HÌNH HỌC VI PHÂN

Đỗ Ngọc Diệp và Nông Quốc Chinh

Mục lục

Giới thiệu

Ở trường phổ thông, hình học được dạy và học theo quan điểm hình học Euclid. Các *vật thể hình học* được cấu thành từ các *mảnh phẳng* và *mảnh cầu. Quan hệ so sánh* giữa các vật thể hình học được thực hiện bởi các *phép dời hình*; *hai vật thể hình học được xem là bằng nhau* nếu chúng có thể được *chồng khít lên nhau qua những phép dời hình.*

Đại số tuyến tính và hình học giải tích xét các vật thể hình học được cấu thành từ các *mảnh phẳng* và các *mảnh bậc 2 tổng quát*. Các quan hệ so sánh được xét như các *phép biến đổi tuyến tính hoặc afin*. Các đường bậc hai được đưa về 9 dạng chính tắc, các mặt bậc hai trong không gian 3-chiều được đưa về 17 dạng chính tắc. Trong hình học đại số bằng phương pháp phân loại có thể nghiên cúu các đường và mặt hoặc siêu mặt bậc 3 hay, tổng quát hơn, bậc bất kì. Phép biến đổi cho phép là các *phép biến đổi đa thức hoặc song hữu tỉ.*

Quan điểm nói trên được phát triển trong cùng một ngữ cảnh của*hình học vi phân* khi mà các vật thể được cấu tạo từ các *mảnh tham số hoá* bằng các *toạ độ địa phương*,mà nói chung các hàm toạ độ địa phương là các hàm trơn bất kì. Các phép biến đổi là các *phép vi phôi*. Do vậy các vật thể hình học trong hình học vi phân đa dạng hơn, nhiều chiều hơn và theo một nghĩa nhất định là trơn chu hơn các vật thể hình học trong các môn hình học trên.

Phương pháp nghiên cứu của hình học vi phân tương đối đa dạng. Trước hết hình học vi phân sử dụng các phép tính vi phân và tích phân trong không gian Euclid $\mathbf{R}^n$ để xây dựng các phép tính vi phân và tích phân tương ứng trên các vật thể hình học. Đồng thời nó cũng vận dụng các phương pháp tôpô, tôpô đại số, phương pháp tổ hợp, phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng, ... để tìm ra các tính chất của các đối tượng hình học.

Giáo trình này được biên soạn trong khuôn khổ chương trình cho sinh viên các năm cuối đại học. Các tác giả đã dạy chương trình này cho các lớp của Đại học Huế,Đại học Thái nguyên, Đại học Quy Nhơn. Thực tế giảng dạy đã gợi ý cho các các tác giả chọn lọc các nội dung này, sao cho vừa phải, không quá nhiều và cũng không quá nghèo nàn.

Giáo trình gồm có *các chương chính sau*: Chương 1 được dành cho việc nhìn lại lý thuyết đường và mặt bậc 1 và 2. Mục đích của chương này là tạo ra một khởi điểm hình học cho việc học tiếp tục. Chương 2 được dành cho việc nghiên cứu các đường cong trong không gian Euclid n-chiều. Chương 3 được dành cho việc xây dựng lại khái niệm về tensơ và đại số tensơ. Chương 4 là chương trọng tâm, dành cho lý thuyết mặt cong trong không gian Euclid $\mathbf{R}^3$. Trong chương 5 chúng tôi trình bày phép toán vi phân nhiều chiều cho các ánh xạ trơn, đồng thời nhấn mạnh các định lí ánh xạ ẩn và định lí ánh xạ ngược. Hai định lí này đóng vai trò trung tâm trong việc nghiên cứu các đa tạp con trong $\mathbf{R}^n$ được xác định bởi hệ phương trình hàm. Trong chương 6 chúng tôi trình bày lý thuyết tổng quát các đa tạp khả vi. Đó chính là các đối tượng trung tâm của hình học vi phân.

Cuối mỗi chương có một số *bài tập bổ sung cho phần lí thuyết*. Các bài tập luyện tập cơ bản, cần được giảng viên chọn từ các nguồn khác. Giáo trình được biên soạn lần đầu không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp cho việc biên soạn, nội dung và hình thức của giáo trình.

Các tác giả

Chương 1

Đường và mặt bậc hai

Trong chương này chúng ta sẽ hệ thống hoá lại những khái niệm và kết quả nghiên cứu đường và mặt trong Đại số tuyến tính và Hình học giải tích dưới một cách nhìn thống nhất là tham số hoá và toạ độ hoá. Cách nhìn thống nhất này sẽ cho một hình dung sơ bộ về phương pháp nghiên cứu của hình học vi phân cổ điển.

1.1 Siêu phẳng afin

Trong Đại số tuyến tính, các siêu phẳng afin đóng vai trò cơ bản, các m-phẳng được xem như giao của hệ các siêu phẳng afin.

Trong hình học afin, siêu mặt afin là đối tượng cơ bản. Các giao của các siêu mặt bậc 2 cho ta các đối tương kiểu các nhát cắt cầu, nhát cắt ellipsoid, v.v....

1.1.1 Thuật khử Gauss-Jordan giải hệ phương trình tuyến tính

Để giải hệ phương trình tuyến tính ta có thể sử dụng thuật khử Gauss-Jordan là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên ma trân của hệ phương trình đã cho. Chúng tôi cho rằng học viên đã biết kĩ về những vấn đề liên quan.

1.1.2 Đa tạp tuyến tính và phương pháp toạ độ

Ta xét bài toán nghiên cứu tập nghiệm (hạt nhân) của phương trình véctơ $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, trong đó $\varphi : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Không gian nghiệm là một m-phẳng afin dạng $\mathbf{x}_0 + L$ với L là một mặt phẳng qua gốc toạ độ, là không gian nghiệm (hạt nhân) của ánh xạ tuyến tính $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Toạ độ hoá các không gian véctơ V và W bằng cách chọn trong mỗi không gian một cơ sở tuyến tính, ta quy bài toán về giải hệ phương trình tuyến tính.

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát với n biến và m phương trình $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, với $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ và cột vế phải $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$. Theo Định lý Kronecker-Kapelli, hệ phương trình là có nghiệm khi và chỉ khi $\text{rank}[A] = \text{rank}[A|\mathbf{b}]$. Nghiệm của hệ là một không gian afin con. Nếu ta chọn toạ độ hoá bằng cách chọn một cơ sở của không gian nghiệm rồi bổ sung thành một cơ sở của toàn bộ $\mathbf{R}^n$ thì ta có thể nói rằng: Có thể tách biến $\mathbf{x} = (x, y)$ với $x = (x_1, \dots, x_{n-r})$, $y = (y_1, \dots, y_r)$ sao cho $r = \text{rank}[A]$ và ma trận con

$$\begin{bmatrix} a_{1,n-r+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r,n-r+1} & \dots & a_{r,n} \end{bmatrix}$$

là khả nghịch. Các biến $x_1, \dots, x_{n-r}$ là biến tự do. Các biến $y_1, \dots, y_r$ là các biến phụ thuộc, là các hàm tuyến tính theo $x_1, \dots, x_{n-r}$ theo quy tắc Cramer cho hệ

$$\begin{array}{rcl} a_{1,n-r+1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_r & = & b_1 - \sum_{i=1}^{n-r} a_{1,i}x_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r,n-r+1}y_1 + \dots + a_{r,n}y_r & = & b_r - \sum_{i=1}^{n-r} a_{r,i}x_i \end{array}$$

Như vậy ta có thể tìm một cơ sở trong không gian nghiệm mà trong đó các véctơ nghiệm tương ứng với $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-r})$ của $\mathbf{x}_0 + L$. Nói một cách khác, ta có *một đẳng cấu afin giữa* $\mathbf{R}^{n-r}$ *và không gian con afin* $\mathbf{x}_0 + L$. *Nếu xem không gian con afin như là vật thể hình học độc lập thì các phép biến đổi hình học cho phép chính là các phép biến đổi afin. Việc chọn cách tách biến như trên cho phép "tọa độ hoá" không gian (đa tạp) afin đó.*

Một ví dụ khác là các hình thu được nhờ compa. Theo quan điểm trừu tượng compa là công cụ có tác dụng duy nhất là vẽ các đường tròn hoặc là các cung của nó. Một *lý thuyết tổng quát các mặt bậc 2* được nghiên cứu trong phần cuối của một giáo trình đại số tuyến tính. Trong trường hợp này *các phép biến đổi cho phép là các phép biến đổi bảo toàn các dạng bậc 2, tức là các phép biến đổi afin trực giao*. Ví dụ với mặt cầu phép biến đổi cho phép là các phép biến đổi trong không gian Euclid (các phép quay, các phép phản xạ, tịnh tiến). Bài toán quy về việc nghiên cứu hệ một hay nhiều phương trình, bất phương trình bậc 2, ví dụ dạng toàn phương. Lại một lần nữa, câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: có thể chăng *nghiên cứu các mặt tổng quát hơn là mặt bậc 2*?

Bài toán cơ bản là các việc làm nói trên có thể thực hiện hay không khi hệ phương trình phi tuyến (không là tuyến tính hoặc các phương trình có bậc lớn hơn 2). Trả lời câu hỏi này, hình học vi phân dùng toàn bộ công cụ vi tích phân của giải tích. Đó cũng chính là nội dung của hình học các đa tạp khả vi. Tuy nhiên để có được điều đó ta phải huy động toàn bộ phép tính vi tích phân trong $\mathbf{R}^n$ ở dạng tổng quát nhất.

1.1.3 Các phép biến đổi (tuyến tính) trong hình học

Trong một không gian, điều quan trọng hơn cả là chúng ta chấp nhận các phép biến đổi nào. Nếu chấp nhận đủ nhiều các phép biến đổi được coi là biến đổi tương đương thì có đủ nhiều các vật thể hình học được đồng nhất với nhau.

Nếu hạn chế chỉ xét các phép biến đổi hình học là tuyến tính thì chúng ta có nhóm biến đổi là *nhóm tuyến tính tổng quát* $G = GL(\mathbf{R}^n) = GL_n(\mathbf{R})$ của không gian, gồm tất cả các phép biến đổi tuyến tính khả nghịch. Chúng ta thu được hình học afin [aphin].

Nếu chúng ta hạn chế hẹp hơn, chỉ chấp nhận các phép biến đổi là bảo toàn khoảng cách, hoặc tích vô hướng, chúng ta có nhóm $O(n)$ các biến đổi trực giao và hình học chính là hình học Euclid.

1.2 Đường bậc hai với phương trình chính tắc

1.2.1 Ellipse

Trong hình học giải tích, ellipse được định nghĩa như quỹ tích các điểm M mà tổng khoảng cách đến hai điểm F_1 và F_2 cho trước là một đại lượng không đổi $2a$. Các điểm F_1 và F_2 đó được gọi là các *tiêu điểm*.

Gọi khoảng cách giữa hai điểm F_1 và F_2 là $2d$. Chọn trung điểm của đoạn F_1F_2 là gốc O của hệ toạ độ Descartes, chọn véctơ $\mathbf{e}_1$ sao cho $\vec{OF}_2 = d\mathbf{e}_1$. Bổ sung thêm một véctơ $\mathbf{e}_2$ để có một cơ sở trực chuẩn thuận hướng và do vậy có hệ toạ độ Descartes $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Trong hệ toạ độ này điểm M có các toạ độ là (x, y) và ta có phương trình đường ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } b = \sqrt{a^2 - d^2}$$

1.2.2 Hyperbola

Trong hình học giải tích, hyperbola được định nghĩa như quỹ tích các điểm M mà trị tuyệt đối của hiệu khoảng cách đến hai điểm F_1 và F_2 cho trước là một đại lượng không đổi.

Gọi khoảng cách giữa hai điểm F_1 và F_2 là $2d$. Chọn trung điểm của đoạn F_1F_2 là gốc O của hệ toạ độ Descartes, chọn véctơ $\mathbf{e}_1$ sao cho $\vec{OF}_2 = d\mathbf{e}_1$. Bổ sung thêm một véctơ $\mathbf{e}_2$ để có một cơ sở trực chuẩn thuận hướng và do vậy có hệ toạ độ Descartes $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Trong hệ toạ độ này điểm M có các toạ độ là (x, y) và ta có phương trình đường ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } b = \sqrt{d^2 - a^2}$$

1.2.3 Parabola

Trong hình học giải tích, parabola được định nghĩa như quỹ tích các điểm M mà khoảng cách đến một điểm F và một đường thẳng ℓ trong mặt phẳng cho trước là bằng nhau. Qua điểm F, ta hạ đường vuông góc với đường thẳng ℓ tại điểm P. Gọi trung điểm đoạn PF là gốc toạ độ O. Chọn các véctơ trực chuẩn $\mathbf{e}_1$ và $\mathbf{e}_2$ sao cho $\vec{OF} = p\mathbf{e}_2$. Gọi (x, y) là các toạ độ điểm M trong hệ toạ độ $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Khi đó ta có phương trình đường parabola là

$$x^2 = 4py.$$

1.3 Đưa phương trình đường bậc hai trong mặt phẳng về dạng chính tắc

Định lí 1.3.1 (Định lí phân loại) *Bằng phép biến đổi toạ độ thích hợp, mỗi đường bậc hai tổng quát trong mặt phẳng Euclid afin 2-chiều đều được đưa về một trong số 9 đường chính tắc sau:*

1. *Đường ellipse*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
2. *Đường ellipse ảo:*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
3. *Đường hyperbola*
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
4. *Đường parabola*
$$\frac{x^2}{p} = 2y, p > 0.$$

5. *Cặp hai đường thẳng song song*

$$\frac{x^2}{a^2} = 1.$$

6. *Cặp hai đường thẳng ảo song song:*

$$\frac{x^2}{a^2} = -1.$$

7. *Cặp hai đường thẳng ảo cắt nhau:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

8. *Cặp hai đường thẳng cắt nhau:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

9. *Cặp hai đường thẳng trùng nhau:*

$$x^2 = 0.$$

1.4 Phân loại siêu mặt bậc 2 trong không gian 3 chiều

Định lí 1.4.1 (Định lí phân loại) *Bằng phép biến đổi toạ độ thích hợp, mỗi mặt bậc hai tổng quát trong không gian Euclid ba chiều đều được đưa về một trong số 17 mặt chính tắc sau:*

1. *Mặt ellipsoid:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2. *Mặt ellipsoid ảo:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

3. *Mặt nón ảo:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

4. *Mặt elliptic hyperboloid một tầng*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5. *Mặt elliptic hyperboloid hai tầng*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

6. *Mặt nón bậc hai:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

7. *Mặt elliptic paraboloid*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, p > 0, q > 0.$$

8. *Mặt trụ elliptic*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

9. *Mặt trụ elliptic ảo:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

10. *Cặp mặt phẳng ảo cắt nhau:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

11. *Mặt hyperbolic paraboloid:*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = \pm 2z, p > 0, q > 0.$$

12. *Mặt trụ hyperbolic:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

13. *Cặp hai mặt phẳng cắt nhau:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

14. Mặt trụ parabolic $x^2 = 2pz, p > 0$.

15. Cặp hai mặt phẳng song song:

$$x^2 = k^2, \text{ hay } x = \pm k, k \neq 0.$$

16. Cặp hai mặt phẳng ảo song song:

$$x^2 = -k^2, \text{ hay } x = \pm ik, k \neq 0.$$

17. Cặp hai mặt phẳng trùng nhau:

$$x^2 = 0.$$

Chứng minh. Định lí được chứng minh bằng cách chọn phép đổi toạ độ thích hợp làm biến mất phần tuyến tính. Dạng toàn phương và hệ số tự do quyết định đạng của mặt cong.

Trường hợp 1: Dạng toàn phương có ba giá trị riêng khác 0: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: Phương trình được đưa về dạng

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = c$$

1a. Các giá trị $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cùng dấu, quy về $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

1. Nếu $c > 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{c}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{c}{\lambda_3}$.

2. Nếu $c < 0$, ta có thể đặt $a^2 = \frac{-c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{-c}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{-c}{\lambda_3}$.

3. Nếu $c = 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{1}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{1}{\lambda_3}$.

1b. Các giá trị riêng khác dấu, quy về $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$

4. Nếu $c > 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{c}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{c}{-\lambda_3}$.

5. Nếu $c < 0$, ta có thể đặt $a^2 = \frac{-c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{-c}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{-c}{-\lambda_3}$.

6. Nếu $c = 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{1}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{1}{-\lambda_3}$.

Trường hợp 2: Có đúng một giá trị riêng bằng không, ví dụ $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$:

2a. λ_1 và λ_2 cùng dấu: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$. Khi có một giá trị riêng $\lambda_3 = 0$ thì hệ số tự do lại có thể làm triệt tiêu. Nếu hệ số bậc nhất theo z khác 0 ta có thể đặt là $\pm 2p$, $p > 0$. Ta có

7. Nếu hệ số bậc nhất theo z triệt tiêu, ta có phương trình dạng

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c.$$

Ta có ba trường hợp:

8. Nếu $c > 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{c}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{c}{-\lambda_3}$.
9. Nếu $c < 0$, ta có thể đặt $a^2 = \frac{-c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{-c}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{-c}{-\lambda_3}$.
10. Nếu $c = 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{1}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{1}{-\lambda_3}$.

2b. λ_1 và λ_2 khác dấu: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$

11. Nếu $c > 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{c}{-\lambda_2}$.
12. Nếu $c < 0$, ta có thể đặt $a^2 = \frac{-c}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{-c}{-\lambda_2}$.
13. Nếu $c = 0$ ta có thể đặt $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{1}{-\lambda_2}$.

Trường hợp 3: Có đúng một giá trị riêng khác 0, ví dụ $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Khi đó phương trình tổng quát có dạng

$$\lambda_1 x^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + 2a_3 z + a_0 = 0.$$

Nếu $D = \sqrt{a_2^2 + a_3^2} \neq 0$ ta thực hiện phép đổi toạ độ trực giao:

$$\begin{cases} x &= x' \\ y &= \frac{a_3}{D} y' + \frac{a_2}{D} z' \\ z &= -\frac{a_2}{D} y' + \frac{a_3}{D} z' \end{cases}$$

Trong hệ toạ độ mới này, phương trình có dạng

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_1 x' + 2Dz' + a_0' = 0$$

Thực hiện phép tịnh tiến toạ độ

$$\begin{cases} x' &= -\frac{a_1}{\lambda_1} + x \\ y' &= y \\ z' &= -\frac{a_0'}{D} + z \end{cases}$$

ta có các trường hợp

14. Nếu $D = 0$ thì phương trình tổng quát có dạng

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_1 x' + a'_0 = 0$$

Thực hiện phép tịnh tiến toạ độ theo trục x ta nhận được phương trình mới dạng:

$$\lambda_1 x^2 + a'_0 = 0.$$

có ba trường hợp:

15. $\lambda_1 > 0, a'_0 < 0$, ta đặt $k^2 = \frac{-a'_0}{\lambda_1}$.

16. $\lambda_1 > 0, a'_0 > 0$, ta đặt $k^2 = \frac{a'_0}{\lambda_1}$.

17. $\lambda_1 > 0, a'_0 = 0$, chia hai vế cho λ_1.

□

1.5 Đưa phương trình mặt bậc hai tổng quát về dạng chính tắc

Giả sử $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ và $(\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ là hai hệ toạ độ Descartes với

$$[\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]\mathbf{A},$$

$$O\tilde{O} = \sum_{i=1}^{n} b^i \mathbf{e}_i$$

là phép chuyển toạ độ

$$\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \mapsto \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$$

với

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b},$$

tức là

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \tilde{x}^j + b^j.$$

Nói cách khác qua phép biến đổi tọa độ,

$$\vec{OM} = \vec{O\tilde{O}} + \vec{\tilde{O}M} = \mathbf{b} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}^j \tilde{\mathbf{e}}_j.$$

Siêu mặt bậc 2 là quĩ tích các điểm M trong không gian Euclid afin $\mathcal{A}_V$ thoả mãn phương trình 0-điểm của một *hàm bậc 2*

$$q(M) = \varphi(\vec{OM}, \vec{OM}) + 2f(\vec{OM}) + c = 0,$$

trong đó phần bậc 2 φ là không đồng nhất bằng 0. Nếu trên siêu mặt bậc 2 có *điểm tâm đối xứng* $\tilde{O}$, tức là $-\vec{\tilde{O}M}$ thoả mãn phương trình $q(M) = 0$ nếu $\vec{\tilde{O}M}$ thoả mãn, thì viết trong gốc tọa độ tại $\tilde{O}$ phần bậc nhất triệt tiêu

$$\tilde{f}(\tilde{O}M) = \tilde{\varphi}(\vec{O\tilde{O}}, \tilde{O}M) + f(\tilde{O}M) = 0.$$

Giả sử M là một điểm trên siêu mặt đang xét. Đường thẳng $\mathcal{D}$ có phương $\mathbf{e}$ qua M gồm các điểm có dạng $\vec{OM} + t\mathbf{e}$. Cho nên giao của nó với siêu mặt bậc 2 cho bởi $\mathcal{S} : q(M) = 0$ gồm các điểm mà t thoả mãn phương trình

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

với $A = \varphi(\mathbf{e}, \mathbf{e})$, $B = f(\mathbf{e}) + \varphi(OM, \mathbf{e})$, $C = q(M)$. Phương $\mathbf{e}$ là *phương không tiệm cận* nếu $\varphi(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \neq 0$.

Nếu véctơ $\mathbf{e}$ không thuộc hạt nhân của φ, tức là $\varphi(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \neq 0$ thì *siêu phẳng kính liên hợp với phương* $\mathbf{e}$ được cho bởi

$$\varphi(OM, \mathbf{e}) + f(\mathbf{e}) = 0.$$

Hai véctơ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ trong không gian afin $\mathcal{A}_V$ là *liên hợp với nhau* qua hàm (bậc 2) φ , nếu $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Véctơ tự do $\mathbf{e}$ được gọi là *phương chính* của hàm bậc hai $q(M)$ nếu nó liên hợp với tất cả các véctơ vuông góc với nó, tức là $\varphi(\mathbf{e}, \mathbf{u}) = 0$, với mọi $\mathbf{u} \perp \mathbf{e}$.

Kết qủa cơ bản của hình học giải tích **phân loại các siêu mặt bậc hai** được thể hiện ở định lý sau:

Định lí 1.5.1 *Mỗi siêu mặt bậc hai* $\mathcal{S} : q(M) = \varphi(OM, OM) + 2f(OM) + c = 0$ *trong không gian Euclid afin* $\mathcal{A}_V$*, bằng các phép biến đổi afin đẳng cự, đều được đưa về* **dạng chính tắc** *trong hệ toạ độ chính tắc* $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *với* $\mathbf{e}_i$ *là các phương chính của* $q(M)$*:*

1. *Trường hợp có tâm đối xứng:* $q(M) = \lambda_1(x^1)^2 + \ldots + \lambda_r(x^r)^2 + c$ *với* $r \leq n, \lambda_i \neq 0, \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r$*, điểm gốc* O *ở tâm đối xứng.*

2. *Trường hợp không có tâm đối xứng:* $q(M) = \lambda_1(x^1)^2 + \ldots + \lambda_r(x^r)^2 - 2px^{r+1}$ *, trong đó* $0 < r \leq n-1$*,* $\lambda_i \neq 0$*,* $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r, p > 0$

Nhận xét 1.5.2 *Nếu trong trường hợp $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ ta thêm các phép biến đổi siêu việt đưa tọa độ Descartes về toạ độ cực*

$$\begin{cases} x^1 &= r\cos(\theta_1)\ldots\cos(\theta_{n-1}) \\ x^2 &= r\cos(\theta_1)\ldots\sin(\theta_{n-1}) \\ \ldots . & . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n-1} &= r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ x^n &= r\sin(\theta_1) \end{cases}$$

với $r \in (0,\infty)$, $(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \in [0,2\pi)^{n-2} \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, thì siêu mặt ellipsoid có dạng $r^2 + c = 0$. Tương tự trong trường hợp có λ_i với dấu âm, ta xét các hàm lượng giác hyperbolic, cũng có kết quả tương tự. Như vậy việc mở rộng nhóm biến đổi cho phép mô tả cấu trúc các siêu mặt bậc hai.

1.6 Phân loại dời hình các đường bậc hai trong mặt phẳng Euclid

Chúng ta xét nhóm các phép biến đổi afin đẳng cấu đẳng cự trong mặt phẳng. Dễ dàng nhận thấy rằng " Hai dường bậc 2 trong mặt phẳng là tương đương dời hình với nhau nếu và chỉ nếu chúng thu được từ nhau bằng phép biến đổi afin đẳng cấu đẳng cự". Ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.6.1 *Gọi T là nhóm các phép tịnh tiến trong mặt phẳng, $O(2)$ là nhóm các biến đổi trực giao (quay và phản xạ). Khi đó nhóm các phép biến đổi dời hình đẳng cấu với tích nửa trực tiếp $O(2) \ltimes \mathbf{R}^2$.*

1.7 Phân loại dời hình các mặt bậc hai trong không gian Euclid 3 chiều

Tương tự như trên, chúng ta xét nhóm các phép biến đổi afin đẳng cấu đẳng cự trong không gian Euclid afin 3-chiều. Dễ dàng nhận thấy rằng " Hai mặt bậc 2 trong không gian Euclid 3-chiều là tương đương dời hình với nhau nếu và chỉ nếu chúng thu được từ nhau bằng phép biến đổi afin đẳng cấu đẳng cự". Ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.7.1 *Gọi T là nhóm các phép tịnh tiến trong không gian Euclid 3-chiều, $O(3)$ là nhóm các biến đổi trực giao (quay và phản xạ). Khi đó nhóm các phép biến đổi dời hình đẳng cấu với tích nửa trực tiếp $O(3) \ltimes \mathbf{R}^3$.*

1.8 Phương pháp toạ độ cong

Chúng ta nhắc lại một số phép biến đổi toạ độ quen biết:

- **Toạ độ cực trong mặt phẳng**

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi &= \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases}$$

  với $0 < r < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi$.

- **Toạ độ cực hyperbolic trong mặt phẳng**

$$\begin{cases} x &= r\cosh\varphi, \\ y &= r\sinh\varphi. \end{cases}$$

- **Toạ độ cầu trong không gian 3-chiều**

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\cos\varphi, \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi, \\ z &= r\sin\theta. \end{cases} \qquad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \varphi &= \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \theta &= \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \end{cases}$$

  với $0 < r < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\theta}{2}$.

- **Toạ độ trụ trong không gian 3-chiều**

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{cases}$$

- **Toạ độ cầu trong không gian n-chiều**

$$\begin{cases} x^1 &= r\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-1}, \\ x^2 &= r\cos\theta_1\ldots\sin\theta_{n-1}, \\ \ldots & . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= r\sin\theta_1. \end{cases}$$

1.8.1 Các đường bậc 2 tham số hoá

Trong các hệ toạ độ thích hợp các đường bậc 2 có dạng rất đơn giản. Ví dụ trong hệ toạ độ elliptic

$$\begin{cases} \frac{x}{a} &= r\cos\varphi, \\ \frac{y}{b} &= r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r &= \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}, \\ \varphi &= \arccos\frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}} \end{cases}$$

phương trình đường ellipse trở thành $r = 1, 0 \le \varphi < 2\pi$.

Hệ qủa 1.8.1 *Qua phép biến đổi toạ độ elliptic nói trên, đường ellipse được biến thành đoạn đóng-mở.*

Các phép biến đổi toạ độ tương tự được áp dụng cho các đường cong bậc 2 khác.

1.8.2 Các mặt bậc hai tham số hoá

Trong các hệ toạ độ thích hợp các đường bậc 2 có dạng rất đơn giản. Ví dụ trong hệ toạ độ cầu elliptic

$$\begin{cases} \frac{x}{a} &= r\cos\theta\cos\varphi, \\ \frac{y}{b} &= r\cos\theta\sin\varphi, \\ \frac{z}{c} &= r\sin\theta. \end{cases} \qquad \begin{cases} r &= \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}, \\ \varphi &= \arccos\frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}, \\ \theta &= \arcsin\frac{z}{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}, \end{cases}$$

với $0 < r < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\theta}{2}$. phương trình mặt ellipsoid trở thành $r = 1, 0 \le \varphi < 2\pi, \frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$.

Hệ qủa 1.8.2 *Qua phép biến đổi toạ độ cầu elliptic nói trên, mặt ellipsoid được biến thành hình vuông đóng-mở.*

Các phép biến đổi toạ độ tương tự được áp dụng cho các mặt cong bậc 2 khác.

Nhận xét 1.8.3 *Bằng cách chấp nhận thêm các phép biến đổi siêu việt (kiểu các phép đổi toạ độ phi tuyến nói trên) các đường và mặt bậc 2 trở thành các hình hình học hết sức đơn giản. Những phép biến đổi như thế chính là các phép biến đổi vi phôi (các ánh xạ khả vi, khả nghịch và nghịch đảo cũng là khả vi tại mọi điểm). Phân loại các vật thể hình học với độ chính xác đến vi phôi chính là phương pháp của hình học vi phân.*

1.9 Bài tập củng cố lý thuyết

1. Dùng các hệ toạ độ thích hợp, hãy tham số hoá các đường bậc 2.
2. Dùng các hệ toạ độ thích hợp, hãy tham số hoá các mặt bậc 2.
3. Dùng các hệ toạ độ thích hợp, hãy tham số hoá các đường conic.
4. Xây dựng vi phôi đĩa mở với không gian Euclid chứa nó.
5. Qua phép đổi toạ độ thích hợp, hãy tham số hoá đường bậc 2 và mặt bậc 2 bất kì.

Chương 2

Lý thuyết đường cong trong $\mathbf{R}^n$

Hình học Riemann và symplectic tổng quát sẽ được giới thiệu sơ bộ trong chương này. Để làm rõ bản chất của hình học chúng tôi chỉ chú trọng vào các đường cong và mặt cong. Hình học các đa tạp nhiều chiều là chuyên ngành về lý thuyết đa tạp có metric.

2.1 Cung tham số hoá và cung chính quy

Trước hết chúng ta nhận xét rằng tồn tại các phép vi phôi giữa khoảng mở (a,b) bất kì với toàn bộ $\mathbf{R}$, ví dụ có thể chọn hàm

$$\tan(\frac{\pi}{b-a}x + \frac{\pi}{2}\frac{a+b}{a-b}) : \qquad (a,b) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}.$$

Hàm này có đạo hàm liên tục và khả nghịch, hàm ngược chính là hàm

$$\frac{b-a}{\pi}\arctan x + \frac{a+b}{2} : \qquad \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (a,b)$$

cũng có đạo hàm liên tục.

Định nghĩa 2.1.1 *Cung tham số hoá trong $\mathbf{R}^n$ là ảnh của một song ánh liên tục φ từ một khoảng mở $(a,b) \cong \mathbf{R}$ vào $\mathbf{R}^n$.*

Ví dụ. Cung tham số hoá xác định bởi các hàm toạ độ Descartes

$$\varphi : \begin{cases} x(t) &= a\cos t, \\ y(t) &= a\sin t, \\ z(t) &= bt, \end{cases}$$

với $t \in \mathbf{R}$.

Định nghĩa 2.1.2 *Hai tham số hoá $\varphi : (a,b) \to \mathbf{R}^n$ và $\psi : (c,d) \to \mathbf{R}^n$ được gọi là tương thích với nhau, nếu chúng sai khác nhau một vi phôi, tức là tồn tại một ánh xạ khả vi liên tục, khả nghịch và ánh xạ ngược là khả vi liên tục $\alpha : (a,b) \to (c,d)$ sao cho $\psi \circ \alpha = \varphi$.*

Định nghĩa 2.1.3 *Đường cong liên tục là ảnh của một ánh xạ liên tục từ một khoảng mở (a,b) vào $\mathbf{R}^n$. Đường cong tham số hoá là hợp của một họ các cung tham số hoá. Nói cách khác ta có thể chia đường cong thành hợp các cung tham số hoá.*

Ví dụ. Đường tròn $\mathbf{S}^1$ có thể chia thành hợp của hai cung tham số hoá, mỗi cung là $\mathbf{S}^1$ trừ đi một điểm khác nhau, ví dụ, $\mathbf{S}^1 = U_1 \cup U_2$ với các cung $U_1 = \mathbf{S}^1 \setminus \{N\}, U_2 = \mathbf{S}^1 \setminus \{S\}$, trong đó N là điểm cực bắc và S là điểm cực nam trên vòng tròn.

Định nghĩa 2.1.4 (Cung tham số hoá chính quy) *Điểm P cho bởi $r(t)$ trên cung tham số hoá $\vec{r} : (a,b) \to \mathbf{R}^n$ được gọi là điểm chính quy , nếu đạo hàm $\vec{r}'(t)$ của tham số hóa là khác 0. Cung tham số hoá được gọi là cung chính quy, nếu mọi điểm của nó là chính quy. Đường cong được gọi là đường cong chính quy, nếu nó là hợp của các cung tham số hoá chính quy.*

Nhận xét rằng nếu một điểm là chính quy trong một tham số hoá thì, theo quy tắc đạo hàm của hàm hợp, nó cũng là chính quy trong mọi tham số hoá tương thích khác. Bởi thế khái niệm chính quy không phụ thuộc việc chọn tham số hoá.

Định nghĩa 2.1.5 (tham số hoá đường cong) *Mỗi hệ toạ độ Descartes trong không gian Euclid $E^n \approx \mathbf{R}^n$ cho ta một tham số hoá địa phương các khoảng mở của đường cong bằng các hàm thành phần:*

$$t \in \mathbf{R} \approx (-1,1) \mapsto \vec{r}(t) \in E^n \leftrightarrow x(t) \in \mathbf{R}^n.$$

Khi đó $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, với $x^i(t)$ là các hàm trơn. Véctơ tiếp xúc với đường cong tại một điểm $x = x(t)$, với t cố định là $(\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t))$ trong toạ độ Descartes của $\mathbf{R}^n$.

.

2.2 Độ dài đường cong trong $\mathbf{R}^n$. Đường trắc địa

Khái niệm đường cong chính quy trùng với khái niệm đa tạp con một chiều.

Đường cong trong đa tạp $M = \mathbf{R}^n$ được gọi là *đường cong dìm* trong $M = \mathbf{R}^n$, nếu nó là đa tạp con một chiều trong mỗi bản đồ tọa độ địa phương, tức là được xác định bởi hệ phương trình với hạng của ma trận Jacobi là $n-1$.

Ví dụ

1. $\gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x})); 0 \leq x \leq 1\}$ là đường cong dìm trong $\mathbf{R}^2$. Nhưng $\gamma \cup \{(0,y), -1 \leq y \leq 1\}$ thì không thể là đa tạp con dìm trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$. Các điểm $(0,y)$ không là điểm chính quy, vì chúng không có đạo hàm liên tục.

2. Ảnh của đường thẳng $y = \theta x$, với hệ số góc θ vô tỉ không thể là đường dìm trong xuyến $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

Định lí 2.2.1 (Bài toán Cauchy cho đường cong) *Nếu trường véctơ $\xi(x)$ là trường véctơ trơn trên cung tham số hoá thì bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \xi(x(t)) \\ x(0) &= x \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất và nghiệm đó gọi là đường cong qua điểm x.

Độ dài của một véctơ tiếp xúc $\xi(x(t)) = \dot{x}(t)$ là

$$||\dot{x}(t)|| = \sqrt{\sum (\dot{x}^i)^2}.$$

Định nghĩa 2.2.2 *Độ dài của cung nối hai điểm $x_0 = x(t_0)$ và $x = x(t)$ là*

$$s(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} ||\dot{x}(t)|| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum (\dot{x}^i(t))^2} dt.$$

Chúng ta không thể nói tới đường thẳng trong đa tạp M. Nhưng chúng ta có thể xét tới những đường có tính chất của đường thẳng.

Định nghĩa 2.2.3 (Đường trắc địa) *Đường cong trong $\mathbf{R}^n$ nối 2 điểm x_0 và x có độ dài ngắn nhất được gọi là đường trắc địa nối hai điểm đó.*

Định lí 2.2.4 (Bài toán biến phân cho đường trắc địa) *Đường trắc địa là nghiệm của bài toán biến phân*

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \int_{t_0}^{t_1} ||\dot{x}(t)|| dt \longrightarrow \min$$

và thoả mãn phương trình vi phân tương ứng với bài toán biến phân đó

$$\ddot{x}(t) = 0.$$

Tức là đường đi ngắn nhất nối hai điểm x_0 và x_1 trong $\mathbf{R}^n$ là đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Thật vậy, theo nguyên lí Fermat, đường cong có độ dài ngắn nhất khi đạo hàm biến phân triệt tiêu, lấy đạo hàm biến phân của phiếm hàm ta có phương trình

$$\delta \int_{t_0}^{t} ||\dot{x}(t)||^2 dt = 0.$$

Đạo hàm biến phân giao hoán với tích phân ta có

$$\int_{t_0}^{t} (\delta\dot{x}(t), \dot{x}(t))dt = 0.$$

Đạo hàm biến phân và đạo hàm theo t giao hoán với nhau cho nên ta có thể đổi chỗ

$$\int_{t_0}^{t} (\frac{d}{dt}\delta x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

Lấy tích phân từng phần theo t ta có

$$\int_{t_0}^{t} (\ddot{x}(t), \delta x(t))dt = 0, \forall \delta x(t).$$

Cho nên ta có

$$\ddot{x}(t) = 0.$$

Suy ra $x(t) = a + L.t$ tức là đường thẳng. Vì với $t = t_0$ có $x = x_0$ và với $t = t_1$ có $x = x_1$, suy ra

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t.$$

□

Nếu đường cong là chính quy thì $\dot{s}(t) \neq 0$. Theo định lí hàm ngược, tồn tại hàm ngược $t = t(s)$. Khi đó ta có thể chọn chính s là một tham số của đường cong.

Định nghĩa 2.2.5 *Tham số hoá đường cong theo tham số độ dài của nó từ một điểm cố định $x_0 = x(t_0)$ đến một điểm $x = x(t)$ bất kì được gọi là tham số hoá tự nhiên*

$$x = \tilde{x}(s) = x(t(s)), s \in \mathbf{R}.$$

Mệnh đề 2.2.6 *Trong hệ tham số hoá tự nhiên của đường cong, véctơ tiếp xúc luôn có độ dài là 1,*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{ds}\tilde{x}^i(s) = ||\tilde{x}'|| = 1.$$

Chứng minh. Thật vậy, trong tham số hoá tự nhiên,

$$\tilde{x}^i = x^i(t(s)),$$

cho nên theo định lí hàm ngược,

$$\tilde{x}'(s) = \frac{d}{ds}\tilde{x}(s) = \dot{x}(t)\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}(t))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\dot{x}^i(t))^2}} = \frac{\dot{x}(t)}{||\dot{x}(t)||}.$$

Vì vậy ta có,

$$||\tilde{x}'(s)|| = 1.$$

□

2.3 Mục tiêu trực chuẩn. Mục tiêu Frénet. Độ cong. Độ xoắn.

Giả sử chúng ta có đường cong

$$x(t) := (x^1(t), \dots, x^3(t), t \in (-1, 1),$$

$$x(0) = x = (x^1, \dots, x^3).$$

Mệnh đề 2.3.1 *Trong hệ tham số hoá tự nhiên của đường cong, đạo hàm véctơ tiếp xúc $\tau(s)$ theo biến tham số độ dài s là một véctơ $\tau'(s)$ vuông góc với véctơ tiếp xúc $\tau(s)$.*

Chứng minh. Thật vậy, chúng ta đã biết rằng

$$(\tau(s), \tau(s)) = ||\tau(s)||^2 \equiv 1.$$

Do vậy,

$$\frac{d}{ds}(\tau(s), \tau(s)) = 2(\tau'(s), \tau(s)) \equiv 0.$$

Tức là $\tau'(s) \perp \tau(s), \forall s.$ □

Định nghĩa 2.3.2 *Véctơ chuẩn hoá* $\vec{n}(s) = \frac{\vec{\tau}'(s)}{||\vec{\tau}'(s)||}$ *được gọi là véctơ pháp tuyến của đường cong tại* $\vec{x}(s)$.

Định nghĩa 2.3.3 *Đại lượng* $k(s) := ||\tau'(s)||$ *gọi là độ cong tại điểm* $x(s)$.

Nhận xét 2.3.4 (Ý nghĩa hình học của độ cong) *Độ cong* $k(s)$ *của đường cong chính quy tại* $x(s)$ *là* $\frac{1}{R}$, *với* R *là bán kính của đường tròn tiếp xúc với đường cong, tâm ở điểm cuối của véctơ* $\tau'(s)$.

Thật vậy, chúng ta có công thức khai triển Taylor bậc nhất

$$\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s) = \tau'(\tilde{s})\Delta s + \varepsilon,$$

với $\varepsilon = o(\Delta s)$ và $\tilde{s}$ là một điểm trung gian giữa s và $s + \Delta s$. Do vậy ta có

$$k(s) = \frac{1}{\Delta s} \lim_{\Delta s \to 0} |\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s)|$$

Theo hệ thức trong tam giác của hình học sơ cấp,

$$||\tau'(s)|| = k(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s}$$

[trong đó θ là góc giữa véctơ $\tau(s)$ và véctơ $\tau(s + \Delta s)$.]

$$= \lim_{\Delta s \to 0} |\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\Delta s}| = \lim_{\Delta s \to 0} |\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{R.s\sin\frac{\theta}{2}}| = \frac{1}{R}.$$

Định nghĩa 2.3.5 (Hệ quy chiếu Frénet) *Véctơ* $\vec{\tau}(s)$ *là véctơ tiếp xúc. Véctơ* $\vec{n}(s) = \frac{\tau'(s)}{||\tau'(s)||}$ *được gọi là véctơ pháp tuyến. Véctơ* $\vec{b}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s)$ *được gọi là véctơ trùng pháp tuyến. Hệ quy chiếu* $\tau(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ *được gọi là hệ quy chiếu Frénet . Mặt phẳng sinh bởi hai véctơ đơn vị* $\vec{\tau}(s)$ *và* $\vec{n}(s)$ *được gọi là mặt mật tiếp. Mặt phẳng sinh bởi* $\vec{n}(s)$ *và* $\vec{b}(s)$ *được gọi là mặt pháp diện . Mặt phẳng sinh bởi hai véctơ* $\vec{\tau}(s)$ *và* $\vec{b}(s)$ *được gọi là mặt trực đạc .*

Theo định nghĩa ta có

$$\vec{b}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s),$$

cho nên theo quy tắc đạo hàm, $\frac{d}{ds}\vec{b}(s)$ cùng phương (nhưng có thể không cùng hướng) với $\vec{n}(s)$, tức là $\frac{d}{ds}\vec{b}(s) \perp \vec{b}(s), \vec{n}(s)$. Đặt $\kappa(s)$ là hệ số tỉ lệ sao cho

$$\frac{d}{ds}\vec{b}(s) = -\kappa(s)\vec{n}(s).$$

Định nghĩa 2.3.6 *Hệ số $\kappa(s)$ được gọi là độ xoắn của đường cong tại $x(s)$.*

Nhận xét 2.3.7 *Trong mặt mật tiếp ta có thể nhìn thấy hình ảnh của đường cong như đường cong phẳng chính quy tiếp xúc với trục $\vec{\tau}$, nằm về phía $\vec{n}$. Trong mặt trực đạc ta cũng nhìn thấy đường cong là đường cong phẳng tiếp xúc với trục τ nhưng có thể nằm về hai phiá. Trong mặt pháp diện ta nhìn thấy hai nhánh đường cong theo hình gấp nếp.*

Định lí 2.3.8 (Công thức Frénet)

$$\begin{array}{rcccc} \frac{d}{ds}\vec{\tau}(s) & = & & k(s).\vec{n}(s) & \\ \frac{d}{ds}\vec{n}(s) & = & -k(s).\vec{\tau}(s) & + & \kappa(s)\vec{b}(s) \\ \frac{d}{ds}\vec{b}(s) & = & & -\kappa(s).\vec{n}(s) & \end{array}$$

hay là

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \vec{\tau}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \kappa(s) \\ 0 & -\kappa(s) & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \vec{\tau}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Trước hết theo định nghĩa,

$$\frac{d}{ds}\vec{\tau}(s) = -k(s)\vec{n}(s).$$

Theo định nghĩa

$$\vec{b}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s).$$

Cho nên

$$\frac{d}{ds}\vec{b}(s) = \frac{d}{ds}\vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s) + \vec{\tau}(s) \times \frac{d}{ds}\vec{n}(s) =$$

$$= -k(s).\vec{n}(s) \times \vec{n}(s) + \vec{\tau}(s) \times \frac{d}{ds}\vec{n}(s) = \vec{\tau}(s) \times \frac{d}{ds}\vec{n}(s).$$

Vì lẽ $(\vec{n}(s), \vec{n}(s)) \equiv 1$ nên $(\frac{d\vec{n}(s)}{ds}, \vec{n}(s)) \equiv 0$. Tức là $\frac{d\vec{n}(s)}{ds}$ là tổ hợp tuyến tính của hai véctơ còn lại. Nhưng $(\vec{\tau}(s), \vec{n}(s)) \equiv 0$ suy ra

$$(\vec{\tau}(s), \frac{d\vec{n}(s)}{ds}) = -(\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{n}) = -k(s).$$

Từ $(\vec{n}, \vec{b}) = 0$ suy ra

$$(\frac{d\vec{n}}{ds}, \vec{b}) = -(\vec{n}, \frac{d\vec{b}}{ds}) = \kappa.$$

Cho nên

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k(s).\vec{\tau}(s) + \kappa(s).\vec{b}(s).$$

□

Nhận xét 2.3.9 *Trong lân cận điểm $x(s)$, ảnh của đường cong lên mặt mật tiếp và mặt trực đạc là các đường cong tiếp xúc với $\vec{\tau}(s)$. Hình chiếu trực giao của đường cong lên mặt pháp diện là hai nhánh cùng đi từ gốc tọa độ tiếp xúc với phương $\vec{n}(s)$ có kì dị hình nếp gấp. Do vậy cơ sở Frénet cho một nghiên cứu định tính đường cong tại lân cận mỗi điểm. Từ đó suy ra rằng hình ảnh của đường cong trong hệ toạ độ Frénet là tiếp xúc với phương $\vec{\tau}(s)$ và là giải kì dị với phương $\vec{n}(s)$.*

2.4 Định lí cơ bản

Nhận xét 2.4.1 *Các khái niệm độ dài đường cong, độ cong của cung chính quy là những khái niệm bất biến qua đẳng cấu affine trực giao còn khái niệm độ xoắn của cung song chính quy định hướng bất biến qua các phép biến đổi affine trực giao, bảo toàn định hướng.*

Trên thực tế độ cong và độ xoắn xác định chính đường cong. Chúng ta phát biểu kết quả cơ bản của lí thuyết đường cong bỏ qua chứng minh.

Định lí 2.4.2 (Định lí cơ bản) *Cho hai hàm số $k(s) \geq 0$ và $\kappa(s)$ khả vi lớp $C^l, l \geq 0$ trên khoảng mở $J \subseteq \mathbf{R}$.*

1. *Tồn tại cung chính quy định hướng với tham số hoá tự nhiên $J \to \mathbf{R}^3$, $s \mapsto r(s)$, khả vi lớp C^{l+2}, nhận $k(s)$ và $\kappa(s)$ là độ cong và độ xoắn tương ứng.*

2. *Nếu tồn tại hai cung chính quy r và ρ với tính chất trên, thì tồn tại một phép dời hình (tức là một đẳng cấu affine trực giao bảo toàn định hướng biến chúng sang nhau, $r = f \circ \rho$.*

Sẽ rất thuận tiện khi chúng ta có thể dẫn ra công thức tính độ cong và độ xoắn trong tham số hoá bất kì.

Mệnh đề 2.4.3 *Giả sử $t \mapsto \vec{r}(t)$ là một tham số hoá bất kì của một cung cong. Khi đó*

$$k(t) = \frac{||\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)||}{||\dot{\vec{r}}(t)||^3},$$

$$\kappa(t) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)).\dddot{\vec{r}}(t)}{||\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)||^2}.$$

Chứng minh. Thật vậy,

$$\dot{\vec{r}}(t) = ||\dot{\vec{r}}(t)||\vec{\tau}(t),$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \overbrace{||\dot{\vec{r}}(t)||}^{\cdot}\dot{\vec{r}}(t) + ||\dot{\vec{r}}(t)||\dot{\vec{\tau}}(t),$$

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = ||\dot{\vec{r}}(t)||^2\vec{\tau}(t) \times \dot{\vec{\tau}}(t),$$

$$\frac{\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)}{||\dot{\vec{r}}(t)||^3} = \frac{\vec{\tau}(t)}{||\dot{\vec{r}}(t)||} \times \vec{\tau}\dot{(t)} = k(t)\vec{b}(t).$$

Cho nên,

$$k(t) = \frac{||\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)||}{||\dot{\vec{r}}(t)||^3}.$$

Chúng ta lại có

$$\frac{\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)}{||\dot{\vec{r}}(t)||^3} = \vec{\tau}(t) \times k(t)\vec{n}(t) = k(t)\vec{b}(t).$$

Cho nên,

$$(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)).\dddot{\vec{r}} = ||\dot{\vec{r}}(t)||^3k(t)\vec{b}.$$

Chúng ta chỉ cần quan tâm đến thành phần chứa $\vec{b}$ trong $\dddot{\vec{r}}(t)$,

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \overbrace{||\dot{\vec{r}}(t)||}^{\cdot}\vec{\tau} + ||\dot{\vec{r}}(t)||\dot{\vec{\tau}} = \ddot{s}(t)\vec{\tau} + \dot{s}^2k\vec{n},$$

$$\dddot{\vec{r}}(t) = \ldots + \dot{s}^2kn'(s).\dot{s} = \ldots + \dot{s}^3k(s(t))\kappa(s(t))\vec{b}(s(t)).$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}).\dddot{\vec{r}}(t) = \dot{s}^6k^2\kappa.$$

Cho nên ta có

$$\kappa(t) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)).\dddot{\vec{r}}(t)}{||\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)||^2}.$$

□

Ví dụ. Cho đường cong tham số hoá là $t \mapsto \vec{r}(t) = a\vec{\varepsilon}(t) + b\vec{e}_3$, với $\varepsilon(t) = \cos t\vec{e}_1 + \sin t\vec{e}_2$. Khi đó,

$$\dot{\vec{r}}(t) = a\vec{\varepsilon}(t + \frac{\pi}{2}) + b\vec{e}_3$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = a\vec{\varepsilon}(t + \pi = -a\varepsilon(t).$$

$$\dddot{\vec{r}}(t) = -a\vec{\varepsilon}(t + \frac{\pi}{2}).$$

$$||\dot{\vec{r}}|| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$||\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|| = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$||(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})\dddot{\vec{r}}|| = a^2 b.$$

Cho nên,

$$k(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$\kappa(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

2.5 Bài tập củng cố lý thuyết

1. Cho đường cong tham số hoá là đường xoắn ốc

$$\begin{cases} x(t) & = & r\cos t, \\ y(t) & = & r\sin t, \\ z(t) & = & t. \end{cases}$$

   Hãy tính độ cong và độ xoắn tại điểm bất kì.

2. Tính độ cong và độ xoắn của đường ellipse tại một điểm bất kì.

3. Tính độ cong và độ xoắn của đường hyperbola tại một điểm bất kì.

4. Tính độ cong và độ xoắn của đường parabola tại một điểm bất kì.

5. Cho đường cong bậc 2 tổng quát

$$q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

   Hãy tính độ cong và độ xoắn tại một điểm bất kì.

Chương 3

Đại số tensơ, đại số ngoài, tensơ đối xứng

3.1 Tích tensơ các không gian véctơ

Định nghĩa 3.1.1 Giả sử V và W là hai không gian véctơ trên trường $\mathfrak{k}$. Kí hiệu $V\Box W$ là không gian véctơ tự do sinh bởi $V \times W$. Phần tử tổng quát trong $V\Box W$ có dạng tổ hợp tuyến tính hình thức

$$\sum_{v\in V, w\in W} \lambda_{v,w}(v, w),$$

trong đó tổng được hiểu theo nghĩa đại số, tức là chỉ có một số hữu hạn các hệ số $\lambda_{v,w} \in \mathfrak{k}$ là khác 0. Xét không gian véctơ con L, sinh bởi tất cả các phần tử có dạng

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$$
$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),$$
$$(\lambda w, w) - (v, \lambda w).$$

Khi đó không gian thương $V\Box W/L$ được gọi là *tích tensơ* của hai không gian véctơ V và W và được kí hiệu là $V \otimes_{\mathfrak{k}} W$. Các phần tử trong không gian thương được kí hiệu là

$$v \otimes w := (v, w) + L.$$

Hệ qủa 3.1.2 *Trong tích tensơ ta luôn có các hệ thức thể hiện tính song tuyến*

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w,$$
$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2,$$
$$(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w).$$

Hệ qủa 3.1.3 *Nếu* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *là một cơ sở của không gian véctơ* V *và* $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ *là một cơ sở của không gian véctơ* W. *Thì các véctơ* $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ *sinh ra tích tensơ* $V \otimes_{\mathfrak{k}} W$

Ngược lại ta có thể dùng chính các phần tử sinh này để định nghĩa tích tensơ.

Định nghĩa 3.1.4 (Định nghĩa II) Giả sử không gian véctơ V có một cơ sở là $\mathbf{e}_i, i = \overline{1,n}$ và không gian véctơ W có một cơ sở là $\mathbf{f}_j, j = \overline{1,m}$. Kí hiệu hình thức $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j = (\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$ là cặp các véctơ cơ sở. Khi đó bao tuyến tính hình thức

$$V \otimes_{\mathfrak{k}} W := \langle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \right\}$$

được gọi là *tích tensơ* của hai không gian véctơ với cơ sở.

Hệ qủa 3.1.5 (Tính chất phổ dụng) *Tồn tại ánh xạ song tuyến tính tự nhiên* $\imath : V \times W \to V \otimes W$. *Nếu* $B : V \times W \to F$ *là một ánh xạ song tuyến tính, thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính* $\varphi_B : V \otimes W \to F$ *từ tích tensơ* $V \otimes W$ *vào* F *sao cho* $B = \varphi_B \circ \imath$.

Ngược lại ta có thể dùng tính chất phổ dụng làm định nghĩa tích tensơ.

Định nghĩa 3.1.6 (Định nghĩa III) *Tích tensơ* của hai không gian véctơ V và W là một cặp gồm một không gian véctơ, kí hiệu là $V \otimes W$ và một ánh xạ song tuyến tính $\imath : V \times W \to V \otimes W$ sao cho với mọi cặp gồm một không gian véctơ F và một ánh xạ song tuyến tính $B : V \times W \to F$, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $\varphi_B : V \otimes W \to F$ sao cho $B = \varphi \circ \imath$.

Mệnh đề 3.1.7 *Ba định nghĩa I-III là tương đương nhau.*

Chứng minh. Dễ thấy ngay Định nghĩa I suy ra Định nghĩa II và Định nghĩa II suy ra Định nghĩa III. Ngược lại, từ Định nghĩa III suy ra Định nghĩa II vì do Định nghĩa II có tính phổ dụng. Từ Định nghĩa II suy ra Định nghĩa I do lí luận theo số chiều. □

3.2 Tích ngoài và tích tensơ đối xứng

Định nghĩa 3.2.1 Giả sử $V_1, \ldots, V_n$ là các không gian véctơ trên trường cơ sở $\mathfrak{k}$. Ta có thể tạo ra tổng trực tiếp của các tích tensơ các không gian véctơ xếp thứ tự

$$\sum^{\oplus}_{\sigma = \begin{pmatrix} 1, & \ldots, & n \\ i_1, & \ldots, & i_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n} V_{i_1} \otimes \ldots \otimes V_{i_n}.$$

Không gian véctơ con sinh bởi các phần tử dạng

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$$

được gọi là *tích ngoài* và được kí hiệu là $V_1 \wedge \ldots \wedge V_n$. Không gian véctơ con sinh bởi các phần tử dạng

$$v_1 \otimes_s \ldots \otimes_s v_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$$

được gọi là *tích đối xứng* và được kí hiệu là $V_1 \otimes_s \ldots \otimes_s V_n$.

Dễ thấy các tính chất hiển nhiên sau của tích ngoài và tích đối xứng

Mệnh đề 3.2.2 *1. Tích ngoài có tính chất phản xứng*

$$v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,$$

2. Tích đối xứng có tính chất đối xứng

$$v_{\sigma(1)} \otimes_s \ldots \otimes_s v_{\sigma(n)} = v_1 \otimes_s \ldots \otimes_s v_n.$$

3.3 Đại số tensơ

Định nghĩa 3.3.1 *Tensơ p-thuận biến và q-phản biến,* hay còn gọi là *tensơ kiểu* (p, q) là các phần tử của tích tensơ $T^{p,q}(V) := \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p\text{-lần}} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q\text{-lần}}$

Ta qui ước $T^{0,0}(V) = \mathfrak{k}$.

Định nghĩa 3.3.2 Cùng với phép nhân là tích tensơ, không gian véctơ

$$T(V) := \bigoplus_{p+q=0}^{\infty} T^{p,q}(V) := \bigoplus_{p+q=0}^{\infty} \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p\text{-lần}} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q\text{-lần}}$$

trở thành đại số kết hợp, được gọi là *đại số tensơ.*

Hệ qủa 3.3.3 *Nếu* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *là một cơ sở của* V, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{f}_n = \mathbf{e}_n^*$ *là cơ sở đối ngẫu của* V^* *tương ứng thì* $\mathbf{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{f}^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$ *là cơ sở của* $T^{p,q}$. *Mỗi tensơ trong cơ sở này có dạng*

$$t = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n} t_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} \mathbf{f}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{f}^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

$$\dim T^{p,q}(V) = n^p . n^q.$$

Giả sử $[\tilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{e}}_n] = [\mathbf{e}_1,\dots\mathbf{e}_n]C$ là phép chuyển cơ sở. Khi đó $[\tilde{\mathbf{f}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{f}}_n]^T = C^T[\mathbf{e}_1,\dots\mathbf{e}_n]^T$ là phép chuyển cơ sở trong V^* Tức là nếu $\tilde{\mathbf{e}} = C^i\mathbf{e}_i$ thì $\tilde{\mathbf{f}}^{j'} = D^{j'}_j\mathbf{f}^j$, với $D = C^{-1}$

Mệnh đề 3.3.4

$$\tilde{t}^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p} = D^{i_1}_{i'_1}\dots D^{i_p}_{i'_p}C^{j'_1}_{j_1}\dots C^{j'_q}_{j_q}t^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}.$$

3.4 Đại số ngoài

Chúng ta qui ước $\wedge^{0,0}(V) = \Bbbk$.

Định nghĩa 3.4.1 Cùng với phép nhân là tích ngoài, không gian véctơ

$$\wedge(V) := \bigoplus_{p+q=0}^{\infty}\wedge^{p,q}(V) := \bigoplus_{p+q=0}^{\infty}\underbrace{V^*\wedge\dots\wedge V^*}_{p\text{-lần}}\wedge\underbrace{V\wedge\dots\wedge V}_{q\text{-lần}}$$

trở thành đại số kết hợp, được gọi là *đại số ngoài, hay đại số Grassman.*

Hệ qủa 3.4.2 *Nếu* $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ *là một cơ sở của* V, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}^*_1,\dots,\mathbf{f}_n = \mathbf{e}^*_n$ *là cơ sở đối ngẫu của* V^* *tương ứng thì* $\mathbf{f}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{f}^{i_p}\wedge\mathbf{e}_{j_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}_{j_q}$ *là cơ sở của* $\wedge^{p,q}(V)$. *Mỗi tensơ trong cơ sở này có dạng*

$$t = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p, j_1<\dots<j_q\le n} t^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}\mathbf{f}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{f}^{i_p}\wedge\mathbf{e}_{j_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}_{j_q}.$$

$$\dim\wedge^{p,q}(V) = C^p_nC^q_n.$$

Chương 4

Lý thuyết mặt cong trong R^3

4.1 Mảnh tham số hoá chính quy và mặt tham số hoá

Định nghĩa 4.1.1 *Mảnh tham số hoá S là một ánh xạ từ một đĩa mở U trong $\mathbf{R}^2$ vào $\mathbf{R}^3$ cho bởi ánh xạ*

$$r : U \to \mathbf{R}^3,$$
$$(u, v) \in r(u, v) \in S \subseteq \mathbf{R}^n.$$

Nếu $r(u_0, v_0)$ là một điểm cố định thì các đường cong $r(., v_0) : U \cap \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ và $r(u_0, .) : U \cap \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ là hai đường toạ độ tham số hoá mặt cong.

Định nghĩa 4.1.2 *Hai tham số hoá $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ và $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ được gọi là tương thích nếu có vi phôi $\alpha : U \to V$ sao cho $\varphi = \psi\alpha$*

Định nghĩa 4.1.3 *Mặt cong tham số hoá là hợp của một họ nào đó các mảnh tham số hóa đôi một tương thích lẫn nhau.*

Định nghĩa 4.1.4 *Điểm $r(u_0, v_0)$ được gọi là điểm chính quy , nếu các đường toạ độ là chính quy tại điểm này, tức là hai véctơ $r'_u(u, v_0)$ và $r'_v(u_0, v)$ là độc lập tuyến tính trong không gian tiếp xúc $T_{r(u,v)}S$. Điểm không chính quy còn được gọi là điểm kì dị của mảnh tham số hoá.*

4.2 Mục tiêu Darboux của đường cong trên mặt dìm

Nhắc lại khái niệm mặt dìm trong $\mathbf{R}^3$. Trong một bản đồ toạ độ địa phương, mỗi điểm của đa tạp được đánh số bởi bộ các số. Nếu đa tạp là 2-chiều trong không gian $\mathbf{R}^3$. Thì nó còn được gọi đơn giản là *mảnh tham số hoá*.

Tại điểm chính quy của mảnh tham số hoá đi qua điểm $r(u,v)$ mặt phẳng tiếp xúc $T_{r(u,v)}S$ được sinh ta bởi hai véctơ tiếp xúc $r'_u(u,v)$ và $r'_v(u,v)$ của các đường toạ độ nói trên.

Định nghĩa 4.2.1 *Đường thẳng vuông góc với mặt tiếp xúc $T_{r(u,v)}S$ gọi là pháp tuyến của mảnh tham số hoá tại điểm $r(u,v)$. Véctơ*

$$\vec{n}(u,v) := \frac{\vec{r}'_u(u,v) \wedge \vec{r}'_v(u,v)}{||\vec{r}'_u(u,v) \wedge \vec{r}'_v(u,v)||}$$

được gọi là véctơ pháp tuyến tại $r(u,v)$.

Định lí 4.2.2 (phương trình mặt tiếp xúc) *Nếu mặt tham số hoá S được cho bởi các toạ độ*

$$\vec{r}(u,v) = (x^1(u,v), \dots, x^3(u,v))$$

và $\vec{\xi} = (X^1, \dots, X^n)$ là các toạ độ của điểm trong mặt tiếp xúc tại $r(u_0,v_0)$, thì phương trình của mặt tiếp xúc được cho bởi

$$(\vec{\xi} - r(u_0,v_0), r_u(u_0,v_0) \wedge r'_v(u_0,v_0)) = 0$$

Trong trường hợp $n = 3$, các tọa độ tuyến tính của không gian tiếp xúc là $(X^1, \dots, x^3) = (X, Y, Z)$ phương trình viết thành dạng

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0,v_0) & Y - y(u_0,v_0) & Z - z(u_0,v_0) \\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Hơn thế nữa, vì hệ toạ độ Descartes trong $\mathbf{R}^3$ là vuông góc chính tắc cho nên phương trình của mặt tiếp xúc cũng được cho bởi

$$(X - x(u_0,v_0)).\begin{vmatrix} {}_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ {}_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} +$$

$$+(Y - y(u_0,v_0)).\begin{vmatrix} z'_u(u_0,v_0) & x'_u(u_0,v_0) \\ z'_v(u_0,v_0) & x'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} +$$

$$+(Z - z(u_0,v_0)).\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & {}_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & {}_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Định nghĩa 4.2.3 *Mặt dìm trong $\mathbf{R}^3$ là một tập con trong $\mathbf{R}^3$ sao cho mỗi điểm có một lân cận là mảnh tham số hoá chính quy.*

4.3 Dạng toàn phương cơ bản

Trong mục này và các mục còn lại, ta chỉ xét trường hợp không gian ba chiều $\mathbf{R}^3$, $n = 3$. Trường hợp n bất kỳ cũng có thể xét tương tự. Tuy nhiên một số khái niệm cần được cải tiến một cách thích hợp.

Giả sử S là một mặt dìm trong $\mathbf{R}^3$ và $\vec{n} = \vec{n}(u,v)$ là véctơ pháp tuyến tại điểm $r(u,v) \in S$. Với mỗi véctơ tiếp xúc $\xi \in T_pS$ với mặt tại điểm $p = r(u,v)$ chúng ta có đạo hàm thuận biến D_ξ, tác động trên các hàm hay nhát cắt theo công thức

$$D_\xi f(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x(t)),$$

trong đó $x(t)$ là đường cong trên mặt S đi qua điểm p, nhận ξ là véctơ tiếp xúc, tức là thoả bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \xi(x(t)) \\ x(0) & = & p \end{cases}$$

Theo tính chất của phép đạo hàm, vì $\vec{n}$ là véctơ đơn vị nên

$$2(D_\xi \vec{n}(u,v), \vec{n}(u,v) = D_\xi(\vec{n}(u,v), \vec{n}(u,v)) = D_\xi 1 = 0.$$

Nghĩa là $D_\xi \vec{n} \in T_pS$.

Định nghĩa 4.3.1 *Ánh xạ*

$$h_p : T_pS \to T_pS,$$

cho bởi công thức

$$\xi \mapsto h_p(\xi) := -D_\xi \vec{n} \in T_pS,$$

được gọi là ánh xạ Weingarten . Khi p thay đổi, ta kí hiệu ánh xạ đó là h.

Các tính chất cơ bản của ánh xạ Weingarten:

Mệnh đề 4.3.2 *Với mọi điểm $p \in S$, h_p là ánh xạ tuyến tính đối xứng từ T_pS vào chính nó, tức là*

$$(h_p(\xi), \eta) = (\xi, h_p(\eta)).$$

Chứng minh. Thật vậy, với mọi hệ tham số hoá $(u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) \in S$, ta có

$$(h_p(\vec{\xi}), \vec{\eta}) = -(D_\xi \vec{\eta}, \vec{\eta}).$$

Chúng ta nhận xét rằng chỉ cần chứng minh mệnh đề cho các trường véctơ cơ sở $\vec{\xi} = \vec{r}'_u(u,v)$, và $\vec{\eta} = \vec{r}'_v(u,v)$. Với các trường véctơ này dễ thấy ngay là

$$h_p(\vec{r}'_u) = -D_{\vec{r}'_u}\vec{n} = -\frac{\partial}{\partial u}(\vec{n}\circ r)(u,v)$$

và tương tự

$$h_p(\vec{r}'_v) = -D_{\vec{r}'_v}\vec{n} = -\frac{\partial}{\partial v}(\vec{n}\circ r)(u,v).$$

Mặt khác, chúng ta thấy là

$$(\vec{n}\circ r(u,v), \vec{r}'_u) = 0,$$

nên ta cũng có

$$(\frac{\partial}{\partial u}\vec{n}\circ r(u,v), \vec{r}'_v) + (\vec{n}\circ r(u,v), \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}'_v) = 0.$$

Cho nên

$$(h_p(\vec{r}'_u), \vec{r}'_v) = (\vec{n}\circ r, \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}'_v).$$

Tương tự ta cũng có

$$(h_p(\vec{r}'_v), \vec{r}'_u) = (\vec{n}\circ r, \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}'_u).$$

Vì các đạo hàm riêng cấp 2 là đối xứng

$$\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}'_v = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\vec{r} = \frac{\partial^2}{\partial v\partial u}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}'_u,$$

nên

$$(h_p(\vec{r}'_u), \vec{r}'_v) = (h_p(\vec{r}'_v), \vec{r}'_u).$$

□

Định nghĩa 4.3.3 *Mỗi giá trị riêng của h_p được gọi là độ cong chính tại p của mặt S. Mỗi véctơ riêng của h_p xác định một phương gọi là phương chính tại p của S. Định thức của tự đồng cấu h_p gọi là độ cong Gauss tại S. Một nửa giá trị vết của h_p, tức là $\frac{1}{2}trace(h_p)$ được gọi là độ cong trung bình tại p của S.*

Nhận xét 4.3.4 *Từ các tính chất của tự đồng cấu tuyến tính đối xứng suy ra rằng chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau đây:*

1. *Ánh xạ Weingarten có hai gía trị riêng thực phân biệt. Gọi* $k_1 \neq k_2$ *là hai giá trị riêng đó. Khi đó hai phương chính tại p được hoàn toàn xác định, vuông góc với nhau và là hai trục của đường ellipse* $(h_p(\vec{\xi}), \vec{\xi})$. *Hai phương chính* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ *lập thành cơ sở trực chuẩn. Độ cong Gauss là*

$$K(p) = k_1.k_2.$$

Độ cong trung bình là

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

2. *Ánh xạ Weingarten có một giá trị riêng thực kép,* $k = k_1 = k_2$ *Khi đó mọi phương là phương chính. Mỗi cơ sở trực chuẩn* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ *là cơ sở trực chuẩn gồm các véctơ riêng. Độ cong Gauss là* $K(p) = -k(p)^2 \leq 0$. *Độ cong trung bình là*

$$H(p) = k(p).$$

Định nghĩa 4.3.5 *Những điểm p như thế được gọi là điểm rốn của mặt S.*

- a *Nếu* $k = k_1 = k_2 = 0$ *thì điểm p được gọi là điểm dẹt.*
- b *Nếu* $k = k_1 = k_2 \neq 0$ *thì điểm p được gọi là điểm cầu .*

Nói chung, điểm p của S được gọi là điểm elliptic, hyperbolic, hay parabolic tuỳ thuộc độ cong Gauss là âm, dương hay bằng 0.

Nhận xét 4.3.6 *Khi đổi định hướng của S bằng cách xét* $-\vec{n}$ *thay cho* $\vec{n}$ *thì ánh xạ Weingarten* h_p *được thay bởi* $-h_p$. *Nên độ cong trung bình đổi dấu còn độ cong Gauss không đổi dấu. Do đó định nghĩa độ cong Gauss có nghĩa cả cho các mặt không định hướng.*

Định nghĩa 4.3.7 *Dạng song tuyến tính*

$$I_p : T_pS \times T_pS \to \mathbf{R},$$

$$(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \to (\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

được gọi là dạng cơ bản I tại p của mặt S và dạng song tuyến tính

$$II_p : T_pS \times T_pS \to \mathbf{R},$$

$$\vec{\xi}, \vec{\eta}) \to (h_p(\vec{\xi}), \vec{\eta})$$

được gọi là dạng cơ bản II tại p của S.

Trong tham số hoá địa phương $(u,v) \in U \mapsto r(u,v) \in S$ chúng ta xét các hàm số

$$E(u,v) := I(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u) \quad L(u,v) := II(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u)$$
$$F(u,v) := I(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v) \quad M(u,v) := II(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)$$
$$G(u,v) := I(\vec{r}'_v, \vec{r}'_v) \quad N(u,v) := II(\vec{r}'_v, \vec{r}'_v)$$

là các hệ số của ma trận Gram-Schmidt của các dạng đó. Nếu các véctơ tiếp xúc $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ có phân tích theo cơ sở $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$ là

$$\vec{\xi} = \xi^1 \vec{r}'_u + \xi^2 \vec{r}'_v, \qquad \vec{\eta} = \eta^1 \vec{r}'_u + \eta^2 \vec{r}'_v,$$

thì

$$I_p(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (E \circ r^{-1})\xi^1\eta^1 + (F \circ r^{-1})(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + (G \circ r^{-1})\xi^2\eta^2,$$
$$II_p(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (L \circ r^{-1})\xi^1\eta^1 + (M \circ r^{-1})(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + (N \circ r^{-1})\xi^2\eta^2,$$

Định lí 4.3.8 (Công thức tính độ cong Gauss và độ cong trung bình)

$$K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}(u,v),$$
$$2H(p) = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}(u,v).$$

Chứng minh. Chúng ta xét cơ sở $\vec{\xi} = \vec{r}'_u, \vec{\eta} = \vec{r}'_v$. Nếu

$$h_p(\vec{\xi}) = \alpha\vec{\xi} + b\vec{\eta},$$
$$h_p(\vec{\eta}) = c\vec{\xi} + d\vec{\eta},$$

thì theo định nghĩa,

$$K(p) = ad - bc, \quad H(p) = \frac{1}{2}(a+d).$$

Do đó ta thấy ngay

$$h_p(\vec{\xi}) \times h_p(\vec{\eta}) = K(p)\vec{\xi} \times \vec{\eta},$$
$$h_p(\vec{\xi}) \times \vec{\eta} + \vec{\xi} \times h_p(\vec{\eta}) = 2H(p)\vec{\xi} \times \vec{\eta}.$$

Lấy tích vô hướng cả hai vế của cả hai đẳng thức trên với $\vec{\xi} \times \vec{\eta}$ và chú ý rằng với bốn véctơ tuỳ ý trong $\mathbf{R}^3$,

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}).(\vec{\gamma} \times \delta) = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}.\vec{\gamma} & \vec{\alpha}.\vec{\delta} \\ \vec{\beta}.\vec{\gamma} & \vec{\beta}.\vec{\delta} \end{vmatrix},$$

ta có

$$K(p) = \frac{\begin{vmatrix} h_p(\vec{\xi}).\vec{\eta} & h_p(\vec{\xi}).\vec{\eta} \\ h_p(\vec{\eta}).\vec{\xi} & h_p(\vec{\eta}).\vec{\eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{\xi}.\vec{\xi} & \vec{\xi}.\vec{\eta} \\ \vec{\eta}.\vec{\xi} & \vec{\eta}.\vec{\eta} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} II(\vec{\xi},\vec{\xi}) & II(\vec{\xi},\vec{\eta}) \\ II(\vec{\eta}) & II(\vec{\eta},\vec{\eta}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I(\vec{\xi},\vec{\xi}) & I(\vec{\xi},\vec{\eta}) \\ I(\vec{\eta},\vec{\xi}) & I(\vec{\eta},\vec{\eta}) \end{vmatrix}},$$

$$2H(p) = \frac{\begin{vmatrix} h_p(\vec{\xi}).\vec{\eta} & h_p(\vec{\xi}).\vec{\eta} \\ \vec{\eta}.\vec{\xi} & \vec{\eta}.\vec{\eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{\xi}.\vec{\xi} & \vec{\xi}.\vec{\eta} \\ \vec{\eta}.\vec{\xi} & \vec{\eta}.\vec{\eta} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} h_p(\vec{\eta}).\vec{\xi} & h_p(\vec{\eta}).\vec{\eta}) \\ \vec{\eta}.\vec{\xi} & \vec{\xi}.\vec{\eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{\xi}.\vec{\xi} & \vec{\xi}.\vec{\eta} \\ \vec{\eta}.\vec{\xi} & \vec{\eta}.\vec{\eta} \end{vmatrix}},$$

□

4.4 Đạo hàm Weingarten và ký hiệu Christoffel

Kí hiệu $(u^1, u^2) = (u, v)$, $\mathbf{e}_1 = \partial_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \mathbf{e}_2 = \partial_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}$. Ta có:

$$\begin{cases} \partial_i e_j &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k e_k + b_{ij}\mathbf{n} \\ \partial_i \mathbf{n} &= \sum_{k=1}^2 c_i^k e_k \end{cases}$$

Mệnh đề 4.4.1

$$c_i^k = -b_i^k,$$

trong đó $b_I^k := \sum_{j=1}^2 b_{ij}\hat{g}^{jk}$.

Thật vậy, do $\mathbf{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt, cho nên $||\mathbf{n}|| = 1, \mathbf{n} \perp \mathbf{e}_i$. Ta có

$$b_{ij} = (\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i}, \mathbf{n}).$$

Vì

$$(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i}, \mathbf{n}) + (\mathbf{e}_j, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}) = \frac{\partial}{\partial u^i}(\mathbf{e}_j, \mathbf{n}) = 0$$

và

$$(\mathbf{e}_j, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i}) = \sum_k c_i^k g_{kj},$$

nên

$$b_{ij} = -\sum_k c_i^k g_{kj}.$$

Theo qui tắc nâng chỉ số,

$$b_i^k = \sum_j b_{ij}\hat{g}^{jk},$$

với

$$\hat{g} = (g_{ij})^{-1} = \hat{g}^{ij}.$$

Cho nên, suy ra $c_i^k = -b_i^k$.

Hệ qủa 4.4.2

$$\begin{cases} \partial_i e_j &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k e_k + b_{ij}\mathbf{n} \\ \partial_i \mathbf{n} &= -\sum_{k=1}^2 b_i^k e_k. \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

là ma trận hệ số của ánh xạ Weingarten.

Định nghĩa 4.4.3 Các hệ số Γ_{ij}^k trong công thức đạo hàm Weingarten được gọi là *ký hiệu Christoffel.*

Giả sử chúng ta có một phép đổi toạ độ địa phương

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 &= \tilde{u}^1(u^1, u^2), \\ \tilde{u}^2 &= \tilde{u}^2(u^1, u^2), \end{cases}$$

với ma trận Jacobi $T = \left[\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j}\right]$ và ma trận nghịch đảo là $S = T^{-1}$. Các kí hiệu Christoffel và các hệ số dạng toàn phương loại II ứng với ánh xạ Weingarten sẽ thay đổi

$$\{\Gamma_{ij}^k, b_{ij}\} \to \{\tilde{\Gamma}_{pq}^m, \tilde{b}_{pq}\}$$

Định lí 4.4.4

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}^k &= \sum_m S_m^k \frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} + \sum_m \sum_p \sum_q S_m^k T_i^p T_j^q \tilde{\Gamma}_{pq}^m, \\ b_{ij} &= \pm \sum_{p,q} T_i^p T_j^q \tilde{b}_{pq}. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_q}{\partial \tilde{u}^p} = \sum_m \tilde{\Gamma}_{pq}^m \mathbf{e}_m + \tilde{b}_{pq}\mathbf{n}$$

và theo công thức đổi biến,

$$\mathbf{e}_j = \sum T_j^q \tilde{\mathbf{e}}_q$$

cho nên

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i} = \sum_q \frac{\partial (T_j^q \tilde{\mathbf{e}}_q)}{\partial u^i} = \sum_q \frac{\partial T_j^q}{\partial u^i}\tilde{\mathbf{e}}_q + \sum_q T_j^q \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_q}{\partial u^i}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i} = \sum_m T_j^m \tilde{\mathbf{e}}_m + \sum_q \sum_p (T_j^q \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^i}) \frac{\tilde{\mathbf{e}}_q}{\tilde{u}^p} =$$

$$= \sum_m T_j^m \tilde{\mathbf{e}}_m + \sum_q \sum_p \sum_m (T_j^q T_i^p \gamma_{pq}^m) \tilde{\mathbf{e}}_m + \sum_q \sum_p (T_j^q T_i^p \tilde{b}_{pq}) \tilde{\mathbf{n}}$$

$$= \sum_m \sum_k (\frac{\partial T_j^m}{\partial u^i} S_m^k) \mathbf{e}_k + \sum_q \sum_p \sum_m \sum_k (T_j^q T_i^p \tilde{\gamma}_{pq}^m S_m^k) \mathbf{e}_k +$$

$$+ \sum_q \sum_p (T_j^q T_i^p \tilde{b}_{pq}) \tilde{\mathbf{n}}.$$

□

Định lí 4.4.5

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \forall j, k.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa,

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \mathbf{r}'_{u^j}.$$

Cho nên,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k + b_{ij}\mathbf{n}.$$

Vì b_{ij} đối xứng theo i, j và đạo hàm cấp hai $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}$cũng đối xứng theo i, j nên Γ_{ij}^k đối xứng theo i, j. □

4.5 Đạo hàm thuận biến

Giả sử $A_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s}$ là một tensơ kiểu (r, s).

Định nghĩa 4.5.1 *Đạo hàm thuận biến của tensơ A kiểu (r, s) là một tensơ kiểu $(r + 1, s)$ được cho bởi công thức*

$$\nabla_i A_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s} := \frac{\partial A_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s}}{\partial u^i} + \sum_{m=1}^{s} \sum_{v_m} \Gamma_{iv_m}^{i_m} A_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,v_m,\dots,j_s} -$$

$$- \sum_{n=1}^{r} \sum_{w_n} \Gamma_{ii_n}^{w_n} A_{i_1,\dots,w_n,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s}.$$

Ví dụ. 1.

$$\nabla_i X^k = \frac{\partial X^k}{\partial u^i} + \sum_v \Gamma^k_{iv} X^v.$$

2.

$$\nabla_i A_l = \frac{\partial A_l}{\partial u^i} - \sum_w \Gamma^w_{il} A_w.$$

Định lí 4.5.2 *Tensơ metric là hiệp biến theo nghĩa*

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \sum_q \Gamma^q_{ki} g_{qj} - \sum_q \Gamma^q_{kj} g_{iq} \equiv 0.$$

Chứng minh. Xuất phát từ công thức đạo hàm Weingarten

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^k} = \sum_q \Gamma^q_{ki} \mathbf{e}_q + b_{ki} \mathbf{n},$$

ta có:

$$(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^k}, \mathbf{e}_j) = \sum_q \Gamma^q_{ki} g_{qj}$$

và

$$(\mathbf{e}_i, \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^k}) = \sum_q \Gamma^q_{kj} g_{iq}.$$

Mặt khác,

$$(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^k}, \mathbf{e}_j) + (\mathbf{e}_i, \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^k}) = \frac{\partial}{\partial u^k}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Suy ra,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = (\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^k}, \mathbf{e}_j) + (\mathbf{e}_i, \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^k}) = \sum_q \Gamma^q_{ki} g_{qj} + \sum_q \Gamma^q_{kj} g_{iq}.$$

□

Định nghĩa 4.5.3 *Giả sử $X = \{X^k\}$ là một trường vectơ, A là một tensơ kiểu (r, s). Khi đó, đạo hàm thuận $B = \nabla_X A$ theo trường véctơ X là một tensơ kiểu (r, s) cho bởi công thức*

$$B^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} := \sum_k X^k \nabla_k A^{j_1,\dots,j_a}_{i_1,\dots,i_r}.$$

Định lí 4.5.4 *Đạo hàm thuận biến theo trường véctơ có các tính chất cơ bản sau:*

1. *Tuyến tính:* $\nabla_X(A+B) = \nabla_X A + \nabla_X B$.
2. *Tuyến tính:* $\nabla_{X+Y} A = \nabla_X A + \nabla_Y B$.
3. *Thuần nhất:* $\nabla_{fX} A = f\nabla_X A$.
4. *Quy tắc Leibniz:*

$$\nabla_X(A \otimes B) = \nabla_X A \otimes B + A \otimes \nabla_X B.$$

5. $\nabla_X C(A) = C(\nabla_X A)$, *trong đó* $C(A)$ *là .....*

Định nghĩa 4.5.5 *Độ xoắn được định nghĩa bởi*

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

4.6 Độ cong Riemann

Chúng ta dễ dàng tính

$$\nabla_i \nabla_j X^k = \frac{\partial \nabla_j X^k}{\partial u^i} + \sum +q\Gamma^k_{iq}\nabla_j X^q - \sum_q \Gamma^q_{ij}\nabla_q X^k.$$

$$\nabla_j \nabla_i X^k = \frac{\partial \nabla_i X^k}{\partial u^j} + \sum +q\Gamma^k_{jq}\nabla_i X^q - \sum_q \Gamma^q_{ji}\nabla_q X^k.$$

Từ đó ta có,

$$Y^k_{ij} = \nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k = \sum_r \left(\frac{\partial \Gamma^k_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{ir}}{\partial u^j} - \sum_q (\Gamma^k_{iq}\Gamma^q_{jr} - \Gamma^k_{jq}\Gamma^q_{ir})\right) X^r.$$

Định nghĩa 4.6.1 *Tensơ kiểu* $(3,1)$

$$R^k_{rij} := \frac{\partial \Gamma^k_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{ir}}{\partial u^j} - \sum_q (\Gamma^k_{iq}\Gamma^q_{jr} - \Gamma^k_{jq}\Gamma^q_{ir})$$

được gọi là tensơ độ cong Riemman.

Bằng tính toán tương tự chúng ta cũng có

Mệnh đề 4.6.2

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)X_k = -\sum_r R^r_{kij}X_r.$$

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)X^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} = \sum_m\sum_{v_m} R^{i_m}_{v_m ij}X^{j_1,\dots,v_m,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} -$$
$$-\sum_n\sum_{w_n} R^{w_n}_{i_n ij}X^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,w_n,\dots,i_r}.$$

Giả sử chúng ta có một phép đổi toạ độ địa phương

$$\begin{cases} \tilde{u}^1 &= \tilde{u}^1(u^1,u^2),\\ \tilde{u}^2 &= \tilde{u}^2(u^1,u^2),\end{cases}$$

với ma trận Jacobi $T = \left[\frac{\partial\tilde{u}^i}{\partial u^j}\right]$ và ma trận nghịch đảo là $S = T^{-1}$. Các thành phần của tensơ độ cong Riemman thay đổi

$$\{R^k_{rij}\} \to \{\tilde{R}^n_{mpq}\}$$

Định lí 4.6.3 *Các thành phần R^k_{rij} biến đổi theo qui tắc tensơ kiểu* $(3,1)$

$$R^k_{rij} = \sum_n\sum_m\sum_p\sum_q S^k_n T^m_r T^p_i T^q_j \tilde{R}^n_{mpq}.$$

Định lí 4.6.4 *Tensơ độ cong Riemann có các tính chất cơ bản sau:*

1. *Tính phản xứng theo cặp biến cuối:* $R^k_{rji} = -R^k_{rij}, \forall i,j,k,r.$
2. *Tính phản xứng theo cặp biến đầu:* $R_{qrij} = -R_{rqij}$,
   trong đó $R_{qrij} = \sum_k g_{qk}R^k_{rij}$.
3. *Tính đối xứng giữa hai cặp biến:* $R_{qrij} = R_{ijqr}$.
4. $R^k_{rij} + R^k_{ijr} + R^k_{jri} = 0.$
5. *Hệ thức Bianchi:* $\nabla_k R^q_{rij} + \nabla_i R^q_{rjk} + \nabla_j R^q_{rki} = 0.$

Mệnh đề 4.6.5

$$R^{kr}_{ij} = \frac{R}{2}(\delta^k_i\delta^r_j - \delta^k_j\delta^r_i),$$
$$R^k_{rij} = \frac{R}{2}(\delta^k_i g_{rj} - \delta^k_i g_{ri}),$$

trong đó

$$R := R^{12}_{12} + R^{21}_{21} = 2R^{12}_{12},$$
$$R^{kr}_{ij} = \sum \hat{g}^{rl}R^k_{lij}.$$

Định nghĩa 4.6.6 *Tensơ* $R_{ij} := \frac{R}{2} g_{ij}$ *được gọi là tensơ Ricci.*

Nhận xét 4.6.7 $R^{kr}_{ij} = 0$ *nếu* $k = r$ *hoặc* $i = j$*. Hơn nữa*

$$R^{12}_{12} = R^{21}_{21} = -R^{21}_{12} = -R^{12}_{21},$$

$$R = R^{12}_{12} + R^{21}_{21} = 2R^{12}_{12}.$$

4.7 Các định lí cơ bản của lí thuyết mặt dìm

Giả sử S là một mặt hai chiều, định hướng bởi trường véctơ pháp tuyến $\vec{n}$. Giả sử $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ là một trường mục tiêu tiếp xúc, trực chuẩn trên một tập mở V trong S.

Gọi θ^1 và θ^2 là trường mục tiêu đối ngẫu với trường mục tiêu u_1, u_2, tức là tại mọi điểm của V,

$$\theta_i(\vec{u}_j) = \delta_{ij}, (i, j = 1, 2).$$

Nếu ta kí hiệu $\vec{n}|_V = \vec{u}_3$, thì $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ là một trường mục tiêu trực chuẩn của $\mathbf{R}^3$ dọc theo V, tương thích với $\vec{n}$. Dùng phân hoạch đơn vị cho mặt S suy ra rằng mỗi điểm p của V có một lân cận mở W trong $\mathbf{R}^3$ và một trường mục tiêu trực chuẩn $\{\tilde{\vec{u}}_1, \tilde{\vec{u}}_2, \tilde{\vec{u}}_3\}$ để khi thu hẹp lên $V \cap W$ ta được $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ thu hẹp lên $V \cap W$.

Gọi $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ là các trường mục tiêu đối ngẫu với $\{\tilde{\vec{u}}_1, \tilde{\vec{u}}_2, \tilde{\vec{u}}_3\}$,

$$\theta^i(\tilde{\vec{u}}_j) = \delta_{ij}(i, j = 1, 2, 3).$$

Định nghĩa 4.7.1 *Các dạng* $(\omega^l_k)(k, l = 1, 2, 3)$ *cho bởi điều kiện*

$$D\tilde{\vec{u}}_k = \sum_{l=1}^{3} \omega^l_k \tilde{\vec{u}}_l (k = 1, 2, 3)$$

gọi là các dạng liên kết của S *trên* V*.*

Nhận xét 4.7.2 *Các dạng liên kết có tính chất phản xứng*

$$\omega^i_j = -\omega^j_i.$$

Vậy nên về thực chất, chúng ta có ba dạng vi phân $\omega^2_1, \omega^3_1, \omega^3_2$ thoả mãn các phương trình xác định chúng là

$$D_\xi \vec{u}_1 = \omega^2_1 \vec{u}_2(p) + \omega^3_1 \vec{n}(p),$$

$$D_\xi \vec{u}_2 = \omega_2^1 \vec{u}_1(p) + \omega_2^3 \vec{n}(p),$$
$$D_\xi \vec{u}_3 = \omega_3^1 \vec{u}_1(p) + \omega_3^2 \vec{n}(p),$$
$$\omega_k^l = -\omega_l^k (k, l = 1, 2, 3).$$

Nhận xét rằng các phương trình cấu trúc của $\mathbf{R}^3$ trong trường trực chuẩn $\{\tilde{\vec{u}}_1, \tilde{\vec{u}}_2, \tilde{\vec{u}}_3\}$ trên W là

$$d\theta^k = -\sum \omega_l^k \theta^k,$$
$$d\omega_k^l = -\sum_m \omega_m^l \wedge \omega_k^m$$

với $k, l, m = 1, 2, 3$. Để ý rằng

$$d\theta^3|_V = d\vec{n}|_V = 0,$$

chúng ta suy ra các phương trình cơ bản của lý thuyết mặt dìm trong $\mathbf{R}^3$.

Định nghĩa 4.7.3 *1. Phương trình* $d\theta^{`} = -\omega_2^1 \wedge \theta^2$ *được gọi là phương trình cấu trúc.*

2. Phương trình

$$d\theta^2 = -\omega_1^2 \wedge \theta^1, \quad \omega_1^3 \wedge \theta^1 + \omega_2^3 \wedge \theta^2 = 0$$

được gọi là phương trình đối xứng .

3. Phương trình

$$d\omega_2^1 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3$$

được gọi là phương trình Gauss .

4. Phương trình

$$d\omega_3^1 = -\omega_2^1 \wedge \omega_3^2, \quad d\omega_3^2 = -\omega_2^1 \wedge \omega_3^1$$

được gọi là phương trình Peterson-Kodazi.

Hệ qủa 4.7.4 *Do* $h_p(\vec{\xi}) = -D_\xi \vec{n}$, *ta suy ra*

$$h_p(\vec{\xi}) = \omega_1^3(\vec{\xi})\vec{u}_1(p) + \omega_2^3(\vec{\xi})\vec{u}_2(p).$$

Hơn thế nữa, chúng ta có phương trình

$$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2.$$

Phương trình này cũng được gọi là phương trình Gauss.

Chứng minh. Thật vậy, chúng ta có

$$h(\vec{u}_1) = \omega_1^3(\vec{u}_1)\vec{u}_1 + \omega_2^3(\vec{u}_1)\vec{u}_2,$$

$$h(\vec{u}_2) = \omega_1^3(\vec{u}_2)\vec{u}_1 + \omega_2^3(\vec{u}_2)\vec{u}_2.$$

Cho nên suy ra rằng

$$K = \det(h_p) = \omega_1^3(\vec{u}_1)\omega_2^3(\vec{u}_2) - \omega(\vec{u}_2)\omega_2^3(\vec{u}_1).$$

Phương trình Gauss

$$d\omega_2^1 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3$$

là tương đương với

$$d\omega_2^1(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\omega_3^1 \wedge \omega_2^3)(\vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

Từ đó suy ra phương trình

$$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2.$$

□

Chúng ta nghiên cứu hai ứng dụng hình học của các phương trình trên. Các kết qủa ứng dụng hết sức đẹp đẽ, tuy nhiên do khuôn khổ của chương trình, chúng ta bỏ qua các chứng minh của hai định lí sau.

Định lí 4.7.5 *Mặt liên thông trong* $\mathbf{R}^3$ *mà mọi điểm là điểm rốn có độ cong Gauss hằng (không âm).*

Định lí 4.7.6 (Định lí Liebmann) *Mặt hai chiều compắc dìm trong* $\mathbf{R}^3$ *với độ cong Gauss hằng* $K = const$ *là mặt cầu bán kính* $R = \frac{1}{K}$.

Chương 5

Đường cong trên mặt cong

5.1 Đường cong trên mặt

Chúng xét một mảnh của mặt tham số hoá

$$\mathbf{r}(u^1, u^2) : D^2 \cong \mathbf{R}^2 \to S$$

với tọa độ địa phương là $(u^1, u^2) \in D^2$. Một đường cong trên mặt S được cho bởi

$$\mathbf{x}(t) = (x^1(u^1(t), u^2(t)), x^2(u^1(t), u^2(t)), x^3(u^1(t), u^2(t))).$$

Chúng ta có véctơ tiếp xúc $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}\dot{u}^i(t)$, với độ dài cho bởi

$$||\dot{\mathbf{x}}(t)|| = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}.$$

Do vậy tích phân độ dài có dạng sau.

Mệnh đề 5.1.1 *Độ dài cung trên mặt tham số hoá cho bởi công thức*

$$s = \int_0^t ||\dot{\mathbf{x}}(\tau)||d\tau = \int_0^t \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}.$$

Tức là

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t).$$

5.2 Độ cong pháp dạng và độ cong trắc địa của đường cong trên mặt

Nhận xét rằng nếu $t = s$ là tham số hoá tự nhiên theo cung trên mặt cong thì

$$\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} \equiv 1.$$

Trong trường hợp $t = s$ là tham số hoá tự nhiên theo độ dài cung, theo công thức Frénet ta có

$$\tau' = k.\mathbf{n}_{curv} = \sum_k \ddot{u}^k \mathbf{e}_k + \sum_j \dot{u}^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^j}\dot{u}^j.$$

Theo công thức đạo hàm Weingarten ta có

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u^i} = \sum_k \Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k + b_{ij}\mathbf{n}.$$

Cho nên

$$\tau' = k\mathbf{n}_{curv} = \sum(\ddot{u}^k + \sum_{ij}\gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{e}_k + (\sum_{ij} b_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{n}.$$

Định nghĩa 5.2.1 Trong tham số hoá tự nhiên ($t = s$)

$$k_{norm} = \sum_{ij} b_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j$$

được gọi là *độ cong pháp dạng.*

$$k_g := ||\sum_k(\ddot{u}^k + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{e}_k|| \geq 0$$

được gọi là *độ cong trắc địa*. Nếu $k_g \neq 0$, ta gọi véctơ đơn vị $\mathbf{n}_{inner}$ để

$$k_g\mathbf{n}_{inner} = \sum_k(\ddot{u}^k + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{e}_k$$

là véctơ *pháp tuyến trong.*

Theo Định lí Pitagora, ta có hệ quả sau.

Hệ qủa 5.2.2

$$k^2 = k_g^2 + k_norm^2.$$

Mệnh đề 5.2.3 *Trong tham số hoá bất kì*

$$k_norm(\dot{u}) = \frac{\sum_{i,j} b_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} = \frac{II(\dot{u},\dot{u})}{I(\dot{u},\dot{u})}.$$

Chứng minh. Suy trực tiếp từ công thức tính đạo hàm của hàm hợp. □

Mệnh đề 5.2.4 *Giả sử k_1, k_2 là các độ cong chính với các phương chính tương ứng là $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Khi đó ta có*

$$k_{norm}(\mathbf{e}_i) = k_i$$

Chứng minh. Thật vậy,

$$k_{norm}(\mathbf{e}_i) = \frac{II(\mathbf{e}_i)}{I(\mathbf{e}_i)} = \frac{k_i I(\mathbf{e}_i)}{I(\mathbf{e}_i)}.$$

□

Định nghĩa 5.2.5 *Với mỗi véctơ tiếp xúc $\vec{\xi} \in T_pS \setminus \{0\}$, đại lượng $\tilde{k}(\vec{\xi}) := \frac{II(\xi)}{I(\vec{\xi})}$ không đổi khi ta nhân $\vec{\xi}$ với một số khác 0, gọi là độ cong pháp dạng của S theo phương xác định bởi $\vec{\xi}$. Công thức Meusnier[Mơniê] :*

$$(k(s_0)\vec{N}(s_0), \vec{n}(\rho(s_0))) = \tilde{k}(\vec{\rho}'(s_0))).$$

Ví dụ: Với mỗi phương chính, ta có $\tilde{k} = k$.

Hệ qủa 5.2.6

1. *Mọi cung song chính quy γ nằm trên mặt S, có cùng tiếp tuyến (tức là véctơ tiếp xúc của chúng tỉ lệ với nhau) tại $s \in S$ và có cùng mặt mật tiếp (giả sử nó khác với mặt phẳng tiếp xúc T_pS) thì có cùng độ cong tại p.*

2. *Nếu giao của S với mặt phẳng chứa pháp tuyến của S tại p là một cung song chính quy γ trong lân cận của điểm p thì độ cong của γ tại p bằng trị tuyệt đối của độ cong pháp dạng của S theo phương của tiếp tuyến của γ tại p.*

5.3 Phương chính và độ cong Gauss

Với mỗi véctơ riêng $\vec{e}$ của h_p, $h_p(\vec{e}) = \tilde{k}\vec{e}$, ta có

$$\tilde{k}(\vec{e}) = \frac{II(\vec{e})}{I(\vec{e})} = \frac{\tilde{k}\vec{e}.\vec{e}}{\vec{e}.\vec{e}} = \tilde{k}(s).$$

Chọn cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ của T_pS gồm các véctơ riêng của h_p. Ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 5.3.1

$$\tilde{k}(\vec{e}_1) = \tilde{k}_1, \qquad \tilde{k}(\vec{e}_2) = \tilde{k}_2$$

được gọi là độ cong chính của S tại p.

Mệnh đề 5.3.2 (Công thức Euler) *Nếu $\vec{\xi} = \cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2$ thì độ cong pháp dạng theo phương ξ là*

$$k(\vec{\xi}) = \tilde{k}_1\cos^2\varphi + \tilde{k}_2\sin^2\varphi.$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\tilde{k}(\vec{\xi}) &= II(\vec{\xi}) \\ &= h_p(\vec{\xi}).\vec{\xi} \\ &= h_p(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2).(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) \\ &= (\tilde{k}_1\cos\varphi\vec{e}_1 + \tilde{k}_2\sin\varphi\vec{e}_2).(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2).\end{aligned}$$

□

Hệ qủa 5.3.3 *1. Các độ cong chính $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$ là các cực trị của độ cong pháp dạng $\tilde{k}(\vec{\xi})$ khi $\vec{\xi}$ thay đổi trên $T_pS \setminus \{0\}$.*

2. Nếu các độ cong chính $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ có cùng dấu thì độ cong pháp dạng $\tilde{k}(\vec{\xi})$ cũng có cùng dấu đó. Nếu các độ cong chính khác dấu nhau thì luôn tồn tại phương $\vec{\xi} \in T_pS \setminus \{0\}$ để $\tilde{k}(\vec{\xi}) = 0$.

5.4 Một số tính chất đặc trưng của đường trên mặt cong

Định nghĩa 5.4.1 *Véctơ tiếp xúc $\mathbf{a} \in T_PS$ được gọi là phương tiệm cận, nếu*

$$II(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{i,j} b_{ij}a^ia^j = 0.$$

Đường tiệm cận là đường mà tại mỗi điểm $k_{norm} = 0$.

Hệ qủa 5.4.2 *Nếu tại điểm $P \in S$, $K(P) \leq 0$ thì tồn tại phương tiệm cận tại P, nếu $K(P) > 0$ thì không có phương tiệm cận tại P. Nếu mặt S có độ cong Gauss $K(p) < 0$ tại mọi nơi thì tại mọi điểm đều tồn tại phương tiệm cận.*

Định nghĩa 5.4.3 *Các đường độ cong(curvature line) là các đường mà tại mỗi điểm các vectơ tiếp xúc là hai phương chính. Đường trắc địa(geodesic line) là đường mà tại mỗi điểm của nó, $k_g = 0$.*

Hệ qủa 5.4.4 *Dọc theo đường trắc địa, ta có*

$$\frac{d\tau}{ds} = k_{norm}\mathbf{n}.$$

Phương trình đường trắc địa là

$$\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = 0.$$

Định lí 5.4.5 *$u(t)$ là đường trắc địa nối 2 điểm A và B, ứng với 2 tham số t_1 và t_2, chỉ khi*

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i(\tau)\dot{u}^j(\tau)}d\tau \to \min.$$

Chứng minh. Theo nguyên lý Fermat-Hugen

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i(\tau)\dot{u}^j(\tau)}d\tau \to \min.$$

và do đó

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i(\tau)\dot{u}^j(\tau)d\tau \to \min$$

thì đạo hàm biến phân là triệt tiêu

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i,j} g_{ij}\dot{u}^i(\tau)\dot{u}^j(\tau)d\tau = 0$$

Đạo hàm biến phân và tích phân có thể đổi chỗ cho nhau, cho nên

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i,j} \delta(g_{ij}\dot{u}^i(\tau)\dot{u}^j(\tau))d\tau = 0$$

Từ đó suy ra phương trình đường trắc địa. □

5.5 Định lí Gauss -Bonnet

Trước hết chúng ta nhắc lại đôi điều về tích phân đường và tích phân mặt trong giải tích.

Tích phân đường loại I của hàm $f(x, y, z)$ dọc theo đường cong tham số hoá γ cho bởi tham số hoá $\mathbf{r}(t)$ được định nghĩa là tích phân Riemman

$$\int_\gamma f(r(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} f(r(t))dt.$$

Ví dụ tích phân độ dài đường cong là tích phân đường loại I.

Tích phân đường loại II $\int_\gamma \omega = \oint_\gamma \omega$ của một biểu thức vi phân, còn được gọi là *1-dạng vi phân*,

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}) &= \omega_1(\mathbf{x})dx^1 + \omega_2(\mathbf{x})dx^2 + \omega_3(\mathbf{x})dx^3 \\ &= P(\mathbf{x})dx^1 + Q(\mathbf{x})dx^2 + R(\mathbf{x})dx^3, \end{aligned}$$

với P, Q, R là các hàm số trơn theo các biến $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ là tích phân Riemman

$$\int_{t_1}^{t_2} (P(\mathbf{x})\cos\alpha(t) + Q(\mathbf{x})\cos\beta(t) + R(\mathbf{x})\cos\gamma(t))dt,$$

trong đó $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ lần lượt là các góc giữa $d\mathbf{r}(t)$ với ba trục toạ độ $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Tích phân mặt loại I $\iint_\Sigma f(\mathbf{x}(u^1, u^2))dS$ của hàm $f(x, y, z)$ dọc theo mặt cong tham số hoá Σ cho bởi tham số hoá $\mathbf{r}(u^1, u^2), (u^1, u^2) \in D$ được định nghĩa là tích phân Riemman

$$\iint_D f(\mathbf{r}(u^2, u^2))dS = \iint_D f(r(u^2, u^2))du^1du^2.$$

Ví dụ tích phân diện tích mặt cong

$$\iint_D ||r'_{u^1} \times r'_{u^2}||du^1du^2$$

là tích phân mặt loại I.

Tích phân mặt loại II $\int_\Sigma \omega = \oint_\Sigma \omega$ của một biểu thức vi phân bậc 2, còn được gọi là *2-dạng vi phân*,

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega_1(\mathbf{x})dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2(\mathbf{x})dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3(\mathbf{x})dx^1 \wedge dx^2$$

$$:= P(\mathbf{x})dx^2dx^3 + Q(\mathbf{x})dx^3dx^1 + R(\mathbf{x})dx^1dx^2,$$

với P, Q, R là các hàm số trơn theo các biến $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ là tích phân Riemman

$$\iint_D (P(\mathbf{x})n^1(u^1, u^2) + Q(\mathbf{x})n^2(u^1, u^2) + R(\mathbf{x})n^3(u^1, u^2))du^1du^2,$$

trong đó $\mathbf{n}(u^1, u^2) = (n^1(u^1, u^2), n^2(u^1, u^2), n^3(u^1, u^2))$ là ba thành phần của véctơ pháp tuyến ngoài với mặt định hướng thuận Σ.

Giả sử $\varphi : U \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ là một tham số hoá địa phương của mặt M. Giả sử $\Delta A_0B_0C_0$ là một tam giác trong U. Ảnh của tam giác này qua ánh xạ φ là một tam giác cong, kí hiệu là (ABC) với các đỉnh $A = \varphi(A_0)$, $B = \varphi(B_0)$, $C = r(C_0)$ và các cạnh (cong) tương ứng là $a = \varphi([B_0, C_0])$, $b = \varphi([A_0, C_0])$, $c = \varphi([A_0, B_0])$. Chúng ta cũng kí hiệu

$$\breve{A} := \widehat{\vec{b'}, \vec{c'}} := \frac{(\vec{b'}, \vec{c'})}{||\vec{b'}||.||\vec{c'}||}$$

độ lớn đo bằng radian của góc ngoài tại đỉnh A trong mặt tiếp xúc T_AM và tương tự cho $\breve{B}$, $\breve{C}$. Chúng ta kí hiệu K là độ cong Gauss của M và μ là phần tử diện tích chính tắc (với hướng đã chọn) trên mặt M, k_g là *độ cong trắc địa* của cung tương ứng. Ta kí hiệu

$$\int_{\partial(ABC)} k_g ds := \int_a k_g ds + \int_b k_g ds + \int_c k_g ds.$$

Định lí 5.5.1 (Công thức Gauss-Bonnet)

$$\int_{(ABC)} K\mu + \int_{\partial(ABC)} k_g ds = 2\pi - (\breve{A} + \breve{B} + \breve{C}).$$

Chứng minh. Chúng ta chọn một trường mục tiêu trực chuẩn định hướng thuận $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ trên $V = \varphi(U)$ và gọi ω_1^2 là dạng liên thông của M trong trường mục tiêu đó. Nếu $\rho : I = [0, 1] \to V$ là một cung định hướng, $||\rho'|| = 1$ và nếu ta viết $\rho'(a) = \cos\varphi(s)\mathbf{e}_1(\rho(s)) + \sin\varphi(s)\mathbf{e}_2(\rho(s))$ thì

$$k_g = ||\sum \omega_l^k(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_k|| = \omega_2^1\mathbf{e}_1.$$

Khi đó độ cong pháp dạng $k_{norm} = 0$,

$$\rho'(s) = \frac{\partial\rho(s)}{\partial s} = D_{\rho'(s)}\mathbf{e}_1 = \omega_2^1(\rho'(s))ds$$

và ta có

$$\begin{aligned}\int_I k_g ds &= \int_{s_0}^{s_1} k_g(s)ds \\ &= \varphi(s_1) - \varphi(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} \omega_2^1(\rho'(s))ds \\ &= \varphi(s_1) - \varphi(s_0) - \int_\rho \omega_2^1,\end{aligned}$$

trong đó $\varphi(s_0) = \mathbf{e}_1(\widehat{\rho(s_0)), \rho'}(s_0))$ là độ lớn của góc định hướng tạo bởi $\mathbf{e}_1(\rho(s_0))$ và $\rho'(s_0)$. Vậy nên ta có

$$\int_a k_g ds = \mathbf{e}_1(\widehat{C), a'}(C) - \mathbf{e}_1(\widehat{B), a'}(B) - \int_a \omega_2^1.$$

Tương tự, ta cũng có công thức cho $\int_b k_g ds$, và $\int_c k_g ds$. Cuối cùng ta có

$$\begin{aligned}\int_{\partial(ABC)} k_g ds &= \mathbf{e}_1(\widehat{A), b'}(A) - \mathbf{e}_1(\widehat{A), c'}(A)) \\ &+\mathbf{e}_1(\widehat{B), c'}(B) - {}_{\mathbf{e}}1(\widehat{B), a'}(B)) \\ &+\mathbf{e}_1(\widehat{C), a'}(A) - \mathbf{e}_1(\widehat{A), b'}(A)) \\ &-(\int_a \omega_2^1 + \int_b \omega_2^1 + \int_c \omega_2^1) \\ &= -\breve{A} - \breve{B} - \breve{C} + 2\pi l - \int_{(ABC)} K\mu\end{aligned}$$

Theo công thức Stokes, ta có

$$\int_a \omega_2^1 + \int_b \omega_2^1 + \int_c \omega_2^1 = \int_{(ABC)} d\omega_2^1 = \int_{(ABC)} K\mu.$$

Bây giờ ta chỉ cần chỉ ra là bội số $l = 1$. Thật vậy, chúng ta có công thức

$$\int_{(ABC)} K\mu + \int_{\partial(ABC)} k_g ds + (\breve{A} + \breve{B} + \breve{C}) = 2\pi l.$$

Kí hiệu $\langle ., . \rangle_0$ là cấu trúc Riemann trên $V = r(U)$ đẳng cấu đẳng cự với $U \subseteq \mathbf{R}^2$. Khi đó với mỗi $t \in [0, 1]$, công thức $\langle ., . \rangle_t := (1-t)\langle ., . \rangle_0 + t\langle ., . \rangle$ xác định cấu trúc Riemann trên V và công thức của ta có dạng

$$\int_{(ABC)} K\mu + \int_{\partial(ABC)} k_g ds + (\breve{A} + \breve{B} + \breve{C}) = 2l\pi$$

đúng với mọi $t \in [0, 1]$ Hai tích phân ở vế trái phụ thuộc liên tục vào t. Suy ra l cũng phụ thuộc liên tục vào t. Nhưng $l \in \mathbf{Z}$, nên l không phụ thuộc vào t. Khi $t = 0$ ta có $K = 0, k_g = 0$, và $\breve{A} + \breve{B} + \breve{C} = 2\pi$, theo hình học Euclid trong $\mathbf{R}^2$. Vậy suy ra $l = 1$. □

Nhận xét 5.5.2 *1. Chúng ta kí hiệu các góc trong của một tam giác là $\hat{A} = \pi - \breve{A}$, $\hat{B} = \pi - \breve{B}$, $\hat{C} = \pi - \breve{C}$. Công thức Gauss -Bonnet trở thành*

$$\int_{(ABC)} K\mu + \int_{\partial(ABC)} k_g ds = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

2. Nếu a, b, c là những cung trắc địa thì công thức Gauss-Bonnet trở thành

$$\int_{(ABC)} K\mu = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

Vậy tổng các góc trong của một tam giác với các cạnh là các đường cong trắc địa lớn hơn π nếu độ cong Gauss $K > 0$, và bé hơn π nếu $K < 0$ và bằng π nếu độ cong Gauss $K \equiv 0$.

3. Độ cong trắc địa k_g, dọc theo một cung định hướng trên mặt hai chiều định hướng đổi dấu khi đổi định hướng của cung đó cho nên tích phân $\int_\gamma k_g ds$ thực ra là tích phân đường loại II, tức là tích phân của dạng vi phân $K_g ds$ dọc theo đường cong định hướng γ.

Định lí 5.5.3 (Đặc trưng Euler) *Giả sử M là một mặt định hướng, compắc và được chia ra bởi một lưới các điểm thành các tam giác cong (được gọi là tam giác phân hoá). Kí hiệu $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ lần lượt là số đỉnh, số cạnh và số mặt tam giác của tam giác phân hóa đó,*

$$Eul(M) := \sum_i (-1)^i \beta_i.$$

Khi đó

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K\mu = Eul(M) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2.$$

Chứng minh. Kí hiệu σ là tam giác cong của tam giác phân hóa đó. Theo công thức Gauss-Bonnet cho tam giác ta có

$$\int_M K\mu = \sum_\sigma \int_{\partial\sigma} k_g ds + \sum_\sigma (\Delta(\sigma) - \pi),$$

trong đó $\Delta(\sigma)$ là tổng các góc trong của tam giác cong σ. Vì mỗi cạnh của tam giác phân là cạnh của đúng hai tam giác cong kề nhau trong tam giác phân hóa đó và cùng hướng với cạnh ấy khi coi nó là thuộc tam giác này và ngược hướng với cạnh ấy khi coi nó thuộc tam giác kia. Cho nên

$$\sum_\sigma \int_{\partial\sigma} k_g ds = 0.$$

Tổng các góc trong của một tam giác cong tại mỗi đỉnh bằng 2π, nên

$$\sum_{\sigma}(\Delta(\sigma)-\pi)=\beta_0 2\pi-\beta_2\pi.$$

Vậy nên ta có

$$\int_M K\mu=\pi(2\beta_0-\beta_2).$$

Mỗi cạnh của tam giác phân hóa thuộc đúng hai tam giác cong, mà mỗi tam giác cong có ba cạnh cho nên $2\beta_1=3\beta_2$. Từ đó suy ra

$$\int_M K\mu=\pi(2\beta_0-\beta_2)=\pi(2\beta_0-2\beta_1+2\beta_2)=2\pi(Eul(M)).$$

Nhận xét rằng đặc trưng Euler tổng quát trong tôpô học cũng chính là $\chi(M)=Eul(M)$. □

5.6 Bài tập củng cố lý thuyết

1. Tìm cung chính quy trong $\mathbf{R}^3$ xác định bởi tham số hoá $t\mapsto\rho(t)$, biết phương trình tiếp tuyến tại mỗi điểm t của nó trong toạ độ của không gian tiếp xúc cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1(t)X+b_1((t)Y+c_1(t)Z+d_1(t) &= 0\\ a_2(t)X+b_2((t)Y+c_2(t)Z+d_2(t) &= 0\end{cases}$$

   Gợi ý: Dùng định lí tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân.

2. Tính độ dài của các cung trên đoạn $t\in[t_0,t_1]$:

   a. Trong toạ độ Đề Các $x(t)=t, y(t)=t^n, z(t)=c_0(=const)$.

   b. Trong toạ độ trụ (r,φ,z),

$$r=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2},\quad \varphi=\widehat{\vec{\rho},\vec{e}_1}.$$

   c. Trong toạ độ cầu (r,φ,θ):

$$r=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2},$$

$$\varphi=(x\widehat{(t),y(t)},\vec{e}_1),$$

$$\theta=(x(t),\widehat{y(t),z}(t))\vec{e}_3).$$

3. Cho cung đinh ốc tròn Γ xác định bởi

$$t \mapsto \rho(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), (a > 0)$$

trong $\mathbf{R}^3$.

   a. Hãy viết phương trình tiếp tuyến, pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến, mặt phẳng mật tiếp, mặt pháp diện, mặt trực đạc của nó tại mỗi điểm.

   b. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của nó nghiêng một góc không đổi so với mặt phẳng nằm ngang Oxy, còn các pháp tuyến chính luôn luôn cắt trục Oz.

4. Tính độ cong Gauss và độ cong trung bình của:

   a. Mặt đinh ốc dựng đứng.

   b. Mặt paraboloid.

   c. Mặt tiếp xúc.

5. Cho mặt S trong $\mathbf{R}^3$ xác định bởi phương trình

$$x^2 + y^4 + z^6 - 1 = 0.$$

Chứng minh rằng S là một đa tạp compắc, định hướng. Gọi μ là dạng diện tích chính tắc của S và K là độ cong Gauss của S. Hãy tính $\int_S K\mu$.

Chương 6

Định lý ánh xạ ngược và Định lý ánh xạ ẩn

Hình học vi phân cần đến các phép toán vi phân và tích phân khá tổng quát. Cho nên việc nghiên cứu được bắt đầu từ việc hệ thống hoá phép tính vi phân trong $\mathbf{R}^n$. Trong chương này chúng ta sẽ tiếp cận khái niệm đa tạp khả vi từ khía cạnh giải tích, xem chúng như những tập nghiệm của một hệ phương trình hàm trong không gian $\mathbf{R}^n$. Sau đó tư tưởng "bó hoá" dẫn dắt đến sự nghiên cứu đa tạp tổng quát.

6.1 Định nghĩa đạo ánh và các tính chất cơ bản

Chúng ta kí hiệu $\mathbf{R}$ là tập tất cả các số thực, $\mathbf{R}^n$ là tích Descartes của n phiên bản tập các số thực

$$\mathbf{R}^n := \{(x^1,\dots,x^n)|x^i \in \mathbf{R}, \forall i = \overline{1,n}\}.$$

Nói một cách khác, mỗi phần tử của $\mathbf{R}^n$ là một bộ n số thực $x = (x^1,\dots,x^n), x^i \in \mathbf{R}$. Chúng ta kí hiệu theo truyền thống kí hiệu tensơ trong hình học và do vậy viết các chỉ số ở trên. Để cho gọn, ta sẽ kí hiệu các phần tử đơn giản là $x, y, \dots.$ và gọi chúng là các véctơ. Đôi khi để nhấn mạnh rằng chúng là các véctơ, ta sẽ kí hiệu thêm dấu mũi tên phía trên đầu $\vec{x}$, $\vec{y}$,.... hoặc viết bằng chữ đậm: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots.$

Xét tập $mathbfR^n$ với các phép toán trên các véctơ như sau: Nếu $x = (x^1,\dots,x^n)$, $y = (y^1,\dots,y^n)$ là các véctơ thuộc $\mathbf{R}^n$ và $\lambda \in \mathbf{R}^n$, thì

- *Tổng* các véctơ x và y là véctơ $x + y$:

$$x + y := (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n),$$

- *Tích* véctơ với một vô hướng λ là véctơ λx:

$$\lambda x := (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n).$$

Mệnh đề 6.1.1 *Cùng với các phép toán trên, $\mathbf{R}^n$ là một không gian véctơ.*

Chứng minh. Hiển nhiên là véctơ $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ sẽ là véctơ trung hoà cho phép cộng. Phần tử đối của véctơ x là véctơ $-x = (-x^1, \ldots, -x^n)$. Để chứng minh mệnh đề, chúng ta chỉ cần kiểm tra các tiên đề của một cấu trúc không gian véctơ, bao gồm:

- Luật kết hợp theo phép cộng:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbf{R}^n.$$

- Sự tồn tại phần tử trung hoà $\mathbf{0}$.
- Sự tồn tại phần tử đối:

$$\exists - x; x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

- Luật giao hoán của phép cộng

$$x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

- Luật phân phối của phép cộng và phép nhân:

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n.$$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall \lambda \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R}^n.$$

- Luật kết hợp của phép nhân

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n.$$

- Tính chuẩn hoá:

$$1.x = x, \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Chúng tôi dành cho bạn đọc kiểm tra chi tiết các tính chất trên.

Xét các véctơ đặc biệt:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

....

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$
(số 1 duy nhất đứng ở vị trí thứ i)
$$\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Nhận xét rằng các véctơ $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ là độc lập tuyến tính và chúng lập thành một cơ sở của $\mathbf{R}^n$. Mỗi véctơ bất kì $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ được phân tích duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của các véctơ cơ sở

$$\mathbf{x} = x^i e_i = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i.$$

Chú ý rằng trong công thức trên, theo truyền thống của hình học, viết một chỉ số trên và một chỉ số dưới bằng cùng một chữ cái có nghĩa là lấy tổng theo chỉ số đó. Nhưng đôi khi để cho đỡ nhầm lẫn, người ta cũng vẫn viết luôn cả dấu tổng, nếu thấy cần thiết nhấn mạnh.

Chúng ta định nghĩa *tích vô hướng* của hai véctơ $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ và $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ theo công thức

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}.\mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i.$$

Mệnh đề 6.1.2 *Cùng với tích vô hướng tự nhiên trên, $\mathbf{R}^n$ trở thành không gian Euclid.*

Chứng minh. Chúng ta cần kiểm tra rằng tích vô hướng nói trên có các tính chất:

- Tuyến tính:
$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z), \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, x, y, z \in \mathbf{R}^n.$$
- Đối xứng:
$$(x, y) = (y, x), \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$
- Xác định dương:
$$(x, x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}^n,$$
$$(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Chúng tôi dành việc kiểm tra chi tiết các tính chất đó cho đọc giả. □

Nhận xét rằng cơ sở $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ nói trên là một *cơ sở trực chuẩn*, tức là

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij},$$

trong đó δ_{ij} là kí hiệu Kronecker quen biết.

Mệnh đề 6.1.3 *Mọi không gian Euclid n-chiều đều đẳng cấu với không gian* $\mathbf{R}^n$.

Chứng minh. Giả sử E^n là một không gian Euclid n chiều tuỳ ý, tức là một không gian véctơ với một tích vô hướng trừu tượng

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{R}.$$

Chọn một cơ sở trực chuẩn $\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n$, với

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Phép tương ứng $\tilde{\mathbf{e}}_i \mapsto \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, n}$ xác định một đẳng cấu đẳng cự giữa $(E^n, \langle ., . \rangle)$ và $(\mathbf{R}^n, (., .))$. □

Như vậy việc nghiên cứu không gian Euclid n chiều với sai khác đẳng cấu hoàn toàn tương đương với việc nghiên cứu không gian cụ thể $\mathbf{R}^n$.

Trong không gian $\mathbf{R}^n$ ta đưa vào metric đo khoảng cách giữa các điểm như sau: Khoảng cách giữa hai véctơ x và y được đo bằng đại lượng

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| := \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

Mệnh đề 6.1.4 $\mathbf{R}^n$ *là một không gian định chuẩn.*

Chứng minh. Chúng ta có thể kiểm tra rằng ánh xạ $\mathbf{x} \mapsto ||\mathbf{x}||$ thoả mãn tất cả các tính chất của không gian định chuẩn:

- Xác định dương
$$||\mathbf{x}|| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$
$$||\mathbf{x}|| = 0 \text{ khi và chỉ khi } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

- Thuần nhất dương:
$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| ||\mathbf{x}||, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

- Bất đẳng thức tam giác:
$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n.$$

Chúng tôi dành phần kiểm tra chi tiết cho bạn đọc. □

Bây giờ chúng ta định nghĩa một số khái niệm hình cầu (đóng, mở), hình hộp (đóng, mở) và mặt cầu như sau.

Định nghĩa 6.1.5 *Mặt cầu $S(\mathbf{a}, r)$ tâm $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ bán kính $r \geq 0$ là tập các véctơ $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ thoả mãn*

$$||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i)^2 = r^2.$$

Hình cầu đóng $B(a, r)$ tâm $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ bán kính $r \geq 0$ là tập các véctơ $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ thoả mãn

$$||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i)^2 \leq r^2.$$

Hình cầu mở $B(a, r)$ tâm $a \in \mathbf{R}^n$ bán kính $r \geq 0$ là tập các véctơ $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ thoả mãn

$$||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i)^2 < r^2.$$

Hình hộp đóng $P(a^1; b^1, \ldots, a^n; b^n)$ là tập các véctơ $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ mà các thành phần x^i của chúng thoả mãn các bất đẳng thức

$$a^i \leq x^i \leq b^i, \forall i = \overline{1, n}.$$

Hình hộp mở $P(a^1; b^1, \ldots, a^n; b^n)$ là tập các véctơ $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ mà các thành phần x^i của chúng thoả mãn các bất đẳng thức

$$a^i < x^i < b^i, \forall i = \overline{1, n}.$$

Hình hộp đóng-mở $P(a^1; b^1, \ldots, a^n; b^n)$ là tập các véctơ $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ mà các thành phần x^i của chúng thoả mãn một số bất đẳng thức hoặc đẳng thức

$$a^i \leq x^i \leq b^i, \forall i = \overline{1, n},$$

trong đó chỉ có một số nhất định các dấu bằng xảy ra.

Mệnh đề 6.1.6
1. *Các hình cầu đóng (tương ứng, mở) lập thành cơ sở các tập đóng (tương ứng, mở) của tôpô trong $\mathbf{R}^n$.*
2. *Các hình hộp đóng (tương ứng, mở) lập thành cơ sở các tập đóng (tương ứng, mở) của tôpô trong $\mathbf{R}^n$.*
3. *Tôpô trong hai khẳng định trên là cùng đồng phôi với tôpô chuẩn trong $\mathbf{R}^n$*

Chứng minh. Để chứng minh một hệ $\mathcal{X}$ các tập con lập thành một tôpô, chúng ta cần kiểm tra các tiên đề cơ sở của một tôpô. Điều này đúng vì:

- $\emptyset, \mathbf{R}^n \in \mathcal{X}$.
- Trong giao của hai hình cầu (hay hình hộp) mở có chứa một cầu (tương ứng, hộp) mở. Tương tự với các cầu hay các hộp đóng. Để chứng minh các tôpô tương ứng với cầu hay hộp đều tương đương nhau, chúng ta chỉ cần chỉ ra là trong mỗi cầu mở có chứa ít nhất một hộp mở và ngược lại. Chúng tôi dành phần kiểm tra chi tiết cho người đọc.

□

Từ đó ta có hệ quả tự nhiên là

Hệ qủa 6.1.7 *Ánh xạ $f = (f^1, \dots, f^m) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ là liên tục khi và chỉ khi các thành phần $f^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$ là hàm liên tục*

Chứng minh. Tất cả dễ dàng suy ra từ nhận xét rằng $||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}|| \to 0$ khi và chỉ khi $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_k^i - x^i)^2} \to 0$. □

Phép biến đổi (đồng phôi) biến các hình hình học tương đương vào nhau được gọi là *phép biến hình.* Tập các phép biến hình cùng với phép hợp ánh xạ lập thành một nhóm, gọi là *nhóm biến đổi* . Nếu các phép biến hình là đẳng cự thì coi chúng là tương đương nhau (đồng nhất với nhau).

Tôpô đại cương nghiên cứu các hình hình học sai khác một đồng phôi (đẳng cự). Bài toán nghiên cứu truyền thống của hình học là phân loại các hình hình học và nghiên cứu các tính chất nội tại của từng hình hình học.

6.2 Đạo hàm riêng và vi phân

Chúng ta đã xác định đối tượng của hình học Euclid là $\mathbf{R}^n$ và các vật thể hình học trong nó, được cấu tạo từ các mảnh cầu, hay mảnh phẳng. Nghiên cứu các đối tượng này được hiểu theo nghĩa thông thường là tìm các vị trí tương đối trong không gian và tìm các đặc trưng bằng số của chúng như khối lượng, thể tích, ... Bài toán trở nên phức tạp hơn nhiều nếu các hình đó không được ghép từ các mảnh cầu hay mảnh phẳng. Để giải quyết nhiều bài toán tương tự trong đó có cả các bài toán về vị trí tương đối, tiếp xúc, tiếp điểm,... chúng ta cần tới công cụ mới hơn những công cụ thông thường như đã nói ở trên. Đó chính là lí do chúng ta cần đưa phép tính vi phân và tích phân vào trong hình học.

Định nghĩa 6.2.1 *Cho $y = f(x), f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Chúng ta nói rằng ánh xạ f là khả vi tại điểm $x_0 \in \mathbf{R}^n$, nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính*

$$\lambda = \lambda(x_0) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

sao cho

$$||y - y_0 - \lambda(x_0)(x - x_0)|| = o(||x - x_0||),$$

với $y_0 = f(x_0)$, *với mọi* x *trong lân cận đủ bé của* x_0. *Ánh xạ tuyến tính* $\lambda(x_0)$, *nếu nó tồn tại, được gọi là đạo ánh của ánh xạ* f *tại điểm* x_0 *và được kí hiệu bằng một trong các kí hiệu cơ bản quen biết* $f'(x_0)$, $f_*(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{Df(x_0)}{Dx}$, $Dy/Dx|_{x_0}$.

Nếu chúng ta cố định tất cả các biến trừ một biến x^i, thì chúng ta có một hàm một biến, giá trị véctơ

$$f(x_0^1, \ldots, x^i, \ldots, x_0^n) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n,$$

theo biến x^i. Đạo ánh của ánh xạ này gọi là *đạo hàm riêng* của ánh xạ theo biến x^i và được kí hiệu là

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \frac{Df(x_0)}{Dx^i} = D_i f(x_0) = f_i'(x_0).$$

Giả sử $\ell(x_0)$ là một đường thẳng dạng $x_0 + t\xi(x_0)$ đi qua điểm x_0. Khi đó ta có ánh xạ một biến

$$f \circ \ell = f(\ell(x_0 + t\xi(x_0))) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n.$$

Định nghĩa 6.2.2 *Đạo ánh* $\frac{Df \circ \ell(x_0 + t\xi(x_0))}{Dt}$ *gọi là đạo hàm (đạo ánh) của* f *theo hướng* ξ *tại điểm* x_0 *và được kí hiệu là* $(\xi f)(x_0)$.

Chúng ta có công thức liên hệ nó với các đạo hàm riêng

$$(\xi f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \xi^i(x).$$

Nhận xét 6.2.3 *Đạo ánh* $\frac{Df(x)}{Dx}$, *nếu nó tồn tại, là duy nhất.*

Thật vậy, giả sử $\lambda_1(x)$ và $\lambda_2(x)$ là hai đạo ánh của cùng một ánh xạ f tại cùng một điểm x. Khi đó,

$$||\lambda_1(x)h - \lambda_2(x)h|| \leq ||\lambda_1(x)h - f(x+h) + f(x)|| +$$

$$+ ||f(x+h) - f(x) - \lambda_2(x)h|| = 2o(||h||), \forall h \in \mathbf{R}^n.$$

Bởi thế nên $\lambda_1(x) \equiv \lambda_2(x), \forall x$.

Định lí 6.2.4 *1. Nếu* f *là một ánh xạ hằng (nhận một giá trị véctơ cố định) thì* $Df(x) = \mathbf{0}, \forall x \in \mathbf{R}^n$

2. *Nếu* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *là một ánh xạ tuyến tính thì* $Df(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}^n$.

3. *Ánh xạ* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *là khả vi tại* $a \in \mathbf{R}^n$ *khi và chỉ khi các hàm thành phần* $f^i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *là khả vi tại* a *và ta có*

$$Df(a) = \begin{bmatrix} Df^1(a) \\ \dots \\ Df^m(a) \end{bmatrix}$$

Nói cách khác $Df(a)$ *là một ma trận mà mỗi hàng thứ* i *của nó có các thành phần là đạo hàm riêng thứ* j *của thành phần* f^i. *Ma trận đó còn được gọi là ma trận Jacobi cuả ánh xạ tại điểm* a *và kí hiệu là* $Jac_x(f)(a) = \frac{Df(a)}{Dx}$

Chứng minh. Những tính chất 1. và 2. kể trên giống như những tính chất quen biết của hàm số một biến. Để chứng minh tính chất 3. chỉ cần phân tích ánh xạ f theo các hàm thành phần

$$f = \sum_{i=1}^{n} f^i \mathbf{e}_i.$$

Chúng tôi dành cho bạn đọc kết thúc chứng minh chi tiết. □

Định lí 6.2.5 *Nếu* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *là ánh xạ khả vi tại* $a \in \mathbf{R}^n$ *và* $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ *là ánh xạ khả vi tại* $f(a)$, *thì hàm hợp* $g \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *là ánh xạ khả vi tại* a *và ta có*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

Chứng minh. Chúng ta có công thức

$$g(f(x)) - g(f(a)) - Dg(f(a))Df(a)(x-a) =$$

$$= g(f(x)) - g(f(a)) - Dg(f(a))(f(x) - f(a) + o(||x-a||)) =$$
$$= o(||f(x) - f(a)||) + Dg(f(a))(o(||x-a||)).$$

Cả hai số hạng đều là o-nhỏ của đại lượng $||x = a||$ nên tổng cũng là một đại lượng vô cùng bé $o(||x-a||)$. □

Ta thấy rằng các đạo hàm riêng $\frac{\partial}{\partial x^i}$, xem như các ánh xạ tuyến tính áp lên hàm $f = f(x^1, \dots, x^n)$ theo qui tắc $f \mapsto \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ là độc lập tuyến tính với nhau trong không gian các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbf{R}^n$ vào $\mathbf{R}$. Chúng lập thành một cơ sở tuyến tính. Cơ sở tuyến tính đối ngẫu với nó được đồng nhất với các vi phân $dx^1, \dots, dx^n$.

Định nghĩa 6.2.6 *Tổ hợp tuyến tính*

$$df := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} dx^i$$

được gọi là vi phân toàn phần của hàm $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Định lí 6.2.7 *Giả sử $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ là một phép đồng phôi, thực hiện việc đổi biến $y = \varphi(x)$. Khi đó chúng ta có công thức đổi biến sau:*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i},$$

$$dx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k,$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i.$$

Nghĩa là vi phân toàn phần của một hàm số không phụ thuộc việc chọn biến địa phương.

Chứng minh. Định lí được suy ra trực tiếp từ công thức đạo hàm của hàm hợp, cùng với nhận xét rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \delta_{ij}.$$

□

6.3 Định lí hàm (ánh xạ) ngược

Định lí 6.3.1 (Định lí ánh xạ ngược) *Giả sử $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ khả vi liên tục trong lân cận mở của điểm $a \in \mathbf{R}^n$ và $Df(a)$ là khả nghịch. Khi đó tồn tại một lân cận mở V chứa a và một lân cận mở W chứa $f(a)$ sao cho ánh xạ $f : V \to W$ là khả nghịch, có ánh xạ ngược $f^{-1} : W \to V$ là khả vi đối với mọi $y \in W$ và*

$$\frac{D(f^{-1})}{Dy} = \left(\frac{Df}{Dx}(f^{-1}(y)) \right)^{-1}.$$

Chứng minh. Để cho tiện, ta sẽ kí hiệu Dx là véctơ cột $\begin{bmatrix} Dx^1 \\ \dots \\ Dx^n \end{bmatrix}$ và $\frac{Dy}{Dx} = \frac{Df(x)}{Dx}$ là ma trận Jacobi của ánh xạ tại điểm x. Khi đó chúng ta có thể viết

$$Dy = \frac{Df(x)}{Dx} Dx.$$

Từ đó suy ra là nếu $\frac{Df(x)}{Dx}$ là khả nghịch, $\frac{Df(x)}{Dx}$ liên tục trong lân cận của điểm a, thì tồn tại lân cận mở W của điểm $f(a)$ để ma trận Jacobi luôn là khả nghịch trên đó. Điều này dễ thấy từ công thức tính ma trận nghịch đảo

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(I - f^{-1}(a) f(x) \right)^n.$$

Tức là, nếu $Df(a)$ khả nghịch thì trong lân cận đủ nhỏ W của điểm $f(a)$ thì các ma trận Jacobi chuỗi là hội tụ tuyệt đối và $Df(x)$ cũng là khả nghịch. Trong lân cận đó chúng ta có phương trình

$$\left(\frac{Df(x)}{Dx} \right)^{-1} Dy = Dx.$$

Thay biểu thức $x = f^{-1}(y)$ ta có công thức cần chứng minh. Để chứng minh tính khả vi của hàm ngược, chúng ta cần dùng đến định lí về điểm trung bình: Với các gía trị x đủ gần với điểm x_0, giá trị $y = f(x)$ cũng đủ gần với điểm $y_0 = f(x_0)$. Do giả thiết liên tục của đạo ánh tại lân cận của điểm $x + 0$, chúng ta có công thức giá trị trung bình

$$y - y_0 = \frac{Df(\tilde{x})}{Dx} (x - x_0),$$

trong đó $\tilde{x}$ là một điểm trong lân cận đủ bé của x_0. Do ánh xạ $\frac{Df(x)}{Dx}$ là liên tục trong lân cận điểm x_0 nên nó cũng khả nghịch trong lân cận đủ bé của điểm đó. Tức là chúng ta có

$$\left(\frac{Df(\tilde{x})}{Dx} \right)^{-1} (y - y_0) = x - x_0.$$

Chuyển qua giới hạn chúng ta được điều cần thiết. Chúng tôi dành cho độc giả tiếp tục thực hiện nốt các chi tiết chứng minh. □

6.4 Định lí hàm (ánh xạ) ẩn

Chúng ta kí hiệu các véctơ đạo hàm riêng

$$\left(\frac{\partial f(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial f(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)}{\partial x^n}\right)$$

đơn giản là $D_x f(x,y)$, tương tự,

$$\left(\frac{\partial f(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial f(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)}{\partial y^m}\right)$$

đơn giản là $D_y f(x,y)$.

Định lí 6.4.1 (Định lí ánh xạ ẩn) *Giả sử rằng ánh xạ $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ là khả vi liên tục trong một tập mở chứa $(a,b) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ và $F(a,b) = 0$. Giả sử ma trận Jacobi có ma trận con khả nghịch $D_y F(a,b)$. Khi đó tồn tại một lân cận mở $A \subseteq \mathbf{R}^n$, chứa a, và một tập mở $B \subseteq \mathbf{R}^m$ chứa b sao cho tồn tại duy nhất một ánh xạ khả vi $f : A \to B$, gọi là ánh xạ ẩn nghiệm đúng phương trình*

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \forall x \in A.$$

Đạo hàm của ánh xạ ẩn $f(x)$ được tính theo công thức

$$D_x f(x) = -\left[\frac{DF(x,y)}{Dy}\right]^{-1} D_x F(x,y).$$

Chứng minh. Giả sử đã có tồn tại một ánh xạ ẩn như vậy. Chúng ta có ngay công thức tính đạo hàm toàn phần

$$D_x F(x,y) + D_y F(x,y)\frac{Df(x)}{Dx} \equiv 0.$$

Từ đó suy ra ngay công thức tính đạo ánh của ánh xạ ẩn. Để chứng minh sự tồn tại ánh xạ ẩn $f(x)$, chúng ta nhận xét rằng ánh xạ

$$\tilde{F}(x,y) := (x, F(x,y))$$

sẽ là một đồng phôi từ $\mathbf{R}^{n+m}$ vào chính nó. Ma trận Jacobi của $\tilde{F}$

$$Jac_{(x,y)}\tilde{F}(x,y) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline D_x F(x,y) & D_y F(x,y) \end{array}\right].$$

là khả nghịch cho nên theo định lí ánh xạ ngược tồn tại ánh xạ ngược của $\tilde{F}$. Thành phần thứ nhất của $\tilde{F}$ là ánh xạ đồng nhất cho nên thành phần thứ hai của ánh xạ ngược $\tilde{F}^{-1}$ xác định ánh xạ f cần tìm.

□

6.5 Bó các hàm trơn

Từ Định lý ánh xạ ẩn ta suy ra: với mỗi điểm (x, y) là nghiệm của hệ $F(x, y) = 0$ luôn tồn tại một lân cận mở U của điểm x và một lân cận mở V của điểm y sao cho $f : U \to V$ là một ánh xạ trơn.

Định nghĩa 6.5.1 Hàm $\varphi : (x, y) \mapsto \varphi(x.y) \in \mathbf{C}$ trên tập nghiệm M của hệ phương trình $F(x, y) = 0$ thoả mãn điều kiện trong định lý hàm ẩn $Jac_y(F) = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]$ là khả nghịch, được gọi là *trơn* nếu hợp của nó với $f : U \to V$ là một hàm trơn trên U. Kí hiệu $C^\infty(U)$ là tập tất cả các hàm trơn trên lân cận U của điểm x trên tập nghiệm M.

Mệnh đề 6.5.2 *Hàm φ là trơn khi và chỉ khi $\varphi \circ \xi$ là trơn trong $\xi(U)$ với mọi phép vi phôi $\xi : U \to U$. Nói một cách khác khái niệm hàm trơn không phụ thuộc vào việc chọn hệ tọa độ địa phương $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$.*

Định lí 6.5.3 *Các tập mở U trong định lí ánh xạ ẩn lập thành một phủ mở của tập nghiệm. Các đại số $C^\infty(U)$ có các tính chất bó sau đây:*

1. *Tồn tại ánh xạ hạn chế $r : C^\infty(U) \twoheadrightarrow C^\infty(U_1)$, nếu U_1 là tập con trong U.*

2. *Nếu $U = \cup U_\alpha$ thì có dãy khớp*

$$0 \longrightarrow C^\infty(U) \longrightarrow \prod_\alpha C^\infty(U_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha,\beta} C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Chứng minh. Mệnh đề thứ nhất là hệ quả trực tiếp của định lý hàm ẩn. Mệnh đề thứ hai cũng được suy ra từ đó vì khi điểm x thuộc giao của hai lân cận địa phương trong định lí hàm ẩn thì chúng phải là xác định duy nhất trên giao. $\square$

Định nghĩa 6.5.4 *Một hàm trên tập nghiệm M của hệ phương trình $F(x, y) = 0$ với $Jac_y(F) = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]$ là khả nghịch, được gọi là trơn* nếu hạn chế của nó lên các tập mở trong phủ nói trên là các hàm trơn và thoả mãn tính chất bó. Kí hiệu $C^\infty(M)$ là *bó các đại số* các hàm trơn nói trên. Nó được gọi là *bó cấu trúc* của M.

Định nghĩa 6.5.5 Nếu M là tập nghiệm của hệ phương trình $F(x, y) = 0$ thoả mãn điều kiện có ma trận Jacobi trên các điểm thuộc tập nghiệm, có hạng không đổi $r = rank(Jac(F)(x, y)$ thì cặp $(M, C^\infty(M))$ được gọi là một *đa tạp* và $C^\infty(M)$ được gọi là *bó cấu trúc* .

Ví dụ.

1. Vòng tròn đơn vị có thể xem là hợp của hai tập mở $U_1 = \mathbf{S}^1 \setminus \{N\}$ trong đó N là điểm cực bắc, $U_2 = \mathbf{S}^1 \setminus \{S\}$ với S là điểm cực nam.

$$C^\infty(U_1) \cong C^\infty(U_2) \cong C^\infty(\mathbf{R}).$$

   Dễ viết một cách tường minh công thức đổi biến từ U_1 sang U_2 và ngược lại (!). Bó cấu trúc của $\mathbf{S}^1$ là các hàm trơn trên toàn bộ vòng tròn đơn vị.

2. Xuyến hai chiều $\mathbf{T} = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ có thể chia thành hợp của các tập mở đồng phôi với $\mathbf{R}^2$: $U_{11} = (\mathbf{S}^1 \setminus \{N\}) \times (\mathbf{S}^1 \setminus \{N\}), U_{12} = (\mathbf{S}^1 \setminus \{N\}) \times (\mathbf{S}^1 \setminus \{S\}), U_{21} = (\mathbf{S}^1 \setminus \{S\}) \times (\mathbf{S}^1 \setminus \{N\}), U_{22} = (\mathbf{S}^1 \setminus \{S\}) \times (\mathbf{S}^1 \setminus \{S\})$. Mỗi $C^\infty(U_i) \cong C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Chúng được xếp lại với nhau một cách tự nhiên, sau này sẽ thấy là "định hướng".

3. Lá Möbius có thể xem là hợp của hai bản đồ địa phương $U_1 = L \setminus (I \times \{0\}), U_2 = L \setminus (\{0\} \times I)$. Chúng được xếp lại một cách "không định hướng". Mặc dù các bó hàm trơn địa phương đều là $C^\infty(\mathbf{R}^2)$.

4. Không gian xạ ảnh $\mathbf{RP}^n$ là không gian các đường thẳng qua gốc tọa độ trong $\mathbf{R}^{n+1}$. Bằng cách tọa độ hoá, $\mathbf{RP}^n$ là tập các điểm trong R^{n+1} với toạ độ thuần nhất $(x_0 : x_1 : .... : x_n)$ theo nghĩa, mỗi bộ toạ độ đó là một lớp tương đương $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$ khi và chỉ khi tồn tại một số $k \neq 0$ để $x'_i = kx_i, i = \overline{1, n}$. Do vậy có phủ mở là không gian con các bộ toạ độ thuần nhất với số 1 ở một vị trí thứ i.

$$\mathbf{RP}^n = \cup U_i, \quad U_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n), x_i = 1\}.$$

   Đây là hệ phương trình trong toạ độ địa phương. Mỗi $U_i \sim \mathbf{R}^n$. Nên bó cấu trúc có dạng $C^\infty(U_i) \cong C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

5. Tương tự, không gian xạ ảnh phức $\mathbf{CP}^n$ là một đa tạp.

6. Chai Klein là hai lá Möbius đồng nhất hai biên tương ứng với nhau. Mỗi bó hàm trơn địa phương cũng là $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ nhưng toàn cục chúng được sắp xếp rất không định hướng.

Theo định lí ánh xạ ẩn, có tồn tại một hệ các hàm tọa độ cong trên mỗi tập mở trong không gian nghiệm, đồng phôi với $\mathbf{R}^{n-r}$

Định nghĩa 6.5.6 *Nếu $\varphi : \mathbf{R}^{n-r} \to U \subseteq M$ là một vi phôi xây dựng theo định lí hàm ẩn thì ảnh của hệ tọa độ tuyến tính trong U là các đường cong mà phương tiếp tuyến luôn lập thành cơ sở. Khi đó ta nói là ta có một bản đồ toạ độ địa phương $(U, x^1, \ldots, x^{n-r})$.*

Nhận xét 6.5.7 *Nhận xét rằng hệ $(x^1, \dots, x^n)$ là một hệ sinh của đại số hàm trơn $C^\infty(U)$ theo nghĩa hàm, tức là mọi hàm khác đều là hợp của các hàm này với một hàm nào đó trên U.*

Nhận xét 6.5.8 *Hệ các bản đồ toạ độ địa phương lập thành một phủ mở của đa tạp nghiệm. Cấu trúc vi phân được xác định bởi tính chất của đại số các hàm trơn $C^\infty(U)$ và các hàm chuyển tọa độ. Trên thực tế theo phương pháp đại số, bó các nhát cắt toàn cục, tức là các hàm trơn toàn cục xác định cấu trúc vi phân.*

6.6 Bài tập củng cố lý thuyết

1. Tìm hàm số có mọi đạo hàm riêng liên tục nhưng không khả vi tại một điểm.

2. Tìm ví dụ hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại số đếm được các điểm.

3. Cho hàm số $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, xác định bởi công thức
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{với } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{với } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Chứng minh rằng f khả vi tại điểm $(0,0)$ nhưng các đạo hàm riêng $D_x f$, $D_y f$ gián đoạn tại $(0,0)$.

4. Dùng hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, xác định bởi công thức
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$
Hãy chứng minh rằng giả thiết liên tục trong định lí ánh xạ ẩn là không thể bỏ đi được.

5. Giả sử rằng ánh xạ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ là khả vi và có ánh xạ ngược f^{-1} cũng khả vị Chứng tỏ rằng
$$(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1};$$
nói một cách khác, nếu ánh xạ cho bởi $y = f(x)$, thì
$$\frac{Dx}{Dy} = \left[\frac{Dy}{Dx}\right]^{-1}.$$

Chương 7

Đa tạp khả vi

Với phép toán vi phân, chúng ta có thể nghiên cứu nhiều tính chất của đa tạp: trước hết chúng ta có thể định nghĩa một cách chính xác khái niệm đa tạp, đa tạp con, đa tạp thương, phân thớ tiếp xúc, phân thớ đối tiếp xúc, v.v.... Tôpô các đa tạp được nghiên cứu trong những năm gần đây. Trong chương này chúng ta sẽ chỉ giới thiệu một vài thành tựu đáng kể.

7.1 Định nghĩa. Ví dụ

Trong phần cuối chương trước chúng ta đã đi đến một sự kiện là tập nghiệm của một hệ phương trình hàm có thể xem như là một đa tạp mà mỗi điểm đều có một lân cận mở vi phôi với $\mathbf{R}^n$. Điều này dẫn đến một khái niệm tổng quát là đa tạp, đối tượng nghiên cứu của hình học vi phân.

Định nghĩa 7.1.1 *Giả sử M là một không gian tôpô Hausdorff khả ly Nếu trên M có tồn tại một phủ mở bởi các tập mở $U_\alpha, \alpha \in I$ và với mỗi $\alpha \in I$ tồn tại một vi phôi $\varphi_\alpha : \mathbf{R}^n \to U_\alpha$. Ta nói mỗi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ là một bản đồ toạ độ địa phương. Ảnh của một hệ toạ độ Descartes là một hệ các đường cong có tiếp tuyến trực giao, được gọi là hệ toạ độ địa phương và kí hiệu đơn giản là $(x^1, \dots, x^n)$. Giả sử các bản đồ địa phương tương thích với nhau theo nghĩa sau:*

> *Với mọi điểm trên phần giao $U_\alpha \cap U_\beta$, mọi ánh xạ $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$:*
>
> $$\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbf{R}^n \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\varphi_\beta^{-1}} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbf{R}^n$$
>
> *là khả vi (trơn).*

Khi đó ta nói rằng tập bản đồ lập thành một tập bản đồ khả vi (trơn). Hai tập bản đồ trơn được coi là tương đương nhau nếu hợp của chúng lại là một tập bản đồ trơn. Một lớp tương đương của một tập bản đồ trơn được gọi là một cấu trúc trơn. Một không gian tôpô M cùng với một cấu trúc trơn được gọi là một đa tạp khả vi (trơn).

Nhận xét 7.1.2 *Khái niệm về cấu trúc trơn cho ta một định nghĩa rất cấu trúc cho khái niệm đa tạp. Rất tiếc là khái niệm đã đưa đến những điều kịch tính không ngờ tới.*

Định lí 7.1.3 (Luận án Tiến sĩ của J. Milnor) [1] *Trên mặt cầu $\mathbf{S}^7$ có đúng 28 cấu trúc trơn không tương đương nhau.*

Kịch tính hơn nữa ta có thể kể tới một định lí phân loại cấu trúc trơn trên $\mathbf{R}^4$. [2]

Định lí 7.1.4 *Trên $\mathbf{R}^n$, $n \neq 4$ chỉ có duy nhất một cấu trúc trơn thông thường. Trên $\mathbf{R}^4$ có continuum các cấu trúc trơn không tương đương vi phôi với nhau.*

Lý do vì đâu có hiện tượng lạ kì đó? Toán học chưa có câu trả lời thật xác đáng!

7.2 Ánh xạ trơn giữa các đa tạp

Định nghĩa 7.2.1 *Giả sử ta có một ánh xạ $f : M \to N$ giữa hai đa tạp khả vi $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I})$ và $(N, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in J})$. Ta nói rằng ánh xạ f là khả vi (trơn), nếu với mọi $\alpha \in I$ và $\beta \in J$, $\psi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha$ là các ánh xạ trơn.*

Nhận xét 7.2.2 *Từ định nghĩa trên ta thấy, một ánh xạ là trơn khi và chỉ khi các hàm đổi tọa độ địa phương là các ánh xạ khả vi.*

Mệnh đề 7.2.3 *Mỗi hệ toạ độ địa phương xác định một ánh xạ khả vi từ $\mathbf{R}^n$ vào đa tạp M.*

[1] J. Milnor là một nhà đại số rất lớn. Tuy nhiên ông ta đã bắt đầu sự nghiệp bằng luận án tuyệt vời về tôpô học. Kết qủa này thường được nhắc tới như một kì quan chiêm nghiệm toán học

[2] Một trong những người có đóng góp đáng kể và sáng giá nhất là Donaldson, làm được trong thời gian làm nghiên cứu sinh ở Oxford. Anh ta đã được giải thưởng Fields nhờ kết quả này

Chứng minh. Xem ánh xạ tọa độ như một ánh xạ giữa đa tạp $\mathbf{R}^n$ và M, khi đó mỗi hệ tọa độ địa phương đều có hàm chuyển là ánh xạ trơn cho nên chúng liên hệ với nhau một cách trơn. □

Định nghĩa véctơ tiếp xúc với đa tạp tại $x \in M$ là các véctơ $\frac{\partial}{\partial x^i} := (\varphi_\alpha)_* \mathbf{e}_i$, trong đó

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Giả sử $\varphi : X \to Y$ là một ánh xạ trơn giữa hai đa tạp, $x \in X, y = \varphi(x) \in Y$. Nếu $x(t)$ là một đường cong trong X đi qua điểm x, $x(0) = x$ thì $\varphi(x(t))$ là đường cong trong Y, đi qua y. Do đó có véctơ tiếp xúc

$$T_x\varphi(\xi) := \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(x(t)).$$

Tương ứng này xác định một *đạo ánh*

$$D\varphi = T_x(\varphi) : T_xX \to T_yY.$$

Đạo ánh là một ánh xạ tuyến tính, do vậy ánh xạ đối ngẫu

$$T_x^*(\varphi) : T_y^*Y \to T_x^*X$$

cũng là một ánh xạ tuyến tính.

Định lí 7.2.4 (Vi phôi địa phương) *Các mệnh đề sau đây là tương đương:*

1. *Ánh xạ $\varphi : X \to Y$ là một vi phôi địa phương.*
2. *Đạo ánh $T_x(\varphi) : T_x \to T_yY$ là một đẳng cấu.*
3. *Ánh xạ đối ngẫu $T_x^*(\varphi) : T_y^*Y \to T_x^*X$ là một đẳng cấu.*

Chứng minh. Sử dụng Định lí ánh xạ ngược. □

7.3 Phân thớ tiếp xúc, đối tiếp xúc

7.3.1 Không gian tiếp xúc. Phân thớ tiếp xúc

Trong lân cận toạ độ của mỗi điểm $x \in X$ trên đa tạp X, mọi không gian tiếp xúc T_xX là đẳng cấu tuyến tính với nhau. Bởi thế nên ta có thể xây dựng một đồng phôi tự nhiên

$$(\varphi, Jac(\varphi)) : W \times \mathbf{R}^n \to \cup_{x \in U} T_xU$$

như là các tập mở trong $\mathbf{R}^{2n}$.

Mệnh đề 7.3.1 *Không gian*

$$TX := \bigcup_{x \in X} T_xX$$

có cấu trúc của một đa tạp trơn.

Chứng minh. Giả sử $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ là tập bản đồ địa phương, xác định cấu trúc đa tạp. Khi ta thay đổi toạ độ địa phương từ bản đồ $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sang bản đồ (U_β, φ_β), trên miền giao $U_\alpha \cap U_\beta$ ta có phép biến đổi toạ độ trơn giữa các toạ độ theo công thức đạo ánh của ánh xạ hợp: $(x, \xi(x)) \mapsto (y, \eta(y))$, với $y = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x)$ và

$$\eta(y(x)) = Jac_x(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)\xi(x).$$

$\square$

Nhận xét 7.3.2 *Phép chiếu tự nhiên từ TX lên X cho tương ứng mỗi véctơ tiếp xúc với điểm gốc của nó cho ta một ánh xạ trơn giữa các đa tạp $p : TX \to X$*

Định nghĩa 7.3.3 *Bộ ba (TX, p, X) được gọi là phân thớ tiếp xúc với đa tạp X. Mỗi ánh xạ trơn $s : X \to TX$ cho tương ứng với mỗi điểm $x \in X$ một véctơ tiếp xúc $\xi(x) \in T_xX$, tức là $p \circ s = Id_X$ được gọi là một trường véctơ trơn trên đa tạp X.*

Ví dụ. Giả sử điểm x có toạ độ địa phương là $(x^1, \dots, x^n)$ Ta kí hiệu $\frac{\partial}{\partial x^i}$ là ảnh cuả véctơ $\mathbf{e}_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i^{th}}, \dots, 0)$.

Chúng ta có quy tắc đổi biến theo đạo hàm cuả hàm hợp:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Nhận xét 7.3.4 *Tại mỗi điểm cuả đa tạp, các trường véctơ $\frac{\partial}{\partial x^i}$ là ảnh đẳng cấu cuả cơ sở trực chuẩn $\mathbf{e}_i, i = \overline{1,n}$. Bởi vậy chúng độc lập tuyến tính, và một véctơ tiếp xúc bất kì được phân tích thành tổ hợp tuyến tính theo chúng. Dạng tổng quát của một trường véctơ viết trong toạ độ địa phương là*

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Chúng ta kí hiệu không gian vétơ các trường véctơ trơn trên đa tạp X là $Vect(X)$.

7.3.2 Không gian đối tiếp xúc. Phân thớ đối tiếp xúc

Định nghĩa 7.3.5 *Giả sử X là một đa tạp trơn, $x \in X$ là một điểm tuỳ ý, T_xX là không gian tiếp xúc với đa tạp tại điểm x. Chúng ta kí hiệu $T^*_xX = Hom_{\mathbf{R}}(T_xX, \mathbf{R})$ là không gian đối ngẫu với không gian véctơ T_xX và gọi là không gian đối tiếp xúc .*

Nhận xét 7.3.6 *Khái niệm không gian tiếp xúc không phụ thuộc vào việc chọn hệ toạ độ địa phương, tức là một khái niệm hình học. Do vậy không gian đối tiếp xúc cũng là một khái niệm hình học.*

Nhận xét 7.3.7 *Trong một lân cận toạ độ địa phương của mỗi điểm x trên đa tạp, các không gian đối tiếp xúc là đẳng cấu với nhau và đẳng cấu tuyến tính với không gian Euclide n-chiều $\mathbf{R}^n$.*

Bởi thế nên chúng ta có đồng phôi

$$(\varphi, Jac_x(\varphi^{-1})^*) : W \times \mathbf{R}^n \xrightarrow{\approx} \textstyle\bigcup_{x\in U} T^*_xU$$

như là các tập mở vi phôi trong $\mathbf{R}^{2n}$.

Mệnh đề 7.3.8 *Không gian*

$$T^*X = \bigcup_{x\in X} T^*_xX$$

có cấu trúc đa tạp trơn.

Chứng minh. Giả sử $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ là tập bản đồ địa phương, xác định cấu trúc đa tạp. Khi ta thay đổi hệ toạ độ địa phương từ bản đồ $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sang bản đồ (U_β, φ_β), thì trên phần giao của chúng, ta có phép biến đổi trơn giữa các toạ độ theo công thức vi phân của hàm hợp. □

Nhận xét 7.3.9 *Phép chiếu tự nhiên từ T^*X lên X cho tương ứng mỗi véctơ đối tiếp xúc với điểm gốc của nó cho ta một ánh xạ trơn giữa các đa tạp $p : T^*X \to X$*

Định nghĩa 7.3.10 *Bộ ba (T^*X, p, X) được gọi là phân thớ đối tiếp xúc với đa tạp X. Mỗi ánh xạ trơn $\omega : X \to T^*X$ cho tương ứng với mỗi điểm $x \in X$ một véctơ đối tiếp xúc $\xi(x) \in T_xX$, tức là $p \circ s = Id_X$ được gọi là một 1-dạng vi phân trơn trên đa tạp X.*

Ví dụ. Giả sử điểm x có toạ độ địa phương là $(x^1, \dots, x^n)$ Ta kí hiệu dx^i là cơ sở trong T_x^*X, đối ngẫu của cơ sở $\frac{\partial}{\partial x^i}$ trong T_xX.

Chúng ta có quy tắc đổi biến theo vi phân cuả hàm hợp:

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i.$$

7.4 Đa tạp con. Đa tạp thương.

7.4.1 Điều kiện dìm và điều kiện ngập

Định lí 7.4.1 (Điều kiện dìm) *Giả sử $\varphi : X \to Y$ là một ánh xạ trơn giữa hai đa tạp, khi đó các điều kiện sau là tương đương nhau:*

1. *$T_x(\varphi) : T_xX \to T_yY$ là một đơn cấu.*

2. *Tồn tại một lân cận mở U chứa x trong X, một lân cận mở V của y trong Y, và một lân cận mở W của 0 trong $\mathbf{R}^{n-m}$ và một vi phôi $\psi : V \to U \times W$ sao cho*

   (a) *$\varphi(U) \subset V$,*

   (b) *Sơ đồ sau đây là giao hoán*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times W & = & U \times W \end{array}$$

3. *Tồn tại bản đồ địa phương $\tilde{U}$ với toạ độ $x^1, \dots, x^n$ trong lân cận điểm x và toạ độ địa phương $y^1, \dots, y^m$ trong lân cận điểm $y = \varphi(x)$ sao cho*

$$y^i \circ \varphi = x^i, \forall i = \overline{1, m},$$

$$y^i \circ \varphi = 0, \forall i = \overline{m+1, n}.$$

4. *Tồn tại lân cận mở U của điểm x và lân cận mở V của điểm y, và một ánh xạ trơn $\sigma : V \to U$ sao cho $\varphi(U) = V$, $\sigma \circ \varphi = Id_U$..*

Chứng minh. Chúng ta chứng minh định lí theo sơ đồ sau:

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (1).$$

Các mệnh đề $(2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (1)$ là hiển nhiên. Bây giờ ta chứng minh $(1) \Longrightarrow (2)$. Ta định nghĩa $\varphi' : X \times W \to Y \cap V \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ theo công thức $\varphi'(x, w = \varphi(x) + w$, trong đó V là một lân cận mở đủ nhỏ trong Y, $W = \mathbf{R}^{n-m}$, $T_{(x,w)}\varphi' = T_x\varphi \times Id$ là đơn cấu theo (1), nên φ' là vi phôi địa phương. Vậy $\psi = \varphi'^{-1}$ chính là ánh xạ cần tìm. □

Định nghĩa 7.4.2 *Ánh xạ thoả mãn một trong các điều kiện tương đương trên được gọi là ánh xạ chính qui.*

Định nghĩa 7.4.3 *Đa tạp $X \subseteq Y$ được gọi là đa tạp con trong Y, nếu phép nhúng tự nhiên $X \hookrightarrow Y$ là ánh xạ chính quy giữa hai đa tạp.*

Nhận xét 7.4.4 *Đa tạp con X trong Y luôn là đóng địa phương trong Y.*

Định lí 7.4.5 (Điều kiện ngập) *Giả sử $\varphi : X \to Y$ là một ánh xạ trơn giữa hai đa tạp, khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

1. *$T_x(\varphi) : T_xX \to T_yY$ là một toàn cấu.*

2. *Tồn tại một lân cận mở U của x trong X, một lân cận mở V của y trong Y, và một lân cận mở W của 0 trong $\mathbf{R}^{m-n}$ và một vi phôi $\psi : V \to U \times W$ sao cho*

   (a) $\varphi(V) \supset U$,

   (b) Sơ đồ sau đây là giao hoán

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & U \\ U \times W \arrow[r, equal] & U \times W \arrow[u] \end{tikzcd}$$

3. *Tồn tại bản đồ địa phương $\tilde{U}$ với toạ độ $x^1, \ldots, x^n$ trong lân cận điểm x và toạ độ địa phương $y^1, \ldots, y^m$ trong lân cận điểm $y = \varphi(x)$ sao cho*

$$y^i \circ \varphi = x^i, \forall i = \overline{1, n}.$$

4. *Tồn tại lân cận mở U của điểm x và lân cận mở V của điểm y, và một ánh xạ trơn $\sigma : V \to U$ sao cho $\varphi(U) = V$, $\varphi \circ \sigma = Id_V$..*

Định nghĩa 7.4.6 *Ánh xạ thoả mãn một trong các điều kiện tương đương trên được gọi là ánh xạ đối chính qui hay phép ngập.*

Định nghĩa 7.4.7 *Đa tạp $Y \supseteq X$ được gọi là đa tạp thương của đa tạp X, nếu phép chiếu tự nhiên $X \twoheadrightarrow Y$ là ánh xạ đối chính quy giữa hai đa tạp.*

7.4.2 Cấu trúc vi phân cảm sinh

Định lí 7.4.8 *Giả sử X là một không gian tôpô, Y là một đa tạp trơn, $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục. Khi đó hai mệnh đề sau là tương đương:*

1. *Trên X có thể xây dựng một cấu trúc vi phân (duy nhất) để f là một ánh xạ chính quy*

2. *Với mọi $x \in X$ và với mọi tập mở $U \subseteq \mathbf{R}^m$ thỏa mãn $x \in \varphi(U) \subseteq X$, luôn tồn tại tập mở V trong $\mathbf{R}^n$ và bản đồ $\psi : \mathbf{V} \to Y$ trong Y sao cho :*

   (a) $f\varphi(U) \subseteq \psi(V)$,

   (b) $\psi^{-1} f\varphi(U)) = \mathbf{R}^m \cap U$

Chứng minh. (1) $\Longrightarrow$ (2) là hiển nhiên theo định nghĩa ánh xạ chính quy.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Chọn một phủ mở $\{\varphi_\alpha(U_\alpha)\}$ của X sao cho với mọi α, tồn tại một bản đồ $\psi_\alpha : \mathbf{R}^n \to V_\alpha \subseteq Y$ sao cho

(a) $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$, $f : U_\alpha \to f(U_\alpha)$ là đồng phôi,

(b) $\psi^{-1} f(U_\alpha) = \mathbf{R}^m \cap V_\alpha$.

□

Nhận xét 7.4.9 *Cấu trúc vi phân cảm sinh trên X để f trở thành ánh xạ chính quy, nếu nó tồn tại, là duy nhất.*

7.4.3 Định lí Godeman

Giả sử X là một đa tạp trơn, $R \subseteq X \times X$ là một quan hệ tương đương. Kí hiệu X/R là tập các lớp tương đương theo quan hệ R và kí hiệu $p : X \twoheadrightarrow X/R$ là phép chiếu tự nhiên. Trang bị cho X/R *tôpô thương* như sau:

$\bar{U} \subseteq X/R$ là mở khi và chỉ khi $p^{-1}(U)$ là mở trong X

Nhận xét 7.4.10 *Nếu trên X có cấu trúc đa tạp để phép chiếu $p : X \to X/R$ là đối chính quy thì cấu trúc đó là duy nhất.*

Định nghĩa 7.4.11 *Cấu trúc đa tạp trơn trên X/R để phép chiếu $p : X \to X/R$ là đối chính quy được gọi là cấu trúc đa tạp thương của X theo quan hệ R.*

Sự tồn tại cấu trúc đa tạp thương như vậy dựa trên định lí sau đây.

Định lí 7.4.12 (Định lí Godeman về đa tạp thương) *X/R là đa tạp trơn khi và chỉ khi $R \subseteq X \times X$ là một đa tạp con và phép chiếu lên thành phần thứ hai $pr_2 : R \to X$ là đối chính quy.*

Chúng ta bỏ qua chứng minh định lí này.

7.4.4 Ví dụ

1. Đồ thị của hàm $y = \sin(\frac{1}{x}), 0 < x < 1$ là đa tạp con trong $\mathbf{R}^2$ nhưng hợp của nó với đoạn giới hạn $I = \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ không là đa tạp con.

2. Trong mặt phẳng $E^2 \approx \mathbf{R}^2$ xét đường thẳng qua gốc toạ độ, nghiêng với trục hoành một góc vô tỉ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Ảnh của nó trong xuyến $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ là một đường cong trù mật trên xuyến và không thể thoả mãn điều kiện chính qui.

3. Mặt cầu

$$\mathbf{S}^n = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n); x^i \in \mathbf{R}, \sum_{i=0}^{n} (x^i)^2 = 1\}$$

có thể xem là không gian thương của nhóm các ma trân trực giao $SO(n+1, \mathbf{R})$ theo nhóm con gồm các ma trân trực giao bảo toàn một điểm trên mặt cầu, đẳng cấu với $SO(n, \mathbf{R})$. Nhóm $SO(n, \mathbf{R})$ cho ta một quan hệ tương đương đóng ứng với tôpô mặt cầu. Cho nên mặt cầu trở thành một đa tạp, như đã biết.

7.5 Tôpô các đa tạp

Một trong những bài toán thú vị là bài toán phân loại đa tạp.

Các kết quả đẹp đẽ sau đây được chứng minh:

Định lí 7.5.1 *Mỗi đa tạp 1-chiều liên thông compắc đều vi phôi với* $[0,1] \subset \mathbf{R}^1$*, hoặc vòng tròn* $\mathbf{S}^1$*. Các đa tạp không compắc thu được từ chúng bằng cách vứt bỏ một số điểm.*

Định lí 7.5.2 *Mỗi đa tạp 2-chiều compắc không biên liên thông đều vi phôi với một trong các mặt thu được bằng cách gắn k mặt trụ, xoắn mỗi mặt một số vòng và gắn l lá Möbius , vào mặt cầu* $\mathbf{S}^2$ *được khoét đi* $2k+l$ *lỗ thủng. Các đa tạp không compắc thu được từ đó bằng cách bỏ đi một số điểm.*

Một vấn đề của toán học đương thời: Có hay không một cách làm tương tự cho các đa tạp 3-chiều. Bằng cách làm tương tự như trên với hình cầu và hình trụ, người ta cũng thu được đủ nhiều đa tạp 3 chiều Nhưng rất tiếc là lý thuyết tôpô các đa tạp 3-chiều chỉ ra là lý thuyết còn xa mới tới một phân loại tương tự như trên.

7.6 Bài tập củng cố lý thuyết

1. Hãy viết tên của mình bằng các chữ cái IN HOA KHONG CHAN không dấu. Có những chữ cái nào là đa tạp, đa tạp đóng, đa tạp có biên.

2. Mặt nón $C : \sum_{i=1}^{q}(x^i)^2 - \sum_{j=1}^{q}(y^j)^2 = 0$ trong $\mathbf{R}^{p+q}$ không là đa tạp con. Vì sao?

3. Chứng minh rằng hình hộp đóng không là đa tạp con trong $\mathbf{R}^n$.

4. Chứng minh rằng tích Tchikhonov của các đa tạp trơn, nói chung không là đa tạp trơn.

5. Không gian $\{(x^1,\dots,x^n); x^i \in \mathbf{R}, x^i \neq x^j \ ;\forall i \neq j\}$ là một đa tạp tìm số chiều của nó. Tìm không gian tiếp xúc với nó tại một điểm.

6. Tìm không gian tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm và không gian tiếp xúc với lá Möbius tại một điểm.

7. Chứng minh rằng mặt trụ
$$\sum_{i=1}^{n-1}(x^i)^2 = 1$$
trong $\mathbf{R}^n$ là một đa tạp. Hãy tìm phân thớ tiếp xúc.

7.7 Sơ lược về hình học Riemann tổng quát

Hình học Riemann được xem như lý thuyết đa tạp mà tại mỗi không gian tiếp xúc có một metric Euclide, tức là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương trên các không gian tiếp xúc.

Với cấu trúc như vậy, người ta nghiên cứu các bài toán tương tự như lí thuyết đường và lý thuyết mặt ở trên. Bài toán tìm các mặt tích phân có các không gian tiếp xúc cho trước là việc nghiên cứu các hệ vi phân tổng quát. Bài toán các mặt cực tiểu theo phiếm hàm thể tích là một trong những bài toán thú vị trong trường hợp nhiều chiều.

Bài toán phân loại các đa tạp Riemann là bài toán rất khó. Ví dụ đơn giản là nó chứa nhiều bài toán hóc búa như bài toán Poincare : Đa tạp đơn liên đồng luân với mặt cầu có phải là đồng phôi với mặt cầu hay không.

Đa tạp Riemann thường được dùng làm không gian ràng buộc của chuyển động. Mô hình chuyển động của các chất điểm xem như mô hình đường cong trên đa tạp Riemann. Mô hình gần đây nhất của các chuyển động có đối xứng trong là lý thuyết sợi dây (string theory), có mô hình là các mặt hai chiều trên đa tạp Riemann n chiều.

7.8 Sơ lược về hình học symplectic tổng quát

Nếu trên các không gian tiếp xúc ta cho các tích vô hướng phản xứng không suy biến, ta có đối tượng mới là đa tạp symplectic. Hình học các đa tạp symplectic được nghiên cứu khá nhiều vì lí do ứng dụng của nó cho hình thức luận Hamilton cho các hệ cơ học.

Hình học symplectic được dùng làm không gian pha cho các hệ cơ học chuyển động. Trên thực tế mỗi chuyển động được đặc trưng bằng hai đại lượng: vị trí và xung lượng (khối lượng nhân với tốc độ). Giữa các biến vị trí $q^i = x^i$ và biến xung lượng $p_j = m\frac{dx^j}{dt}$ có các hệ thức không xác định theo moóc Poisson

$$\{p_i, q^j\} = m\delta_i^j.$$

Đó chính là các hệ thức xác định cấu trúc symplectic trên phân thớ đối tiếp xúc.

Tài liệu tham khảo

[1] **H. Cartan**, Phép tính vi phân.Dạng vi phân (Bản dịch tiếng Việt), NXB ĐH & THCN, 1981.

[2] **Nguyễn Thúc Hào**, Hình học vi phân, NXB Giáo dục, 1968.

[3] **Đoàn Quỳnh**, Hình học vi phân, NXB Giáo dục, 1989.

[4] **M. Spivak**, Giải tích trên đa tạp (Bản dịch tiếng Việt), NXB ĐH & THCN, 1985.

Chỉ mục