Trao đổi trực tuyến tại:

www.mientayvn.com/chat_box_toan.html

✷ CHƯƠNG 10

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

✷ DẪN NHẬP

✷ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
- Phép biến đổi Laplace
- Phép biến đổi Laplace ngược

✷ CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

✷ ÁP DỤNG VÀO GIẢI MẠCH

✷ CÁC PHƯƠNG PHÁP TRIỂN KHAI HÀM P(S)/Q(S)
- Triển khai từng phần
- Công thức Heaviside

✷ ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ ĐẦU VÀ GIÁ TRỊ CUỐI
- Định lý giá trị đầu
- Định lý giá trị cuối

✷ MẠCH ĐIỆN BIẾN ĐỔI
- Điện trở
- Cuộn dây
- Tụ điện

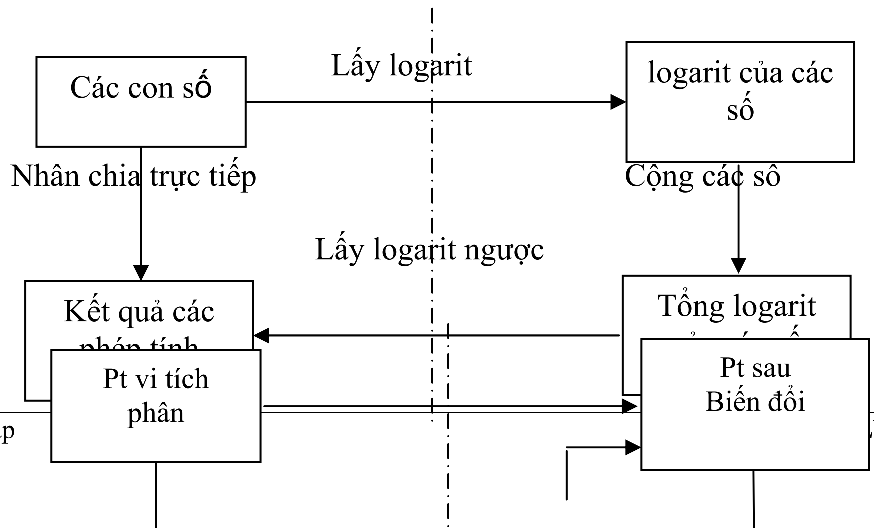
10.1 DẪN NHẬP

Phép biến đổi Laplace, một công cụ toán học giúp giải các phương trình vi phân, được sử dụng đầu tiên bởi Oliver Heaviside (1850-1925), một kỹ sư người Anh, để giải các mạch điện.

So với phương pháp cổ điển, phép biến đổi Laplace có những thuận lợi sau:
* Lời giải đầy đủ, gồm đáp ứng tự nhiên và đáp ứng ép, trong một phép toán.
* Không phải bận tâm xác định các hằng số tích phân. Do các điều kiện đầu đã được đưa vào phương trình biến đổi, là phương trình đại số, nên trong lời giải đầy đủ đã chứa các hằng số.

Về phương pháp, phép biến đổi Laplace tương tự với một phép biến đổi rất quen thuộc: phép tính logarit

(H 10.1) cho ta so sánh sơ đồ của phép tính logarit và phép biến đổi Laplace



Biến đổi Laplace

Phép giải cổ điển Đk đầu Phép tính đại số
Đk đầu

Biến đổi Laplace ngược

lãnh vực thời gian Lãnh vực tần số

(H 10.1)

Để làm các phép tính nhân, chia, lũy thừa . . . của các con số bằng phép tính logarit ta thực hiện các bước:

1. Lấy logarit các con số
2. Làm các phép toán cộng, trừ trên logarit của các con số
3. Lấy logarit ngược để có kết quả cuối cùng.

Thoạt nhìn, việc làm có vẻ như phức tạp hơn nhưng thực tế, với những bài toán có nhiều số mã, ta sẽ tiết kiệm được rất nhiều thời gian vì có thể sử dụng các bảng lập sẵn (bảng logarit) khi biến đổi. Hãy thử tính $1{,}4356^{0{,}123789}$ mà không dùng logarit.

Trong bài toán giải phương trình vi tích phân dùng phép biến đổi Laplace ta cũng thực hiện các bước tương tự:

1. Tính các biến đổi Laplace của các số hạng trong phương trình. Các điều kiện đầu được đưa vào
2. Thực hiện các phép toán đại số.
3. Lấy biến đổi Laplace ngược để có kết quả cuối cùng.

Giống như phép tính logarit, ở các bước 1 và 3 nhờ sử dụng các bảng lập sẵn chúng ta có thể giải quyết các bài toán khá phức tạp một cách dễ dàng và nhanh chóng.

10.2 PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

10.2.1 Phép biến đổi Laplace

Hàm f(t) xác định với mọi t>0. Biến đổi Laplace của f(t), được định nghĩa

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}dt \qquad (10.1)$$

s có thể là số thực hay số phức. Trong mạch điện $s=\sigma+j\omega$

Toán tử $\mathcal{L}$ thay cho cụm từ 'biến đổi Laplace của"

Điều kiện đủ để f(t) có thể biến đổi được là

$$\int_0^\infty |f(t)|.e^{-\delta t}dt < \infty \qquad (10.2)$$

δ là số thực, dương.

Điều kiện này hầu như được thỏa đối với những hàm f(t) gặp trong mạch điện. Vì $e^{-\delta t}$ là hàm mũ giảm khi t tăng nên khi nhân với |f(t)| ta cũng được kết quả tương tự.

Thí dụ, với hàm $f(t)=t^n$, dùng qui tắc Hospital, người ta chứng minh được

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-\delta t} = 0, \quad \delta > 0$$

Với n=1, ta có

$$\int_0^\infty t.e^{-\delta t}dt = \frac{1}{\delta^2}, \quad \delta > 0$$

Với giá trị khác của n, tích phân trên cũng xác định với $\delta \neq 0$

Có những hàm dạng e^{at^n} không thỏa điều kiện (10.2) nhưng trong thực tế với những kích thích có dạng như trên thì thường đạt trị bảo hòa sau một khoảng thời gian nào đó.

Thí dụ $$v(t)=\begin{cases} e^{at^2} & ,0 \le t \le t_0 \\ K & , \quad t > t_0 \end{cases}$$

v(t) trong điều kiện này thỏa (10.2)

Ta nói toán tử $\mathcal{L}$ biến đổi hàm f(t) trong lãnh vực thời gian sang hàm F(s) trong lãnh vực tần số phức. Hai hàm f(t) và F(s) làm thành một cặp biến đổi

Thí dụ 10.1

Tìm biến đổi Laplace của hàm nấc đơn vị

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ,t \ge 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Nếu $f(t)=Vu(t) \Rightarrow \mathcal{L}[Vu(t)] = \frac{V}{s}$

Thí dụ 10.2

Tìm biến đổi Laplace của $f(t) = e^{-at}$, a là hằng số

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(a+s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Kết quả của 2 thí dụ trên cho một bảng nhỏ gồm 2 cặp biến đổi

f(t)	F(s)
u(t)	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

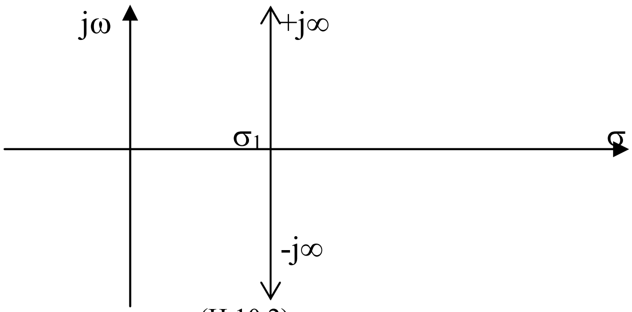
Bằng cách tính biến đổi của một số hàm quen thuộc, ta sẽ xây dựng được một bảng dùng để tra sau này.

10.2.2 Phép biến đổi Laplace ngược

Phép biến đổi Laplace ngược được định nghĩa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (10.3)$$

Đây là tích phân đường, lấy dọc theo đường thẳng đứng s=σ_1, từ -j∞ đến +j∞



(H 10.2)

Do tính độc nhất của phép biến đổi Laplace, ta không sử dụng định nghĩa (10.3) để xác định f(t) mà ta thường dùng kết quả của những cặp biến đổi để xác định f(t) khi đã có F(s)

10.3 CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

10.3.1 Biến đổi của một tổ hợp tuyến tính

Cho 2 hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$, với các hằng số a, b. $F_1(s)$ và $F_2(s)$ lần lượt là biến đổi Laplace của $f_1(t)$ và $f_2(t)$. Ta có:

$$\mathcal{L}\,[af_1(t) + bf_2(t)] = a\,F_1(s) + b\,F_2(s) \qquad (10.4)$$

Thật vậy

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = \int_0^\infty [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-st}dt$$

$$= a\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\,[af_1(t) + bf_2(t)] = a\,F_1(s) + b\,F_2(s)$$

Thí dụ 10.3

Tìm biến đổi Laplace của cosωt và sinωt

Từ công thức Euler

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad \text{và} \quad \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Ap dụng (10.4) và dùng kết quả ở thí dụ 10.2

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \mathcal{L}[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Tương tự:

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \mathcal{L}[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}] = \frac{1}{2j}[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

10.3.2 Biến đổi của $e^{-at}f(t)$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t}dt = F(s+a)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \qquad (10.5)$$

Khi hàm f(t) nhân với e^{-at}, biến đổi Laplace tương ứng e^{-at} f(t) có được bằng cách thay F(s) bởi F(s+a)

Thí dụ 10.4

Tìm biến đổi Laplace của $e^{-at}\cos\omega t$ và $e^{-at}\sin\omega t$

Chỉ cần thay s bởi s+a trong các các kết quả biến đổi của hàm sinωt và cosωt ở trên.

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Thí dụ 10.5

Tìm f(t) ứng với $F(s) = \frac{6s}{s^2+2s+5}$

Viết lại F(s) , sao cho xuất hiện dạng F(s+a)

$$F(s) = \frac{6s}{(s+1)^2+2^2} = \frac{6(s+1)-6}{(s+1)^2+2^2}$$

Dùng kết quả của thí dụ 10.4 với a = 1 và ω = 2

$$F(s) = 6\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - 3\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$\Rightarrow$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 6e^{-t}\cos 2t - 3e^{-t}\sin 2t$

10.3.3 Biến đổi của f(t-τ)u(t-τ)

f(t-τ) là hàm f(t) trễ τ đơn vị thời gian. (Lưu ý là f(t)=0 khi t<0 nên f(t-τ)=0 khi t<τ)

$$\mathcal{L}[f(t-\tau).u(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau).u(t-\tau)e^{-st}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau).e^{-st}dt$$

Đổi biến số: x= t-τ

$$\mathcal{L}[f(t-\tau).u(t-\tau)] = \int_0^\infty f(x).e^{-s(\tau+x)}dx = e^{-s\tau}\int_\tau^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau).u(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \qquad (10.6)$$

Hãy so sánh (10.5) và (10.6)

* Ở (10.5), F(s+a) biểu thị sự chuyển dịch của F(s) từ s đến s+a trong lãnh vực tần số tương ứng với nhân hàm f(t) với e^{-at} trong lãnh vực thời gian.

* Ở (10.6), f(t-τ) biểu thị sự chuyển dịch của hàm f(t) từ t đến t-τ trong lãnh vực thời gian tương ứng với nhân F(s) với $e^{-s\tau}$ trong lãnh vực tần số.

Thí dụ 10.6
Tìm biến đổi của $f(t)=e^{-3t}u(t-2)$
Viết lại f(t):

$$f(t)= e^{-3(t-2)-6}u(t-2) \quad = e^{-6}e^{-3(t-2)}\, u(t-2)$$

Vì $\mathcal{L}\,[e^{-3t}u(t)]=\dfrac{1}{s+3}$

Nên $\mathcal{L}\,[e^{-3(t-2)}u(t-2)]=\dfrac{e^{-2s}}{s+3}$

$$\mathcal{L}\,[e^{-3t}u(t-2)]= e^{-6}\left(\frac{e^{-2s}}{s+3}\right)$$

10.3.4 Định lý kết hợp (Convolution theorem)

Đây là định lý dùng để tìm biến đổi ngược y(t) của tích 2 hàm F(s)và G(s)

$$y(t)= \mathcal{L}^{-1}[G(s).F(s)]=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (10.7)$$

Tích phân trong biểu thức được gọi là **kết hợp hai hàm g(t) và f(t)**, ký hiệu:

$$g(t)*f(t) = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (10.8)$$

Thí dụ 10.7
Tìm kết hợp 2 hàm e^{-t} và e^{-2t}
Dùng (10.8)

$$e^{-t} * e^{-2t} = \int_0^t e^{-\tau}.e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$= e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau$$

$$e^{-t} * e^{-2t} = e^{-t} - e^{-2t}$$

Thí dụ 10.8

Xác định $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right]$

Dùng định lý kết hợp với $F(s)=G(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$

Ta được f(t)=g(t)=sint

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}[F(s).G(s)]$$

$$= g(t)*f(t) = \sin t*\sin t$$

$$=\int_0^t \sin\tau.\sin(t-\tau)d\tau$$

Ap dụng công thức biến đổi lượng giác rồi lấy tích phân, ta được

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=\frac{1}{2}[\text{sint-tcost}]$$

10.3.5 Biến đổi của đạo hàm

✷ Đạo hàm bậc 1

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}=\int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt$$

Lấy tích phân từng phần

Đặt $u = e^{-st} \Rightarrow du = -s\,e^{-st}$

$dv=df(t) \Rightarrow v = f(t)$

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}=e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Vì $\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t)=0$, số hạng thứ nhất ở vế phải = - $f(0_+)$

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt} = sF(s) - f(0_+) \qquad (10.9)$$

$f(0_+)$ là giá trị của $f(t)$ khi $t \to 0_+$

✷ Đạo hàm bậc 2

$$\mathcal{L}\frac{df^2(t)}{dt^2}=\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]\right\}$$

$$= s\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]-\frac{df(0_+)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\frac{df^2(t)}{dt^2}=s^2F(s)-sf(0_+)-\frac{df(0_+)}{dt} \qquad (10.10)$$

Trong đó $\frac{df(0_+)}{dt}$ là giá trị của $\frac{df(t)}{dt}$ khi $t \to 0_+$

✷ Đạo hàm bậc n

Từ kết quả trên, ta suy ra trường hợp đạo hàm bậc n

$$\mathcal{L}\frac{d^nf(t)}{dt^n}= s^nF(s) - s^{n-1}f(0_+) - s^{n-2}\frac{df(0_+)}{dt}-...-\frac{df^{n-1}(0_+)}{dt^{n-1}} \qquad (10.11)$$

10.3.6 Biến đổi của tích phân

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\int_0^\infty\left[\int_0^t f(t)dt\right]e^{-st}dt$$

Đặt $u=\int_0^t f(t)dt \Rightarrow du = f(t)$

$dv=e^{-st}dt \Rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = -\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(t)dt\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Khi $t \to \infty$ $e^{-st} \to 0$

và $\int_0^t f(t)dt\Big|_{t=0} = 0$ nên số hạng thứ nhất của vế phải triệt tiêu

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \qquad (10.12)$$

Khi áp dụng vào mạch điện, thời gian thường xác định từ - ∞ đến t, như vậy $\int_{-\infty}^t f(t)dt$ có thể chia làm 2 phần

$$\int_{-\infty}^t f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^t f(t)dt$$

Số hạng thứ nhất của vế phải là hằng số và ta đặt $f^{-1}(0_+) = \int_{-\infty}^0 f(t)dt$

Hệ thức (10.12) có thể viết lại cho trường hợp tổng quát nhất:

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_+)}{s} \qquad (10.13)$$

10.3.7 Biến đổi của tf(t)

Lấy đạo hàm hệ thức (10.1), đồng thời hoán chuyển các toán tử lấy đạo hàm và tích phân, ta được:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[f(t)e^{-st}\right]dt = \int_0^\infty \left[-tf(t)e^{-st}\right]dt$$

Vế phải của hệ thức chính là $\mathcal{L}$ [-tf(t)]

Vậy $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$ (10.14)

Thí dụ 10.9

Tìm biến đổi của hàm tu(t) và tcosωt

$f(t)=u(t) \Rightarrow F(s)=\dfrac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[tu(t)=] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$f(t) = \cos\omega t \Rightarrow F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$$\mathcal{L}[t\cos\omega t] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Dựa vào các định lý cơ bản ta có được một số cặp biến đổi. Kết hợp các định lý này với định nghĩa của phép biến đổi ta có thêm một số cặp biến đổi thông dụng.
Bảng 1 dưới đây cho biến đổi của một số hàm

10.4 ÁP DỤNG VÀO GIẢI MẠCH

Để áp dụng biến đổi Laplace vào bài toán giải mạch, ta có thể thực hiện theo một trong hai cách:

- Viết phương trình vi tích phân của mạch điện, dùng biến đổi Laplace ta được các phương trình đại số.
- Biến đổi mạch sang lãnh vực tần số nhờ biến đổi Laplace, viết các phương trình đại số cho mạch.

10.4.1 Giải phương trình vi tích phân

Dưới đây là một số thí dụ cho thấy cách áp dụng biến đổi Laplace vào giải mạch.

Thí dụ 10.10

Mạch RC nối tiếp (H 10.3), khóa K đóng ở t=0. Xác định *i*(t), cho tụ tích điện ban đầu với điện tích q_0

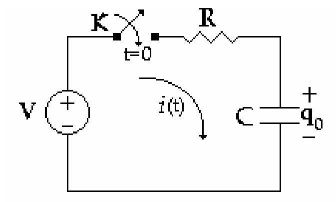
Bảng 1

STT	f(t)	F(s)
1	$\delta(t)$	1
2	u(t)	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, n nguyãn	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
7	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$, n nguyãn	$\frac{1}{(s-a)^n}$
8	$1-e^{at}$	$\frac{-a}{s(s-a)}$
9	$\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
10	$\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$\mathrm{Sin}(\omega t+\theta)$	$\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
13	$\mathrm{Cos}(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
14	$e^{-at}\,\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
15	$e^{-at}\,\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

16	Sinhωt	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
17	Coshωt	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
18	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0_+)$
19	$\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0+) - \dfrac{df(0_+)}{dt}$
20	$\dfrac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}\dfrac{df(0_+)}{dt} - ... - \dfrac{df^{n-1}(0_+)}{dt^{n-1}}$
21	$\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$	$\dfrac{F(s)}{s}+\dfrac{f^{-1}(0_+)}{s}$
22	$f(t-\tau).u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
23	$af_1(t) + bf_2(t)$	$a F_1(s) + b F_2(s)$
24	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
25	$tf(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$

* Khi sử dụng bảng 1, phải nhân f(t) với u(t), nói cách khác, f(t) thỏa điều kiện là f(t)=0 khi t<0

Phương trình mạch điện



(H 10.3)

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt + Ri = Vu(t) \qquad (1)$$

Lấy biến đổi Laplace các số hạng pt (1)

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt\right] + \mathcal{L}[Ri] = \mathcal{L}[Vu(t)] \qquad (2)$$

$$\frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0_+)}{s}\right] + RI(s) = \frac{V}{s} \qquad (3)$$

Với $f^{-1}(0_+)=\int_{-\infty}^{0} idt = q_0$

q_0 có dấu (+) ở bản trên của tụ, cùng dấu với điện tích tích bởi nguồn V nên có trị dương

Pt (3) được viết lại

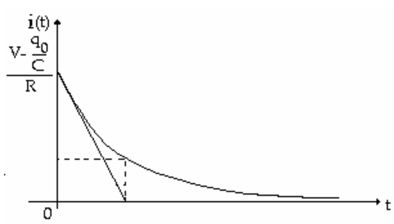
$$\frac{I(s)}{Cs}+\frac{q_0}{Cs}+RI(s)=\frac{V}{s} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad I(s)=\frac{V-q_0/C}{R}\,\frac{1}{s+1/RC} \qquad (5)$$

Dùng bảng 1 lấy biến đổi Laplace ngược để được *i*(t)

$$\Rightarrow \quad i(t)=\frac{V-q_0/C}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

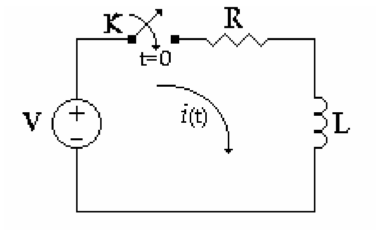
Dạng sóng của *i*(t)



(H 10.4)

Thí dụ 10.11

Mạch RL nối tiếp (H 10.5), khóa K đóng ở t=0. Xác định *i*(t), cho mạch không tích trữ năng lượng ban đầu



(H 10.5)

Phương trình mạch điện

$$Ri + L\frac{di}{dt} = Vu(t) \qquad (1)$$

Lấy biến đổi Laplace các số hạng pt (1)

$$RI(s) + L[sI(s) - i(0_+)] = \frac{V}{s} \qquad (2)$$

Mạch không tích trữ năng lượng ban đầu nên $i(0_+)=0$

$$\Rightarrow \quad I(s) = \frac{V}{L}\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{V}{s}\frac{1}{(sL+R)}$$

(3)

Dạng của I(s) không có trong bảng 1.

Viết lại I(s) sao cho gồm tổng của các hàm đơn giản

$$I(s) = \frac{V}{L}\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{R}{L}} \qquad (4)$$

A, B là 2 hằng số cần xác định

Qui đồng mẫu số vế 2, cân bằng 2 vế, ta được:

$$\frac{A(s+\frac{R}{L}) + Bs}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{A\frac{R}{L} + (A+B)s}{s(s+\frac{R}{L})}$$

$$A\frac{R}{L} = \frac{V}{L} \Rightarrow A = \frac{V}{R}$$

$$A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B = -A = -\frac{V}{R}$$

Thay A và B vào (4)

$$I(s) = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{i(t)} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad \mathbf{t \geq 0}$$

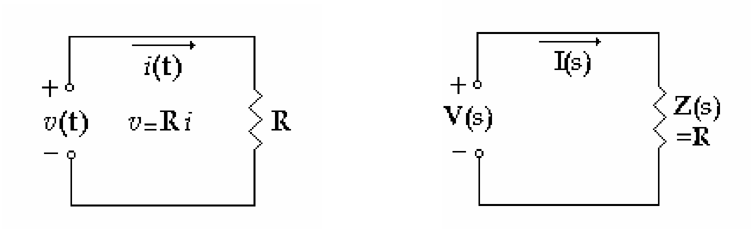
10.4.2 Mạch điện biến đổi

Trong chương 6, với khái niệm vectơ pha, ta đã biến đổi mạch điện từ lãnh vực thời gian sang lãnh vực tần số và viết các phương trình đại số cho mạch.

Tương tự , với phép biến đổi Laplace, ta cũng biến đổi mạch điện từ lãnh vực thời gian sang lãnh vực tần số phức (s), kể cả các loại nguồn kích thích khác nhau và ta có lời giải đầy đủ thỏa các điều kiện đầu.

✷ Điện trở

$V_R = Ri(t) \Rightarrow \mathbf{V}_R(s) = R\mathbf{I}(s) \Rightarrow \mathbf{Z}_R(s) = R$ và $\mathbf{Y}_R(s) = 1/R \qquad (10.15)$



(H 10.6)

✷ Cuộn dây

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \text{ Hay } i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v_L(t)dt$$

Biến đổi Laplace tương ứng

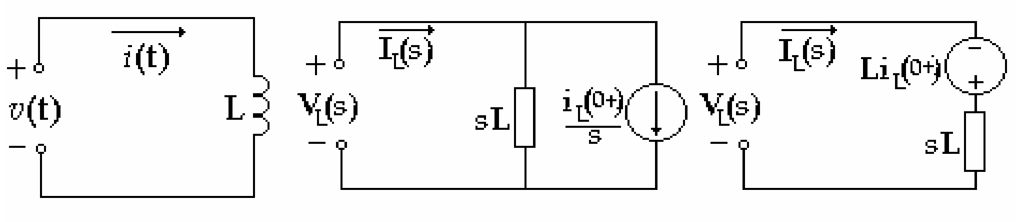
$$V_L(s)=L[sI_L(s)-i_L(0_+)]$$

$$\Rightarrow \quad I_L(s)=\frac{V_L(s)}{sL}+\frac{Li_L(0+)}{sL} \qquad (10.16a)$$

hay $\quad sLI_L(s) = V_L(s)+L\ i_L(0+)$ (10.16b)

Biểu thức (10.16a) cho mạch biến đổi (H 10.7b)

Biểu thức (10.16b) cho mạch biến đổi (H 10.7c)



(a) (b) (c)

(H 10.7)

✷ Tụ điện

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt} \text{ hay } v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(t)dt$$

Biến đổi của $v_C(t)$

$$V_C(s)=\frac{1}{C}[\frac{I_c(s)}{s}+\frac{q(0+)}{s}]$$

Với $v_C(0+)=\frac{q(0+)}{C}$ là điện thế do tụ tích điện ban đầu

$$V_C(s)=\frac{1}{sC}I_c(s)+\frac{v_C(0+)}{s} \qquad (10.17a)$$

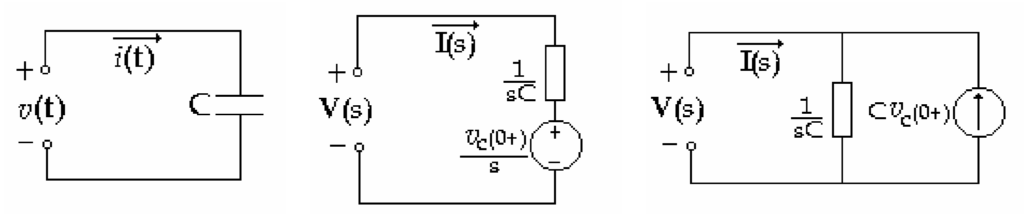
Hay $\quad I_c(s)=sCV_C(s)-Cv_C(0+)$ (10.17b)

Đặt $\quad V_1(s)=V_C(s)-\frac{v_C(0+)}{s}$

Biến đổi tổng trở của tụ là: $Z_C(s)=\frac{V_1(s)}{I_C(s)}=\frac{1}{sC}$

Biểu thức (10.17a) cho mạch biến đổi của tụ (H 10.8b)

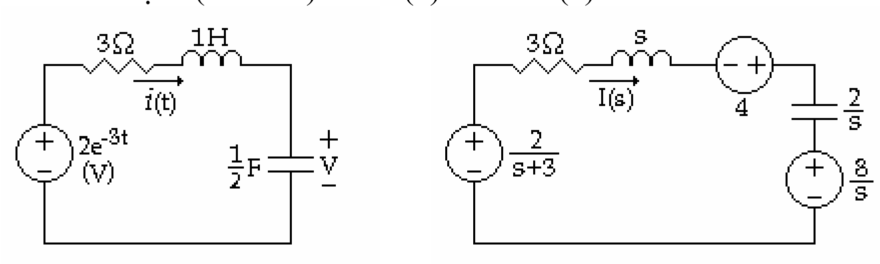
Biểu thức (10.17b) cho mạch biến đổi của tụ (H 10.8c)



(a) (b) (c)
(H 10.8)

Thí dụ 10.12

Xác định i(t) khi t>0 của mạch (H 10.9a). Cho $i(0)$=4A và $v(0)$=8V



(a) (H 10.9) (b)

Mạch biến đổi cho bởi (H 10.11b)

$$I(s)=\frac{(2/s+3)+4-8/s}{3+s+2/s}$$

$$=\frac{2s+(4s-8)(s-3)}{(s^2+3s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{4s^2+6s-24}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Triển khai I(s)

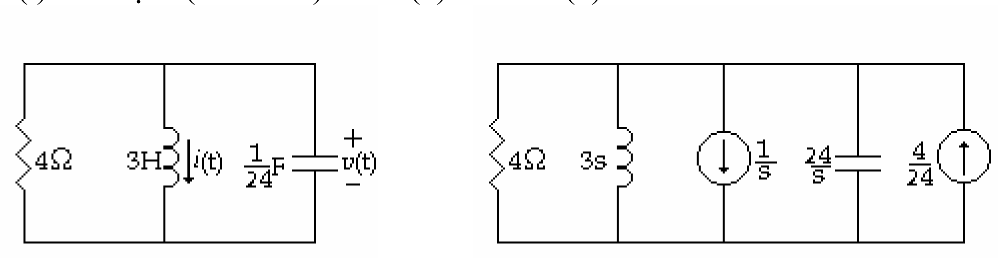
$$I(s)=-\frac{13}{s+1}+\frac{20}{s+2}-\frac{3}{s+3}$$

Suy ra, khi t>0

$$\boldsymbol{i(t)=-13e^{-t}+20e^{-2t}-3e^{-3t}\ \text{A}}$$

Thí dụ 10.13

Xác định v(t) của mạch (H 10.10a). Cho $i(0)$=1A và $v(0)$=4V



(a) (b)
(H 10.10)

Viết phương trình nút cho mạch biến đổi (H 10.10b)

$$\frac{V}{4}+\frac{V}{3s}+\frac{1}{s}+\frac{sV}{24}-\frac{4}{24}=0$$

$\Rightarrow$ $V(s)=\dfrac{4s-24}{(s+2)(s+4)}=-\dfrac{16}{s+2}+\dfrac{20}{s+4}$

và **$v(t)=-16e^{-2t}+20e^{-4t}$ V**

10.5 CÁC PHƯƠNG PHÁP TRIỂN KHAI HÀM P(s)/Q(s)

Trong phân giải mạch điện bằng phép biến đổi Laplace, kết quả đạt được là một hàm theo s có dạng P(s)/Q(s) , trong đó P(s) và Q(s) là các đa thức.

Nếu P(s)/Q(s) có dạng trong bảng 1 thì ta có ngay kết quả biến đổi Laplace ngược. Trong nhiều trường hợp ta phải triển khai P(s)/Q(s) thành tổng các hàm đơn giản hơn và có trong bảng.

Gọi m và n là bậc của P(s) và Q(s)
Có 2 trường hợp

* $m \leq n$, có thể triển khai ngay P(s)/Q(s)
* $m > n$, ta phải thực hiện phép chia để được

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=A_0+A_1s+.....+A_{m-n}s^{m-n}+\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} \tag{10.18}$$

$P_1(s)$ và $Q_1(s)$ có bậc bằng nhau và ta có thể triển khai $P_1(s)/Q_1(s)$

10.5.1. Triển khai từng phần

✷ Trường hợp 1

Q(s)=0 có nghiệm thực phân biệt s_1 , s_2, . . . s_n.

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+.....+\frac{K_n}{s-s_n} \tag{10.19}$$

K_i (i= 1, 2,. . . ., n) là các hằng số xác định bởi:

$$K_i=(s-s_i)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=s_i} \tag{10.20}$$

Thí dụ 10.14

Triển khai hàm $I(s)=\dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$, xác định $i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]$

Phương trình $s^2+3s+2=0$ có 2 nghiệm $s_1=-2$ và $s_2=-1$

$$I(s)=\frac{s-1}{s^2+3s+2}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+1}$$

$$K_1=(s+2)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=-2}=3$$

$$K_2=(s+1)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=-1}=-2$$

$$I(s)=\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+1}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{i(t)= 3e^{-2t}-2e^{-t}}$

✷ Trường hợp 2

Q(s)=0 có nghiệm đa trùng bậc r

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-s_i)^r}=\frac{K_1}{s-s_i}+\frac{K_2}{(s-s_i)^2}+.....+\frac{K_r}{(s-s_i)^r} \qquad (10.21)$$

Để xác định K_1, K_2, . . . K_r, ta xét thí dụ sau:

Thí dụ 10.15

Triển khai $\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{s+2}{(s+1)^2}$

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{(s+1)^2} \qquad (1)$$

Nhân 2 vế phương trình (1) với $(s+1)^2$

$s+2=(s+1)K_1+K_2$ (2)

Cho s=-1, ta được $K_2=1$

Nếu ta cũng làm như vậy để xác định K_1 thì sẽ xuất hiện các lượng vô định

Để xác định K_1, lấy đạo hàm theo s phương trình (2)

$1+0=K_1+0 \Rightarrow K_1=1$

Tóm lại

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

Và $i(t) = e^{-t} + te^{-t}$

Với Q(s)=0 có nghiệm kép, một hằng số được xác định nhờ đạo hàm bậc 1.

Suy rộng ra, nếu Q(s)=0 có nghiệm đa trùng bậc r, ta cần các đạo hàm từ bậc 1 đến bậc r-1.

✷ Trường hợp 3

Q(s)=0 có nghiệm phức liên hợp $s=\alpha \pm j\omega$

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-\alpha-j\omega)(s-\alpha+j\omega)} \qquad (10.22)$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K}{(s-\alpha-j\omega)}+\frac{K^*}{(s-\alpha+j\omega)} \qquad (10.23)$$

Các hằng số K xác định bởi

$$K=(s-\alpha+j\omega)\left.\frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=\alpha-j\omega}=Ae^{-j\theta},$$

Và $$K^*=(s-\alpha-j\omega)\left.\frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=\alpha+j\omega}=Ae^{+j\theta} \qquad (10.24)$$

Thí dụ 10.16

Triển khai $I(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{1}{s^2+4s+5}$

Q(s)=0 có 2 nghiệm $-2 \pm j$

$$I(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K}{(s+2+j)}+\frac{K^*}{(s-2-j)}$$

$$K=(s+2+j)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=-2-j}=j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{j90°}$$

$$K^*=(s+2-j)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=-2+j}=-j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{-j90°}$$

$$I(s)=\frac{j1/2}{s+2+j}-\frac{j1/2}{s+2-j}$$

$$\Rightarrow \quad i(t)=j\frac{1}{2}[e^{(-2-j)t}-e^{(-2+j)t}]=e^{-2t}[\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}]$$

Hay **$i(t)=e^{-2t}\sin t$ A**

10.5.2 Công thức Heaviside

Tổng quát hóa các bài toán triển khai hàm I(s)=P(s)/Q(s), Heaviside đưa ra công thức cho ta xác định ngay hàm *i*(t), biến đổi ngược của I(s)

10.5.2.1 Q(s)=0 có n nghiệm phân biệt

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{P(s)}{Q(s)}]=\sum_{j=1}^{n}(s-s_j)\frac{P(s)e^{st}}{Q(s)}\bigg|_{s=s_j} \qquad (10.25)$$

Hoặc

$$i(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(s_j)}{Q'(s_j)}e^{s_j t} \qquad (10.26)$$

Trong đó s_j là nghiệm thứ j của Q(s)=0

Thí dụ 10.17

Giải lại **thí dụ 10.14** bằng công thức Heaviside

$I(s)=\frac{s-1}{s^2+3s+2}$, xác định $i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]$

Phương trình $s^2+3s+2=0$ có 2 nghiệm $s_1=-2$ và $s_2=-1$

$Q(s)=s^2+3s+2 \Rightarrow Q'(s)=2s+3$

Ap dụng công thức (10.26)

$$i(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(s_j)}{Q'(s_j)}e^{s_j t}=\frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{-2t}+\frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t}$$

$\Rightarrow$ **$i(t)=3e^{-2t}-2e^{-t}$ A**

10.5.2.2 Q(s)=0 có nghiệm đa trùng bậc r

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{P(s)}{Q(s)}]=e^{s_j t}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{(r-n)!}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{r-n}R(s_j)}{ds^{r-n}}\bigg|_{s=s_j} \qquad (10.27)$$

s_j là nghiệm đa trùng bậc r

$$R(s_j)=\frac{P(s)}{Q(s)}(s-s_j)^r \qquad (10.28)$$

Thí dụ 10.18

Giải lại **thí dụ 10.15** bằng công thức Heaviside

$$I(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{s+2}{(s+1)^2}$$

Q(s)=0 có nghiệm kép, r=2, s_j=-1

Ap dụng công thức (10.27)

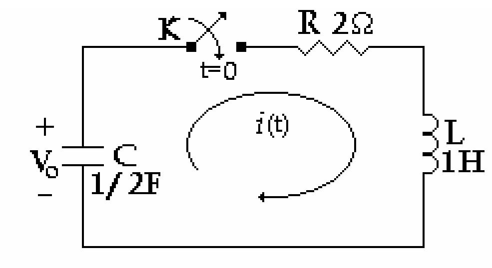
Với $R(s_j)=\frac{s+2}{(s+1)^2}(s+1)^2=s+2$

$$i(t)=e^{-t}\left[\frac{1}{1!}\frac{t^0}{0!}\frac{d(s+2)}{ds}+\frac{1}{0!}\frac{t^1}{1!}(s+2)\right] \quad ; \quad s=-1$$

Và $\boldsymbol{i(t)=e^{-t}+te^{-t}}$ **A**

Thí dụ 10.19

Cho mạch điện (H 10.11), tụ C tích điện đến V_0=1V và khóa K đóng ở t=0. Xác định dòng i(t)



$$Ri+L\frac{di}{dt}+\int_{-\infty}^{t} i\,dt=0$$

Lấy biến đổi Laplace

$$L[sI(s)-i(0_+)]+RI(s)+\frac{1}{Cs}[I(s)+q(0_+)]=0$$

Dòng điện qua cuộn dây liên tục nên

$i(0_+)=i(0_-)=0$

$q(0_+)$: điện tích ban đầu của tụ:

$$\frac{q(0_+)}{Cs}=\frac{V_o}{s}=-\frac{1}{s}$$

(Để ý dấu của điện tích đầu trên tụ ngược chiều điện tích nạp bởi dòng i(t) khi chạy qua mạch)

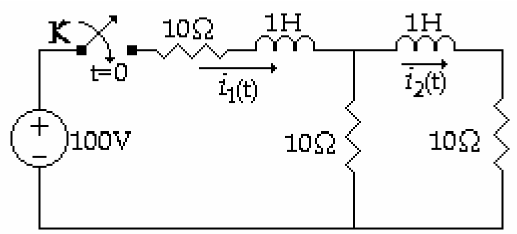
Thay giá trị đầu vào, sắp xếp lại

$$I(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$\Rightarrow \quad i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=e^{-t}\sin t.u(t)$

Thí dụ 10.20

Cho mạch (H 10.12), khóa K đóng ở t=0 và mạch không tích trữ năng lượng ban đầu. Xác định i_2(t)



Viết pt vòng cho mạch

$$\frac{di_1}{dt}+20i_1-10i_2=100u(t) \quad (1)$$

$$\frac{di_2}{dt}+20i_2-10i_1=0 \quad (2)$$

Lấy biến đổi Laplace, để ý mạch không tích trữ năng lượng ban đầu:

$$(s+20)I_1(s)-10I_2(s)=\frac{100}{s} \qquad (3)$$

$$-10\,I_1(s)+(s+20)I_2(s)=0 \qquad (4)$$

Giải hệ (3) và (4)

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+20 & \frac{100}{s} \\ -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+20 & -10 \\ -10 & s+20 \end{vmatrix}}=\frac{1000}{s(s^2+40s+300)}$$

Triển khai $I_2(s)$

$$I_2(s)=\frac{3,33}{s}+\frac{5}{s+10}+\frac{1,67}{s+30}$$

$$\Rightarrow \quad i_2(t)=3,33-5e^{-10t}+1,67e^{-30t}$$

10.6 ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ ĐẦU VÀ GIÁ TRỊ CUỐI

10.6.1 Định lý giá trị đầu

Từ phép biến đổi của đạo hàm: $\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}=sF(s)-f(0+)$

Lấy giới hạn khi $s\to\infty$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}\right]=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0+)]$$

mà $\lim_{s\to\infty}\left[\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}\right]=\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=0$

Vậy $\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0+)]=0$

$f(0_+)$ là hằng số nên

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (10.29)$$

(10.29) chính là nội dung của định lý giá trị đầu

Lấy trường hợp thí dụ 10.10, ta có:

$$I(s)=\frac{V-q_0/C}{R}\,\frac{1}{s+1/RC}$$

$$i(0+)=\lim_{s\to\infty} sI(s)=\frac{V-q_0/C}{R}$$

10.6.2 Định lý giá trị cuối

Từ phép biến đổi đạo hàm: $\mathcal{L}\dfrac{df(t)}{dt} = sF(s)-f(0+)$

Lấy giới hạn khi $s\to 0$

$$\lim_{s\to 0}\left[\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0+)]$$

mà $\displaystyle\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to 0} = \int_0^{\infty}df(t) = f(\infty) - f(0+)$

Vậy $\displaystyle f(\infty)-f(0+)=\lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0+)]$

Hay $\displaystyle f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$ (10.30)

(10.30) chính là nội dung của định lý giá trị cuối, cho phép xác định giá trị hàm f(t) ở trạng thái thường trực.

Tuy nhiên, (10.30) chỉ xác định được khi nghiệm của mẫu số của sF(s) có phần thực âm, nếu không $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$ không hiện hữu.

Thí dụ, với f(t)=sint thì $\sin\infty$ không có giá trị xác định (tương tự cho e^{∞}). Vì vậy (10.30) không áp dụng được cho trường hợp kích kích là hàm sin.

Lấy lại **thí dụ 10.13**, xác định dòng điện trong mạch ở trạng thái thường trực

$$I(s)=\frac{V}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+R/L}\right)$$

$$i(\infty)=\lim_{s\to 0} sI(s)=\frac{V}{R}\left(1-\frac{s}{s+R/L}\right)=\frac{V}{R}$$

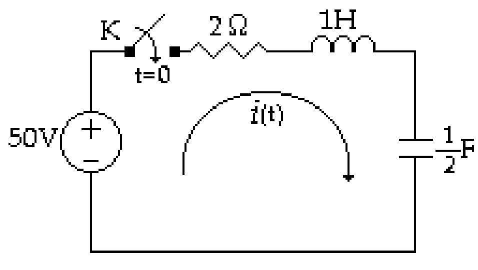
$$i(\infty)=\frac{V}{R}$$

BÀI TẬP

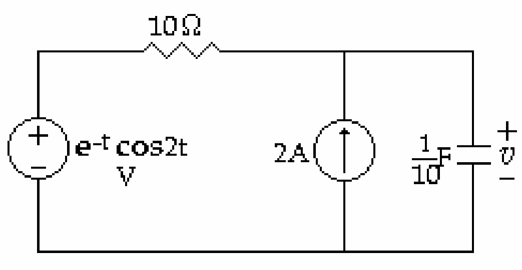
✷✹✷

10.1 Mạch (H P10.1). Khóa K đóng ở t=0 và mạch không tích trữ năng lượng ban đầu. Xác định i(t) khi t> 0

10.2 Mạch (H P10.2). Xác định v(t) khi t> 0. Cho v(0)=10V



(H P10.1)

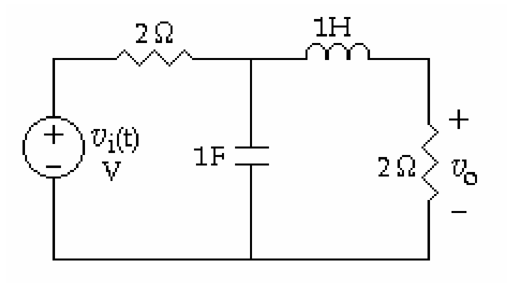


(H P10.2)

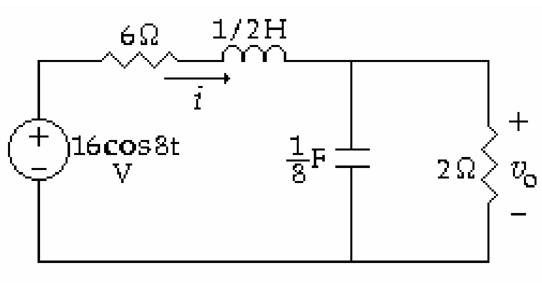
10.3 Mạch (H P10.3). Xác định v_o(t)

Cho $v_i(t) = \begin{cases} 4V, & t < 0 \\ 4e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$

10.4 Mạch (H P10.4). Xác định $v_o(t)$. Cho $v_o(0)$=4V và $i(0)$=3A

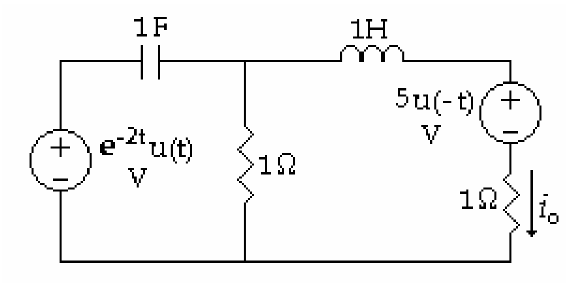


(H P10.3)

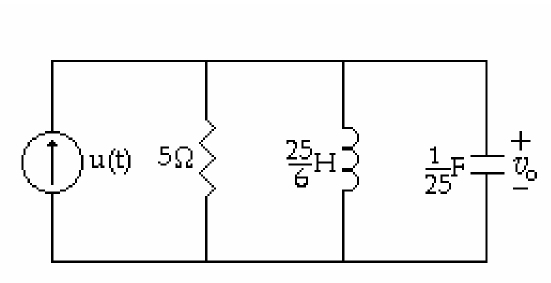


(H P10.4)

10.5 Mạch (H P10.5). Xác định $i_o(t)$.
10.6 Mạch (H P10.6). Dùng định lý kết hợp xác định $v_o(t)$.

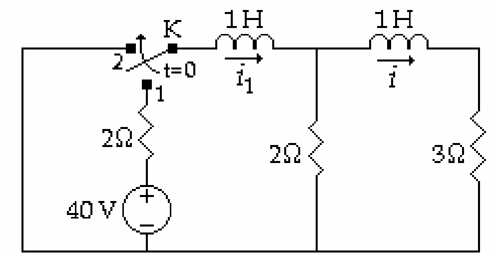


(H P10.5)



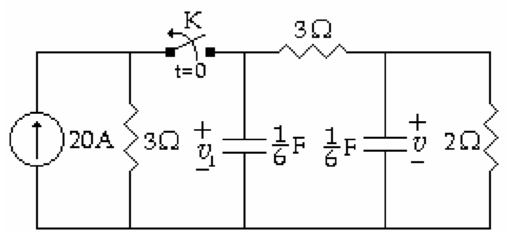
(H P10.6)

10.7 Mạch (H P10.7) đạt trạng thái thường trực ở t=0. với khóa K ở vị trí 1. Chuyển K sang vị trí 2, thời điểm t=0. Xác định i khi t>0



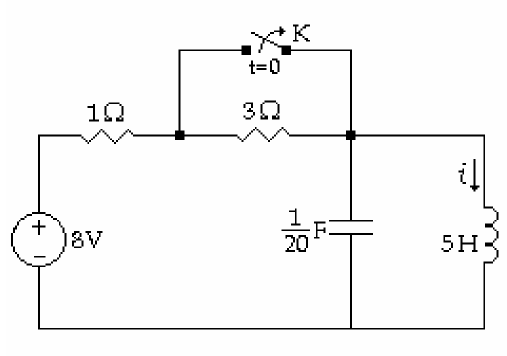
(H P10.7)

10.8 Mạch (H P10.8) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định v khi t>0



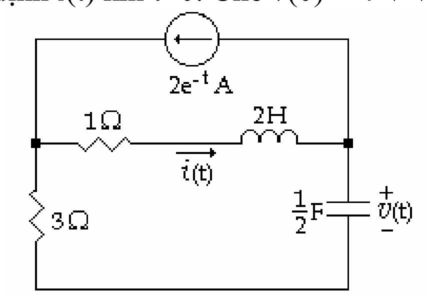
(H P10.8)

10.9 Mạch (H P10.9) đạt trạng thái thường trực ở t=0. Xác định i khi t>0



(H P10.9)

10.10 Mạch (H P10.10). Xác định *i*(t) khi t>0. Cho *v*(0) = 4 V và *i*(0) = 2 A



(H P10.10)