MỤC LỤC

Chương 1

LÝ THUYẾT PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

§1. MỞ ĐẦU

Khi dùng toán học để nghiên cứu các bài toán tự nhiên, kỹ thuật không phải bao giờ cũng tìm hàm cần xác định thông qua các phương trình đại số hay phương trình siêu việt mà nhiều khi ta phải tìm hàm thông qua các mối liên hệ giữa biến số độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm hay vi phân của nó.

Từ đó đòi hỏi toán học phải nghiên cứu một lớp phương trình mới được gọi là phương trình vi phân.

1.1. Định nghĩa: *Phương trình mà trong đó chứa các biến số độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm (hay vi phân) của nó được gọi là một phương trình vi phân.*

Ví dụ: $\dfrac{dy}{dx} + 5x\sin x = 0$

$$y''' + 5yy'' = 0$$

Ta phân biệt phương trình vi phân thường là phương trình mà trong đó hàm phải tìm chỉ phụ thuộc một biến số độc lập.

Phương trình đạo hàm riêng là phương trình mà hàm phải tìm phụ thuộc ít nhất hai biến số:

Ví dụ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sin x.\sin t \qquad u = u(x,t)$

1.2. Ý nghĩa cơ học và vật lý của phương trình vi phân

Bài toán: Xét chuyển động rơi tự do trong chân không của một vật có khối lượng m. Hãy tìm quy luật chuyển động.

Chọn hướng oy như hình vẽ.

Theo cơ học nếu gọi quãng đường là y thì gia tốc của vật là $w = \frac{d^2y}{dt^2}$. Mặt khác ta biết rằng vật rơi tự do trong chân không có gia tốc không đổi là $g = 9,8\,(m/s^2)$. Do cách chọn trục oy ta có: $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$.

Giải phương trình ta có: $y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$. Trong đó: $C_1 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0$ (vận tốc ban đầu), $C_2 = (y)_{t=0} = y_0$ (độ cao ban đầu).

Qua ví dụ trên ta thấy:

- Nghiệm của phương trình vi phân chứa các hằng số tuỳ ý (số lượng tuỳ theo cấp của phương trình).
- Muốn xác định các hằng số thì ta phải biết được các điều kiện ban đầu của phương trình.

1.3. Cấp của phương trình vi phân

Phương trình $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ có chứa đạo hàm cấp 1 là phương trình vi phân cấp 1 (phương trình nhất thiết phải chứa đạo hàm cấp 1).

Phương trình $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2})$ có chứa đạo hàm cấp 2 là phương trình vi phân cấp 2 (Nhất thiết phải chứa đạo hàm cấp 2).

Một cách tổng quát: Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình.

Chẳng hạn $F(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$ là phương trình vi phân cấp *n*, ở đây nhất thiết phải có mặt $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Đối với phương trình vi phân cấp n thông thường ta tìm nghiệm dưới dạng $y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ chứa n hằng số tuỳ ý được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình. Nếu cho $C_1, C_2, ..., C_n$ những giá trị cụ thể ta sẽ được nghiệm riêng của phương trình.

1.4. Ý nghĩa hình học của phương trình vi phân cấp 1

Xét phương trình:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1.4)$$

Với giả thiết hàm $f(x, y)$ xác định và liên tục trong miền $G \subset R^2$. Nếu $y = \phi(x)$ là nghiệm của (1.4) thì đường cong có phương trình $y = \phi(x)$ gọi là đường cong tích phân của phương trình vi phân (1.4). Ta xét xem đường cong tích phân đó có tính chất gì ?.

Trên mặt phẳng R^2 qua mỗi điểm $M(x, y) \in G$ vẽ một đoạn thẳng làm với trục ox một góc α sao cho $tg\alpha = f(x, y)$.

Khi đó tập hợp mọi điểm của G mà tại mỗi điểm có xác định đoạn thẳng như trên được gọi là một HƯỚNG TRƯỜNG. Khi đó trong G đường cong tích phân có tính chất là nó phải tiếp xúc với HƯỚNG TRƯỜNG tại mọi điểm của nó.

Như vậy: Ý nghĩa hình học của việc lấy tích phân phương trình (1.4) là hãy vẽ đường cong $y = \phi(x)$ sao cho hướng của tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó trùng với hướng của hướng trường tại điểm ấy.

§2. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I

Xét phương trình $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ (2.1)

Khi đó bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ của (2.1) sao cho khi $x = x_0$ thì $y = y_0$ được gọi là bài toán Côsi, ở đây (x_0, y_0) là các giá trị tuỳ ý cho trước được gọi là giá trị ban đầu (điều kiện đầu).

Một vấn đề đặt ra là ta hãy xét xem với điều kiện nào thì:

1. Bài toán Côsi của phương trình có nghiệm.
2. Nghiệm của bài toán là duy nhất.

Giải quyết các vấn đề nêu trên là nội dung của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.

2.1. Định nghĩa: *Ta nói hàm $f(x,y)$ thoả mãn trong miền $G \subset R^2$ điều kiện Lipsit đối với y nếu $\exists N > 0$ sao cho với bất kỳ $x, \overline{y}, \overline{\overline{y}}$ mà $(x,\overline{y}) \in G, (x,\overline{\overline{y}}) \in G$ thì*

$\left|f(x,\overline{y}) - f(x,\overline{\overline{y}})\right| \le N\left|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\right|$ (2.2).

Chú ý: Bất đẳng thức (2.2) sẽ thoả mãn nếu $f(x,y), \exists f_y'(x,y)$ giới nội trong G tức là $\left|f_y'(x,y)\right| \le N \;\; \forall (x,y) \in G$. Vì theo Lagrăng

$\left|f(x,y) - f(x,\overline{y})\right| = \left|f_y'(x, y + t(\overline{y} - y)\right|\left|y - \overline{y}\right| \le N\left|y - \overline{y}\right|$

Nhưng điều ngược lại không đúng vì có thể (2.2) thoả mãn nhưng $f_y'(x,y)$ không tồn tại.

<u>*Ví dụ*</u>: $f(x,y) = |y|$ $\quad \left||y| - |\overline{y}|\right| \le \left|y - \overline{y}\right|$ nhưng f_y' không tồn tại tại $y = 0$

2.2.Định lý: *Xét phương trình (2.1) với giá trị ban đầu (x_0, y_0). Giả sử*

1. $f(x,y)$ là hàm liên tục hai biến trong miền kín giới nội G

$$\begin{cases} x_0 - a \le x \le x_0 + a \\ y_0 - b \le y \le y_0 + b \end{cases} \quad a, b > 0$$

(vì f liên tục trong G kín, giới nội nên $\exists M$ để $|f(x,y)| \le M \ \forall (x,y) \in G$)

2. $f(x,y)$ thoả mãn trong G điều kiện lipsit đối với y.

Khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm $y = \phi(x)$ của phương trình (2.1) xác định và liên tục đối với các giá trị của x thuộc đoạn $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ trong đó $h = \min(a, \frac{b}{M})$ sao cho khi $x = x_0$ thì $\phi(x_0) = y_0$.

§3. CÁC LOẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Xét phương trình $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ (3.1)

3.1.Nghiệm tổng quát

Giả sử $G \subset R^2$ là miền mà tại mọi điểm của nó có một và chỉ một đường cong tích phân của phương trình (3.1) đi qua. Khi đó hàm $y = \phi(x,c)$ (3.2) xác định và có đạo hàm liên tục theo x được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) trong G nếu:

a) $\forall M(x,y) \in G$ từ $y = \phi(x,c)$ có thể giải ra được $c = \psi(x,y)$.

b) $y = \phi(x,c)$ là nghiệm của phương trình (3.1) với $\forall c$ thuộc miền đang xét khi $M(x,y)$ chạy khắp G.

3.2.Tích phân tổng quát

Hệ thức: $\varphi(x,y,c) = 0$ hay $\psi(x,y) = c$ gọi là tích phân tổng quát của (3.1) trong G nếu nó xác định nghiệm tổng quát $y = \phi(x,c)$ của phương trình trong miền đó.

3.3.Nghiệm riêng

Nghiệm $y = y(x)$ được gọi là nghiệm riêng của phương trình (3.1) nếu tại mỗi điểm của nó điều kiện duy nhất nghiệm của bài toán Côsi được thoả mãn.

Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với hằng số c xác định luôn luôn là nghiệm riêng.

3.4.Nghiệm kì dị

Nghiệm $y = y(x)$ được gọi là nghiệm kì dị của phương trình (3.1) nếu tại mọi điểm của nó tính chất duy nhất nghiệm của bài toán Côsi bị phá vỡ.

Ví dụ: Xét phương trình $y' = 2\sqrt{y} \qquad (y \geq 0)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \qquad (y \neq 0)$$
$$\Rightarrow \sqrt{y} = x + c \qquad (x > -c)$$
$$\Rightarrow y = (x+c)^2 \qquad (x > -c)$$

Ta xét các loại nghiệm của phương trình trên.

a) Ta chứng minh rằng $y = (x+c)^2$ với $x > -c$ là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho trong miền $G: -\infty < x < +\infty \qquad 0 < y < +\infty$. Vậy ta cần chứng minh.

+) Trong G điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Côsi được thoả mãn cho $M(x_0, y_0)$ bất kì thuộc G. Ta có thể lập được lân cận kín

$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b \qquad \in G$. Và trong lân cận đó $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ giới nội

$\Rightarrow$ điều kiện Lipsit được thoả mãn.

+) Từ $y = (x+c)^2 \Rightarrow c = \sqrt{y} - x$

+) Hệ thức $y = (x+c)^2$ với $x > -c$ thoả mãn phương trình.

Do đó $y = (x+c)^2$ với $x > -c$ là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho trong miền G.

b) Dễ thấy $\sqrt{y} - x = c$ là tích phân tổng quát của phương trình.

c) Nghiện riêng: Từ $y = (x+c)^2$ với $c = 0 \Rightarrow y = x^2$ với $x > 0$ là nghiệm riêng.

d) Nghiệm kì dị: Xét $y = 0$ dễ thấy $y = 0$ là nghiệm của phương trình nhưng tại mỗi điểm của nó còn có một nghiệm riêng dẫn đến được xác định từ nghiệm tổng quát nên $y = 0$ là nghiệm kì dị.

Chú ý: +) Nghiệm kì dị không thể nằm trong miền tồn tại G của nghiệm tổng quát được.

+) Đoạn $x'MN$ cũng là nghiệm nhận được bằng cách dán nghiệm riêng và nghiệm kì dị, đây không phải là nghiệm riêng và không phải là nghiệm kì dị.

3.5. Phương pháp tìm nghiệm kì dị

a) Phương trình: $y' = f(x, y)$

Nghiệm kì dị chỉ có thể xuất hiện tại những nơi mà điều kiện Lipsit không được thoả mãn. Do đó nghiệm kì dị có thể xuất hiện tại những nơi mà $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ không giới nội. Từ đó ta có thể rút ra quy tắc tìm nghiệm kì dị:

+) Tìm những đường cong mà dọc theo nó $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ không giới nội. Giả sử gọi đường cong đó là $y = \phi^*(x)$.

+) Thử xem đường cong đó có phải là nghiệm của phương trình vi phân không.

+) Nếu có phải thì thử xem tại mỗi điểm của đường cong tính chất duy nhất nghiệm có bị phá vỡ hay không. Nếu tính duy nhất bị phá vỡ thì $y = \phi^*(x)$ là nghiệm kì dị.

Ví dụ: $y' = y^{\frac{2}{3}}$. Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{3} y^{\frac{-1}{2}}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \infty$ khi $y = 0$.

Ta thấy: +) $y = 0$ là nghiệm.

+) Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên là $27y = (x + c)^3$ đây là họ đường Parabol bậc 3, ta thấy tại mọi điểm của $y = 0$ tính chất duy nhất nghiệm bị phá vỡ do đó $y = 0$ là nghiệm kì dị.

b) Phương trình $F(x, y, y') = 0$ (3.2).

Giả sử phương trình (3.2) xác định một số các giá trị thực y'(hay vô hạn)

$$y' = f_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, ...) \qquad (3.3)$$

giả sử $f_i(x, y)$ liên tục và có đạo hàm riêng theo y khi đó lý luận như trên ta có thể tìm được nghiệm kì dị của phương trình (3.2).

Tuy nhiên trong thực hành để tìm nghiệm kì dị của phương trình (3.2) ta có thể tính trực tiếp $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ như sau:

Ta có: $\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y}$ vi phân phương trình (3.2) theo y ta được $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$ $\quad (gt\ \frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0)$. Ta thấy rằng $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y'}{\partial y}$ không giới nội.

Từ đó ta đi đến quy tắc tìm nghiệm kì dị của phương trình (3.2) như sau:

* Từ hệ $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases}$ khử y' ta được hệ thức $R(x, y) = 0 \qquad (3.4)$

Hệ thức (3.4) gọi là $y'-$ biệt tuyến (hay p biệt tuyến) của phương trình (3.2).

* Thử xem p biệt tuyến có phải là nghiệm của phương trình (3.2) hay không.

* Nếu phải thì xem tính chất duy nhất có bị phá vỡ hay không. Nếu có thì

p-biệt tuyến là nghiệm kì dị.

<u>Ví dụ</u>: Tìm nghiệm kì dị của phương trình $F(x, y, y') = y'^2 + y^2 - 1 = 0$.

Ta có $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$ khử y' từ hệ $\begin{cases} y'^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1$.

Thay $y = \pm 1$ vào phương trình ta thấy nó là nghiệm.

Từ $y' = \pm\sqrt{1-y^2}$ ta có nghiệm $\arcsin y = \pm x + c \Rightarrow y = \sin(\pm x + c)$ hay $y = \sin(x+c)$ (vì $\sin(-x+c) = \sin(x+\pi-c)$).

Ta thấy trên $y = \pm 1$ tính chất duy nhất nghiệm bị phá vỡ $\Rightarrow y = \pm 1$ là nghiệm kì dị.

c) Tìm nghiệm kì dị từ nghiệm tổng quát:

Giả sử tích phân tổng quát có dạng $\Phi(x,y,c) = 0$ ta tìm bao hình của họ nghiệm tổng quát. Muốn vậy trước hết ta tìm c-biệt tuyến từ hệ

$$\begin{cases} \Phi(x,y,c) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi(x,y,c)}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng nếu c-biệt tuyến là bao hình của họ nghiệm tổng quát thì nó là nghiệm kì dị của phương trình.

Thật vậy

- Bao hình là nghiệm: Tại mỗi điểm của bao hình luôn có một đường cong tích phân tiếp xúc suy ra bao hình là nghiệm.
- Bao hình là nghiệm kì dị: Hiển nhiên.

Quy tắc tìm nghiệm kì dị:

+ Tìm c-biệt tuyến của họ đường cong $\Phi(x,y,c) = 0$

$$\begin{cases} \Phi(x,y,c) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi(x,y,c)}{\partial c} = 0 \end{cases} \Rightarrow R(x,y) = 0$$

+ Thử xem c-biệt tuyến có phải là bao hình không. Nếu phải thì $R(x,y) = 0$ là nghiệm kì dị.

Chương 2
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

§1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VỚI BIẾN SỐ PHÂN LY

1.1.Dạng $M(x)dx + N(y)dy = 0$ (1.1)

(1.1) gọi là phương trình vi phân với biến số phân ly (phương trình tách biến) giả sử $M(x), N(y)$ liên tục trong miền nào đó của R^2, khi đó tích phân tổng quát của (1.1) có dạng $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$.

Tổng quát hơn ta xét phương trình

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \qquad (1.2)$$

Trong đó M, N, P, Q là các hàm liên tục theo đối số của chúng trong miền đang xét. Giả sử $N(y)P(x) \neq 0$ khi đó từ $(1.2) \Rightarrow \frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$ do đó tích phân tổng quát có dạng $\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C$. Ngoài ra ta phải xét trường hợp $N(y)P(x) = 0$.

Những trường hợp $y = y_0$ làm cho $N(y) = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (1.2). Nếu muốn tìm cả nghiệm dưới dạng $x = x(y)$ thì những giá trị $x = x_0$ làm cho $P(x) = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ: Xét phương trình $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

Giả sử $(y^2 - 1)(x^2 - 1) \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1}dx + \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0$

$$\Leftrightarrow \ln\left|x^2-1\right| + \ln\left|y^2-1\right| = \ln\left|C_1\right| \quad (C_1 \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \left|(x^2-1)(y^2-1)\right| = \left|C_1\right|$$

hay $(x^2-1)(y^2-1) = C$

Ngoài ra còn có các nghiệm $y = \pm 1, x = \pm 1$.

1.2.Phương trình đưa về phương trình tách biến

Xét phương trình dạng $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$.

Đặt $z = ax+by+c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dz}{dx}-a}{b}$ hay $\dfrac{dz}{dx} - a = bf(z)$ đây là phương trình tách biến.

<u>*Ví dụ*</u>: $\dfrac{dy}{dx} = x - y + 5$ Đặt $z = x - y + 5$

$$\Rightarrow \frac{dz}{1-z} = dx \Rightarrow \ln\left|1-z\right| = -x + C_1 \text{ do đó } \left|1-z\right| = e^{-x}e^{C_1} \Rightarrow 1 - z = Ce^{-x}.$$

Vậy $z = 1 - Ce^{-x}$ hay $y = Ce^{-x} + x + 4$ là nghiệm của phương trình.

§2. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

2.1.Định nghĩa: Hàm số $f(x,y)$ gọi là hàm thuần nhất bậc *n* nếu $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Xét phương trình : $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ (2.1)

với $f(x,y)$ liên tục và là hàm thuần nhất bậc không.

Đặt $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x,y) = f(1,\dfrac{y}{x}) = \phi(\dfrac{y}{x})$ ta có: $\dfrac{dy}{dx} = \phi(\dfrac{y}{x})$ (2.2)

Đặt $z=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$ thế vào phương trình (2.2) ta có

$$z+x\frac{dz}{dx}=\phi(z)\,\text{hay}\ \phi(z)-z=x\frac{dz}{dx}.$$

Đây là phương trình tách biến $\frac{dz}{\phi(z)-z}=\frac{dx}{x}$ với giả thiết $\phi(z)-z\neq 0$

$\int\frac{dz}{\phi(z)-z}=\ln|x|+\ln\left|\frac{1}{C_1}\right|=\ln\left|\frac{x}{C_1}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{x}{C_1}\right|=e^{\int\frac{dz}{\phi(z)-z}}=e^{\varphi(z)}$ hay $x=Ce^{\varphi(z)}$ thay $z=\frac{y}{x}$

vào ta được $x=Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$ (2.3)

Đây là nghiệm tổng quát của (2.1).

<u>*Ví dụ*</u>: $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

Đặt $y=zx\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{2z}{1-z^2}-z=\frac{z^3+z}{1-z^2}$ hay $\frac{dx}{x}=\frac{(1-z^2)}{z(z^2+1)}dz$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x}-\int\frac{(1-z^2)}{z(1+z^2)}dz=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dz}{z}+\int\frac{2zdz}{1+z^2}=\ln|C_1|$$

hay $\ln|x|-\ln|z|+\ln\left|1+z^2\right|=\ln|C_1|\Leftrightarrow\frac{|x|(1+z^2)}{|z|}=|C_1|$ hay $\frac{x(1+z^2)}{z}=C$ thay $z=\frac{y}{x}$

vào $\Rightarrow y^2+x^2-Cy=0$ hay $x^2+\left(y-\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2$.

Chú ý: - Khi giải phương trình vi phân thuần nhất ta không nhất thiết phải đưa về dạng $\phi(\frac{y}{x})$ mà đặt luôn $y=zx$ sau đó biến đổi.

- Nếu $\phi(z)-z=0$ với $z=z_0$ thì ngoài nghiệm tổng quát còn nghiệm $z=z_0$ hay $y=z_0x$ cũng là nghiệm.

Trong ví dụ trên đường thẳng $y=0$ cũng là nghiệm của phương trình.

2.2. Phương trình đưa được về phương trình thuần nhất

Xét phương trình dạng $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$.

* Giả sử $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ dùng phép đổi biến $\begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$ $(h, k = const)$, khi đó phương trình có dạng $\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2h + b_2k + c_2}\right)$. Nếu chọn h, k thoả mãn $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$ thì ta được phương trình thuần nhất $\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$

* Nếu $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$

do đó $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Đặt $z = a_2x + b_2y$ và lập phương trình theo z ta có $\frac{dz}{dx} = \phi(z)$ đây là phương trình tách biến.

<u>*Ví dụ*</u>: $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$ ta có $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ đổi biến $\begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$ chọn h, k thoả mãn $\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2 \\ k = 1 \end{cases}$ Ta được phương trình thuần nhất $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$ Đặt $\eta = u\xi \Rightarrow \xi\frac{du}{d\xi} = \frac{1 + u^2}{1 - u}$ phương trình tách biến.

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln\left(1 + u^2\right) = \ln|\xi| + \ln|C_1| \Leftrightarrow C\xi\sqrt{1 + u^2} = e^{arctgu}$$

trở về biến cũ ta được $C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

3.1.Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình vi phân tuyến tính đối với hàm và đạo hàm của nó.

Dạng tổng quát: $A(x)\dfrac{dy}{dx}+B(x)y=C(x)$ (3.1)

Trong đó $A(x),B(x),C(x)$ là các hàm liên tục trong khoảng nào đó. Nếu trong khoảng đang xét $A(x)\neq 0 \quad \forall x$ thì phương trình được đưa về dạng.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \qquad (3.2)$$

Xét phương trình $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ phương trình này được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất ứng với phương trình đã cho.

3.2.Cách giải: Phương pháp biến thiên hằng số.

a) Bước 1: Xét phương trình $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ (3.3)

Giả sử $y\neq 0$ khi đó phương trình (3.3) đưa về dạng $\dfrac{dy}{y}=-P(x)dx$

do đó $\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C_1| \qquad (C_1\neq 0)$

$$\Rightarrow |y|=|C_1|e^{-\int P(x)dx} \text{ hay } y=Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (3.4)$$

Mặt khác $y=0$ cũng là nghiệm nhưng có thể gộp vào (3.4) ứng với trường hợp $C=0$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (3.3) là $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ trong đó C là hằng số tuỳ ý.

b) Bước 2: Ta thử tìm nghiệm của (3.2) dưới dạng (3.4) trong đó coi $C = C(x)$ khi đó $\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - p(x)Ce^{-\int P(x)dx}$ thay hệ thức này vào phương trình (3.2) ta có

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - P(x)Ce^{-\int P(x)dx} + P(x)Ce^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

do đó $\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ hay $C = C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1$. Trong đó C_1 là hằng số tuỳ ý.

Vậy $y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}$ (3.5)

Chú ý: 1. Vế phải của (3.5) ta thấy số hạng đầu là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất, số hạng thứ hai là nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất nhận được khi $C = 0$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất được lập nên bởi tổng của nghiệm tổng quát của phương tình vi phân tuyến tính thuần nhất với một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

2. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất tìm được bằng hai lần lấy tích phân (mà ta thường nói là bằng hai lần cầu phương).

3. Nghiệm của phương trình (3.2) có dạng tuyến tính đối với hằng số C $y = C\phi(x) + \psi(x)$

<u>*Ví dụ*</u>: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ xét trong khoảng $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $y = Cx$ với C là hằng số tuỳ ý. Xem $C = C(x) \Rightarrow \frac{dC}{dx} = x$ hay $C = \frac{1}{2}x^2 + C_1$. Vậy $y = \frac{x^3}{2} + Cx$.

3.3.Hệ quả

a) *Nếu biết được một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất thì việc giải phương trình sẽ quy về việc giải phương trình thuần nhất.*

Thật vậy: đặt $y = Y(x) + z$ trong đó $Y(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Còn z là hàm phải tìm, lập phương trình vi phân đối với z ta có $\frac{dz}{dx} + P(x)z = 0$.

Như vậy nếu biết được một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất thì nghiệm tổng quát tìm được bằng một phép cầu phương.

b*) Nếu biết được một nghiệm riêng không tầm thường (khác không) của phương trình thuần nhất thì nghiệm tổng quát của phương trình đó có thể tìm mà không cần cầu phương bằng cách nhân nghiệm riêng đã biết với một hằng số tuỳ ý.*

Thật vậy xét phương trình sau: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$. Giả sử $y = \phi(x) \neq 0$ là nghiệm riêng đã biết.

Nghiệm tổng quát của phương trình đang xét có dạng $y = Ce^{-\int P(x)dx}$

Nghiệm này chứa mọi nghiệm riêng, giả sử ứng với C_0 ta có $\phi(x) = C_0 e^{-\int P(x)dx}$ do đó $\frac{y}{\phi(x)} = \frac{C}{C_0}$ ký hiệu $\frac{C}{C_0} = C_1$ ta được $y = C_1\phi(x)$.

c) Nếu biết được hai nghiệm riêng khác nhau của phương trình không thuần nhất thì có thể tìm được nghiệm tổng quát của nó mà không cần cầu phương.

Thật vậy: Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm khác nhau của phương trình không thuần nhất thì ta có thể dễ dàng chứng minh được $y_1(x) - y_2(x)$ là nghiệm không tầm thường của phương trình thuần nhất.

Suy ra nghiệm tổng quát $y = C(y_1(x) - y_2(x)) + y_1(x)$.

3.4.Phương trình đưa được về phương trình tuyến tính

a) Xét phương trình $f'(y)\frac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x)$

Bằng phép thế $z = f(y)$ đưa về $\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$.

Ví dụ: $y\dfrac{dy}{dx}+xy^2=x^2 \to \dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}+xz=x^2 \quad (z=y^2)$.

b) Phương trình Becnuli

Dạng phương trình $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \quad \alpha\in R$ (3.6)

Nếu $\alpha=0$ ta được phương trình tuyến tính.

Nếu $\alpha=1$ ta được phương trình tuyến tính thuần nhất.

Giả thiết $\alpha\neq 0, \alpha\neq 1$

Chia hai vế của phương trình cho $y^{\alpha} \quad (y\neq 0)$ ta được

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\frac{dy}{dx}+P(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}}=Q(x) \tag{3.7}$$

Đổi biến $z=y^{1-\alpha}$ ta có $(1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$ và do đó

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

hay $\dfrac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$ đây là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

Chú ý: Trường hợp $\alpha>0$ thì $y=0$ cũng là nghiệm. Ta có thể chứng minh rằng với $\alpha>1$ thì $y=0$ là nghiệm riêng

$0<\alpha<1$ thì $y=0$ là nghiệm kì dị của phương trình.

Ví dụ: $\dfrac{dy}{dx}-4\dfrac{y}{x}=x\sqrt{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{y}dx}-4\dfrac{\sqrt{y}}{x}=x \quad (y\neq 0)$. Đặt $z=\sqrt{y}$ do đó $y=z^2$ và $\dfrac{dy}{dx}=2z\dfrac{dz}{dx}$ Thay vào ta có $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2z}{x}=\dfrac{x}{2}$ giải phương trình ta được nghiệm

$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$ ngoài ra $y = 0$ là nghiệm kì dị.

§4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HOÀN CHỈNH - THỪA SỐ TÍCH PHÂN

Xét phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (4.1)

Nếu vế trái của (4.1) là vi phân toàn phần của một hàm $u(x,y)$ nào đó.

tức là $M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y)$ (4.2)

thì ta nói (4.1) là phương trình vi phân hoàn chỉnh, khi đó tích phân tổng quát của phương trình là $u(x,y) = C$.

Ví dụ: $xdx + ydy = 0$

Ta có $xdx + ydy = d\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right]$ vì vậy tích phân tổng quát là $x^2 + y^2 = C$.

4.1.Cách đoán nhận phương trình là phương trình vi phân hoàn chỉnh

Định lý: *Điều kiện cần và đủ để biểu thức vi phân*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad (4.3)$$

Trong đó M, N xác định, liên tục và không đồng thời triệt tiêu tại bất cứ điểm nào trong một miền đơn liên $G \in R^2$ và có trong miền ấy các đạo hàm liên tục $\frac{\partial M}{\partial y}$ và $\frac{\partial N}{\partial x}$, là một vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ là đẳng thức $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ phải thoả mãn $\forall (x,y) \in G$ (4.4)

Điều kiện cần: Giả sử (4.3) là vi phân toàn phần tức là $\exists u(x,y)$ sao cho

$$du = Mdx + Ndy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad \forall (x,y) \in G$$

$$\Rightarrow M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

do giả thiết $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ tồn tại và liên tục nên chúng bằng nhau $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

<u>Điều kiện đủ</u>: Giả sử $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\forall(x,y)\in G$ ta cần chứng minh phương trình là phương trình vi phân hoàn chỉnh tức là $\exists u(x,y)$ để

$$M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\ ;\quad N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.5}$$

điều này tương đương chứng minh (4.5) có nghiệm.

Xét phương trình $\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ nghiệm của nó viết dưới dạng

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\phi(y) \tag{4.6}$$

Trong đó $\phi(y)$ là một hàm tuỳ ý theo y (tích phân này có nghĩa vì G đơn liên). Ta sẽ chọn hàm $\phi(y)$ để đẳng thức $N=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ cũng được thoả mãn.

Giả sử $\phi(y)$ là hàm khả vi. Lấy đạo hàm (4.6) theo y ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\phi'(y)=N(x,y)$$

$$\Rightarrow \phi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx \tag{4.7}$$

Vì

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow \phi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx$$

$$=N(x,y)-N(x,y)+N(x_0,y)=N(x_0,y)$$

Vậy

$$\phi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C_1 \tag{4.8}$$

Trong đó $(x_0, y_0) \in G$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1 \qquad (4.9)$$

Tức là tồn tại hàm $u(x,y)$ thoả mãn (4.5).

Chú ý: 1, Từ (4.9) ta có tích phân tổng quát của phương trình (4.2) là:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \qquad (4.10)$$

2, Nếu khi tìm hàm $u(x,y)$ mà không xuất phát từ phương trình (4.5) thì ta sẽ được tích phân tổng quát dạng:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C \qquad (4.11)$$

<u>*Ví dụ*</u>: $(7x+3y)dx + (3x-5y)dy = 0$

Ta có

$$M = 7x + 3y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3$$

$$N = 3x - 5y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

$\Rightarrow$ Đây là phương trình vi phân hoàn chỉnh.

Ta xác định hàm u

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 7x + 3y \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x - 5y \qquad (**)$$

từ $(*) \Rightarrow u(x,y) = \int (7x+3y)dx + \phi(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 3x + \phi'(y) = 3x - 5y \text{ vậy } \phi(y) = -\frac{5}{2}y^2 + C$$

Cuối cùng $u(x,y) = \frac{7}{2}x^2 + 3xy - \frac{5}{2}y^2 + C$.

Phương trình có tích phân tổng quát là: $7x^2 + 6xy - 5y^2 = C$.

4.2.Thừa số tích phân

Xét phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Giả sử phương trình không phải là phương trình vi phân hoàn chỉnh nhưng nếu tồn tại hàm $\mu(x,y)$ sao cho

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (4.12)$$

là phương trình vi phân hoàn chỉnh thì hàm $\mu(x,y)$ gọi là thừa số tích phân của phương trình.

Như vậy sẽ nảy ra hai vấn đề:

- Có tồn tại thừa số tích phân hay không?
- Nếu tồn tại thì cách tìm hàm $\mu(x,y)$ như thế nào?

Ta có khẳng định sau:

A. Mọi phương trình vi phân cấp 1 thoả mãn điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm luôn luôn tồn tại vô số thừa số tích phân.

♦ Xét phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (4.13)$

Từ định lý tồn tại và duy nhất nghiệm suy ra phương trình thừa nhận tích phân tổng quát $u(x,y) = C$.

Lấy vi phân hai vế ta được

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \text{ hay } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \qquad (4.14)$$

Mặt khác từ (4.13)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad (4.15)$$

Do đó từ (4.14) (4.15)

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \text{ hay } \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M(x,y)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N(x,y)} = \mu(x,y) \qquad (4.16)$$

Ta chứng minh $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân của phương trình (4.13) từ (4.16) ta suy ra $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu(x,y)M(x,y); \frac{\partial u}{\partial y} = \mu(x,y)N(x,y)$

hay $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du$

Vậy $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân.

Ta chứng minh rằng phương trình có vô số thừa số tích phân.

Ta sẽ chứng minh rằng $\mu_1 = \Phi(u)\mu(x,y)$ cũng là thừa số tích phân. Trong đó $\Phi(u)$ là hàm khả vi tuỳ ý.

Thực vậy: từ $\mu Mdx + \mu Ndy = du$

$\Rightarrow \mu\Phi(u)Mdx + \mu\Phi(u)Ndy = \Phi(u)du = d\int\Phi(u)du$. Đây là phương rình vi phân hoàn chỉnh hay $\mu_1(x,y) = \Phi(u)\mu(x,y)$ là thừa số tích phân. Vì $\Phi(u)$ là tuỳ ý suy ra phương trình có vô số thừa số tích phân.

Hệ quả 1: *Mọi thừa số tích phân của phương trình đều có dạng* $\mu_1 = \mu\Phi(u)$.

Giả sử μ_1, μ_2 đều là thừa số tích phân của phương trình

$$\begin{cases} \mu_1 Mdx + \mu_1 Ndy = du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \\ \mu_2 Mdx + \mu_2 Ndy = dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Do đó

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}} \text{ hay } \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Vì $\dfrac{\partial v}{\partial y} \neq 0$ Nên giữa u và v có sự phụ thuộc, do đó $v = \phi(u)$. Từ (4.17) suy ra

$$\mu_2 Mdx + \mu_2 Ndy = dv = \phi'(u)du = \phi'(u)\left(\mu_1 Mdx + \mu_1 Ndy\right)$$

$$\Rightarrow \mu_2 = \phi'(u)\mu_1 = \Phi(u)\mu_1$$

Hệ quả 2: Nếu biết được hai thừa số tích phân khác nhau của phương trình là μ_1, μ_2 thì tích phân tổng quát của phương trình là $\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C$. Theo chứng minh trên ta có

$$\begin{matrix} \mu_1 = \Phi_1(u)\mu \\ \mu_2 = \Phi_2(u)\mu \end{matrix} \Rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\Phi_1(u)}{\Phi_2(u)} = \Phi(u) = C$$

B.Cách tìm thừa số tích phân:

Nói chung không có phương pháp tìm thừa số tích phân mà ta chỉ có thể tìm được trong một số trường hợp đặc biệt:

Gọi $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân của phương trình khi đó ta có:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \text{ hay } N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \quad (4.18)$$

a) Thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x $\mu = \mu(x)$. Khi đó $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$.

Từ (4.18) $\Rightarrow \dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ hay $\ln \mu(x) = \displaystyle\int \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + C$ (4.19)

Chú ý: $\mu = \mu(x) \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ chỉ là hàm của x.

b) Thừa số tích phân chỉ phụ thuộc y: $\mu = \mu(y)$.

Tương tự $\Rightarrow \dfrac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$ hay $\ln \mu(y) = -\displaystyle\int \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} dy + C$ (4.20)

Chú ý: $\mu = \mu(y) \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$ chỉ là hàm của y.

<u>Ví dụ:</u> $\left(x^2 - y\right)dx + \left(x^2y^2 + x\right)dy = 0$

$$\begin{matrix} M = x^2 - y \\ N = x^2y^2 + x \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -1 - 2xy^2 - 1 = -2\left(xy^2 + 1\right)$$

Vì $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\dfrac{2\left(xy^2+1\right)}{x\left(xy^2+1\right)} = -\dfrac{2}{x} \Rightarrow \mu = \mu(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \dfrac{1}{x^2}$.

Nhân hai vế của phương trình với $\dfrac{1}{x^2}$ ta có:

$\left(1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$ hay $dx + y^2dy + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$

$d\left[x + \dfrac{1}{3}y^3 + \dfrac{y}{x}\right] = 0 \Rightarrow x + \dfrac{1}{3}y^3 + \dfrac{y}{x} = C$.

Chương 3
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1
CHƯA GIẢI RA ĐỐI VỚI ĐẠO HÀM

Trong chương này ta xét dạng phương trình $F(x,y,y')=0$ tổng quát.

§1. PHƯƠNG TRÌNH $F(x,y')=0$ *HAY* $F(y,y')=0$

1.1.Phương trình $F(x,y')=0$. (1.1)

a) Trường hợp 1:

Phương trình đang xét xác định y' như là hàm ẩn của x và có thể giải ra được $y'=f(x)$. Khi đó nghiệm nghiệm tìm được bằng một lần cầu phương $y=\int f(x)dx+C$.

b) Trường hợp 2: Từ (1.1) ta giải ra được x theo y' $x=\phi(y')$.

Khi đó đặt $y'=P$ xem P là tham số ta được $x=\phi(P)$, vì

$$\frac{dy}{dx}=P \Rightarrow dy=Pdx.$$

Do $x=\phi(P) \Rightarrow dx=\phi'(P)dP$.

Vậy $dy=P\phi'(P)dP \Rightarrow y=\int P\phi'(P)dP+C$.

Nghiệm thu được dưới dạng tham số $\begin{cases} x=\phi(P) \\ y=\int P\phi'(P)dP+C \end{cases}$

Ví dụ: $e^{y'}+y'=x$ Đặt $y'=P \Rightarrow x=P+e^P$

ta có $y=\int P(1+e^{P})dP+C=e^{P}(P+1)+\dfrac{P^{2}}{2}+C$.

Vậy nghiệm tổng quát: $\begin{cases} x=P+e^{P} \\ y=e^{P}(1+P)+\dfrac{P^{2}}{2}+C \end{cases}$

c)Trường hợp 3: Từ (1.1) x, y' đều biểu diễn bằng một hàm đơn trị theo tham số $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$

Khi đó $y=\int y'dx+C=\int \psi(t)\phi'(t)dt+C$.

Nghiệm tìm được dưới dạng $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\int \psi(t)\phi'(t)dt+C \end{cases}$

Ví dụ: $x^{3}+y'^{3}-3xy'=0$

Đặt $y'=tx$ thay vào phương trình tìm x theo t.

Ta có: $x^{3}(1+t^{3})=3tx^{2}$ vậy $x=\dfrac{3t}{1+t^{3}}$; $y'=\dfrac{3t^{2}}{1+t^{3}}$

Khi đó $y=\int y'dx+C=\int \dfrac{3t^{2}}{1+t^{3}}\dfrac{3(1+t^{3})-3t.3t^{2}}{(1+t^{3})^{2}}dt+C=3\int \dfrac{3t^{2}(1-2t^{3})}{(1+t^{3})^{3}}dt+C$.

Đặt $u=t^{3}+1 \Rightarrow y=3\int \dfrac{3-2u}{u^{3}}du+C=-\dfrac{9}{2u^{2}}+\dfrac{6}{u}+C$.

Vậy ta có nghiệm $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^{3}} \\ y=-\dfrac{9}{2(1+t^{3})^{2}}+\dfrac{6}{1+t^{3}}+C \end{cases}$

1.2.Phương trình $F(y, y')=0$ (1.2)

a)Trường hợp 1: Giải được y' theo y: $y'=f(y)$

khi đó $dy = f(y)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = x + C$. Ngoài ra giá trị $y = y_0$ mà $f(y) = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

b)Trường hợp 2: Giải được y theo y': $y = \phi(y')$

Giả sử ϕ là hàm khả vi liên tục.

Đặt $y' = p$ ta có $y = \phi(p)$.

Từ $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dx = \frac{1}{p}dy = \frac{1}{p}\phi'(p)dp \Rightarrow x = \int \frac{1}{p}\phi'(p)dp + C$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng $\begin{cases} x = \int \frac{1}{p}\phi'(p)dp + C \\ y = \phi(p) \end{cases}$

c)Trường hợp 3: $\begin{cases} y = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$

Giả thiết ϕ là hàm khả vi liên tục và $\psi(t) \neq 0$ ta tìm x theo t.

Từ $\frac{dy}{dx} = y' = \psi(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{\psi(t)}\phi'(t)dt \Rightarrow x = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt + C$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng $\begin{cases} y = \phi(t) \\ x = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt + C \end{cases}$

§2. PHƯƠNG TRÌNH $F(x, y, y') = 0$ - PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG-KLERÔ

2.1.Phương trình $F(x, y, y') = 0$

Giả sử cho phương trình $F(x, y, y') = 0$ (2.1)

Giả sử phương trình có thể biểu diễn dưới dạng tham số

$$x=\phi(u,v);\; y=\psi(u,v);\; y'=\lambda\,(u,v) \qquad (2.2)$$

Nhờ cách biểu diễn tham số này ta có thể đưa việc giải phương trình (2.1) về việc giải phương trình đã giải ra đối với đạo hàm.

Ta có $dx=\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv;\; dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv;\; y'=\lambda\,(u,v)$. Từ $dy=y'dx\Rightarrow$ $\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\lambda\,(u,v)\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv\right]$ hay nếu coi u là biến và v là hàm thì:

$$\frac{dv}{du}=\frac{\lambda\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}-\lambda\frac{\partial\phi}{\partial v}}=f(u,v) \qquad (2.3)$$

(2.3) chính là phương trình đã giải ra đối với đạo hàm, giả sử nghiệm tổng quát là $v=\Omega(u,C)$. Khi đó nghiệm tổng quát của (2.1) dưới dạng tham số là

$$x=\phi\left[u,\Omega(u,C)\right]\;;\; y=\psi\left[u,\Omega(u,C)\right].$$

Sau đây ta sẽ xét hai dạng phương trình.

2.2.Phương trình Lagrăng

Phương trình tuyến tính đối với x và y có dạng $y=\phi(y')x+\psi(y')$ (2.4)

Trong đó giả thiết $\phi(y')\neq y'$ (nếu $\equiv$ là phương trình Klero).

Dùng phương pháp như trên với tham biến: $u=x; v=p=y'$. Khi đó (2.4) có dạng $y=\phi(p)x+\psi(p)$ (2.5)

Ta cần tìm x theo p. Từ (2.5) $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\phi(p)+\left[\phi'(p)x+\psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}=p$.

Nếu coi x là hàm, p là biến. $\Rightarrow\frac{dx}{dp}+\frac{\phi'(p)}{\phi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\phi(p)}$ (2.6)

Đây là phương trình tuyến tính không thuần nhất. Giả sử nghiệm tổng quát có dạng: $x=A(p)C+B(p)$ thay vào (2.5) ta có $y=A_1(p)C+B_1(p)$.

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình Lagrăng dạng tham số.

Chú ý: Khi biến đổi phương trình ta phải giả thiết $\phi(p)-p\neq 0$. Dễ thấy rằng các giá trị nghiệm $p=p_i$ cũng là những nghiệm của phương trình. Tuỳ từng trường hợp nghiệm đó có thể là nghiệm riêng hay nghiệm kì dị.

Vì vậy đối với phương trình Lagrăng nghiệm kì dị nếu có chỉ có thể là các đường thẳng $y=p_i x+\psi(p_i)$.

__Ví dụ__: $y=2xy'+\sin y'$

Đặt $y'=p\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=2p+2x\dfrac{dp}{dx}+\cos p\dfrac{dp}{dx}=p$

Hay $\dfrac{dp}{dx}(2x+\cos p)=-p\Rightarrow \dfrac{dx}{dp}=-2\dfrac{x}{p}-\dfrac{\cos p}{p}$

hay $\dfrac{dx}{dp}+2\dfrac{x}{p}=\dfrac{-\cos p}{p}\qquad (p\neq 0)$.

Xét $\dfrac{dx}{dp}=-\dfrac{2x}{p}\Rightarrow \ln|x|=-2\ln|p|+\ln|C_1|\Rightarrow x=\dfrac{C}{p^2}$. Coi $C=C(p)$ thay vào phương trình đầu $\Rightarrow \dfrac{1}{p^2}\dfrac{dC}{dp}=-\dfrac{\cos p}{p}$

hay $C=-\int p\cos p\,dp+C_1=-p\sin p-\cos p+C_1$.

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=\left(-p\sin p-\cos p+C_1\right)\dfrac{1}{p^2}\\ y=2px+\sin p\end{cases}$

Ngoài ra phương trình có nghiệm $p=0$ tức là $y=0$.

2.3.Phương trình Klerô: Khi $\phi(y')\equiv y'$

Phương trình có dạng $y=y'x+\psi(y')$ (2.7)

Đặt $y' = p \Rightarrow y = px + \psi(p) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = p + \left[x + \psi'(p)\right]\dfrac{dp}{dx} = p$

$$\Rightarrow \left(x + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0 \qquad (2.8)$$

Từ đó ta có nghiệm $p = C$ và $x + \psi'(p) = 0$

Từ $p = C \Rightarrow y = Cx + \psi(C)$. Đây là một họ đường thẳng.

Từ $x = -\psi'(p) \Rightarrow y = -p\psi'(p) + \psi(p)$.

Vậy ta có nghiệm dạng tham số $\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$ (2.9)

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng nếu $\psi''(p)$ tồn tại và liên tục, $\psi''(p) \neq 0$ thì (2.9) là nghiệm kì dị của phương trình. Nó chính là bao hình của họ đường thẳng trên.

<u>Ví dụ</u>: $y = y'x - \dfrac{1}{4}y'^2$.

Đặt $y' = p \Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}p\right)\dfrac{dp}{dx} = 0$.

* $p = C \Rightarrow y = Cx - \dfrac{1}{4}C^2$

* $x = \dfrac{1}{2}p \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}p^2 - \dfrac{1}{4}p^2 = \dfrac{1}{4}p^2 = x^2$ là nghiệm kì dị.

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

§1. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

1.1.Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp cao

Nếu x là biến độc lập, y là hàm thì phương trình vi phân cấp cao có dạng tổng quát là $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (1.1)

Trong đó nhất thiết $y^{(n)}$ phải có mặt.

Giả sử : Hàm F liên tục theo tất cả các biến và tại điểm $x = x_0, y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ thoả mãn điều kiện

1 $F(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}) = 0$

2 $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ và liên tục tại điểm $M(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)})$

khi đó theo định lý tồn tại hàm ẩn, từ (1.1) ta có thể giải ra trong lân cận điểm M

$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ (1.2)

Để phát biểu định lý tồn tại và duy nhất nghiệm được thuận lợi, ta chuyển (1.2) bằng một hệ n phương trình vi phân tuyến tính cấp một như sau:

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y_1' = \dfrac{dy}{dx} = y_2 \\ y_2' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = y_2 \\ .... \\ y_{n-1}' = ... = y_n \end{cases}$$

Thay các giá trị y_i vào (1.2) ta đưa (1.2) về một hệ n phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.3)$$

Hệ (1.3) là dạng đặc biệt của hệ sau:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.4)$$

Trong (1.4) vế phải chỉ phụ thuộc vào biến và hàm, không phụ thuộc vào đạo hàm. Hệ như vậy được gọi là hệ CHUẨN TẮC.

Đối với (1.4) bài toán côsi được đặt ra như sau:

Hãy tìm nghiệm $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$. Sao cho khi $x = x_0$ thì $y_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ trong đó y_{i0} là các giá trị đầu từ đó suy ra bài toán côsi đối với phương trình cấp n.

Hãy tìm nghiệm $y(x)$ sao cho khi $x = x_0$ thì $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Tất nhiên nảy ra vấn đề là với điều kiện nào thì bài toán côsi tồn tại và duy nhất nghiệm?

1.2.Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét hệ chuẩn tắc (1.4) *với các giá trị đầu* x_0, y_{i0} *tuỳ ý.*

Giả sử rằng:

1, Các hàm $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *liên tục theo các biến của nó trong miền kín giới nội* G
$$\begin{array}{l} x_0 - a \le x \le x_0 + a \\ y_{i0} - b \le y_i \le y_{i0} + b \quad (i = 1..n) \end{array}$$

Trong đó $a, b \in R^+$

(Khi đó từ sự liên tục của các f_i *trong* G *đóng* $\Rightarrow |f_i| \le M \quad (i = 1..n)$*)*

2 Trong miền G *các hàm* f_i *thoả mãn điều kiện Lipsit đối với các biến* y_i *tức là* $\exists N > 0$ *để*

$$\left|f_i(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n) - f(x, \overline{\overline{y}}_1, \overline{\overline{y}}_2, ..., \overline{\overline{y}}_n)\right| \le N\left(\left|\overline{y}_1 - \overline{\overline{y}}_1\right| + ... + \left|\overline{y}_n - \overline{\overline{y}}_n\right|\right).$$

Khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ *của hệ* (1.4) *xác định trong khoảng* $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ *với* $h = \min(a, b/M)$*. Sao cho khi* $x = x_0$ *thì* $y_i(x_0) = y_{i0}$*.* $(i = 1..n)$.

Chú ý: Nếu các hàm f_i có đạo hàm giới nội theo y_i trong G thì nó sẽ thoả mãn điều kiện Lipsit đối với các y_i trong G.

1.3. Phương trình cấp *n*

Xét phương trình $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ (1.5)

Từ định lý tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ chuẩn tắc ta suy ra định lý tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ chuẩn tắc của (1.5) như sau:

Định lý: *Giả sử cho hệ điều kiện đầu*

$$\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array}$$

và giả sử : 1. Hàm $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *liên tục trong miền kín giới nội* G

$$\left|x-x_0\right| \le a, \left|y-y_0\right| \le b, \left|y'-y_0'\right| \le b, ..., \left|y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}\right| \le b.$$

Từ đó $\exists M$ *sao cho* $\left|f\right| \le M$ *trong* G.

2. Hàm f *thoả mãn trong* G *điều kiện Lipsit đối với* $y, y', ..., y^{(n-1)}$ *tức là* $\exists N$ *sao cho* $\left|f(x,\overline{y},...,\overline{y}^{(n-1)})-f(x,\overline{\overline{y}},...,\overline{\overline{y}}^{(n-1)})\right| \le N\left(\left|\overline{y}-\overline{\overline{y}}\right|+...+\left|\overline{y}^{(n-1)}-\overline{\overline{y}}^{(n-1)}\right|\right)$

Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $y(x)$ *xác định liên tục trong* $\left|x-x_0\right| \le h$ *với* $h=\min\left(a, \dfrac{b}{\max\left(M,\left|y\right|,\left|y'\right|,...,\left|y^{(n-1)}\right|\right)}\right)$ *và thoả mãn điều kiện ban đầu đã cho.*

***Định nghĩa nghiệm tổng quát:**

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (1.5) *trong miền* G *thoả mãn điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm là hàm* $\phi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ *có đạo hàm riêng liên tục theo* x *đến cấp* n *và phụ thuộc vào các hằng số* $C_1,C_2,...,C_n$ *sao cho*

1. Từ hệ

$$\begin{aligned}&y=\phi(x,C_1,C_2,...,C_n)\\&y'=\phi'(x,C_1,....,C_n)\\&..................................\\&y^{(n-1)}=\phi_x^{(n-1)}(x,C_1,....,C_n)\end{aligned}$$

có thể giải ra các hằng số $C_i=\psi_i(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

2. Thoả mãn phương trình đang xét với $\forall C_i$ trong miền đang xét.

Tương tự như phương trình vi phân cấp 1 ta có thể đưa ra định nghĩa nghiệm riêng, tích phân tổng quát và nghiệm kì dị của phương trình vi phân cấp cao.

§2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH GIẢI ĐƯỢC BẰNG CẦU PHƯƠNG

2.1.Dạng $F(x,y^{(n)})=0$ (2.1)

Ta xét hai trường hợp:

a) Phương trình (2.1) viết được dưới dạng $y^{(n)} = f(x)$ (2.2)

Trong đó hàm $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$. Khi đó $\frac{d}{dx} y^{(n-1)} = f(x)$

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1 x + C_2 \qquad (2.3)$$

....

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \ldots + C_n$$

Công thức cuối cùng cho ta nghiệm tổng quát của phương trình (2.2) trong miền $a \le x \le b$; $-\infty < y < +\infty$; $-\infty < y' < +\infty$,...........

Bằng cách áp dụng công thức Điriclê (đối với tích phân hai lớp) ta được $\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{(n-1)}dt$, khi đó nghiệm tổng quát (2.3) được viết dưới dạng

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{(n-1)}dt + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \ldots + C_n \qquad (2.4)$$

Chú ý: Số hạng đầu tiên trong (2.4) cũng là nghiệm riêng của phương trình với $C_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $y''' = \ln x$ khi $x = 1, y = y_0, y' = y_0', y'' = y_0''$.

Áp dụng (2.4) ta có:

$$y=\frac{1}{2!}\int_1^x (x-t)^2\ln t dt+\frac{y_0''}{2}(x-1)^2+\frac{y_0'}{1}(x-1)+y_0$$
$$=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{18}+\frac{y_0''}{2}(x-1)^2+y_0'(x-1)+y_0$$

b.Trường hợp từ phương trình (2.1) có thể biểu diễn $x, y^{(n)}$ một cách đơn trị theo t: $x=\phi(t)$ $y^{(n)}=\psi(t)$. Trong đó $\phi(t)$ có đạo hàm liên tục, $\psi(t)$ liên tục. Ta sẽ biểu diễn y theo t.

Vì : $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi(t)\phi'(t)dt$

$$\Rightarrow y^{(n-1)}=\int\psi(t)\phi'(t)dt+C_1=\psi_1(t,C_1)$$
$$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\psi_1(t,C_1)\phi'(t)dt$$

$$\Rightarrow y^{(n-2)}=\int\psi_1'(t,C_1)\phi'(t)dt+C_2=\psi_2(t,C_1,C_2)$$

....

$$y=\psi_n(t,C_1,C_2,....,C_n).$$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng $\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)\end{cases}$

<u>*Ví dụ*:</u> $e^{y''}+y''=x$

Phương trình viết dưới dạng tham số là: $\begin{matrix}x=e^t+t\\ y''=t\end{matrix}$

Do đó $dy'=y''dx=t(e^t+1)dt$

$$\Rightarrow y'=(t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1$$

....

$$dy=y'dx=\left[(t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1\right](e^t+1)dt$$

$$\Rightarrow y = \int \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] (e^t + 1) dt + C_2 .$$

Hay $\begin{cases} x = e^{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4} \right) e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} - 1 + C_1 \right) e^t + \dfrac{t^2}{6} + C_1 t + C_2 \end{cases}$

2.2.Dạng $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (2.5)

a) Giả sử từ (2.5) có thể giải ra $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. Đặt $z = y^{(n-1)}$ ta được $z' = f(z)$ đó là phương trình tách biến.

Giải ra ta được $z = \omega(x, C_1)$.

Ta trở về trường hợp phương trình (2.2) trong phần (1,a).

Nếu không giải được ra $z = \omega(x, C_1)$ nhưng biểu diễn được dạng tham số $\begin{cases} x = \phi(t) \\ z = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \phi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi(t) \end{cases}$ và ta trở về trường hợp (1,b) phương trình đã biết cách giải.

b) Nếu phương trình (2.5) biểu diễn một cách đơn trị theo tham số t.

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$$

thì từ $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx \Rightarrow \phi'(t) dt = \psi(t) dx \Rightarrow dx = \dfrac{\phi'(t) dt}{\psi(t)}$

do đó $x = \int \dfrac{\phi'(t) dt}{\psi(t)} + C_1 \Rightarrow x = \phi_1(t, C_1)$.

Khi đó $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \dfrac{\phi(t)\phi'(t)}{\psi(t)} dt + C_2 = \psi_1(t, C_2)$

....

$$y = \psi_{n-1}(t, C_2, ..., C_n).$$

Ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình dạng tham số:

$$\begin{cases} x = \phi_1(t, C_1) \\ y = \psi_{(n-1)}(t, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

<u>*Ví dụ*</u>: Xét phương trình $ay'' = -\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

Đặt $z = y' \Rightarrow az' = -\left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ hay $\dfrac{dz}{\left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1}{a}dx$

$$\Rightarrow -\frac{x}{a} = \int \frac{dz}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + C_1.$$

Ta có: Đặt $z = tg\phi \Rightarrow \int \dfrac{dz}{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}} = \sin\phi$.

Vậy ta có nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} x = -a\sin\phi + C_1 \\ y = a\cos\phi + C_2 \end{cases}$

Hay $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$

2.3. Dạng $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ (2.6)

a) Nếu từ (2.6) $\Rightarrow$ $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$.

Ta đặt $z = y^{(n-2)} \Rightarrow z'' = f(z)$. Nhân cả hai vế với $2z'$ $(z' \neq 0)$ ta được $2z'z'' = 2z'f(z)$ hay $d(z'^2) = 2f(z)dz \Rightarrow z'^2 = \int 2f(z)dz + C_1$.

Vậy $z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}$ hay $dz = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}\,dx$.

$$\Rightarrow dx = \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}}.$$

Hay $\Phi(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0$. Đây là phương trình dạng (1).

b) Giả sử rằng phương trình không giải ra được $y^{(n)}$ nhưng có thể biểu diễn một cách đơn trị theo tham số t $\begin{cases} y^{(n-2)} = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$

Khi đó $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \phi'(t)dt$

$$\Rightarrow y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}y^{(n-1)}dx = \psi(t)\phi'(t)dt$$

Hay $d\left[\frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2\right] = \psi(t)\phi'(t)dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2 = \int \psi(t)\phi'(t)dt + C_1$

$\Rightarrow y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\phi'(t)dt + C_1} = \psi_1(t, C_1)$. Kết hợp với $y^{(n-2)} = \phi(t)$ ta đưa về trường hợp (2,b)

§3. TÍCH PHÂN TRUNG GIAN - PHƯƠNG TRÌNH HẠ CẤP ĐƯỢC

3.1. Tích phân trung gian

Xét phương trình $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (3.1)

Bằng cách tích phân ta thường đi đến các hệ thức trước:

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-k)}, C_1, ..., C_k) = 0 \quad (k \le n) \tag{3.2}$$

Hệ thức đó gọi là tích phân trung gian của phương trình (3.1), nó là phương trình cấp $(n-k)$. Như vậy nếu tìm được tích phân trung gian $\Rightarrow$ ta đã hạ được cấp của phương trình.

Nếu tích phân trung gian chứa $y^{(n-1)}$:$\Phi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, C_1) = 0$ thì nó được gọi là TÍCH PHÂN ĐẦU.

3.2. Các trường hợp phương trình hạ cấp được nhờ tích phân trung gian

a) Phương trình không chứa rõ hàm phải tìm.

$$F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (k \geq 1) \qquad (3.3)$$

Đặt $y^{(k)} = z$ khi đó phương trình trở thành $F(x, z, ..., z^{(n-k)}) = 0$ (3.4)

Giả sử ta tìm được tích phân tổng quát: $\Phi(x, z, C_1, ..., C_{n-k}) = 0$ hay $\Phi(x, y^{(k)}, C_1, ..., C_{n-k}) = 0$. Đây là phương trình cấp k đã được xét và cũng là tích phân trung gian của (3.3).

c) Phương trình không chứa rõ biến độc lập $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (3.5)

Xem y là biến độc lập và đặt $y' = p$ là hàm phải tìm theo y.

$$y' = p = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

....

$$y^{(n)} = \omega(p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{(n-1)}})$$

Vậy (3.5) trở thành $F\left[y, p, p\frac{dp}{dy}, ..., \omega(p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}})\right] = 0$. Đây là phương trình cấp $(n-1)$, giả sử tìm được tích phân tổng quát là: $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$. Ta nhận được phương trình loại $F(y, p) = 0$ đã biết cách giải.

Ví dụ: Xét phương trình $(1+y^2)yy'' = \left(3y^2 - 1\right)y'^2$.

Đặt $y' = p$ và xem y là biến độc lập. $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

phương trình có dạng $\left(1+y^2\right)yp\dfrac{dp}{dy} = \left(3y^2 - 1\right)p^2$

hay $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{3y^2 - 1}{\left(1+y^2\right)y}dy \quad (p \neq 0)$

$\Rightarrow \ln|p| = 2\ln\left(1+y^2\right) - \ln|y| + \ln|C_1|$

hay $\dfrac{py}{(1+y^2)^2}=C_1 \Rightarrow \dfrac{yy'}{\left(1+y^2\right)^2}=C_1$.

Đây là tích phân đầu của phương trình. Lấy tích phân lần nữa ta được

$\dfrac{1}{1+y^2}=-2C_1x+C_2$. Khi $p=0 \Rightarrow y=C$ cũng là nghiệm.

3.3. Phương trình thuần nhất đối với hàm và đạo hàm

Xét $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$ trong đó $F\left(x,ty,ty',...,ty^{(n)}\right)=t^mF\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$

m được gọi là bậc thuần nhất.

Cách giải: Đặt $y'=yz$ xem z là hàm phải tìm khi đó ta có

$$\begin{aligned}
&y'=yz\\
&y''=y'z+yz'=y\left(z^2+z'\right)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y^{(n)}=y\omega\left(z,z',...,z^{(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

thay vào ta có:

$$F\left(x,y,yz,y(z^2+z'),...,y\omega(z,z',...,z^{(n-1)})\right)=y^mF\left(x,1,z,z^2+z',...,\omega(z,z',...,z^{(n-1)})\right)=0$$

Do đó: $F\left(x,1,z,z^2+z',...,\omega(z,z',...,z^{(n-1)})\right)=0$.

Giả sử ta tìm được tích phân tổng quát của phương trình cấp $n-1$ là

$\Phi\left(x,z,C_1,C_2,...,C_{n-1}\right)=0$.

$\Rightarrow z=z\left(x,C_1,...,C_{n-1}\right)$. Trở về biến cũ ta được

$\dfrac{y'}{y}=z\left(x,C_1,...,C_{n-1}\right) \Rightarrow y=C_ne^{\int z\left(x,C_1,...,C_{n-1}\right)dx}$.

Ví dụ: $x^2yy''=(y-xy')^2$ Đặt $y'=yz\Rightarrow y''=yz'+y'z=y(z^2+z')$ Thay vào ta có $x^2yy(z^2+z')=(y-xyz)^2\Rightarrow z^2+z'=\frac{1}{x^2}(1-xz)^2\Rightarrow x^2z'+2xz-1=0$. Tích phân phương trình tuyến tính ta được $z=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}$ hay $\frac{y'}{y}=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}$ do đó $y=C_2xe^{\frac{-C_1}{x}}$

3.4. Phương trình mà vế trái là đạo hàm đúng

Giả sử từ $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ ta biểu diễn thành $\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=0$.

Khi đó ta nhận được tích phân đầu $\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=C_1$. Như vậy ta đã hạ được một cấp của phương trình.

Ví dụ: $\frac{y'''}{y''}-\frac{3y'y''}{1+y'^2}=0$.

Giải:

Từ phương trình $\Rightarrow\frac{d}{dx}\left[\ln|y''|-\frac{3}{2}\ln(1+y'^2)\right]=0$. Ta được tích phân đầu:

$$\ln|y''|-\frac{3}{2}\ln(1+y'^2)=\ln|C_1|$$

hay $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}-C_1=0\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-C_1x\right]=0$

$\Rightarrow\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-C_1x=C_2$. Đây là phương trình vi phân cấp một có thể tích phân được.

Chương 5
LÝ THUYẾT TỔNG QUÁT
VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa: *Phương trình vi phân tuyến tính cấp* n *là phương trình có dạng* $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = \phi(x)$ $a_0(x) \neq 0$. *Nếu* $\phi(x) \equiv 0$ *thì phương trình được gọi là phương trình thuần nhất.*

Thường ta xét dạng:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \qquad (1.1)$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad (1.2)$$

Nếu đưa vào toán tử vi phân: $L_n = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + p_n(x)$. Thì (1.1) và (1.2) được viết dưới dạng $L_n[y] = f(x),\ L_n[y] = 0$.

1.2. Tính chất

a) Phương trình $L_n[y] = f(x)$ vẫn còn là tuyến tính cấp n nếu ta dùng phép thế biến $x = \phi(\xi)$

b) Phương trình $L_n[y] = f(x)$ vẫn còn là phương trình tuyến tính cấp n nếu ta dùng phép thế $y = V(x)Z + \eta(x)$. Trong đó V, Z, η là các hàm khả vi liên tục n lần theo $x, Z -$ hàm mới phải tìm và $V(x) \neq 0\ \ \forall x \in (a,b)$.

1.3. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Ta viết phương trình (1.1) dạng $y^{(n)} = F\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$.

Giả sử : $\forall x \in (a,b)$ thì các hệ số $p_i(x), f(x)$ là các hàm số liên tục.

Do $F\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)=-p_1y^{(n-1)}-p_2y^{(n-2)}-...-p_ny+f(x)$

do đó $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-k)}}\right|=\left|-p_k(x)\right|$.

Vì vậy $\forall x\in[\alpha,\beta]\in(a,b)$ thì $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-k)}}\right|\le N$ (theo tính chất liên tục của $p_k(x)$). $\Rightarrow\left|F\left(x,\overline{y},\overline{y}',...,\overline{y}^{(n-1)}\right)-F\left(x,\overline{\overline{y}},...,\overline{\overline{y}}^{(n-1)}\right)\right|\le N\sum_{i=0}^{n-1}\left|\overline{y}^{(i)}-\overline{\overline{y}}^{(i)}\right|$. Tức là điều kiện Lipsit thoả mãn trên đoạn $[\alpha,\beta]\in(a,b)\Rightarrow\exists$ duy nhất nghiệm $y(x)$ của bài toán Côsi đối với phương trình (1.1) trong khoảng $x_0-h\le x\le x_0+h$.

Tuy nhiên ta chứng minh được rằng nghiệm được xác định như vậy sẽ tồn tại trong khoảng (a,b).

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Xét phương trình thuần nhất $L_n[y]=0$ (2.1)

2.1. Tính chất của toán tử L_n

* $L_n[y_1+y_2]=L_n[y_1]+L_n[y_2]$

* $L_n[Cy]=CL_n[y]$

(chứng minh các tính chất này đơn giản)

Tổng quát: $L_n\left[\sum C_ky_k\right]=\sum C_kL_n[y_k]$ (2.2)

Từ (2.2) $\Rightarrow$ nếu $y_k(x)$ là nghiệm của (2.1) thì $\sum_{k=1}^{n}C_ky_k$ cũng là nghiệm của (2.1).

2.2. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

Xét hệ hàm $\{\phi_k(x)\}$ xác định trong khoảng (a,b).

Định nghĩa: *Hệ hàm* $\{\phi_k(x)\}$ *được gọi là phụ thuộc tuyến tính trong khoảng* (a,b) *nếu tồn tại các hằng số* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ *không đồng thời bằng không sao cho*

$$\alpha_1\phi_1(x)+\alpha_2\phi_2(x)+...+\alpha_n\phi_n(x)\equiv 0 \quad \forall x\in(a,b) \qquad (2.3)$$

Nếu không tồn tại các α_i như vậy để đồng nhất thức (2.3) thoả mãn thì ta nói $\{\phi_k(x)\}$ là độc lập tuyến tính.

Ví dụ: a) Các hàm $1,\sin^2(x),\cos^2(x)$ là phụ thuộc tuyến tính trong $(-\infty,+\infty)$

b) Các hàm $1,x,x^2$ là độc lập tuyến tính trong $(-\infty,+\infty)$.

2.3. Định thức Wrônxki

a) Định nghĩa: Cho hệ hàm $\{\phi_k(x)\}$ $(k=1..n)$ có đạo hàm đến cấp $(n-1)$. Khi đó

định thức $$\begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x),........., y_n(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x),........., y_n'(x) \\ .... & \\ y_1^{(n-1)}(x), & y_2^{(n-1)}(x)......, y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Được gọi là định thức Wrônxki của các hàm $\{\phi_k(x)\}$.

Ký hiệu $W[y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)]$.

b) ***Định lý 1***: *Nếu các hàm* $\{\phi_k(x)\}$ *phụ thuộc tuyến tính thì định thức Wrônxki đồng nhất bằng không.*

Theo giả thiết ta có

$$\alpha_1\phi_1(x)+\alpha_2\phi_2(x)+...+\alpha_n\phi_n(x)\equiv 0 \quad \forall x \quad \sum\alpha_i^2\neq 0 \ (2.4).$$

Vi phân (2.4) theo x $(n-1)$ lần ta được

$$\begin{cases} \alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n=0 \\ \alpha_1y_1'+\alpha_2y_2'+...+\alpha_ny_n'=0 \\ .... \\ \alpha_1y_1^{(n-1)}+\alpha_2y_2^{(n-1)}+...+\alpha_ny_n^{(n-1)}=0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

Tại $\forall x \in (a,b)$ hệ (2.5) là hệ phương trình đại số thuần nhất với các nghiệm α_i. Để hệ có nghiệm thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\ 2} \neq 0$. Thì $\det \equiv 0$ tức là $W\left[y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right] \equiv 0$.

Chú ý: Điều ngược lại nói chung không đúng, tức là nếu $W(x) \equiv 0$ chưa đủ đảm bảo cho $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ phụ thuộc tuyến tính (đối với phương trình $L_n\left[y\right]$ thì đúng).

c***) Định lý 2***: *Nếu các hàm* $y_1, y_2,..., y_n$ *là các nghiệm của phương trình* (2.1) *và độc lập tuyến tính trong* (a,b) *liên tục của các hệ số* $p_i(x)$ *của phương trình thì* $W\left[y_1, y_2,..., y_n\right] \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Chú ý mở đầu: Nghiệm thoả mãn bài toán Côsi $x = x_0$ thì $y(x_0) = 0,..., y^{(n-1)}(x_0) = 0$ của phương trình (2.1) phải là nghiệm $y \equiv 0$ do tính duy nhất nghiệm.

Ta chứng minh định lý bằng phản chứng.

Giả sử tại $x = x_0$ thì $W\left[y_1(x_0), y_2(x_0),..., y_n(x_0)\right] = 0 \quad x_0 \in (a,b)$. Ta chọn các hằng số α_i không đồng thời bằng không sao cho hệ phương trình sau được thoả mãn

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) \quad = 0 \\ \text{...} \\ \text{...} \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \text{...............} + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Việc chọn có thể làm được vì $W(x_0) = 0$.

Xét hàm $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x)$ đây là nghiệm của phương trình (2.1) thoả mãn bài toán Côsi. $x = x_0$ thì $y^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 0..n-1) \Rightarrow y(x) \equiv 0$ theo tính chất duy nhất nghiệm. Tức là $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow \left\{y_k(x)\right\}$ là phụ thuộc tuyến tính điều này vô lý.

Chú ý: Do các định lý 1,2 suy ra W lập nên bởi n nghiệm của phương trình (2.1) hoặc đồng nhất bằng không hoặc khác không tại $\forall x \in (a,b)$.

2.4. Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa: *Một hệ gồm n nghiệm riêng của phương trình $L_n[y]=0$ xác định và độc lập tuyến tính được gọi là một hệ nghiệm cơ bản của phương trình trong khoảng đang xét.*

Định lý 3: *Mọi phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất đều có một hệ nghiệm cơ bản.*

Xét phương trình $L_n[y]=0$. Ta chọn một định thức cấp n sao cho $\Delta = \det(a_{ij}) \neq 0$ trong đó $a_{ij} = const$ và lập n nghiệm riêng $y_k(x)$ $k=1..n$ sao cho khi $x = x_0 \in (a,b)$ thì $y_k(x_0) = a_{k1}, y'_k(x_0) = a_{k2}, ..., y_k^{(n-1)}(x_0) = a_{kn}$.

Rõ ràng $W[y_1(x_0),...,y_n(x_0)] = \det(a_{ij}) \neq 0$.

Như vậy $\{y_k(x)\}$ là độc lập tuyến tính, hay $\{y_k(x)\}$ lập thành một hệ nghiệm cơ bản của phương trình $L_n[y]=0$.

Chú ý: + Nếu chọn $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix}$

thì hệ nghiệm cơ bản được lập bằng cách trên được gọi là hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc.

+ Mọi phương trình thuần nhất cấp hai đều luôn luôn tồn tại n nghiệm độc lập tuyến tính.

Định lý 4: Nếu $\{y_k(x)\}$ $k=1..n$ là một hệ nghiệm cơ bản của phương trình $L_n(y)=0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \qquad (2.6)$$

Trong đó $C_k = const$.

Ta phải chứng minh hai điều:

- Hàm $y(x)$ xác định từ (2.6) thoả mãn $L_n(y) = 0$ điều này hiển nhiên theo tính chất của toán tử L_n .

- Từ hệ $\begin{cases} y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \\ y'(x) = C_1 y_1' + C_2 y_2' + ... + C_n y_n' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x) = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} \end{cases}$

  Ta có thể giải ra các hằng số $C_k \quad k = 1..n$ nhưng điều này cũng đúng vì $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Chú ý: Công thức (2.6) cho $\forall$ nghiệm riêng của phương trình $L_n(y) = 0$.

Thật vậy ta tìm nghiệm riêng $y(x)$ sao cho $y(x_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, tức là phải $\exists C_k$ để $y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$.

Xét hệ: $\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$

Vì $W \neq 0$ do tính chất độc lập tuyến tính $\Rightarrow \exists C_k$ để $y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$.

Nếu $y_1(x), ..., y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc thì nghiệm của bài toán Côsi là $y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + ... + y_0^{(n-1)} y_n(x)$.

Ví dụ: Xét phương trình $y'' - y = 0$. Dễ thấy phương trình có hai nghiệm $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ và $W[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$ là độc lập tuyến tính. Đây là hệ nghiệm cơ bản vì $n = 2 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát là $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$

Định lý 5: *Nếu ta có* $(n+1)$ *nghiệm riêng* $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ *thì các nghiệm đó sẽ phụ thuộc tuyến tính.*

Chứng minh.

Giả sử $y_1, y_2, ..., y_n$ là phụ thuộc tuyến tính thì hiển nhiên định lý đúng.

Giả sử $y_1, y_2, ..., y_n$ là độc lập tuyến tính, khi đó $y_1, y_2, ..., y_n$ lập nên một hệ nghiệm cơ bản. Do đó theo định lý 3 thì $y_{n+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \Rightarrow y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ phụ thuộc tuyến tính (đpcm).

Chú ý: Từ định lý 3 và 5 $\Rightarrow$ $\forall$ phương trình $L_n[y] = 0$ đều có đúng n nghiệm độc lập tuyến tính.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT

3.1. Tính chất: Xét phương trình $L_n[y] = f(x)$ $\quad (3.1)$

Phương trình thuần nhất tương ứng là $L_n[y] = 0$ $\quad (3.2)$

Định lý: *Nếu biết được một nghiệm riêng của* (3.1) *thì nghiệm tổng quát của* (3.1) *là tông của nghiệm riêng đó với nghiệm tổng quát của* (3.2).

Chứng minh.

Giả sử y^* là nghiệm riêng của (3.1), $\{y_k\}$ là hệ nghiệm cơ bản của (3.2) khi đó ta cần phải chứng minh $y = \sum C_k y_k + y^*$ là nghiệm tổng quát của (3.1).

* Hiển nhiên $L_n[y] = L_n\left[\sum C_k y_k\right] + L_n\left[y^*\right] = f(x)$ đúng với $\forall C_k$.

* Từ hệ $\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = y - y^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_ny_n^{(n-1)} = y^{(n-1)} - y^{*(n-1)} \end{cases}$

giải ra được C_k vì $W \neq 0$. (đpcm)

3.2. Phương pháp biến thiên hằng số

Giả sử $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình $L_n[y] = 0$ Khi đó $y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ (3.3)

(Trong đó C_k $(k = 1..n)$ là các hằng số tuỳ ý) là nghiệm tổng quát của phương trình.

Để tìm nghiệm của phương trình $L_n[y] = f(x)$ ta coi $C_k = C_k(x)$ ta có $y'(x) = C_1y_1' + \ldots + C_ny_n' + \dfrac{dC_1}{dx}y_1 + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx}y_n$. Để cho biểu thức của $y'(x)$ đơn giản ta chọn $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sao cho $\dfrac{dC_1}{dx}y_1 + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx}y_n = 0$.

Khi đó $y''(x) = C_1y_1'' + \ldots + C_ny_n'' + \dfrac{dC_1}{dx}y_1' + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx}y_n'$. Ta chọn C_k sao cho $\dfrac{dC_1}{dx}y_1' + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx}y_n' = 0$.

………………

Cuối cùng $y^{(n)}(x) = C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + \dfrac{dC_1}{dx}y_1^{(n-1)} + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx}y_n^{(n-1)}$.

Thay các đạo hàm vừa tìm được vào phương trình $L_n[y] = f(x)$ ta có $\sum\limits_{i=1}^{n} C_iL_n[y_i(x)] + \dfrac{dC_1}{dx}y_1^{(n-1)} + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx}y_n^{(n-1)} = f(x)$.

Hay $\dfrac{dC_1}{dx}y_1^{(n-1)} + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx}y_n^{(n-1)} = f(x)$.

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dx}y_1 + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n = 0 \\ \frac{dC_1}{dx}y_1' + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dC_1}{dx}y_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \quad (3.4)$$

Do $W\left[y_1,\ldots,y_n\right] \neq 0$ nên từ $(3.4) \Rightarrow$ giải ra duy nhất các $\frac{dC_i}{dx}$.

Giả sử $\frac{dC_i}{dx} = \phi_i(x) \Rightarrow C_i = \int \phi_i\left(x\right)dx + \alpha_i$ vậy

$$y\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \phi_i(x)dx \qquad (3.5)$$

(3.5) là nghiệm tổng quát của phương trình $L_n\left[y\right] = f(x)$.

Chú ý: (3.5) gồm hai thành phần

+ Thành phần đầu $\sum \alpha_i y_i$ là nghiệm tổng quát của $L_n\left[y\right] = 0$.

+ Thành phần thứ hai $\sum y_i \int \phi_i(x)dx$ là một nghiệm riêng của phương trình $L_n\left[y\right] = f(x)$.

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = x$

Xét phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = 0 \Rightarrow \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$ Do đó $y' = Ax$ và $y = \frac{1}{2}Ax^2 + B \Rightarrow$

chọn hệ nghiệm cơ bản là $\begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y = C_1 x^2 + C_2$ coi $C_1 = C_1(x)$ và $C_2 = C_2(x)$ ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx}x^2 + \dfrac{dC_2}{dx} = 0 \\ 2x\dfrac{dC_1}{dx} + 0 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{dC_2}{dx} = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Vậy $C_1 = \dfrac{x}{2} + \alpha_1$; $C_2 = -\dfrac{x^3}{6} + \alpha_2$.

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là $y = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 + x^3/3$

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ HỆ SỐ HẰNG SỐ.

Dạng $L_n^*[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$ (4.1)

Trong đó a_i $(i = 1..n)$ là các hằng số $\in R$, $f(x)$ là hàm liên tục trong (a,b).

4.1. Phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số.

Xét phương trình $L_n^*[y] = 0$ (4.2)

Phương trình (4.2) có thể giải được bằng phép tính đại số:

Đặt $y = e^{kx}$ và ta chọn k để thoả mãn phương trình.

Ta có $L_n^*\left[e^{kx}\right] = e^{kx}\left[k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n\right] = 0$.

Ký hiệu $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ và gọi là phương trình đặc trưng của (4.2). Khi đó để $y = e^{kx}$ là nghiệm của (4.2) thì k phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $F(k) = 0$.

Ta xét các trường hợp sau:

a) Phương trình $F(k) = 0$ có nghiệm đơn $k_1, k_2, ..., k_n$ khác nhau.

Khi đó rõ ràng $y_i = e^{k_i x}$ $(i = 1..n)$ là các nghiệm riêng của phương trình (4.2).

Chú ý: Trong trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức $k=\alpha \pm i\beta$ thì thay cho nghiệm $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ của phương trình (4.2) ta sẽ có hai nghiệm thực là $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$ và $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$. Điều này được khẳng định từ bổ đề.

Bổ đề: *Nếu phương trình $L_n^*\left[y\right]=0$ có nghiệm $y=u(x)+iv(x)$, trong đó $u(x),v(x)$ là các hàm thực thì các hàm $u(x),v(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (đối với phương trình $L_n\left[y\right]=0$ cũng đúng).*

Do $e^{(\alpha \pm i\beta)x}=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x \pm i\sin\beta x\right)$ nên theo bổ đề ta có điều khẳng định trên.

Tập các hàm $e^{k_i x}, e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ độc lập tuyến tính trong khoảng $\left(-\infty,+\infty\right)$ do đó chúng lập nên một hệ nghiệm cơ bản.

<u>*Ví dụ 1*</u>: Xét phương trình $y'''-3y''+2y'=0$.

Phương trình đặc trưng tương ứng $k^3-3k^2+2k=0$

$\Rightarrow k_1=0, k_2=1, k_3=2$ do đó $y_1=1; y_2=e^x; y_3=e^{2x}$.

Nghiệm tổng quát $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{2x}$.

<u>*Ví dụ 2*</u>: $y'''-3y''+9y'+13y=0$.

Phương trình đặc trưng $k^3-3k^2+9k+13=0$

$k_1=-1; k_2=2+3i; k_3=2-3i$

$\Rightarrow y_1=e^{-x}; y_2=e^{2x}\cos 3x; y_3=e^{2x}\sin 3x$

Nghiệm tổng quát $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\cos 3x+C_3e^{2x}\sin 3x$.

b) Phương trình đặc trưng có nghiệm thực $k=k_i$ bội m.

Trong trường hợp này ta chứng minh rằng phương trình (4.2) có các nghiệm riêng $y_1=e^{k_i x}; y_2=xe^{k_i x}; \ldots; y_m=x^{m-1}e^{k_i x}$ (4.3)

Ta chú ý rằng: Nếu $u = u(x,k)$ thì

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j} L_n^*\left[u(x,k)\right] = L_n^*\left[\frac{\partial^j u(x,k)}{\partial k^j}\right] \text{ (tự chứng minh đơn giản).}$$

Ta chứng minh $L_n^*\left[x^j e^{k_i x}\right] = 0$ với $j = 0..m-1$.

Vi phân đồng nhất thức $L_n^*\left[e^{kx}\right] = F(k)e^{kx}$ j lần theo k.

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j}\left[L_n^*\left[e^{kx}\right]\right] = \left[e^{kx}F(k)\right]^{(j)} = \sum_{l=0}^{j} C_j^l F^{(l)}(k) x^{j-l} e^{kx}$$

mặt khác theo chú ý ta có

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j}\left[L_n^*\left[e^{kx}\right]\right] = L_n^*\left[\frac{\partial^j}{\partial k^j} e^{kx}\right] = L_n^*\left[x^j e^{kx}\right].$$

Do đó

$$L_n^*\left[x^j e^{kx}\right] = \sum_{l=0}^{j} C_j^l F^{(l)}(k) x^{j-l} e^{kx},$$

đặt $k = k_i \Rightarrow L_n^*\left[x^j e^{k_i x}\right] = \sum_{l=0}^{j} C_j^l F^{(l)}(k_i) x^{j-l} e^{k_i x}$.

Nhưng vì k_i là nghiệm bội m của phương trình

$$F(k) = 0 \Rightarrow F(k_i) = 0, F'(k_i) = 0, \ldots, F^{(m-1)}(k_i) = 0, F^{(m)}(k_i) \neq 0.$$

Do đó $L_n^*\left[x^j e^{k_i x}\right] = 0 \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, m-1$ (đpcm).

Ta chú ý hệ nghiệm (4.3) là độc lập tuyến tính trong $(-\infty, +\infty)$.

c) Phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp $\alpha_j \pm i\beta_j$ bội m.

Ta chứng minh rằng trong trường hợp này phương trình có $2m$ nghiệm thực

$$y_1 = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, y_2 = e^{\alpha_j x} x\cos\beta_j x, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x$$

$$y_{m+1} = e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, y_{m+2} = e^{\alpha_j x} x \sin \beta_j x, ..., y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x .$$

Thật vậy theo b) thì (4.2) có các nghiệm

$\overline{y}_1 = e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)x}$ .... $\overline{y}_m = x^{m-1} e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)x}$. Dựa vào bổ đề và công thức ơle ta nhận được $2m$ nghiệm trên, các nghiệm này độc lập tuyến tính trong $(-\infty, +\infty)$.

<u>*Ví dụ*</u>: $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$.

$$F(k) = k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16 = 0$$

có nghiệm $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2i, k_4 = k_5 = -2i$

(nghiệm $2i$ bội 2 ; nghiệm $-2i$ bội 2).

Do đó các hàm

$y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x,\ y_4 = x\cos 2x,\ y_5 = x\sin 2x$ lập thành hệ nghiệm cơ bản $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát là :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x\left(C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x\right)$$

4.2. Phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng số.

Trong phần này ta xét dạng phương trình $L_n^*[y] = f(x)$. Trước hết ta chứng minh một bổ đề quan trọng gọi là NGUYÊN LÝ CHỒNG CHẤT NGHIỆM.

Bổ đề: *xét phương trình* $L_n^*[y] = v_1(x) + v_2(x)$. *Trong đó* $v_1(x), v_2(x)$ *là các hàm liên tục, giả sử* $y_1(x)$ *là nghiệm của* $L_n^*[y] = v_1(x)$

$y_2(x)$ *là nghiệm của* $L_n^*[y] = v_2(x)$.

Khi đó $y_1(x) + y_2(x)$ *là nghiệm của* $L_n^*[y] = v_1(x) + v_2(x)$.

($L_n^*[y_1 + y_2] = L_n^*[y_1] + L_n^*[y_2] = v_1 + v_2$*).*

Ý nghĩa của bổ đề là nếu vế phải $f(x)$ của phương trình không thuần nhất là một hàm phức tạp thì ta có thể phân tích hàm đó thành tổng của nhiều hàm đơn giản và lần lượt giải các phương trình có vế phải là các hàm đơn giản đó. Sau đây ta xét phương trình $L_n^* = f(x)$ (4.4)

Ta xét ba trường hợp.

a) $f(x) = A_0x^S + A_1x^{S-1} + ... + A_S$

b) $f(x) = e^{px}(A_0x^S + A_1x^{S-1} + ... + A_S)$

c) $f(x) = e^{px}\left(P_S(x)\cos qx + Q_S(x)\sin qx\right)$.

Trong đó $P_S(x), Q_S(x)$ là đa thức bậc S, A_i, p là các hằng số.

a) Xét phương trình $f(x) = A_0x^S + A_1x^{S-1} + ... + A_S$

- Giả sử hệ số $a_n \neq 0$ ta chứng minh rằng phương trình có nghiệm riêng là một đa thức bậc S. Ta tìm nghiệm riêng dạng $y^*(x) = B_0x^S + B_1x^{S-1} + ... + B_S$. Thay vào phương trình (4.4) và so sánh các luỹ thừa x^k ta sẽ xác định được các hằng số B_k $(k = 1..S)$ theo A_k.
- Giả sử $a_n = a_{n-1} = ... = a_{n-\alpha+1} = 0$ còn $a_{n-\alpha} \neq 0$ (điều này có nghĩa $k = 0$ là nghiệm bội α của $F(k) = 0$).
  Ta chứng minh rằng phương trình (4.4) có nghiệm riêng dạng $y^*(x) = x^\alpha\left(B_0x^S + B_1x^{S-1} + ... + B_S\right)$. Thật vậy đặt $y^{(\alpha)} = z$ phương trình (4.4) có dạng $z^{(n-\alpha)} + a_1z^{(n-\alpha-1)} + ... + a_{n-\alpha}z = f(x) \Rightarrow$ phương trình có nghiệm riêng $z^* = \overline{B}_0x^S + ... + \overline{B}_S$, do đó tích phân α lần ta thu được $y^* = x^\alpha\left(B_0x^S + ... + B_S\right)$.

<u>*Ví dụ*</u>: $y'' + y' = x - 2$ $(a_n \neq 0, a_{n-1} \neq 0)$.

Ta tìm nghiệm $y^*(x) = x(Ax + B)$, thay vào phương trình vi phân ta nhận được $A = \frac{1}{2}; B = -3$. Nghiệm tổng quát $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{x^2}{2} - 3x$.

b) Trường hợp $f(x) = e^{px}(A_0 x^S + A_1 x^{S-1} + ... + A_S)$.

Đặt $y = e^{px} z$ (z là hàm cần tìm). Thay vào phương trình ta được

$$e^{px}\left[z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + ... + b_n z\right] = e^{px}\left[A_0 x^S + A_1 x^{S-1} + ... + A_S\right]$$

hay $z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + ... + b_n z = A_0 x^S + ... + A_S$. (4.5)

Trong đó $b_i = const \quad (i = 1..n)$, ta lại trở về trường hợp a).

Chú ý rằng nếu xét phương trình đặc trưng của (4.5)

$$\overline{k}^n + b_1 \overline{k}^{n-1} + ... + b_n = 0 \qquad (4.6)$$

và $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ (4.7)

Thì ta thấy nếu (4.6) có nghiệm $\overline{k} = a$ thì (4.7) có nghiệm $k = a + p$.

Vì : nếu $z = e^{ax}$ là nghiệm của (4.5) thì $y = e^{(a+p)x}$ là nghiệm của (4.4).

Vì vậy ta có nhận xét:

1. Nếu $b_n \neq 0$ thì phương trình không có nghiệm $\overline{k} = 0$ hay phương trình (4.7) không có nghiệm $k = p$. Do đó ta đi đến quy tắc:
   Nếu p không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $F(k) = 0$ thì phương trình (4.4) có nghiệm riêng $y^*(x) = e^{px}\left[B_0 x^S + ... + B_S\right]$.

2. Nếu phương trình (4.6) có nghiệm $\overline{k} = 0$ bội α thì phương trình (4.7) có nghiệm $k = p$ bội α. Do đó ta có quy tắc:
   Nếu p là nghiệm bội α của phương trình đặc trưng $F(k) = 0$ thì phương trình (4.4) có nghiệm riêng $y^*(x) = e^{px} x^{\alpha}\left[B_0 x^S + ... + B_S\right]$

<u>*Ví dụ 1*</u>: $y'' + y = e^{3x}(x+1)$ nghiệm riêng $y^* = e^{3x}\left(Ax+B\right)$.

<u>*Ví dụ 2*</u>: $y'' - y = e^{x}\left(x^2-1\right)$ nghiệm riêng $y^* = xe^{x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$.

<u>*Ví dụ 3*</u>: $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x-5)$ $\quad p=-1$ là nghiệm bội 3

$$\Rightarrow y^* = x^3e^{-x}\left(Ax+B\right).$$

c) Trường hợp $f(x) = e^{px}\left(P_S(x)\cos qx + Q_S(x)\sin qx\right)$.

Ta đưa trường hợp này về trường hợp b).

Biến đổi: $\cos qx = \dfrac{1}{2}\left(e^{iqx}+e^{-iqx}\right)$; $\sin qx = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iqx}-e^{-iqx}\right)$

$$\Rightarrow f(x) = e^{(p+iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2}+\frac{Q_S(x)}{2i}\right) + e^{(p-iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2}-\frac{Q_S(x)}{2i}\right)$$

$$V_1(x) = e^{(p+iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2}+\frac{Q_S(x)}{2i}\right) \qquad V_2(x) = e^{(p-iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2}-\frac{Q_S(x)}{2i}\right)$$

(chú ý $V_1(x), V_2(x)$ là liên hợp), áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm ta có:

(*) $p+iq$ không là nghiệm của $F(k)=0 \Rightarrow$ ta tìm nghiệm riêng ứng với vế phải là $V_1(x)$ $\quad y_1^*(x) = e^{(p+iq)x}R_S(x)$. Vì $p+iq$ không là nghiệm của $F(k)=0 \Rightarrow$ $p-iq$ cũng không là nghiệm của $F(k)=0$ do đó ta tìm nghiệm ứng với $V_2(x)$ là $y_2^*(x) = e^{(p-iq)x}T_S(x)$. Vì y_1^*, y_2^* là liên hợp suy ra $R_S(x), T_S(x)$ cũng liên hợp, tức là

$$\begin{aligned} R_S(x) &= \overline{P}_S(x) + i\overline{Q}_S(x) \\ T_S(x) &= \overline{P}_S(x) - i\overline{Q}_S(x) \end{aligned}.$$

Do đó ta có ngiệm riêng của phương trình (4.4) có dạng

$$\begin{aligned} y^* = y_1^* + y_2^* &= e^{(p+iq)x}\left(P_S + iQ_S\right) + e^{(p-iq)x}\left(P_S - iQ_S\right) \\ &= e^{px}\left(2\overline{P}_S\cos qx - 2\overline{Q}_S\sin qx\right) \\ &= e^{px}\left(\overline{\overline{P}}_S(x)\cos qx + \overline{\overline{Q}}_S(x)\sin qx\right). \end{aligned}$$

Ta có quy tắc: *Nếu* $p+iq$ *không phải là nghiệm của* $F(k)=0$ *thì phương trình* (4.4) *có nghiệm riêng dạng* $y^*(x)=e^{px}\left(\bar{\bar{P}}_S(x)\cos qx+\bar{\bar{Q}}_S(x)\sin qx\right)$. *Trong đó* $\bar{\bar{P}}_S$, $\bar{\bar{Q}}_S$ *là đa thức bậc* S *của* x.

(*) Nếu $p\pm iq$ là nghiệm bội α của phương trình $F(k)=0$ thì tương tự như trên ta có quy tắc: *Nếu* $p\pm iq$ *là nghiệm bội* α *của phương trình* $F(k)=0$ *thì* (4.4) *có nghiệm riêng dạng* $y^*(x)=e^{px}x^{\alpha}\left(\bar{\bar{P}}_S(x)\cos qx+\bar{\bar{Q}}_S(x)\sin qx\right)$.

Ví dụ 1: $y''+2y'+2y=e^{-x}\left(x\cos x+3\sin x\right)$.

Phương trình $k^2+2k+2=0$ có nghiệm $-1\pm i$; $p\pm iq=-1\pm i$.

Vậy nghiệm riêng có dạng

$$y^*(x)=xe^{-x}\left[\left(A_1x+B_1\right)\cos x+\left(A_2x+B_2\right)\sin x\right].$$

Ví dụ 2: $y''-y=e^x x\cos x\Rightarrow y^*(x)=e^x\left[\left(A_1x+B_1\right)\cos x+\left(A_2x+B_2\right)\sin x\right]$.

Chú ý: Nếu một trong các đa thức P_S,Q_S có bậc thấp hơn S (đặc biệt $\equiv 0$) thì nói chung cả hai đa thức $\bar{\bar{P}}_S,\bar{\bar{Q}}_S$ vẫn có bậc S.

Chương 6
HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§ 1. KHÁI NIỆM, ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

1.1. Định nghĩa

Cho hệ phương trình vi phân dạng

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, ..., \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \\ \text{...} \\ F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, ..., \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Hệ được gọi là hệ phương trình vi phân cấp một. Trong trường hợp nếu từ hệ (1.1) ta giải ra các đạo hàm

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \text{................................} \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1.2)$$

Trong đó các hàm ở vế phải chỉ phụ thuộc $x, y_1, ..., y_n$, không phụ thuộc các đạo hàm thì hệ như vậy được gọi là hệ chuẩn tắc.

Giới hạn trong chương trình chúng ta chỉ xét hệ chuẩn tắc.

1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm (Xem phần phương trình vi phân cấp cao).

1.3. Các loại nghiệm của hệ chuẩn tắc

a) *Nghiệm tổng quát:* Ta xem $x, y_1, ..., y_n$ như là toạ độ của một điểm trong không gian E_{n+1} $(n+1)$ chiều $(x, y_1, ..., y_n)$, khi đó mỗi nghiệm của (1.2) sẽ ứng với một đường cong trong không gian E_{n+1} và nghiệm tổng quát của hệ (1.2) là hệ hàm

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_2 = y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \qquad (1.3)$$

lập thành một họ đường cong phụ thuộc n tham số.

Nếu hệ (1.2) thoả mãn trong miền D nào đó $\in E_{n+1}$ điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm thì tại mỗi điểm của D chỉ có một và chỉ một đường cong tích phân đi qua.

b) Nghiệm riêng.

Người ta gọi nghiệm riêng của hệ (1.2) là nghiệm mà có được bằng cách cho $C_1, C_2, ..., C_n$ trong nghiệm tổng quát các giá trị xác định $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$

c) Nghiệm kì dị: Nghiệm $y_i = y_i(x)$ $i = 1..n$ được gọi là nghiệm kì dị nếu tại mọi điểm của nó tính chất duy nhất nghiệm bị phá vỡ.

§2. ĐƯA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VỀ PTVP CẤP CAO.

2.1. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Từ phương trình 2 $\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} = x \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} \end{cases}$$

<u>Ví dụ 2</u>: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Từ phương trình đầu $\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt} - x - \dfrac{dx}{dt}$

hay $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow x = C_1e^t + C_2te^t$

$$y = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(3C_1e^t + 3C_2te^t - C_1e^t - C_2e^t - C_2te^t\right)$$

$$= e^t\left(C_1 - \frac{C_2}{2} + C_2t\right).$$

Từ hai ví dụ trên $\Rightarrow$ để giải một hệ phương trình vi phân ta có thể tiến hành như sau:

- Vi phân một phương trình của hệ đã cho để lập một phương trình vi phân cấp cao.
- Giải phương trình vi phân cấp cao đó ta tìm được nghiệm.

Về phương diện lý thuyết ta phải chứng minh hai điều:

a) Với điều kiện nào thì từ hệ $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ ta có thể lập được một phương trình vi phân cấp n đối với một hàm nào đấy, chẳng hạn x_1

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi_1\left(t, x, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right) \qquad (2.1).$$

b) Tiếp đó ta phải chứng minh $\forall$ nghiệm của (2.1) đều ứng với một nghiệm $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ của hệ (1.2).

Về phương diện lý thuyết người ta đã chứng minh rằng nếu các hàm f_i $(i = 1..n)$ liên tục và có đạo hàm riêng liên tục đến cấp $n-1$ theo tất cả các biến thì cả a) và b) đều thoả mãn.

§3. PHƯƠNG PHÁP LẬP TỔ HỢP GIẢI TÍCH

Ví dụ mở đầu.

Xét hệ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Cộng hai vế của phương trình $\Rightarrow \frac{d(x+y)}{dt} = x + y$

hay $\frac{d(x+y)}{x+y} = dt \Rightarrow \ln|x+y| = t + \ln|C_1| \Rightarrow x + y = C_1 e^t$.

Tương tự trừ hai phương trình cho nhau $\Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt \quad \Rightarrow x - y = C_2 e^{-t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = C_1 e^t \\ x - y = C_2 e^{-t} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Tổng quát: Từ hệ $$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \quad (3.1)$$

Có trường hợp có thể giải được bằng cách lập các tổ hợp giải tích tức là lập nên những phương trình vi phân mới là hệ quả của phương trình ban đầu từ đó thu được các hệ thức dạn

$$\Phi\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = C \quad (3.2)$$

Hệ thức (3.2) gọi là tích phân đầu của (3.1). Nếu tìm được k tổ hợp giải tích thì ta sẽ có k tích phân đầu.

$$\begin{cases} \Phi_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = C_1 \\ .... \\ \Phi_k\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = C_k \end{cases} \quad (3.3)$$

Nếu tất cả các tích phân đầu này độc lập tuyến tính tức là có ít nhất một định thức

$$\frac{D\left(\Phi_1, ..., \Phi_k\right)}{D\left(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}\right)} \neq 0 \quad (3.4)$$

Trong đó $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}$ là k hàm nào đấy trong $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thì từ hệ (3.3) ta có thể biểu diễn k hàm chưa biết theo các hàm còn lại rồi thay vào hệ ban đầu ta sẽ hạ được k cấp hệ đó. Tức là đưa được về $n-k$ phương trình.

Nếu $k = n$ và các tích phân đầu độc lập thì các hàm chưa biết đều xác định được từ hệ (3.3).

Ví dụ 2: Xét hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = z - x \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

Cộng 3 phương trình lại $\Rightarrow \dfrac{d\left(x+y+z\right)}{dt}=0 \Rightarrow x+y+z=C_1$. Nhân phương trình đầu với x, phương trình 2 với y, phương trình 3 với z, sau đó cộng 3 phương trình lại $\Rightarrow x\dfrac{dx}{dt}+y\dfrac{dy}{dt}+z\dfrac{dz}{dt}=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=C_2$.

Chú ý: Để tìm các tổ hợp giải tích người ta thường viết (3.1) dưới dạng sau đây gọi là dạng đối xứng:

$$\frac{dx_1}{\phi_1(t,x_1,...,x_n)}=\frac{dx_2}{\phi_2(t,x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{\phi_n(t,x_1,...,x_n)}=\frac{dt}{\phi_0(t,x_1,...,x_n)}$$

Trong đó $\dfrac{\phi_i}{\phi_0}=f_i$.

§ 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

4.1. Định nghĩa

Ta gọi hệ thuần nhất tuyến tính là hệ có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+...+a_{1n}(t)x_n \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+...+a_{nn}(t)x_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

Ký hiệu

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix};\ \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix};\ A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$$

Khi đó (4.1) có dạng $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X$ $(4.1)'$

Tương tự ta có hệ $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$

(4.2)

Trong đó $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ .. \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ (4.2) gọi là hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

Sau đây ta giả sử các $a_{ij}(t),\ f_i(t)$ là các hàm liên tục trong (a,b) khi đó trong $\forall[\alpha,\beta]\in(a,b)$ hệ (4.2) thoả mãn điều kiện định lý tồn tại và duy nhất nghiệm. Sau này ta sẽ thấy đối với (4.2) nghiệm xác định bởi hệ điều kiện đầu với $t_0\in(a,b)$ sẽ tồn tại duy nhất trên toàn khoảng (a,b).

4.2. Toán tử vi phân tuyến tính

Đặt $L[X] = \dfrac{dX}{dt} - A(t)X$, khi đó (4.1) có dạng $L(X)=0$ (4.2) có dạng $L(X) = F(t)$.

a) Tính chất của toán tử L.

$$L[C_1X_1 + C_2X_2] = C_1L[X_1] + C_2L[X_2].$$

b) Một số định lý về nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

* ***Định lý 1***: *Nếu X_i $(i=1..n)$ là các nghiệm của hệ $L(X)=0$ thì $\sum C_kX_k$*

(với $C_k = const$) cũng là nghiệm của hệ phương trình.

* ***Định lý 2***: *Nếu $L(X)=0$ với ma trận $A(t)$ thực có nghiệm phức $X=U+iV$ thì U,V cũng là nghiệm của hệ phương trình đó.*

4.3. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

Giả sử các vector $X_1, X_2, ..., X_n$ xác định trên (a,b).

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ ... \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix} \qquad (i = 1..n)$$

Khi đó ta nói rằng $\{X_i\}$ là phụ thuộc tuyến tính trên (a,b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng không sao cho

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n \equiv 0 \qquad \forall t \in (a,b) \qquad (4.3)$$

Nếu (4.3) chỉ nghiệm đúng với $\forall \alpha_i \equiv 0$ thì $\{X_i\}$ gọi là độc lập tuyến tính trên (a,b).

Chú ý rằng (4.3) tương đương với hệ

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + ... + \alpha_n x_{1n} \equiv 0 \\ .... \\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + ... + \alpha_n x_{nn} \equiv 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình đại số thuần nhất đối với α_i. Để α_i không đồng thời bằng không

$$\Rightarrow W[X_1, X_2, ..., X_n] = \det \begin{pmatrix} x_{11} \ x_{12} \ .... \ x_{1n} \\ .... \\ x_{n1} \ x_{n2} \ .... \ x_{nn} \end{pmatrix} \equiv 0$$

$W[X_1, X_2, ..., X_n]$ gọi là định thức Wronski của $\{X_i\}$.

* ***Định lý 1***: *Nếu n vector $\{X_i\}$ phụ thuộc tuyến tính trên (a,b) thì*

$W[X_1, X_2, ..., X_n] \equiv 0$ trên khoảng đó.

Nhưng điều ngược lại không đúng.

Chẳng hạn $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ta có thể chứng minh theo định nghĩa X_1, X_2 độc lập tuyến tính nhưng $W\left[X_1, X_2\right] \equiv 0$.

Tuy nhiên ta có thể chứng minh rằng nếu $\{X_i\}$ là các nghiệm của phương trình $L(X) = 0$ thì điều ngược lại là đúng.

Định lý 2: *Nếu $W\left[X_1, X_2, ..., X_n\right]$ của các nghiệm $\{X_i\}$ của hệ $L(X) = 0$ triệt tiêu dù chỉ tại một điểm $t = t_0 \in (a,b)$ liên tục của các hệ số của hệ phương trình thì $\{X_i\}$ sẽ phụ thuộc tuyến tính trong khoảng*

$$(a,b) \text{ và } W\left[X_1, X_2, ..., X_n\right] \equiv 0 \quad \forall t \in (a,b).$$

Chứng minh:

Chú ý mở đầu: Nếu $X(t)$ là nghiệm của $L(X) = 0$ sao cho $X(t_0) = 0$ với $t_0 \in (a,b)$ thì $X(t) \equiv 0$ do tính chất duy nhất nghiệm (vì phương trình tồn tại nghiệm $X_0 \equiv 0\ \forall t$).

Theo giả thiết $W\left[X_1, X_2, ..., X_n\right]_{t=t_0} = \det\left(x_{ij}(t_0)\right) = 0$.

Xét phương trình $C_1X_1(t_0) + C_2X_2(t_0) + ... + C_nX_n(t_0) = 0$

Phương trình tương đương với hệ $\begin{cases} C_1x_{11}(t_0) + C_2x_{12}(t_0) + ... + C_nx_{1n}(t_0) = 0 \\ .... \\ C_1x_{n1}(t_0) + C_2x_{n2}(t_0) + ... + C_nx_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$

Do $\det\left(x_{ij}(t_0)\right) = 0 \Rightarrow \exists$ các nghiệm C_i không đồng thời bằng không .

Xét biểu thức $X(t) = \sum C_iX_i(t)$ đây cũng là nghiệm của phương trình $L(X) = 0$ (tính chất của toán tử L) và vì $X(t_0) = 0 \Rightarrow$ theo tính chất duy nhất nghiệm $\Rightarrow X(t) \equiv 0\ \ \forall t \in (a,b)$ hay $\sum C_iX_i(t) \equiv 0 \ \Rightarrow \{X_i\}$ phụ thuộc tuyến tính $\Rightarrow W\left[X_1, X_2, ..., X_n\right] \equiv 0\ \ \forall t \in (a,b)$ (đpcm).

Chú ý: Từ định lý 1 và định lý 2 $\Rightarrow$ W của n nghiệm của hệ phương trình $L(X)=0$ hoặc đồng nhất bằng không hoặc khác không $\forall t\in(a,b)$.

4.4. Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa: *Hệ n nghiệm riêng độc lập tuyến tính $X_1(t),X_2(t),...,X_n(t)$ của hệ phương trình $L(X)=0$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của phương trình.*

Đối với hệ phương trình $L(X)=0$ luôn luôn $\exists$ hệ nghiệm cơ bản. Vì ta chỉ cần chọn n nghiệm riêng $\{X_i\}$ sao cho $W\neq 0$ tại một điểm $t_0\in(a,b)$ khi đó $\Rightarrow\{X_i\}$ sẽ là một hệ nghiệm cơ bản.

Hệ nghiệm cơ bản $\{X_i\}$ mà sao cho $x_{ij}(t_0)=\delta_{ij}$ trong đó $\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ (δ_{ij} ký hiệu Krôneke) gọi là hệ nghiệm CHUẨN TẮC.

* ***Định lý 3***: *Nếu $\{X_i\}$ là hệ nghiệm cơ bản của hệ $L(X)=0$ thì nghiệm tổng quát của hệ phương trình là $X=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i$.*

a) Biểu thức $X=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i$ là nghiệm

b) Từ hệ thức trên ta có thể giải ra các C_i điều này được suy từ $W\left[X_1,X_2,...,X_n\right]\neq 0$

Chú ý: Công thức $\sum C_iX_i$ cho ta mọi nghiệm của phương trình . Giả sử tìm nghiệm $X(t)$ sao cho $X(t_0)=X_0=\begin{pmatrix}x_{10}\\x_{20}\\..\\x_{n0}\end{pmatrix}$.

Khi đó xét hệ

$$\begin{cases}C_1x_{11}(t_0)+C_2x_{12}(t_0)+...+C_nx_{1n}(t_0)=x_{10}\\ \text{...}\\ C_1x_{n1}(t_0)+C_2x_{n2}(t_0)+...+C_nx_{nn}(t_0)=x_{n0}\end{cases}$$

Do $\det\left(x_{ij}(t_0)\right) \neq 0 \Rightarrow$ tìm được C_i theo X_0.

§5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT

Xét hệ dạng $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i$ (5.1)

Hay viết dưới dạng ma trận $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$.

5.1. Một số định lý về nghiệm của hệ phương trình (5.1).

* ***Định lý 1***: *Nếu $\overline{X}$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.1) còn X_1 là nghiệm của hệ $L(X) = 0$ tương ứng thì tổng $\overline{X} + X_1$ là nghiệm của* (5.1).

Chứng minh: (Dựa vào tính chất của toán tử L).

* ***Định lý 2***: *Nghiệm tổng quát X của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất trên khoảng (a,b) (là khoảng liên tục của các hệ số $a_{ij}(t)$ và $f_i(t)$) bằng tổng của nghiệm tổng quát $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng và nghiệm riêng $\overline{X}$ của hệ không thuần nhất.*

$$X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i + \overline{X}$$

Chứng minh:

Ta phải chứng minh hai điều:

a) Thoả mãn (5.1) $\forall C_i$ tuỳ ý điều này suy ra từ tính chất của L.

$$L[X] = L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i + \overline{X}\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[X_i] + L[\overline{X}] = F(t)$$

b) Từ biểu thức $X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i + \overline{X}$ ta có thể giải ra các hằng số C_i.

Thật vậy ta có $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i = X - \overline{X}$ khai triển ra đây là một hệ phương trình đại số tuyến tính đối với C_i và Krame của hệ là $W[X_1, X_2, ..., X_n] \neq 0$.

Ta chú ý rằng công thức $X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i + \overline{X}$ cho ta mọi nghiệm của phương trình (5.1). Để giải bài toán Côsi tìm nghiệm $X(t)$ sao cho tại $t = t_0$ thì $X(t_0) = X_0$ trong đó X_0 là vector tuỳ ý cho trước, ta phải chọn C_i sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t_0) = X(t_0) - \overline{X}(t_0) = X_0 - \overline{X}(t_0).$$

Đây là hệ phương trình đại số tuyến tính đối với C_i và Krame$= W[X_1, X_2, ..., X_n] \neq 0$. Do đó tìm được duy nhất C_i thoả mãn bài toán Côsi.

***Định lý 3**: (Nguyên lý chồng chất nghiệm).

Tổng $\sum_{i=1}^{n} X_i$ *của các nghiệm* X_i *của các hệ phương trình* $L[X] = F_i$ *là*

nghiệm của hệ $L[X] = \sum_{i=1}^{m} F_i$ *trong đó* $F_i = \begin{pmatrix} f_{1i}(t) \\ f_{2i}(t) \\ \cdots \\ f_{ni}(t) \end{pmatrix}$

(Theo tính chất của toán tử L).

* **Định lý 4**: *Nếu hệ* $L[X] = U + iV$ *với các hệ số thực* $a_{ij}(t), u_i(t), v_i(t)$ *có nghiệm* $X = \overline{U} + i\overline{V}$ *trong đó*

$$U = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ .... \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \overline{U} = \begin{pmatrix} \overline{u}_1(t) \\ \overline{u}_2(t) \\ .... \\ \overline{u}_n(t) \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ .... \\ v_n(t) \end{pmatrix} \quad \overline{V} = \begin{pmatrix} \overline{v}_1(t) \\ \overline{v}_2(t) \\ .... \\ \overline{v}_n(t) \end{pmatrix}$$

Thì $\overline{U}$ *và* $\overline{V}$ *sẽ là nghiệm tương ứng của hệ* $L[X] = U$ *và* $L[X] = V$

(Theo tính chất của toán tử L và so sánh các phần thực , ảo).

5.2. Phương pháp biến thiên hằng số

Phương pháp gồm hai bước

* Bước 1: Tìm hệ nghiệm cơ bản $X_1, X_2, ..., X_n$ của hệ thuần nhất tương ứng $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát $X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ $\quad (5.2)$

* Bước 2: Xem $C_i = C_i(t)$ và chọn $C_i(t)$ sao cho biểu thức $\sum_{i=1}^{n} C_i(t) X_i$ thoả mãn $L[X] = F(t)$.

Vi phân (5.2) theo t ta được $\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \frac{dX_i}{dt} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} X_i + A(t) \sum_{i=1}^{n} C_i(t) X_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} X_i = \frac{dX}{dt} - A(t) \sum_{i=1}^{n} C_i(t) X_i = F(t)$$

(5.3)

(5.3) là phương trình vector tương đương với hệ

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} x_{1i} = f_1(t) \\ .... \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} x_{ni} = f_n(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

Krame $= W\left[X_1, X_2, ..., X_n\right] \neq 0 \Rightarrow$ giải ra duy nhất $\dfrac{dC_i(t)}{dt} = \phi_i(t)$

$\Rightarrow C_i = \int \phi_i(t)dt + \overline{C}_i$. Thay giá trị của các C_i vào (5.2) ta được

$$X = \sum_{i=1}^{n}\left(\int \phi_i(t)dt + \overline{C}_i\right)X_i \text{ hay } X = \sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i X_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \phi_i(t)dt\right)X_i .$$

Từ công thức trên ta thấy X là tổng của nghiệm tổng quát và một nghiệm riêng.

Ví dụ: Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$$

Bước 1:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = C_1\cos t + C_2\sin t \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t \end{array}$$

Bước 2:

Xem $C_i = C_i(t)$ thay vào hệ ta được (thay trực tiếp)

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1(t)}{dt}\cos t + \dfrac{dC_2(t)}{dt}\sin t = 0 \\ -\dfrac{dC_1(t)}{dt}\sin t + \dfrac{dC_2(t)}{dt}\cos t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1(t) = \ln\left|\cos t\right| + \overline{C}_1 \ ; \ C_2(t) = t + \overline{C}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \overline{C}_1\cos t + \overline{C}_2\sin t + \cos t\ln\left|\cos t\right| + t\sin t \\ y = -\overline{C}_1\sin t + \overline{C}_2\cos t - \sin t\ln\left|\cos t\right| + t\cos t \end{cases}$$

§6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT CÓ HỆ SỐ HẰNG SỐ

Đó là hệ phương trình vi phân có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (6.1)$$

Trong đó a_{ij} là các hằng số.

Ta có thể giải hệ (6.1) mà không cần đưa nó về phương trình vi phân cấp cao. Ta sẽ tìm nghiệm của hệ (6.1) dưới dạng sau

$$x_1 = p_1e^{\lambda t}, x_2 = p_2e^{\lambda t}, \dots, x_n = p_ne^{\lambda t} \qquad (6.2)$$

Trong đó $p_1, p_2, \dots, p_n, \lambda$ là những hằng số mà ta sẽ xác định.

Thế các biểu thức (6.2) vào (6.1), ta được hệ phương trình đại số tuyến tính sau đây đối với $p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 + \dots + a_{1n}p_n = 0 \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 + \dots + a_{2n}p_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)p_n = 0 \end{cases} \qquad (6.3)$$

Đó là một hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất, nó phải có nghiệm khác không, do đó định thức của ma trận các hệ số của nó phải bằng không.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.4)$$

Phương trình (6.4) được gọi là phương trình đặc trưng của hệ (6.1), nó là một phương trình đại số bậc n đối với λ. Nghiệm của nó được gọi là giá trị riêng của hệ.

Ta xét các trường hợp sau:

a)Phương trình đặc trưng (6.4) có n nghiệm thực đơn $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ khác nhau.

Ứng với mỗi giá trị riêng λ_i ta xác định được một vector riêng tương ứng

$$P_i = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ ... \\ p_{ni} \end{pmatrix}.$$

Khi ấy hệ phương trình vi phân (6.1) có n nghiệm $X_1, X_2, ..., X_n$

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ ... \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1i}e^{\lambda_i t} \\ p_{2i}e^{\lambda_i t} \\ .... \\ p_{ni}e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \qquad (i = 1..n)$$

Hệ ấy được gọi là hệ nghiệm cơ bản. Khi đó nghiệm tổng quát của hệ (6.1) là $X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ hay có thể viết

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + ... + C_n x_{1n} \\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + ... + C_n x_{2n} \\ .... \\ x_n = C_1 x_{n1} + C_2 x_{n2} + ... + C_n x_{nn} \end{cases}$$

b) Phương trình đặc trưng (6.4) có các nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ lần lượt bội $l_1, l_2, ..., l_s \quad (l_1 + l_2 + ... + l_s = n)$.

Ta tìm nghiệm của hệ (6.1) dưới dạng

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}(t)e^{\lambda_1 t} + p_{12}(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{1s}(t)e^{\lambda_s t} \\ x_2 = p_{21}(t)e^{\lambda_1 t} + p_{22}(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{2s}(t)e^{\lambda_s t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = p_{n1}(t)e^{\lambda_1 t} + p_{n2}(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{ns}(t)e^{\lambda_s t} \end{cases}$$

Trong đó $p_{ij}(t)$ là các đa thức bậc $l_j - 1$ $(j = 1,2,....,s;\, i = 1,2,....,n)$ các hệ số của đa thức này phụ thuộc n hằng số tuỳ ý $C_1, C_2, ..., C_n$. Dựa vào hệ phương trình (6.1) có thể tìm được các hệ số đó bằng phương pháp hệ số bất định.

c) Phương trình đặc trưng (6.4) có các nghiệm phức liên hợp.

Muốn được nghiệm tổng quát của hệ phương trình (6.1) dưới dạng thực thì tương tự như phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp cao có hệ số không đổi ta dùng công thức Euler và lấy các nghiệm riêng là phần thực và phần ảo của nghiệm riêng phức tương ứng.

d) Các ví dụ:

<u>*Ví dụ 1*</u>: Giải hệ

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ hay $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ có hai nghiệm $\lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = -1$.

ứng với $\lambda_1 = 5$ hệ phương trình để xác định vectơ riêng là

$$\begin{cases} (1-5)p_1 + 2p_2 = 0 \\ 4p_1 + (3-5)p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4p_1 - 2p_2 = 0.$$

Có thể lấy $p_1 = 1, p_2 = 2$. Vậy vectơ riêng

ứng với $\lambda_1 = 5$ là $(1,2)$. Tương tự ta tìm được vector riêng ứng với $\lambda_2 = -1$ là $(1,-1)$. Do đó nghiệm cơ bản của hệ là

$$x_1 = e^{5t} \qquad y_1 = 2e^{5t}$$
$$x_2 = e^{-t} \qquad y_2 = -e^{-t}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$x = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}$$
$$y = 2C_1e^{5t} - C_2e^{-t}$$

Ví dụ 2: Giải hệ

$$\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ hay $\lambda^2 + 9 = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = 3i \quad \lambda_2 = -3i$. Véc tơ riêng ứng với $\lambda_1 = 3i$ là $(5, 1-3i)$. Do đó ta có nghiệm là

$$x_1 = 5e^{3it} = 5\cos 3t + i5\sin 3t$$
$$y_1 = (1-3i)e^{3it} = \left(\cos 3t + 3\sin 3t\right) + i(\sin 3t - 3\cos 3t)$$

Vởy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$x = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t$$
$$y = C_1\left(\cos 3t + 3\sin 3t\right) + C_2\left(\sin 3t - 3\cos 3t\right)$$

Ví dụ 3: Giải hệ

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ hay $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Do đó ta tìm nghiệm của hệ có dạng

$$x = \left(at + b\right)e^{2t}$$
$$y = \left(ct + d\right)e^{2t}$$

thế vào hệ phương trình ta được

$$\begin{cases} 2at + 2b + a = (a-c)t + b - d \\ 2ct + 2d + c = (a+3c)t + (b+3d) \end{cases}$$

đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc ta được

$$\begin{cases} 2a = a - c \\ 2b + a = b - d \\ 2c = a + 3c \\ 2d + c = b + 3d \end{cases}$$

Cho $a = C_1, b = C_2$, C_1, C_2 tuỳ ý ta được $c = -C_1, d = -(C_1 + C_2)$.

Vậy nghiệm tổng quát là

$$x = (C_1 t + C_2)e^{2t}$$
$$y = -(C_1 t + C_1 + C_2)e^{2t}$$

Phần 1: Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân có biến số phân ly

1. $y'\cos 2y - \sin y = 0$

2. $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$

3. $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$

4. $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$

5. $y' = 1 + \dfrac{1}{y^2}$

6. $y' = (4x + y - 1)^2$

7. $y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x$ Đặt $z = x^2 - y \Rightarrow y' = 2x - z'$

$$z' = -\sqrt{z}$$

8. $(1 + y^2)\left[e^{2x}dx - e^y dy\right] - (1 + y)dy = 0$

9. $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$

$$\Leftrightarrow (y^2 + 1)(x - 1)dx + (y + 1)(x^2 - 2x + 2)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}dx + \frac{y + 1}{y^2 + 1}dy = 0$$

10. $y' + 1 = \dfrac{(x + y)^m}{(x + y)^n + (x + y)^p}$ Đặt $z = x + y$.

11. $\mathrm{a}(\mathrm{xy}' + 2\mathrm{y}) = \mathrm{xyy}'$ (biến đổi về $\mathrm{x}(\mathrm{a} - \mathrm{y})\mathrm{y}' = -2\mathrm{ay}$)

12. $\mathrm{y}' = \mathrm{y}^2 - \dfrac{2}{\mathrm{x}^2}$ (Đặt $\mathrm{z} = \mathrm{xy}$)

13. Giải phương trình vi phân $(y'^2 - 1)x^2y^2 + y'(x^4 - y^4) = 0$ (coi là phương trình cấp 2 đối với y')

Phương trình vi phân thuần nhất

14. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

15. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

16. $xy' = y\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = \frac{y}{x}\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right) \qquad z = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow z'.x + z = z\cos(\ln z)$$

$$\frac{dz}{z(\cos(\ln z) - 1)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{d(\ln z)}{\cos(\ln z) - 1} = \frac{dx}{x}$$

17. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + f\,y^2) = 0$

18. $x^2y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$

19. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$

20. $(xy' + y)^2 = y^2y'$.

21. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, với $y(1) = \frac{\pi}{2}$

22. $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$

23. $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$

24. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x), \quad y(1) = e$

25. $y^2 + x^2y' = xyy'$

26. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

Phương trình vi phân tuyến tính

27. $xy' - y = x^2 arctgx$

28. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

29. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

30. $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$

31. $y'\sin x - y = 1 - \cos x$

32. $\left(\sin^2 y + x\cot g\, y\right)y' = 1$ $\quad x-$ hàm, $y-$ biến

33. $y' + tgy = \dfrac{x}{\cos y}$ $\quad$ Đặt $z = \sin y$

34. $\left(2e^y - x\right)y' = 1$ $\quad x-$ hàm, $y-$ biến

35. $(1 - 2xy)y' = y(y-1)$ $\quad x-$ hàm, $y-$ biến

36. $y' + xy = x^3$

37. $\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{3}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

38. $y' + \dfrac{1}{2x - y^2} = 0$ (coi x là hàm của y)

39. $ye^y = y'\left(y^3 + 2xe^y\right)$, với y(0) = -1 (coi x là hàm của y)

40. $\left(x^2 - y\right)dx + xdy = 0$

41. Giải phương trình vi phân $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$

42. $2x(1+x)y' - (3x+4)y + 2x\sqrt{1+x} = 0$

43. $xy' - y = x^2 \sin x$

44. Tìm nghiệm riêng của phương trình $y'\cos^2 x + y = tgy$ thỏa mãn điều kiện y(0)=0. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$ thỏa mãn điều kiện y(0) =0.

Phương trình Becnuli

45. $xy' + y = y^2 \ln x$

46. $3y^2 y' - ay^3 = x + 1$

47. $\left(xy + x^2 y^3\right)y' = 1$ $\quad x-$ hàm, $y-$ biến

48. $y'x^3 \sin y = x'y - 2y$ $\quad x -$ hàm, $y -$ biến

49. $(x^2 + y^2 + 1)dx + xydy = 0$

50. $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$ $\quad$ Đặt $z = \cos y$

51. $x(e^y - y') = 2$ $\quad$ Đặt $z = e^y$

52. $y' - 1 = e^{x+2y}$

53. $(x^2 + y^2 + 2x - 2y)dx + 2(y-1)dy = 0$ $\quad$ Đặt $z = y - 1$

54. $x^2 y' = y(x+y)$ (biến đổi về dạng $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$)

55. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $ydx + 2xdy = \frac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = \pi$.

56. $(x+1)(y' + y^2) = -y$

57. $xydy = (y^2 + x)dx$

58. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

59. Giải phương trình vi phân $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

60. $2x^2 y' = y^2(2xy' - y)$ (coi x = x(y))

61. $xyy' - y^2 = x^\alpha$ (α là tham số)

<u>Phương trình vi phân toàn phần</u>

62. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

63. $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$

64. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$

65. $(x^2+y^2)(xdy-ydx)=(a+x)x^4dx$.

66. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$.

67. $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$.

68. $y^2dx+(2xy+3)dy=0$

69. $e^x(2+2x-y^2)dx-2e^xydy=0$

70. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$ thỏa mãn điều kiện y(0) = 2.

71. $(y^2+1)^{3/2}dx+\left(y^2+3xy\sqrt{1+y^2}\right)dy=0$

72. $(y\cos^2x-\sin x)dy=y\cos x(y\sin x+1)dx$

73. $(2x+3x^2y)dx=(3y^2-x^3)dy$

74. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx-\frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2y}=0$

75. Giải phương trình vi phân $(y+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy=0$

76. Giải phương trình vi phân $(x+\sin y)dx+(x\cos x+\sin y)dy=0$

77. Giải phương trình vi phân $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$

78. Tìm hằng số a để $(1+y^2\sin 2x)dx+ay\cos^2xdy$ là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó và giải phương trình vi phân $(1+y^2\sin 2x)dx+ay\cos^2xdy=0$ với a tìm được.

<u>Phương trình F(x, y')=0, F(y, y') = 0, F(x,y,y')=0,</u>

79. $x'y^3=1+y'$.

80. $y=e^{y'}.y'^2$.

81. $y'^2x=e^{\frac{1}{y}}$.

82. $y = y'(1 + y'\cos y')$.

Phương trình Lagrange- Klero

83. $y = 2xy' + \sin y'$.

84. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$.

85. $y = 2y'x + y^2y'^3$ (Nhân hai vế với y, Đặt $z = y^2$).

86. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$ ($x-$ hàm, $y-$biến).

87. $xy' - y = \ln y'$.

88. $2y'^2(y - xy') = 1$.

Phần 2: Phương trình vi phân cấp cao

89. $y'''^2 + x^2 = 1$ Đặt $y''' = \cos\varphi$; $x = \sin\varphi$.

90. Tìm nghiệm của phương trình: $y''^2 = 4(y' - 1)$ thoả mãn các điều kiện ban đầu:

    a) $y = 0$, $y' = 2$ khi $x = 0$.

    b) $y = 0$, $y' = 1$ khi $x = 0$.

91. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$ Đặt $y' = p$ tìm $p = p(x)$.

92. $y'(1 + y'^2) = ay''$.

93. $y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$ $\Rightarrow \dfrac{y'''}{y''} = \dfrac{3y'y''}{1 + y'^2} \Rightarrow d\ln y'' = \dfrac{3}{2} d\ln(1 + y'^2)$

    $\Rightarrow y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} + C_1 \Rightarrow .....$

94. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$ dạng thuần nhất, đặt $y' = yz$.

    Chú ý: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

95. $yy'' = y'^2$.

96. $yy''' = y'y''$.

97. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1$ $\Rightarrow d(y' - x) - d\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

98. $y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 = \dfrac{2yy'}{x}$ chia hai vế cho yy' .

    $\Leftrightarrow d[\ln y' + y^2 + \ln y] = d\ln x^2$ .....

99. $y'' = y'e^y$

100. $y''(1+y)=y'^2+y'$ (Đặt y' = p(y))

101. $yy''+y'^2=1$ (Đặt y' = p(y))

102. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y''=e^{2y}$ thỏa mãn $y(0)=y'(0)=0$

103. $2xy'y''=y'^2-1$

104. $(x+1)y''+x(y')^2=y'$

105. $y''\cos y+(y')^2\sin y=y'$

106. $\sqrt{y}y''=y'$

107. $xy''=y'+x^2$ (Đặt y' = p)

108. $y'^2+yy''=yy'$

109. $xy''=y'+x$

110. $xy''=2yy'-y'$ (Đặt z = xy')

111. Giải phương trình vi phân $\begin{cases} y''=2yy' \\ y(0)=2; y'(0)=0 \end{cases}$

<u>Phương trình vi phân tuyến tính</u>

112. $x^2y''-2y=x^3\cos x$, biết một nghiệm riêng của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng là $y_1=x^2$

113. Giải phương trình $y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{\cot gx}{x}$ biết một nghiệm riêng của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng $y_1=\frac{\sin x}{x}$

114. Giải phương trình vi phân: $x^2(x+1)y''=2y$ biết một nghiệm $y_1=1+\frac{1}{x}$

115. Giải phương trình vi phân $(x^2+1)y''-2y=0$ nếu biết một nghiệm của nó có dạng đa thức.

116. Giải phương trình vi phân $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x$ biết nó có hai nghiệm riêng $y_1=\frac{x^2+4x-1}{2}$ $\quad y_2=\frac{x^2+1}{2}$

117. Xác định hằng số α sao cho $y = e^{\alpha x^2}$ là nghiệm riêng của phương trình vi phân

$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

118. tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$(3x^2 + 1)xy'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng

$y_1 = 2x, \quad y_2 = (x+1)^2$

<u>Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số</u>

119. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

120. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$.

121. $y^{(4)} + y = 0$.

122. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

123. $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.

124. $y'' + y = 4e^x$.

125. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$.

126. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.

127. $y''' - 2y' + 4y = e^{-x}\cos x$.

128. $y'' + n^2 y = \sin^3 nx$.

129. $y'' + y = \sin x \sin 2x$.

130. $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$ có nghiệm riêng $y^* = e^{x^2}$.

131. Với những giá trị nào của p và q thì tất cả các nghiệm của phương trình.

$y'' = py' + q$ giới nội $\forall x \geq 0 \quad (p \geq 0,\, q > 0)$.

132. $p, q = ?$ thì tất cả các nghiệm của phương trình $y'' + py' + q = 0$ là những hàm tuần hoàn của $x \qquad (p \geq 0, q > 0)$.

133. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$ $\quad t = \ln x$.

134. $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4$ $\quad t = \ln(2x+1)$.

135. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 2\sin(\ln x)$ $\quad t = \ln x$.

136. $(1+x)^2y'' + (1+x)y' + y = 4\cos\ln(1+x)$ $\quad t = \ln(1+x)$.

137. $y'' + 9y = \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$

138. Dùng phép biến đổi hàm $y = \frac{z}{x^2}$ để giải phương trình vi phân:

$x^2y'' + 4xy' + (x^2+2)y = e^x$

139. $y'' + y' = e^{-x}(\sin x - \cos x)$ (Đặt $y = e^{-x}z$)

140. Giải phương trình $y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ bằng đổi biến $t = e^x$

141. $y'' + y' = x + e^{-x}$

142. $y'' - 2y' + 2y = x(e^x + 1)$

143. $y''\cos x + y'\sin x - y\cos^3 x = 0$ đặt t = sinx

144. $2y'' + 5y' = 29x\sin x$

145. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

146. $y'' - 4y = (2-4x)e^{2x}$

147. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} + \cos x$

148. Giải phương trình vi phân $xy'' + 2y' - xy = e^x$ bằng phép đổi hàm z = xy.

149. $y'' + y'\mathrm{tg}x - y\cos^2 x = 0$ dùng t = sinx

150. $y'' - 2y' + 5y = x\sin 3x$

151. giải phương trình vi phân $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = e^{-x}$ bằng phép đổi hàm z=xy

152. $y'' - 2y' - 3y = xe^{4x} + x^2$

153. $x^2y'' + 2xy' + \dfrac{y}{x^2} = 0$ bằng phép biến đổi x = 1/t

154. $y'' - 2y' + y = 1 + \dfrac{e^x}{x}$

155. Giải phương trình $x^2y'' + xy' + y = x$ bằng biến đổi $x = e^t$

156. $y'' + y' = xe^{-x}$

157. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + \cos x$

158. Giải phương trình $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ bằng biến đổi $x = e^t$

159. $y'' + 4y' + 4y = 1 + e^{-2x}\ln x$

160. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$

161. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$y'' - 3y' + 2y = 2x^{2x} - 5 + e^x \cos\dfrac{x}{2}$

162. $y'' + 2y' + y = \sin x + \dfrac{e^{-x}}{x}$

163. Giải phương trình vi phân $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

164. $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$

165. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$

166. $y'' - 2y' = 2\cos^2 x$

167. $y'' + y = \sin x + \cos 2x$

Phần 3: Hệ phương trình vi phân

168. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

169. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$

170. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$

171. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$

172. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$

173. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$

174. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hoàng Hữu Đường, Vừ Đức Tôn, Nguyễn Thế Hoàn, *Phương trình vi phân*, Tập 1, 2, Hà nội, NXB ĐH và THCN, 1970.

[2] Nguyễn Thế Hoàn, Trần Văn Nhung, *Bài tập Phương trình vi phân*, NXB ĐH và THCN, 1979.

[3] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu, *Cơ sở Phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, NXB Giáo dục, 2003.

[4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, Tập 3, NXB Giáo dục, 2002.

Filename:	Giao trinh PTVP 2010_moi
Directory:	C:\Documents and Settings\nhung\My Documents
Template:	C:\Documents and Settings\nhung\Application Data\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Title:	
Subject:	
Author:	THEGIOITINHYEU
Keywords:	
Comments:	
Creation Date:	3/9/2010 9:54:00 AM
Change Number:	4
Last Saved On:	3/9/2010 9:59:00 AM
Last Saved By:	THEGIOITINHYEU
Total Editing Time:	4 Minutes
Last Printed On:	3/9/2010 10:03:00 AM
As of Last Complete Printing	
Number of Pages:	97
Number of Words:	16,387 (approx.)
Number of Characters:	93,407 (approx.)