Phương pháp chủ yếu để khử dạng vô định này là biến đổi chúng về dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ bằng cách đổi biến, nhân liên hợp, thêm bớt, …

Ví dụ áp dụng :

Ví dụ 27 : $L_{27}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

Bài giải :

Nhân và chia biểu thức liên hợp tương ứng là : $\sqrt{x^2+x}+x$, ta được :

$$L_{27}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

Vì $x\to+\infty$ nên chia cả tử và mẫu cho x ta có :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

Vậy $L_{27}=\dfrac{1}{2}$

Trong ví dụ này, bằng cách nhân liên hợp, ta đã chuyển giới hạn cần tìm từ dạng $\infty-\infty$ sang dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ 28 : $L_{28} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right]$

Bài giải :

$$L_{28} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}$$ (chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$)

Vậy $L_{28} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 29 : $L_{29} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2 - x + 3} + x\right]$

Bài giải : Trong ví dụ này cần lưu ý khi $x\to\infty$ cần xét hai trường hợp $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$

+) Khi $x\to+\infty$ thì :

$\sqrt{x^2 - x + 3}\to+\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 3} + x \to+\infty$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2 - x + 3} + x\right] = +\infty$

+) Khi $x\to-\infty$ thì giới hạn có dạng $\infty-\infty$. Ta khử bằng cách nhân liên hợp bình thường

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2 - x + 3} + x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2 - x + 3} + x)(\sqrt{x^2 - x + 3} - x)}{\sqrt{x^2 - x + 3} - x} =$$

$$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2 - x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 3} - x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+3}{\sqrt{x^2 - x + 3} - x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - x + 3}}{x} - 1}$$

Khi $x\to-\infty$ thì $x < 0$, do đó $x = -\sqrt{x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{x}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+3}+x\right]=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x+3}+x\right]=\frac{1}{2}$

Qua ví dụ này một lần nữa nhấn mạnh cho học sinh chú ý với giới hạn khi $x\to\infty$ cần xét $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$ đối với hàm số chứa căn thức bậc chẵn.

Ví dụ 30 : $L_{30}=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right]$

Bài giải : Vì hàm số cần tìm giới hạn chứa các căn thức không cùng bậc nên ta thêm bớt để có thể nhân liên hợp.

$$L_{30}=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)-(\sqrt{x^2-2x}-x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right]-\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-2x}-x\right]=G_1-G_2$$

+) $G_1=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{3}=1$$

+) $G_2=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-2x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

Vậy $L_{30}=G_1-G_2=2$

Ví dụ 31 : $L_{31}=\lim_{x\to1}\left[\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right]$, $(m, n\in N^*)$

Bài giải :

$$L_{31}=\lim_{x\to1}\left[\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right]=\lim_{x\to1}\left[\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}\right)-\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}\right)-\lim_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=G_1-G_2$$

+) $G_1=\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{m-(1+x+x^2+...+x^{m-1})}{1-x^m}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)+(1-x^2)+...+(1-x^{m-1})}{1-x^m}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\left[1+(1+x)+...+(1+x+...+x^{m-2})\right]}{(1-x)(1+x+...+x^{m-1})}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+(1+x)+...+(1+x+...+x^{m-2})}{1+x+...+x^{m-1}}=\frac{1+2+...+m-1}{m}=\frac{m-1}{2}$$

Tương tự ta tính được $G_2=\frac{n-1}{2}$

Vậy $L_{31}=G_1-G_2=\frac{m-1}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{m-n}{2}$

Trong bài tập này ta sử dụng thuật toán thêm, bớt để tách giới hạn cần tìm thành hai giới hạn và tính các giới hạn này bằng cách biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$. Việc thêm bớt biểu thức phải tinh tếvà phụ thuộc vào đặc điểm từng bài.

Kết luận :

Đối với dạng vô định $\infty-\infty$, ta phải tuỳ vào đặc điểm từng bài mà vận dụng linh hoạt các kỹ năng thêm bớt, nhân liên hợp, phân tích thành nhân tử để biến đổi và khử dạng vô định. Ta thường chuyển chúng về các dạng vô định dễ tính hơn là $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Bài tập tự luyện

1) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]$ 2) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right]$ 4) $\lim_{x\to\infty}\left[x+\sqrt[3]{1-x^2}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(5x+8)-\ln(3x+5)\right]$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[5]{(x+1)(x+2)...(x+5)}-x\right]$

IV. GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $0.\infty$

Dạng tổng quát của giới hạn này là :

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}\left[f(x).g(x)\right] \text{ trong đó } \lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}} f(x)=0,\ \lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}} g(x)=\infty$$

Để khử dạng vô định này, ta thường tìm cách chuyển chúng về dạng giới hạn khác dễ tình hơn như $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách nhân liên hợp, thêm bớt, đổi biến …

Ví dụ áp dụng :

Ví dụ 32 : $L_{32}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\right]$

Bài giải : Ta khử dạng vô định này bằng cách nhân liên hợp để đưa về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$L_{32}=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}{\sqrt{x^2+5}+x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+5-x^2)}{\sqrt{x^2+5}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\dfrac{\sqrt{x^2+5}+x}{x}}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow x>0 \Rightarrow x=\sqrt{x^2}$$

Do đó : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\dfrac{\sqrt{x^2+5}+x}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+1} = \dfrac{5}{2}$

Vậy $L_{32} = \dfrac{5}{2}$

Ví dụ 33 : $L_{33} = \lim\limits_{x\to1}(1-x)\text{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

Bài giải : Đặt $t = 1-x$ ta có :

$x\to1 \Rightarrow t\to0$

$$L_{33} = \lim_{t\to0}\left[t.\text{tg}\frac{\pi(1-t)}{2}\right] = \lim_{t\to0}\left[t.\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to0}\left[t.\text{cotg}\frac{\pi t}{2}\right] = \lim_{t\to0}\frac{t}{\text{tg}\frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\text{tg}\frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Vậy $L_{33} = \dfrac{2}{\pi}$

Bài tập tự luyện

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{4x^2+9}+2x\right)\right]$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\left(\sqrt{3x^4+5}-\sqrt{3x^4-2}\right)\right]$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{4x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3-1}\right)\right]$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\text{tg}2x.\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]$

5) $\lim\limits_{x\to a}\left[\left(a^2-x^2\right)\text{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right]$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}-2\right)\right]$

V. GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH 1^{∞}

Dạng tổng quát của giới hạn này là :

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}, \text{ trong đó } \lim_{x\to x_0} f(x)=1,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$$

Hai giới hạn cơ bản thường được sử dụng khi tính giới hạn dạng vô định 1^{∞} là :

+) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ (1)

+) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$ (2)

Trong quá trình vận dụng, học sinh biến đổi về dạng

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \text{ nếu } \lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}=e \text{ nếu } \lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

Để biến đổi giới hạn cần tìm, học sinh vận dụng mệnh đề sau (dựa vào tính liên tục của hàm số mũ).

“ Nếu hai hàm số f(x), g(x) thoả mãn các điều kiện :

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$

thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=a^{b}$ ”

Hai giới hạn cơ bản và mệnh đề trên là cơ sở để tính các giới hạn dạng vô định 1^{∞}

Ví dụ áp dụng

Ví dụ 34 : $L_{34}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}$

Bài giải :

$$L_{34}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{x}}$$

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} = e$ (để học sinh dễ hiểu nên đặt t = sin2x)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 0$$

Do đó : $L_{34} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{x}} = e^2$

Ví dụ 5 : $L_{35} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{4-3x}$

Bài giải : Để sử dụng giới hạn cơ bản ta biến đổi :

$$\frac{x+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{-(x+2)}$$

$$L_{35} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{4-3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2).\frac{4-3x}{-(x+2)}}$$

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2)} = e \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-3x}{-(x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 3 \end{cases}$ nên $L_{35} = e^3$

Bài 36 : $L_{36} = \lim\limits_{t\to 0}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right]^{tg2\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}$

Bài giải : Đặt $y = x - \frac{\pi}{4},\ x\to\frac{\pi}{4} \Rightarrow y\to 0$ .Ta có :

$$L_{36} = \lim_{t\to 0}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right]^{tg2\left(\frac{\pi}{4}-y\right)} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-tgy}{1+tgy}\right)^{\frac{1-tg^2y}{2tgy}} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{-2tgy}{1+tgy}\right)^{\frac{1-tg^2y}{2tgy}} = \lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{-2tgy}{1+tgy}\right)^{-\frac{1+tgy}{2tgy}}\right]^{-\frac{2tgy}{1+tgy}.\frac{1-tg^2y}{2tgy}}$$

Vì $\lim\limits_{y\to 0}\left(1+\dfrac{-2tgy}{1+tgy}\right)^{-\frac{1+tgy}{2tgy}} = e$ và

$$\lim\limits_{y\to 0}\left(-\frac{2tgy}{1+tgy}.\frac{1-tg^2y}{2tgy}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(-1+tgy\right)=-1$$

nên $L_{36}=e^{-1}$

Kết luận :

Với dạng vô định 1^{∞}, việc nhận dạng không khó khăn đối với học sinh. Tuy nhiên, để làm được bài tập, học sinh phải vận dụng tốt các kỹ năng để đưa các giới hạn cần tìm về một trong hai giới hạn cơ bản (1) và (2). Hai kỹ năng chủ yếu được sử dụng là đổi biến và thêm bớt.

Bài tập tự luyện

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot g^2x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\cot g\pi x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$