Mục lục

Lời nói đầu

Bạn đang có trong tay tập I của một trong những sách bài tập giải tích (theo chúng tôi) hay nhất thế giới .

Trước đây, hầu hết những người làm toán của Việt Nam thường sử dụng hai cuốn sách nổi tiếng sau (bằng tiếng Nga và đã được dịch ra tiếng Việt):

1. **"BÀI TẬP GIẢI TÍCH TOÁN HỌC"** của Demidovich (Б. П. Демидович; 1969, Сборник Задач и Упражнений по Математическому Анализу, Издательство "Наука", Москва)

   và

2. **"GIẢI TÍCH TOÁN HỌC, CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP"** của Ljaszko, Bojachuk, Gai, Golovach (И. И. Ляшко, А. К. Боячук, Я. Г. Гай, Г. П. Голобач; 1975, Математический Анализ в Примерах и Задачах, Том 1, 2, Издательство Вишая Школа).

để giảng dạy hoặc học giải tích.

Cần chú ý rằng, cuốn thứ nhất chỉ có bài tập và đáp số. Cuốn thứ hai cho lời giải chi tiết đối với phần lớn bài tập của cuốn thứ nhất và một số bài toán khác.

Lần này chúng tôi chọn cuốn sách (bằng tiếng Ba Lan và đã được dịch ra tiếng Anh):

3. **"BÀI TẬP GIẢI TÍCH. TẬP I: SỐ THỰC, DÃY SỐ VÀ CHUỖI SỐ"** (W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, Zadania z Analizy Matematycznej, Cześć Pierwsza, Liczby Rzeczywiste, Ciagi i Szeregi Liczbowe, Wydawnictwo Universytetu Marii Curie - Sklodowskiej, Lublin, 1996),

4. **"BÀI TẬP GIẢI TÍCH. TẬP II: LIÊN TỤC VÀ VI PHÂN "** (W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, Zadania z Analizy Matematycznej, Cześć Druga, Funkcje Jednej Zmiennej–Rachunek Rózniczowy, Wydawnictwo Universytetu Marii Curie - Sklodowskiej, Lublin, 1998).

để biên dịch nhằm cung cấp thêm một tài liệu tốt giúp bạn đọc học và dạy giải tích. Khi biên dịch, chúng tôi đã tham khảo bản tiếng Anh:

3*. W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, **PROBLEMS IN MATHEMATICAL ANALYSIS I, REAL NUMBERS, SEQUENCES AND SERIES**, AMS, 2000.

4*. W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, **PROBLEMS IN MATHEMATICAL ANALYSIS II, CONTINUITY AND DIFFERENTIATION**, AMS, 2001.

Sách này có các ưu điểm sau:

- Các bài tập được xắp xếp từ dễ cho tới khó và có nhiều bài tập hay.
- Lời giải khá đầy đủ và chi tiết.
- Kết hợp được những ý tưởng hay giữa toán học sơ cấp và toán học hiện đại. Nhiều bài tập được lấy từ các tạp chí nổi tiếng như, **American Mathematical Monthly (tiếng Anh), Mathematics Today (tiếng Nga), Delta (tiếng Balan)**. Vì thế, sách này có thể dùng làm tài liệu cho các học sinh phổ thông ở các lớp chuyên cũng như cho các sinh viên đại học ngành toán.

Các kiến thức cơ bản để giải các bài tập trong sách này có thể tìm trong

5. Nguyễn Duy Tiến, **BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH, TẬP I**, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2000.

6. W. Rudin, **PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS**, McGraw -Hil Book Company, New York, 1964.

Tuy vậy, trước mỗi chương chúng tôi trình bày tóm tắt lý thuyết để giúp bạn đọc nhớ lại các kiến thức cơ bản cần thiết khi giải bài tập trong chương tương ứng.

Tập I và II của sách chỉ bàn đến **HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ** (trừ phần không gian metric trong tập II). Kaczkor, Nowak chắc sẽ còn viết Bài Tập Giải Tích cho hàm nhiều biến và phép tính tích phân.

Chúng tôi đang biên dịch tập II, sắp tới sẽ xuất bản.

Chúng tôi rất biết ơn :

- Giáo sư Phạm Xuân Yêm (Pháp) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh tập I của sách này,

- Giáo sư Nguyễn Hữu Việt Hưng (Việt Nam) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh tập II của sách này,

- Giáo sư Spencer Shaw (Mỹ) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh cuốn sách nổi tiếng của W. Rudin (nói trên), xuất bản lần thứ ba, 1976,

- TS Dương Tất Thắng đã cổ vũ và tạo điều kiện để chúng tôi biên dịch cuốn sách này.

Chúng tôi chân thành cám ơn tập thể sinh viên Toán - Lý K5 Hệ Đào Tạo Cử Nhân Khoa Học Tài Năng, Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN, đã đọc kỹ bản thảo và sửa nhiều lỗi chế bản của bản đánh máy đầu tiên.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách này sẽ được đông đảo bạn đọc đón nhận và góp nhiều ý kiến quí báu về phần biên dịch và trình bày. Rất mong nhận được sự chỉ giáo của quý vị bạn đọc, những ý kiến góp ý xin gửi về: **CHI ĐOÀN CÁN BỘ, KHOA TOÁN CƠ TIN HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI, 334 NGUYỄN TRÃI, THANH XUÂN, HÀ NỘI.**

Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, Xuân 2002.
Nhóm biên dịch
Đoàn Chi

Các ký hiệu và khái niệm

- $\mathbb{R}$ - tập các số thực
- $\mathbb{R}_+$ - tập các số thực dương
- $\mathbb{Z}$ - tập các số nguyên
- $\mathbb{N}$ - tập các số nguyên dương hay các số tự nhiên
- $\mathbb{Q}$ - tập các số hữu tỷ
- (a, b) - khoảng mở có hai đầu mút là a và b
- $[a, b]$ - đoạn (khoảng đóng) có hai đầu mút là a và b
- $[x]$ - phần nguyên của số thực x
- Với $x \in \mathbb{R}$, hàm dấu của x là
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x > 0, \\ -1 & \text{với} \quad x < 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$
- Với $x \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \\ (2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n), \\ (2n-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1). \end{aligned}$$
- Ký hiệu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, là hệ số của khai triển nhị thức Newton.

- Nếu $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ khác rỗng và bị chặn trên thì ta ký hiệu $\sup \mathbf{A}$ là cận trên đúng của nó, nếu nó không bị chặn trên thì ta quy ước rằng $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Nếu $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ khác rỗng và bị chặn dưới thì ta ký hiệu $\inf \mathbf{A}$ là cận dưới đúng của nó, nếu nó không bị chặn dưới thì ta quy ước rằng $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Dãy $\{a_n\}$ các số thực được gọi là đơn điệu tăng (tương ứng đơn điệu giảm) nếu $a_{n+1} \geq a_n$ (tương ứng nếu $a_{n+1} \leq a_n$) với mọi $n \in \mathbb{N}$. Lớp các dãy đơn điệu chứa các dãy tăng và giảm.

- Số thực c được gọi là điểm giới hạn của dãy $\{a_n\}$ nếu tồn tại một dãy con $\{a_{n_k}\}$ của $\{a_n\}$ hội tụ về c.

- Cho $\mathbf{S}$ là tập các điểm tụ của dãy $\{a_n\}$. Cận dưới đúng và cận trên đúng của dãy , ký hiệu lần lượt là $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ và $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ được xác định như sau

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ không bị chặn trên,} \\ -\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn trên và } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \sup \mathbf{S} & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn trên và } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ không bị chặn dưới,} \\ +\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn dưới và } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \inf \mathbf{S} & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn dưới và } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$

- Tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \neq 0$ với $n \geq n_0$ và dãy $\{a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \ldots \cdot a_{n_0+n}\}$ hội tụ khi $n \to \infty$ tới một giới hạn $P_0 \neq 0$. Số $P = a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \ldots \cdot a_{n_0+n} \cdot P_0$ được gọi là giá trị của tích vô hạn.

- Trong phần lớn các sách toán ở nước ta từ trước đến nay, các hàm tang và côtang cũng như các hàm ngược của chúng được ký hiệu là $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ theo cách ký hiệu của các sách có nguồn gốc từ Pháp và Nga, tuy nhiên trong các sách toán của Mỹ và phần lớn các nước châu Âu, chúng được ký hiệu tương tự là $\tan x$, $\cot x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$. Trong cuốn sách này chúng tôi sẽ sử dụng những ký hiệu này để bạn đọc làm quen với những ký hiệu đã được chuẩn hoá trên thế giới.

Bài tập

Chương 1

Giới hạn và tính liên tục

1.1 Giới hạn của hàm số

Chúng ta dùng các định nghĩa sau.

Định nghĩa 1. Hàm f gọi là *tăng* (tương ứng, *tăng thực sự, giảm, giảm thực sự*) trên tập khác rỗng $A \in \mathbb{R}$ nếu $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$ kéo theo $f(x_1) \leq f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). Hàm tăng hay giảm (tương ứng, tăng thực sự hay giảm thực sự) gọi là *hàm đơn điệu* (tương ứng, *đơn điệu thực sự*)

Định nghĩa 2. Tập $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$, ở đây $\varepsilon > 0$ gọi là *lân cận khuyết* của điểm $a \in \mathbb{R}$

1.1.1. Tìm các giới hạn hoặc chứng minh chúng không tồn tại.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right], \quad a, b > 0$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x]}{x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1})$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)}$.

1.1.2. Giả sử $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = l$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|) = l$. Điều ngược lại có đúng không ?

1.1.3. Giả sử hàm $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ thoả mãn $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + \frac{1}{f(x)}) = 2$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

1.1.4. Giả sử f được xác định trên lân cận khuyết của a và $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}) = 0$. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

1.1.5. Chứng minh rằng nếu f là hàm bị chặn trên $[0, 1]$ thoả mãn $f(ax) = bf(x)$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$ và $a, b > 1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

1.1.6. Tính

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2(1 + 2 + 3 + \cdots + [\frac{1}{|x|}]))$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x([\frac{1}{x}] + [\frac{2}{x}] + \cdots + [\frac{k}{x}]))$, $k \in \mathbb{N}$.

1.1.7. Tính $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[P(x)]}{P(|x|)}$, ở đây $P(x)$ là đa thức với hệ số dương.

1.1.8. Chỉ ra bằng ví dụ rằng điều kiện

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0}(f(x) + f(2x)) = 0$$

không suy ra f có giới hạn tại 0. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm φ sao cho bất đẳng thức $f(x) \geq \varphi(x)$ được thoả mãn trong một lân cận khuyết của 0 và $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, thì $(*)$ suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.1.9.

(a) Cho ví dụ hàm f thoả mãn điều kiện

$$\lim_{x\to 0}(f(x)f(2x)) = 0$$

và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

(b) Chứng minh rằng nếu trong một lân cận khuyết của 0, các bất đẳng thức $f(x) \geq |x|^\alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, và $f(x)f(2x) \geq |x|$ được thoả mãn, thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.1.10. Cho trước số thực α, giả sử $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(ax)}{x^\alpha} = g(a)$ với mỗi số dương a. Chứng minh rằng tồn tại c sao cho $g(a) = ca^\alpha$.

1.1.11. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu sao cho $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$ với mọi $c > 0$.

1.1.12. Chứng minh rằng nếu $a > 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$.

1.1.13. Chứng minh rằng nếu $\alpha > 0$, thì $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.-

1.1.14. Cho $a > 0$, chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. Dùng đẳng thức này để chứng minh tính liên tục của hàm mũ.

1.1.15. Chứng minh rằng

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

1.1.16. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$. Dùng đẳng thức này, suy ra hàm logarit liên tục trên $(0, \infty)$.

1.1.17. Tính các giới hạn sau :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, $a > 0$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.1.18. Tìm

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1.1.19. Tìm các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x) + xe^x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\mathrm{tg}\,x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{cotg}\,x}$.

1.1.20. Tính

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(1+\dfrac{x}{2}) - \ln\dfrac{x}{2})$.

1.1.21. Giả sử rằng $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ và tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$, các số dương m, M sao cho $m \le \frac{f(x)}{x^\alpha} \le M$ với những giá trị dương của x trong lân cận của 0. Chứng minh rằng nếu $\alpha \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\ln x = \gamma$, thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$. Trường hợp $\gamma = \infty$ hoặc $\gamma = -\infty$, ta giả sử $e^\infty = \infty$ và $e^{-\infty} = 0$.

1.1.22. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 0} g(x)(f(x)-1) = \gamma$, thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$.

1.1.23. Tính

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2} + xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

1.1.24. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho mỗi dãy$f(a+n)$, $a \ge 0$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.1.25. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho với mọi số dương a, dãy$\{f(an)\}$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.1.26. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho với mọi $a \ge 0$ và mọi $b > 0$, dãy$\{f(a+bn)\}$, $a \ge 0$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.1.27. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

1.1.28. Giả sử f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn (a, b), $a < b$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = l$, thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = l$.

1.1.29. Cho f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn dưới trên mỗi khoảng hữu hạn (a, b), $a < b$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$, thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

1.1.30. Cho f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn (a, b), $a < b$. Nếu với số nguyên không âm k, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}$ tồn tại, thì

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^k}.$$

1.1.31. Cho f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn (a, b), $a < b$ và giả sử $f(x) \geq c > 0$ với $x \in (a, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ tồn tại, thì $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$ cũng tồn tại và

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

1.1.32. Giả thiết rằng $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) = 0$. Từ đó có suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tồn tại không ?

1.1.33. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $a \in \mathbb{R}$, dãy $\left\{f\left(\frac{a}{n}\right)\right\}$ hội tụ tới không. Hỏi f có giới hạn tại 0 không ?

1.1.34. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0$, thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.1.35. Chứng minh rằng nếu f đơn điệu tăng (giảm) trên (a, b), thì với mọi $x_0 \in (a, b)$,

(a) $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x > x_0} f(x) \qquad (f(x_0^+) = \sup\limits_{x > x_0} f(x))$,

(b) $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\limits_{x<x_0} f(x) \qquad (f(x_0^-) = \inf\limits_{x<x_0} f(x))$,

(c) $f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+) \qquad (f(x_0^-) \ge f(x_0) \ge f(x_0^+))$.

1.1.36. Chứng minh rằng nếu f đơn điệu tăng trên (a, b), thì với mọi $x_0 \in (a, b)$,

(a) $$\lim_{x\to x_0^+} f(x^-) = f(x_0^+),$$

(b) $$\lim_{x\to x_0^-} f(x^+) = f(x_0^-).$$

1.1.37. Chứng minh *định lí Cauchy* sau đây. Để f có giới hạn hữu hạn khi $x \to a$, điều kiện cần và đủ là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ bất cứ khi nào $0 < |x - a| < \delta$ và $0 < |x' - a| < \delta$. Lập công thức và chứng minh điều kiện cần và đủ tương tự để $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại.

1.1.38. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ và $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, thì $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$ với giả thiết $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ được xác định và f không nhận giá trị A trong lân cận khuyết của a.

1.1.39. Tìm các hàm f và g sao cho $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ và $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, nhưng $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) \ne B$.

1.1.40. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tăng và $x \mapsto f(x) - x$ có chu kì 1. Kí hiệu f^n là phép lặp thứ n của f; tức là, $f^1 = f$ và $f^n = f \circ f^{n-1}$ với $n \ge 2$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ tồn tại, thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$

1.1.41. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tăng và $x \mapsto f(x) - x$ có chu kì 1. Ngoài ra, giả sử $f(0) > 0$ và p là số nguyên dương cố định. Kí hiệu f^n là phép lặp thứ n của f. Chứng minh rằng nếu m_p là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $f^{m_p}(0) > 0$, thì

$$\frac{p}{m_p} \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} \le \frac{p}{m_p} + \frac{1 + f(0)}{m_p}.$$

1.1.42. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tăng và $x \mapsto f(x) - x$ có chu kì 1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n}$ tồn tại và nhận cùng giá trị với mọi $x \in \mathbb{R}$, ở đây f^n kí hiệu phép lặp thứ n của f.

1.2 Các tính chất của hàm liên tục

1.2.1. Tìm tất cả các điểm liên tục của hàm f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ,} \\ \sin|x| & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ.} \end{cases}$$

1.2.2. Xácđịnh tập các điểm liên tục của hàm f được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ.} \end{cases}$$

1.2.3. Nghiên cứu tính liên tục của các hàm sau:

(a)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{ và} \\ & p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ qx/(qx+1) & \text{nếu } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{ và} \\ & p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \end{cases}$$

(Hàm định nghĩa ở (a) được gọi là *hàm Riemann*.)

1.2.4. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$, thì $|f| \in C([a, b])$. Chỉ ra bằng ví dụ rằng điều ngược lại không đúng.

1.2.5. Xác định tất cả các a_n và b_n sao cho hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x & \text{nếu } x \in [2n, 2n+1],\ n \in \mathbb{Z}, \\ b_n + \cos \pi x & \text{nếu } x \in (2n-1, 2n),\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

1.2.6. Cho $f(x) = [x^2] \sin \pi x$ với $x \in \mathbb{R}$. Nghiên cứu tính liên tục của f.

1.2.7. Biết

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]} \text{ với } x \geq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng f liên tục và tăng thực sự trên $[1, \infty)$.

1.2.8. Nghiên cứu tính liên tục của các hàm sau đây và vẽ đồ thị của chúng

(a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, \quad x \geq 0,$

(d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, \quad x \neq 0,$

(e) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

1.2.9. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và tuần hoàn thì nó có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

1.2.10. Cho $P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdot + a_1 x + a_0$, chứng minh rằng tồn tại $x_* \in \mathbb{R}$ sao cho $P(x_*) = \inf\{P(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Cũng chứng minh rằng giá trị tuyệt đối của mọi đa thức P có giá trị nhỏ nhất; tức là, tồn tại $x^* \in \mathbb{R}$ sao cho $|P(x^*)| = \inf\{|P(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

1.2.11.

(a) Cho ví dụ về hàm bị chặn trên $[0, 1]$ nhưng không có giá trị nhỏ nhất, cũng không có giá trị lớn nhất.

(b) Cho ví dụ về hàm bị chặn trên $[0, 1]$ nhưng không có giá trị nhỏ nhất trên mọi đoạn $[a, b] \subset [0, 1]$, $a < b$.

1.2.12. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ và $\delta > 0$, đặt

$$\omega_f(x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta\}$$

và $\omega_f(x_0) = \lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(x_0, \delta)$. Chứng minh rằng f liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu $\omega_f(x_0) = 0$.

1.2.13.

(a) Cho $f, g \in C([a,b])$ và với $x \in [a,b]$, đặt $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ và $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Chứng minh rằng $h, H \in C([a,b])$.

(b) Cho $f_1, f_2, f_3 \in C([a,b])$ và với $x \in [a,b]$, đặt $f(x)$ là một trong ba giá trị $f_1(x), f_2(x)$ và $f_3(x)$ mà nằm giữa hai giá trị còn lại. Chứng minh rằng $f \in C([a,b])$.

1.2.14. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a,b])$, thì các hàm được xác định bởi

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\} \text{ và } M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\}$$

cũng liên tục trên $[a,b]$.

1.2.15. Gọi f là hàm bị chặn trên $[a,b]$. Chứng minh rằng các hàm được xác định bởi

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x)\} \text{ và } M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x)\}$$

cũng liên tục trên (a,b).

1.2.16. Với các giả thiết của bài toán trước, kiểm tra các hàm

$$m^*(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\} \text{ và } M^*(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\}$$

có liên tục trái trên (a,b) hay không ?

1.2.17. Giả sử f liên tục trên $[a,\infty)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ hữu hạn. Chứng minh rằng f bị chặn trên $[a,\infty)$.

1.2.18. Cho f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đặt $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Các bất đẳng thức sau

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n) \text{ và } \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)$$

có đúng không ?

1.2.19. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tăng và gọi $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng

(a)
$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n),$$

(b)
$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n).$$

1.2.20. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, giảm và gọi $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng

(a)
$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n),$$

(b)
$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n).$$

1.2.21. Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Xác định g bằng cách đặt

$$g(x) = \sup\{t : f(t) < x\} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Chứng minh rằng g liên tục trái.

(b) g có liên tục không ?

1.2.22. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn liên tục với hai chu kì *không thông ước* T_1 và T_2; tức là $\frac{T_1}{T_2}$ vô tỷ. Chứng minh rằng f là hàm hằng. Cho ví dụ hàm tuần hoàn khác hàm hằng có hai chu kì không thông ước.

1.2.23.

(a) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn, khác hàm hằng, thì nó có chu kì dương nhỏ nhất, gọi là chu kì cơ bản.

(b) Cho ví dụ hàm tuàn hoàn khác hàm hằng mà không có chu kì cơ bản.

(c) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn không có chu kì cơ bản, thì tập tất cả các chu kì của f trù mật trong $\mathbb{R}$.

1.2.24.

(a) Chứng minh rằng định lí trong mục (a) của bài toán trước vẫn còn đúng khi tính liên tục của f trên $\mathbb{R}$ được thay thế bởi tính liên tục tại một điểm.

(b) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn không có chu kì cơ bản và nếu nó liên tục tại ít nhất một điểm, thì nó là hàm hằng.

1.2.25. Chứng minh rằng nếu $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn và $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ thì $f = g$.

1.2.26. Cho ví dụ hai hàm tuần hoàn f và g sao cho mọi chu kì của f không thông ước với mọi chu kì của g và sao cho $f + g$

(a) không tuần hoàn,

(b) tuần hoàn.

1.2.27. Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục và tuần hoàn lần lượt với chu kì cơ bản dương T_1 và T_2. Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, thì $h = f + g$ không là hàm tuần hoàn.

1.2.28. Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm tuần hoàn .Giả sử f liên tục và không có chu kì nào của g thông ước với chu kì cơ bản của f. Chứng minh rằng $f + g$ không là hàm tuần hoàn.

1.2.29. Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không quá đếm được.

1.2.30. Giả sử f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(\frac{k}{n}) = 0.$$

1.2.31. Cho f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) = 0.$$

1.2.32. Giả sử $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục sao cho $f(x) \leq f(nx)$ với mọi số dương x và mọi số tự nhiên n. Chứng minh rằng $\lim_{x \to \infty} f(x)$ tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn).

1.2.33. Hàm f xác định trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ được gọi là lồi trên I nếu

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

với mọi $x_1, x_2 \in I$ và $\lambda \in (0, 1)$. Chứng minh rằng nếu f lồi trên khoảng mở, thì nó liên tục. Hàm lồi trên khoảng bất kì có nhất thiết liên tục không ?

1.2.34. Chứng minh rằng nếu dãy $\{f_n\}$ các hàm liên tục trên A hội tụ đều tới f trên A, thì f liên tục trên A.

1.3 Tính chất giá trị trung gian

Ta nhắc lại định nghĩa sau:

Định nghĩa 3. Hàm thực f có *tính chất giá trị trung gian* trên khoảng I chứa $[a, b]$ nếu $f(a) < v < f(b)$ hoặc $f(b) < v < f(a)$; tức là, nếu v nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, thì tồn tại c nằm giữa a và b sao cho $f(c) = v$.

1.3.1. Cho các ví dụ các hàm có tính chất giá trị trung gian trên khoảng I nhưng không liên tục trên khoảng này.

1.3.2. Chứng minh rằng hàm tăng thực sự $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian thì liên tục trên $[a, b]$.

1.3.3. Cho $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục. Chứng minh rằng f có *điểm cố định* trong $[0, 1]$; tức là, tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

1.3.4. Giả sử $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $f(a) < g(a)$ và $f(b) > g(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

1.3.5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và tuần hoàn với chu kì $T > 0$. Chứng minh rằng tồn tại x_0 sao cho
$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0).$$

1.3.6. Hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng, với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cho trước trong (a, b), tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho
$$f(x_0) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdot + f(x_n)).$$

1.3.7.

(a) Chứng minh rằng phương trình $(1 - x)\cos x = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

(b) Với đa thức khác không P, chứng minh rằng phương trình $|P(x)| = e^x$ có ít nhất một nghiệm.

1.3.8. Với $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$, chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức
$$P(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + a_k) + 2\prod_{k=0}^{n}(x + b_k), \quad x \in \mathbb{R},$$
đều là thực.

1.3.9. Giả sử f và g có tính chất giá trị trung gian trên $[a, b]$. Hỏi $f + g$ có tính chất giá trị trung gian trên khoảng đó không ?

1.3.10. Giả sử $f \in C([0, 2])$ và $f(0) = f(2)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0, 2]$ sao cho
$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) = f(x_1).$$

Giải thích ý nghĩa hình học kết quả trên.

1.3.11. Cho $f \in C([0, 2])$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0, 2]$ sao cho
$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

1.3.12. Với $n \in \mathbb{N}$, gọi $f \in C([0,n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0,n]$ thoả mãn

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) = f(x_1).$$

1.3.13. Hàm liên tục f trên $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$, thoả mãn $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng với mọi $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, tồn tại x_k và $x_k^{'}$ sao cho $f(x_k) = f(x_k^{'})$, ở đây $x_k - x_k^{'} = k$ hoặc $x_k - x_k^{'} = n-k$. Hỏi với mọi $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, có tồn tại x_k và $x_k^{'}$ sao cho $f(x_k) = f(x_k^{'})$, ở đây $x_k - x_k^{'} = k$?

1.3.14. *6* Với $n \in \mathbb{N}$, gọi $f \in C([0,n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f(y)$ có ít nhất n nghiệm với $x - y \in \mathbb{N}$.

1.3.15. Giả sử các hàm thực liên tục f và g xác định trên $\mathbb{R}$ giao hoán với nhau; tức là, $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f^2(x) = g^2(x)$ có nghiệm, thì phương trình $f(x) = g(x)$ cũng có nghiệm (ở đây $f^2(x) = f(f(x))$ và $g^2(x) = g(g(x))$).

Chỉ ra ví dụ rằng giả thiết về tính liên tục của f và g trong bài toán trên không thể bỏ qua.

1.3.16. Chứng minh rằng đơn ánh liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thì hoặc tăng thực sự, hoặc giảm thực sự.

1.3.17. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là dơn ánh liên tục. Chứng minh rằng nếu tồn tại n sao cho phép lặp thứ n của f là ánh xạ đồng nhất, tức là, $f^n(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì

(a) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nếu f tăng thực sự,

(b) $f^2(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nếu f giảm thực sự.

1.3.18. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(f(x)) = f^2(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.Chứng minh rằng f không thể liên tục.

1.3.19. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian và tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f^n(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$, ở đây f^n kí hiệu phép lặp thứ n của f.

1.3.20. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian và $f^{-1}(\{q\})$ đóng với mọi q hữu tỷ, thì f liên tục.

1.3.21. Giả sử $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục và bị chặn. Chứng minh rằng, với T cho trước, tồn tại dãy $\{x_n\}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ và } \lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)).$$

1.3.22. Cho ví dụ hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt mỗi giá trị của nó đúng ba lần. Hỏi có tồn tại hay không hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt mỗi giá trị của nó đúng hai lần ?

1.3.23. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục và *đơn điệu thực sự từng mảnh*. (Hàm f gọi là đơn điệu thực sự từng mảnh trên $[0, 1]$, nếu tồn tại phân hoạch của $[0, 1]$ thành hữu hạn khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, ở đây $i = 1, 2, \ldots , n$ và $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, sao cho f đơn điệu trên mỗi khoảng con đó.) Chứng minh rằng f nhận một trong các giá trị của nó một số lẻ lần.

1.3.24. Hàm liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nhận mỗi giá trị của nó hữu hạn lần và $f(0) \neq f(1)$. Chứng minh rằng f nhận một trong các giá trị của nó một số lẻ lần.

1.3.25. Giả sử $f : K \to K$ liên tụctrên tập con compact $K \subset \mathbb{R}$. Ngoài ra, giả sử $x_0 \in K$ là số sao cho mọi điểm giới hạn của dãy lặp $\{f^n(x_0)\}$ là điểm cố định của f. Chứng minh rằng $\{f^n(x_0)\}$ hội tụ.

1.3.26. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, tăng sao cho F xác định bởi $F(x) = f(x) - x$ tuần hoàn với chu kì 1. Chứng minh rằng nếu $\alpha(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$, thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $F(x_0) = \alpha(f)$. Chứng minh thêm rằng f có điểm bất động trong $[0, 1]$ nếu và chỉ nếu $\alpha(f) = 0$. (Xem các bài toán 1.1.40 - 1.1.42.)

1.3.27. Hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thoả mãn $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$, và tồn tại hàm g liên tục trên $[0, 1]$ sao cho $f + g$ giảm. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng mở $(0, 1)$.

1.3.28. Chứng minh rằng mọi song ánh $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ có vô hạn điểm gián đoạn.

1.3.29. Nhắc lại rằng mỗi $x \in (0, 1)$ có thể được biểu diễn bởi số nhị phân (binary fraction) $.a_1a_2a_3\ldots$, ở đây $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Trong trường hợp x có hai khai triển nhị phân khác nhau, ta chọn khai triển có vô hạn chữ số 1. Tiếp đó, gọi hàm $f : (0, 1) \to [0, 1]$ được xác định bởi

$$f(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Chứng minh rằng f gián đoạn tại mọi $x \in (0, 1)$, tuy nhiên, nó có tính chất giá trị trung gian.

1.4 Hàm nửa liên tục

Định nghĩa 4. *Hệ thống số thực mở rộng* $\overline{\mathbb{R}}$ bao gồm hệ thống số thực và hai kí hiệu $+\infty$,$-\infty$ với các tính chất sau :

(i) Nếu x thực, thì $-\infty < x < +\infty$, và $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$.

(ii) Nếu $x > 0$, thì $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

(iii) Nếu $x < 0$, thì $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Định nghĩa 5. Nếu $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ là tập khác rỗng, thì $\sup A$ (tương ứng $\inf A$) là số thực mở rộng nhỏ nhất (tương ứng, lớn nhất) mà lớn hơn (tương ứng, nhỏ hơn) hoặc bằng mọi phần tử của A.
Cho f là hàm thực xác định trên tập khác rỗng $A \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 6. Nếu x_0 là điểm giới hạn của A, thì *giới hạn dưới* (tương ứng *giới hạn trên*) của $f(x)$ khi $x \to x_0$ được định nghĩa là inf (tương ứng sup) của tập tất cả các $y \in \overline{\mathbb{R}}$ sao cho tồn tại dãy $\{x_n\}$ các điểm trong A khác x_0, hội tụ tới x_0 và $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Giới hạn dưới và giới hạn trên của $f(x)$ khi $x \to x_0$ được kí hiệu tương ứng bởi $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ và $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$.

Định nghĩa 7. Một hàm giá trị thực gọi là *nửa liên tục dưới* (tương ứng *trên*) tại $x_0 \in A$, x_0 là điểm giới hạn của A, nếu $\varliminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ (tương ứng $\varlimsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$). Nếu x_0 là điểm cô lập của A, thì ta giả sử rằng f là nửa liên tục trên và dưới tại điểm này.

1.4.1. Chứng minh rằng nếu x_0 là điểm giới hạn của A và $f : A \to \mathbb{R}$, thì

(a) $\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf\{f(x)\} \,:\, x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta,$

(b) $\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup\{f(x)\} \,:\, x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta.$

1.4.2. Chứng minh rằng nếu x_0 là điểm giới hạn của A và $f : A \to \mathbb{R}$, thì

(a) $\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta\to 0^+} \inf\{f(x)\} \,:\, x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta,$

(b) $\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta\to 0^+} \sup\{f(x)\} \,:\, x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta.$

1.4.3. Chứng minh rằng $y_0 \in \mathbb{R}$ là giới hạn dưới của $f : A \to \mathbb{R}$ tại điểm giới hạn x_0 của A nếu và chỉ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, hai điều kiện sau đây được thoả mãn :

(i) tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) > y_0 - \varepsilon$ với mọi $x \in A$ và $0 < |x - x_0| < \delta$,

(ii) với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x) < y_0 + \varepsilon$.

Thiết lập bài toán tương tự cho giới hạn trên của f tại x_0.

1.4.4. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm tới hạn của A. Chứng minh rằng

(a) $\varliminf_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ nếu và chỉ nếu với mọi y thực và với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x') < y$.

(b) $\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ nếu và chỉ nếu với mọi y thực và với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x') > y$.

1.4.5. Giả sử $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng nếu $l = \varliminf_{x\to x_0} f(x)$ (tương ứng $L = \varlimsup_{x\to x_0} f(x)$), thì tồn tại dãy $\{x_n\}$, $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, hội tụ tới x_0 sao cho $l = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (tương ứng $L = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$).

1.4.6. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng

$$\varliminf_{x\to x_0} (-f(x)) = -\varlimsup_{x\to x_0} f(x) \text{ và } \varlimsup_{x\to x_0} (-f(x)) = -\varliminf_{x\to x_0} f(x).$$

1.4.7. Cho $f : A \to (0,\infty)$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng

$$\varliminf_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)} \text{ và } \varlimsup_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)}.$$

(Ta giả sử rằng $\frac{1}{+\infty} = 0$ và $\frac{1}{0^+} = +\infty$.)

1.4.8. Giả sử $f, g : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây đúng (trừ trường hợp các dạng bất định $+\infty - \infty$ và $-\infty + \infty$):

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x) &\le \varliminf_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \le \varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varlimsup_{x\to x_0} g(x)\\ &\le \varlimsup_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \le \varlimsup_{x\to x_0} f(x) + \varlimsup_{x\to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Cho ví dụ các hàm sao cho $'' \le ''$ trong các bất đẳng thức trên được thay bởi $'' <''$.

1.4.9. Giả sử $f, g : A \to [0,\infty)$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây đúng (trừ trường hợp các dạng bất định $0\cdot(+\infty)$ và $(+\infty)\cdot 0$):

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to x_0} f(x) \cdot \varliminf_{x\to x_0} g(x) &\le \varliminf_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) \le \varliminf_{x\to x_0} f(x) \cdot \varlimsup_{x\to x_0} g(x)\\ &\le \varlimsup_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) \le \varlimsup_{x\to x_0} f(x) \cdot \varlimsup_{x\to x_0} g(x).\end{aligned}$$

Cho ví dụ các hàm sao cho $'' \le ''$ trong các bất đẳng thức trên được thay bởi $'' <''$.

1.4.10. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)$ tồn tại, thì (trừ trường hợp các dạng bất định $+\infty - \infty$ và $-\infty + \infty$):

$$\begin{aligned}
\varliminf_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x),\\
\varlimsup_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) + \varlimsup_{x\to x_0} g(x).
\end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu f và g là các hàm không âm, thì (trừ trường hợp các dạng bất định $0 \cdot (+\infty)$ và $(+\infty) \cdot 0$):

$$\begin{aligned}
\varliminf_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \varliminf_{x\to x_0} g(x),\\
\varlimsup_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \varlimsup_{x\to x_0} g(x).
\end{aligned}$$

1.4.11. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên (a, b), $l = \varliminf_{x\to a} f(x)$ và $L = \varlimsup_{x\to a} f(x)$, thì với mọi $\lambda \in [l, L]$, tồn tại dãy $\{x_n\}$ gồm các điểm trong (a, b) hội tụ tới a sao cho $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$.

1.4.12. Tìm tất cả các điểm tại đó $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ},\\ \sin x & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \end{cases}$$

là nửa liên tục.

1.4.13. Xác định tất cả các điểm tại đó f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ},\\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \end{cases}$$

là nửa liên tục.

1.4.14. Chứng minh rằng

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0,\\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\\ & \text{và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau}, \end{cases}$$

là nửa liên tục trên.

1.4.15. Tìm tất cả các điểm tại đó hàm xác định bởi

(a) $$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ \frac{qx}{qx+1} & \text{nếu } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \\ & \text{và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau} \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^q}{q+1} & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \text{ và } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}, \\ & \text{và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \\ 0 & \text{nếu } x \in (0,1) \text{ vô tỷ} \end{cases}$$

không nửa liên tục trên, cũng không nửa liên tục dưới.

1.4.16. Cho $f, g : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục trên (tương ứng, dưới) tại $x_0 \in A$. Chứng minh rằng

(a) nếu $a > 0$ thì af nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$. Nếu $a > 0$ thì af nửa liên tục trên (tương ứng, dưới) tại x_0.

(b) $f + g$ nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại x_0.

1.4.17. Giả sử rằng $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$. Chứng minh rằng $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ (tương ứng, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$) nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại x_0.

1.4.18. Chứng minh rằng giới hạn theo từng điểm của một dãy tăng (tương ứng, giảm) các hàm nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên).

1.4.19. Với $f : A \to \mathbb{R}$ và x là điểm giới hạn của A, định nghĩa *dao động của f tại x* bởi

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup\{|f(z) - f(u)| \,:\, z, u \in A,\ |z - x| < \delta,\ |u - x| < \delta\}$$

Chứng minh rằng $o_f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, ở đây

$$f_1(x) = \max\{f(x), \varlimsup_{z\to x} f(z)\} \text{ và } f_2(x) = \min\{f(x), \varliminf_{z\to x} f(z)\}.$$

1.4.20. Gọi f_1, f_2, và o_f như trong bài toán trước. Chứng minh rằng f_1 và o_f là nửa liên tục trên, và f_2 là nửa liên tục dưới.

1.4.21. Chứng minh rằng để $f : A \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$, điều kiện cần và đủ là với mọi $a < f(x_0)$ (tương ứng, $a > f(x_0)$), tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) > a$ (tương ứng, $f(x) < a$) bất cứ khi nào $|x - x_0| < \delta$, $x \in A$.

1.4.22. Chứng minh rằng để $f : A \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$, điều kiện cần và đủ là với mọi $a \in \mathbb{R}$, tập $\{x \in A : f(x) > a\}$ (tương ứng, $\{x \in A : f(x) < a\}$) là mở trong A.

1.4.23. Chứng minh rằng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới nếu và chỉ nếu tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ là đóng trong $\mathbb{R}^2$.

Lập công thức và chứng minh điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục trên của f trên $\mathbb{R}$.

1.4.24. Chứng minh *định lí Baire* sau đây. Mọi hàm nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) $f : A \to \mathbb{R}$ là giới hạn của dãy tăng (tương ứng, giảm) các hàm liên tục trên A.

1.4.25. Chứng minh rằng nếu $f : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục trên, $g : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục dưới và $f(x) \leq g(x)$ khắp nơi trên A, thì tồn tại hàm liên tục h trên A sao cho

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in A.$$

1.5 Tính liên tục đều

Định nghĩa 8. Hàm thực f xác định trên tập $A \in \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục đều* trên A nếu, với ε cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x và y trong A mà $|x - y| < \delta$, ta có $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

1.5.1. Kiểm tra các hàm sau đây có liên tục đều trên $(0, 1)$ hay không :

(a) $f(x) = e^x$,

(b) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$,

(c) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$,

(d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$,

(e) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$,

(f) $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$,

(g) $f(x) = \ln x$,

(h) $f(x) = \cos x \cdot \cos \dfrac{\pi}{x}$,

(i) $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

1.5.2. Hàm nào trong số các hàm sau đây liên tục đều trên $[0, \infty)$?

(a) $f(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f(x) = x \sin x$,

(c) $f(x) = \sin^2 x$,

(d) $f(x) = \sin x^2$,

(e) $f(x) = e^x$,

(f) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$,

(g) $f(x) = \sin \sin x$,

(h) $f(x) = \sin(x \sin x)$,

(i) $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

1.5.3. Chứng minh rằng nếu f liên tục đều trên (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, thì $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ tồn tại như các giới hạn hữu hạn.

1.5.4. Giả sử f và g liên tục dều trên (a, b) $([a, \infty))$. Từ đó có suy ra tính liên tục đều trên (a, b) $([a, \infty))$ của các hàm

(a) $f + g$,

(b) fg,

(c) $x \mapsto f(x) \sin x$?

1.5.5.

(a) Chứng minh rằng nếu f là liên tục đều trên $(a, b]$ và trên $[b, c)$, thì nó cũng liên tục trên (a, c).

(b) Giả sử A và B là các tập đóng trong $\mathbb{R}$ và gọi $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ là liên tục đều trên A và B. Hỏi f có nhất thiết liên tục đều trên $A \cup B$?

1.5.6. Chứng minh rằng mọi hàm liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ thì liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

1.5.7.

(a) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ là hữu hạn, thì f cũng liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

(b) Chứng minh rằng nếu $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ là hữu hạn, thì f cũng liên tục đều trên $[a, \infty)$.

1.5.8. Kiểm tra tính liên tục đều của

(a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ trên $(-\infty, +\infty)$,

(b) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$,

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ trên $(0, +\infty)$.

1.5.9. Giả sử f liên tục đều trên $(0, \infty)$. Hỏi các giới hạn $\lim\limits_{x\to^+0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.5.10. Chứng minh rằng mọi hàm bị chặn, đơn điệu và liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ là liên tục đều trên I.

1.5.11. Giả sử f liên tục đều và không bị chặn trên $[0, \infty)$. Phải chăng hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$?

1.5.12. Hàm $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều và với mọi $x \geq 0$, dãy $\{f(x + n)\}$ hội tụ tới không. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

1.5.13. Giả sử $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng tồn tại số dương M sao cho $\frac{|f(x)|}{x} \leq M$ với $x \geq 1$.

1.5.14. Gọi $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng tồn tại số dương M với tính chất sau đây :

$$\sup_{u>0}\{|f(x+u) - f(u)|\} \leq M(x+1) \text{ với mọi } x \geq 0.$$

1.5.15. Cho $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, liên tục đều. Chứng minh rằng nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy các phần tử trong A, thì $\{f(x_n)\}$ cũng là dãy Cauchy.

1.5.16. Giả sử $A \subset \mathbb{R}$ bị chặn. Chứng minh rằng nếu $f : A \to \mathbb{R}$ biến dãy Cauchy các phần tử của A thành dãy Cauchy, thì f liên tục đều trên A. Tính bị chặn của A có phải là giả thiết cốt yếu không ?

1.5.17. Chứng minh rằng f liên tục đều trên $A \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ các phần tử của A,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \text{ suy ra } \lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

1.5.18. Giả sử $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ liên tục đều. Từ đó có suy ra

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{x})}{f(x)} = 1\,?$$

1.5.19. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 và thoả mãn các điều kiện sau đây

$$f(0) = 0 \text{ và } f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \text{ với mọi } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

1.5.20. Với $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1 - f(x_2))| \,:\, x_1, x_2 \in A,\, |x_1 - x_2| < \delta\}$$

và gọi ω_f là *mô đun liên tục của* f. Chứng minh rằng f liên tục đều trên A nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(\delta) = 0$.

1.5.21. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng các phát biểu sau tương đương.

(a) Với mọi hàm liên tục đều $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \cdot g$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$

(b) Hàm $x \mapsto |x|f(x)$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

1.5.22. Chứng minh điều kiện cần và đủ sau đây để f là hàm liên tục đều trên khoảng I. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$,

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x - 2} \right| > N \text{ suy ra } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

1.6 Phương trình hàm

1.6.1. Chứng minh rằng hàm duy nhất liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn *phương trình hàm Cauchy*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

là hàm tuyến tính dạng $f(x) = ax$.

1.6.2. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình hàm Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

và một trong các điều kiện

(a) f liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$,

(b) f bị chặn trên khoảng (a, b) nào đó,

(c) f đơn điệu trên $\mathbb{R}$,

thì $f(x) = ax$.

1.6.3. Xác định tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(1) > 0$ và

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

1.6.4. Chứng minh rằng các nghiệm duy nhất mà không đồng nhất bằng không và liên tục trên $(0, \infty)$ của phương trình hàm

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

là các hàm logarit.

1.6.5. Chứng minh rằng các nghiệm duy nhất mà không đồng nhất bằng không và liên tục trên $(0, \infty)$ của phương trình hàm

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

là các hàm dạng $f(x) = x^a$.

1.6.6. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x) - f(y)$ hữu tỷ với $x - y$ hữu tỷ.

1.6.7. Với $|q| < 1$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại không và thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) + f(qx) = 0.$$

1.6.8. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại không và thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = x.$$

1.6.9. Xác định mọi nghiệm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại không của phương trình hàm

$$2f(2x) = f(x) + x.$$

1.6.10. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn *phương trình Jensen*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1.6.11. Tìm tất cả các hàm liên tục trên (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, thoả mãn phương trình Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1.6.12. Xác định tất cả các nghiệm liên tục tại -1 của phương trình hàm

$$f(2x+1) = f(x).$$

1.6.13. Với a thực, chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là nghiệm liên tục của phương trình

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + axy,$$

thì $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx$, ở đây $b = f(1) - \frac{a}{2}$.

1.6.14. Xác định mọi nghiệm liên tục tại 0 của phương trình hàm

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \neq 1.$$

1.6.15. Gọi $f : [0,1] \to [0,1]$ là hàm liên tục, đơn điệu giảm sao cho $f(f(x)) = x$ với $x \in [0,1]$. Hỏi $f(x) = 1 - x$ có phải là hàm duy nhất như vậy không ?

1.6.16. Giả sử rằng f và g thoả mãn phương trình

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu f không đồng nhất bằng không và $|f(x)| \leq 1$ với $x \in \mathbb{R}$, thì ta cũng có $|g(x)| \leq 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

1.6.17. Tìm tất cả các hàm liên tục thoả mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x.$$

1.6.18. Xác định mọi nghiệm liên tục tại không $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ của

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

1.6.19. Giải phương trình hàm

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \quad \text{với} \quad x \neq 0, 1.$$

1.6.20. Dãy $\{x_n\}$ ***hội tụ theo nghĩa Cesàro*** nếu

$$C - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

tồn tại và hữu hạn. Tìm tất cả các hàm ***liên tục Cesàro***, tức là

$$f(C - \lim_{n\to\infty} x_n) = C - \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

với mọi dãy hội tụ Cesàro $\{x_n\}$.

1.6.21. Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ là đơn ánh sao cho $f(2x - f(x)) = x$ với $x \in [0,1]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.

1.6.22. Với m khác không, chứng minh rằng nếu hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$f\left(2x - \frac{f(x)}{m}\right) = mx,$$

thì $f(x) = m(x - c)$.

1.6.23. Chứng minh rằng các nghiệm duy nhất của phương trình hàm

$$f(x + y) + f(y - x) = 2f(x)f(y)$$

liên tục trên $\mathbb{R}$ và không đồng nhất bằng không là $f(x) = \cos(ax)$ và $f(x) = \cosh(ax)$ với a thực.

1.6.24. Xác định mọi nghiệm liên tục trên $(-1, 1)$ của

$$f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right) = f(x) + f(y).$$

1.6.25. Tìm mọi đa thức P sao cho

$$P(2x - x^2) = (P(x))^2.$$

1.6.26. Cho $m, n \geq 2$ là các số nguyên. Tìm tất cả các hàm $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm trong $[0, \infty)$ và sao cho

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i))^m \text{ với } x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

1.6.27. Tìm tất cả các hàm không đồng nhất bằng không $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ và } f(x+z) = f(x) + f(z)$$

với $z \neq 0$ nào đó.

1.6.28. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

1.6.29. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) + f(x^2) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0$$

1.6.30. Chứng minh rằng các hàm $f, g, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = \phi\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad y \neq x,$$

nếu và chỉ nếu tồn tại a, b và c sao cho

$$f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c, \quad \phi(x) = 2ax + b.$$

1.6.31. Chứng minh rằng tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ thoả mãn ba điều kiện sau đây :

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = x$ với $x \in \mathbb{Q}$,

(c) f không liên tục trên $\mathbb{R}$.

1.7 Hàm liên tục trong không gian metric

Trong mục này, $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$ lần lượt kí hiệu là các không gian metric $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$. Để đơn giản, ta nói rằng $\mathbf{X}$ là không gian metric thay cho $(\mathbf{X}, d_1)$ là không gian metric. $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^n$ luôn giả sử được trang bị metric Euclide, nếu không phát biểu ngược lại.

1.7.1. Gọi $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric và $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Chứng minh rằng các điều kiện sau đây tương đương.

(a) Hàm f liên tục.

(b) Với mỗi tập đóng $\mathbf{F} \subset \mathbf{Y}$, tập $f^{-1}(\mathbf{F})$ đóng trong $\mathbf{X}$.

(c) Với mỗi tập mở $\mathbf{G} \subset \mathbf{Y}$, tập $f^{-1}(\mathbf{G})$ mở trong $\mathbf{X}$.

(d) Với mỗi tập con $\mathbf{A}$ của $\mathbf{X}$, $f(\overline{\mathbf{A}} \subset \overline{f(\mathbf{A})})$.

(e) Với mỗi tập con $\mathbf{B}$ của $\mathbf{Y}$, $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathbf{B}})$.

1.7.2. Gọi $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric và $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ liên tục. Chứng minh rằng nghịch ảnh $f^{-1}(\mathbf{B})$ của tập Borel $\mathbf{B}$ trong $(\mathbf{Y}, d_2)$ là tập Borel trong $(\mathbf{X}, d_1)$.

1.7.3. Cho ví dụ hàm liên tục $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ sao cho ảnh $f(\mathbf{F})$ (tương ứng, $f(\mathbf{G})$) không đóng (tương ứng, mở) trong $\mathbf{Y}$ với $\mathbf{F}$ đóng (tương ứng, $\mathbf{G}$ mở) trong $\mathbf{X}$.

1.7.4. Gọi $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric và $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ liên tục. Chứng minh rằng ảnh của tập compact $\mathbf{F}$ trong $\mathbf{X}$ là tập compact trong $\mathbf{Y}$.

1.7.5. Cho f xác định trên hợp các tập đóng $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_m$. Chứng minh rằng nếu giới hạn của f trên mỗi $\mathbf{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, là liên tục, thì f liên tục trên $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{F}_m$. Chỉ ra ví dụ rằng phát biểu trên không đúng trong trường hợp vô hạn $\mathbf{F}_i$.

1.7.6. Cho f xác định trên hợp các tập mở $\mathbf{G}_t$, $t \in \mathbf{T}$. Chứng minh rằng nếu với mỗi $t \in \mathbf{T}$, giới hạn $f_{|\mathbf{G}_t}$ là liên tục, thì f liên tục trên $\bigcup\limits_{t \in \mathbf{T}} \mathbf{G}_t$.

1.7.7. Cho $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric. Chứng minh rằng $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ liên tục nếu và chỉ nếu với mỗi $\mathbf{A}$ trong $\mathbf{X}$, hàm $f_{|\mathbf{A}}$ liên tục.

1.7.8. Giả sử f là song ánh liên tục từ không gian metric compact $\mathbf{X}$ lên không gian metric $\mathbf{Y}$. Chứng minh rằng hàm ngược f^{-1} liên tục trên $\mathbf{Y}$. Cũng chứng minh rằng giả thiết compact không thể bị bỏ qua.

1.7.9. Gọi f là ánh xạ liên tục từ không gian metric compact $\mathbf{X}$ vào không gian metric $\mathbf{Y}$. Chứng minh rằng f liên tục đều trên $\mathbf{X}$.

1.7.10. Gọi $(\mathbf{X}, d)$ là không gian metric và $\mathbf{A}$ là tập con khác rỗng của $\mathbf{X}$. Chứng minh rằng hàm $f : \mathbf{X} \to [0, \infty)$ xác định bởi

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) = \inf\{d(x, y) \, : \, y \in \mathbf{A}\}$$

liên tục đều trên $\mathbf{X}$.

1.7.11. Giả sử f là ánh xạ liên tục của không gian metric liên thông $\mathbf{X}$ vào không gian metric $\mathbf{Y}$. Chứng minh rằng $f(\mathbf{X})$ liên thông trong $\mathbf{Y}$.

1.7.12. Cho $f : \mathbf{A} \to \mathbf{Y}, \emptyset \neq \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Với $x \in \overline{\mathbf{A}}$ định nghĩa

$$o_f(x, \delta) = \operatorname{diam}\left(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x, \delta))\right).$$

Giao độ của f tại x được xác định bởi

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} o_f(x, \delta).$$

Chứng minh rằng f liên tục tại $x_0 \in \mathbf{A}$ nếu và chỉ nếu $o_f(x_0) = 0$ (so sánh với 1.4.19 và 1.4.20).

1.7.13. Giả sử $f : \mathbf{A} \to \mathbf{Y}$, $\emptyset \neq \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ và với $x \in \overline{\mathbf{A}}$, gọi $o_f(x)$ là giao độ của f tại x đuợc xác định như trong bài toán trước. Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tập $\{x \in \overline{\mathbf{A}} \, : \, o_f(x) \geq \varepsilon\}$ là đóng trong $\mathbf{X}$.

1.7.14. Chứng minh rằng tập điểm liên tục của $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ là giao đếm được các tập mở, nói cách khác, là $\mathcal{G}_\delta$ trong $(\mathbf{X}, d_1)$. Cũng chứng minh rằng tập điểm gián đoạn của f là hợp đếm được các tập đóng, nói cách khác, là $\mathcal{F}_\sigma$ trong $(\mathbf{X}, d_1)$.

1.7.15. Cho ví dụ hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tập điểm gián đoạn là $\mathbb{Q}$.

1.7.16. Chứng minh rằng với mỗi tập con $\mathcal{F}_\sigma$ của $\mathbb{R}$ là tập điểm gián đoạn của hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.7.17. Cho $\mathbf{A}$ là tập con $\mathcal{F}_\sigma$ của không gian metric $\mathbf{X}$. Có tồn tại hay không hàm $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ mà tập điểm gián đoạn là $\mathbf{A}$?

1.7.18. Gọi $\chi_{\mathbf{A}}$ là hàm đặc trưng của $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Chứng minh rằng $\{x \in \mathbf{X} : o_{\chi_{\mathbf{A}}}(x) > 0\} = \partial\mathbf{A}$, ở đây $\chi_f(x)$ là giao độ của f tại x được xác định như trong 1.7.12. Suy ra rằng $\chi_{\mathbf{A}}$ liên tục trên $\mathbf{X}$ nếu và chỉ nếu $\mathbf{A}$ vừa mở, vừa đóng trong $\mathbf{X}$.

1.7.19. Giả sử g_1 và g_2 là các ánh xạ liên tục của không gian metric $(\mathbf{X}, d_1)$ vào không gian metric $(\mathbf{X}, d_2)$, và tập $\mathbf{A}$ có phần trong rỗng, trù mật trong $\mathbf{X}$.Chứng minh rằng nếu

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{với } x \in \mathbf{A}, \\ g_2(x) & \text{với } x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{A}, \end{cases}$$

thì

$$o_f(x) = d_2(g_1(x), g_2(x)), \quad x \in \mathbf{X}.$$

ở đây $o_f(x)$ là giao độ của f tại x được xác định như trong 1.7.12.

1.7.20. Ta nói rằng hàm thực f xác định trên không gian metric $\mathbf{X}$ là thuộc *lớp Baire thứ nhất* nếu f là giới hạn điểm của dãy hàm liên tục trên $\mathbf{X}$. Chứng minh rằng nếu f thuộc lớp Baire thứ nhất, thì tập các điểm gián đoạn của f là tập thuộc phạm trù thứ nhất; tức là, nó là hợp của một số đếm được các tập không đâu trù mật.

1.7.21. Chứng minh rằng nếu $\mathbf{X}$ là không gian metric đầy đủ và f thuộc lớp Baire thứ nhất trên $\mathbf{X}$, thì tập các điểm liên tục của f trù mật trong $\mathbf{X}$.

1.7.22. Gọi $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho với mỗi số dương x, dãy $\{f\left(\frac{x}{n}\right)\}$ hội tụ tới không. Từ đó có suy ra $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ không ? (so sánh với 1.1.33.)

1.7.23. Kí hiệu $\mathcal{F}$ là họ các hàm liên tục trên không gian metric compact $\mathbf{X}$ sao cho với mọi $x \in \mathbf{X}$, tồn tại M_x thoả mãn

$$|f(x)| \leq M_x \text{ với mọi } f \in \mathcal{F}.$$

Chứng minh rằng tồn tại hằng số dương M và tập mở khác rỗng $\mathbf{G} \subset \mathbf{X}$ sâo cho

$$|f(x)| \leq M \text{ với mọi } f \in \mathcal{F} \text{ và với mọi } x \in \mathbf{G}.$$

1.7.24. Gọi $\mathbf{F}_1 \supset \mathbf{F}_2 \supset \mathbf{F}_3 \supset \dots$ là dãy các tập con khác rỗng lồng nhau của không gian metric đầy đủ $\mathbf{X}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} \mathbf{F}_n = 0$. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên $\mathbf{X}$, thì

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(\mathbf{F}_n).$$

1.7.25. Gọi $(\mathbf{X}, d)$ là không gian metric và p là điểm cố định trong $\mathbf{X}$. Với $a \in \mathbf{X}$, xác định hàm f_u bởi $f_u(x) = d_1(u, x) - d_1(p, x)$, $x \in \mathbf{X}$. Chứng minh rằng $u \mapsto f_u$ là ánh xạ bảo toàn khoảng cách, nói cách khác, là đẳng cự của $(\mathbf{X}, d_1)$ vào không gian $C(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ các hàm thực liên tục trên $\mathbf{X}$ được trang bị metric $d(f, g) = \sup\{f(x) - g(x) \,:\, x \in \mathbf{X}\}$.

1.7.26. Chứng minh rằng không gian metric $\mathbf{X}$ là compact nếu và chỉ nếu với mọi hàm liên tục $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ là bị chặn.

1.7.27. Cho $(\mathbf{X}, d_1)$ là không gian metric và với $x \in \mathbf{X}$, xác định $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{X} \setminus \{x\})$. Chứng minh rằng hai điều kiện sau đây tươngđương.

(a) Mọi hàm $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ là liên tục đều.

(b) Mọi dãy $\{x_n\}$ các phần tử của $\mathbf{X}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$$

chứa dãy con hội tụ.

1.7.28. Chứng minh rằng không gian metric $\mathbf{X}$ là compact nếu và chỉ nếu mọi hàm thực liên tục trên $\mathbf{X}$ là liên tục đều và với mọi $\varepsilon > 0$, tập $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$, ở đây ρ được xác định như trong 1.7.27, là hữu hạn.

1.7.29. Cho ví dụ không gian metric không compact sao cho mọi hàm liên tục $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ là liên tục đều trên $\mathbf{X}$.

1.7.30. Xét hàm định nghĩa bởi (so sánh với 1.2.3 (a))

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \quad x \text{hữu tỷ.} \\ 0 & \text{nếu } \quad x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } \quad x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau} \end{cases}$$

1.7.31.

1.7.32.

1.7.33.

1.7.34.

1.7.35.

1.7.36.

1.7.37.

1.7.38.

1.7.39.

1.7.40.

1.7.41.

1.7.42.

1.7.43.

1.7.44.

Chứng minh. Không có chi $a^2 = 1$ □

Chứng minh. Lời giải tiếp theo

□

Chương 2

Phép tính vi phân

2.1 Đạo hàm của hàm số thực

2.1.1. Tính đạo hàm (nếu có) của các hàm sau:

(a) $f(x) = x|x|, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $f(x) = [x]\sin^2(\pi x), \quad x \in \mathbb{R},$

(d) $f(x) = (x - [x])\sin^2(\pi x), \quad x \in \mathbb{R},$

(e) $f(x) = \ln|x|, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$

(f) $f(x) = \arccos\frac{1}{|x|}, \quad |x| > 1.$

2.1.2. Đạo hàm các hàm số sau:

(a) $f(x) = \log_x 2, \quad x > 0,\, x \neq 1,$

(b) $f(x) = \log_x \cos x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \backslash \{1\}.$

2.1.3. Nghiên cứu tính khả vi của các hàm số sau:

(a) $$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{với} \quad |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{với} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{với} \quad |x| \le 1, \\ \frac{1}{e} & \text{với} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{với} \quad x \ne 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

2.1.4. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| & \text{với} \quad x \ne 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

không khả vi tại các điểm $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, nhưng khả vi tại 0 là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

2.1.5. Xác định các giá trị a, b, c, d sao cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 4x & x \le 0, \\ ax^2 + bx + c & 0 < x < 1, \\ 3 - 2x & x \ge 1 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le 0, \\ cx^2 + dx & 0 < x \le 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le 1, \\ ax^2 + c & 1 < x \le 2, \\ \frac{dx^2+1}{x} & x > 2. \end{cases}$$

2.1.6. Tính tổng:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} k e^{kx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n, \quad n \ge 1,$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n} k \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.1.7. Chứng minh rằng nếu $|a_1 \sin x + a|2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ với $x \in \mathbb{R}$ thì $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

2.1.8. Giả sử rằng f và g khả vi tại a, hãy xác định

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$

2.1.9. Giả sử rằng $f(a) > 0$ và f khả vi tại a. Hãy tính các giới hạn sau:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$, $a > 0$.

2.1.10. Cho f khả vi tại a. Hãy tính các giới hạn sau:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}, \quad n \in \mathbb{N}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)e^x - f(a)}{f(x)\cos x - f(a)}, \quad a = 0,\ f'(0) \neq 0$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{k}{n}\right) - kf(a)\right), k \in \mathbb{N}$,

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(f\left(a + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(a + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{n}{n^2}\right) - nf(a)\right)$.

2.1.11. Với $a > 0$ và $m, k \in \mathbb{N}$ hãy tính

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \cdots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn\right)$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(a + \frac{1}{n}\right)^n \left(a + \frac{2}{n}\right)^n \cdots \left(a + \frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2a}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{na}{n^2}\right)\right)$.

2.1.12. Giả sử rằng $f(0) = 0$ và f khả vi tại điểm 0. Hãy tính tổng

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right)\right),$$

với k là một số nguyên dương cho trước.

2.1.13. Cho f là hàm khả vi tại điểm a và $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ là các dãy hội tụ tới a sao cho $x_n \neq a$, $z_n \neq a$, $x_n \neq z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Hãy chỉ ra hàm f sao cho giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$$

(a) bằng $f'(a)$,

(b) không tồn tại hoặc có tồn tại nhưng khác $f'(a)$.

2.1.14. Cho f là hàm khả vi tại a và xét hai dãy $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ cùng hội tụ về a sao cho $x_n < a < z_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

2.1.15.

(a) Chứng minh rằng hàm f xác định trong khoảng $(0, 2)$ theo công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với các giá trị } x \text{ hữu tỷ trong khoảng } (0,2), \\ 2x - 1 & \text{với các giá trị } x \text{ vô tỷ trong khoảng } (0,2) \end{cases}$$

chỉ khả vi tại duy nhất điểm $x = 1$ và $f'(1) \neq 0$. Hàm ngược của f có khả vi tại điểm $1 = y = f(1)$ không?

(b) Cho

$$\mathbf{A} = \{y \in (0,3) : y \in \mathbb{Q},\ \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}\},$$
$$\mathbf{B} = \left\{x : x = \frac{1}{2}(y + 4), y \in \mathbf{A}\right\}.$$

Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \text{ hữu tỷ thuộc } (0,2), \\ 2x - 1 & \text{với } x \text{ vô tỷ thuộc } (0,2), \\ 2x - 4 & \text{với } \quad x \in \mathbf{B}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng khoảng $(0, 3)$ chứa trong miền giá trị của f và hàm ngược của f không khả vi tại điểm 1.

2.1.16. Xét hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ sau

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ hoặc bằng } 0, \\ a_q & \text{nếu } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \end{cases}$$

trong đó dãy $\{a_q\}$ thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$ với $k \geq 2$. Chứng minh rằng f khả vi tại mọi điều vô tỷ có bậc đại số nhỏ hơn hoặc bằng k, tức là...

2.1.17. Cho P là một đa thức bậc n với n nghiệm thực khác nhau $x_1, \ldots, x_n$ và Q là đa thức bậc không quá $n-1$. Chứng minh rằng

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x - x_k)}$$

với $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Tìm tổng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}, \quad n \geq 2.$$

2.1.18. Sử dụng kết quả bài trước hãy kiểm tra các đẳng thức sau:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$
với $x \in \mathbb{R}\backslash\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0\}$,

(b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+2k} = \frac{n!2^n}{x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)}$$
với $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2n, -2(n-1), \ldots, -2, 0\}$.

2.1.19. Cho f khả vi trên $\mathbb{R}$. Hãy khảo sát tính khả vi của hàm $|f|$.

2.1.20. Giả sử $f_1, f_2, \ldots, f_n$ xác định trong một lân cận của x, khác 0 và khả vi tại x. Chứng minh rằng

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\right)'}{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}.$$

2.1.21. Giả sử các hàm $f_1, f_2, \dots, f_n$; $g_1, g_2, \dots, g_n$ xác định trong lân cận của x, khác 0 va khả vi tại x. Chứng minh rằng

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{f_k}{g_k}\right)'(x) = \prod_{k=1}^{n}\frac{f_k}{g_k}(x)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f_k'(x)}{f_k(x)} - \frac{g_k'(x)}{g_k(x)}\right).$$

2.1.22. Nghiên cứu tính khả vi của f và $|f|$ với

(a) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } \ x \in \mathbb{Q}, \\ \sin x & \text{nếu } \ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{2^k} & \text{nếu } \ x \in \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-2}}\right), \quad k \geq 2, \\ \sin\left(x - \frac{3}{2^k}\right) & \text{nếu } \ x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap \left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-2}}\right), \quad k \geq 2. \end{cases}$$

2.1.23. Chứng minh rằng nếu đạo hàm một phía $f'_-(x_0)$ và $f'_+(x_0)$ tồn tại thì f liên tục tại x_0.

2.1.24. Chứng minh rằng nếu $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đạt cực đại tại $c \in (a, b)$, tức là $f(c) = \max\{f(x) : x \in (a, b)\}$ và tồn tại các đạo hàm trái và đạo hàm phải $f'_-(c)$ và $f'_+(c)$, thì $f'_-(x_0) \geq 0$ và $f'_+(x_0) \leq 0$. Hãy phát biểu bài toán tương ứng trường hợp f đạt cực tiểu.

2.1.25. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$, $f(a) = f(b)$ và f'_- tồn tại trên (a, b) thì

$$\inf\{f'_-(x) : x \in (a, b)\} \leq 0 \leq \sup\{f'_-(x) : x \in (a, b)\}.$$

2.1.26. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$ và f'_- tồn tại trên (a, b) thì

$$\inf\{f'_-(x) : x \in (a, b)\} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \sup\{f'_-(x) : x \in (a, b)\}.$$

2.1.27. Chứng minh rằng nếu f'_- tồn tại và liên tục trên (a, b) thì f khả vi trên (a, b) và $f'(x) = f'_-(x)$ với $x \in (a, b)$.

2.1.28. Tồn tại hay không hàm $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ sao cho $f'_-(x) = x$ và $f'_+(x) = 2x$ với $x \in (1, 2)$?