

[www.mientayvn.com](http://www.mientayvn.com)

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kỹ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao i tr c tuy n t i:

[www.mientayvn.com/chat\\_box\\_toan.html](http://www.mientayvn.com/chat_box_toan.html)

**Bùi Tuấn Khang**

# Giáo trình Toán chuyên đề

- Hàm Biến Phức
- Phương Trình Vật Lý - Toán

**Đại học Đà Nẵng 2004**

# Lời nói đầu

---

Giáo trình này được biên soạn nhằm trang bị các tri thức toán học cốt yếu để làm công cụ học tập và nghiên cứu các môn học chuyên ngành cho sinh viên các ngành kỹ thuật thuộc Đại học Đà Nẵng. Nội dung giáo trình gồm có 8 chương với thời lượng 60 tiết (4 đơn vị học trình) được chia làm hai chuyên đề nhỏ.

Chuyên đề Hàm biến phức gồm 5 chương

**Chương 1** Các khái niệm cơ bản về số phức, dãy trị phức, hàm trị phức và các tập con của tập số phức.

**Chương 2** Các khái niệm cơ bản về hàm trị phức, đạo hàm phức, các hàm giải tích sơ cấp và phép biến hình bảo giác.

**Chương 3** Các khái niệm cơ bản về tích phân phức, định lý tích phân Cauchy và các hệ quả của nó.

**Chương 4** Các khái niệm cơ bản về chuỗi hàm phức, khai triển Taylor, khai triển Laurent, lý thuyết thặng dư và các ứng dụng của nó.

**Chương 5** Các khái niệm cơ bản, các tính chất, các phương pháp tìm ảnh - gốc và các ứng dụng của biến đổi Fourier và biến đổi Laplace.

Chuyên đề Phương trình vật lý Toán gồm có 3 chương

**Chương 6** Các khái niệm cơ bản về lý thuyết trường : Trường vô hướng, trường vectơ, thông lượng, hoàn lưu và toán tử vi phân cấp 1.

**Chương 7** Các bài toán cơ bản của phương trình vật lý - toán, bài toán Cauchy và bài toán hỗn hợp của phương trình truyền sóng.

**Chương 8** Bài toán Cauchy và bài toán hỗn hợp của phương trình truyền nhiệt, bài toán Dirichlet và bài toán Neumann của phương trình Laplace.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp GVC. Nguyễn Trinh, GVC. Lê Phú Nghĩa và GVC. TS. Lê Hoàng Trí đã dành thời gian đọc bản thảo và cho các ý kiến đóng góp để hoàn thiện giáo trình.

Giáo trình được biên soạn lần đầu chắc còn có nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc gần xa.

Đà Nẵng 2004

Tác giả

## Số phức

### Đ1. Trường số phức

• Kí hiệu  $\mathbb{V} = 3 \times 3 = \{ (x, y) : x, y \in 3 \}$ . Trên tập  $\mathbb{V}$  định nghĩa phép toán cộng và phép toán nhân như sau

$$\begin{aligned} \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{V} \\ (x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ (x, y) \times (x', y') &= (xx' - yy', xy' + x'y) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Ví dụ  $(2, 1) + (-1, 1) = (1, 2)$  và  $(2, 1) \times (-1, 1) = (-3, 1)$

**Định lý**  $(\mathbb{V}, +, \times)$  là một trường số.

**Chứng minh**

Kiểm tra trực tiếp các công thức (1.1.1)

Phép toán cộng có tính giao hoán, tính kết hợp, có phần tử không là  $(0, 0)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{V}, (x, y) + (0, 0) = (x, y)$$

Mọi phần tử có phần tử đối là  $-(x, y) = (-x, -y)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{V}, (x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$$

Phép toán nhân có tính giao hoán, tính kết hợp, có phần tử đơn vị là  $(1, 0)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{V}, (x, y) \times (1, 0) = (x, y)$$

Mọi phần tử khác không có phần tử nghịch đảo là  $(x, y)^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{V} - \{(0, 0)\}, (x, y) \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0)$$

Ngoài ra phép nhân là phân phối với phép cộng

►►

• Trường  $(\mathbb{V}, +, \times)$  gọi là *trường số phức*, mỗi phần tử của  $\mathbb{V}$  gọi là một *số phức*.

Theo định nghĩa trên mỗi số phức là một cặp hai số thực với các phép toán thực hiện theo công thức (1.1.1). Trên trường số phức phép trừ, phép chia và phép lũy thừa định nghĩa như sau.

$$\forall (n, z, z') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}^* \text{ với } \mathbb{V}^* = \mathbb{V} - \{(0, 0)\}$$

$$z - z' = z + (-z'), \frac{z}{z'} = z \times (z')^{-1} \text{ và } z^0 = 1, z^1 = z \text{ và } z^n = z^{n-1} \times z \quad (1.1.2)$$

• Bằng cách đồng nhất số thực  $x$  với số phức  $(x, 0)$

$$x \equiv (x, 0), 1 \equiv (1, 0) \text{ và } 0 \equiv (0, 0)$$

tập số thực trở thành tập con của tập số phức. Phép cộng và phép nhân các số phức hạn chế lên tập số thực trở thành phép cộng và phép nhân các số thực quen thuộc.

$$x + x' \equiv (x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \equiv x + x', \dots$$

Ngoài ra trong tập số phức còn có các số không phải là số thực. Kí hiệu  $i = (0, 1)$  gọi là *đơn vị ảo*. Ta có

$$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$$

Suy ra phương trình  $x^2 + 1 = 0$  có nghiệm phức là  $x = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ .

Như vậy trường số thực  $(\mathbb{R}, +, \times)$  là một trường con thực sự của trường số phức  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

## Đ2. Dạng đại số của số phức

- Với mọi số phức  $z = (x, y)$  phân tích

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Đồng nhất đơn vị thực  $(1, 0) \equiv 1$  và đơn vị ảo  $(0, 1) \equiv i$ , ta có

$$z = x + iy \tag{1.2.1}$$

Dạng viết (1.2.1) gọi là *dạng đại số* của số phức. Số thực  $x = \operatorname{Re}z$  gọi là *phần thực*, số thực  $y = \operatorname{Im}z$  gọi là *phần ảo* và số phức  $\bar{z} = x - iy$  gọi là *liên hợp phức* của số phức  $z$ .

Kết hợp các công thức (1.1.1) - (1.2.1) suy ra dạng đại số của các phép toán số phức.

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$\frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}, \dots \tag{1.2.2}$$

**Ví dụ** Cho  $z = 1 + 2i$  và  $z' = 2 - i$

$$z \times z' = (2 + 2) + i(-1 + 4) = 4 + 3i, \quad \frac{z}{z'} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = i$$

$$z^2 = (1 + 2i) \times (1 + 2i) = -3 + 5i, \quad z^3 = z^2 \times z = (-3 + 5i) \times (1 + 2i) = -13 - i$$

- Từ định nghĩa suy ra

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}} &= z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} & \bar{-z} &= -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} & \overline{\bar{z}} &= z \\ z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}z & z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}z & z\bar{z} &= \operatorname{Re}^2z + \operatorname{Im}^2z \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Ngoài ra liên hợp phức còn có các tính chất sau đây.

**Định lý**  $\forall (n, z, z') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

1.  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
2.  $\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$                        $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
3.  $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$                        $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

**Chứng minh**

1. Suy ra từ định nghĩa

2. Ta có  $zz' = (x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$   
 $\bar{z} \bar{z}' = (x - iy) \times (x' - iy') = (xx' - yy') + i(-xy' - x'y)$

Qui nạp suy ra hệ thức thứ hai.

3. Ta có  $zz^{-1} = \bar{z} \overline{z^{-1}} = 1 \Rightarrow \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$

Suy ra  $\frac{\bar{z}}{z'} = \overline{z(z')^{-1}} = \bar{z} \overline{z'^{-1}}$                       **►►**

• Với mọi số phức  $z = x + iy$ , số thực  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  gọi là *module* của số phức  $z$ .

Nếu  $z = x \in \mathbb{R}$  thì  $|z| = |x|$ . Như vậy module của số phức là mở rộng tự nhiên của khái niệm trị tuyệt đối của số thực. Từ định nghĩa suy ra

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| &\leq |z| & |z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| & \quad z\bar{z} = \bar{z}z = |z|^2 \\ z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} & & \frac{z}{z'} = z(z')^{-1} = \frac{1}{|z'|^2} z\bar{z}' & \quad (1.2.4) \end{aligned}$$

Ngoài ra module của số phức còn có các tính chất sau đây.

**Định lý**  $\forall (n, z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

1.  $|z| \geq 0$                                        $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2.  $|zz'| = |z| |z'|$                                $|z^n| = |z|^n$
3.  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$                                $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
4.  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$                        $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

**Chứng minh**

1. Suy ra từ định nghĩa

2. Ta có  $|zz'|^2 = zz' \overline{zz'} = (z\bar{z})(z'\bar{z}') = (|z| |z'|)^2$

Qui nạp suy ra hệ thức thứ hai.

3. Ta có  $|zz^{-1}| = |z| |z^{-1}| = 1 \Rightarrow |z^{-1}| = 1 / |z|$

Suy ra  $|z / z'| = |z (z')^{-1}| = |z| |(z')^{-1}|$

4. Ta có  $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| \cdot 2 = |z| |z'|$

Suy ra  $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$                       **►►**

**Đ3. Dạng lượng giác của số phức**

- Với mọi số phức  $z = x + iy \in \mathbb{V}^*$  tồn tại duy nhất số thực  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  sao cho

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} \text{ và } \sin\varphi = \frac{y}{|z|} \quad (1.3.1)$$

Tập số thực  $\text{Arg}z = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{9}$  gọi là *argument*, số thực  $\text{arg}z = \varphi$  gọi là *argument chính* của số phức  $z$ . Chúng ta qui ước  $\text{Arg}(0) = 0$ .

Kí hiệu  $r = |z|$  từ công thức (1.3.1) suy ra

$$x = r\cos\varphi \text{ và } y = r\sin\varphi$$

Thay vào công thức (1.2.1) nhận được

$$z = r(\cos + i\sin\varphi) \quad (1.3.2)$$

Dạng viết (1.3.2) gọi là *dạng lượng giác* của số phức.

- Từ định nghĩa suy ra

$$\begin{aligned} \text{arg}z = \varphi &\Rightarrow \text{arg}(-z) = \varphi - \pi, \text{arg}\bar{z} = -\varphi \text{ và } \text{arg}(-\bar{z}) = \pi - \varphi \\ x > 0, \text{arg}x &= 0 & x < 0, \text{arg}x &= \pi \\ y > 0, \text{arg}(iy) &= \pi/2 & y < 0, \text{arg}(iy) &= -\pi/2 \dots \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Ngoài ra argument của số phức còn có các tính chất sau đây.

**Định lý**  $\forall (n, z, z') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}$

1.  $\text{arg}(zz') = \text{arg}z + \text{arg}z' [2\pi]$        $\text{arg}(z^n) = n \text{arg}z [2\pi]$
2.  $\text{arg}(z^{-1}) = -\text{arg}z [2\pi]$        $\text{arg}(z/z') = \text{arg}z - \text{arg}z' [2\pi]$

**Chứng minh**

1. Giả sử  $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$  và  $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

Suy ra

$$\begin{aligned} zz' &= rr'[(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')] \end{aligned}$$

Qui nạp suy ra hệ thức thứ hai.

2. Ta có

$$\text{arg}(zz^{-1}) = \text{arg}(z) + \text{arg}(z^{-1}) = 0 [2\pi] \Rightarrow \text{arg}(z^{-1}) = -\text{arg}(z) [2\pi]$$

Suy ra

$$\text{arg}(z/z') = \text{arg}(zz'^{-1}) = \text{arg}z + \text{arg}(z'^{-1}) \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**Ví dụ** Cho  $z = 1 + i$  và  $z' = 1 + \sqrt{3}i$

$$\text{Ta có } zz' = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})][2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})] = 2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$$

$$z^{100} = (\sqrt{2})^{100}[\cos(100\frac{\pi}{4}) + i\sin(100\frac{\pi}{4})] = -2^{50}$$

- Với mọi số thực  $\varphi \in \mathbb{R}$ , kí hiệu

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (1.3.4)$$





1. Số phức  $z = 1 + i = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$  có các căn bậc 3 sau đây

$$w_0 = \sqrt[3]{2} (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}), w_1 = \sqrt[3]{2} (\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12}), w_2 = \sqrt[3]{2} (\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12})$$

2. Giải phương trình  $x^2 - x + 1 = 0$

Ta có  $\Delta = -3 < 0$  phương trình có nghiệm phức  $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

**Hệ quả** Kí hiệu  $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ ,  $k = 0 \dots (n-1)$  là các căn bậc  $n$  của đơn vị.

$$1. \quad \bar{\omega}_k = \omega_{n-k} \qquad 2. \quad \omega_k = (\omega_1)^k \qquad 3. \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$$

**Ví dụ** Với  $n = 3$ , kí hiệu  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \omega_1$ . Suy ra  $\omega_2 = j^2 = \bar{j}$  và  $1 + j + j^2 = 0$

#### Đ4. Các ứng dụng hình học phẳng

• Kí hiệu  $V$  là mặt phẳng vectơ với cơ sở trực chuẩn dương  $(i, j)$ . Anh xạ

$$\Phi : \forall \rightarrow V, z = x + iy \alpha v = xi + yj \tag{1.4.1}$$

là một song ánh gọi là *biểu diễn vectơ* của số phức. Vectơ  $v$  gọi là *ảnh* của số phức  $z$ , còn số phức  $z$  gọi là *toạ vị phức* của vectơ  $v$  và kí hiệu là  $v(z)$ .

Kí hiệu  $P$  là mặt phẳng điểm với hệ toạ độ trực giao  $(Oxy)$ . Anh xạ

$$\Phi : \forall \rightarrow P, z = x + iy \alpha M(x, y) \tag{1.4.2}$$

là một song ánh gọi là *biểu diễn hình học* của số phức. Điểm  $M$  gọi là *ảnh* của số phức  $z$  còn số phức  $z$  gọi là *toạ vị phức* của điểm  $M$  và kí hiệu là  $M(z)$ .

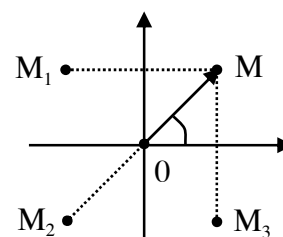
Như hình bên,  $M(z)$  với  $z = x + iy$ ,  $M_1(-\bar{z})$ ,  $M_2(-z)$  và  $M_3(\bar{z})$ .

Nếu  $z = x \in \mathbb{R}$  thì điểm  $M(z) \in (Ox)$ , còn nếu  $z = iy$  thì điểm

$M(z) \in (Oy)$ . Do vậy mặt phẳng  $(Oxy)$  còn gọi là mặt phẳng

phức, trục  $(Ox)$  là trục thực và trục  $(Oy)$  là trục ảo. Sau này

chúng ta sẽ đồng nhất mỗi số phức với một vectơ hay một điểm trong mặt phẳng và ngược lại.



**Định lý** Cho các vectơ  $u(a), v(b) \in V$ , số thực  $\lambda \in \mathbb{R}$  và điểm  $M(z) \in P$

$$1. \quad |u| = |a| \qquad \angle(i, u) = \arg(a) \qquad \Phi(\lambda a + b) = \lambda u + v$$

$$2. \quad |\overrightarrow{OM}| = |z| \qquad \angle(i, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$$

Chứng minh

Suy ra từ các công thức (1.4.1) và (1.4.2) ▶▶

**Hệ quả 1** Trong mặt phẳng cho các điểm A(a), B(b), C(c) và D(d)

1.  $\overrightarrow{AB} (b - a)$ ,  $AB = |b - a|$ ,  $\angle(i, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a)$
2.  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \angle(i, \overrightarrow{CD}) - \angle(i, \overrightarrow{AB}) = \arg \frac{d - c}{b - a}$

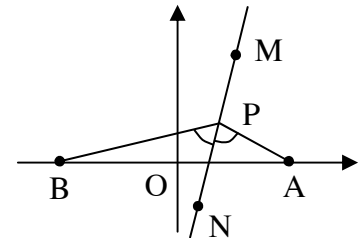
**Chứng minh**

Suy ra từ định lý ▶▶

**Ví dụ** Cho  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$  và A(1), B(-1), M(z), N( $\frac{1}{z}$ ) và P( $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ). Chứng minh rằng đường thẳng (MN) là phân giác của góc  $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ .

Ta có  $\angle(i, \overrightarrow{AP}) = \arg(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) - 1) = \arg \frac{(z-1)^2}{2z}$

$\angle(i, \overrightarrow{BP}) = \arg(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + 1) = \arg \frac{(z+1)^2}{2z}$



Suy ra

$$\angle(i, \overrightarrow{AP}) + \angle(i, \overrightarrow{BP}) = \arg \frac{(z-1)^2}{2z} - \arg \frac{(z+1)^2}{2z} = 2\arg(z - \frac{1}{z}) = 2\angle(i, \overrightarrow{MN})$$

**Hệ quả 2** Với các kí hiệu như trên

1. Hai đường thẳng (AB) // (CD)  $\Leftrightarrow \arg \frac{d - c}{b - a} = 0 \text{ [}\pi\text{]} \Leftrightarrow \frac{d - c}{b - a} \in \mathbb{R}$
2. Hai đường thẳng (AB)  $\perp$  (CD)  $\Leftrightarrow \arg \frac{d - c}{b - a} = \frac{\pi}{2} \text{ [}\pi\text{]} \Leftrightarrow \frac{d - c}{b - a} \in i\mathbb{R}$
3. Ba điểm A, B, C thẳng hàng  $\Leftrightarrow \arg \frac{c - a}{b - a} = 0 \text{ [}\pi\text{]} \Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

**Chứng minh**

Suy ra từ các hệ thức hệ quả 1 ▶▶

**Ví dụ** Trong mặt phẳng tìm điểm A(z) sao cho ba điểm A(z), B(iz) và C(i) thẳng hàng  
Kí hiệu  $z = x + iy$ , ta có

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ thẳng hàng} &\Leftrightarrow \frac{iz - i}{z - i} = k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -y + i(x - 1) = (kx) + ik(y - 1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -y = kx \\ x - 1 = k(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - k}{k^2 + 1}, y = \frac{k(k - 1)}{k^2 + 1} \text{ với } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- ánh xạ  $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $M \alpha N$  gọi là một phép biến hình

Phép biến hình  $M \alpha N = M + v$  gọi là phép tịnh tiến theo vectơ  $v$

Phép biến hình  $M \alpha N = A + k \overrightarrow{AM}$  ( $k > 0$ ) gọi là phép vị tự tâm A, hệ số k

Phép biến hình  $M \alpha N$  sao cho  $\angle(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \alpha$  gọi là phép quay tâm A, góc  $\alpha$   
 Tích của phép tịnh tiến, phép vị tự và phép quay gọi là phép đồng dạng.

**Định lý** Cho phép biến hình  $\Phi : M \alpha N$

1. Phép biến hình  $\Phi$  là phép tịnh tiến  $\Leftrightarrow z' = z + b$  với  $b \in \mathbb{C}$
2. Phép biến hình  $\Phi$  là phép vị tự  $\Leftrightarrow z' = a + k(z - a)$  với  $k \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{C}$
3. Phép biến hình  $\Phi$  là phép quay  $\Leftrightarrow z' = a + e^{i\alpha}(z - a)$  với  $\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}$
4. Phép biến hình  $\Phi$  là phép đồng dạng  $\Leftrightarrow z' = az + b$  với  $a, b \in \mathbb{C}$

Chứng minh

Suy ra từ định nghĩa các phép biến hình và tọa độ phức. ▶▶

Ví dụ Cho A(a), B(b) và C(c). Tìm điều kiện cần và đủ để  $\Delta ABC$  là tam giác đều

$\Delta ABC$  là tam giác đều thuận  $\Leftrightarrow (a - b) = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$

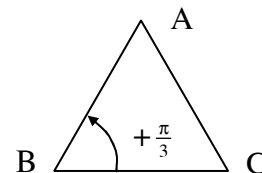
$$\Leftrightarrow (a - b) = -j^2(c - b) \Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$$

Tương tự,  $\Delta ACB$  là tam giác đều nghịch

$$\Leftrightarrow (a - b) = -j(c - b) \Leftrightarrow a + jc + j^2b = 0$$

Suy ra  $\Delta ABC$  là tam giác đều

$$\Leftrightarrow (a + jb + j^2c)(a + jc + j^2b) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$



## Đ5. Dãy trị phức

• ánh xạ

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, n \alpha z_n = x_n + iy_n \tag{1.5.1}$$

gọi là *dãy số phức* và kí hiệu là  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Dãy số thực  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  gọi là *phần thực*, dãy số thực  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  là *phần ảo*, dãy số thực dương

$(|z_n|)_{n \in \mathbb{Z}}$  là *module*, dãy số phức  $(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  là *liên hợp phức* của dãy số phức.

Dãy số phức  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  gọi là *dần đến giới hạn* a và kí hiệu là  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$$

Dãy số phức  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  gọi là *dần ra vô hạn* và kí hiệu là  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty$  nếu

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n > N \Rightarrow |z_n| > M$$

Dãy có giới hạn module hữu hạn gọi là *dãy hội tụ*. Dãy không hội tụ gọi là *dãy phân kỳ*.

**Định lý** Cho dãy số phức  $(z_n = x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  và  $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta \quad (1.5.2)$$

**Chứng minh**

Giả sử

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \forall n > N \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon \text{ và } |y_n - \beta| < \varepsilon \end{aligned}$$

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta$

Ngược lại

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon/2 \text{ và } |y_n - \beta| < \varepsilon/2 \\ \Rightarrow \forall n > N \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$  ▶▶

**Hệ quả**

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{z}_n = \bar{a} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = |a|$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda z_n + z'_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n$   
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n z'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n \lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n / z'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n / \lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n$
3. Các tính chất khác tương tự giới hạn dãy số thực

• Cho dãy số phức  $(z_n = x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Tổng vô hạn

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n + \dots \quad (1.5.3)$$

gọi là *chuỗi số phức*.

Chuỗi số thực  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  gọi là *phần thực*, chuỗi số thực  $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$  là *phần ảo*, chuỗi số thực

đương  $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$  là *module*, chuỗi số phức  $\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{z}_n$  là *liên hợp phức* của chuỗi số phức.

Kí hiệu  $S_n = \sum_{k=0}^n z_k$  gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi số phức. Nếu dãy tổng riêng  $S_n$  dần

đến giới hạn  $S$  có module hữu hạn thì chuỗi số phức gọi là *hội tụ đến tổng S* và kí hiệu là

$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = S$ . Chuỗi không hội tụ gọi là *chuỗi phân kỳ*.

**Ví dụ** Xét chuỗi số phức  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + \dots + z^n + \dots$  ( $|z| < 1$ )

Ta có  $S_n = 1 + z + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{1 - z}$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Từ định nghĩa chuỗi số phức và các tính chất của dãy số phức, của chuỗi số thực suy ra các kết quả sau đây.

**Định lý** Cho chuỗi số phức  $\sum_{n=0}^{+\infty} (z_n = x_n + iy_n)$  và  $S = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = S \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \alpha \text{ và } \sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \beta \quad (1.5.4)$$

**Chứng minh**

Suy ra từ các định nghĩa và công thức (1.5.2) ▶▶

**Hệ quả**

1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n| = |S| \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = S \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$

2. Các tính chất khác tương tự chuỗi số thực

- Chuỗi số phức  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi module  $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$  hội tụ. Rõ ràng chuỗi hội tụ tuyệt đối là chuỗi hội tụ. Tuy nhiên điều ngược lại nói chung là không đúng. Ngoài ra, có thể chứng minh rằng chỉ khi chuỗi số phức hội tụ tuyệt đối thì tổng vô hạn (1.5.3) mới có các tính chất giao hoán, kết hợp, ... tương tự như tổng hữu hạn.

### Đ6. Hàm trị phức

- Cho khoảng  $I \subset \mathbb{R}$ , ánh xạ

$$f : I \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto f(t) = u(t) + iv(t) \quad (1.6.1)$$

gọi là *hàm trị phức*.

Hàm  $u(t) = \operatorname{Re} f(t)$  gọi là *phần thực*, hàm  $v(t) = \operatorname{Im} f(t)$  là *phần ảo*, hàm  $|f(t)|$  là *module*, hàm  $\overline{f(t)}$  là *liên hợp phức* của hàm trị phức.

Trên tập  $f(I, \mathbb{C})$  các hàm trị phức xác định trên khoảng  $I$ , chúng ta định nghĩa các phép toán đại số tương tự như trên tập  $f(I, \mathbb{R})$  các hàm trị thực xác định trên khoảng  $I$ .

Hàm trị phức  $f(t)$  gọi là *bị chặn* nếu hàm module  $|f(t)|$  bị chặn.

Cho hàm  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  và  $\alpha \in \bar{I}$ . Hàm  $f$  gọi là *dần đến giới hạn*  $L$  khi  $t$  dần đến  $\alpha$  và kí

hiệu là  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = 1$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in I, 0 < |t - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(t) - L| < \varepsilon$$

Hàm  $f$  gọi là *dần ra vô hạn* khi  $t$  dần đến  $\alpha$  và kí hiệu là  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \infty$  nếu

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in I, 0 < |t - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(t)| > M$$

Các trường hợp khác định nghĩa tương tự.

**Định lý** Cho hàm  $f : I \rightarrow \mathbb{C}, t \in \alpha f(t) = u(t) + iv(t), \alpha \in \bar{I}$  và  $L = l + ik \in \mathbb{C}$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) = l \text{ và } \lim_{t \rightarrow \alpha} v(t) = k \quad (1.6.2)$$

**Chứng minh**

Lập luận tương tự như chứng minh công thức (1.5.2) ▶▶

**Hệ quả**

$$1. \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = L \Leftrightarrow \overline{\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t)} = \bar{L} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \alpha} |f(t)| = |L|$$

$$2. \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} [\lambda f(t) + g(t)] = \lambda \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) + \lim_{t \rightarrow \alpha} g(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} [f(t)g(t)] = \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) \lim_{t \rightarrow \alpha} g(t), \lim_{t \rightarrow \alpha} [f(t) / g(t)] = \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) / \lim_{t \rightarrow \alpha} g(t)$$

3. Các tính chất khác tương tự giới hạn hàm trị thực

• Từ các kết quả trên thấy rằng, các tính chất của hàm trị thực được mở rộng tự nhiên thông qua phần thực, phần ảo cho hàm trị phức.

Hàm  $f(t) = u(t) + iv(t)$  gọi là *khả tích (liên tục, có đạo hàm, thuộc lớp  $C^k, \dots$ )* nếu các hàm  $u(t)$  và  $v(t)$  là khả tích (liên tục, có đạo hàm, thuộc lớp  $C^k, \dots$ ) và ta có

$$\int_I f(t) dt = \int_I u(t) dt + i \int_I v(t) dt$$

$$f^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + iv^{(k)}(t), \dots \quad (1.6.3)$$

Hàm  $f(t)$  gọi là khả tích tuyệt đối nếu hàm module  $|f(t)|$  khả tích. Trên tập số phức không định nghĩa quan hệ thứ tự và do vậy các tính chất liên quan đến thứ tự của  $f(t)$  được chuyển qua cho module  $|f(t)|$ .

**Ví dụ** Cho hàm trị phức  $f(t) = \cos t + i \sin t$  có phần thực  $x(t) = \cos t$  phần ảo  $y(t) = \sin t$  là hàm thuộc lớp  $C^\infty$  suy ra hàm  $f(t)$  thuộc lớp  $C^\infty$

$$f'(t) = -\sin t + i \cos t, f''(t) = -\cos t - i \sin t, \dots$$

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t + i \sin t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos t dt + i \int_0^{\pi/2} \sin t dt = 1 + i$$

• ánh xạ

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}, t \in \gamma(t) \quad (1.6.4)$$

gọi là một *tham số cung*. Tập điểm  $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$  gọi là *quỹ đạo* của tham số cung  $\gamma$  hay còn gọi là một *đường cong phẳng*. Phương trình

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta]$$

gọi là *phương trình tham số* của đường cong phẳng  $\Gamma$ .

Tham số cung  $\gamma$  gọi là *kín* nếu điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Tức là  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$

Tham số cung  $\gamma$  gọi là *đơn* nếu ánh xạ  $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$  là một đơn ánh.

Tham số cung  $\gamma$  gọi là *liên tục* (*trơn từng khúc*, *thuộc lớp  $C^k$* , ...) nếu hàm  $\gamma(t)$  là liên tục (có đạo hàm liên tục từng khúc, thuộc lớp  $C^k$ , ...) trên  $[\alpha, \beta]$ . Sau này chúng ta chỉ xét các tham số cung từ liên tục trở lên.

• ánh xạ

$$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha_1, \beta_1], t \mapsto \varphi(t) \quad (1.6.5)$$

có đạo hàm liên tục và khác không gọi là một *phép đổi tham số*. Nếu với mọi  $t \in (\alpha, \beta)$  đạo hàm  $\varphi'(t) > 0$  thì phép đổi tham số gọi là *bảo toàn hướng*, trái lại gọi là *đổi hướng*.

Hai tham số cung  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  và  $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$  gọi là *tương đương* nếu có phép đổi tham số  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha_1, \beta_1]$  sao cho

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \gamma(t) = \gamma_1 \circ \varphi(t)$$

Nếu  $\varphi$  bảo toàn hướng thì  $\gamma$  và  $\gamma_1$  gọi là *cùng hướng*, trái lại gọi là *ngược hướng*.

Có thể thấy rằng qua hệ cùng hướng là một quan hệ tương đương theo nghĩa tổng quát. Nó phân chia tập các tham số cung có cùng quỹ đạo  $\Gamma$  thành hai lớp tương đương. Một lớp cùng hướng với  $\gamma$  còn lớp kia ngược hướng với  $\gamma$ . Đường cong phẳng  $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$  cùng với lớp các tham số cung cùng hướng gọi là một *đường cong định hướng*. Cũng cần lưu ý rằng cùng một tập điểm  $\Gamma$  có thể là quỹ đạo của nhiều đường cong định hướng khác nhau. Sau này khi nói đến đường cong chúng ta hiểu đó là đường cong định hướng.

Ví dụ Tham số cung  $x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, t \in [0, 2\pi]$  là đơn, trơn, kín và có quỹ đạo là đường tròn tâm tại gốc tọa độ, bán kính  $R$  và định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

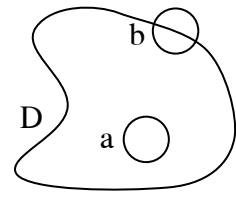
• Đường cong  $\Gamma$  gọi là *đơn* (*kín*, *liên tục*, *trơn từng khúc*, *lớp  $C^k$* , ...) nếu tham số cung  $\gamma$  là đơn (*kín*, *liên tục*, *trơn từng khúc*, *lớp  $C^k$* , ...). Đường cong  $\Gamma$  gọi là *đo được* nếu tham số cung  $\gamma$  có đạo hàm khả tích tuyệt đối trên  $[\alpha, \beta]$ . Khi đó kí hiệu

$$s(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (1.6.6)$$

và gọi là *độ dài* của đường cong  $\Gamma$ . Có thể chứng minh rằng đường cong đơn, trơn từng khúc là đo được.

## Đ7. Tập con của tập số phức

• Cho  $a \in \mathbb{C}$  và  $\varepsilon > 0$ . Hình tròn  $B(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$  gọi là  $\varepsilon$ - lân cận của điểm  $a$ . Cho tập  $D \subset \mathbb{C}$ , điểm  $a$  gọi là *điểm trong* của tập  $D$  nếu  $\exists \varepsilon > 0$  sao cho  $B(a, \varepsilon) \subset D$ . Điểm  $b$  gọi là *điểm biên* của tập  $D$  nếu  $\forall \varepsilon > 0, B(b, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$  và  $B(b, \varepsilon) \cap (\mathbb{C} - D) \neq \emptyset$ .  
Kí hiệu  $D_0$  là tập hợp các điểm trong,  $\partial D$  là tập hợp các điểm biên và  $\bar{D} = D \cup \partial D$  là bao đóng của tập  $D$ . Rõ ràng ta có



$$D_0 \subset D \subset \bar{D} \tag{1.7.1}$$

Tập  $D$  gọi là *tập mở* nếu  $D = D_0$ , tập  $D$  gọi là *tập đóng* nếu  $D = \bar{D}$ . Tập  $A \subset D$  gọi là mở (đóng) trong tập  $D$  nếu tập  $A \cap D$  là tập mở (đóng).

Ví dụ Hình tròn mở  $B(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$  là tập mở.

Hình tròn đóng  $\bar{B}(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \varepsilon\}$  là tập đóng

Tập  $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y \geq 0\}$  là tập không đóng và cũng không mở.

**Định lý** Tập mở, tập đóng có các tính chất sau đây.

1. Tập  $\emptyset$  và  $\mathbb{C}$  là tập mở
2. Tập  $D$  là tập mở khi và chỉ khi  $\forall a \in D, \exists B(a, \varepsilon) \subset D$
3. Nếu các tập  $D$  và  $E$  là tập mở thì các tập  $D \cap E$  và  $D \cup E$  cũng là tập mở
4. Tập  $D$  là tập mở khi và chỉ khi tập  $\mathbb{C} - D$  là tập đóng
5. Tập  $D$  là tập đóng khi và chỉ khi  $\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$  thì  $a \in D$

**Chứng minh**

1. - 3. Suy ra từ định nghĩa tập mở
4. Theo định nghĩa điểm biên

$$\partial D = \partial(\mathbb{C} - D)$$

Theo định nghĩa tập mở, tập đóng

$$\text{tập } D \text{ mở} \Leftrightarrow \partial D \not\subset D \Leftrightarrow \partial D \subset \mathbb{C} - D \Leftrightarrow \text{tập } \mathbb{C} - D \text{ đóng}$$

5. Giả sử tập  $D$  là tập đóng và dãy số phức  $z_n$  hội tụ trong  $D$  đến điểm  $a$ . Khi đó

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z_n \in B(a, \varepsilon) \Rightarrow B(a, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow a \in \bar{D} = D$$

Ngược lại, với mọi  $a \in \partial D$  theo định nghĩa điểm biên

$$\forall \varepsilon = 1/n, \exists z_n \in B(a, \varepsilon) \cap D \Rightarrow \exists z_n \rightarrow a$$

Theo giả thiết  $a \in D$  suy ra  $\partial D \subset D$ . ▶▶

• Tập  $D$  gọi là *giới nội* nếu  $\exists R > 0$  sao cho  $D \subset B(0, R)$ . Tập đóng và giới nội gọi là tập *compact*. Cho các tập  $D, E \subset \mathbb{C}$ , kí hiệu

$$d(D, E) = \inf\{|a - b| : (a, b) \in D \times E\} \tag{1.7.2}$$

gọi là *khoảng cách* giữa hai tập  $D$  và  $E$ .

**Định lý** Cho các tập  $D, E \subset \mathbb{C}$

1. Tập  $D$  là tập compact khi và chỉ khi  $\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D, \exists$  dãy con  $z_{\phi(n)} \rightarrow a \in D$



2. Nếu tập  $D$  là tập compact và tập  $E \subset D$  là đóng trong  $D$  thì tập  $E$  là tập compact

3. Nếu các tập  $D, E$  là tập compact và  $D \cap E = \emptyset$  thì  $d(D, E) > 0$

4. Nếu tập  $D$  là tập compact và  $\forall n \in \mathbb{Z}, D_n \subset D$  đóng,  $D_{n+1} \subset D_n$  thì  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n = a \in D$

**Chứng minh**

1. Giả sử tập  $D$  là tập compact. Do tập  $D$  bị chặn nên dãy  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  là dãy có module bị chặn. Suy ra dãy số thực  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  và  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  là dãy bị chặn. Theo tính chất của dãy số thực  $\exists x_{\varphi(n)} \rightarrow \alpha$  và  $y_{\varphi(n)} \rightarrow \beta$  suy ra  $z_{\varphi(n)} \rightarrow a = \alpha + i\beta$ . Do tập  $D$  là tập đóng nên  $a \in D$ .

Ngược lại, do mọi dãy  $z_n \rightarrow a \in D$  nên tập  $D$  là tập đóng. Nếu  $D$  không bị chặn thì có dãy  $z_n \rightarrow \infty$  không có dãy con hội tụ. Vì vậy tập  $D$  là tập đóng và bị chặn.

2. - 4. Bạn đọc tự chứng minh ▶▶

• Cho  $a, b \in \mathbb{C}$ , tập  $[a, b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0, 1]\}$  là đoạn thẳng nối hai điểm  $a$  và  $b$ . Hợp của các đoạn thẳng  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$  gọi là đường gấp khúc qua  $n+1$  đỉnh và kí hiệu là  $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ .

Tập  $D$  gọi là tập lồi nếu  $\forall (a, b) \in D^2, [a, b] \subset D$ . Tập  $D$  gọi là tập liên thông đường nếu  $\forall (a, b) \in D^2$ , có đường cong  $\Gamma$  nối điểm  $a$  với điểm  $b$  và nằm gọn trong tập  $D$ . Tất nhiên tập lồi là tập liên thông đường nhưng ngược lại không đúng.

Tập  $D$  gọi là tập liên thông nếu phân tích  $D = A \cup B$  với  $A \cap B = \emptyset$  và các tập  $A, B$  vừa mở vừa đóng trong  $D$  thì hoặc  $A = D$  hoặc  $B = D$ . Tập  $D$  mở (hoặc đóng) và liên thông gọi là một miền.

**Định lý** Trong tập số phức các tính chất sau đây là tương đương.

1. Tập  $D$  là liên thông
2.  $\forall (a, b) \in D^2$ , có đường gấp khúc  $\langle a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b \rangle \subset D$
3. Tập  $D$  là liên thông đường

**Chứng minh**

1.  $\Rightarrow$  2.  $\forall a \in D$ , đặt  $A = \{z \in D : \exists \text{ đường gấp khúc } \langle a, \dots, z \rangle \subset D\}$ . Tập  $A$  vừa là tập mở vừa là tập đóng trong tập  $D$  và  $A \neq \emptyset$  nên  $A = D$

2.  $\Rightarrow$  3. Theo định nghĩa liên thông đường

3.  $\Rightarrow$  1. Giả sử ngược lại tập  $D$  không liên thông. Khi đó  $D = A \cup B$  với  $A \cap B = \emptyset$  và các tập  $A, B$  vừa mở vừa đóng trong  $D$ . Chọn  $(a, b) \in A \times B$ , theo giả thiết có đường cong  $(a, b)$  nằm gọn trong  $D$ .

Chia đôi đường cong  $(a, b)$  bằng điểm  $c$ . Nếu  $c \in A$  xét đường cong  $(a_1 = c, b_1 = b)$ , còn nếu  $c \in B$  xét đường cong  $(a_1 = a, b_1 = c)$ . Tiếp tục chia đôi đường cong chúng ta nhận được dãy thất bại  $a_n, b_n \rightarrow c \in A \cap B$ . Trái với giả thiết  $A \cap B = \emptyset$ . ▶▶

• Cho tập  $D \subset \mathbb{C}$  bất kì. Hai điểm  $a, b \in D$  gọi là liên thông, kí hiệu là  $a \sim b$  nếu có đường cong nối  $a$  với  $b$  và nằm gọn trong  $D$ . Có thể chứng minh rằng quan hệ liên thông

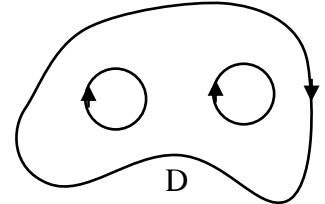
là một quan hệ tương đương theo nghĩa tổng quát. Do đó nó chia tập  $D$  thành hợp các lớp tương đương không rỗng và rời nhau. Mỗi lớp tương đương

$$[a] = \{ b \in D : b \sim a \} \tag{1.7.3}$$

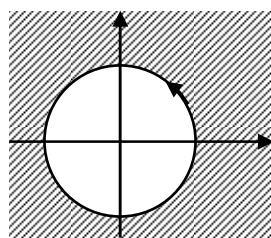
gọi là một *thành phần liên thông* chứa điểm  $a$ . Tập  $D$  là tập liên thông khi và chỉ khi nó có đúng một thành phần liên thông.

Miền  $D$  gọi là *đơn liên* nếu biên  $\partial D$  gồm một thành phần liên thông, trường hợp trái lại gọi là miền *đa liên*.

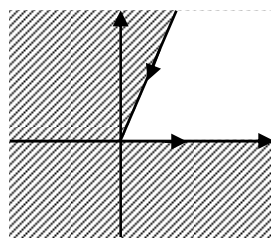
Biên  $\partial D$  gọi là *định hướng dương* nếu khi đi theo hướng đó thì miền  $D$  nằm phía bên trái. Sau nay chúng ta chỉ xét miền đơn hoặc đa liên có biên gồm hữu hạn đường cong đơn, trơn từng khúc và định hướng dương. Như vậy nếu miền  $D$  là miền đơn liên thì hoặc là  $D = \mathbb{C}$  hoặc là  $\partial D^+$  là đường cong kín định hướng ngược chiều kim đồng hồ.



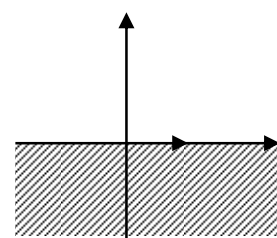
- Trong giáo trình này chúng ta thường xét một số miền đơn liên và đa liên có biên định hướng dương như sau.



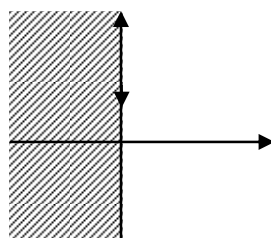
$|z| < R$



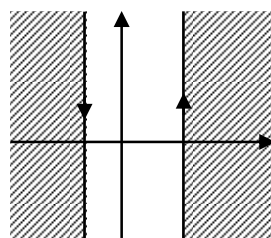
$0 < \arg z < \alpha$



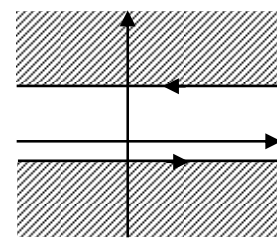
$\text{Im } z > 0$



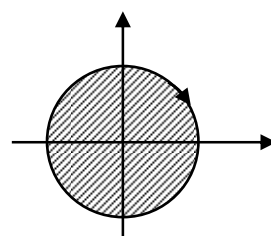
$\text{Re } z > 0$



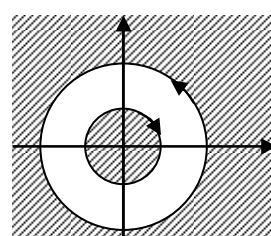
$a < \text{Re } z < b$



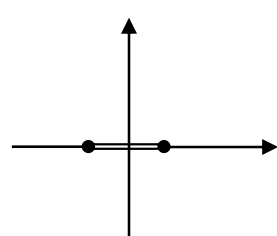
$a < \text{Im } z < b$



$|z| > R$



$r < |z| < R$



$\forall z \in [-1, 1]$

### Bài tập chương 1

1. Viết dạng đại số của các số phức

a.  $(2 - i)(1 + 2i)$       b.  $\frac{2}{4 - 3i}$       c.  $\frac{4 + 5i}{3 - 4i}$       d.  $(1 + 2i)^3$

2. Cho các số phức  $a, b \in \mathbb{C}$ . Chứng minh rằng

a.  $|a| = |b| = 1 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \frac{z + ab\bar{z} - (a + b)}{a - b} \in i\mathbb{R}$

b.  $|a| = |b| = 1$  và  $1 + ab \neq 0 \Rightarrow \frac{a + b}{1 + ab} \in \mathbb{R}$

3. Viết dạng lượng giác của các số phức

a.  $-1 + i\sqrt{3}$       b.  $(\sqrt{3} + i)^{10}$       c.  $\sqrt[3]{i}$       d.  $\sqrt[5]{1 + i}$

4. Giải các phương trình

a.  $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$       b.  $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$

c.  $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$       d.  $z + \bar{z} + j(z + 1) + 2 = 0$

e.  $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$       f.  $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$

g.  $(z + i)^n = (z - i)^n$       h.  $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$

5. Tính các tổng sau đây

a.  $A = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots, B = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots, C = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$

b.  $C = \sum_{k=0}^n \cos(a + kb)$  và  $S = \sum_{k=0}^n \sin(a + kb)$

6. Ký hiệu  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$  là căn bậc  $n$  thứ  $k$  của đơn vị

a. Tính các tổng  $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$        $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k$

b. Chứng minh rằng  $\forall z \in \mathbb{C}, \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{l=0}^{n-1} z^l$       Suy ra  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

7. Trong mặt phẳng phức cho tìm điểm  $M(z)$  sao cho

a. Các điểm có toạ vị là  $z, z^2$  và  $z^3$  lập nên tam giác có trục tâm là gốc O

b. Các điểm có toạ vị  $z, z^2$  và  $z^3$  thẳng hàng

c. Các điểm có toạ vị  $z, z^2$  và  $z^3$  lập thành tam giác vuông

8. Khảo sát sự hội tụ của dãy số phức  $u_0 \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}$

9.  $\forall (n, z_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{V}^*$  và  $|\arg z_n| \leq \alpha$ . Chứng minh rằng chuỗi  $\sum_{n \geq 0} |z_n|$  hội tụ

10. Cho tam giác  $\Delta ABC$ . Kí hiệu  $M_0 = A, M_1 = B, M_2 = C$  và  $\forall n \in \mathbb{Z}, M_{n+3}$  là trọng tâm của tam giác  $\Delta M_n M_{n+1} M_{n+2}$ . Chứng tỏ rằng dãy điểm  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  là dãy hội tụ và tìm giới hạn của nó?

11. Cho hàm  $f : I \rightarrow \mathbb{V}$  sao cho  $f(t) \neq 0$ . Chứng minh rằng hàm  $|f|$  là đơn điệu tăng khi và chỉ khi  $\operatorname{Re}(f'/f) \geq 0$ .

12. Cho  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{V}$  liên tục và bị chặn. Tính giới hạn

a.  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\alpha-1} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^\alpha} dt \quad (\alpha \geq 1)$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(t/x)}{1+t^2} dt$

13. Khảo sát các đường cong phẳng

a.  $z(t) = a \cos t + i b \sin t$

b.  $z(t) = a \cosh t + i b \sinh t$

c.  $z(t) = (t - \sin t) + i(1 - \cos t)$

d.  $z(t) = t \ln t + i \frac{\ln t}{t}$

14. Biểu diễn trên mặt phẳng các tập con của tập số phức

a.  $|z - 3 + 4i| = 2$

b.  $|z - 1| + |z + 1| = 3$

c.  $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$

d.  $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{4}$  và  $|z| > 2$

e.  $0 < \operatorname{Im} z < 1$  và  $|z| < 2$

f.  $|z - 1| + |z + 1| > 3$

g.  $|z| < 2$  và  $\operatorname{Re} z > -1$

h.  $|z - i| > 1$  và  $|z| < 2$

## Hàm biến phức

### Đ1. Hàm biến phức

• Cho miền  $D \subset \mathbb{C}$ . ánh xạ  $f : D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto w = f(z)$  gọi là *hàm biến phức* xác định trên miền  $D$  và kí hiệu là  $w = f(z)$  với  $z \in D$ .

Thay  $z = x + iy$  vào biểu thức  $f(z)$  và thực hiện các phép toán

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ với } (x, y) \in D \subset \mathbb{C}^2 \quad (2.1.1)$$

Hàm  $u(x, y)$  gọi là *phần thực*, hàm  $v(x, y)$  gọi là *phần ảo*, hàm  $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$  gọi là *module*, hàm  $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$  gọi là *liên hợp phức* của hàm phức  $f(z)$ .

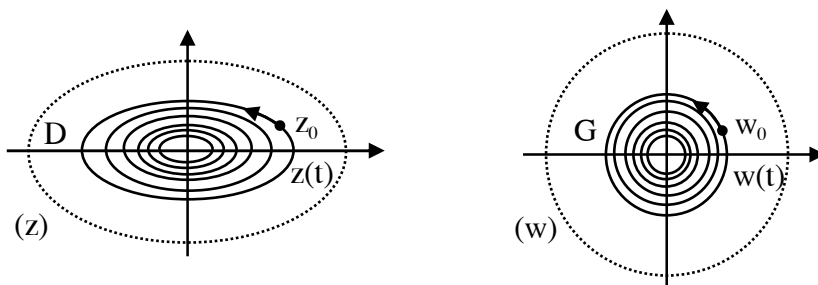
Ngược lại, với  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  và  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , ta có

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z, \bar{z}) \text{ với } z, \bar{z} \in D \subset \mathbb{C} \quad (2.1.2)$$

Như vậy hàm phức một mặt xem như là hàm một biến phức, mặt khác được xem như hàm hai biến thực. Điều này làm cho hàm phức vừa có các tính chất giống và vừa có các tính chất khác với hàm hai biến thực. Sau này tùy theo từng trường hợp cụ thể, chúng ta có thể cho hàm phức ở dạng (2.1.1) hoặc dạng (2.1.2)

Ví dụ Xét  $w = z^2$ . Thay  $z = x + iy$  suy ra  $w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u + iv$

• Để biểu diễn hình học hàm phức, ta dùng cặp mặt phẳng  $(z) = (Oxy)$  và  $(w) = (Ouv)$ .



Qua ánh xạ  $f$

Điểm	$z_0 = x_0 + iy_0$	biến thành điểm	$w_0 = u_0 + iv_0$
Đường cong	$z(t) = x(t) + iy(t)$	biến thành đường cong	$w(t) = u(t) + iv(t)$
Miền	$D$	biến thành miền	$G$

Chính vì vậy mỗi hàm phức xem như là một phép biến hình từ mặt phẳng  $(Oxy)$  vào mặt phẳng  $(Ouv)$ . Nếu ánh xạ  $f$  là đơn ánh thì hàm  $w = f(z)$  gọi là *đơn diệp*, trái lại gọi là *đa diệp*. Hàm đa diệp biến một mặt phẳng  $(z)$  thành nhiều mặt phẳng  $(w)$  trùng lên nhau. Nếu ánh xạ  $f$  là đơn trị thì hàm  $w = f(z)$  gọi là *hàm đơn trị*, trái lại gọi là *đa trị*. Hàm đa

trị biến một mặt phẳng ( $z$ ) thành nhiều tập con rời nhau của mặt phẳng ( $w$ ). Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét các hàm phức đơn trị xác định trên miền đơn diệp của nó.

- Trên tập  $F(D, \forall)$  các hàm phức xác định trên miền  $D$ , định nghĩa các phép toán đại số tương tự như trên tập  $F(I, \forall)$  các hàm trị phức xác định trên khoảng  $I$ .

Cho các hàm  $f : D \rightarrow \forall, z \alpha \omega = f(z)$  và  $g : G \rightarrow \forall, \omega \alpha w = g(\omega)$  sao cho  $f(D) \subset G$ .

Hàm

$$h : D \rightarrow \forall, z \alpha w = g[f(z)] \quad (2.1.3)$$

gọi là *hàm hợp* của hàm  $f$  và hàm  $g$ , kí hiệu là  $h = g \circ f$ .

Cho hàm  $f : D \rightarrow \forall, z \alpha w = f(z)$  và  $G = f(D)$ .

Hàm

$$g : G \rightarrow \forall, w \alpha z = g(w) \text{ sao cho } f(z) = w \quad (2.1.4)$$

gọi là *hàm ngược* của hàm  $f$ , kí hiệu là  $g = f^{-1}$ .

Hàm ngược của hàm biến phức có thể là hàm đa trị. Các tính chất phép toán của hàm phức tương tự như các tính chất của hàm thực.

Ví dụ Hàm  $w = z^2$  là hàm đa diệp trên  $\forall$  và có hàm ngược  $z = \sqrt{w}$  là hàm đa trị.

## Đ2. Giới hạn và liên tục

- Cho hàm  $f : D \rightarrow \forall, a \in \bar{D}$  và  $L \in \forall$ . Hàm  $f$  gọi là *dần đến giới hạn*  $L$  khi  $z$  dần đến  $a$  và kí hiệu là  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Hàm  $f$  gọi là *dần đến giới hạn*  $L$  khi  $z$  *dần ra vô hạn* và kí hiệu là  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall z \in D, |z| > N \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Hàm  $f$  gọi là *dần ra vô hạn* khi  $z$  dần đến  $a$  và kí hiệu là  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$  nếu

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$$

**Định lý** Cho  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $a = \alpha + i\beta$  và  $L = l + ik \in \forall$

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} u(x, y) = l \text{ và } \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} v(x, y) = k \quad (2.2.1)$$

**Chứng minh**

Giả sử

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall (x, y) \in D, |x - \alpha| < \delta/2 \text{ và } |y - \beta| < \delta/2$$

$$\Rightarrow |u(x, y) - 1| < \varepsilon \text{ và } |v(x, y) - k| < \varepsilon$$

Suy ra  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} u(x, y) = 1$  và  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} v(x, y) = k$

Ngược lại

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} u(x, y) = 1 \text{ và } \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} v(x, y) = k$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in D, |x - \alpha| < \delta \text{ và } |y - \beta| < \delta$$

$$\Rightarrow |u(x, y) - 1| < \varepsilon/2 \text{ và } |v(x, y) - k| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall z \in D, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Suy ra  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$

►►

### Hệ quả

$$1. \lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \Leftrightarrow \overline{\lim_{z \rightarrow a} f(z)} = \bar{L} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |L|$$

$$2. \lim_{z \rightarrow a} [\lambda f(z) + g(z)] = \lambda \lim_{z \rightarrow a} f(z) + \lim_{z \rightarrow a} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow a} [f(z)g(z)] = \lim_{z \rightarrow a} f(z) \lim_{z \rightarrow a} g(z), \quad \lim_{z \rightarrow a} [f(z)/g(z)] = \lim_{z \rightarrow a} f(z) / \lim_{z \rightarrow a} g(z)$$

3. Các tính chất khác tương tự giới hạn hàm biến thực

• Hàm  $f$  gọi là *liên tục* tại điểm  $a \in D$  nếu  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ . Hàm  $f$  gọi là *liên tục* trên miền

$D$  nếu nó liên tục tại mọi điểm  $z \in D$ .

Hàm  $f$  gọi là *liên tục đều* trên miền  $D$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z, z' \in D, |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon$$

Rõ ràng hàm  $f$  liên tục đều trên miền  $D$  thì nó liên tục trên miền  $D$ . Tuy nhiên điều ngược lại nói chung là không đúng.

**Định lý** Cho hàm  $f$  liên tục trên miền  $D$  compact.

1. Hàm  $|f(z)|$  bị chặn trên miền  $D$  và  $\exists z_1, z_2 \in D$  sao cho

$$\forall z \in D, |f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|$$

2. Tập  $f(D)$  là miền compact

3. Hàm  $f$  liên tục đều trên miền  $D$

4. Các tính chất khác tương tự hàm biến thực liên tục

### Chứng minh

1. Do hàm trị thực  $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$  liên tục trên miền compact nên bị chặn và đạt trị lớn nhất, trị bé nhất trên miền đó.

2. Theo chứng minh trên tập  $f(D)$  là tập giới nội.

Xét dãy  $w_n = f(z_n) \xrightarrow{+\infty} w_0$ . Do miền  $D$  compact nên có dãy con  $z_{\varphi(n)} \xrightarrow{+\infty} z_0 \in D$ .

Do hàm  $f$  liên tục nên  $f(z_{\varphi(n)}) \xrightarrow{+\infty} w_0 = f(z_0) \in f(D)$ . Suy ra tập  $f(D)$  là tập đóng.

Xét cặp hai điểm  $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2) \in f(D)$  tùy ý. Do tập  $D$  liên thông nên có tham số

cung  $\gamma(t)$  nối  $z_1$  với  $z_2$  và nằm gọn trong  $D$ . Khi đó tham số cung  $f \circ \gamma(t)$  nối  $w_1$  với  $w_2$  và nằm gọn trong  $f(D)$ . Suy ra tập  $f(D)$  là tập liên thông đường.

3. Giả sử ngược lại, hàm  $f$  không liên tục đều trên tập  $D$ . Khi đó

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta = 1/n, \exists z_n, z_n' \in D: |z_n - z_n'| < 1/n \text{ và } |f(z_n) - f(z_n')| \geq \varepsilon$$

Do miền  $D$  compact nên có các dãy con  $z_{\varphi(n)} \xrightarrow{+\infty} a$  và  $z_{\psi(n)}' \xrightarrow{+\infty} b$ .

Theo giả thiết trên

$$\exists N_1 > 0: \forall n > N_1, |a - b| < |a - z_{\varphi(n)}| + |z_{\varphi(n)} - z_{\psi(n)}'| + |z_{\psi(n)}' - b| < 1/n$$

Suy ra  $a = b$ . Do hàm  $f$  liên tục nên

$$\exists N_2 \in \mathbb{Z}: \forall n > N_2, |f(z_{\varphi(n)}) - f(z_{\psi(n)}')| < \varepsilon$$

Trái với giả thiết phản chứng. ▶▶

### Đ3. Đạo hàm phức

• Cho hàm  $f: D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Hàm  $f$  gọi là *R - khả vi* nếu phần thực  $u = \operatorname{Re} f$  và phần ảo  $v = \operatorname{Im} f$  là các hàm khả vi. Khi đó đại lượng

$$df = du + idv \tag{2.3.1}$$

gọi là *vi phân* của hàm phức  $f$ .

Kí hiệu  $dz = dx + idy$  và  $d\bar{z} = dx - idy$ . Biến đổi

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + i\frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Hàm  $f$  gọi là *C - khả vi* nếu nó là *R - khả vi* và có các đạo hàm riêng thoả mãn điều kiện Cauchy - Riemann sau đây

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ và } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{C - R}$$

Ví dụ Cho  $w = \bar{z} = x - iy$

Ta có  $u = x$  và  $v = -y$  là các hàm khả vi nên hàm  $w$  là *R - khả vi*

Tuy nhiên  $u'_x = 1 \neq v'_y = -1$  nên hàm  $w$  không phải là *C - khả vi*

• Cho hàm  $f: D \rightarrow \mathbb{C}, a \in D$  và kí hiệu  $\Delta z = z - a, \Delta f = f(z) - f(a)$ . Giới hạn

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(a) \tag{2.3.3}$$

gọi là *đạo hàm* của hàm  $f$  tại điểm  $a$ .



Giả sử hàm  $f$  là  $\mathbb{R}$ -khả vi và  $\Delta z = |\Delta z|e^{i\varphi}$ ,  $\Delta \bar{z} = |\Delta \bar{z}|e^{-i\varphi}$ . Theo công thức (2.3.2)

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

Chia hai vế cho  $\Delta z$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\varphi} + \gamma(\Delta z) \text{ với } \gamma(\Delta z) \rightarrow 0 \quad (2.3.4)$$

Suy ra điều kiện cần và đủ để giới hạn (2.3.3) tồn tại không phụ thuộc vào  $\Delta z$  là

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Tức là hàm  $f$  là  $\mathbb{C}$ -khả vi. Từ đó suy ra định lý sau đây.

**Định lý** Hàm phức  $f$  có đạo hàm khi và chỉ khi nó là  $\mathbb{C}$ -khả vi.

**Hệ quả** Nếu hàm  $f$  là  $\mathbb{C}$ -khả vi thì

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3.5)$$

**Chứng minh**

Giả sử hàm  $f$  là  $\mathbb{C}$ -khả vi. Chuyển qua giới hạn công thức (2.3.4)

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Kết hợp với công thức (2.3.2) và điều kiện (C - R) nhận được công thức trên.  $\blacktriangleright$

**Nhận xét**

1. Nếu các hàm  $u$  và  $v$  thuộc lớp  $C^1$  thì hàm  $f$  là  $\mathbb{R}$ -khả vi và nếu các đạo hàm riêng thoả mãn thêm điều kiện Cauchy - Riemann thì nó là  $\mathbb{C}$ -khả vi. Tuy nhiên điều ngược lại nói chung là không đúng.
2. Từ công thức (2.3.5) suy ra các qui tắc tính đạo hàm phức tương tự như các qui tắc tính đạo hàm thực.

**Ví dụ** Cho  $w = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

Ta có  $u = x^2 - y^2$  và  $v = 2xy$  là các hàm khả vi và thoả mãn điều kiện (C - R)

$$u'_x = 2x = v'_y \text{ và } u'_y = -2y = -v'_x$$

Suy ra hàm  $w$  là  $\mathbb{C}$ -khả vi và theo công thức (2.3.5)

$$w' = u'_x + i v'_x = 2x + i2y = 2z$$

### Đ4. Hàm giải tích

• Cho hàm  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  và  $a \in D_0$ . Hàm  $f$  gọi là *giải tích (chỉnh hình)* tại điểm  $a$  nếu có số dương  $R$  sao cho hàm  $f$  có đạo hàm trong hình tròn  $B(a, R)$ . Hàm  $f$  gọi là *giải tích trong miền mở  $D$*  nếu nó giải tích tại mọi điểm trong miền  $D$ . Trường hợp  $D$  không phải miền mở, hàm  $f$  gọi là giải tích trong miền  $D$  nếu nó giải tích trong miền mở  $G$  và  $D \subset G$ . Kí hiệu  $H(D, \mathbb{C})$  là tập các hàm giải tích trên miền  $D$ .

**Định lý** Hàm phức giải tích có các tính chất sau đây.

1. Cho các hàm  $f, g \in H(D, \mathbb{C})$  và  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Khi đó  $\lambda f + g, fg, f/g (g \neq 0) \in H(D, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} [\lambda f(z) + g(z)]' &= \lambda f'(z) + g'(z) \\ [f(z)g(z)]' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right]' &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

2. Cho  $f \in H(D, \mathbb{C}), g \in H(G, \mathbb{C})$  và  $f(D) \subset G$ . Khi đó hàm hợp  $g \circ f \in H(D, \mathbb{C})$

$$(g \circ f)'(z) = g'(\omega)f'(z) \text{ với } \omega = f(z) \quad (2.4.2)$$

3. Cho  $f \in H(D, \mathbb{C})$  và  $f'(z) \neq 0$ . Khi đó hàm ngược  $g \in H(G, \mathbb{C})$  với  $G = f(D)$

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)} \text{ với } w = f(z) \quad (2.4.3)$$

#### Chứng minh

1. - 2. Lập luận tương tự như chứng minh tính chất của đạo hàm thực

3. Giả sử  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Từ giả thiết suy ra các hàm  $u, v$  là khả vi và thoả mãn điều kiện (C - R). Kết hợp với công thức (2.3.5) ta có

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$$

Suy ra ánh xạ  $f : (x, y) \rightarrow (u, v)$  là một vi phôi (song ánh và khả vi địa phương). Do đó nó có ánh xạ ngược  $g : (u, v) \rightarrow (x, y)$  cũng là một vi phôi. Từ đó suy ra

$$\Delta w = \Delta f \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta z = \Delta g \rightarrow 0 \text{ và } \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta z} \right)^{-1} = (f'(z))^{-1} \quad \blacktriangleright$$

• Giả sử hàm  $w = f(z)$  giải tích tại điểm  $a$  và có đạo hàm  $f'(a) \neq 0$ .

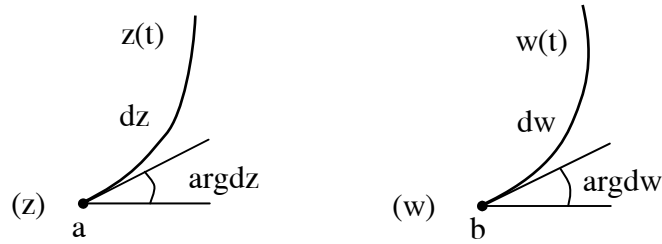
Gọi  $L : z = z(t)$  là đường cong trơn đi qua điểm  $a$  và  $\Gamma : w = f[z(t)] = w(t)$  là ảnh của nó qua ánh xạ  $f$ . Khi đó  $dz(t)$  là vi phân cung trên đường cong  $L$  và  $dw(t)$  là vi phân cung trên đường cong  $\Gamma$ . Theo công thức đạo hàm hàm hợp trong lân cận điểm  $a$ , ta có

$$dw = f'(a)z'(t)dt = f'(a)dz$$

Suy ra

$$|dw| = |f'(a)| |dz| \text{ và } \arg(dw) = \arg(dz) + \arg f'(a) [2\pi] \quad (2.4.4)$$

Như vậy  $|f'(a)|$  là hệ số co và  $\arg f'(a)$  là góc quay của đường cong  $L$  bất kỳ trong lân cận điểm  $a$ . Suy ra trong lân cận của điểm  $a$  phép biến hình  $w = f(z)$  là phép đồng dạng.



• Phép biến hình bảo toàn góc giữa hai đường cong gọi là *phép biến hình bảo giác*. Theo kết quả trên thì hàm giải tích và có đạo hàm khác không là một phép biến hình bảo giác. Ngược lại giả sử ánh xạ  $f$  là  $\mathbb{R}$ -khả vi và bảo giác tại điểm  $a$ . Qua ánh xạ  $f$  cơ sở chính tắc  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$  biến thành cặp vectơ tiếp xúc  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ .

Do tính bảo giác

$$\angle\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \angle\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x} = i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Điều này có nghĩa là hàm  $\mathbb{R}$ -khả vi và biến hình bảo giác là hàm  $\mathbb{C}$ -khả vi. Chúng ta sẽ quay lại vấn đề biến hình bảo giác ở cuối chương này.

## Đ5. Hàm lũy thừa

### Hàm lũy thừa phức

• Hàm lũy thừa phức

$$w = z^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.5.1)$$

là hàm giải tích trên toàn tập số phức, có đạo hàm

$$w'(z) = nz^{n-1} \quad (2.5.2)$$

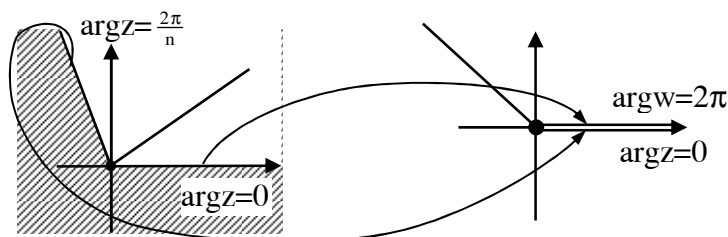
và có các tính chất tương tự hàm lũy thừa thực.

• Hàm lũy thừa phức là hàm đa diệp

$$z^n = z_1^n \Leftrightarrow |z| = |z_1| \text{ và } \arg z = \arg z_1 + \frac{2\pi}{n} \quad (2.5.3)$$

Suy ra miền đơn diệp là hình quạt  $\alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}$ .

Kí hiệu  $z = re^{i\varphi}$  suy ra  $w = r^n e^{in\varphi}$ .



Qua ánh xạ lũy thừa phức

Tia	$\text{arg}z = \alpha$	biến thành tia	$\text{arg}w = n\alpha$
Góc	$0 < \text{arg}z < \frac{2\pi}{n}$	biến thành góc	$0 < \text{arg}w < 2\pi$
Một mặt phẳng (z)		biến thành	n - mặt phẳng (w)

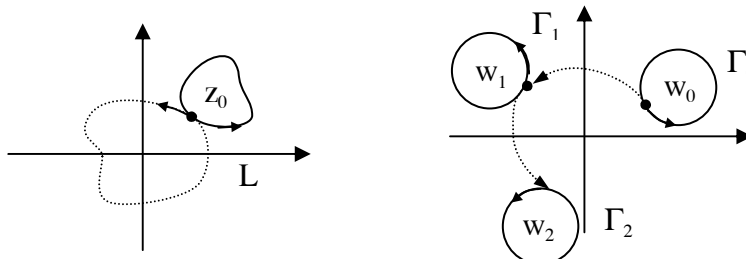
**Hàm căn phức**

- Hàm căn phức

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n \tag{2.5.4}$$

là hàm ngược của hàm lũy thừa phức. Do hàm lũy thừa phức là n - diệp nên hàm căn phức là hàm n - trị. Kí hiệu  $z = re^{i\varphi}$  và  $w = \rho e^{i\theta}$ , ta có

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \theta = \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \text{ với } k = 0 \dots (n-1) \tag{2.5.5}$$



Khi z chạy trên đường cong L kín, không bao gốc tọa độ thì w chạy đồng thời trên các đường cong  $\Gamma_k$  kín, không bao gốc tọa độ. Khi z chạy trên đường cong L kín, bao gốc tọa độ thì w chạy đồng thời trên các cung  $w_k w_{k+1}$  từ điểm  $w_k$  đến điểm  $w_{k+1}$ . Khi z chạy hết một vòng bao gốc tọa độ thì w nhảy từ nhánh đơn trị này sang nhánh khác. Do vậy điểm gốc gọi là điểm rẽ nhánh của hàm căn phức và để tách các nhánh đơn trị người ta thường cắt mặt phẳng phức bằng một tia từ 0 ra  $\infty$ .

- Miền đơn trị của hàm căn phức là  $D = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ . Với  $k = 0$ , hàm

$$w = \sqrt[n]{re^{i\frac{\varphi}{n}}} \tag{2.5.6}$$

là hàm đơn diệp, giải tích trên miền D, có đạo hàm

$$w'(z) = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \tag{2.5.7}$$

và có các tính chất khác tương tự hàm căn thực.

Đ6. Hàm mũ

**Hàm mũ phức**

- Hàm mũ phức

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.6.1)$$

có phần thực  $u = e^x \cos y$  và phần ảo  $v = e^x \sin y$  thoả điều kiện (C - R) nên giải tích trên toàn tập số phức, có đạo hàm

$$w'(z) = e^z \quad (2.6.2)$$

Hàm mũ phức tuần hoàn chu kỳ  $T = 2\pi i$

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

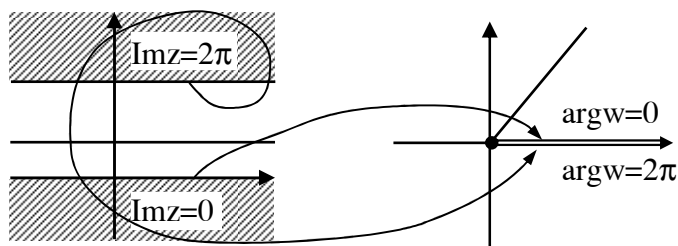
và có các tính chất khác tương tự như hàm mũ thực.

- Hàm mũ phức là hàm đa diệp

$$e^z = e^{z_1} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 \text{ và } \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1 + 2k\pi \quad (2.6.3)$$

Suy ra miền đơn diệp là băng đứng  $\alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi$ .

Kí hiệu  $z = x + iy$  suy ra  $|w| = e^x$  và  $\operatorname{Arg} w = y + k2\pi$ .



Qua ánh xạ mũ phức

Đường thẳng	$y = \beta$	biến thành tia	$\operatorname{arg} w = \beta$
Băng ngang	$0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$	biến thành góc	$0 < \operatorname{arg} w < 2\pi$
Một mặt phẳng (z)		biến thành	$\infty$ - mặt phẳng (w)

**Hàm logarit phức**

- Hàm logarit phức

$$w = \operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z = e^w \quad (2.6.4)$$

là hàm ngược của hàm mũ phức. Do hàm mũ phức là hàm đa diệp nên hàm logarit phức là hàm đa trị.

Giả sử  $w = u + iv$ , ta có

$$e^u = |z| \text{ và } v = \operatorname{arg} z + k2\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

Suy ra

$$w = \ln|z| + i(\operatorname{arg} z + k2\pi) \text{ với } k \in \mathbb{Z} \quad (2.6.5)$$

Lập luận tương tự như hàm căn phức, điểm gốc là điểm rẽ nhánh của hàm logarit và để tách nhánh đơn trị cần phải cắt mặt phẳng phức bằng một tia từ 0 ra  $\infty$ .

- Miền đơn trị của hàm logarit phức là  $D = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ . Với  $k = 0$ , hàm

$$w = \ln|z| + i \operatorname{arg} z \quad (2.6.6)$$

là hàm đơn trị, giải tích trên miền  $D$ , có đạo hàm

$$w'(z) = \frac{1}{z} \quad (2.6.7)$$

và có các tính chất khác tương tự hàm logarit thực.

Ví dụ  $\operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \operatorname{arg}(-1) = i\pi$ ,  $i^{\frac{1}{i}} = e^{i \ln i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

## Đ7. Hàm lượng giác

### Hàm lượng giác phức

- Kí hiệu

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad (2.7.1)$$

Các hàm biến phức  $w = \cos z$ ,  $w = \sin z$  và  $w = \operatorname{tg} z$  gọi là các *hàm lượng giác phức*.

Hàm lượng giác phức đơn trị, tuần hoàn, giải tích, có đạo hàm

$$(\cos z)' = -\sin z \quad (\sin z)' = \cos z, \dots \quad (2.7.2)$$

và có các tính chất khác tương tự hàm lượng giác thực.

Chú ý Với  $z = x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \equiv \cos x$ . Tuy nhiên  $\cos(i) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e) > 1$

### Hàm hyperbole phức

- Kí hiệu

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \quad (2.7.3)$$

Các hàm biến phức  $w = \operatorname{ch} z$ ,  $w = \operatorname{sh} z$  và  $w = \operatorname{th} z$  gọi là các *hàm hyperbole phức*.

Hàm hyperbole phức đơn trị, tuần hoàn, giải tích, có đạo hàm

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \dots \quad (2.7.4)$$

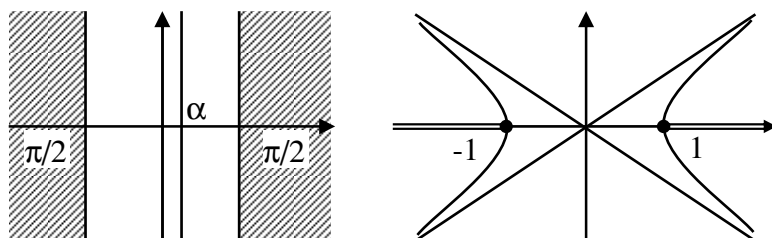
và có các tính chất khác tương tự hàm hyperbole thực.

- Ngoài ra, ta có các liên hệ giữa hàm lượng giác và hàm hyperbole

$$\operatorname{ch} iz = \cos z \quad \operatorname{cos} iz = \operatorname{ch} z \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z \quad \operatorname{sin} iz = i \operatorname{sh} z \quad (2.7.5)$$

Ví dụ Tìm ảnh của miền  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$  qua ánh xạ  $w = \sin z$

Ta có  $w = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$   
 Suy ra  $u = \sin x \cosh y$  và  $v = \cos x \sinh y$



Qua ánh xạ  $w = \sin z$

Đường thẳng	$x = \pm \frac{\pi}{2}$	biến thành tia	$u = \pm \cosh y, v = 0$
Đường thẳng	$x = \alpha$	biến thành hyperbole	$u = \sin \alpha \cosh y, v = \cos \alpha \sinh y$
Miền	$-\frac{\pi}{2} < \text{Re} z < \frac{\pi}{2}$	biến thành miền	$(w) - (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

- Lập luận tương tự tìm ảnh các hàm lượng giác, hàm hyperbole khác.

### Đ8. Biến hình bảo giác

- ánh xạ  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  gọi là *biến hình bảo giác* tại điểm  $a$  nếu nó bảo toàn góc định hướng giữa các đường cong đi qua điểm  $a$ . Ánh xạ  $f$  gọi là *phép biến hình bảo giác* trên miền  $D$  nếu nó là đơn điệu và bảo giác tại mọi điểm thuộc  $D$ .



Theo các kết quả ở trên hàm giải tích và có đạo hàm khác không tại điểm  $a$  là một song ánh,  $\mathbb{R}$ -khả vi và bảo giác trong lân cận điểm  $a$ , gọi là một *vi phối bảo giác*. Ngược lại một vi phối bảo giác tại điểm  $a$  là hàm giải tích và có đạo hàm khác không tại điểm  $a$ .

**Bài toán** Tìm phép biến hình bảo giác  $f$  biến miền đơn liên  $D$  thành miền đơn liên  $G$ .

- Để giải bài toán trên người ta thường sử dụng các kết quả dưới đây, gọi là các nguyên lý biến hình bảo giác. Việc chứng minh các nguyên lý biến hình bảo giác là rất phức tạp và phải sử dụng nhiều kết quả khác. Ở đây chúng ta chỉ trình bày sơ lược các ý tưởng của các phép chứng minh. Bạn đọc quan tâm đến các phép chứng minh chi tiết có thể tìm xem ở phần tài liệu tham khảo.

**Nguyên lý tồn tại** Cho  $D$  và  $G$  là các miền đơn liên giới nội. Khi đó tồn tại vô số hàm giải tích  $w = f(z)$  biến hình bảo giác miền  $D$  thành miền  $G$ . Phép biến hình được xác định duy nhất nếu có thêm một trong hai điều kiện sau đây.

1. Cho biết  $w_0 = f(z_0)$  và  $w_1 = f(z_1)$  với  $z_0 \in D_0$  và  $z_1 \in \partial D$
2. Cho biết  $w_0 = f(z_0)$  và  $\arg f'(z_0) = \alpha$  với  $z_0 \in D_0$

**Chứng minh**

• Kí hiệu

$$U = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}, S = \{ g \in H(D, \mathbb{C}) : \forall z \in D, |g(z)| < 1 \} \text{ và } a \in D$$

Ta công nhận

$$\exists f_a \in S \text{ sao cho } |f_a(a)| = \max_{g \in S} |g(a)|$$

Khi đó hàm giải tích  $f_a$  là phép biến hình bảo giác biến miền  $D$  thành miền  $U$ .

Có thể tìm được vô số hàm giải tích  $f : D \rightarrow U$  như vậy. Tuy nhiên ta có liên hệ

$$f = f_a \circ h \text{ với } h : U \rightarrow U, h(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, h(a) = 0$$

Từ đó suy ra nếu có thêm các điều kiện bổ sung thì có thể xác định duy nhất hàm  $f$ .

• Giả sử  $f : D \rightarrow U$  và  $g : G \rightarrow U$  là các phép biến hình bảo giác. Khi đó  $g^{-1} \circ f : D \rightarrow G$  là phép biến hình bảo giác biến miền  $D$  thành miền  $G$ . ▶▶

**Nguyên lý bảo toàn miền** Cho  $D$  là miền đơn liên giới nội, hàm  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$  và không phải là hàm hằng. Khi đó  $G = f(D)$  cũng là miền đơn liên.

**Chứng minh**

- Do hàm  $f$  liên tục nên bảo toàn đường cong suy ra bảo toàn tính liên thông
- Với mọi  $b = f(a) \in G$ , do miền  $D$  mở và  $f \neq \text{const}$  nên có hình tròn  $B(a, R) \subset D$  sao cho với mọi  $z \in B(a, R)$ ,  $f(z) \neq b$ .

Kí hiệu

$$\mu = \min_{z \in \Gamma} |f(z) - b| \text{ với } \Gamma = \partial B$$

$$N_B[f(z) - b] \text{ là số không điểm của hàm } f(z) - b \text{ trong hình tròn } B(a, R)$$

Với  $w \in B(b, \mu)$  tùy ý, ta có

$$f(z) - w = f(z) - b + b - w \text{ và } |f(z) - b| > \mu > |b - w| \text{ với } z \in B(a, R)$$

Theo định lý Rouché (Đ8, chương 4)

$$N_B[f(z) - w] = N_B[f(z) - b] = 1$$

Do đó  $\exists z \in B(a, R)$  sao cho  $w = f(z) \in G$ .

Vì điểm  $w$  tùy ý nên  $B(b, \mu) \subset G$  và suy ra tập  $G$  là tập mở ▶▶

**Nguyên lý tương ứng biên** Cho  $D, G$  là các miền đơn liên giới nội, hàm  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$  và biến hình bảo giác  $\partial D^+$  thành  $\partial G^+$ . Khi đó hàm  $f$  biến hình bảo giác miền  $D$  thành miền  $G$ .

**Chứng minh**



- Với mọi  $b \in G$ , kí hiệu  $\Delta_\Gamma[f(z) - b]$  là số gia argument của hàm  $f(z) - b$  khi  $z$  chạy trên đường cong  $\Gamma$ . Theo nguyên lý argument (Đ8, chương 4)

$$N_D[f(z) - b] = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D}[f(z) - b] = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G}(w - b) = 1$$

Do đó  $\exists a \in D$  sao cho  $b = f(a)$ .

Lập luận tương tự với  $b \notin \bar{G}$

$$N_D[f(z) - b] = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D}[f(z) - b] = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G}(w - b) = 0$$

Suy ra hàm  $f$  biến hình bảo giác miền  $D$  thành miền  $G$ . ▶▶

**Nguyên lý đối xứng** Cho các miền đơn liên giới nội  $D_1$  đối xứng với  $D_2$  qua đoạn thẳng hoặc cung tròn  $L \subset \partial D_1 \cap \partial D_2$  và hàm  $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$  liên tục trên  $\bar{D}_1$ , giải tích trong  $D_1$ , biến hình bảo giác miền  $D_1$  thành miền  $G_1$  sao cho cung  $L^+$  thành cung  $\Gamma^+ \subset \partial G_1$ . Khi đó có hàm giải tích  $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{C}$  biến hình bảo giác miền  $D_1 \cup D_2$  thành miền  $G_1 \cup G_2$  với  $G_2$  là miền đối xứng với  $G_1$  qua cung  $\Gamma$ .

**Chứng minh**

- Xét trường hợp  $L$  và  $\Gamma$  là các đoạn thẳng nằm trên trục thực. Khi đó hàm

$$f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})} \text{ và } f_2(z) = f_1(z), \forall z \in L$$

là hàm giải tích biến hình bảo giác miền  $D_2$  thành miền  $G_2$ . Hàm  $f$  xác định như sau

$$f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = f_1(z), z \in D_1 \cup L \text{ và } f(z) = f_2(z), z \in D_2$$

là hàm giải tích biến hình bảo giác miền  $D_1 \cup D_2$  thành miền  $G_1 \cup G_2$ .

- Trường hợp tổng quát, chúng ta dùng hàm giải tích biến các cung  $L$  và  $\Gamma$  thành các đoạn thẳng nằm trên trục thực. ▶▶

## Đ9. Hàm tuyến tính và hàm nghịch đảo

**Hàm tuyến tính**

- Hàm tuyến tính

$$w = az + b \quad (a \neq 0) \tag{2.9.1}$$

là hàm giải tích, có đạo hàm

$$w'(z) = a \neq 0$$

và do đó biến hình bảo giác mặt phẳng  $(z)$  lên mặt phẳng  $(w)$ .

- Kí hiệu  $\lambda = |a|$  và  $\alpha = \arg(a)$ . Phân tích

$$w = \lambda e^{i\alpha} z + b \tag{2.9.2}$$

Suy ra phép biến hình tuyến tính là tích của các phép biến hình sau đây.

1. Phép quay tâm O góc  $\alpha$        $z \alpha \zeta = e^{i\alpha}z$
  2. Phép vị tự tâm O hệ số  $\lambda$        $\zeta \rightarrow \omega = \lambda\zeta$
  3. Phép tịnh tiến vectơ b       $\omega \alpha w = \omega + b$
- Vậy phép biến hình tuyến tính là phép đồng dạng.

**Hàm nghịch đảo**

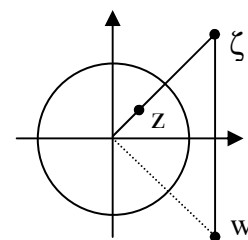
- Hàm nghịch đảo

$$w = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^* \tag{2.9.3}$$

là hàm giải tích, có đạo hàm

$$w'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0 \text{ với } z \neq 0$$

và do đó biến hình bảo giác mặt phẳng  $(z) - \{0\}$  lên mặt phẳng  $(w)$ .



- Kí hiệu  $z = re^{i\varphi}$ , ta có

$$|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \text{ và } \arg w = -\arg z = -\varphi \tag{2.9.4}$$

Suy ra phép biến hình nghịch đảo là tích của các phép biến hình sau đây.

1. Phép đối xứng qua đường tròn đơn vị     $z \alpha \zeta = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$
2. Phép đối xứng qua trục hoành       $\zeta \alpha w = \bar{\zeta}$

Vậy phép nghịch đảo bảo toàn tính đối xứng qua đường tròn đơn vị và qua trục hoành.

- Phương trình đường tròn suy rộng trong mặt phẳng  $(z)$  có dạng

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{2.9.5}$$

Kí hiệu  $z = x + iy$  và  $w = u + iv$ . Suy ra

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} \Leftrightarrow x = \frac{u}{u^2 + v^2} \text{ và } y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

Thay vào phương trình đường tròn (2.9.5) nhận được

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$$

Qua phép biến hình nghịch đảo

1. Đường thẳng

đi qua gốc       $A = D = 0$       biến thành đường thẳng qua gốc

không qua gốc     $A = 0$  và  $D \neq 0$     biến thành đường tròn qua gốc

2. Đường tròn

đi qua gốc       $A \neq 0$  và  $D = 0$     biến thành đường thẳng không qua gốc

không qua gốc     $A \neq 0$  và  $D \neq 0$     biến thành đường tròn không qua gốc

Vậy phép biến hình nghịch đảo biến đường tròn suy rộng thành đường tròn suy rộng.

Đ10. Hàm phân tuyến tính và hàm Jucop

**Hàm phân tuyến tính**

- Hàm phân tuyến tính

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0) \quad (2.10.1)$$

là hàm giải tích, có đạo hàm

$$w'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \text{ với } z \neq -\frac{d}{c}$$

và do đó biến hình bảo giác mặt phẳng  $(z) - \{-\frac{d}{c}\}$  lên mặt phẳng  $(w)$ .

- Phân tích

$$w = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} \quad (2.10.2)$$

Suy ra phép biến hình phân tuyến tính là tích của các phép biến hình sau đây.

1. Phép đồng dạng  $z \alpha \zeta = cz + d$
2. Phép nghịch đảo  $\zeta \alpha \omega = \frac{1}{\zeta}$
3. Phép đồng dạng  $\omega \alpha w = a_1\omega + b_1$  với  $a_1 = \frac{bc - ad}{c}$  và  $b_1 = \frac{a}{c}$

Vậy phép biến hình phân tuyến tính bảo toàn đường tròn suy rộng và tính đối xứng qua đường tròn suy rộng.

- Biến đổi

$$w = \frac{a_1z + b_1}{z + d_1} \text{ với } a_1 = \frac{a}{c}, b_1 = \frac{b}{c} \text{ và } d_1 = \frac{d}{c}$$

Suy ra nếu biết được ảnh của ba điểm khác nhau

$$w_1 = w(z_1), w_2 = w(z_2), w_3 = w(z_3),$$

thì có thể xác định được phép biến hình phân tuyến tính.

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \quad (2.10.3)$$

**Hàm Jucop**

- Hàm Jucop

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad z \in \mathbb{V}^* \quad (2.10.4)$$

là hàm giải tích, có đạo hàm

$$w'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) \neq 0 \text{ với } z \neq 0, \pm 1$$

và do đó biến hình bảo giác mặt phẳng  $(z) - \{0, \pm 1\}$  lên mặt phẳng  $(w)$ .

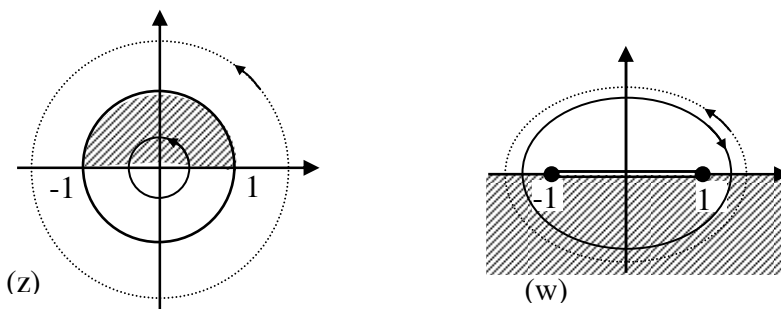
• Hàm Jucop là hàm đa diệp

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) \Leftrightarrow (z - z_1)(1 - zz_1) = 0 \quad (2.10.5)$$

Suy ra miền đơn diệp là bên trong hoặc bên ngoài đường tròn đơn vị.

Kí hiệu  $z = re^{i\varphi}$ , ta có

$$w = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \quad (2.10.6)$$



Qua phép biến hình Jucop

Đường tròn  $|z| = 1$  biến thành đoạn thẳng  $u = \cos\varphi, v = 0$

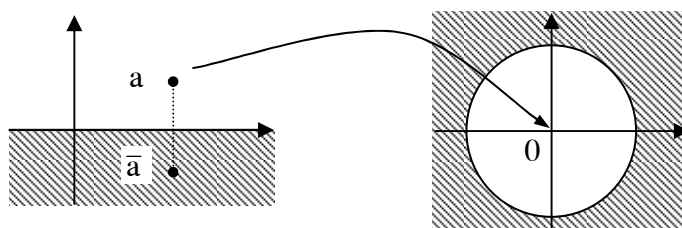
$|z| = r$  biến thành ellipse  $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$

Miền  $|z| > 1$  biến thành  $(w) - [-1, 1]$

$|z| < 1$  biến thành  $(w) - [-1, 1]$  ngược hướng

### Đ11. Các ví dụ biến hình bảo giác

Ví dụ 1 Tìm hàm giải tích  $w = f(z)$  biến hình bảo giác nửa mặt phẳng  $D = \{ \text{Im}z > 0 \}$  thành phần trong hình tròn đơn vị  $G = \{ |w| < 1 \}$  sao cho  $f(a) = 0$ .



• Do  $\partial D$  và  $\partial G$  đều là đường tròn nên chúng ta chọn phép biến hình phân tuyến tính

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

Do hàm phân tuyến tính bảo toàn tính đối xứng qua biên và  $f(a) = 0$  suy ra  $f(\bar{a}) = \infty$

$$w = k \frac{z-a}{z-\bar{a}} \text{ với } k \in \mathbb{C}$$

Do tính tương ứng biên :  $z \in \partial D \Rightarrow w = f(z) \in \partial G$  suy ra

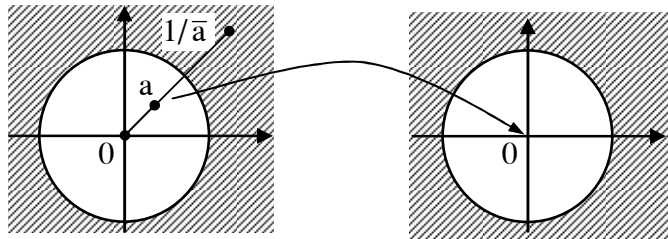
$$z = x \Rightarrow |w| = |k| \left| \frac{x-a}{x-\bar{a}} \right| = 1 \text{ và do } \left| \frac{x-a}{x-\bar{a}} \right| = 1 \text{ nên } |k| = 1$$

Kí hiệu  $k = e^{i\varphi}$  với  $\varphi \in \mathbb{R}$  suy ra

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{2.11.1}$$

Để xác định góc  $\varphi$  cần biết thêm ảnh của một điểm thứ hai.

**Ví dụ 2** Tìm hàm giải tích  $w = f(z)$  biến hình bảo giác miền  $D = \{ |z| < 1 \}$  thành miền  $G = \{ |w| < 1 \}$  sao cho  $f(a) = 0$ .



• Do  $\partial D$  và  $\partial G$  đều là đường tròn nên chúng ta chọn phép biến hình phân tuyến tính

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

Do hàm phân tuyến tính bảo toàn tính đối xứng qua biên và  $f(a) = 0$  suy ra  $f(1/\bar{a}) = \infty$

$$w = k \frac{z-a}{z-1/\bar{a}} = k \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \text{ với } k \in \mathbb{C}$$

Do tính tương ứng biên :  $z \in \partial D \Rightarrow w = f(z) \in \partial G$  suy ra

$$|z| = 1 \Rightarrow |w| = |k| \left| \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \right| = 1 \text{ và do } \left| \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \right| = 1 \text{ với } |z| = 1 \text{ nên } |k| = 1$$

Kí hiệu  $k = e^{i\varphi}$  với  $\varphi \in \mathbb{R}$  suy ra

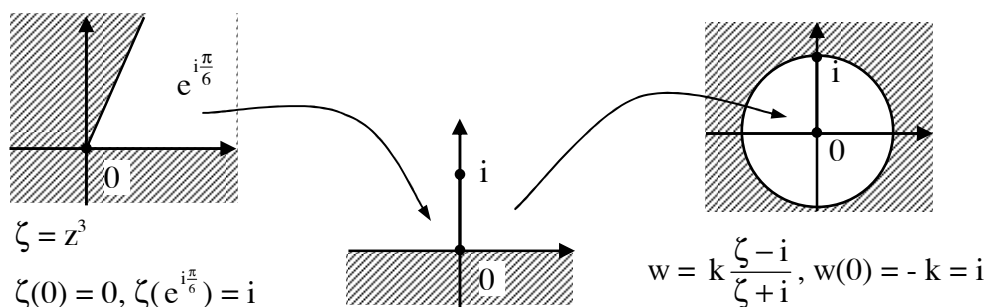
$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \tag{2.11.2}$$

Để xác định góc  $\varphi$  cần biết thêm ảnh của một điểm thứ hai.

**Ví dụ 3** Tìm hàm giải tích  $w = f(z)$  biến hình bảo giác miền  $D = \{ 0 < \arg z < \frac{\pi}{3} \}$  thành

miền  $G = \{ |w| < 1 \}$  sao cho  $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = 0$  và  $f(0) = i$ .

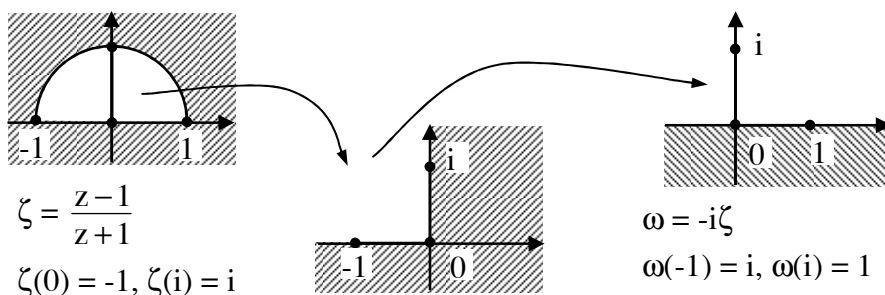
• Trước hết biến góc nhọn thành nửa mặt phẳng trên bằng phép lũy thừa. Sau đó dùng phép biến hình phân tuyến tính (2.11.1) biến nửa mặt phẳng trên thành phần trong của hình tròn đơn vị.



Lấy tích các phép biến hình  $w = -i \frac{z^3 - i}{z^3 + i}$

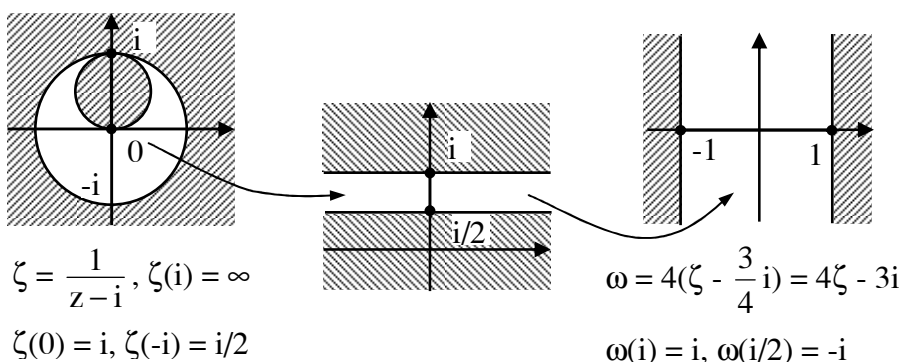
**Ví dụ 4** Tìm hàm giải tích  $w = f(z)$  biến hình bảo giác miền  $D = \{ |z| < 1 \text{ và } \text{Im}z > 0 \}$  thành miền  $G = \{ \text{Im}w > 0 \}$ .

- Trước hết biến nửa hình tròn thành góc vuông bằng cách biến điểm  $-1$  thành  $\infty$  và điểm  $1$  thành điểm  $0$  bằng phép biến hình phân tuyến tính. Sau đó quay và biến góc vuông thành nửa mặt phẳng trên.



Lấy tích các phép biến hình  $w = \omega^2 = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$

**Ví dụ 5** Tìm hàm giải tích  $w = f(z)$  biến hình bảo giác miền  $D = \{ |z| < 1, |z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{2} \}$  thành miền  $G = \{ -1 < \text{Re}w < 1 \}$ .

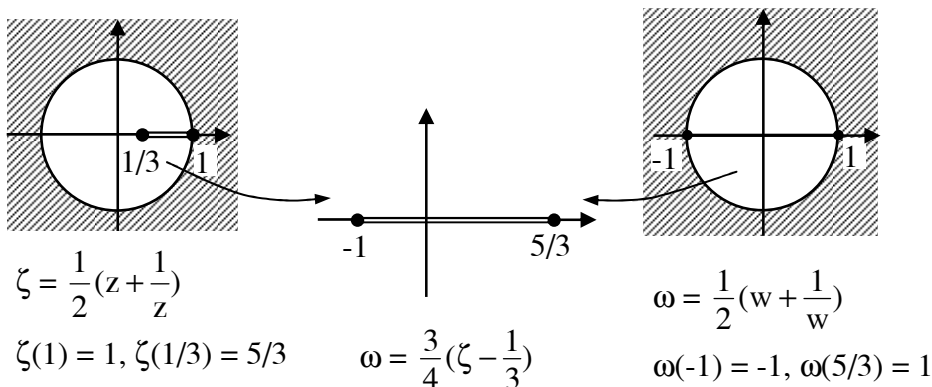


Lấy tích các phép biến hình  $w = i\omega = \frac{4i}{z-i} + 3$

• Trước hết biến hai đường tròn lồng nhau hai đường thẳng song song bằng cách biến điểm  $i$  thành điểm  $\infty$ . Sau đó dùng phép tịnh tiến và phép vị tự để điều chỉnh băng ngang thành băng ngang đối xứng và có độ rộng thích hợp. Cuối cùng dùng phép quay để nhận được băng đứng.

**Ví dụ 6** Tìm hàm giải tích  $w = f(z)$  biến hình bảo giác miền  $D = \{ |z| < 1 \} - [1/3, 1]$  thành miền  $G = \{ |w| < 1 \}$ .

• Trước hết biến hình tròn với lát cắt  $[1/3, 1]$  thành mặt phẳng với lát cắt  $[-1, 5/3]$  bằng phép biến hình Jucop. Sau đó thu gọn lát cắt thành đoạn  $[-1, 1]$  bằng phép tịnh tiến và phép vị tự. Cuối cùng dùng phép biến hình Jucop ngược.



Lấy tích các phép biến hình  $w = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1} = \frac{3}{8}\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \sqrt{\left[\frac{3}{8}\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\right]^2 - 1}$

## Bài tập chương 2

1. Xác định phần thực, phần ảo, module và argument của các hàm sau đây.

a.  $w = z^3$                       b.  $w = \sqrt[3]{z}$                       c.  $w = \frac{z+i}{z-1}$                       d.  $w = z - \frac{1}{z}$

2. Biểu diễn qua  $z$  và  $\bar{z}$  các hàm sau đây.

a.  $w = x^2 - 1$                       b.  $w = x^2 + y^2 + iy$                       c.  $w = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$                       8.  $w = x^3 + iy^3$

3. Khảo sát tính liên tục, liên tục đều của các hàm sau đây.

a.  $w = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$                       b.  $w = \ln x + iy$                       c.  $w = \frac{z+1}{z-1}$                       d.  $w = \frac{z}{|z|}$

4. Khảo sát điều kiện (C - R) và tính giải tích của các hàm sau đây.

a.  $w = z^3$                       b.  $w = z\text{Re}z$                       c.  $w = \frac{1}{z^2 + 1}$                       d.  $w = z\bar{z}$

5. Điều kiện Cauchy - Riemann

a. Tìm a, b, c  $\in \mathbb{R}$  để hàm  $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$  giải tích trên  $\mathbb{C}$

b. Chứng tỏ rằng hàm  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  thoả điều kiện (C - R) nhưng không khả vi tại  $z = 0$

c. Cho  $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$  với  $z = re^{i\varphi}$ . Viết dạng lượng giác của điều kiện (C - R)

d. Cho  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ . Chứng minh rằng nếu  $\exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \text{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z}$  thì  $\exists \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$

6. Tìm góc quay và hệ số co của phép biến hình  $w = f(z)$  tại điểm  $z \in D$ .

a.  $w = z^2$  với  $z = 1 + i$ ,  $z = -3 + 4i$                       b.  $w = \frac{1}{z^2 + 1}$  với  $z = 1 - i$ ,  $z = 1 + i$

7. Viết dạng đại số của các số phức sau đây.

a.  $e^{1+i}$                       b.  $\text{Ln}(1 + i)$                       c.  $\cos(2 + i)$                       d.  $\sin(2i)$   
 e.  $\text{tg}(2 - i)$                       f.  $i^{\frac{1}{i}}$                       g.  $(1 - i)^{3-3i}$                       h.  $(-1)^{\sqrt{i}}$

8. Chứng minh các công thức sau đây.

a.  $\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$                       b.  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$   
 c.  $\text{tg}(2z) = \frac{2 \text{tg} z}{1 + \text{tg}^2 z}$                       d.  $\text{ch}(2z) = \text{ch}^2 z + \text{sh}^2 z$

9. Tìm ảnh của miền D qua phép biến hình  $w = f(z)$

a.  $w = z^2$  và  $D = \{-\pi/2 < \text{Im}z < \pi/2\}$                       b.  $w = 2 + e^z$  và  $D = \{-\pi < \text{Re}z < \pi\}$   
 c.  $w = \cos z$  và  $D = \{-\pi/2 < \text{Im}z < \pi/2\}$                       d.  $w = \text{sh} z$  và  $D = \{-\pi/2 < \text{Re}z < \pi/2\}$

10. Cho phép biến hình  $w = (1 + i)z - 1$

- a. Tìm ảnh của đoạn thẳng nối hai điểm  $z_1 = i$  và  $z_2 = -i$   
 b. Tìm ảnh của đường tròn  $|z - (1 + i)| = 2$   
 c. Tìm ảnh của tam giác có đỉnh  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 1 + i$  và  $z_2 = 1 - i$

11. Tìm ảnh của các đường cong sau đây qua các phép biến hình  $w = \frac{1}{z}$

a.  $x^2 + y^2 = 4$                       b.  $x = 1$                       c.  $y = x$                       d.  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$



12. Tìm phép biến hình phân tuyến tính

- a. Biến tam giác có các đỉnh  $0, 1, i$  thành tam giác đồng dạng có các đỉnh  $0, 2, 1+i$
- b. Biến các điểm  $-1, +\infty, i$  tương ứng thành các điểm  $i, 1, 1+i$
- c. Biến điểm  $i$  thành  $-i$  và có điểm bất động là  $1+2i$
- d. Biến hình tròn  $|z| < 1$  thành nửa mặt phẳng  $\text{Re} w > 0$  sao cho  $w(0) = 1, w'(1) = \pi/2$
- e. Biến hình tròn  $|z| < 1$  thành hình tròn  $|w-1| < 1$  sao cho  $w(0) = 1/2, w(1) = 0$

13. Tìm phép biến hình biến các miền sau đây thành nửa mặt phẳng trên  $\text{Im} w > 0$

- a.  $\text{Im} z > 0, |z| < 2$
- b.  $\text{Im} z > 0, |z| < 2$
- d.  $|z| < 2, 0 < \arg z < \pi/3$
- e.  $|z| > 2, 0 < \arg z < \pi/4$
- f.  $|z| < 1, |z-i| < 1$
- g.  $|z| > 1, |z-i| < 1$
- h.  $|z| > 2, |z-3| > 1$
- i.  $1 < \text{Re} z < 2$
- j.  $\text{Re} z > 0, 0 < \text{Im} z < 2$
- k.  $|z| < 1, 0 < \arg z < 2\pi$
- l. Mỗi trong bốn miền giới hạn bởi các đường tròn  $|z|=1$  và  $|z+1|=1$
- m.  $(z) - [-1, 1]$
- n.  $(z) - (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$
- o.  $(z) - [1+i, 2+2i]$
- p.  $(z) - \{y=x, x \geq 0\}$
- q.  $\{|z| > 1\} - [i, +i\infty)$
- r.  $\{|z| < 1\} - [1/2, 1]$

## Tích Phân Phức

### Đ1. Tích phân phức

- Cho miền  $D \subset \mathbb{V}$ , hàm phức

$$f : D \rightarrow \mathbb{V}, z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

và tham số cung trơn từng khúc

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D, t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

Tích phân

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)] \gamma'(t) dt \quad (3.1.1)$$

gọi là *tích phân của hàm phức  $f(z)$  dọc theo tham số cung  $\gamma$* .

Giả sử  $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow D, s \mapsto \gamma_1(s)$

là tham số cung cùng hướng với  $\gamma$ . Tức là có phép đổi tham số bảo toàn hướng

$$\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto [\alpha_1, \beta_1] \text{ với } \varphi'(t) > 0 \text{ và } \gamma_1(s) = \gamma \circ \varphi(t)$$

Khi đó ta có

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)] \gamma'(t) dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f[\gamma_1(s)] \gamma_1'(s) ds$$

Suy ra tích phân của hàm phức không phụ thuộc vào lớp các tham số cung cùng hướng.

Kí hiệu  $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$  là đường cong định hướng. Tích phân

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \quad (3.1.2)$$

gọi là *tích phân của hàm phức  $f(z)$  trên đường cong  $\Gamma$* . Nếu tích phân (3.1.1) tồn tại hữu hạn thì hàm  $f$  gọi là *khả tích* trên đường cong  $\Gamma$ .

**Định lý** Hàm phức  $f$  liên tục trên đường cong  $\Gamma$  trơn từng khúc thì khả tích.

**Chứng minh**

Giả sử  $f : D \rightarrow \mathbb{V}$  liên tục và  $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$  với  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  là tham số cung trơn từng khúc. Khi đó hàm  $f \circ \gamma(t) \gamma'(t)$  liên tục từng khúc nên khả tích trên đoạn  $[\alpha, \beta]$ .  $\blacktriangleright$

- Để tính tích phân phức, thay

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \text{ và } f \circ \gamma(t) = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)] = u(t) + iv(t)$$

vào công thức (3.1.1) rồi tách phần thực, phần ảo suy ra công thức sau đây.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} [u(t)x'(t) - v(t)y'(t)]dt + i \int_{\alpha}^{\beta} [u(t)y'(t) + v(t)x'(t)]dt \quad (3.1.3)$$

**Ví dụ**

1. Tính tích phân  $I = \int_{\Gamma} z \operatorname{Re} z dz$  với  $\Gamma$  là đoạn thẳng  $[1, 2i]$

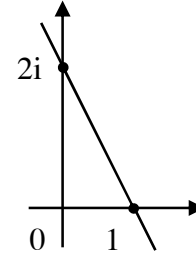
Tham số hoá đoạn thẳng  $[1, 2i]$

$$x = t, y = -2t + 2 \text{ với } t \in [1, 0]$$

Suy ra

$$\gamma'(t) = 1 - 2i, \operatorname{fo}\gamma(t) = t^2 + i(-2t^2 + 2t)$$

$$I = \int_1^0 [t^2 + i(-2t^2 + 2t)](1 - 2i)dt = \int_0^1 (3t^2 - 4t)dt + i \int_0^1 (4t^2 - 2t)dt = \frac{-3+i}{3}$$



2. Tính tích phân  $I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = R$  định hướng dương

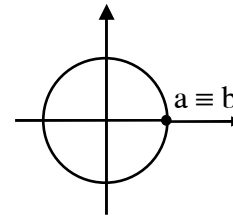
Tham số hoá đường tròn  $\Gamma = (a)$

$$\gamma(t) = R e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

Suy ra

$$\gamma'(t) = iR e^{it}, \operatorname{fo}\gamma(t) = R^{-n} e^{-int}$$

$$I = iR^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$



**Đ2. Các tính chất của tích phân phức**

• Trong mục này để đơn giản chúng ta xem các hàm  $f, g, \dots$  là liên tục trên miền  $D$ , còn  $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$  với  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$  là đường cong định hướng, trơn từng khúc và nằm gọn trong miền  $D$ . Tích phân của hàm phức có các tính chất sau đây.

**1. Tuyến tính** Nếu các hàm  $f$  và  $g$  khả tích trên đường cong  $\Gamma$  thì với mọi số phức  $\lambda$  hàm  $\lambda f + g$  khả tích trên đường cong  $\Gamma$ .

$$\int_{\Gamma} [\lambda f(z) + g(z)]dz = \lambda \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{\Gamma} g(z)dz \quad (3.2.1)$$

**Chứng minh**

Từ giả thiết suy ra hàm  $[\lambda f\gamma(t) + g\gamma(t)]\gamma'(t)$  khả tích trên  $[\alpha, \beta]$

$$\int_{\Gamma} [\lambda f(z) + g(z)]dz = \int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f\gamma(t) + g\gamma(t)]\gamma'(t)dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} g \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt = \lambda \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma} g(z) dz \quad \blacktriangleright$$

**2. Định hướng** Nếu hàm  $f$  khả tích trên đường cong  $\Gamma^+ = (ab)$  thì hàm  $f$  cũng khả tích trên đường cong  $\Gamma^- = (ba)$ .

$$\int_{ba} f(z) dz = - \int_{ab} f(z) dz \quad (3.2.2)$$

Chứng minh

Tham số hoá

$$\Gamma^+ = \gamma([\alpha, \beta]) \text{ với } \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D, \gamma(t) = \gamma(-t + \alpha + \beta)$$

Từ giả thiết suy ra hàm  $f \circ \gamma(t) \gamma'(t)$  khả tích trên  $[\alpha, \beta]$ .

$$\int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(-t + \alpha + \beta) \gamma'(-t + \alpha + \beta) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(s) \gamma'(s) ds \quad \blacktriangleright$$

**3. Hệ thức Chasles** Nếu hàm  $f$  khả tích trên đường cong  $\Gamma = (ab)$  thì với mọi  $c \in \Gamma$  hàm  $f$  khả tích trên các đường cong  $\Gamma_1 = (ac)$  và  $\Gamma_2 = (cb)$ .

$$\int_{ac} f(z) dz + \int_{cb} f(z) dz = \int_{ab} f(z) dz \quad (3.2.3)$$

Chứng minh

Giả sử  $c = \gamma(\varepsilon)$  với  $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$ . Tham số hoá

$$\Gamma_1 = \gamma_1([\alpha, \varepsilon]) \text{ với } \gamma_1 : [\alpha, \varepsilon] \rightarrow D, \gamma_1(t) = \gamma(t)$$

$$\Gamma_2 = \gamma_2([\varepsilon, \beta]) \text{ với } \gamma_2 : [\varepsilon, \beta] \rightarrow D, \gamma_2(t) = \gamma(t)$$

Từ giả thiết suy ra hàm  $f \circ \gamma_1(t) \gamma_1'(t)$  khả tích trên  $[\alpha, \varepsilon]$  và  $f \circ \gamma_2(t) \gamma_2'(t)$  khả tích trên  $[\varepsilon, \beta]$ .

$$\int_{\alpha}^{\varepsilon} f \circ \gamma_1(t) \gamma_1'(t) dt + \int_{\varepsilon}^{\beta} f \circ \gamma_2(t) \gamma_2'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt \quad \blacktriangleright$$

**4. Ước lượng tích phân** Kí hiệu  $s(\Gamma)$  là độ dài của đường cong  $\Gamma$ . Nếu hàm  $f$  khả tích trên đường cong  $\Gamma$  thì hàm  $|f(z)|$  khả tích trên đường cong  $\Gamma$ .

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds \leq \sup_{\Gamma} |f(z)| s(\Gamma) \quad (3.2.4)$$

Chứng minh

Từ giả thiết suy ra hàm  $f \circ \gamma(t) \gamma'(t)$  khả tích trên  $[\alpha, \beta]$ . Kết hợp công thức (3.1.3) với công thức tích phân đường loại 1 suy ra

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f \circ \gamma(t)| |\gamma'(t)| dt = \int_{\Gamma} |f(z)| ds \quad \blacktriangleright$$

**5. Liên hệ tích phân đường** Nếu hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  khả tích trên đường cong  $\Gamma$  thì các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  khả tích trên đường cong  $\Gamma$ .

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy \quad (3.2.5)$$

**Chứng minh**

Từ giả thiết suy ra các hàm  $u(t)$  và  $v(t)$  khả tích trên  $[\alpha, \beta]$ . Kết hợp công thức (3.1.3) với công thức tích phân đường loại 2 suy ra công thức (3.2.5) ▶▶

**Công thức Newton-Leibniz**

Hàm giải tích  $F(z)$  gọi là *nguyên hàm* của hàm  $f(z)$  trên miền  $D$  nếu  $\forall z \in D, F'(z) = f(z)$ . Cho hàm  $f(z)$  có nguyên hàm là  $F(z)$  và  $\Gamma = (ab)$ . Khi đó ta có

$$\int_{ab} f(z)dz = F(b) - F(a) \quad (3.2.6)$$

**Chứng minh**

Từ giả thiết suy ra hàm  $F \circ \gamma(t)$  là nguyên hàm của  $f \circ \gamma(t)$  trên  $[\alpha, \beta]$ . Kết hợp công thức (3.1.1) và công thức Newton - Leibniz của tích phân xác định.

$$\int_{ab} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt = F \circ \gamma(\beta) - F \circ \gamma(\alpha) \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**Ví dụ** Tính tích phân  $I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = R$  định hướng dương

Ta có  $\Gamma = (ab)$  với  $a = Re^{i0}, b = Re^{i2\pi}$

Với  $n \neq 1$  hàm  $f(z) = \frac{1}{z^n}$  có nguyên hàm  $F(z) = \frac{1}{1-n} z^{1-n}$  suy ra  $I = F(b) - F(a) = 0$

Với  $n = 1$  hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$  có nguyên hàm  $F(z) = \text{Ln}z$ . Tuy nhiên hàm logarit chỉ xác định đơn trị trên  $\forall - (-\infty, 0]$ . Vì vậy  $I = \text{Ln}_1(e^{i2\pi}) - \text{Ln}_0(e^{i0}) = 2\pi i$

### Đ3. Định lý Cauchy

**Định lý** Cho hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$  đơn liên và đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương và nằm gọn trong miền  $D$ . Khi đó ta có

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0 \quad (3.3.1)$$

**Chứng minh**

Kí hiệu  $D_{\Gamma} \subset D$  là miền đơn liên có biên định hướng dương là đường cong  $\Gamma$ . Để đơn giản ta xem hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  với các hàm  $u$  và  $v$  có đạo hàm liên tục trên  $D$ .

áp dụng công thức (3.2.5), công thức Green và điều kiện Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z)dz &= \oint_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\Gamma} (v dx + u dy) \\ &= \iint_{D_{\Gamma}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy + i \iint_{D_{\Gamma}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**Chú ý** Hàm  $f$  giải tích không đủ để các hàm  $u$  và  $v$  có đạo hàm riêng liên tục. Do đó việc chứng minh định lý Cauchy thực ra phức tạp hơn rất nhiều. Bạn đọc quan tâm đến phép chứng minh đầy đủ có thể tìm đọc ở các tài liệu tham khảo.

**Hệ quả 1** Cho miền  $D$  đơn liên có biên định hướng dương là đường cong đơn, kín, trơn từng khúc và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ .

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0 \tag{3.3.2}$$

**Chứng minh**

Theo định nghĩa tích phân, ta có thể xem tích phân trên  $\partial D$  như là giới hạn của tích phân trên đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương, nằm gọn trong miền  $D$  và dần đến  $\partial D$ . \blacktriangleright\blacktriangleright

**Hệ quả 2** Cho miền  $D$  đa liên có biên định hướng dương gồm hữu hạn đường cong đơn, kín, trơn từng khúc và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ .

$$\oint_{\partial D} f(z)dz \tag{3.3.3}$$

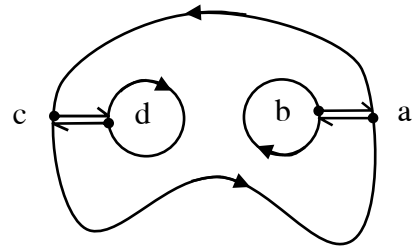
**Chứng minh**

Giả sử miền  $D$  đa liên và chúng ta cắt miền  $D$  bằng các cung  $(ab)$  và  $(cd)$  nhận được miền đơn liên  $D_1$  như hình bên. Ta có

$$\partial D_1 = \partial D + (ab) + (ba) + (cd) + (dc)$$

Kết hợp hệ quả 2 và tính định hướng, tính cộng tính của tích phân

$$0 = \oint_{\partial D_1} f(z)dz = \oint_{\partial D} f(z)dz + \int_{ab} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz + \int_{cd} f(z)dz + \int_{dc} f(z)dz = \oint_{\partial D} f(z)dz \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$



**Hệ quả 3** Cho miền  $D$  đa liên có biên định hướng dương gồm hữu hạn đường cong đơn, kín, trơn từng khúc  $\partial D = L_0^+ + L_1^- + \dots + L_n^-$  và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ .

$$\oint_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z)dz \tag{3.3.4}$$

**Chứng minh**

Suy ra từ công thức (3.3.3) và tính định hướng, tính cộng tính của tích phân. \blacktriangleright\blacktriangleright

**Hệ quả 4** Cho hàm  $f$  giải tích trong miền  $D$  đơn liên. Khi đó tích phân

$$\int_{az} f(\zeta) d\zeta \quad \text{với } a, z \in D \quad (3.3.5)$$

không phụ thuộc đường cong đơn, trơn từng khúc, nối  $a$  với  $z$  và nằm gọn trong miền  $D$ .

Chứng minh

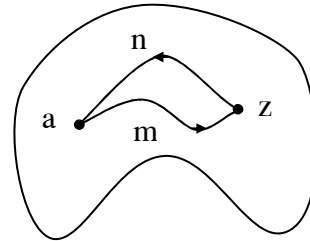
Giả sử  $(amb)$  và  $(anb)$  là hai đường cong đơn, trơn từng khúc, nối  $a$  với  $b$  và nằm gọn trong  $D$ . Khi đó  $(amzna)$  là đường cong đơn, trơn từng khúc, kín và nằm gọn trong  $D$ .

Từ công thức (3.3.1) và tính cộng tính

$$0 = \oint_{amzna} f(\zeta) d\zeta = \int_{amz} f(\zeta) d\zeta + \int_{zna} f(\zeta) d\zeta$$

Chuyển vế và sử dụng tính định hướng suy ra

$$\int_{amz} f(\zeta) d\zeta = \int_{anz} f(\zeta) d\zeta$$



»»

**Hệ quả 5** Cho hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$  đơn liên và  $a \in D$ . Khi đó hàm

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta \quad \text{với } z \in D \quad (3.3.6)$$

là nguyên hàm của hàm  $f$  trong miền  $D$  và  $F(a) = 0$ .

Chứng minh

Theo công thức (3.3.5) hàm  $F$  xác định đơn trị trên miền  $D$  và  $F(a) = 0$ .

Ngoài ra với mọi  $(z, h) \in D \times \mathbb{R}$  sao cho  $[z, z+h] \subset D$

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \sup\{|f(\zeta) - f(z)| : \zeta \in [z, z+h]\}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Suy ra hàm  $F$  giải tích trong  $D$  và  $F'(z) = f(z)$ .

»»

#### Đ4. Công thức tích phân Cauchy

**Bổ đề** Cho đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương và  $D = D_\Gamma$ .

Khi đó ta có

$$\forall a \in \mathbb{C} - \Gamma, \quad \text{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 1 & a \in D \\ 0 & a \notin D \end{cases} \quad (3.4.1)$$

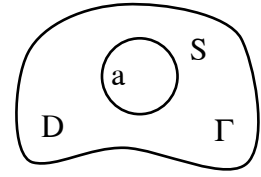
Hàm  $\text{Ind}_\Gamma(a)$  gọi là *chỉ số của điểm  $a$  đối với đường cong  $\Gamma$* .

Chứng minh

Với  $a \notin \bar{D}$ , hàm  $f(z) = \frac{1}{z-a}$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ . Theo công thức (3.3.2)

tích phân của hàm  $f$  trên đường cong kín  $\Gamma$  bằng không.

Với  $a \in D$ , kí hiệu  $B = B(a, \delta) \subset D$ ,  $S = \partial B^+$  là đường tròn tâm  $a$ , bán kính  $\delta$ , định hướng dương và  $D_1 = D - B$ . Hàm  $f(z)$  liên tục trên  $\bar{D}_1$ , giải tích trong  $D_1$  theo công thức (3.3.4) và các ví dụ trong Đ1.



$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \oint_S \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**Định lý** Cho hàm  $f$  giải tích trong miền  $D$  và đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương sao cho  $D_{\Gamma} \subset D$ . Khi đó ta có

$$\forall a \in D - \Gamma, \text{Ind}_{\Gamma}(a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (3.4.2)$$

Công thức (3.4.2) gọi là công thức tích phân Cauchy.

Chứng minh

Từ giả thiết suy ra hàm  $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$  giải tích trong miền  $D$ .

Sử dụng công thức (3.3.1) ta có

$$0 = \oint_{\Gamma} g(z) dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - \oint_{\Gamma} \frac{f(a)}{z-a} dz$$

Kết hợp với công thức (3.4.1) suy ra công thức (3.4.2) ▶▶

**Hệ quả 1** Cho miền  $D$  có biên định hướng dương gồm hữu hạn đường cong đơn, kín, trơn từng khúc và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ .

$$\forall z \in D, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.4.3)$$

Chứng minh

Nếu  $D$  là miền đơn liên thì biên  $\partial D$  là đường cong  $\Gamma$  định hướng dương, đơn, kín và trơn từng khúc. Lập luận tương tự như trong chứng minh định lý và sử dụng công thức (3.3.2) thay cho công thức (3.3.1)

Nếu  $D$  là miền đa liên biến đổi miền  $D$  thành miền  $D_1$  đơn liên như trong hệ quả 2, Đ3. Sau đó sử dụng kết quả đã biết cho miền đơn liên, tính cộng tính và tính định hướng của tích phân. ▶▶

**Nhận xét** Theo các kết quả trên thì giá trị của hàm giải tích trong miền  $D$  được xác định bằng các giá trị của nó trên biên  $\partial D$ .



**Hệ quả 2** Cho đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương và hàm  $f$  liên tục trên  $\overline{D}_\Gamma$ , giải tích trong  $D_\Gamma$ .

$$\forall a \in D_\Gamma, \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \quad (3.4.4)$$

Chứng minh

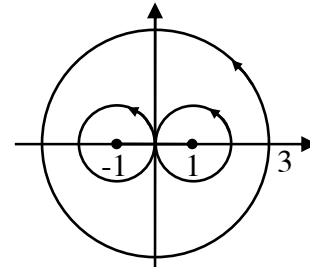
Suy ra từ công thức (3.4.3) ▶▶

Ví dụ Tính tích phân  $I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 1}$  với  $\Gamma$  là đường tròn định

hướng dương  $|z| = 3$ .

Theo công thức (3.3.4)

$$I = \oint_{|z+1|=1} \frac{z-1}{z+1} dz + \oint_{|z-1|=1} \frac{z+1}{z-1} dz = I_1 + I_2$$



Hàm  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  thỏa mãn công thức (3.4.4) trong đường tròn  $|z+1| = 1$  suy ra

$$I_1 = 2\pi i f(-1) = -\pi i$$

Hàm  $g(z) = \frac{1}{z+1}$  thỏa mãn công thức (3.4.4) trong đường tròn  $|z-1| = 1$  suy ra

$$I_2 = 2\pi i g(1) = \pi i$$

Vậy  $I = -\pi i + \pi i = 0$

### Đ5. Tích phân Cauchy

• Cho đường cong định hướng  $\Gamma$  đơn, trơn từng khúc và hàm  $f$  liên tục trên  $\Gamma$ .

Tích phân

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{với } z \in D = \forall - \Gamma \quad (3.5.1)$$

gọi là *tích phân Cauchy dọc theo đường cong  $\Gamma$* .

**Định lý** Hàm  $F(z)$  là giải tích và có đạo hàm mọi cấp trên miền  $D$ . Khi đó ta có

$$\forall (n, z) \in \mathbb{Z} \times D, F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (3.5.2)$$

Chứng minh

Do hàm  $f$  liên tục trên  $\Gamma$  và  $z \notin \Gamma$  nên hàm  $F$  xác định đơn trị trên miền  $D$ .

Với mọi  $a \in D$  tùy ý

$$\frac{F(z) - F(a)}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - z)} d\zeta \xrightarrow{z \rightarrow a} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta$$

Suy ra hàm  $F$  có đạo hàm cấp một trong miền  $D$  tính theo công thức (3.5.2) và do đó giải tích trong miền  $D$ .

Giả sử hàm  $F$  có đạo hàm đến cấp  $n - 1$  trong miền  $D$

Với mọi  $a \in D$  tùy ý

$$\begin{aligned} \frac{F^{(n-1)}(z) - F^{(n-1)}(a)}{z - a} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (\zeta - a)^k (\zeta - z)^{n-1-k}}{(\zeta - a)^n (\zeta - z)^n} d\zeta \\ &\xrightarrow{z \rightarrow a} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Suy ra hàm  $F$  có đạo hàm cấp  $n$  trong miền  $D$  tính theo công thức (3.5.2) ▶▶

**Hệ quả 1** Cho miền  $D$  có biên định hướng dương gồm hữu hạn đường cong đơn, kín và trơn từng khúc. Nếu hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$  thì có đạo hàm mọi cấp trong miền  $D$ .

$$\forall (n, z) \in \mathbb{Z} \times D, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (3.5.3)$$

Chứng minh

Nếu  $D$  là miền đơn liên thì biên  $\partial D$  là đường cong  $\Gamma$  định hướng dương, đơn, kín và trơn từng khúc. Theo công thức (3.4.3) ta có

$$\forall z \in D, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv F(z)$$

Kết hợp với công thức (3.5.2) suy ra công thức (3.5.3)

Nếu  $D$  là miền đa liên biến đổi miền  $D$  thành miền  $D_1$  đơn liên như trong hệ quả 2, Đ3. Sau đó sử dụng kết quả đã biết cho miền đơn liên, tính cộng tính và tính định hướng của tích phân. ▶▶

**Hệ quả 2** Cho đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}_{\Gamma}$ , giải tích trong  $D_{\Gamma}$ .

$$\forall a \in D_{\Gamma}, \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{(n+1)}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \quad (3.5.4)$$

Chứng minh

Suy ra từ công thức (3.5.3) ▶▶

**Ví dụ** Tính tích phân  $I = \oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z + 1)^3}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  định hướng dương

Hàm  $f(z) = e^z$  liên tục trên hình tròn  $|z| \leq 2$ , giải tích trong hình tròn  $|z| < 2$ . Thỏa mãn công thức (3.5.4) suy ra

$$I = \frac{2\pi i}{2!} f''(-1) = \pi i e^{-1}$$

**Hệ quả 3 (Định lý Morera)** Cho hàm  $f$  liên tục trên miền  $D$  và với mọi tam giác  $\Delta \subset D$

$$\oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0 \tag{3.5.5}$$

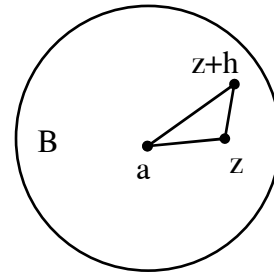
Khi đó hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$ .

Chứng minh

Với  $a \in D$  tùy ý, kí hiệu  $B = B(a, \delta) \subset D$ . Vì hàm  $f$  liên tục trên  $B$  nên khả tích trên mọi đoạn thẳng  $[a, z]$  với  $z \in B$ .

Do đó hàm

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta \quad \text{với } z \in B$$



xác định đơn trị trong hình tròn  $B$  và  $F(a) = 0$ .

Ngoài ra với mọi  $(z, h) \in D \times \mathbb{C}$  sao cho  $[z, z+h] \subset B$

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \sup\{|f(\zeta) - f(z)| : \zeta \in [z, z+h]\}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Suy ra hàm  $F$  giải tích trong  $B$  và  $F'(z) = f(z)$ .

Từ định lý trên suy ra hàm  $f$  có đạo hàm trong  $B$  và do đó giải tích trong  $B$ . ▶▶

### Đ6. Định lý trị trung bình

**Định lý (Về trị trung bình)** Cho hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$ . Khi đó ta có

$$\forall n \in \mathbb{Z}, R > 0 : B(a, R) \subset D, \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) e^{-int} dt \tag{3.6.1}$$

Chứng minh

Tham số hoá đường tròn  $S = \partial B^+(a, R)$

$$\gamma(t) = a + Re^{it}, \quad dz = iRe^{it} dt \quad \text{với } t \in [0, 2\pi]$$

Áp dụng công thức (3.5.4)

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_S \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) e^{-int} dt \quad \text{▶▶}$$

**Hệ quả 1** (Bất đẳng thức Cauchy) Cho hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$ .

$$\forall n \in \mathbb{Z}, R > 0 : B(a, R) \subset D, |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n} \text{ với } M = \sup_{\partial B} |f(z)| \quad (3.6.2)$$

Chứng minh

Suy ra từ ước lượng tích phân (3.6.1)

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + Re^{it})e^{-int}| dt \leq \frac{n!M}{R^n} \quad \blacktriangleright$$

**Hệ quả 2** (Định lý Liouville) Hàm giải tích và bị chặn trên tập số phức là hàm hằng.

Chứng minh

Giả sử hàm  $f$  giải tích và bị chặn trên tập  $\mathbb{C}$ . Khi đó

$$\forall (a, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+, B(a, R) \subset \mathbb{C}$$

Theo công thức (3.6.2) với  $n = 1$

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \text{ với } M = \sup_{\mathbb{C}} |f(z)|$$

Suy ra  $\forall a \in \mathbb{C}, f'(a) = 0$ . Vậy hàm  $f$  là hàm hằng.  $\blacktriangleright$

**Hệ quả 3** (Định lý D'Alembert - Gauss) Mọi đa thức hệ số phức bậc  $n$  có đúng  $n$  không điểm phức trong đó không điểm bội  $k$  tính là  $k$  không điểm.

Chứng minh

Giả sử  $P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + z^n$  và  $\forall z \in \mathbb{C}, P_n(z) \neq 0$

Ta có

$$|P_n(z)| = |z|^n \left| 1 + \left( \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| \geq |z|^n \left| 1 - \left( \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \right) \right|$$

Suy ra

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq r = \max_{k=0, \dots, n-1} \left( (n+1) |a_k|^{1/k} \right) \Rightarrow |P_n(z)| \geq \frac{r^n}{n+1}$$

Kí hiệu

$$m_r = \min\{|P_n(z)| : |z| \leq r\}, m = \min\{m_r, \frac{r^n}{n+1}\} \text{ và } g(z) = \frac{1}{P_n(z)}, z \in \mathbb{C}$$

Khi đó

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P_n(z)| \geq m \text{ hay } |g(z)| = \frac{1}{|P_n(z)|} \leq \frac{1}{m}$$

Như vậy hàm  $g(z)$  là giải tích và bị chặn trên  $\mathbb{C}$ , theo định lý Liouville nó là hàm hằng. Suy ra hàm  $P_n(z)$  là hàm hằng! Điều này là mâu thuẫn.

Vậy  $\exists z_1 \in \mathbb{C}$  sao cho  $P_n(z_1) = 0$ .

Phân tích  $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$  với  $\deg P_{n-1} = n - 1$ .

Lập luận tương tự phân tích  $P_{n-1}(z)$  và tiếp tục phân tích cho đến khi

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad \blacktriangleright$$

**Hệ quả 4** (Nguyên lý module cực đại) Cho miền  $D$  giới nội và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ . Khi đó hoặc hàm  $f(z)$  là hàm hằng hoặc hàm  $|f(z)|$  chỉ đạt giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất trên  $\partial D$ .

Chứng minh

• Giả sử hàm  $f(z)$  không phải là hàm hằng. Do hàm  $|f(z)|$  liên tục trên miền  $\bar{D}$  đóng và giới nội nên đạt giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất trên miền  $\bar{D}$ . Chúng ta xét trường hợp hàm đạt giá trị lớn nhất. Tức là

$$\exists a \in \bar{D} \text{ sao cho } |f(a)| = \text{Max}_D |f(z)|$$

Nếu  $a \in D_0$  thì  $a$  là điểm cực đại địa phương và khi đó  $\exists B(a, R) \subset D$  sao cho

$$\forall t \in [0, 2\pi], |f(a)| > |f(a + Re^{it})|$$

Ước lượng công thức (3.6.1) với  $n = 0$

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + Re^{it})| dt < |f(a)|$$

Điều này là mâu thuẫn. Vậy  $a \in \partial D$ .

• Lập luận tương tự cho trường hợp hàm đạt giá trị bé nhất. ▶▶

### Đ7. Hàm điều hoà

• Hàm thực  $u(x, y)$  liên tục trên  $\bar{D}$ , thuộc lớp  $C^2$  trong  $D$  gọi là *hàm điều hoà* trong nếu nó thoả mãn phương trình Laplace. Tức là

$$\forall (x, y) \in D, \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.7.1}$$

**Định lý** Phần thực, phần ảo của hàm giải tích là hàm điều hoà.

Chứng minh

Cho hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích trên miền  $D$ . Khi đó hàm  $f(z)$  có đạo hàm mọi cấp suy ra các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  có các đạo hàm riêng liên tục và thoả mãn điều kiện Cauchy - Riemann

$$u'_x = v'_y \text{ và } u'_y = -v'_x$$

Suy ra

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0 \text{ và } \Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = -u''_{yx} + u''_{xy} = 0 \quad \text{▶▶}$$

• Sau này chúng ta gọi cặp hàm điều hoà và thoả mãn điều kiện Cauchy - Riemann là cặp hàm điều hoà liên hợp.

**Định lý** Cho hàm thực  $u(x, y)$  điều hoà trong miền  $D$  đơn liên. Khi đó có hàm phức  $f(z)$

giải tích trong miền D sao cho  $u = \text{Ref}$  hoặc  $u = \text{Imf}$ .

Chứng minh

- Do hàm  $u$  điều hoà trong miền D đơn liên nên dạng vi phân

$$\omega = -u'_y dx + u'_x dy$$

là dạng vi phân đúng. Suy ra tích phân của nó không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Cố định  $a \in D$  với mọi  $z \in D$ , hàm

$$v(x, y) = \int_a^z -u'_y dx + u'_x dy \tag{3.7.2}$$

thuộc lớp  $C^2$  trong miền D và thoả mãn điều kiện Cauchy - Riemann

$$v'_x = -u'_y \text{ và } v'_y = u'_x$$

Suy ra hàm phức  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  là giải tích trong miền D và  $u = \text{Ref}$ .

- Lập luận tương tự để tìm hàm  $f(z)$  sao cho  $u = \text{Imf}$ . ▶▶

Ví dụ Cho hàm  $u = x^2 - y^2$  tìm hàm  $w = f(z)$  giải tích sao cho  $u = \text{Ref}$

Kiểm tra trực tiếp hàm  $u$  là hàm điều hoà

$$u'_x = 2x = v'_y, \quad u'_y = -2y = -v'_x \text{ và } \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

Tìm hàm  $v$  điều hoà liên hợp với hàm  $u$

$$v(x, y) = \int v'_x dx = \int 2y dx = 2xy + \varphi(y)$$

Đạo hàm theo biến  $y$

$$v'_y = 2x + \varphi'(y) \equiv 2x \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

Suy ra hàm phức

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C)$$

là hàm giải tích cần tìm.

**Hệ quả 1** Hàm điều hoà có đạo hàm riêng mọi cấp và các đạo hàm riêng của nó cũng là hàm điều hoà.

Chứng minh

Theo các định lý ở trên  $u = \text{Ref}$  với  $f$  là hàm giải tích. Khi đó đạo hàm các cấp của hàm  $f$  cũng là hàm giải tích và có phần thực, phần ảo là các đạo hàm riêng của hàm  $u$ . ▶▶

**Hệ quả 2** Hàm điều hoà đạt trị trung bình tại tâm của hình tròn nằm gọn trong miền D.

$$\forall R > 0 : B(a, R) \subset D, \quad u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it}) dt \tag{3.7.3}$$

Chứng minh

Tương tự như trên  $u = \text{Ref}$  với  $f$  là hàm giải tích. Theo công thức (3.6.1) với  $n = 0$

$$u(a) = \text{Ref}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re } f(a + Re^{it}) dt \span style="float: right;">▶▶$$

**Hệ quả 3** Hàm  $u$  điều hoà đạt trị lớn nhất, trị bé nhất trên  $\partial D$ .

Chứng minh

Sử dụng công thức (3.7.3) và lập luận tương tự như chứng minh nguyên lý cực đại. ►►

**Hệ quả 4** Hàm điều hoà và bị chặn trên toàn tập số phức là hàm hằng.

Chứng minh

Tương tự như trên  $u = \operatorname{Re} f$  với  $f$  là hàm giải tích. Từ giả thiết hàm  $u$  bị chặn và công thức (3.7.4) dưới đây suy ra hàm  $f$  bị chặn. Theo định lý Liouville suy ra hàm  $f$  là hàm hằng. Suy ra hàm  $u$  là hàm hằng. ►►

**Công thức Schwartz** Cho  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích trên miền  $D$  và  $B(0, R) \subset D$ .

$$\forall a \in B(0, R), f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\operatorname{Re}^{it}) \frac{\operatorname{Re}^{it} + a}{\operatorname{Re}^{it} - a} dt + iv(0) \quad (3.7.4)$$

Chứng minh

Với mọi  $a \in B(0, R)$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) \frac{\operatorname{Re}^{it}}{\operatorname{Re}^{it} - a} dt \quad \text{và} \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) dt$$

Do  $a \in B(0, R)$  nên  $a_1 = \frac{R^2}{\bar{a}} \notin B(0, R)$  suy ra

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(z)}{z - a_1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) \frac{\bar{a}e^{it}}{\bar{a}e^{it} - R} dt$$

Biến đổi

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) \frac{\bar{a}e^{it}}{\bar{a}e^{it} - R} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) \frac{-R}{\bar{a}e^{it} - R} dt$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) \frac{\bar{a}e^{it} + R}{\bar{a}e^{it} - R} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) \frac{-R}{\bar{a}e^{it} - R} dt$$

Suy ra

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re}^{it}) \frac{\operatorname{Re}^{-it} + \bar{a}}{\operatorname{Re}^{-it} - \bar{a}} dt \quad \text{và} \quad \overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(\operatorname{Re}^{it})} \frac{\operatorname{Re}^{it} + a}{\operatorname{Re}^{it} - a} dt$$

$$f(a) - iv(0) = f(a) - \frac{1}{2} [f(0) - \overline{f(0)}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\operatorname{Re}^{it}) \frac{\operatorname{Re}^{it} + a}{\operatorname{Re}^{it} - a} dt \quad \text{►►}$$

• Hàm

$$S(a, t) = \frac{\operatorname{Re}^{it} + a}{\operatorname{Re}^{it} - a}$$

gọi là *hàm Schwartz*. Theo công thức (3.7.4) nếu biết giá trị trên biên của phần thực  $u$  và giá trị  $v(0)$  thì suy ra được giá trị của hàm  $f$  bên trong hình tròn  $B(0, R)$ .

Biến đổi

$$S(a, t) = \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{it} + a|^2} + i \frac{2R \operatorname{Im}(ae^{-it})}{|Re^{it} - a|^2}$$

Hàm

$$P(a, t) = \operatorname{Re} S(a, t) = \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{it} + a|^2}$$

gọi là *nhân Poisson*. Từ công thức (3.7.4) suy ra

$$u(a) = \operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - |a|^2}{|Re^{it} + a|^2} dt \quad (3.7.5)$$

gọi là *công thức Poisson*. Sau này chúng ta có thể dùng công thức (3.7.5) để tìm nghiệm của bài toán Dirichlet trong hình tròn.

### Bài tập chương 3

• Tham số hoá đường cong để tính các tích phân sau đây.

1.  $\int_{\Gamma} e^z dz$  với  $\Gamma$  là cung parabol  $y = x^3, 1 \leq x \leq 2$
2.  $\int_{\Gamma} \operatorname{tg} z dz$  với  $\Gamma$  là cung parabol  $x = y^2, 0 \leq y \leq 1$
3.  $\int_{\Gamma} z \operatorname{Im} z dz$  với  $\Gamma$  là đường gấp khúc nối các điểm  $1, i, -1$  và  $-i$
4.  $\int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz$  với  $\Gamma$  là cung tròn  $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi$
5.  $\oint_{\Gamma} \frac{z}{z-1} dz$  với  $\Gamma$  là đường ellipse  $x^2 + 4y^2 = 4$

• Sử dụng định lý Cauchy để tính các tích phân sau đây.

6.  $\int_{\Gamma} z \sin z dz$  với  $\Gamma$  là đường cong bất kì nối hai điểm  $0$  và  $\pi$
7.  $\int_{\Gamma} (z-1) \cos z dz$  với  $\Gamma$  là đường cong bất kì nối hai điểm  $\pi, \pi$
8.  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-1}$  với  $\Gamma$  là đường cong bất kì nối hai điểm  $-1$  và  $1+i$
9.  $\oint_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$  với  $\Gamma$  là biên định hướng của miền  $D = \{ |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0 \}$
10.  $\oint_{\Gamma} \frac{z}{|z|} dz$  với  $\Gamma$  là biên định hướng của miền  $D = \{ 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z \geq 0 \}$



11.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$  với  $\Gamma$  là đường cong kín không đi qua điểm  $\pm i$

• Sử dụng công thức tích phân Cauchy để tính các tích phân sau đây.

12.  $\oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z - 2i}$  với  $\Gamma$  là các đường tròn  $|z| = 1$  và  $|z| = 3$

13.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 4}$  với  $\Gamma$  là các đường tròn  $|z| = 1$ ,  $|z - 2i| = 1$  và  $|z + 2i| = 1$

14.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 2z}$  với  $\Gamma$  là các đường tròn  $|z| = 1$ ,  $|z - 2| = 1$  và  $|z| = 3$

15.  $\oint_{\Gamma} \frac{zshzdz}{z^2 + 1}$  với  $\Gamma$  là đường cong kín không đi qua điểm  $\pm i$

• Tính các tích phân sau đây.

16.  $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{z^2 - 1}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$

17.  $\oint_{\Gamma} \frac{\sin z dz}{z^2 - 2z}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 3$

18.  $\oint_{\Gamma} \frac{ze^z dz}{(z + i)^3}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z + i| = 1$

19.  $\oint_{\Gamma} \frac{shz dz}{(z - 1)^2(z + 3)}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z - 1| = 1$

20.  $\oint_{\Gamma} \frac{\ln(z + 3) dz}{(z^2 - 1)^3}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$

21.  $\oint_{\Gamma} \frac{z \sin z}{(z^2 + 1)^3} dz$  với  $\Gamma$  là đường ellipse  $4x^2 + y^2 - 2y = 0$

• Tìm hàm giải tích biết phần thực, phần ảo.

22.  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

23.  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$

24.  $u(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$

25.  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$

26.  $v(x, y) = 2xy + 3$

27.  $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$

28.  $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

29.  $v(x, y) = 3 + x^2 - y - \frac{y}{x(x^2 + y^2)}$

## CHUỖI HÀM PHỨC VÀ THẶNG DƯ

---

### Đ1. Chuỗi hàm phức

- Cho dãy hàm  $(u_n : D \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ . Tổng vô hạn

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \dots + u_n(z) + \dots \quad (4.1.1)$$

gọi là *chuỗi hàm phức*. Số phức  $a$  gọi là *điểm hội tụ* nếu chuỗi số phức  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$  hội tụ.

Tập các điểm hội tụ gọi là *miền hội tụ* và thường kí hiệu là  $D$ .

Trên miền hội tụ hàm  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$  gọi là *tổng*, hàm  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z)$  gọi là *tổng riêng* thứ  $n$  và hàm  $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$  gọi là *phần dư* thứ  $n$  của chuỗi hàm phức.

Chuỗi hàm phức gọi là *hội tụ đều* trên miền  $D$  đến hàm  $S(z)$ , kí hiệu  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \stackrel{D}{=} S(z)$  nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ sao cho } \forall z \in D, \forall n \geq N \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

**Tiêu chuẩn Weierstrass** Nếu có chuỗi số dương  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  hội tụ sao cho

$$\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times D, |u_n(z)| \leq a_n \quad (4.1.2)$$

thì chuỗi hàm phức hội tụ đều trên miền  $D$ .

- Sau này chúng ta xem các chuỗi hội tụ đều cũng thoả mãn tiêu chuẩn Weierstrass. Chuỗi hàm phức hội tụ đều có các tính chất sau đây.

**1. Tính liên tục** Nếu  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(z)$  liên tục trên miền  $D$  và  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \stackrel{D}{=} S(z)$  thì hàm

$S(z)$  cũng liên tục trên miền  $D$ .

**Chứng minh**

Với mọi  $a \in D$  và  $\varepsilon > 0$  bé tùy ý

Do tính hội tụ đều

$$\exists N > 0 : \forall n > N, \forall z \in D \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon / 3 \text{ và } |S(a) - S_n(a)| < \varepsilon / 3$$

Do tính liên tục

$$\exists \delta > 0 : \forall n \leq N, \forall z \in D, |z - a| \leq \delta \Rightarrow |u_n(z) - u_n(a)| < \varepsilon / 3N$$

Suy ra

$$\forall z \in D, |z - a| \leq \delta \Rightarrow$$

$$|S(z) - S(a)| \leq |S(z) - S_n(z)| + \sum_{k=0}^N |u_n(z) - u_n(a)| + |S(a) - S_n(a)| < \varepsilon$$

Vậy hàm  $S(z)$  liên tục trên miền  $D$ . ▶▶

**2. Tích phân từng từ** Nếu  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $u_n(z)$  liên tục trên đường cong  $\Gamma$  trơn từng khúc, nằm gọn trong miền  $D$  và  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \stackrel{D}{=} S(z)$  thì hàm  $S(z)$  cũng khả tích trên đường cong  $\Gamma$ .

$$\int_{\Gamma} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{\Gamma} u_n(z) dz \right) \quad (4.1.3)$$

Chứng minh

Theo tính chất 1. hàm  $S(z)$  liên tục và  $\Gamma$  trơn từng khúc nên khả tích trên  $\Gamma$ .

Kí hiệu  $s(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ . Do tính hội tụ đều

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n > N, \forall z \in \Gamma \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon / s(\Gamma)$$

Suy ra

$$\left| \int_{\Gamma} S(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_{\Gamma} u_k(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |S(z) - S_n(z)| dz < \varepsilon \quad \text{▶▶}$$

**3. Đạo hàm từng từ** Nếu  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $u_n(z)$  giải tích trong miền  $D$  và  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \stackrel{D}{=} S(z)$  thì hàm  $S(z)$  cũng giải tích trong miền  $D$ .

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(z) \stackrel{D}{=} S^{(k)}(z) \quad (4.1.4)$$

Chứng minh

Với mọi  $z \in D$ ,  $\exists B(z, R) \subset D$ . Kí hiệu  $\Gamma = \partial B^+$  và  $G = D - B(z, R/2)$  khi đó

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} \text{ giải tích trong } G \text{ và } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} \stackrel{G}{=} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}$$

Sử dụng công thức (3.4.3) và công thức (4.1.3)

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \oint_{\Gamma} \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Theo định lý về tích phân Cauchy hàm  $S(z)$  giải tích trong miền  $D$  và do đó có đạo hàm mọi cấp trên miền  $D$ . Kết hợp công thức (3.5.3) và công thức (4.1.3)

$$\forall k \in \mathbb{Z}, S^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(z) \quad \text{▶▶}$$

**4. Xác định trên biên** Nếu  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $u_n(z)$  liên tục trên miền  $\bar{D}$ , giải tích trong miền  $D$

$$\text{và } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = S(z) \text{ thì } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = S(z).$$

Chứng minh

Theo nguyên lý cực đại

$$\forall z \in D, \exists a \in \partial D : \left| S(z) - \sum_{k=0}^n u_k(z) \right| \leq \left| S(a) - \sum_{k=0}^n u_k(a) \right| < \varepsilon \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

## Đ2. Chuỗi lũy thừa phức

• Chuỗi hàm phức

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots \quad (4.2.1)$$

gọi là *chuỗi lũy thừa* tâm tại điểm  $a$ .

**Định lý Abel** Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ tại điểm  $z_0 \neq a$  thì nó hội tụ tuyệt đối và đều trong mọi hình tròn  $B(a, \rho)$  với  $\rho < |z_0 - a|$ .

Chứng minh

Do chuỗi số phức  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z_0 - a)^n$  hội tụ nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n (z_0 - a)^n = 0$ . Suy ra

$$\exists M > 0 \text{ sao cho } \forall n \in \mathbb{Z}, |c_n (z_0 - a)^n| \leq M$$

Với mọi  $z \in B(a, \rho)$  đặt  $q = |z - a| / |z_0 - a| < 1$  ta có

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in B(a, \rho), |c_n (z - a)^n| = |c_n (z_0 - a)^n| \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n \leq M q^n$$

Do chuỗi số dương  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$  hội tụ, theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối và đều.  $\blacktriangleright\blacktriangleright$

**Hệ quả 1** Nếu chuỗi lũy thừa phân kỳ tại  $z_1$  thì nó phân kỳ trên miền  $|z - a| > |z_1 - a|$

Chứng minh

Giả sử trái lại chuỗi lũy thừa hội tụ tại  $z : |z - a| > |z_1 - a|$ . Từ định lý suy ra chuỗi lũy thừa hội tụ tại  $z_1$ . Mâu thuẫn với giả thiết.  $\blacktriangleright\blacktriangleright$

**Hệ quả 2** Tồn tại số  $R \geq 0$  sao cho chuỗi lũy thừa hội tụ trong đường tròn  $|z - a| = R$  và

phân kỳ ngoài đường tròn  $|z - a| = R$ .

Chứng minh

Rõ ràng chuỗi lũy thừa luôn hội tụ tại  $z = 0$  và phân kỳ tại  $z = \infty$ . Kí hiệu

$$R_1 = \text{Max} \{ \rho \in \mathbb{R}_+ : \text{chuỗi lũy thừa hội tụ trong } |z - a| < \rho \}$$

$$R_2 = \text{Min} \{ \rho \in \mathbb{R}_+ : \text{chuỗi lũy thừa phân kỳ ngoài } |z - a| < \rho \}$$

Ta có  $R_1 = R_2 = R$  ▶▶

• Số  $R$  gọi là *bán kính hội tụ* còn hình tròn  $B(a, R)$  gọi là *hình tròn hội tụ* của chuỗi lũy thừa. Nếu  $D$  là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa thì ta luôn có

$$B(a, R) \subset D \subset \bar{B}(a, R)$$

**Hệ quả 3** Bán kính hội tụ được tính theo một trong các công thức sau đây

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad (4.2.2)$$

Chứng minh

Lập luận tương tự chuỗi lũy thừa thực. ▶▶

• Kí hiệu

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{với } z \in B(a, R) \quad (4.2.3)$$

Kết hợp các tính chất của hàm lũy thừa với các tính chất của chuỗi hội tụ đều ta có các hệ quả sau đây.

**Hệ quả 4** Hàm  $S(z)$  liên tục trong hình tròn  $B(a, R)$

Chứng minh

Suy ra từ tính liên tục của hàm lũy thừa và chuỗi hội tụ đều. ▶▶

**Hệ quả 5** Hàm  $S(z)$  khả tích trên đường cong  $\Gamma$  trơn từng khúc, nằm gọn trong  $B(a, R)$

$$\int_{\Gamma} S(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{\Gamma} (z - a)^n dz \quad (4.2.4)$$

Chứng minh

Suy ra từ tính khả tích của hàm lũy thừa và công thức tích phân từng từ. ▶▶

**Hệ quả 6** Hàm  $S(z)$  giải tích trong hình tròn  $B(a, R)$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n (z - a)^{n-k} \quad (4.2.5)$$

Chứng minh

Suy ra từ tính giải tích của hàm lũy thừa và công thức đạo hàm từng từ. ▶▶

**Hệ quả 7**  $\forall k \in \mathbb{Z}, c_k = \frac{1}{k!} S^{(k)}(a)$  (4.2.6)

Chứng minh

Suy ra từ công thức (4.2.5) với  $z = a$ . ▶▶

**Ví dụ** Chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  hội tụ đều trong hình tròn  $B(0, 1)$  đến hàm  $S(z) = \frac{1}{1-z}$ .

Suy ra

$$\forall z \in B(0, 1), \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^z \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} = \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} = -\ln(1-z)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)z^{n-k} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}, \dots$$

### Đ3. Chuỗi Taylor

**Định lý** Cho  $D = B(a, R)$ ,  $\Gamma = \partial D^+$  và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ .

$$\forall z \in D, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \text{ với } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, n \in \mathbb{Z} \quad (4.3.1)$$

Công thức (4.3.1) gọi là *khải triển Taylor* của hàm  $f$  tại điểm  $a$ .

Chứng minh

Với mọi  $z \in D$  cố định. Theo công thức tích phân Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (1)$$

Với  $\zeta \in \Gamma$  ta có  $q = |z-a|/|\zeta-a| < 1$  suy ra khai triển

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta-a} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \text{ và } \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \quad (2)$$

Do hàm  $f$  liên tục nên có module bị chặn trên miền  $\bar{D}$  suy ra

$$\exists M > 0 : \forall \zeta \in \Gamma, \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \right| \leq \frac{M}{R} q^n$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi (2) hội tụ đều trên  $\Gamma$ , do đó có thể tích phân từng từ dọc theo đường cong  $\Gamma$ . Tích phân từng từ công thức (1) suy ra công thức (4.3.1) ▶▶

**Hệ quả** Kết hợp công thức (4.2.6) và (4.3.1) ta có

$$\forall k \in \mathbb{Z}, c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \quad (4.3.2)$$

**Nhận xét** Theo định lý Cauchy có thể lấy  $\Gamma$  là đường cong bất kì đơn, kín, trơn từng khúc bao  $a$  và  $z$ , định hướng dương và nằm gọn trong  $B(a, R)$ . Thông thường, chúng ta khai triển hàm  $f(z)$  trong hình tròn  $B(0, R)$  chuỗi nhận được gọi là *chuỗi Maclorinh* tương tự như hàm thực.

**Ví dụ**

$$1. e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ và } e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}$$

$$2. \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} \sum \left( \frac{i^n}{n!} + \frac{(-i)^n}{n!} \right) z^n = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Tương tự khai triển

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

$$3. (1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n$$

Với  $m = 1$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

Thay  $z$  bằng  $z^2$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$$

Suy ra

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^z \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$$

$$\operatorname{arctanz} = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^z \zeta^{2n} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

#### Đ4. Không điểm của hàm giải tích

**Định lý** Cho hàm  $f$  giải tích trong miền  $D$  và dãy số  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  hội tụ trên miền  $D$  đến điểm  $a \in D$ . Nếu  $\forall n \in \mathbb{Z}, f(z_n) = 0$  thì  $\exists R > 0$  sao cho  $\forall z \in B(a, R), f(z) = 0$ .

Chứng minh

Khai triển Taylor hàm  $f$  trong lân cận điểm  $a$

$$\forall z \in B(a, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \text{ với } c_0 = f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0$$

Kí hiệu

$$m(a) = \min\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\} \geq 0 \tag{4.4.1}$$

Nếu  $m(a) = m$  thì

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{k=0}^{+\infty} c_{m+k} (z-a)^k = (z-a)^m g(z)$$

với hàm  $g(z)$  giải tích trong lân cận điểm  $a$  và  $g(a) = c_m \neq 0$ .

Do đó

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall z \in B(a, \varepsilon), g(z) \neq 0$$

Suy ra

$$\forall z_n \in B(a, \varepsilon), f(z_n) = (z_n - a)^m g(z_n) \neq 0!$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy  $m(a) = +\infty$ . Tức là  $\forall z \in B(a, R), f(z) = 0$  ▶▶

**Hệ quả 1** Cho hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$ . Kí hiệu  $Z(f) = \{z \in D : f(z) = 0\}$ .

Khi đó  $Z(f) = D$  hoặc  $Z(f)$  có không quá đếm được phần tử.

Chứng minh

Kí hiệu  $A$  là các điểm tụ của tập  $Z(f)$  ta có

$$A \subset Z(f) \subset D \text{ và tập } A \text{ là tập đóng}$$

Theo định nghĩa

$$\forall a \in A, \exists \text{ dãy } z_n \xrightarrow{Z(f)} a \text{ và } f(z_n) = 0$$

Theo định lý trên

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall z \in B(a, \varepsilon), f(z) = 0 \Rightarrow B(a, \varepsilon) \subset A \Rightarrow \text{tập } A \text{ là tập mở.}$$

Do tập  $D$  liên thông và tập  $A \subset D$  vừa đóng và vừa mở nên

Hoặc  $A = \emptyset$  suy ra  $Z(f)$  có không quá đếm được phần tử

Hoặc  $A = D$  suy ra  $Z(f) = D$  ▶▶

**Nhận xét** Theo kết quả trên thì không điểm của hàm giải tích không đồng nhất bằng không luôn là không điểm cô lập. Tức là  $\exists R > 0 : \forall z \in B(a, R) - \{a\}, f(z) \neq 0$

**Hệ quả 2** Cho các hàm  $f, g$  giải tích trong miền  $D$  và dãy số  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hội tụ trên miền  $D$  đến điểm  $a \in D$ . Nếu  $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = g(z_n)$  thì  $\forall z \in D, f(z) = g(z)$ .

Chứng minh

Đặt  $h(z) = f(z) - g(z)$ , theo giả thiết  $Z(h)$  có đếm được phần tử, suy ra  $Z(h) = D$

Tức là

$$\forall z \in D, h(z) = f(z) - g(z) = 0 \tag{4.4.2} \span style="float: right;">▶▶$$



**Hệ quả 3** Cho điểm  $a$  là không điểm của hàm  $f$  giải tích và không đồng nhất bằng không trong miền  $D$ . Khi đó

$$\exists! m \in \mathbb{Z}^*, \exists R > 0 : \forall z \in B(a, R), f(z) = (z - a)^m g(z) \quad (4.4.2)$$

với  $g$  là hàm giải tích trong hình tròn  $B(a, R)$  và  $g(a) \neq 0$ . Điểm  $a$  gọi là *không điểm cấp  $m$*  của hàm  $f$ .

**Chứng minh**

Khai triển Taylor hàm  $f$  trong lân cận điểm  $a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \text{ với } c_0 = f(a) = 0$$

Theo các kết quả trên điểm  $a$  là không điểm cô lập nên

$$\exists R > 0 : \forall z \in B(a, R) - \{a\}, f(z) \neq 0$$

Theo công thức (4.4.1) nếu  $m(a) = +\infty$  thì  $\forall z \in B(a, R), f(z) = 0$  trái với giả thiết.

Suy ra  $m(a) = m \in \mathbb{Z}^*$ . Tức là

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z - a)^n = (z - a)^m \sum_{k=0}^{+\infty} c_{m+k} (z - a)^k = (z - a)^m g(z)$$

với  $g$  là hàm giải tích trong hình tròn  $B(a, R)$  và  $g(a) = c_m \neq 0$  ▶▶

### Đ5. Chuỗi Laurent

**Định lý** Cho miền  $D = \{ r < |z - a| < R \}$  và hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$ , giải tích trong  $D$ .

Với mọi  $\rho \in (r, R)$  kí hiệu  $B = B(a, \rho) \cap D$  và  $\Gamma = \partial B^+(a, \rho)$ .

$$\forall z \in B, f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n \text{ với } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, n \in \mathbb{Z} \quad (4.5.1)$$

Công thức (4.5.1) gọi là *khai triển Laurent* của hàm  $f$  tại điểm  $a$ .

**Chứng minh**

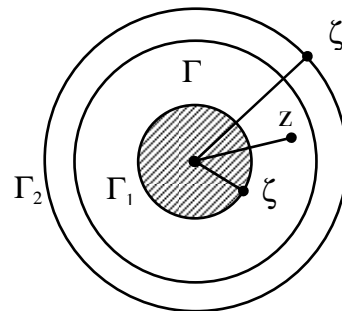
Với mọi  $z \in B$  cố định. Theo công thức tích phân Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1)$$

Với mọi  $\zeta \in \Gamma_1 : |\zeta - a| = r$ , ta có  $q = |\zeta - a| / |z - a| < 1$  suy ra khai triển

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z - a} \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n$$

và 
$$\frac{f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{z - a} \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n \quad (2)$$



Với mọi  $\zeta \in \Gamma_2 : |\zeta - a| = R$ , ta có  $q = |z - a| / |\zeta - a| < 1$  suy ra khai triển

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - a} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \quad \text{và} \quad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \quad (3)$$

Do hàm  $f$  liên tục trên  $\bar{D}$  nên có module bị chặn suy ra chuỗi (2) hội tụ đều trên  $\Gamma_1$  và chuỗi (3) hội tụ đều trên  $\Gamma_2$ . Ngoài ra theo định lý Cauchy

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n} d\zeta = \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n} d\zeta = \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n} d\zeta$$

Tích phân từng từ công thức (1) suy ra công thức (4.5.1) ►►

• Người ta thường viết chuỗi Laurent dưới dạng

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \quad (4.5.2)$$

Phần lũy thừa dương gọi là *phần đều*, phần lũy thừa âm gọi là *phần chính*. Nếu hàm  $f$  giải tích trong cả hình tròn  $B(a, R)$  thì  $\forall n \geq 1, c_{-n} = 0$ . Khi đó chuỗi Laurent (4.5.1) trở thành chuỗi Taylor (4.3.1)

### Ví dụ

1. Khai triển hàm  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  trên miền  $D = \{ 1 < |z| < 2 \}$

$$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{2} (1 + \dots + \frac{1}{2^n} z^n + \dots) - \frac{1}{z} (1 + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots)$$

2. Khai triển hàm  $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$  thành chuỗi tâm tại  $a = 1$

$$f(z) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1}$$

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^3} + \dots \quad \text{và} \quad \cos \frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-1)^2} + \dots$$

## Đ6. Phân loại điểm bất thường

• Điểm  $a$  gọi là *điểm bất thường* nếu hàm  $f$  không giải tích tại  $a$ . Nếu  $\exists \varepsilon > 0$  sao cho hàm  $f$  giải tích trong  $B(a, \varepsilon) - \{a\}$  thì điểm  $a$  gọi là điểm bất thường cô lập. Có thể phân loại các điểm bất thường cô lập như sau. Nếu  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$  thì điểm  $a$  gọi là *bất thường*

bỏ qua được. Nếu  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$  thì điểm  $a$  gọi là *cực điểm*. Nếu  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  không tồn tại thì điểm  $a$  gọi là *bất thường cốt yếu*.

Giả sử trong lân cận điểm  $a$  bất thường cô lập, hàm  $f$  có khai triển Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad (4.6.1)$$

**Định lý** Kí hiệu  $m(a) = \min\{n \in \mathbb{Z} : c_n \neq 0\}$

1. Điểm  $a$  là bất thường bỏ qua được khi và chỉ khi  $m(a) \geq 0$
2. Điểm  $a$  là cực điểm cấp  $m$  khi và chỉ khi  $m(a) < 0$
3. Điểm  $a$  là bất thường cốt yếu khi và chỉ khi  $m(a) = -\infty$

**Chứng minh**

$$1. m(a) = m \geq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \xrightarrow{z \rightarrow a} c_0 = L$$

Ngược lại, hàm  $g(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq 0 \\ L & z = 0 \end{cases}$  giải tích trong  $B(a, \varepsilon)$ . Khai triển Taylor tại điểm  $a$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \text{ với } c_0 = L \Rightarrow m(a) \geq 0$$

$$2. m(a) = -m < 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-a)^n \xrightarrow{z \rightarrow a} \infty$$

Ngược lại, hàm  $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-a} & z \neq a \\ f(z) & z \neq a \\ 0 & z = a \end{cases}$  giải tích trong  $B(a, \varepsilon)$  và  $g(a) = 0$ .

Theo hệ quả 3, Đ4

$$g(z) = (z-a)^m h(z) \text{ với } m \in \mathbb{Z}^* \text{ và } h \text{ là hàm giải tích trong } B(a, \varepsilon), h(a) \neq 0$$

Suy ra

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n \text{ với } c_{-m} = b_0 \neq 0 \Rightarrow m(a) = -m$$

$$3. m(a) = -\infty \Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \text{ không có giới hạn khi } z \rightarrow a$$

Ngược lại, phản chứng trên cơ sở 1. và 2. ▶▶

**Hệ quả 1** (Định lý Sokhotsky) Điểm  $a$  là điểm bất thường cốt yếu của hàm  $f$  khi và chỉ khi với mọi số phức  $A$  có dãy số phức  $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  hội tụ đến  $a$  sao cho dãy số phức  $(f(z_n))_{n \in \mathbb{Z}}$  hội tụ đến  $A$ . Tức là tập  $f(B(a, \varepsilon))$  trù mật trong tập  $\mathbb{C}$ .

- Hàm  $f$  giải tích trên toàn tập số phức gọi là *hàm nguyên*. Như vậy hàm nguyên chỉ có một điểm bất thường duy nhất là  $z = \infty$ . Đổi biến  $\zeta = \frac{1}{z}$  suy ra hàm  $g(\zeta) = f(z)$  có duy

nhất điểm bất thường cô lập là  $\zeta = 0$ . Khai triển Laurent hàm  $g(\zeta)$  trong lân cận  $\zeta = 0$

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{\zeta^n} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \zeta^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad (4.6.2)$$

Do  $f(z) \xrightarrow{0} f(a)$  nên  $\forall n \geq 1, c_n = 0$

Từ đó suy ra kết quả sau đây.

**Hệ quả 2** Kí hiệu  $m_f(\infty) = -m_g(0)$

1. Hàm  $f$  là hàm hằng khi và chỉ khi  $m(\infty) = 0$
2. Hàm  $f$  là đa thức bậc  $n$  khi và chỉ khi  $m(\infty) = n$
3. Hàm  $f$  là hàm siêu việt khi và chỉ khi  $m(\infty) = +\infty$

- Hàm  $f(z)$  gọi là *hàm phân hình* nếu nó chỉ có hữu hạn cực điểm trên tập  $\mathbb{C}$

**Hệ quả 3** Hàm  $f(z)$  là hàm phân hình khi và chỉ khi hàm  $f(z)$  là phân thức hữu tỷ

Chứng minh

Rõ ràng hàm hữu tỷ  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  có hữu hạn cực điểm là các không điểm của  $Q(z)$

Ngược lại, giả sử hàm  $f(z)$  có  $m$  cực điểm trên  $\mathbb{C}$ . Khi đó

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_1) \dots (z - z_m)}$$

với hàm  $h$  giải tích trên toàn  $\mathbb{C}$  và  $m_h(\infty) = n$  suy ra  $h(z) = P(z)$  ▶▶

## Đ7. Thặng dư

- Cho hàm  $f$  giải tích trong  $B(a, R) - \{a\}$ , liên tục trên  $\Gamma = \partial B(a, R)$ . Tích phân

$$\text{Res}f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz \quad (4.7.1)$$

gọi là *thặng dư* của hàm  $f$  tại điểm  $a$ .

Theo định lý Cauchy, nếu  $a$  là điểm thường của hàm  $f$  thì  $\text{Res}f(a) = 0$ . Nếu  $a$  là điểm bất thường cô lập thì  $\text{Res}f(a)$  không phụ thuộc vào đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, bao điểm  $a$ , định hướng dương và nằm gọn trong hình tròn  $B(a, R)$ .

Cho hàm  $f$  giải tích trong miền  $R < |z| < \infty$ , liên tục trên  $\Gamma = \partial B(0, R)$ . Tích phân

$$\text{Res}f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z) dz \quad (4.7.2)$$

gọi là *thặng dư* của hàm  $f$  tại điểm  $\infty$ .

**Định lý** Thặng dư của hàm  $f$  tại điểm  $a$  là hệ số  $c_{-1}$  của khai triển Laurent tại điểm đó.

$$\text{Res}f(a) = c_{-1} \quad (4.7.3)$$

**Chứng minh**

Khai triển Laurent hàm  $f$  tại điểm  $a$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \text{ với } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, n \in \mathbb{Z}$$

So sánh với công thức (4.7.1) suy ra công thức (4.7.3) ▶▶

**Hệ quả** Cho điểm  $a$  là cực điểm cấp  $m$  của hàm  $f$

$$\text{Res}f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} [(z-a)^m f(z)] \quad (4.7.4)$$

**Chứng minh**

Khai triển Laurent tại cực điểm  $a$  cấp  $m$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Suy ra

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \dots$$

$$[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)!c_{-1} + m(m-1)..2c_0(z-a) + \dots$$

Chuyển qua giới hạn hai vế

$$\lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)!c_{-1} \quad \text{▶▶}$$

**Ví dụ** Hàm  $f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)^3}$  có hai cực điểm cấp 3 là  $\pm i$

$$\text{Res}f(i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{e^z}{(z+i)^3} \right)'' = \frac{1}{2} \left( \frac{e^z}{(z+i)^3} - \frac{6e^z}{(z+i)^4} + \frac{12e^z}{(z+i)^5} \right)_{z=i} = \frac{1}{16} e^i (3-2i)$$

**Định lý** Cho hàm  $f$  có các cực điểm hữu hạn là  $a_k$  với  $k = 1 \dots n$

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}f(a_k) + \text{Res}f(\infty) = 0 \quad (4.7.5)$$

**Chứng minh**

Gọi  $\Gamma_k$  với  $k = 1 \dots n$  là các đường tròn  $|z - a_k| = R_k$  đủ bé để chỉ bao riêng từng điểm  $a_k$  và  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = R$  đủ lớn để bao hết tất cả các đường tròn  $\Gamma_k$ . Theo công thức tích phân Cauchy

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} f(z) dz = - \oint_{\Gamma^-} f(z) dz$$

Chuyển về sau đó chia hai vế cho  $2\pi i$  suy ra công thức (4.7.5) ▶▶

**Hệ quả** Cho đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, tron từng khúc, định hướng dương và hàm  $f$  liên tục trên  $\Gamma$ , giải tích trong  $D_\Gamma$  ngoại trừ hữu hạn cực điểm  $a_k \in D_\Gamma$  với  $k = 1 \dots n$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(a_k) \quad (4.7.6)$$

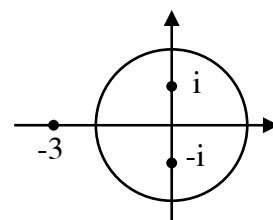
**Ví dụ** Tính  $I = \oint_{\Gamma} \frac{\sin z dz}{(z^2 + 1)(z + 3)}$  với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  định hướng dương

Hàm  $f(z)$  có hai cực điểm  $z = \pm i$  nằm trong miền  $D_\Gamma$  và một cực điểm  $z = -3$  nằm ngoài miền  $D_\Gamma$ .

$$\text{Res}f(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\sin z}{(z - i)(z - 3)} = \frac{\sin(-i)}{-2 + 6i}$$

$$\text{Res}f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin z}{(z + i)(z - 3)} = \frac{\sin(i)}{-2 - 6i}$$

$$I = 2\pi i [\text{Res}f(-i) + \text{Res}f(i)] = -\frac{3}{5} \sin(i)$$



### Đ8. Thặng dư Loga

• Cho hàm  $f$  giải tích và khác không trong  $B(a, R) - \{a\}$ , liên tục trên  $\Gamma = \partial B(a, R)$ .

Tích phân

$$\text{Res} \text{Ln} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (4.8.1)$$

gọi là *thặng dư loga* của hàm  $f$  tại điểm  $a$ . Theo định nghĩa trên

$$\text{Res} \text{Ln} f(a) = \text{Res} g(a) \text{ trong đó } g(z) = [\text{Ln} f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ với } z \in B(a, R) - \{a\}$$

**Định lý** Với các kí hiệu như trên

1. Nếu  $a$  là không điểm cấp  $n$  của hàm thì  $\text{Res} \text{Ln} f(a) = n$
2. Nếu  $b$  là cực điểm cấp  $m$  của hàm  $f$  thì  $\text{Res} \text{Ln} f(b) = -m$

**Chứng minh**

1. Theo hệ quả 3, Đ4

$$\forall z \in B(a, R), f(z) = (z - a)^n h(z) \text{ với } h(z) \text{ là hàm giải tích trong } B(a, R) \text{ và } h(a) \neq 0$$

Đạo hàm hàm  $f$  suy ra

$$f'(z) = n(z - a)^{n-1} h(z) + (z - a)^n h'(z)$$

$$g(z) = \frac{n}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \text{ với } \frac{h'(z)}{h(z)} \text{ là hàm giải tích trong } B(a, R)$$

Suy ra

$$\text{ResLnf}(a) = c_{-1}(g) = n$$

2. Theo hệ quả 3, Đ5

$$\forall z \in B(a, R), f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \text{ với } h(z) \text{ là hàm giải tích trong } B(a, R) \text{ và } h(a) \neq 0$$

Đạo hàm hàm f suy ra

$$f'(z) = \frac{-m}{(z-a)^{m+1}} h(z) + \frac{1}{(z-a)^m} h'(z)$$

$$g(z) = \frac{-m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \text{ với } \frac{h'(z)}{h(z)} \text{ là hàm giải tích trong } B(a, R)$$

Suy ra

$$\text{ResLnf}(a) = c_{-1}(g) = -m$$

►►

**Hệ quả 1** Cho đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương và hàm  $f$  liên tục trên  $\Gamma$ , có các không điểm  $a_k$  cấp  $n_k$  với  $k = 1 \dots p$  và giải tích trong  $D_\Gamma$  ngoại trừ các cực điểm  $b_j$  cấp  $m_j$  với  $j = 1 \dots q$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^p n_k - \sum_{j=1}^q m_j = N - M \quad (4.8.2)$$

Chứng minh

Kết hợp định lý trên, công thức tích phân Cauchy và lập luận tương tự hệ quả 1, Đ7

►►

• Ta xem một không điểm cấp  $n$  là  $n$  không điểm đơn trùng nhau và một cực điểm cấp  $m$  là  $m$  cực điểm đơn trùng nhau. Theo công thức Newtown - Leibniz và định nghĩa hàm logarit phức

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{\Gamma} d[\ln f(z)] = \Delta_{\Gamma} \text{Lnf}(z) = \Delta_{\Gamma} \ln |f(z)| + i \Delta_{\Gamma} \text{Arg}f(z) = i \Delta_{\Gamma} \text{Arg}f(z)$$

Kết hợp với công thức (4.8.2) suy ra hệ quả sau đây.

**Hệ quả 2** (Nguyên lý Argument) Số gia của argument của hàm  $f$  khi  $z$  chạy hết một vòng trên đường cong  $\Gamma$  kín, trơn từng khúc và định hướng dương bằng  $2\pi$  nhân với hiệu số của số không điểm trừ đi số cực điểm của hàm  $f$  nằm trong miền  $D_\Gamma$ . Tức là

$$\Delta_{\Gamma} \text{Arg}f(z) = 2\pi(N - M) \quad (4.8.3)$$

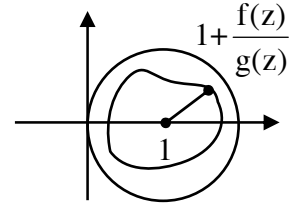
**Hệ quả 3** (Định lý Rouché) Cho đường cong  $\Gamma$  đơn, kín, trơn từng khúc, định hướng dương và các hàm  $f, g$  liên tục trên  $\Gamma$ , giải tích trong  $D_\Gamma$ . Kí hiệu  $N_\Gamma(f)$  là số không điểm của hàm  $f$  nằm trong  $D_\Gamma$ . Khi đó nếu  $\forall z \in \Gamma, |f(z)| > |g(z)|$  thì  $N_\Gamma(f + g) = N_\Gamma(f)$ .

Chứng minh

Theo giả thiết  $\forall z \in \Gamma, \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1 \Rightarrow \Delta_{\Gamma} \text{Arg} \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0$

Suy ra

$$\begin{aligned} N_{\Gamma}(f+g) &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg}[f(z)+g(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg} \left[ f(z) \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg} f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg} \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = N_{\Gamma}(f) \end{aligned}$$



»»

**Hệ quả 4** (Định lý D'Alembert - Gauss) Mọi đa thức hệ số phức bậc n có đúng n không điểm phức trong đó không điểm bội k tính là k không điểm.

Chứng minh

Giả sử

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + z^n \text{ với } a_k \in \mathbb{C} \forall k$$

Kí hiệu

$$f(z) = z^n, \quad g(z) = a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}, \quad M = \max\{|a_k|, k=0, \dots, (n-1)\} \text{ và } R = nM + 1$$

Trên đường tròn  $\Gamma: |z| = R$

$$|g(z)| \leq M(1 + \dots + R^{n-1}) \leq nMR^{n-1} < R^n = |f(z)|$$

Theo hệ quả 3

$$N_{\Gamma}(P) = N_{\Gamma}(f+g) = N_{\Gamma}(f) = n \quad \text{»»}$$

### Đ9. Các ứng dụng thặng dư

**Định lý** (Bổ đề Jordan) Cho đường cong  $\Gamma_R = \{|z| = R, \text{Im} z \geq \beta\}$  và hàm f giải tích trong nửa mặt phẳng  $D = \{\text{Im} z > \beta\}$  ngoại trừ hữu hạn điểm bất thường. Khi đó ta có

$$1. \text{ Nếu } \lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0 \text{ thì } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0 \quad (4.9.1)$$

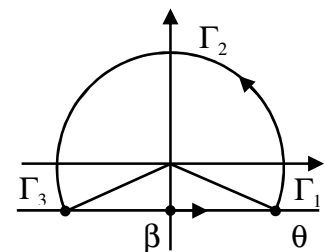
$$2. \text{ Nếu } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \text{ thì } \forall \lambda > 0, \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0 \quad (4.9.2)$$

Chứng minh

1. Từ giả thiết suy ra

$$\forall z \in \Gamma_R, |zf(z)| \leq M \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow |f(z)| \leq \frac{M}{R}$$

Suy ra





$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds = \frac{M}{R} R(\pi + 2\theta) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

2. Từ giả thiết suy ra

$$\forall z \in \Gamma_R, |f(z)| \leq M \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Suy ra

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_1} |e^{i\lambda z} f(z)| ds + \int_{\Gamma_2} |e^{i\lambda z} f(z)| ds + \int_{\Gamma_3} |e^{i\lambda z} f(z)| ds$$

Ước lượng tích phân, ta có

$$\int_{\Gamma_1} |e^{i\lambda z} f(z)| ds + \int_{\Gamma_3} |e^{i\lambda z} f(z)| ds \leq 2Me^{-\lambda y} R\theta \leq 2Me^{-\lambda|\beta|} \beta \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

$$\int_{\Gamma_2} |e^{i\lambda z} f(z)| ds = MR \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin t} dt = \pi MR e^{-\lambda R \sin \alpha} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \text{ với } \alpha \in (0, \pi) \quad \blacktriangleright$$

**Hệ quả 1** Cho  $f(z)$  là phân thức hữu tỷ sao cho bậc của mẫu số lớn hơn bậc tử số ít nhất là hai đơn vị, có các cực điểm  $a_k$  với  $k = 1 \dots p$  nằm trong nửa mặt phẳng trên và có các cực điểm đơn  $b_j$  với  $j = 1 \dots q$  nằm trên trục thực. Khi đó ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{Res} f(a_k) + \pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} f(b_j) \quad (4.9.3)$$

**Chứng minh**

• Để đơn giản, xét trường hợp hàm  $f$  có một cực điểm  $a$  thuộc nửa mặt phẳng trên và một cực điểm đơn  $b$  thuộc trục thực. Trường hợp tổng quát chứng minh tương tự.

Kí hiệu

$$\Gamma_R : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0, \quad \Gamma_\rho : |z| = \rho, \operatorname{Im} z > 0$$

$$\Gamma = \Gamma_R \cup [-R, b - \rho] \cup \Gamma_\rho \cup [b + \rho, R]$$

Theo công thức (4.7.6)

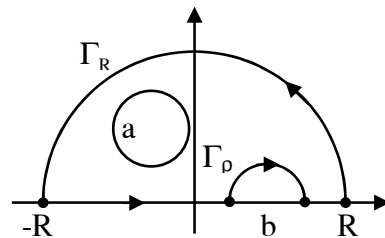
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{[-R, b-\rho]} f(z) dz + \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz + \int_{[b+\rho, R]} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(a)$$

Kết hợp với công thức (4.9.1) suy ra

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty, \rho \rightarrow 0} \int_{[-R, b-\rho]} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow +\infty, \rho \rightarrow 0} \int_{[b+\rho, R]} f(z) dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} f(a) - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz \end{aligned} \quad (1)$$

Do  $b$  là cực điểm đơn nên  $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - b} + g(z)$  với  $g(z)$  giải tích trong lân cận điểm  $b$

Suy ra hàm  $g(z)$  bị chặn trên  $\Gamma_\rho$



$$\exists M > 0 : \forall z \in \Gamma_\rho, |g(z)| < M \Rightarrow \left| \int_{\Gamma_\rho} g(z) dz \right| \leq M \pi \rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad (2)$$

Tham số hoá cung  $\Gamma_\rho : z = b + \rho e^{it}$  với  $t \in [\pi, 0]$ .

Tính trực tiếp

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{c_{-1}}{z-b} dz = -\pi i \text{Res}f(b) \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1) suy ra công thức (4.9.1) ▶▶

Ví dụ Tính tích phân  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx$

Phân thức  $f(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2}$  có cực điểm kép  $a = i$  thuộc nửa mặt phẳng trên

$$\text{Res}f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{z-1}{(z+i)^2} \right)' = \left( \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{2(z-1)}{(z+i)^3} \right)_{z=i} = \frac{1}{4} i$$

Suy ra  $I = 2\pi i \text{Res}f(i) = -\frac{\pi}{2}$

**Hệ quả 2** Cho  $f(z)$  là phân thức hữu sao cho bậc của mẫu số lớn hơn bậc tử số ít nhất là một đơn vị, có các cực điểm  $a_k$  với  $k = 1 \dots p$  nằm trong nửa mặt phẳng trên và có các cực điểm đơn  $b_j$  với  $j = 1 \dots q$  nằm trên trục thực. Kí hiệu  $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$  ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^p \text{Res}g(a_k) + \pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}g(b_j) \quad (4.9.4)$$

Chứng minh

Lập luận tương tự như chứng minh hệ quả 1. ▶▶

Ví dụ Tính tích phân  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

Phân thức  $f(z) = \frac{1}{z}$  có cực điểm đơn  $b = 0$  thuộc trục thực và  $\text{Res}g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} e^{iz} = 1$

Suy ra  $I = \frac{1}{2} \text{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}$

**Hệ quả 3** Cho đường cong  $\Gamma_R = \{ |z| = R, \text{Re}z \leq \alpha \}$  và hàm  $f$  giải tích trong nửa mặt phẳng  $D = \{ \text{Re}z < \alpha \}$  ngoại trừ hữu hạn điểm bất thường và  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ .

$$\forall \lambda > 0, \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)e^{\lambda z} dz = 0 \quad (4.9.5)$$

Chứng minh

Suy ra từ định lý bằng cách quay mặt phẳng một góc  $\pi/2$ . ▶▶

**Hệ quả 4** Với các giả thiết như hệ quả 3, kí hiệu  $g(z) = e^{\lambda z}f(z)$

$$\forall \lambda > 0, I(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda z} f(z) dz = \sum_{\text{Re } a_k < \alpha} \text{Res } g(a_k) \quad (4.9.6)$$

Chứng minh

Kí hiệu

$$\Gamma = \Gamma_R \cup [\alpha - i\beta, \alpha + i\beta] \text{ với } R \text{ đủ lớn để bao hết các cực điểm của hàm } f(z)$$

Theo công thức (4.7.6)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{\lambda z} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{\lambda z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} e^{\lambda z} f(z) dz = \sum_{\text{Re } a_k < \alpha} \text{Res } g(a_k)$$

Suy ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} e^{\lambda z} f(z) dz = \sum_{\text{Re } a_k < \alpha} \text{Res } g(a_k) - \int_{\Gamma_R} f(z) e^{\lambda z} dz$$

Cho  $\beta \rightarrow +\infty$  và sử dụng hệ quả 3 chúng ta nhận được công thức (4.9.6) ▶▶

### Bài tập chương 4

1. Tìm miền hội tụ và tổng của các chuỗi sau đây.

a.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-2)^n}$       b.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ni^n 2^n}{(z+i)^{n+1}}$       c.  $\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)i^{n+2}(z-i)^n$

2. Tìm miền hội tụ của chuỗi Marlaurin của các hàm sau đây.

a.  $\frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)}$       b.  $\frac{z}{4+z^2}$       c.  $\frac{3z+1}{(z-2)^3}$   
 d.  $(1-z)e^{-2z}$       e.  $\sin^3 z$       f.  $\ln(1+z^2)$

3. Tìm miền hội tụ của chuỗi Taylor tại điểm a của các hàm sau đây.

a.  $\frac{1}{z-2}$ , a = 1      b.  $\frac{1}{z^2 - 6z + 5}$ , a = 3      c.  $\frac{1}{1-z}$ , a = 3i  
 d.  $\sin(z^2 + 4z)$ , a = -2      e.  $\frac{1}{z^2}$ , a = 2      f.  $e^{z^2-4z+1}$ , a = 2

4. Xác định cấp không điểm của các hàm số sau đây.

a.  $(z^2 + 9)(z^2 + 4)^5$       b.  $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$       c.  $\frac{\sin^3 z}{z}$

5. Tìm hàm f giải tích tại  $z = 0$  và thoả mãn

a.  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n+1}, n \in \mathbb{Z}^*$       b.  $f\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2+1}{n^4}, n \in \mathbb{Z}^*$       c.  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}^*$

6. Tìm miền hội tụ của chuỗi Laurent tại điểm a của các hàm sau đây.

a.  $\frac{1}{z-2}, a = 0$  và  $a = \infty$       b.  $\frac{1}{z(1-z)}, a = 0, a = 1$  và  $a = \infty$   
 c.  $z^2 e^{\frac{1}{z}}, a = 0$  và  $a = \infty$       d.  $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, a = 2$

7. Tìm chuỗi Laurent trong của hàm f trong các miền D sau đây.

a.  $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, 1 < |z| < 2$       b.  $\frac{1+z}{(z-1)(z-2)}, 1 < |z| < 2$   
 d.  $\frac{z}{(z^2+1)(z-3)}, 1 < |z| < 3$       d.  $\frac{\sin z}{1-z}, |z| < 1$  và  $|z| > 1$   
 e.  $\frac{z+1}{z^2+z-2}, |z| < 1, 1 < |z| < 2$  và  $|z| > 2$

8. Xác định cấp của điểm bất thường (kể cả  $\infty$ ) của các hàm sau đây.

a.  $\frac{z^5}{(1-z)^2}$       b.  $\frac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$       c.  $\sin z + \frac{1}{z^2}$       d.  $\cos\frac{1}{z+i}$   
 e.  $\frac{1}{\sin z}$       f.  $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$       g.  $\frac{1-\cos z}{z^2}$       h.  $\frac{\sin z}{z^4}$

9. Tính thặng dư của các hàm sau đây.

a.  $\frac{z^2+1}{z-2}$       b.  $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$       c.  $\frac{z^4}{(z+1)^3}$       d.  $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$   
 e.  $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$       f.  $\frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$       g.  $\frac{\cos z}{z^3}$       h.  $\frac{1}{\sin z - \frac{1}{2}}$   
 i.  $\frac{\cos z}{1-z^2}$       j.  $\sin\frac{1}{z}$       k.  $\frac{\operatorname{sh} z}{(z-1)^2(z^2+1)}$       l.  $\frac{e^z}{z^2(z^4+4)}$

10. Tính tích phân hàm f trên đường cong kín  $\Gamma$  định hướng dương sau đây.

- a.  $\oint_{\Gamma} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}, \Gamma: |z-2|=2$       b.  $\oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^2+4}, \Gamma: |z|=3$
- c.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1}, \Gamma: x^2+y^2=2x+2y-1$       d.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}, \Gamma: x^2+y^2=2x$
- e.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5+1)}, \Gamma: |z|=2$       f.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{10}+1}, \Gamma: |z|=2$
- g.  $\oint_{\Gamma} \left(\sin \frac{1}{z}\right)^n dz, \Gamma: |z|=1$       h.  $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^3+1}, \Gamma: 4x^2+2y^2=3$

11. Tính các tích phân xác định sau đây

- a.  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi}$       b.  $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$       c.  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{13+12\sin\varphi}$

12. Tìm số nghiệm của các đa thức trong miền D sau đây.

- a.  $z^5 + 2z^2 + 8z + 1, |z| < 1$  và  $1 \leq |z| < 2$
- b.  $z^3 - 5z + 1, |z| < 1, 1 \leq |z| < 2$  và  $2 \leq |z| < 3$
- c.  $z^4 + z^3 + 3z^2 + z + 2, \operatorname{Re}z > 0$
- d.  $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1, \operatorname{Re}z > 0$  và  $\operatorname{Im}z > 0$

13. Tính các tích phân suy rộng sau đây.

- a.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$       b.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$       c.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$
- d.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$       e.  $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x}{(x^2+4)^2} dx$       f.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx$
- g.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$       h.  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx$       i.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x}{(1+x^2)^2} dx$
- j.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$       k.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+1} dx$

## Biến đổi fourier và Biến đổi laplace

---

### Đ1. Tích phân suy rộng

- Trong chương này chúng ta kí hiệu

$F(\mathbb{R}, \mathbb{V}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V} \}$  là đại số các hàm biến thực, trị phức

$\| f \|_{\infty} = \text{Sup}_{\mathbb{R}} | f(t) |$  và  $\| f \|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(t) | dt$  là các chuẩn trên  $F(\mathbb{R}, \mathbb{V})$

$L^{\infty} = \{ f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{V}) : \| f \|_{\infty} \leq +\infty \}$  là đại số các hàm có module bị chặn

$C_0 = \{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{V}) : \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \}$  là đại số các hàm liên tục, dần về không tại  $\infty$

$L^1 = \{ f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{V}) : \| f \|_1 \leq +\infty \}$  là đại số các hàm khả tích tuyệt đối trên  $\mathbb{R}$

Chúng ta đã biết rằng hàm khả tích tuyệt đối là liên tục từng khúc, dần về không tại vô cùng và bị chặn trên toàn  $\mathbb{R}$ . Tức là

$$L^1 \subset CM_0 \subset L^{\infty}$$

- Cho khoảng  $I \subset \mathbb{R}$  và hàm  $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ ,  $(x, t) \in I \times \mathbb{R}$  khả tích trên  $\mathbb{R}$  với mỗi  $x \in I$  cố định. Tích phân suy rộng

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dt \quad \text{với } x \in I \tag{5.1.1}$$

gọi là *bị chặn đều* trên khoảng  $I$  nếu có hàm  $\varphi \in L^1$  sao cho

$$\forall (x, t) \in I \times \mathbb{R}, \quad | F(x, t) | \leq | \varphi(t) |$$

**Định lý** Tích phân suy rộng bị chặn đều có các tính chất sau đây

1. Nếu hàm  $F(x, t)$  liên tục trên miền  $I \times \mathbb{R}$  thì hàm  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $I$

2. Nếu các hàm  $F(x, t)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$  liên tục trên miền  $I \times \mathbb{R}$  và tích phân  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt$  cũng bị

chặn đều trên khoảng  $I$  thì hàm  $f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $I$

$$\forall x \in I, \quad \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt$$

3. Nếu hàm  $F(x, t)$  liên tục trên  $I \times \mathbb{R}$  thì hàm  $f(x)$  khả tích địa phương trên khoảng  $I$

$$\forall [a, b] \subset I, \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_a^b F(x, t) dx \right) dt$$

- Kí hiệu

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{ gọi là hàm nhảy đơn vị}$$

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} [\eta(t) - \eta(t - h)] = \begin{cases} \frac{1}{h} & 0 < t \leq h \\ 0 & t \leq 0, t > h \end{cases} \text{ gọi là hàm xung}$$

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \text{ gọi là hàm xung Dirac} \quad (5.1.2)$$

**Định lý** Hàm xung Dirac có các tính chất sau đây.

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$2. \text{ Với mọi hàm } f \text{ liên tục tại } 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

$$3. \forall t \in \mathbb{R}, \eta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau \text{ và } \delta(t) = \eta'(t)$$

**Chứng minh**

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \delta(t, h) dt = 1$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(t) dt = f(0)$$

$$3. \text{ Xét tích phân } \eta(t, h) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau, h) d\tau = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{h} & 0 < t < h \\ 1 & t \geq h \end{cases}$$

Chuyển qua giới hạn  $\eta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \eta(t, h)$

Từ đó suy ra các hệ thức khác. ▶▶

• Cho các hàm  $f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Tích phân

$$\forall t \in \mathbb{R}, (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (5.1.3)$$

gọi là *tích chập* của hàm  $f$  và hàm  $g$ .

**Định lý** Tích chập có các tính chất sau đây.

$$1. \forall f, g \in L^1 \quad f * g \in L^1 \text{ và } \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$2. \forall f, g \in L^1 \quad f * g = g * f$$

$$3. \forall f \in L^1 \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad f * \delta = \delta * f = f$$

$$4. \forall f, g, h \in L^1, \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda f + g) * h = \lambda f * h + g * h$$

**Chứng minh**

1. Do hàm  $g$  khả tích tuyệt đối nên bị chặn trên  $\mathbb{R}$

$$\forall (t, \tau) \in \mathbb{R}^2, |f(\tau)g(t - \tau)| \leq \|g\|_{\infty} |f(\tau)|$$

Do  $f$  khả tích tuyệt đối nên tích phân suy rộng  $(f * g)(t)$  hội tụ tuyệt đối và bị chặn đều

$$\|f * g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t - \tau)| dt \right) d\tau = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$2. \quad \forall t \in \mathbb{R}, (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \theta)g(\theta)d\theta = (g * f)(t)$$

$$3. \quad \forall t \in \mathbb{R}, (f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \lim_{h \rightarrow 0} \delta(\tau, h) d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(t - \tau) d\tau = f(t)$$

4. Suy ra từ tính tuyến tính của tích phân ►►

## Đ2. Các bổ đề Fourier

**Bổ đề 1** Cho hàm  $f \in L^1$ . Với mỗi  $f \in \mathbb{R}$  cố định kí hiệu  $f_x(t) = f(t - x)$  với mọi  $t \in \mathbb{R}$

Khi đó ánh xạ  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow L^1, f \rightarrow f_x$  là liên tục theo chuẩn.

Chứng minh

Ta chứng minh rằng

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_1 < \varepsilon$$

Thật vậy

Do hàm  $f$  khả tích tuyệt đối nên

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \int_{|t| \geq N} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

Trong khoảng  $[-N, N]$  hàm  $f$  có hữu hạn điểm gián đoạn loại một

$$a_1 = -N < a_2 < \dots < a_m = N \text{ với } \Delta = \max\{|a_k - a_{k-1}| : k = 1 \dots m\}$$

và trên mỗi khoảng con  $[a_{k-1}, a_k]$  hàm có thể thác triển thành hàm liên tục đều

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2m\Delta}$$

Từ đó suy ra ước lượng

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t - x) - f(t - y)| dt \\ &\leq \int_{|t| \geq N} |f(t - x) - f(t - y)| dt + \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(t - x) - f(t - y)| dt < \varepsilon \quad \text{►►} \end{aligned}$$

• Với mọi  $(\lambda, t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  kí hiệu



$$H(t) = e^{-|t|} \text{ và } h_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda t) e^{ixt} dt \quad (5.2.1)$$

**Bổ đề 2** Các hàm  $H(t)$  và  $h_\lambda(x)$  có các tính chất sau đây

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 < H(t) \leq 1$        $\lim_{\lambda \rightarrow 0} H(\lambda t) = 1$        $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} H(\lambda t) = 0$
2.  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$        $h_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$        $\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dx = 1$
3.  $\forall f \in L^1$        $(f * h_\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{ist} ds \right) H(\lambda t) e^{ixt} dt$
4.  $\forall g \in L^\infty$  liên tục tại  $x \in \mathbb{R}$        $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (g * h_\lambda)(f) = g(x)$
5.  $\forall f \in L^1$        $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f * h_\lambda - f\|_1 = 0$

Chứng minh

1. Suy ra từ định nghĩa hàm  $H(t)$
2. Tính trực tiếp tích phân (5.2.1)

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+ix)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(-\lambda+ix)t} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\lambda+ix} - \frac{1}{-\lambda+ix} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$

3. Theo định nghĩa tích chập và hàm  $h_\lambda$

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) h_\lambda(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{i(x-y)t} dy \right) H(\lambda t) e^{ixt} dt$$

Đổi biến  $s = x - y$  ở tích phân bên trong nhận được kết quả.

4. Theo định nghĩa tích chập và hàm  $h_\lambda$

$$(g * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) h_\lambda(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\lambda s) h_1(s) ds \text{ với } y = \lambda s$$

Ước lượng trực tiếp

$$\forall (x, s) \in \mathbb{R}^2, |g(x-\lambda s) h_1(s)| \leq \|g\|_\infty |h_1(s)|$$

Suy ra tích phân trên bị chặn đều. Do hàm  $g$  liên tục nên có thể chuyển giới hạn qua dấu tích phân.

$$(g * h_\lambda)(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h_1(s) ds = g(x)$$

5. Kí hiệu

$$\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = \|f_y - f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)| dx \leq 2\|f\|_1$$

Theo bổ đề 1. hàm  $g$  liên tục tại  $y = 0$  với  $g(0) = 0$  và bị chặn trên toàn  $\mathbb{R}$

Từ định nghĩa chuẩn, tích chập và hàm  $h_\lambda$

$$\begin{aligned} \|f * h_\lambda - f\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * h_\lambda)(x) - f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-y) - f(x)) h_\lambda(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)| dx \right) h_\lambda(y) dy = (g * h_\lambda)(0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} g(0) = 0 \end{aligned}$$

Suy ra từ tính chất 4. của bổ đề 2. ▶▶

### Đ3. Biến đổi Fourier

• Cho các hàm  $f, F \in L^1$  kí hiệu

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.3.1)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \check{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.3.2)$$

Ngoài ra hàm  $f$  và hàm  $g$  gọi là *bằng nhau hầu khắp nơi* trên  $\mathbb{R}$  nếu

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx = 0$$

**Định lý** Với các kí hiệu như trên

1.  $\forall f \in L^1 \quad \hat{f} \in C_0 \cap L^1$  và  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$
2.  $\forall F \in L^1 \quad \check{F} \in C_0 \cap L^1$  và  $\|\check{F}\|_\infty \leq \|F\|_1$
3. Nếu  $\hat{f} = F$  thì  $\check{F} \stackrel{\text{h.k.n}}{=} f$

**Chứng minh**

1. Theo giả thiết hàm  $f$  khả tích tuyệt đối và ta có

$$\forall (\omega, t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$$

Suy ra tích phân (5.3.1) bị chặn đều. Do hàm  $f(t)e^{-i\omega t}$  liên tục nên hàm  $\hat{f}(\omega)$  liên tục.

Biến đổi tích phân

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega(t+\frac{\pi}{\omega})} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \frac{\pi}{\omega}) e^{-i\omega t} dt$$

Cộng hai vế với công thức (5.3.1) suy ra

$$2|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t - \frac{\pi}{\omega})| e^{-i\omega t} dt = \|f - f_{\frac{\pi}{\omega}}\|_1 \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$$

Do ánh xạ  $\Phi$  liên tục theo chuẩn theo bổ đề 1.

Ngoài ra, ta có

$$\| \hat{f} \|_{\infty} = \sup_{\mathbb{R}} | \hat{f}(\omega) | \leq \sup_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} | f(t) | e^{-i\omega t} dt = \| f \|_1$$

2. Kí hiệu  $F(t) = F(-t)$  với  $t \in \mathbb{R}$ . Biến đổi công thức (5.3.2)

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \hat{F}_-(t) \text{ với } \sigma = -\omega$$

Do hàm  $F \in L^1$  nên hàm  $F_- \in L^1$  và kết quả được suy ra từ tính chất 1. của định lý.

3. Theo tính chất 3. của bổ đề 2 và tính chất của tích phân bị chặn đều

$$(f * h_{\lambda})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) H(\lambda\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) H(\lambda\omega) e^{i\omega t} d\omega \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \hat{F}(t)$$

Mặt khác theo tính chất 5. của theo bổ đề 2

$$\| f * h_{\lambda} - f \|_1 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

Do tính chất của sự hội tụ theo chuẩn

$$\forall t \in \mathbb{R}, (f * h_{\lambda})(t) \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{\text{h.k.n}} f(t)$$

Do tính duy nhất của giới hạn suy ra

$$\hat{F} \stackrel{\text{h.k.n}}{=} f$$

►►

• **Cặp ánh xạ**

$$F : L^1 \rightarrow C_0, f \mapsto \hat{f} \text{ và } F^{-1} : L^1 \rightarrow C_0, \hat{f} \mapsto F \tag{5.3.3}$$

xác định theo cặp công thức (5.3.1) và (5.3.2) gọi là cặp *biến đổi Fourier* thuận nghịch.

Do tính chất 3. của định lý sau này chúng ta lấy  $F = \hat{f}$  và đồng nhất  $f \equiv \hat{F}$ . Hàm  $f$  gọi là *hàm gốc*, hàm  $F$  gọi là *hàm ảnh* và kí hiệu là  $f \leftrightarrow F$ .

Ví dụ

$$1. f(t) = e^{-at} \eta(t) \leftrightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t) e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a+i\omega} \text{ với } \text{Re } a > 0$$

$$f(t) = e^{-\lambda|t|} (\lambda > 0) \leftrightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda-i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+i\omega)t} dt = \frac{1}{\lambda-i\omega} + \frac{1}{\lambda+i\omega} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

$$2. \delta(t) \leftrightarrow u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \text{ và } u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 1 \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$3. f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \leftrightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = 2 \frac{\sin T\omega}{\omega}$$

$$F(\omega) = 2 \frac{\sin \omega T}{\omega} \leftrightarrow \hat{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \equiv f(t) \text{ ngoại trừ các điểm } t = \pm T$$

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq T \\ 0 & |\omega| > T \end{cases} \leftrightarrow \hat{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin Tt}{\pi t} \equiv \frac{1}{2\pi} \hat{f}(t)$$

**Đ4. Tính chất của biến đổi Fourier**

• Giả sử các hàm mà chúng ta nói đến sau đây khả tích tuyệt đối và do đó luôn có ảnh và nghịch ảnh Fourier. Kí hiệu  $f \leftrightarrow F$  với  $f(t)$  là hàm gốc và  $F(\omega)$  là hàm ảnh tương ứng.

**1. Tuyến tính** Nếu hàm  $f$  và hàm  $g$  khả tích tuyệt đối thì với mọi số phức  $\lambda$  hàm  $\lambda f + g$  cũng khả tích tuyệt đối.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda f(t) + g(t) \leftrightarrow \lambda F(\omega) + G(\omega) \tag{5.4.1}$$

Chứng minh

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t)) e^{-i\omega t} dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**2. Dịch chuyển gốc** Nếu hàm  $f$  khả tích tuyệt đối thì với mọi số thực  $\alpha$  hàm  $f(t - \alpha)$  cũng khả tích tuyệt đối.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(t - \alpha) \leftrightarrow e^{-i\alpha\omega} F(\omega) \tag{5.4.2}$$

Chứng minh

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \alpha) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\alpha\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \alpha) e^{-i\omega(t - \alpha)} d(t - \alpha) \quad \text{Đổi biến } \tau = t - \alpha \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**3. Đồng dạng** Nếu hàm  $f$  khả tích tuyệt đối thì với mọi số thực  $\alpha$  khác không hàm  $f(\alpha t)$  cũng khả tích tuyệt đối.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad \text{và} \quad f(-t) \leftrightarrow F(-\omega) \tag{5.4.3}$$

Chứng minh

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\text{sgn}(\alpha)}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t) e^{-i\frac{\omega}{\alpha}(\alpha t)} d(\alpha t) \quad \text{Đổi biến } \tau = \alpha t \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

Ví dụ Cho  $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \leftrightarrow F(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$

Ta có  $g(t) = f(3t + 3) - \frac{1}{2} f(t + 3) \leftrightarrow G(\omega) = 2e^{i3\omega} \frac{\sin(\omega/3)}{\omega} - e^{i3\omega} \frac{\sin \omega}{\omega}$

**4. Đạo hàm gốc** Giả sử hàm  $f$  và các đạo hàm của nó khả tích tuyệt đối.

$$f'(t) \leftrightarrow i\omega F(\omega) \quad \text{và} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, f^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega) \tag{5.4.4}$$

Chứng minh

$$f'(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (i\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = (i\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Qui nạp suy ra công thức thứ hai. \blacktriangleright\blacktriangleright

**5. Tích phân gốc** Giả sử hàm  $f$  và tích phân của nó khả tích tuyệt đối.

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (5.4.5)$$

Chứng minh

Kí hiệu  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow G(\omega), g'(t) = f(t)$

Theo tính chất 4  $\forall \omega \in \mathbb{R}, (i\omega)G(\omega) = F(\omega)$

Suy ra  $G(\omega) = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$  với  $\omega \neq 0$  và  $G(0) = \pi F(0)\delta(\omega)$  ▶▶

**6. ảnh của tích chập** Nếu hàm  $f$  và hàm  $g$  khả tích tuyệt đối thì tích chập của chúng cũng khả tích tuyệt đối.

$$(f * g)(t) \leftrightarrow F(\omega)G(\omega) \quad (5.4.6)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt \right) g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= F(\omega)G(\omega) \quad \text{▶▶} \end{aligned}$$

**7. Hệ thức Parseval** Giả sử hàm  $f$  và hàm ảnh  $F$  của nó khả tích tuyệt đối.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.4.7)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) F^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{▶▶} \end{aligned}$$

Ví dụ

1.  $\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow \eta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$  và  $\delta(t) = \frac{d\eta}{dt} \leftrightarrow i\omega \left( \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right) \equiv 1$

2.  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = (f * \eta)(t) \leftrightarrow F(\omega) \left( \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right) = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

3.  $f(t) = [e^{-\lambda t} \eta(t)] * [e^{-\mu t} \eta(t)] \ (\lambda \neq \mu) \leftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{\lambda + i\omega} \frac{1}{\mu + i\omega} = \frac{1}{\mu - \lambda} \left( \frac{1}{\lambda + i\omega} - \frac{1}{\mu + i\omega} \right)$   
 $\leftrightarrow \dot{F}(t) = \frac{1}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}) \eta(t) \equiv f(t)$

**Công thức đối ngẫu**

So sánh cặp công thức Fourier (5.3.1) và (5.3.2)

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow F(t) \leftrightarrow 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) e^{i(-\omega)\sigma} d\sigma = 2\pi \hat{F}(-\omega) \equiv 2\pi f(-\omega)$$

$$F(\omega) \leftrightarrow f(t) \Rightarrow f(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i(-t)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-t) \equiv \frac{1}{2\pi} f(-t) \quad (5.4.8)$$

Từ đó suy ra tính đối ngẫu của cặp biến đổi Fourier. Nếu biến đổi Fourier thuận có tính chất  $\alpha$  thì biến đổi Fourier nghịch cũng có tính chất đó chỉ sai khác một hằng số  $2\pi$  và biến số có dấu ngược lại. Chúng ta có các công thức sau đây.

2'. Dịch chuyển ảnh  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad e^{i\alpha t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \alpha) \quad (5.4.2')$

3'. Đồng dạng  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \leftrightarrow F(\alpha\omega) \quad (5.4.3')$

4'. Đạo hàm ảnh  $-itf(t) \leftrightarrow F'(\omega)$  và  $\forall n \in \mathbb{Z}, (-it)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega) \quad (5.4.4')$

5'. Tích phân ảnh  $-\frac{1}{it} f(t) + \pi f(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\sigma) d\sigma \quad (5.4.5')$

6'. Ảnh của tích  $f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma)G(\omega - \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega) \quad (5.5.6')$

**Ví dụ**

1.  $f(t) = e^{-\lambda|t|} (\lambda > 0) \leftrightarrow F(\omega) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \Rightarrow g(t) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2} \leftrightarrow G(\omega) = 2\pi e^{-\lambda|\omega|}$

2.  $F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} (\text{Re } a > 0) \leftrightarrow f(t) = e^{-at}\eta(t) \Rightarrow G(\omega) = e^{-a\omega}\eta(\omega) \leftrightarrow g(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a - it}$

3.  $u(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, e^{i\alpha t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \alpha)$

$$f(t) = \sin\alpha t = \frac{1}{2i} e^{i\alpha t} - \frac{1}{2i} e^{-i\alpha t} \leftrightarrow F(\omega) = \frac{\pi}{i} \delta(\omega - \alpha) - \frac{\pi}{i} \delta(\omega + \alpha)$$

$$G(\omega) = \sin\alpha\omega \leftrightarrow g(t) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{i} \delta(-t - \alpha) + \frac{\pi}{i} \delta(-t + \alpha) \right)$$

**Đ5. Tìm ảnh, gốc của biến đổi Fourier**

- Từ cặp công thức đối ngẫu (5.4.8) suy ra rằng nếu chúng ta có được một công thức cho hàm ảnh thì sẽ có công thức tương tự cho hàm gốc và ngược lại. Vì vậy trong mục này chúng ta chỉ đưa ra công thức tìm ảnh hoặc công thức tìm gốc.

**ảnh của hàm tuần hoàn**

Do hàm mũ  $g(\omega) = e^{-i\omega t}$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$  nên hàm ảnh  $F(\omega)$  luôn là hàm tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ . Ngược lại, ta có

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, F_1(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \alpha) \leftrightarrow f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \alpha)e^{-i\omega t} d\omega = e^{i\alpha t}$$

Nếu hàm  $f(t)$  là hàm tuần hoàn chu kỳ  $T$ , khai triển Fourier

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\alpha t} \quad \text{với } a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-ik\alpha t} dt, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ và } \alpha = \frac{2\pi}{T}$$

Do tính tuyến tính

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\alpha) \tag{5.5.1}$$

**Ví dụ**

1. Hàm  $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$  tuần hoàn chu kỳ là  $T$  và  $\forall k \in \mathbb{Z}, a_k = \frac{1}{T}$  suy ra

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow F(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$

2. Ta có  $f(t) = \cos\alpha t = \frac{1}{2} e^{-i\alpha t} + \frac{1}{2} e^{i\alpha t} \leftrightarrow F(\omega) = \pi\delta(\omega + \alpha) + \pi\delta(\omega - \alpha)$  suy ra

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma)G(\omega - \sigma)d\sigma = \frac{1}{2} G(\omega + \alpha) + \frac{1}{2} G(\omega - \alpha) \quad \text{với } g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

**ảnh của hàm trị thực**

Kí hiệu  $f^*(t)$  là liên hợp phức của hàm  $f(t)$ . Khi đó nếu hàm  $f$  khả tích tuyệt đối thì hàm  $f^*$  cũng khả tích tuyệt đối và ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)e^{-i\omega t} dt = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t} dt \right)^* = F^*(-\omega)$$

Từ đó suy ra công thức

$$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega) \tag{5.5.2}$$

• **Giải sử**

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) = |F(\omega)| e^{i\Phi(\omega)}$$

Nếu  $f(t)$  là hàm trị thực

$$f^*(t) = f(t) \Rightarrow F^*(-\omega) = R(-\omega) - iI(-\omega) \equiv F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

Từ đó suy ra

$$R(-\omega) = R(\omega), I(-\omega) = -I(\omega) \text{ và } |F(-\omega)| = |F(\omega)|, \Phi(-\omega) = -\Phi(\omega) \tag{5.5.3}$$

Nếu  $f(t)$  là hàm trị thực và chẵn

$$f^*(t) = f(t) \text{ và } f(-t) = f(t) \Rightarrow F^*(-\omega) = F(-\omega) = F(\omega) \text{ là hàm trị thực và chẵn}$$

Nếu  $f(t)$  là hàm trị thực và lẻ

$f^*(t) = f(t)$  và  $f(-t) = -f(t) \Rightarrow F^*(-\omega) = -F(-\omega) = F(\omega)$  là hàm thuần ảo và lẻ  
 Nếu  $f(t)$  là hàm trị thực bất kì, phân tích

$$f(t) = \frac{1}{2} [(f(t) + f(-t))] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] = Ef(t) + Of(t)$$

với  $Ef$  là hàm chẵn và  $Of$  là hàm lẻ. Dùng tính tuyến tính và các kết quả ở trên

$$f(t) \leftrightarrow R(\omega) + iI(\omega) = F(\omega) \quad (5.5.4)$$

Ví dụ  $f(t) = e^{-\lambda|t|} = 2E\{ e^{-\lambda t}\eta(t) \} (\lambda > 0) \leftrightarrow F(\omega) = 2Re\{ \frac{1}{\lambda + i\omega} \} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$

**Gốc của hàm hữu tỷ**

Ta đã có

$$\frac{1}{a + i\omega} \quad (Rea > 0) \leftrightarrow e^{-at}\eta(t) \quad (5.5.5)$$

Sử dụng công thức đạo hàm ảnh và qui nạp suy ra

$$\frac{1}{(a + i\omega)^n} \quad (Rea > 0) \leftrightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\eta(t) \quad (5.5.6)$$

Xét trường hợp hàm  $F(\omega)$  là một phân thức hữu tỷ thực sự. Do hàm  $F(\omega)$  khả tích tuyệt đối nên nó không có cực điểm thực. Trước hết chúng ta phân tích  $F(\omega)$  thành tổng các phân thức đơn và phân thức bội. Sau đó sử dụng các công thức (5.4.1) - (5.4.7') để đưa về các trường hợp trên. Trong các trường hợp phức tạp hơn có thể phải dùng đến các công thức ảnh của tích hoặc ảnh của tích chập để tìm gốc.

Ví dụ Tìm gốc của phân thức

$$\begin{aligned} 1. F(\omega) &= \frac{(i\omega)^2 + 3i\omega + 2}{(i\omega)^2 + 6i\omega + 9} = A + \frac{B}{3 + i\omega} + \frac{C}{(3 + i\omega)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{3 + i\omega} + \frac{2}{(3 + i\omega)^2} \leftrightarrow f(t) = \delta(t) - e^{-3t}\eta(t) + 2te^{-3t}\eta(t) \\ 2. F(\omega) &= \frac{2\omega - 1}{\omega^2 - 4\omega + 5} = \frac{2\omega - 1}{-(i\omega)^2 + 4i(i\omega) + 5} = \frac{A}{1 + 2i - i\omega} + \frac{B}{1 - 2i + i\omega} \\ &= \frac{-2 + i}{1 + 2i - i\omega} - \frac{2 + i}{1 - 2i + i\omega} \leftrightarrow f(t) = (-2 + i)e^{-(1+2i)t}\eta(t) - (2 + i)e^{-(1-2i)t}\eta(t) \end{aligned}$$

**Phương trình vi phân hệ số hằng**

Cho phương trình vi phân hệ số hằng

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^M b_j x^{(j)}(t) \quad \text{với } N \geq M \quad (5.5.7)$$

Chuyển qua ảnh



$$\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^{(k)} Y(\omega) = \sum_{j=0}^M b_j (i\omega)^{(j)} X(\omega)$$

Giải ra được

$$Y(\omega) = \frac{\sum b_j (i\omega)^j}{\sum a_k (i\omega)^k} X(\omega) = H(\omega)X(\omega) \leftrightarrow y(t) = h(t)*x(t) \quad (5.5.8)$$

Ví dụ Giải phương trình  $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$

Chuyển qua ảnh

$$[(i\omega)^2 + 4(i\omega) + 3] Y(\omega) = [(i\omega) + 2] X(\omega)$$

Giải ra được

$$H(\omega) = \frac{2 + i\omega}{(1 + i\omega)(3 + i\omega)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + i\omega} + \frac{1}{3 + i\omega} \right) \leftrightarrow h(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} + e^{-3t})\eta(t)$$

Theo công thức (5.5.8)

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t) \text{ và } x(t) = \eta(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\alpha}^t h(\tau) d\tau$$

Cho  $x(t)$  bằng một hàm cụ thể

$$x(t) = e^{-t}\eta(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}$$

Giải ra được nghiệm tương ứng

$$Y(\omega) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1 + i\omega} + \frac{2}{(1 + i\omega)^2} - \frac{1}{3 + i\omega} \right) \leftrightarrow y(t) = \frac{1}{4} (e^{-t} + 2te^{-t} - e^{-3t})\eta(t)$$

Bảng gốc ảnh Fourier

Tt	f(t)	F(ω)	Tt	f(t)	F(ω)
1	δ(t)	1	7	$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\alpha t}, \alpha = \frac{2\pi}{T}$	$2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\alpha)$
2	η(t)	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$	8	$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\alpha)$
3	δ(t - α)	$e^{i\alpha\omega}$	9	cosαt	$\pi[\delta(\omega - \alpha) + \delta(\omega + \alpha)]$
4	1	$2\pi\delta(\omega)$	10	sinαt	$-\pi i[\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha)]$
5	$\begin{cases} 1 &  t  < T \\ 0 &  t  > T \end{cases}$	$2 \frac{\sin T\omega}{\omega}$	11	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\eta(t)$	$\frac{1}{(a + i\omega)^n}, \text{Re} a > 0$
6	$\frac{\sin Wt}{\pi}$	$\begin{cases} 1 &  \omega  < W \\ 0 &  \omega  > W \end{cases}$	12	$\begin{cases} 1 &  t  < T_1 \\ 0 & T_1 <  t  \leq T/2 \end{cases}$ f(t + T) = f(t)	$2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k\alpha T_1}{k} \delta(\omega - k\alpha)$

Đ6. Biến đổi Laplace

• Hàm  $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  gọi là *hàm gốc* nếu có các tính chất sau đây

1.  $f(t)$  liên tục từng khúc trên  $\mathbb{R}$
2.  $\forall t < 0, f(t) = 0$
3.  $\exists M > 0, \exists s > 0$  sao cho  $\forall t > 0, |f(t)| < Me^{st}$

Số  $s_0$  bé nhất thoả mãn điều kiện 3. gọi là *chỉ số tăng* của hàm gốc. Kí hiệu  $G$  là tập hợp các hàm gốc và  $P_+(s_0) = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > s_0 \}$  là nửa mặt phẳng phải. Nếu  $f(t)$  là hàm gốc chỉ số tăng  $s_0$  ta sẽ viết  $f \in G(s_0)$ .

**Định lý** Cho  $f \in G(s_0)$ . Khi đó hàm biến phức

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt \quad \text{với } z \in P_+(s_0) \tag{5.6.1}$$

giải tích trên nửa mặt phẳng  $P_+(s_0)$  và  $F(z) \xrightarrow{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty} 0$  đều theo Argz.

**Chứng minh**

Theo giả thiết ta có ước lượng

$$\forall \sigma = \operatorname{Re} z > s_0, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t)e^{-zt}| \leq Me^{-(\sigma-s_0)t} \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} 0$$

Suy ra tích phân (5.6.1) hội tụ đều trên  $P_+(s_0)$  và dần đều về không khi  $\sigma$  dần ra  $+\infty$ . Do hàm mũ  $g(z) = e^{-zt}$  là hàm giải tích nên hàm  $F(z)$  giải tích trên  $P_+(s_0)$ . Ngoài ra đạo hàm qua dấu tích phân chúng ta nhận được công thức

$$\forall z \in P_+(s_0), F'(z) = - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt} dt \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

• ánh xạ

$$L : G(s_0) \rightarrow H(P_+(s_0)), f(t) \alpha F(z) \tag{5.6.2}$$

xác định theo công thức (5.6.1) gọi là *phép biến đổi Laplace*. Hàm  $f(t)$  gọi là hàm gốc, hàm  $F(z)$  gọi là hàm ảnh của biến đổi Laplace và kí hiệu là  $f(t) \leftrightarrow F(z)$ .

**Ví dụ**

1.  $\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow u(z) = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-zt} dt \equiv 1$
2.  $\eta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow F(z) = \int_0^{+\infty} \eta(t)e^{-zt} dt = \frac{1}{z}$  với  $\operatorname{Re} z > 0$
3.  $f(t) = e^{at}\eta(t) \leftrightarrow F(z) = \int_0^{+\infty} e^{(a-z)t} dt = \frac{1}{z-a}$  với  $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a$

**Chú ý**

1. Biến đổi Laplace không phải là song ánh và nửa mặt phẳng  $P_+(s_0)$  thay đổi theo từng hàm gốc  $f(t)$ . Tức là  $\exists f(t) \notin G(s_0)$  và  $F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$  là hàm giải tích trên  $P_+(s_0)$ .
2. Hàm gốc định nghĩa như trên gọi là gốc phải. Tương tự có thể định nghĩa hàm gốc trái, hàm gốc hai bên. Do vậy có thể nói đến phép biến đổi Laplace trái, phải và hai bên. Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét đến biến đổi Laplace phải.
3. Nếu  $f(t)$  là hàm trị phức thoả mãn các điều kiện 1. và 3. của định nghĩa hàm gốc thì  $f(t)\eta(t)$  cũng là hàm gốc. Sau này chúng ta sẽ viết  $f(t)$  thay cho  $f(t)\eta(t)$ .

**Đ7. Biến đổi Laplace ngược**

• Hàm  $F \in F(\forall, \forall)$  gọi là *hàm ảnh* nếu có các tính chất sau đây

1.  $F(z)$  giải tích trên nửa mặt phẳng  $\text{Re } z > s$
2.  $F(z) \xrightarrow{\text{Re } z \rightarrow +\infty} 0$  đều theo  $\text{Arg } z$
3.  $\forall \sigma = \text{Re } z > s$ , tích phân  $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(z)dz$  hội tụ tuyệt đối

Số  $s_0$  bé nhất thoả mãn điều kiện 1. và 3. gọi là *chỉ số* của hàm  $F(z)$ . Kí hiệu  $A$  là tập hợp các hàm ảnh. Nếu  $F(z)$  là hàm ảnh chỉ số  $s_0$  ta sẽ viết  $F \in A(s_0)$ .

**Định lý** Cho  $F(z) \in A(s_0)$ . Khi đó hàm trị phức

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(z)e^{zt} dz \tag{5.7.1}$$

là hàm gốc chỉ số  $s_0$  và  $f(t) \leftrightarrow F(z)$ .

**Chứng minh**

Theo giả thiết 3. với mỗi  $\sigma > s_0$  cố định hàm  $F(\sigma + i\omega)$  khả tích tuyệt đối. Kí hiệu

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$\forall \sigma > s_0, f(t) = g_\sigma(t)e^{\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega)e^{\sigma+i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(z)e^{zt} dz$$

Theo định lý về biến đổi Fourier ngược hàm  $g_\sigma \in C_0$  suy ra hàm  $f \in \text{CM}$ . Ngoài ra do giả thiết 1., 2. và công thức tính tích phân suy rộng (4.9.6)

$$\forall t = -\tau < 0, f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} F(-z)e^{z\tau} dz = \sum_{\text{Re } a_k > s_0} \text{Res}[F(-z)e^{z\tau}, a_k] = 0$$

Ước lượng tích phân

$$\forall \sigma > s_0, |f(t)| = |g_\sigma(t)| e^{\sigma t} < M e^{\sigma t} \text{ với } M = \sup\{|g_\sigma(t)|, \sigma > s_0\}$$

Từ đó suy ra hàm  $f(t)$  là hàm gốc và ta có

$$\forall \sigma > s_0, F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**Hệ quả 1** Cho hàm  $F(z) \in A(s_0)$  và có các cực điểm  $a_k$  với  $k = 1 \dots n$

$$F(z) \leftrightarrow f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z)e^{zt}, a_k] \quad (5.7.2)$$

Chứng minh

Suy ra từ công thức (5.7.1) và công thức tích phân suy rộng (4.9.6) ▶▶

**Hệ quả 2** Cho hàm  $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$  là phân thức hữu tỷ thực sự, có các cực điểm đơn thực

$a_k$  với  $k = 1 \dots n$  và các cực điểm đơn phức  $b_j = \alpha_j \pm \beta_j$  với  $j = 1 \dots m$ . Khi đó

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t} + 2 \sum_{j=1}^m e^{\alpha_j t} (M_j \cos \beta_j t - N_j \sin \beta_j t) \quad (5.7.3)$$

trong đó  $M_j = \text{Re} \frac{A(b_j)}{B'(b_j)}$  và  $N_j = \text{Im} \frac{A(b_j)}{B'(b_j)}$  với  $j = 1 \dots m$

Chứng minh

Suy ra từ công thức (5.7.2) và công thức tính thặng dư tại cực điểm đơn. ▶▶

**Ví dụ** Hàm  $F(z) = \frac{3z^2 + 3z + 2}{(z-2)(z^2 + 4z + 8)}$  có các cực điểm đơn  $a = 2$  và  $b = -2 \pm 2i$

Ta có  $\frac{A(2)}{B(2)} = 1, \frac{A(-2+2i)}{B'(-2+2i)} = 1 + \frac{1}{4}i \Rightarrow M = 1, N = \frac{1}{4}$

Suy ra  $f(t) = e^{2t} + 2e^{-2t}(\cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t)$

**Hệ quả 3** Cho  $F(z) \in A(s_0)$  và có khai triển Laurent trên miền  $|z| > R$ . Khi đó

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} \leftrightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} \quad (5.7.4)$$

Chứng minh

Với  $\text{Re} z > R$ , chuỗi ở vế trái (5.7.4) hội tụ đều. Tích phân từng từ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^n} dz \text{ với } \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^n} dz = \text{Res} z \left[ \frac{e^{zt}}{z^n}, 0 \right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

Đ8. Tính chất của Biến đổi Laplace

• Giả sử các hàm mà chúng ta nói đến là hàm gốc hoặc là hàm ảnh và do đó luôn có ảnh và nghịch ảnh Laplace. Kí hiệu  $f \leftrightarrow F$  với  $f(t)$  là hàm gốc và  $F(z)$  là hàm ảnh tương ứng.

**1. Tuyến tính** Nếu hàm  $f$  và hàm  $g$  là các hàm gốc thì với mọi số phức  $\lambda$  hàm  $\lambda f + g$  cũng là hàm gốc.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda f(t) + g(t) \leftrightarrow \lambda F(z) + G(z) \quad (5.8.1)$$

Chứng minh

$$\lambda f(t) + g(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} [\lambda f(t) + g(t)] dt = \lambda F(z) + G(z) \quad \blacktriangleright$$

**2. Dịch chuyển gốc** Nếu hàm  $f$  là hàm gốc thì với mọi số dương  $\alpha$  hàm  $f(t - \alpha)$  cũng là hàm gốc.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, f(t - \alpha) \leftrightarrow e^{-\alpha z} F(z) \quad (5.8.2)$$

Chứng minh

$$f(t - \alpha) \leftrightarrow e^{-\alpha z} \int_0^{+\infty} f(t - \alpha) e^{-z(t-\alpha)} d(t - \alpha) \quad \text{Đổi biến } \tau = t - \alpha \quad \blacktriangleright$$

**3. Đồng dạng** Nếu hàm  $f$  là hàm gốc thì với mọi số dương  $\alpha$  hàm  $f(\alpha t)$  cũng là hàm gốc.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad (5.8.3)$$

Chứng minh

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-\frac{z}{\alpha} \alpha t} d(\alpha t) \quad \text{Đổi biến } \tau = \alpha t \quad \blacktriangleright$$

**4. Hàm tuần hoàn** Nếu hàm  $f$  là  $T$ -tuần hoàn sao cho  $\forall t \in [0, T], f(t) = g(t)$  với  $g$  là hàm gốc thì hàm  $f$  cũng là hàm gốc.

$$f(t) \leftrightarrow F(z) = \frac{G(z)}{1 - e^{-Tz}} \quad \text{với } g(t) \leftrightarrow G(z) \quad (5.8.4)$$

Chứng minh

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(n-1)T}^{nT} g(t) e^{-zt} dt = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(n-1)Tz} \right) \int_0^T g(\tau) e^{-z\tau} d\tau \quad \blacktriangleright$$

Ví dụ Ta có  $\sin \alpha t = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) \leftrightarrow \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z - i\alpha} - \frac{1}{z + i\alpha} \right) = \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}$  với  $\text{Re} z > 0$

Tương tự tìm ảnh của  $\cos \alpha t, \text{sh} \alpha t, \cos^2 \alpha t, \dots$

**5. Đạo hàm gốc** Giả sử hàm  $f$  và các đạo hàm của nó là các hàm gốc.

$$f'(t) \leftrightarrow zF(z) - f(0) \text{ và } \forall n \in \mathbb{Z}, f^{(n)}(t) \leftrightarrow z^n F(z) - z^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (5.8.5)$$

Chứng minh

$$f'(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-zt} dt = e^{-zt}f(t)|_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt \text{ với } \operatorname{Re} z > 0$$

Qui nạp suy ra công thức thứ hai. ▶▶

**6. Tích phân gốc** Nếu hàm  $f$  là hàm gốc thì tích phân của nó cũng là hàm gốc.

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{z} F(z) \quad (5.8.6)$$

Chứng minh

Hàm  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  thoả mãn các điều kiện hàm gốc và  $g(0) = 0$ . Theo công thức 5.

$$g(t) \leftrightarrow G(z) \Rightarrow g'(t) = f(t) \leftrightarrow zG(z) - g(0) = F(z) \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**7. Anh của tích chập** Nếu hàm  $f$  và hàm  $g$  là các hàm gốc thì tích chập của nó cũng là hàm gốc.

$$(f * g)(t) \leftrightarrow F(z)G(z) \quad (5.8.7)$$

Chứng minh

$$(f * g)(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right) e^{-zt} dt = \left( \int_0^{+\infty} e^{-z\tau} x(\tau) d\tau \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} y(t-\tau) d\tau \right) \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

**8. Công thức Duhamel** Giả sử hàm  $f$ , hàm  $g$  và các đạo hàm của chúng là các hàm gốc.

$$\begin{aligned} zF(z)G(z) &\leftrightarrow f(0)g(t) + (f' * g)(t) \\ &\leftrightarrow f(t)g(0) + (f * g')(t) \end{aligned} \quad (5.8.8)$$

Chứng minh

$$zF(z)G(z) = f(0)G(z) + (zF(z) - f(0))G(z) \leftrightarrow f(0)g(t) + (f * g)(t) \quad \blacktriangleright\blacktriangleright$$

Ví dụ

1. Ta có  $\delta(t) \leftrightarrow 1$  suy ra  $\eta(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{z}$  và  $\delta(t) = \eta'(t) \leftrightarrow 1$

2. Ta có  $t = \int_0^t \eta(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{z^2}$  qui nạp suy ra  $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{z^{n+1}}$  với  $\operatorname{Re} z > 0$

**Công thức đối ngẫu**

Bằng cách so sánh các công thức ảnh và nghịch ảnh của biến đổi Laplace chúng ta suy ra các công thức đối ngẫu của các công thức (5.8.2) - (5.8.7)

2'. Dịch chuyển ảnh  $\forall a \in \mathbb{C}, e^{at}f(t) \leftrightarrow F(z - a)$  (5.8.2')

5'. Đạo hàm ảnh  $tf(t) \leftrightarrow -F'(z)$  và  $\forall n \in \mathbb{Z}, t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(z)$  (5.8.5')

6'. Tích phân ảnh  $\frac{1}{t} f(t) \leftrightarrow \int_z^\infty F(\zeta) d\zeta$  (5.8.6')

7'. Ảnh của tích  $f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\zeta)G(z-\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i} (F * G)(z)$  (5.8.7')

**Ví dụ**

1. Ta có  $t^n \leftrightarrow \frac{n!}{z^{n+1}}$  suy ra  $e^{-at} t^n \leftrightarrow \frac{n!}{(z+a)^{n+1}}$  với  $\text{Re} z > -\text{Re} a$

2. Ta có  $\sin \alpha t \leftrightarrow \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}$  suy ra  $t \sin \alpha t \leftrightarrow -\left(\frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}\right)' = \frac{2\alpha z}{(z^2 + \alpha^2)^2}$

3. Ta có  $\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_z^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} z$  suy ra  $\text{sit} = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \leftrightarrow \frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg} z\right)$

**Đ9. Tìm ảnh, gốc của biến đổi Laplace**

**Gốc của hàm hữu tỷ**

• Bài toán tìm ảnh của hàm gốc thường đơn giản, có thể giải được ngay bằng cách sử dụng các công thức (5.7.1) - (5.7.7'). Bài toán tìm gốc phức tạp hơn nhiều, để đơn giản chúng ta giới hạn trong phạm vi tìm hàm gốc của các phân thức hữu tỷ. Trong các ví dụ ở trên chúng ta đã có các công thức sau đây.

$$\frac{1}{z-a} \leftrightarrow e^{at} \qquad \frac{1}{(z-a)^n} \leftrightarrow e^{at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (5.9.1)$$

$$\frac{z}{z^2 + \alpha^2} \leftrightarrow \cos \alpha t \qquad \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2} \leftrightarrow \sin \alpha t \qquad (5.9.2)$$

Giả sử

$$\frac{1}{(z^2 + \alpha^2)^{n-1}} \leftrightarrow f(t) \quad \text{và} \quad \frac{z}{(z^2 + \alpha^2)^{n-1}} \leftrightarrow g(t)$$

Biến đổi

$$\frac{z}{(z^2 + \alpha^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)} \left( \frac{1}{(z^2 + \alpha^2)^{n-1}} \right)' \leftrightarrow \frac{1}{2(n-1)} t f(t) = \varphi(t) \qquad (5.9.3)$$

$$\frac{1}{(z^2 + \alpha^2)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)\alpha^2} \frac{1}{(z^2 + \alpha^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)\alpha^2} \left( \frac{z}{(z^2 + \alpha^2)^{n-1}} \right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-3}{2(n-1)\alpha^2} f(t) - \frac{1}{2(n-1)\alpha^2} \operatorname{tg}(t) = \psi(t) \quad (5.9.4)$$

Biến đổi

$$\frac{Mz + N}{(z^2 + 2pz + q)^n} = \frac{M(z+p)}{((z+p)^2 + \alpha^2)^n} + \frac{N-Mp}{((z+p)^2 + \alpha^2)^n} \text{ với } \alpha^2 = q - p^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow Me^{-pt}\varphi(t) + (N - Mp)e^{-pt}\psi(t) \quad (5.9.5)$$

Trường hợp  $F(z)$  là phân thức bất kỳ, ta phân tích  $F(z)$  thành tổng các phân thức đơn giản dạng (5.9.1) - (5.9.5) Sau đó dùng các tính chất tuyến tính để tìm hàm gốc  $f(t)$ .

**Ví dụ** Tìm gốc của phân thức

$$1. F(z) = \frac{3z^2 + 2z + 2}{(z-2)(z^2 + 4z + 8)} = \frac{1}{z-2} + 2 \frac{z+2}{(z+2)^2 + 4} - \frac{1}{(z+2)^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} + 2e^{-2t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t = f(t)$$

$$2. F(z) = \frac{3z-4}{(z^2 - 2z + 2)^2} = \frac{3(z-1)-1}{((z-1)^2 + 1)^2} \Leftrightarrow f(t) = e^t g(t)$$

$$G(z) = 3 \frac{z}{(z^2 + 1)^2} - \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{z^2 + 1} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z^2 + 1} \right)' - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} t \sin t + \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t = g(t)$$

**Phương trình vi phân hệ số hằng**

Cho phương trình vi phân hệ số hằng

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

$$x_0 = x(0), x_1 = x'(0), \dots, x_{n-1} = x^{(n-1)}(0) \quad (5.9.6)$$

• Giả sử các hàm  $x(t), \dots, x^{(n)}(t)$  và  $f(t)$  là các hàm gốc. Chuyển qua ảnh

$$\begin{aligned} x(t) &\Leftrightarrow X(z) \\ x'(t) &\Leftrightarrow zX(z) - x_0 \\ \dots & \\ x^{(n)}(t) &\Leftrightarrow z^n X(z) - z^{n-1}x_0 - \dots - x_{n-1} \\ f(t) &\Leftrightarrow F(z) \end{aligned}$$


---


$$(5.9.6) \quad \Leftrightarrow A(z)X(z) = F(z) + B(z)$$

Giải ra được

$$X(z) = \frac{F(z) + B(z)}{A(z)} \quad \Leftrightarrow x(t) \quad (5.9.7)$$



Ví dụ Giải phương trình 
$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3 e^{-2t} \\ x(0) = 1, x'(0) = 2 \end{cases}$$

Giả sử  $x(t)$  và các đạo hàm của nó đều là hàm gốc.

$$x(t) \leftrightarrow X(z), x'(t) \leftrightarrow zX(z) - 1, x''(t) \leftrightarrow z^2X(z) - z - 2 \text{ và } f(t) = t^3 e^{-2t} \leftrightarrow \frac{6}{(z+2)^4}$$

Chuyển qua ảnh

$$(z^2 + 4z + 4)X(z) = \frac{6}{(z+2)^4} + (z+6)$$

Giải ra được

$$X(z) = \frac{6}{(z+2)^4} + \frac{4}{(z+2)^2} + \frac{1}{z+2} \leftrightarrow x(t) = e^{-2t} \left( 1 + 4t + \frac{1}{20} t^5 \right)$$

- Phương pháp trên có thể sử dụng để giải một số phương trình vi phân hệ số biến thiên, hệ phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng hoặc phương trình tích phân.

Ví dụ Giải hệ phương trình vi phân 
$$\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' + 3x - 2y = 2e^t \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases}$$

Giả sử  $x(t)$  và  $y(t)$  là các hàm gốc, chuyển qua ảnh hệ phương trình

$$\begin{cases} (z+1)X - Y = \frac{1}{z-1} + 1 \\ 3X + (z-2)Y = \frac{2}{z-1} + 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tuyến tính suy ra

$$X(z) = \frac{1}{z-1} = Y(z) \leftrightarrow x(t) = e^t = y(t)$$

Bảng gốc ảnh Laplace

Tt	f(t)	F(z)	Tt	f(t)	F(z)
1	$\delta(t)$	1	5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(z+\alpha)^n}, \text{Re}z > -\alpha$
2	$\eta(t)$	$\frac{1}{z}, \text{Re}z > 0$	6	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{z+\alpha}{(z+\alpha)^2 + \beta^2}, \text{Re}z > 0$
3	$\delta(t - \alpha)$	$e^{-\alpha z}, z \in \mathbb{V}$	7	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(z+\alpha)^2 + \beta^2}, \text{Re}z > 0$
4	$\delta_n(t) = \delta^{(n)}(t)$	$z^n, z \in \mathbb{V}$	8	$\eta_n(t) = \eta(t) * \dots * \eta(t)$	$\frac{1}{z^n}, \text{Re}z > 0$

Bài tập chương 5

1. Tìm ảnh Fourier của các hàm gốc sau đây.

a.  $e^{-2(t-1)}\eta(t)$       b.  $e^{-2|t-1|}$       c.  $\delta(t+1) + \delta(t-1)$       d.  $\sin(2\pi t + \frac{\pi}{4})$

e.  $e^{-\alpha t} \cos \beta t \eta(t), \alpha > 0$       f.  $e^{-3|t|} \sin 2t$       g.  $te^{-2t} \sin 4t \eta(t)$       h.  $\sin t \sin 2t$

i.  $\begin{cases} 1 + \cos \pi t & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$       j.  $\begin{cases} 1 - t^2 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \notin (0, 1) \end{cases}$       k.  $\begin{cases} t & |t| \leq 1 \\ 1 & 1 < |t| \leq 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases}$       l.  $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-2n|}$

m.  $t \left( \frac{\sin t}{\pi t} \right)^2$       n.  $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$       o.  $\frac{\sin \pi t}{\pi t} \frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$

p. Biết  $f(t) \in \mathcal{S}'$ ,  $F^{-1}\{(1+i\omega)F(\omega)\} = Ae^{-2t}\eta(t)$  và  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi$

q. Biết  $f(t) \in \mathcal{S}'$ ,  $\forall t \leq 0, f(t) = 0$  và  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} F(\omega) e^{it\omega} d\omega = |t| e^{-|t|}$

2. Tìm gốc Fourier của các hàm ảnh sau đây.

a.  $e^{\omega}\eta(-\omega) - 2e^{-\omega}\eta(\omega)$       b.  $\frac{2 \sin 3(\omega - 2\pi)}{\omega - 2\pi}$       c.  $\eta(\omega) - \eta(\omega - 2)$       d.  $e^{2i\omega} \cos \omega$

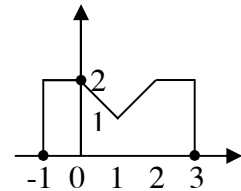
e.  $e^{-\omega} \cos(4\omega + \pi/3)$       f.  $\cos 2\omega \sin(\omega/2)$       g.  $2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$

h.  $2\delta(\omega - \pi) + 2\delta(\omega + \pi) + 3\delta(\omega - 2\pi) + 3\delta(\omega + 2\pi)$

i.  $|F| = 2[\eta(\omega + 3) - \eta(\omega - 3)], \Phi = -\frac{3}{2}\omega + \pi$

3. Cho  $f \leftrightarrow F$  với  $f(t)$  có đồ thị như hình bên.

a. Tìm  $\Phi(\omega)$       b. Tìm  $F(0)$       c. Tính  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$



d. Tính  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{i2\omega} d\omega$       e. Tính  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$       f. Tìm gốc của  $\operatorname{Re} F(\omega)$

4. Tính tích chập  $(f * g)(t)$  bằng biến đổi Fourier ngược

a.  $f(t) = te^{-2t}\eta(t), g(t) = e^{-4t}\eta(t)$       b.  $f(t) = te^{-2t}\eta(t), g(t) = te^{-4t}\eta(t)$

c.  $f(t) = e^{-t}\eta(t), g(t) = e^t\eta(-t)$       d.  $f(t) = \cos^2 t, g(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$

5. Giải phương trình vi phân hệ số hằng bằng biến đổi Fourier.

a.  $y'' + 3y' + 2y = x' + 3x$       b.  $y'' + 5y' + 6y = x' + 4x$

c.  $y'' + \sqrt{2}y' + y = 2x'' - 2x$       d.  $y'' + 4y' + 3y = x' + 2x$

e.  $y' + 10y = x * f - x$  với  $f(t) = e^{-t}\eta(t) + 3\delta(t)$

6. Tìm ảnh Laplace của các hàm gốc sau đây.

- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| a. $e^{-2t} + e^{-3t}\sin 3t$                   | b. $\delta(t) + \eta(t)$                  | c. $\cos^2 \alpha t$                      | d. $\sin^3 t$                             |
| e. $te^{\alpha t}$                              | f. $t\cos^3 t$                            | g. $e^{-2t}\text{ch} 3t$                  | h. $(t+1)\sin 2t$                         |
| i. $\text{ch} 2t \cos t$                        | j. $e^{-t}\sin 2t \cos 4t$                | k. $\frac{\sin 4t}{t}$                    | l. $\frac{\sin^2 t}{t}$                   |
| m. $\frac{1 - \cos t}{te^t}$                    | n. $\frac{\sin 2t \cos 3t}{t}$            | o. $\int_0^t (\tau+1) \cos \tau d\tau$    | p. $\int_0^t \frac{1-e^\tau}{\tau} d\tau$ |
| q. $\int_0^t \frac{\text{sh} \tau}{\tau} d\tau$ | r. $\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau} d\tau$ | s. $\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau d\tau$ | t. $ \sin t ,  \cos t $                   |

7. Tìm gốc Laplace của các hàm ảnh sau đây.

- |                                   |                                     |                                       |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| a. $\frac{e^{-2z}}{z^2 - 9}$      | b. $\frac{z+1}{z^2 + 2z}$           | c. $\frac{1}{z^2 - 4z + 8}$           | d. $\frac{z+8}{z^2 + 4z + 5}$ |
| e. $\frac{z^2}{(z-1)^3}$          | f. $\frac{z^3}{(z^2 + 4)^2}$        | g. $\frac{3z}{(z-1)(z-3)^2}$          | h. $\frac{z}{z^4 - 5z^2 + 4}$ |
| i. $\frac{1}{z^2(z-1)}$           | j. $\frac{z^2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)}$ | k. $\frac{3z^2 - 1}{(z^2 + 1)^3}$     | l. $\sin \frac{1}{z}$         |
| n. $\frac{1}{z} \cos \frac{1}{z}$ | o. $\frac{1}{z} e^{\frac{1}{z^2}}$  | p. $\frac{1}{z-1} e^{-\frac{1}{z-1}}$ |                               |

8. Giải các phương trình vi phân sau đây bằng biến đổi Laplace.

- |                                     |                             |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| a. $x'' - 3x' + 2x = te^t$          | $x(0) = 1, x'(0) = -2$      |
| b. $x'' + 2x' + x = t^2 e^t$        | $x(0) = 0, x'(0) = 0$       |
| c. $x'' - 2x' + 2x = e^t \sin t$    | $x(0) = 0, x'(0) = 1$       |
| d. $x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}$      | $x(0) = 2, x'(0) = 6$       |
| e. $x'' + 4x = 3\sin t + 10\cos 3t$ | $x(0) = -2, x'(0) = 3$      |
| f. $x'' - x' = 4\sin t + 5\cos 2t$  | $x(0) = -1, x'(0) = -2$     |
| g. $x'' + 3x'' + 3x' + x = 6e^{-t}$ | $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ |

9. Giải các hệ phương trình vi phân sau đây bằng biến đổi Laplace.

- |  |   |
|--|---|
| a. $\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t} \\ 2x + y' - 3y = 3e^{2t} \\ x(0) = 2, y(0) = 0 \end{cases}$        | c. $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t \\ x + y' + 2y = \sin t \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$      |
| b. $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t \\ x + y' = -\sin t \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$ | d. $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x - y'' = 2\sin t \\ x(0) = -1, x'(0) = y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ |

## Lý thuyết trường

### Đ1. Trường vô hướng

- Miền  $D \subset \mathbb{R}^3$  cùng với ánh xạ

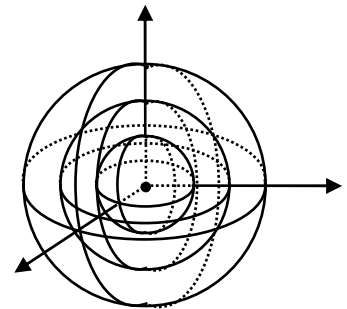
$$u : D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto u(x, y, z) \quad (6.1.1)$$

gọi là một trường vô hướng và kí hiệu là  $(D, u)$ . Như vậy nếu  $(D, u)$  là trường vô hướng thì  $u$  là một hàm số xác định trên miền  $D$ . Sự khác biệt thể hiện ở chỗ khi nói về trường vô hướng ngoài các tính chất của hàm  $u$  người ta còn quan tâm hơn đến cấu trúc của miền xác định  $D$ . Trường vô hướng  $(D, u)$  gọi là liên tục (có đạo hàm riêng, ...) nếu như hàm  $u$  là liên tục (có đạo hàm riêng, ...) trên miền  $D$ . Sau này nếu không nói gì thêm chúng ta xem rằng các trường vô hướng là có đạo hàm liên tục từng khúc trở lên.

Cho điểm  $A \in D$ , mặt cong có phương trình

$$u(x, y, z) = u(A)$$

gọi là mặt mức (đẳng trị) đi qua điểm  $A$ . Do tính đơn trị của hàm số, qua mỗi điểm  $A$  chỉ có duy nhất một mặt mức. Hay nói cách khác các mặt mức phân chia miền  $D$  thành các lớp mặt cong rời nhau.



Ví dụ Trường vô hướng  $u = x^2 + y^2 + z^2$  gọi là trường bán kính, các mặt mức là các mặt cầu đồng tâm :  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

- Cho điểm  $A \in D$  và vectơ đơn vị  $e \in \mathbb{R}^3$ . Giới hạn

$$\frac{\partial u}{\partial e}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(A + te) - u(A)}{t} \quad (6.1.2)$$

gọi là đạo hàm theo hướng vectơ  $e$  của trường vô hướng  $u$  tại điểm  $A$ .

**Định lý** Cho vectơ  $e = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ . Khi đó

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \quad (6.1.3)$$

Chứng minh

Theo giả thiết hàm  $u$  có đạo hàm riêng liên tục

$$u(A + te) - u(A) = \frac{\partial u}{\partial x} t \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} t \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} t \cos\gamma + o(te)$$

Chia hai vế cho  $t$  và chuyển qua giới hạn nhận được công thức trên. ▶▶

**Hệ quả**  $\frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial z}$

**Ví dụ** Tính đạo hàm theo hướng vectơ  $e(1, 1, -1)$  của trường vô hướng  $u = x^2 + y^2 - z^2$  tại điểm  $A(1, 1, -1)$ .

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{\partial u}{\partial y}(A) = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A) = -2 \text{ và } \cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial e}(A) = 2 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

## Đ2. Gradient

• Cho trường vô hướng  $(D, u)$ . Vectơ

$$\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \tag{6.2.1}$$

gọi là *gradient* của trường vô hướng  $u$ .

**Ví dụ** Cho  $u = xy + yz - zx$  và  $A(1, 1, -1)$

Ta có

$$\mathbf{grad} u = \{y - z, x + z, y - x\} \text{ và } \mathbf{grad} u(A) = \{2, 0, 0\}$$

• Từ định nghĩa suy ra gradient có các tính chất sau đây.

**Các qui tắc tính** Cho  $u, v$  là các trường vô hướng,  $f$  là hàm có đạo hàm và  $\lambda$  là số thực.

1.  $\mathbf{grad} (\lambda u + v) = \lambda \mathbf{grad} u + \mathbf{grad} v$
2.  $\mathbf{grad} (uv) = v \mathbf{grad} u + u \mathbf{grad} v$
3.  $\mathbf{grad} f(u) = f'(u) \mathbf{grad} u$  (6.2.2)

**Chứng minh**

Suy ra từ công thức (6.2.1) và tính chất của đạo hàm riêng. ▶▶

**Liên hệ với đạo hàm theo hướng** Cho  $u$  là trường vô hướng và  $e$  vectơ đơn vị.

4.  $\frac{\partial u}{\partial e} = \langle \mathbf{grad} u, e \rangle$
5.  $\text{Max} \left| \frac{\partial u}{\partial e} \right| = \|\mathbf{grad} u\|$  đạt được khi và chỉ khi  $e // \mathbf{grad} u$

6.  $\text{Min} \left| \frac{\partial u}{\partial e} \right| = 0$  đạt được khi và chỉ khi  $e \perp \text{grad } u$  (6.2.3)

Chứng minh

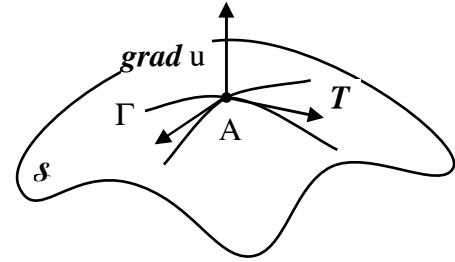
Suy ra từ công thức (6.1.2) và tính chất của tích vô hướng. ▶▶

Liên hệ với mặt mức

7. Gradient của trường vô hướng  $u$  tại điểm  $A$  là pháp vectơ của mặt mức đi qua điểm  $A$  tại chính điểm đó.

Chứng minh

Cho  $S : u(x, y, z) = \alpha$  là mặt mức đi qua điểm  $A$  và  $\Gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  là đường cong trơn tùy ý đi qua điểm  $A$  và nằm gọn trên mặt cong  $S$ . Khi đó vectơ  $T = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$  là vectơ tiếp xúc của đường cong  $\Gamma$  tại điểm  $A$ .



Do  $\Gamma \subset S$  nên  $u[x(t), y(t), z(t)] = \alpha$ . Đạo hàm hai vế theo  $t$

$$u'_x x'(t) + u'_y y'(t) + u'_z z'(t) = 0$$

Suy ra  $\text{grad } u \perp T$  ▶▶

Ví dụ Xét phân bố nhiệt trên vật rắn hình cầu  $D$ , đồng chất, truyền nhiệt đẳng hướng, nguồn nhiệt đặt ở tâm. Gọi  $u(x, y, z)$  là nhiệt độ tại điểm  $M(x, y, z)$ . Khi đó  $u$  là trường vô hướng xác định trên miền  $D$ . Các mặt mức (đẳng nhiệt) là các mặt cầu đồng tâm. Hướng truyền nhiệt cực đại đồng phương với vectơ  $\text{grad } u$ , hướng cực tiểu vuông góc với vectơ  $\text{grad } u$ .

### Đ3. Trường vectơ

- Miền  $D \subset 3^3$  cùng với ánh xạ

$$F : D \rightarrow 3^3, (x, y, z) \mapsto F = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (6.3.1)$$

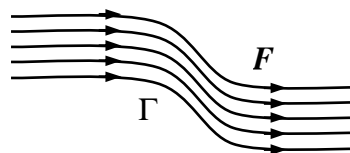
gọi là trường vectơ và kí hiệu  $(D, F)$ . Các trường vô hướng  $X, Y$  và  $Z$  gọi là các thành phần toạ độ của trường vectơ  $F$ . Trường vectơ  $(D, F)$  là liên tục (có đạo hàm riêng, ...) nếu các thành phần toạ độ của nó là liên tục (có đạo hàm riêng, ...) trên miền  $D$ . Sau này nếu không nói gì thêm chúng ta xem rằng các trường vectơ là có đạo hàm riêng liên tục từng khúc trên miền  $D$ .

Ví dụ  $F = \{x, y, z\}$  là trường vectơ bán kính,  $G = \{X, Y, 0\}$  là trường vectơ phẳng

• Họ đường cong  $\Gamma$  nằm gọn trong miền  $D$  gọi là *họ đường dòng* của trường vectơ  $F$  nếu có các tính chất sau đây.

1. Với mỗi điểm  $A \in D$  có duy nhất một đường cong  $\Gamma(A)$  đi qua
2. Vectơ  $F(A)$  là vectơ tiếp xúc của đường cong  $\Gamma(A)$  tại điểm  $A$ .

Ví dụ Nếu trường  $F$  là trường chất lỏng thì họ đường dòng chính là dòng chất lỏng chảy dưới tác động của trường  $F$ .



• Giả sử họ đường dòng có phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Theo định nghĩa trên trường vectơ tiếp xúc  $T = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$  đồng phương với trường vectơ  $F = \{X, Y, Z\}$ . Tức là

$$x'(t) = \lambda X, \quad y'(t) = \lambda Y, \quad z'(t) = \lambda Z \quad \text{với } \lambda \in \mathbb{R}$$

Từ đó suy ra hệ phương trình vi phân

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \lambda dt \quad (6.3.2)$$

gọi là *hệ phương trình vi phân* của họ đường dòng.

Ví dụ Tìm đường dòng của trường vectơ  $F = \{y, -x, 1\}$  đi qua điểm  $A(1, 1, 0)$

Lập hệ phương trình vi phân 
$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = dz = \lambda dt$$

Giải ra phương trình tham số của họ đường dòng

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = -t + C \quad \text{với } (R, C) \in \mathbb{R}^2$$

Đường dòng đi qua điểm  $A$  thỏa mãn  $R \cos t_0 = 1, R \sin t_0 = 1, -t_0 + C = 0$

Suy ra 
$$R = \sqrt{2}, \quad t_0 = \pi/4, \quad C = \pi/4$$

Đó chính là đường xoắn ốc đều trong không gian

$$x = \sqrt{2} \cos t, \quad y = \sqrt{2} \sin t, \quad z = -t + \pi/4$$

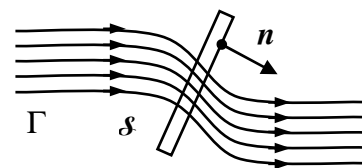
#### Đ4. Thông lượng

• Cho trường vectơ  $(D, F)$  và mặt cong  $S$  trơn từng mảnh, nằm gọn trong miền  $D$ , định hướng theo pháp vectơ là  $n$ . Tích phân mặt loại hai

$$\Phi = \iint_S \langle F, n \rangle dS = \iint_S X dy dz + Y dz dx + Z dx dy \quad (6.4.1)$$

gọi là *thông lượng* của trường vectơ  $F$  qua mặt cong  $S$ .

Nếu  $F$  là trường chất lỏng thì thông lượng chính là lượng chất lỏng đi qua mặt cong  $S$  theo hướng pháp vectơ  $n$  trong một đơn vị thời gian.



- Cho trường vectơ  $(D, F)$  với  $F = \{X, Y, Z\}$ . Trường vô hướng

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (6.4.2)$$

gọi là *divergence* (nguồn) của trường vectơ  $F$ .

Ví dụ Cho trường vectơ  $F = \{xy, yz, zx\}$  và điểm  $A(1, 1, -1)$

Ta có

$$\operatorname{div} F = y + z + x \quad \text{và} \quad \operatorname{div} F(A) = 1 + 1 - 1 = 2$$

Định lý Cho  $F, G$  là các trường vectơ và  $u$  là trường vô hướng. Divergence có các tính chất sau đây.

1.  $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$
2.  $\operatorname{div}(uF) = u \operatorname{div} F + \langle \operatorname{grad} u, F \rangle$

Chứng minh

Suy ra từ định nghĩa (6.4.2) và các tính chất của đạo hàm riêng. ▶▶

- Giả sử  $\Omega$  là miền đóng nằm gọn trong miền  $D$  và có biên là mặt cong kín  $S$  trơn từng mảnh, định hướng theo pháp vectơ ngoài  $n$ . Khi đó công thức Ostrogradski được viết lại ở dạng vectơ như sau.

$$\iint_S \langle F, n \rangle dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV \quad (6.4.3)$$

Chọn  $\Omega$  là hình cầu đóng tâm  $A$ , bán kính  $\epsilon$ . Từ công thức (6.4.3) và định lý về trị trung bình của tích phân bội ba suy ra.

$$\operatorname{div} F(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \langle F, n \rangle dS \quad (6.4.4)$$

Theo công thức trên, nguồn của trường vectơ  $F$  tại điểm  $A$  là lượng chất lỏng đi ra từ điểm  $A$  theo hướng của trường vectơ  $F$ .

- Cho trường vectơ  $(D, F)$  và điểm  $A \in D$ . Nếu  $\operatorname{div} F(A) > 0$  thì điểm  $A$  gọi là điểm nguồn. Nếu  $\operatorname{div} F(A) < 0$  thì điểm  $A$  gọi là điểm thủng.

Ví dụ Cho trường vectơ  $F = \{xy, yz, zx\}$

Ta có

$$\operatorname{div} F = y + z + x$$

$$\operatorname{div} F(1, 0, 0) = 1 > 0$$

$$\operatorname{div} F(-1, 0, 0) = -1 < 0$$

điểm  $(1, 0, 0)$  là điểm nguồn

điểm  $(-1, 0, 0)$  là điểm thủng



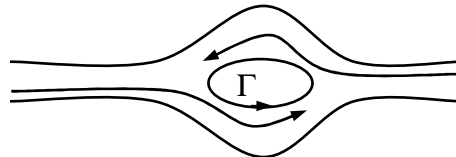
Đ5. Hoàn lưu

• Cho trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  và đường cong  $\Gamma$  kín, trơn từng khúc, nằm gọn trong miền  $D$ , định hướng theo vectơ tiếp xúc  $\mathbf{T}$ . Tích phân đường loại hai

$$K = \oint_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle ds = \oint_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz \quad (3.5.1)$$

gọi là *hoàn lưu* của trường vectơ  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong kín  $\Gamma$ .

Nếu  $\mathbf{F}$  là trường chất lỏng thì hoàn lưu là công dịch chuyển một đơn vị khối lượng chất lỏng dọc theo đường cong  $\Gamma$  theo hướng vectơ  $\mathbf{T}$ .



• Cho trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  với  $\mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$ . Trường vectơ

$$\mathit{rot} \mathbf{F} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (6.5.2)$$

gọi là *rotation* (xoáy) của trường vectơ  $\mathbf{F}$ .

Ví dụ Cho trường vectơ  $\mathbf{F} = \{xy, yz, zx\}$  và điểm  $A(1, 0, -1)$

Ta có

$$\mathit{rot} \mathbf{F} = \{z, x, y\} \text{ và } \mathit{rot} \mathbf{F}(A) = \{-1, 1, 0\}$$

**Định lý** Cho  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  là các trường vectơ và  $u$  là trường vô hướng. Rotation có các tính chất sau đây.

1.  $\mathit{rot} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathit{rot} \mathbf{F} + \mathit{rot} \mathbf{G}$
2.  $\mathit{rot} (u \mathbf{F}) = u \mathit{rot} \mathbf{F} + [\mathit{grad} u, \mathbf{F}]$

Chứng minh

Suy ra từ định nghĩa (6.5.2) và các tính chất của đạo hàm riêng. ▶▶

• Giả sử  $S$  là mặt cong trơn từng mảnh, nằm gọn trong miền  $D$ , định hướng theo pháp vectơ  $\mathbf{n}$  và có biên là đường cong kín  $\Gamma$  trơn từng khúc, định hướng theo vectơ tiếp xúc  $\mathbf{T}$  phù hợp với hướng pháp vectơ  $\mathbf{n}$ . Khi đó công thức Stokes viết lại ở dạng vectơ như sau.

$$\oint_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle ds = \iint_S \langle \mathit{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS \quad (6.5.3)$$

Chọn  $S$  là nửa mặt cầu tâm  $A$ , bán kính  $\epsilon$ . Từ công thức (6.5.3) và định lý về trị trung bình của tích phân mặt loại hai suy ra.

$$\langle \mathit{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle ds \quad (6.5.4)$$

Theo công thức trên, cường độ của trường vectơ  $\mathit{rot} \mathbf{F}$  theo hướng pháp vectơ  $\mathbf{n}$  tại điểm  $A$  là công tự quay của điểm  $A$  theo hướng trục quay  $\mathbf{n}$ .

- Cho trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  và điểm  $A \in D$ . Nếu  $\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle(A) > 0$  thì điểm  $A$  gọi là điểm xoáy thuận. Nếu  $\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle(A) < 0$  thì điểm  $A$  gọi là điểm xoáy nghịch.

Ví dụ Cho trường vectơ  $\mathbf{F} = \{xy, yz, zx\}$  và  $\mathbf{n} = \{x, y, z\}$

Ta có  $\text{rot } \mathbf{F} = \{z, x, y\}$  và  $\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = zx + xy + yz$

$\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle(1, 0, 1) = 1 > 0$       điểm  $(1, 0, 1)$  là điểm xoáy thuận

$\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle(1, 0, -1) = -1 < 0$       điểm  $(1, 0, -1)$  là điểm xoáy nghịch

Định lý Cho trường vectơ  $\langle D, \mathbf{F} \rangle$  và điểm  $A \in D$ .

1.  $\text{Max } |\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle(A)| = |\text{rot } \mathbf{F}(A)|$       đạt được khi và chỉ khi  $\mathbf{n} // \text{rot } \mathbf{F}$
2.  $\text{Min } |\langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle(A)| = 0$       đạt được khi và chỉ khi  $\mathbf{n} \perp \text{rot } \mathbf{F}$

Chứng minh

Suy ra từ tính chất của tích vô hướng. ▶▶

- Theo kết quả trên thì cường độ xoáy có trị tuyệt đối lớn nhất theo hướng đồng phương với vectơ  $\text{rot } \mathbf{F}$  và có trị tuyệt đối bé nhất theo hướng vuông góc với vectơ  $\text{rot } \mathbf{F}$ .

## Đ6. Toán tử Hamilton

- Vectơ tởng trung

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (6.6.1)$$

với  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  và  $\frac{\partial}{\partial z}$  tương ứng là phép lấy đạo hàm riêng theo các biến  $x$ ,  $y$ , và  $z$  gọi là *toán tử Hamilton*.

- Tác động toán tử Hamilton một lần chúng ta nhận được các trường **grad**, **div** và **rot** đã nói ở các mục trên như sau.

1. Tích của vectơ  $\nabla$  với trường vô hướng  $u$  là trường vectơ **grad**  $u$

$$\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \quad (6.6.2)$$

2. Tích vô hướng của vectơ  $\nabla$  với trường vectơ  $\mathbf{F}$  là trường vô hướng **div**  $\mathbf{F}$

$$\nabla \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (6.6.3)$$

3. Tích có hướng của vectơ  $\nabla$  với trường vectơ  $\mathbf{F}$  là trường vectơ **rot**  $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) \\ &= \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}\quad (6.6.4)$$

• Tác động toán tử Hamilton hai lần chúng ta nhận được các toán tử vi phân cấp hai.

4. Với mọi trường vô hướng  $(D, u)$  thuộc lớp  $C^2$

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} u) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u \quad (6.6.5)$$

Toán tử

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k}$$

gọi là *toán tử Laplace*.

Tức là  $\Delta u = \operatorname{div}(\mathbf{grad} u) = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u$

5. Với mọi trường vô hướng  $(D, u)$  thuộc lớp  $C^2$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} u) = \mathbf{rot} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) = 0 \quad (6.6.6)$$

Tức là  $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} u) = \nabla \times \nabla u = 0$

6. Với mọi trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  thuộc lớp  $C^2$

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot} \mathbf{F}) = \operatorname{div} \left\{ \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} = 0 \quad (6.6.7)$$

Tức là  $\operatorname{div}(\mathbf{rot} \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

7. Với mọi trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  thuộc lớp  $C^2$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{F}) &= \mathbf{rot} \left\{ \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} \\ &= \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}\end{aligned}\quad (6.6.8)$$

## Đ7. Trường thế

• Trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  với  $\mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$  gọi là *trường thế* nếu có trường vô hướng  $(D, u)$  sao cho  $\mathbf{F} = \mathbf{grad} u$ . Tức là

$$X = \frac{\partial u}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.7.1)$$

Hàm  $u$  gọi là *hàm thế vị* của trường vectơ  $\mathbf{F}$ .

Từ định nghĩa suy ra nếu trường vectơ  $F$  là trường thế thì

$$\mathbf{rot} F = \mathbf{rot}(\mathbf{grad} u) = \mathbf{0} \quad (6.7.2)$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng điều ngược lại cũng đúng.

**Định lý** Trường vectơ  $(D, F)$  là trường thế khi và chỉ khi  $\mathbf{rot} F = \mathbf{0}$

Chứng minh

Điều kiện cần suy ra từ công thức (6.7.2). Chúng ta chứng minh điều kiện đủ

Giả sử  $\mathbf{rot} F = \mathbf{0}$

Khi đó với mọi đường cong  $\Gamma$  kín, trơn từng khúc và nằm gọn trong miền  $D$ .

$$\oint_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_S \langle \mathbf{rot} F, \mathbf{n} \rangle dS = 0$$

với  $S$  là mặt cong trơn từng mảnh, nằm gọn trong miền  $D$  và có biên định hướng theo pháp vectơ  $\mathbf{n}$  là đường cong  $\Gamma$ .

Suy ra với mọi  $A, M \in D$  tích phân

$$\int_{AM} Xdx + Ydy + Zdz$$

không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Cố định điểm  $A \in D$  và đặt

$$u(M) = \int_{AM} Xdx + Ydy + Zdz \quad \text{với } M \in D$$

Do các hàm  $X, Y, Z$  có đạo hàm riêng liên tục nên hàm  $u$  có đạo hàm riêng liên tục trên miền  $D$ . Kiểm tra trực tiếp ta có

$$\mathbf{grad} u = F$$

Từ đó suy ra trường vectơ  $F$  là trường thế và hàm  $u$  là hàm thế vị của nó. ▶▶

• Từ các kết quả ở trên suy ra ý nghĩa cơ học của trường thế như sau.

1. Trong trường thế không có điểm xoáy

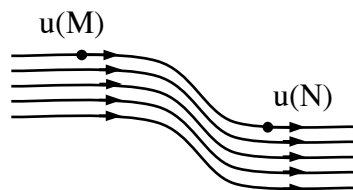
$$\mathbf{rot} F = \mathbf{0}$$

2. Hoàn lưu dọc theo đường cong kín nằm gọn trong miền  $D$  luôn bằng không.

$$K = \oint_{\Gamma} \langle F, T \rangle ds = \iint_S \langle \mathbf{rot} F, \mathbf{n} \rangle dS = 0 \quad (6.7.3)$$

3. Công dịch chuyển bằng thế vị điểm cuối trừ đi thế vị điểm đầu.

$$\int_{MN} \langle F, T \rangle ds = \int_{MN} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{MN} du = u(N) - u(M) \quad (6.7.4)$$



### Đ8. Trường ống

• Trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  với  $\mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$  gọi là trường ống nếu có trường vectơ  $(D, \mathbf{G})$  với  $\mathbf{G} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$  sao cho  $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ . Tức là

$$X = \frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial z} \quad Y = \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial x} \quad Z = \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \quad (6.8.1)$$

Trường vectơ  $\mathbf{G}$  gọi là trường thế vị của trường vectơ  $\mathbf{F}$ .

Từ định nghĩa suy ra nếu  $\mathbf{F}$  là trường ống thì

$$\text{div } \mathbf{F} = \text{div}(\text{rot } \mathbf{G}) = 0 \quad (6.8.2)$$

Có thể chứng minh rằng điều ngược lại cũng đúng. Tức là chúng ta có kết quả sau đây.

**Định lý** Trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  là trường ống khi và chỉ khi  $\text{div } \mathbf{F} = 0$

• Từ các kết quả ở trên suy ra ý nghĩa cơ học của trường ống như sau.

1. Trong trường ống không có điểm nguồn

$$\text{div } \mathbf{F} = 0$$

2. Thông lượng qua mặt cong kín nằm gọn trong miền D luôn bằng không.

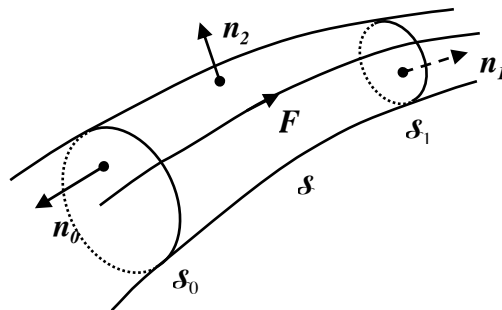
$$\Phi = \oiint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = \iiint_\Omega \text{div } \mathbf{F} dV \quad (6.8.3)$$

3. Thông lượng đi qua các mặt cắt của một luồng là như nhau.

Giả sử S là mặt trụ kín như hình bên

$$S = S_0 + S_1 + S_2$$

Trong đó S định hướng theo pháp vectơ ngoài  $\mathbf{n}$   
 $S_0$  định hướng theo pháp vectơ  $\mathbf{n}_0$  ngược hướng với trường vectơ  $\mathbf{F}$ ,  $S_1$  định hướng theo pháp vectơ  $\mathbf{n}_1$  cùng hướng với trường vectơ  $\mathbf{F}$ .  $S_2$  định hướng theo pháp vectơ  $\mathbf{n}_2$  vuông góc với trường vectơ  $\mathbf{F}$ .



Theo tính chất của trường ống và tính cộng tính của tích phân

$$0 = \oiint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = \iint_{S_0} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_0 \rangle dS + \iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_1 \rangle dS + \iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_2 \rangle dS$$

Từ đó suy ra

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_1 \rangle dS = - \iint_{S_0} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_0 \rangle dS = \iint_{S_0} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_1 \rangle dS$$

Hay nói cách khác thông lượng của trường ống đi qua các mặt cắt là một hằng số.

• Trường vectơ  $(D, \mathbf{F})$  gọi là trường điều hoà nếu nó vừa là trường thế và vừa là trường ống. Tức là có trường vô hướng  $(D, u)$  và trường vectơ  $(D, \mathbf{G})$  sao cho

$$\mathbf{F} = \text{grad } u = \text{rot } \mathbf{G} \quad (6.8.4)$$

Từ đó suy ra



6. Chứng minh các đẳng thức sau đây.

a.  $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{rot} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{rot} \mathbf{F}$

b.  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$

7. Cho  $(D, u)$  và  $(D, v)$  là các trường vô hướng,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  là trường bán kính, còn hàm  $f$  là hàm có đạo hàm liên tục. Hãy tính

a.  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$

b.  $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$

c.  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} rf(r))$

8. Tính thông lượng của trường vectơ  $\mathbf{F}$  qua mặt cong  $S$ .

a.  $\mathbf{F} = \{x, y, z\}$  qua phần mặt phẳng  $x + y + z = 1$  trong góc phần tám thứ nhất

b.  $\mathbf{F} = \{xy, yz, zx\}$  qua phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  trong góc phần tám thứ nhất

c.  $\mathbf{F} = \{xy, yz, zx\}$  qua phần mặt parabol  $z = x^2 + y^2$  và  $0 \leq z \leq 1$

d.  $\mathbf{F} = \{x, y, z\}$  qua mặt cong kín  $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$

e.  $\mathbf{F} = \{x^3, y^3, z^3\}$  qua mặt cong kín  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

f.  $\mathbf{F} = \{xy^2, x^2y, z\}$  qua mặt cong kín  $z = 4 - x^2 - y^2$  và  $0 \leq z \leq 4$

9. Tính hoàn lưu của trường vectơ  $\mathbf{F}$  dọc theo đường cong  $\Gamma$ .

a.  $\mathbf{F} = \{x, y, z\}$  theo đường xoắn ốc  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  với  $t \in [0, \pi/2]$

b.  $\mathbf{F} = \{xy, yz, zx\}$  theo đoạn thẳng nối hai điểm  $A(a, 1, 1)$  và  $B(2, 4, 8)$

c.  $\mathbf{F} = \{-y, x, 0\}$  theo đường cong kín  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  và  $z = 0$

d.  $\mathbf{F} = \{x^3, y^3, z^3\}$  theo đường cong kín  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  và  $x + y + z = 1$

e.  $\mathbf{F} = \{xy^2, x^2y, z\}$  theo đường cong kín  $z = x^2 + y^2$  và  $z = x + y$

## Phương trình truyền sóng

---

### Đ1. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2

- Cho miền  $D \subset \mathbb{R}^2$  và các hàm  $a, b, c : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 với hai biến độc lập có dạng như sau

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (7.1.1)$$

Kí hiệu  $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$  với  $(x, y) \in D$

1. Nếu  $\forall (x, y) \in D, \Delta(x, y) > 0$  thì phương trình (7.1.1) có dạng *hyperbole*
2. Nếu  $\forall (x, y) \in D, \Delta(x, y) = 0$  thì phương trình (7.1.1) có dạng *parabole*
3. Nếu  $\forall (x, y) \in D, \Delta(x, y) < 0$  thì phương trình (7.1.1) có dạng *ellipse*

- Giả sử ánh xạ

$$\Phi : D \rightarrow \Omega, (x, y) \rightarrow (\xi, \eta) \text{ với } J(x, y) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0 \quad (7.1.2)$$

là phép đổi biến từ miền  $D$  vào miền  $\Omega$ .

Theo công thức đạo hàm hàm hợp

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

Thay vào phương trình (7.1.1) nhận được

$$a_1(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b_1(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c_1(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$$

Trong đó

$$a_1(\xi, \eta) = a(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2$$



$$b_1(\xi, \eta) = a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + b(x, y) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$c_1(\xi, \eta) = a(x, y) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2$$

Suy ra

$$\Delta_1(\xi, \eta) = b_1^2 - a_1 c_1 = \Delta(x, y) J^2(x, y)$$

Tức là chúng ta có định lý sau đây.

**Định lý** Phép đổi biến không suy biến không làm thay đổi dạng của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2.

• Nếu  $\xi$  và  $\eta$  là các nghiệm riêng độc lập của phương trình

$$a(x, y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (7.1.3)$$

thì  $a_1(x, y) = b_1(x, y) = c_1(x, y) = 0$ . Khi đó phương trình (7.1.1) có dạng chính tắc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$$

Giả sử  $\varphi(x, y)$  là một nghiệm riêng không tầm thường của phương trình (7.1.3). Chúng ta có  $(\varphi_x, \varphi_y) \neq (0, 0)$  không giảm tổng quát có thể xem  $\varphi_y \neq 0$ . Khi đó phương trình  $\varphi(x, y) = C$  xác định hàm ẩn  $y = y(x)$  có đạo hàm  $y'(x) = -\varphi_x / \varphi_y$ .

Thay vào phương trình (7.1.3) nhận được phương trình vi phân

$$a(x, y)y'^2 - 2b(x, y)y' + c(x, y) = 0 \text{ với } a(x, y) \neq 0 \quad (7.1.4)$$

gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình (7.1.1)

1. Nếu  $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$  thì phương trình (7.1.4) có nghiệm thực

$$y = \int \frac{b(x, y) \pm \sqrt{\Delta(x, y)}}{a(x, y)} dx + C$$

Đổi biến

$$\xi + \eta = y - \int \frac{b(x, y) - \sqrt{\Delta(x, y)}}{a(x, y)} dx \text{ và } \xi - \eta = y - \int \frac{b(x, y) + \sqrt{\Delta(x, y)}}{a(x, y)} dx$$

Đưa về dạng chính tắc của phương trình hyperbole

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (7.1.5)$$

2. Nếu  $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$  thì phương trình (7.1.4) có nghiệm kép

$$y(x) = \int \frac{b(x, y)}{a(x, y)} dx + C$$

Đổi biến

$$\xi = y - \int \frac{b(x, y)}{a(x, y)} dx \text{ và } \eta = \eta(x, y) \text{ sao cho } J(x, y) \neq 0$$

Đưa về dạng chính tắc của phương trình parabol

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (7.1.6)$$

3. Nếu  $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$  thì phương trình (7.1.4) có nghiệm phức

$$y(x) = \int \frac{b(x, y) \pm i\sqrt{-\Delta(x, y)}}{a(x, y)} dx + C = \alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) + C$$

Đổi biến

$$\xi = y - \int \frac{b(x, y)}{a(x, y)} dx \text{ và } \eta = \int \frac{\sqrt{-\Delta(x, y)}}{a(x, y)} dx$$

Đưa về dạng chính tắc của phương trình ellipse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (7.1.7)$$

Ví dụ Đưa về chính tắc phương trình sau đây

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 9u = 0$$

Giải phương trình đặc trưng

$$2y'^2 - 3y' + 1 = 0, y = x + C, y = \frac{1}{2}x + C$$

Đổi biến

$$\xi + \eta = y - \frac{1}{2}x, \xi - \eta = y - x \text{ Suy ra } \xi = y - \frac{3}{4}x, \eta = \frac{1}{4}x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{3}{4}, \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1, \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4}, \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{9}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{3}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

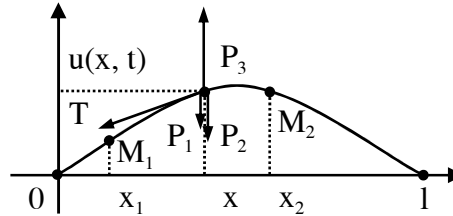
Dạng chính tắc của phương trình là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} - 8u$$

Đ2. Phương trình vật lý - toán

**Phương trình truyền sóng**

• Cho sợi dây rất mảnh, có độ dài  $l$ , hai mút cố định, dao động bé trong mặt phẳng  $Oxu$  theo phương trục  $Ou$ . Lúc không dao động dây nằm trên đoạn  $[0, l]$  và độ dài của dây không thay đổi trong suốt quá trình dao động. Bài toán đòi hỏi xác định độ lệch  $u(x, t)$  tại điểm hoành độ  $x$  vào thời điểm  $t$ .



• Giả sử dây rất dẻo, đàn hồi với lực căng  $T(x, t)$  hướng theo phương tiếp tuyến của sợi dây và do đó có hệ số góc là  $u'_x$ . Do độ dài của sợi dây không thay đổi trong lúc dao động nên lực căng  $T(x, t)$  không phụ thuộc vào thời gian. Gọi  $P_1$  là hình chiếu của lực căng trên cung  $M_1M_2$  lên trục  $Ou$

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} T(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Gọi  $F(x, t)$  là mật độ của ngoại lực tác động và  $P_2$  là hình chiếu của ngoại lực trên cung  $M_1M_2$  lên trục  $Ou$

$$P_2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx$$

Gọi  $\rho(x)$  là mật độ vật chất của sợi dây,  $u''_{tt}$  là gia tốc của chuyển động và  $P_3$  là hình chiếu của lực quán tính trên cung  $M_1M_2$  lên trục  $Ou$

$$P_3 = - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

Theo nguyên lý cân bằng lực  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$  suy ra

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( T(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx = 0$$

Do  $x_1, x_2$  là tùy ý nên  $\forall (x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$  ta có

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

Nếu sợi dây đồng chất thì  $\rho(x)$  và  $T(x)$  là các hằng số. Đặt  $a^2 = T / \rho > 0$  gọi là vận tốc truyền sóng và  $f(x, t) = F(x, t) / \rho$  là ngoại lực tác động. Khi đó độ lệch  $u(x, t)$  là nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{7.2.1}$$

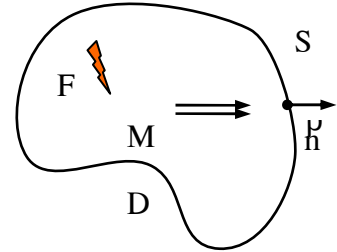
gọi là *phương trình truyền sóng* trong không gian một chiều.

Trong trường hợp dao động tự do không có ngoại lực tác động :  $f(x, t) = 0$ , phương trình

(7.2.1) là phương trình thuần nhất. Trường hợp dao động cưỡng bức :  $f(x, t) \neq 0$ , phương trình (7.2.1) là phương trình không thuần nhất.

**Phương trình truyền nhiệt**

- Xét phân bố nhiệt trên vật rắn, thể tích  $D$ , truyền nhiệt đẳng hướng trong không gian Oxyz. Bài toán đòi hỏi xác định nhiệt độ  $u(M, t)$  tại điểm  $M(x, y, z)$  vào thời điểm  $t$ .
- Gọi  $k(M)$  là hệ số truyền nhiệt,  $\vec{h}$  là hướng truyền nhiệt và  $Q_1$  nhiệt lượng đi qua mặt kín  $S = \partial D$  từ thời điểm  $t_1$  đến  $t_2$



$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k(M) \frac{\partial u}{\partial \vec{h}} dS = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \text{div}(k \text{grad} u) dV$$

Gọi  $Q_2$  là nhiệt lượng sinh bởi nguồn nhiệt trong có mật độ  $F(M, t)$  từ thời điểm  $t_1$  đến  $t_2$

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_D F(M, t) dV$$

Gọi  $\rho(M)$  là mật độ vật chất,  $c(M)$  là nhiệt dung và  $Q_3$  là nhiệt lượng cần để vật rắn  $D$  thay đổi từ nhiệt độ  $u(M, t_1)$  đến  $u(M, t_2)$

$$Q_3 = \int_D c(M)\rho(M)(u(M, t_2) - u(M, t_1)) dV = \int_{t_1}^{t_2} \int_D c(M)\rho(M) \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

Theo nguyên lý cân bằng nhiệt  $Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0$  suy ra

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D \left( \text{div}(k \text{grad} u) + F(M, t) - c(M)\rho(M) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = 0$$

Do  $t_1, t_2$  tùy ý nên  $\forall (M, t) \in D \times [0, +\infty)$  chúng ta có

$$c(M)\rho(M) \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k(M) \text{grad} u) + F(M, t)$$

Nếu vật rắn là đồng chất thì  $c(M), \rho(M)$  và  $k(M)$  là các hằng số. Đặt  $a^2 = k / c\rho > 0$  gọi là vận tốc truyền nhiệt và  $f(M, t) = F(M, t) / c\rho$  là nguồn nhiệt trong. Khi đó nhiệt độ  $u(M, t)$  là nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \tag{7.2.2}$$

gọi là *phương trình truyền nhiệt* trong không gian ba chiều.

Trong trường hợp không có nguồn nhiệt trong :  $f(M, t) = 0$ , phương trình (7.2.2) là phương trình thuần nhất. Trường hợp có nguồn nhiệt trong :  $f(M, t) \neq 0$ , phương trình (7.2.2) là phương trình không thuần nhất.

**Phương trình Laplace**

- Xét phân bố nhiệt trên vật rắn truyền nhiệt đẳng hướng, nhiệt độ  $u(x, y, z, t)$  tại điểm  $M(x, y, z)$  vào thời điểm  $t$  thoả mãn phương trình (7.2.2). Nếu phân bố nhiệt không phụ

thuộc thời gian thì  $u'_t = 0$  và khi đó phương trình (7.2.2) trở thành

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x, y, z, t) \quad (7.2.3)$$

gọi là *phương trình Laplace*.

Trong trường hợp không có nguồn nhiệt trong :  $g(x, y, z, t) = 0$ , phương trình (7.2.3) là phương trình thuần nhất. Trường hợp có nguồn nhiệt trong :  $g(x, y, z, t) \neq 0$  phương trình (7.2.3) là phương trình không thuần nhất còn gọi là *phương trình Poisson*.

### Đ3. Các bài toán cơ bản

#### **Bài toán tổng quát**

• Cho các miền  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$  và các hàm  $u \in C^2(H, \mathbb{R})$ ,  $f \in C(H, \mathbb{R})$ . Kí hiệu

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

gọi là toán tử Laplace. Các bài toán Vật lý - Kỹ thuật thường dẫn đến việc giải các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 có dạng tổng quát như sau.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t) \quad (x, t) \in H_0 \quad (7.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t) \quad (x, t) \in H_0 \quad (7.3.2)$$

$$\Delta u = f(x) \quad x \in D_0 \quad (7.3.3)$$

Vì vậy các phương trình trên được gọi là các phương trình Vật lý - Toán. Phương trình Hyperbole (7.3.1) xuất hiện trong các bài toán dao động, truyền sóng gọi là phương trình truyền sóng. Phương trình Parabol (7.3.2) xuất hiện trong các bài toán truyền nhiệt, phân bố nhiệt gọi là phương trình truyền nhiệt. Phương trình Ellipse (7.3.3) xuất hiện trong các bài toán về quá trình dừng gọi là phương trình Laplace.

Các phương trình Vật lý - Toán thường có vô số nghiệm, để xác định đúng nghiệm cần tìm cần phải có thêm các điều kiện phụ.

- Điều kiện ban đầu cho biết trạng thái của hệ thống vào thời điểm  $t = 0$ .

$$u|_{t=0} = g, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = h \quad (7.3.4)$$

- Điều kiện biên cho biết trạng thái của hệ thống trên biên  $\partial D$ .

$$u|_{\partial D} = h, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = p, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u\right)|_{\partial D} = q \quad (7.3.5)$$

Trong thực tiễn các điều kiện phụ được xác định bằng thực nghiệm và do đó có sai số. Vì vậy khi thiết lập các bài toán về phương trình Vật lý - Toán chúng ta yêu cầu

- Bài toán có nghiệm duy nhất : Phương trình có đúng một nghiệm thoả mãn các điều kiện phụ cho trước.

- Bài toán có nghiệm ổn định : Sai số nhỏ của các điều kiện phụ dẫn đến sai số nhỏ của nghiệm.

Bài toán tổng quát của phương trình Vật lý - Toán phát biểu như sau : *Tìm nghiệm duy nhất và ổn định của phương trình Vật lý - Toán thoả mãn các điều kiện phụ cho trước.*

• Trong giáo trình này chúng ta xem xét các bài toán sau đây

- Bài toán Cauchy : Tìm nghiệm duy nhất và ổn định của phương trình truyền sóng (truyền nhiệt) thoả mãn các điều kiện ban đầu

- Bài toán hỗn hợp : Tìm nghiệm duy nhất và ổn định của phương trình truyền sóng (truyền nhiệt) thoả mãn các điều kiện ban đầu và điều kiện biên

- Bài toán Diriclet : Tìm nghiệm duy nhất và ổn định của phương trình Laplace thoả mãn điều kiện biên  $u|_{\partial D} = g$

- Bài toán Neuman : Tìm nghiệm duy nhất và ổn định của phương trình Laplace thoả mãn điều kiện biên  $u|_{\partial D} = g$  và  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = h$

Các bài toán với phương trình thuần nhất gọi tắt là bài toán thuần nhất, với phương trình không thuần nhất gọi là bài toán không thuần nhất. Để đơn giản trong giáo trình này chúng ta chỉ giới hạn các bài toán trong phạm vi không gian một hoặc hai chiều. Tuy nhiên các phương pháp giải và công thức nghiệm có thể mở rộng tự nhiên cho trường hợp không gian n chiều. Cụ thể chúng ta sẽ lần lượt nghiên cứu các bài toán sau đây.

**Bài toán Cauchy (CH)**

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

và điều kiện ban đầu

$$u|_{t=0} = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = h(x)$$

**Bài toán Cauchy (CP)**

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

và điều kiện ban đầu

$$u|_{t=0} = g(x)$$

**Bài toán hỗn hợp (HH)**

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

và các điều kiện phụ

$$u|_{t=0} = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = h(x), \quad u|_{\partial D} = p(t)$$

**Bài toán hỗn hợp (HP)**

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

và các điều kiện phụ

$$u|_{t=0} = g(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u\right)|_{\partial D} = h(t)$$

**Bài toán Diriclet (DE)**

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

và điều kiện biên

$$u|_{\partial D} = g(x, y)$$

**Bài toán Neumann (NE)**

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

và các điều kiện biên

$$u|_{\partial D} = g(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial D} = h(x, y)$$

**Đ4. Bài toán Cauchy thuần nhất**

**Bài toán CH1a**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$  và hàm  $h \in C(D, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{với } (x, t) \in H_0 \tag{7.4.1}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) \tag{7.4.2}$$

- Đổi biến  $\xi = x + at, \eta = x - at$

Tính các đạo hàm riêng bằng công thức đạo hàm hàm hợp

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

Thế vào phương trình (7.4.1), nhận được phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Tích phân hai lần

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

Trở về biến cũ

$$u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

Thế vào điều kiện ban đầu (7.4.2)

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = g(x) \quad \text{và} \quad u'_t(x, 0) = a[\varphi'(x) - \psi'(x)] = h(x)$$

Tích phân phương trình thứ hai, đưa về hệ phương trình

$$\varphi(x) + \psi(x) = 0, \varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x h(\xi) d\xi$$

Giải hệ phương trình trên tìm  $\varphi(x)$  và  $\psi(x)$  và suy ra nghiệm của bài toán

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} h(\xi) d\xi \quad (7.4.3)$$

**Định lý** Cho hàm  $h \in C^1(D, \mathbb{R})$ . Bài toán CH1a có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức (7.4.3)

**Chứng minh**

• Do hàm  $h \in C^1(D, \mathbb{R})$  nên hàm  $u \in C^2(H, \mathbb{R})$ . Kiểm tra trực tiếp

$$\forall (x, t) \in H, \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} a[h(x+at) + h(x-at)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} a[h'(x+at) + h'(x-at)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\forall x \in D, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$$

• Nếu  $u_1$  là nghiệm của bài toán  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h_1$

thì  $u = u_1 - u_2$  là nghiệm của bài toán  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h_1 - h_2 = h$

Với mỗi  $T > 0$  cố định, kí hiệu  $B = [x - aT, x + aT]$  và  $H_T = B \times [0, T]$ . Từ công thức (7.4.3) chúng ta có ước lượng sau đây

$$\forall (x, t) \in H_T, |u(x, t)| \leq T \sup_B |h(\xi)|$$

Từ đó suy ra

$$h = h_1 - h_2 = 0 \Rightarrow u = u_1 - u_2 = 0.$$

$$\|h\| = \|h_1 - h_2\| < \delta \Rightarrow \|u\| = \|u_1 - u_2\| < \varepsilon = T\delta$$

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất và ổn định trên  $H_T$  với mỗi  $T$  cố định. Do tính liên tục của nghiệm suy ra bài toán có nghiệm duy nhất và ổn định trên  $H$ .  $\blacktriangleright$

### **Bài toán CH1b**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}, H = D \times \mathbb{R}_+$  và hàm  $g \in C(D, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ với } (x, t) \in H_0$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$



**Định lý** Cho  $g \in C^2(D, \mathbb{R})$  và  $v(x, t)$  là nghiệm của bài toán CH1a với  $\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x)$

Bài toán CH1b có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức sau đây

$$u(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi \quad (7.4.4)$$

Chứng minh

• Do hàm  $g \in C^2(D, \mathbb{R})$  nên hàm  $v \in C^3(H, \mathbb{R})$  suy ra hàm  $u \in C^2(H, \mathbb{R})$ .

Kiểm tra trực tiếp

$$\forall (x, t) \in H, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\forall x \in D, u(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, 0)$$

• Tính duy nhất và ổn định của nghiệm suy ra từ bài toán CH1a. ▶▶

### Đ5. Bài toán Cauchy không thuần nhất

Bài toán CH1c

Cho các miền  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$  và hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in H_0$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

**Định lý** Cho hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$  và  $v(x, \tau, t)$  là nghiệm của bài toán CH1a trên  $H \times \mathbb{R}_+$  với

$$v(x, \tau, 0) = 0 \text{ và } \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau, 0) = f(x, \tau)$$

Bài toán CH1c có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức sau đây.

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, \tau, t - \tau) d\tau \quad (7.5.1)$$

Chứng minh

• Do hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$  nên hàm  $v \in C^1(H \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  suy ra hàm  $u \in C^2(H, \mathbb{R})$

Kiểm tra trực tiếp

$$\forall (x, t) \in H, \frac{\partial u}{\partial t} = v(x, t, 0) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau, t - \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau, t - \tau) d\tau$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t, 0) + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, \tau, t - \tau) d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau, t - \tau) d\tau + f(x, t)$$

$$\forall x \in D, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

- Tính duy nhất và ổn định của nghiệm suy ra từ bài toán CH1a. ▶▶

### Bài toán CH1

Cho các miền  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$ , các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$  và  $g, h \in C(D, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in H_0$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$$

- Tìm nghiệm của bài toán CH1 dưới dạng

$$u(x, t) = u_a(x, t) + u_b(x, t) + u_c(x, t)$$

với  $u_a(x, t)$  là nghiệm của bài toán CH1 $\alpha$ .

Kết hợp các công thức (7.4.3), (7.4.4) và (7.5.1) suy ra công thức sau đây.

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi + \int_{x-at}^{x+at} h(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\xi, t - \tau) d\xi d\tau \right) \quad (7.5.2)$$

**Định lý** Cho các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$ ,  $g \in C^2(D, \mathbb{R})$  và  $h \in C^1(D, \mathbb{R})$ . Bài toán CH1 có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức (7.5.2).

Ví dụ Giải bài toán  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xe^{-t}$  với  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2x$$

Theo công thức (7.5.2) chúng ta có

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} \cos \xi d\xi + \int_{x-at}^{x+at} 2\xi d\xi + \int_0^t \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} 2\xi e^{-\tau} d\xi d\tau \right)$$

$$= \cos x \cos at + 2xt(2t - 1 + e^{-t})$$

**Nhận xét** Bằng cách kéo dài liên tục các hàm liên tục từng khúc, công thức (7.5.2) vẫn sử dụng được trong trường hợp các hàm  $f, g$  và  $h$  có đạo hàm liên tục từng khúc.

Đ6. Bài toán giá Cauchy

**Bài toán SH1a**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$ , các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$  và  $g, h \in C(D, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in H_0$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = 0$$

• Tư tưởng chung để giải bài toán SH là tìm cách chuyển về bài toán CH tương đương. Gọi  $f_1, g_1$  và  $h_1$  tương ứng là kéo dài của các hàm  $f, g$  và  $h$  lên toàn  $\mathbb{R}$ , còn  $v(x, t)$  là nghiệm của bài toán Cauchy sau đây.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \quad v(x, 0) = g_1(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = h_1(x) \quad \text{với } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

Theo công thức (7.5.2) chúng ta có

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [g_1(x + at) + g_1(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} h_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f_1(\xi, t - \tau) d\xi$$

Thế vào điều kiện biên

$$v(0, t) = \frac{1}{2} [g_1(at) + g_1(-at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} h_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{-a\tau}^{a\tau} f_1(\xi, t - \tau) d\xi = 0$$

Suy ra các hàm  $f_1, g_1$  và  $h_1$  phải là các hàm lẻ.

Tức là

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & x \geq 0 \\ -f(-x, t) & x < 0 \end{cases}, \quad g_1(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ -g(-x) & x < 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad h_1(x) = \begin{cases} h(x) & x \geq 0 \\ -h(-x) & x < 0 \end{cases}$$

**Định lý** Cho hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$ , hàm  $g \in C^2(D, \mathbb{R})$  và hàm  $h \in C^1(D, \mathbb{R})$  thỏa mãn

$$f(0, t) = 0, \quad g(0) = 0 \quad \text{và} \quad h(0) = 0$$

Bài toán SH1a có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} g_1(\xi) d\xi + \int_{x-at}^{x+at} h_1(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f_1(\xi, t - \tau) d\xi \right) \quad (7.6.1)$$

với  $f_1, g_1$  và  $h_1$  tương ứng là kéo dài lẻ của các hàm  $f, g$  và  $h$  lên toàn  $\mathbb{R}$ .

**Bài toán SH1b**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$  và hàm  $p \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ với } (x, t) \in H_0$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = p(t)$$

- Kiểm tra trực tiếp hàm

$$u(x, t) = \eta\left(t - \frac{x}{a}\right)p\left(t - \frac{x}{a}\right) \tag{7.6.2}$$

là nghiệm của bài toán SH1b.

**Bài toán SH1**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$ , các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$ ,  $g, h \in C(D, \mathbb{R})$ ,  $p \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ với } (x, t) \in H_0$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = p(t)$$

- Tìm nghiệm của bài toán SH1 dưới dạng  $u(x, t) = u_a(x, t) + u_b(x, t)$

trong đó  $u_a(x, t)$  là nghiệm của bài toán SH1 $\alpha$ .

Kết hợp các công thức (7.6.1) và (7.6.2) suy ra công thức sau đây.

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} g_1(\xi) d\xi + \int_{x-at}^{x+at} h_1(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f_1(\xi, t-\tau) d\xi \right) + \eta\left(t - \frac{x}{a}\right)p\left(t - \frac{x}{a}\right) \tag{7.6.3}$$

**Định lý** Cho các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$ ,  $g \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $h \in C^1(D, \mathbb{R})$  và  $p \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  thoả

$$g(0) = 0, h(0) = 0 \text{ và } f(0, t) = 0$$

Bài toán SH1 có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức (7.6.3) với  $f_1, g_1$  và  $h_1$  tương ứng là kéo dài lẻ của các hàm  $f, g$  và  $h$  lên toàn  $\mathbb{R}$ .

**Ví dụ** Giải bài toán  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt$  với  $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2x$$

$$u(0, t) = \sin t$$

Do các hàm  $f, g$  và  $h$  là hàm lẻ nên các hàm kéo dài lẻ  $f_1 = f, g_1 = g$  và  $h_1 = h$ . Thay vào công thức (7.6.3) chúng ta có

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-2t}^{x+2t} \sin \xi d\xi + \int_{x-2t}^{x+2t} 2\xi d\xi + \int_0^t d\tau \int_{x-2\tau}^{x+2\tau} 2(t-\tau)\xi d\xi \right) + \eta\left(t - \frac{x}{2}\right) \sin\left(t - \frac{x}{2}\right) \\ &= \sin x \cos 2t + 2xt + \frac{1}{6} x t^3 + \eta\left(t - \frac{x}{2}\right) \sin\left(t - \frac{x}{2}\right) \text{ với } (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

**Nhận xét** Phương pháp trên có thể sử dụng để giải các bài toán giá Cauchy khác.

## Đ7. Bài toán hỗn hợp thuần nhất

### **Bài toán HH1a**

Cho các miền  $D = [0, l], H = D \times [0, T]$  và các hàm  $g, h \in C(D, \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ với } (x, t) \in H_0 \tag{7.7.1}$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) \tag{7.7.2}$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{7.7.3}$$

• Bài toán HH1a được giải bằng phương pháp tách biến mà nội dung của nó như sau

Tìm nghiệm của bài toán HH1a dạng tách biến

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Đạo hàm  $u(x, t)$  hai lần theo  $x$ , theo  $t$  sau đó thế vào phương trình (7.7.1)

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \text{ suy ra } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \equiv \lambda \in \mathbb{R}$$

Thế hàm  $u(x, t)$  vào điều kiện biên (7.7.3)

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \text{ và } u(l, t) = X(l)T(t) = 0 \text{ với } T(t) \neq 0$$

Chúng ta nhận được hệ phương trình vi phân hệ số hằng sau đây

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (7.7.4)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (7.7.5)$$

$$X(0) = X(l) = 0 \text{ với } \lambda \in \mathbb{R} \quad (7.7.6)$$

- Phương trình vi phân (7.7.4) có phương trình đặc trưng

$$k^2 + \lambda = 0$$

Nếu  $\lambda = -\alpha^2$  thì phương trình (7.7.4) có nghiệm tổng quát  $X(x) = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$

Thế vào điều kiện (7.7.6) giải ra được  $C_1 = C_2 = 0$ . Hệ chỉ có nghiệm tầm thường.

Nếu  $\lambda = 0$  thì phương trình (7.7.4) có nghiệm tổng quát  $X(x) = C_1 + C_2 x$

Trường hợp này hệ cũng chỉ có nghiệm tầm thường.

Nếu  $\lambda = \alpha^2$  thì phương trình (7.7.4) có nghiệm tổng quát  $X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$

Thế vào điều kiện (7.7.6) giải ra được  $C_1 = 0$ ,  $C_2$  tùy ý và  $\alpha = \frac{k\pi}{l}$ .

Suy ra hệ phương trình (7.7.4) và (7.7.6) có họ nghiệm riêng trực giao trên  $[0, l]$

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x \text{ với } A_k \in \mathbb{R} \text{ và } \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in \mathbb{Z}^*$$

Thế các  $\lambda_k$  vào phương trình (7.7.5) giải ra được

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + C_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \text{ với } (B_k, C_k) \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra họ nghiệm riêng độc lập của bài toán HH1a

$$u_k(x, t) = (a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t) \sin \frac{k\pi}{l} x \text{ với } a_k = A_k B_k, b_k = A_k C_k, k \in \mathbb{Z}^*$$

- Tìm nghiệm tổng quát của bài toán HH1a dạng chuỗi hàm

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (7.7.7)$$

Thế vào điều kiện ban đầu (7.7.3)

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x) \text{ và } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x = h(x)$$

Nếu các hàm  $g$  và  $h$  có thể khai triển thành chuỗi Fourier trên đoạn  $[0, l]$  thì

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \text{ và } b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l h(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (7.7.8)$$

**Định lý** Cho các hàm  $g \in C^2(D, \mathbb{R})$  và  $h \in C^1(D, \mathbb{R})$  thoả mãn

$$g(0) = g(l) = 0 \text{ và } h(0) = h(l) = 0$$

Chuỗi hàm (7.7.7) với hệ số  $a_k$  và  $b_k$  tính theo công thức (7.7.8) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán HH1a.

**Chứng minh**

• Các hàm  $g$  và  $h$  theo giả thiết thoả mãn điều kiện Dirichlet do đó khai triển được thành chuỗi Fourier hội tụ đều và có các chuỗi đạo hàm hội tụ đều trên đoạn  $[0, 1]$ .

Suy ra chuỗi hàm (7.7.7) với các hệ số  $a_k$  và  $b_k$  tính theo công thức (7.7.8) là hội tụ đều và các chuỗi đạo hàm riêng đến cấp hai của nó cũng hội tụ đều trên miền  $H$ . Do vậy có thể đạo hàm từng từ hai lần theo  $x$ , theo  $t$  trên miền  $H$ . Kiểm tra trực tiếp thấy rằng chuỗi (7.7.7) và các chuỗi đạo hàm riêng của nó thoả mãn phương trình (7.7.1) và các điều kiện phụ (7.7.2), (7.7.3)

• Lập luận tương tự như bài toán CH1 suy ra tính ổn định và duy nhất nghiệm.  $\blacktriangleright$

**Ví dụ** Xác định dao động tự do của dây có hai đầu mút  $x = 0, x = 1$  cố định, độ lệch ban đầu  $u(x, 0) = x(1 - x)$  và vận tốc ban đầu  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ .

Thay vào công thức (7.7.8) nhận được

$$a_k = \int_0^1 x(1-x) \sin \frac{k\pi}{1} x dx = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ \frac{8l^2}{\pi^2(2n+1)^2} & k = 2n+1 \end{cases} \text{ và } b_k = 0 \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra nghiệm của bài toán

$$u(x, t) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi a}{l} t \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} x$$

**Đ8. Bài toán hỗn hợp không thuần nhất**

**Bài toán HH1b**

Cho các miền  $D = [0, 1], H = D \times [0, T]$ , các hàm  $f \in C(H, 3)$  và  $g, h \in C(D, 3)$

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ với } (x, t) \in H_0$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

• Tìm nghiệm bài toán HH1b dưới dạng chuỗi hàm

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{7.8.1}$$

Khai triển Fourier hàm  $f(x, t)$  trên đoạn  $[0, 1]$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \quad \text{với } f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Sau đó thế vào bài toán HH1b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( T_k''(t) + \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) \right) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = 0 \quad \text{và} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} T_k'(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = 0$$

Chúng ta nhận được họ phương trình vi phân hệ số hằng

$$T_k''(t) + \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) = f_k(t)$$

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0 \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}^* \tag{7.8.2}$$

• Giải họ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng (7.8.2) tìm các hàm  $T_k(t)$  sau đó thế vào công thức (7.8.1) suy ra nghiệm của bài toán HH1b. Họ phương trình (7.8.2) có thể giải bằng phương pháp toán tử Laplace nói ở chương 5 hoặc bằng một trong các phương pháp giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng đã biết nào đó. Lập luận tương tự như bài toán HH1a chúng ta có kết quả sau đây.

**Định lý** Cho hàm  $f \in C(H, 3) \cap C^1(D, 3)$ . Chuỗi hàm (7.8.1) với các hàm  $T_k(t)$  xác định từ họ phương trình (7.8.2) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán HH1b.

### **Bài toán HH1**

Cho các miền  $D = [0, l]$ ,  $H = D \times [0, T]$ , các hàm  $f \in C(H, 3)$ ,  $g, h \in C(D, 3)$  và các hàm  $p, q \in C([0, T], 3)$ . Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in H_0$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = p(t), \quad u(l, t) = q(t)$$

• Tìm nghiệm bài toán HH1 dưới dạng

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + p(t) + \frac{x}{l} (q(t) - p(t)) \tag{7.8.3}$$

Trong đó hàm  $v(x, t)$  là nghiệm của bài toán HH1a



$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$v(x, 0) = g(x) - p(0) - \frac{x}{l}(q(0) - p(0)) = g_1(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = h(x) - p'(0) - \frac{x}{l}(q'(0) - p'(0)) = h_1(x)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0 \tag{7.8.4}$$

với các điều kiện biên

$$g_1(0) = g_1(l) = 0 \Leftrightarrow g(0) = p(0), g(l) = q(0)$$

$$h_1(0) = h_1(l) = 0 \Leftrightarrow h(0) = p'(0), h(l) = q'(0)$$

Hàm  $w(x, t)$  là nghiệm của bài toán HH1b

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) - p''(t) - \frac{x}{l}(q''(t) - p''(t)) = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(x, t)$$

$$w(x, 0) = 0, \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0 \tag{7.8.5}$$

• Giải các bài toán (7.8.4) và (7.8.5) tìm các hàm  $v(x, t)$  và  $w(x, t)$  sau đó thế vào công thức (7.8.3) suy ra nghiệm của bài toán HH1.

**Định lý** Cho các hàm  $f \in C(H, 3) \cap C^1(D, 3)$ ,  $g \in C^2(D, 3)$ ,  $h \in C^1(D, 3)$  và các hàm  $p, q \in C^2([0, T], 3)$  thoả mãn

$$g(0) = p(0), g(l) = q(0) \text{ và } h(0) = p'(0), h(l) = q'(0)$$

Hàm  $u(x, t)$  xác định theo công thức (7.8.3) với các hàm  $v(x, t)$  và  $w(x, t)$  là nghiệm của các bài toán (7.8.4) và (7.8.5) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán HH1.

Ví dụ Giải bài toán  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt$  với  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x \text{ và } u(0, t) = 0, u(1, t) = t$$

• Tìm nghiệm của bài toán dưới dạng  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + xt$  trong đó hàm  $v(x, t)$  là nghiệm của bài toán HH1a với  $g_1(x) = \sin \pi x$  và  $h_1(x) = 0$  còn hàm  $w(x, t)$  là nghiệm của bài toán HH1b với  $f_1(x, t) = xt$ .

Giải bài toán HH1

$$a_k = 2 \int_0^1 \sin \pi x \sin k \pi x dx = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases} \text{ và } b_k = 0 \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra

$$v(x, t) = \cos 2\pi t \sin \pi x$$

Giải bài toán HH2a

$$f_k(t) = 2t \int_0^1 x \sin k\pi x dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} t \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Giải họ phương trình vi phân hệ số hằng

$$T_k''(t) + (2k\pi)^2 T_k(t) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} t, T_k(0) = 0, T_k'(0) = 0$$

Tìm được các hàm

$$T_k(t) = \frac{(-1)^{k+1}}{2(k\pi)^3} \left( t - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi t \right) \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra nghiệm của bài toán

$$u(x, t) = xt + \cos 2\pi t \sin \pi x + \frac{1}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \left( t - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi t \right) \sin k\pi x$$

Nhận xét Bằng cách kéo dài liên tục các hàm liên tục từng khúc, các công thức trên vẫn sử dụng được trong trường hợp các hàm  $g$  và  $h$  có đạo hàm liên tục từng khúc.

## Bài tập chương 7

• Đưa về chính tắc các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 sau đây.

1.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 16u = 0$
2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9 \frac{\partial u}{\partial x} - 9 \frac{\partial u}{\partial y} + 9u = 0$
3.  $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
4.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

• Lập bài toán phương trình Vật lý - Toán từ các bài toán sau đây.

7. Dây rất mảnh có độ dài  $l$  đặt trên trục  $Ox$ , nút  $x = 0$  cố định, nút  $x = l$  chuyển động theo qui luật  $Asin\omega t$ , dao động trong môi trường có lực cản tỷ lệ với vận tốc, hệ số tỷ lệ là  $\lambda$ , độ lệch ban đầu là  $g(x)$ , vận tốc ban đầu là  $h(x)$ . Xác định dao động của dây?
8. Đĩa rất mỏng đồng chất bán kính  $R$  đặt trong mặt phẳng  $Oxy$ , mật độ nguồn nhiệt trong tỷ lệ với khoảng cách đến tâm, nhiệt độ môi trường giữ ở nhiệt độ  $u_0$ , nhiệt độ ban đầu là  $g(x, y)$ . Xác định phân bố nhiệt trên đĩa?

• Giải bài toán Cauchy

$$9. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u|_{t=0} = e^x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = e^{-x}$$

$$10. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + te^{-x} \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x + \cos x$$

$$11. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x \quad u|_{t=0} = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x$$

$$12. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \cos x \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2x$$

• Giải bài toán giá Cauchy

$$13. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + te^{-x} \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x, \quad u(0, t) = 0$$

$$14. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x \quad u|_{t=0} = x \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x, \quad u(0, t) = e^{-t}$$

$$15. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin x \quad u|_{t=0} = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$16. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cos x \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

• Giải các bài toán hỗn hợp sau đây với  $H = [0, l] \times \mathbb{R}_+$

$$17. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u|_{t=0} = x(1-x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \text{ và } u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$18. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x \sin x \text{ và } u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$19. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u|_{t=0} = x \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \text{ và } u(0, t) = t, u(l, t) = 0$$

$$20. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \sin x \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \text{ và } u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$21. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \cos x \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x \text{ và } u(0, t) = 0, u(l, t) = t$$

$$22. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \text{ và } u(0, t) = 0, u(l, t) = A \sin \omega t$$

$$23. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u|_{t=0} = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = h(x) \text{ và } u(0, t) = u(l, t) = 0$$

## Phương trình truyền nhiệt

---

### Đ1. Bài toán Cauchy thuần nhất

**Bài toán CP1a**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$  và hàm  $g \in C(D, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{với } (x, t) \in H_0 \tag{8.1.1}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x) \tag{8.1.2}$$

- Tìm nghiệm riêng bị chặn của bài toán CP1a dạng tách biến

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Thế vào phương trình (8.1.1) đưa về hệ phương trình vi phân

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Hệ phương trình vi phân trên có họ nghiệm riêng bị chặn

$$T(t) = e^{-(\alpha a)^2 t} \quad \text{và} \quad X(x) = A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x \quad \text{với } \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Suy ra họ nghiệm riêng bị chặn của bài toán CP1a

$$u_\alpha(x, t) = e^{-(\alpha a)^2 t} (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$$

- Tìm nghiệm tổng quát của bài toán CP1a dạng tích phân suy rộng

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} u_\alpha(x, t) d\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha a)^2 t} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha \tag{8.1.3}$$

Thế vào điều kiện ban đầu (8.1.2)

$$u(x, 0) = \int_0^{+\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha = g(x)$$

Nếu hàm  $g$  có thể khai triển thành tích phân Fourier thì

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \cos(\alpha \xi) d\xi \quad \text{và} \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \sin(\alpha \xi) d\xi$$

Thay vào công thức (8.1.3) và biến đổi

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} g(\xi) \cos \alpha(\xi - x) d\xi \right) e^{-(\alpha a)^2 t} d\alpha$$

Đổi thứ tự lấy tích phân

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha a)^2 t} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha \right) g(\xi) d\xi \quad (8.1.4)$$

• Đổi biến  $\beta = \alpha a \sqrt{t} \Rightarrow d\beta = a \sqrt{t} d\alpha$

$$s = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} \Rightarrow \xi = x + 2a\sqrt{t} s, d\xi = 2a\sqrt{t} ds$$

Biến đổi tích phân bên trong của tích phân (8.1.4)

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha a)^2 t} \cos \alpha(\xi - x) d\alpha = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\beta^2} \cos 2s\beta d\beta = \frac{1}{a\sqrt{t}} I(s)$$

Đạo hàm  $I(s)$ , sau đó tích phân từng phần, nhận được phương trình vi phân

$$I'(s) = \int_0^{+\infty} \sin 2s\beta d\beta e^{-\beta^2} = -2sI(s) \text{ và } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow I(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2}$$

Thay vào tích phân (8.1.4) suy ra công thức sau đây.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + 2a\sqrt{t} s) e^{-s^2} ds = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (8.1.5)$$

**Định lý** Cho hàm  $g \in C(D, 3) \cap B(D, 3)$ . Bài toán CP1a có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức (8.1.5)

Chứng minh

• Theo giả thiết hàm  $g$  liên tục và bị chặn

$$\forall (x, t) \in H, \forall s \in 3, \square g(x + 2a\sqrt{t} s) e^{-s^2} \square \leq M e^{-s^2}$$

Suy ra tích phân (8.1.5) bị chặn đều. Do đó có thể lấy giới hạn và đạo hàm qua dấu tích phân theo  $x$  hai lần, theo  $t$  một lần. Kiểm tra trực tiếp hàm  $u(x, t)$  là nghiệm của phương trình (8.1.1) thoả mãn điều kiện ban đầu (8.1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \frac{\xi - x}{4a^3 \sqrt{\pi t}^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \left( \frac{-1}{4a^3 \sqrt{\pi t}^{3/2}} + \frac{(\xi - x)^2}{8a^5 \sqrt{\pi t}^{5/2}} \right) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \left( \frac{-1}{4a\sqrt{\pi t}^{3/2}} + \frac{(\xi - x)^2}{8a^3 \sqrt{\pi t}^{5/2}} \right) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + 2a\sqrt{t} s) e^{-s^2} ds = g(x)$$

• Nếu  $u_1$  là hai nghiệm của bài toán  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = g_i$

thì  $u = u_1 - u_2$  là nghiệm của bài toán  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = g_1 - g_2 = g$

Từ công thức (8.1.5) chúng ta có ước lượng sau đây

$$\forall (x, t) \in H, |u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x + 2s\sqrt{t})| e^{-s^2} ds \leq \sup_D |g(\xi)|$$

Từ đó suy ra

$$g = g_1 - g_2 = 0 \Rightarrow u = u_1 - u_2 = 0$$

$$\|g\| = \|g_1 - g_2\| < \delta \Rightarrow \|u\| = \|u_1 - u_2\| < \varepsilon$$

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất và ổn định trên H. ▶▶

**Ví dụ** Giải bài toán  $\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  và  $u(x, 0) = xe^{-x}$

Hàm  $g(x) = xe^{-x}$  thoả mãn điều kiện của định lý. Theo công thức (8.1.5)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [(x - 8t) + 4\sqrt{t}(s + 2\sqrt{t})] e^{-(s+2\sqrt{t})^2} e^{4t-x} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{4t-x} \left( (x - 8t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma + 4\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma e^{-\sigma^2} d\sigma \right) \text{ với } \sigma = s + 2\sqrt{t} \\ &= (x - 8t)e^{4t-x} \end{aligned}$$

## Đ2. Bài toán Cauchy không thuận nhất

### **Bài toán CP1b**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$  và hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ với } (x, t) \in H_0$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0$$

**Định lý** Cho hàm  $f \in C(H, \mathbb{R}) \cap B(D, \mathbb{R})$  và hàm  $v(x, \tau, t)$  là nghiệm của bài toán CP1a thoả mãn  $v(x, \tau, 0) = f(x, \tau)$ .

Bài toán CP1b có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức sau đây

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, \tau, t - \tau) d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \quad (8.2.1)$$

### **Chứng minh**

• Do hàm  $f \in C(H, \mathbb{R}) \cap B(D, \mathbb{R})$  nên hàm  $v \in C^2(H \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ . Do đó có thể đạo hàm tích phân (8.2.1) theo  $x$  hai lần, theo  $t$  một lần. Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau, t - \tau) d\tau + v(x, t, 0) = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau, t - \tau) d\tau + f(x, t) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ và } u(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

- Tính duy nhất và ổn định suy ra từ bài toán CP1a. ▶▶

### **Bài toán CP1**

Cho các miền  $D = \mathbb{R}$ ,  $H = D \times \mathbb{R}_+$ , các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$  và  $g \in C(D, \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ với } (x, t) \in H_0$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x)$$

- Tìm nghiệm của bài toán CP1 dưới dạng

$$u(x, t) = u_a(x, t) + u_b(x, t)$$

trong đó  $u_a(x, t)$  là nghiệm của bài toán CP1 $\alpha$

Kết hợp các công thức (8.1.5) và (8.2.1) suy ra công thức sau đây.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + 2a\sqrt{t}s) e^{-s^2} ds + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2a\sqrt{\tau}s, t - \tau) e^{-s^2} ds \right) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, t - \tau)}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2\tau}} d\xi \right) \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

**Định lý** Cho các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R}) \cap B(D, \mathbb{R})$  và  $g \in C(D, \mathbb{R}) \cap B(D, \mathbb{R})$ . Bài toán CP1 có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức (8.2.2).

**Ví dụ** Giải bài toán  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3t^2$  và  $u(x, 0) = \sin x$

Hàm  $f(x, t) = t^2$ ,  $g(x) = \sin x$  thoả mãn điều kiện của định lý. Theo công thức (8.2.2)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x + 2a\sqrt{t}s) e^{-s^2} ds + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} 3(t - \tau)^2 e^{-s^2} ds \right) d\tau$$

- Kí hiệu

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x+2a\sqrt{t}s)} e^{-s^2} ds$$

Đạo hàm  $I(t)$ , biến đổi và sau đó tích phân từng phần

$$I'(t) = \frac{-ia}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x+2a\sqrt{ts})} d(e^{-s^2}) = \frac{-ia}{2\sqrt{\pi t}} e^{i(x+2a\sqrt{ts})} e^{-s^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x+2a\sqrt{ts})} e^{-s^2} ds$$

$$= -a^2 I(t) \text{ với } I(0) = e^{ix}$$

Giải phương trình vi phân nhận được

$$I(t) = e^{-a^2 t} e^{ix} = e^{-a^2 t} (\cos x + i \sin x) \quad (8.2.3)$$

Tách phần thực, phần ảo suy ra các tích phân cần tìm. Cần ghi nhận kết quả và phương pháp tính tích phân trên để sử dụng sau này.

- Tính trực tiếp tích phân

$$J(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} 3(t-\tau)^2 e^{-s^2} ds \right) d\tau = t^3$$

Suy ra nghiệm của bài toán

$$u(x, t) = \text{Im } I(t) + J(t) = e^{-a^2 t} \sin x + t^3$$

Nhận xét Bằng cách kéo dài liên tục các hàm liên tục từng khúc, các công thức trên vẫn sử dụng được trong trường hợp các hàm  $f$  và  $g$  có đạo hàm liên tục từng khúc.

### Đ3. Bài toán giá Cauchy

#### Bài toán SP1a

Cho các miền  $D = 3_+$ ,  $H = D \times 3_+$ , các hàm  $f \in C(D, 3)$  và  $g \in C(D, 3)$

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ với } (x, t) \in H_0$$

và các điều kiện

$$u(x, 0) = g(x), u(0, t) = 0$$

- Tư tưởng chung để giải bài toán SP là tìm cách chuyển về bài toán CP tương đương. Giả sử  $f_1$  và  $g_1$  tương ứng là kéo dài của các hàm  $f$  và  $g$  lên toàn  $3$ , còn hàm  $v(x, t)$  là nghiệm của bài toán Cauchy sau đây.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t) \text{ và } u(x, 0) = g_1(x) \text{ với } (x, t) \in 3 \times 3_+$$

Theo công thức (8.2.2), ta có

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(\xi, t-\tau)}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 \tau}} d\xi \right)$$

Thế vào điều kiện biên



$$v(0, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(\xi, t-\tau)}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2\tau}} d\xi \right) = 0$$

Suy ra các hàm  $f_1$  và  $g_1$  phải là các hàm lẻ.

Tức là

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & x \geq 0 \\ -f(-x, t) & x < 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad g_1(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ -g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

**Định lý** Cho các hàm  $f \in C(H, 3) \cap B(H, 3)$  và  $g \in C(D, 3) \cap B(D, 3)$  thoả mãn

$$f(0, t) = 0 \quad \text{và} \quad g(0) = 0$$

Bài toán SP1a có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{+\infty} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t}} \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi, t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2\tau}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2\tau}} \right) d\xi \right) \quad (8.3.1)$$

**Ví dụ** Giải bài toán  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt$  với  $(x, t) \in 3_+ \times 3_+$

$$u(x, 0) = \sin x \quad \text{và} \quad u(0, t) = 0$$

Do các hàm  $f$  và  $g$  là hàm lẻ nên các hàm kéo dài lẻ  $f_1 = f$  và  $g_1 = g$ . Thay vào công thức (8.2.2) và sử dụng tích phân (8.2.3), ta có

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x + 2a\sqrt{ts}) e^{-s^2} ds + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} 2(t-\tau)(x + 2a\sqrt{\tau s}) e^{-s^2} ds d\tau \\ &= \text{Im}I(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t 2(t-\tau) d\tau \left( x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds - a\sqrt{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d(e^{-s^2}) \right) \\ &= e^{-a^2t} \sin x + xt^2 \end{aligned}$$

### **Bài toán SP1b**

Cho các miền  $D = 3_+$ ,  $H = D \times 3_+$  và hàm  $h \in C(3_+, 3)$

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{với} \quad (x, t) \in H_0$$

và các điều kiện

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = h(t)$$

**Định lý** Cho hàm  $h \in C(3_+, 3) \cap B(3_+, 3)$ . Bài toán SP1b có nghiệm duy nhất và ổn định

xác định theo công thức

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau \quad (8.3.2)$$

**Chứng minh**

• Do hàm  $h \in C(3_+, 3) \cap B(3_+, 3)$  nên tích phân (8.3.2) hội tụ đều H. Do đó có thể đạo hàm theo  $x$  hai lần, theo  $t$  một lần. Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau - \frac{x^2}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(t-\tau)}{\tau^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{-x}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(t-\tau)}{\tau^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau + \frac{x^3}{8a^5\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(t-\tau)}{\tau^{7/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \frac{h(0)}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} dh(t-\tau) \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t h(t-\tau) \left( \frac{-3}{2\tau^{5/2}} + \frac{x^2}{4a^2\tau^{7/2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau = a^2 u''_{xx} \end{aligned}$$

Theo công thức (8.3.2) ta có  $u(x, 0) = 0$

Đổi biến tích phân (8.3.2)

$$s = \frac{x}{2a\sqrt{\tau}}, \quad u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} h\left(t - \frac{x^2}{4a^2s^2}\right) e^{-s^2} ds$$

Suy ra  $u(0, t) = h(t)$

• Tính duy nhất và ổn định suy ra từ công thức (8.3.2) và ước lượng tích phân. ▶▶

**Bài toán SP1**

Cho các miền  $D = 3_+$ ,  $H = D \times 3_+$ , các hàm  $f \in C(H, 3)$ ,  $g \in C(D, 3)$  và  $h \in C(3_+, 3)$

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in H_0$$

và các điều kiện

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(0, t) = h(t)$$

• Tìm nghiệm của bài toán SP1 dưới dạng

$$u(x, t) = u_a(x, t) + u_b(x, t)$$

trong đó  $u_a(x, t)$  là nghiệm của bài toán SP1 $\alpha$

Kết hợp các công thức (8.3.1) và (8.3.2), suy ra công thức sau đây.

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{+\infty} \frac{g(\xi)}{t} \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi + x \int_0^t \frac{h(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau \right. \\ \left. + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi, t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2\tau}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2\tau}} \right) d\xi \right) \quad (8.3.3)$$

**Định lý** Cho  $f \in C(H, 3) \cap B(D, 3)$ ,  $g \in C(D, 3) \cap B(D, 3)$ ,  $h \in C(3_+, 3) \cap B(3_+, 3)$  thỏa mãn  $f(0, t) = 0$  và  $g(0) = 0$

Bài toán SP1 có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức (8.3.3)

**Nhận xét** Phương pháp trên có thể sử dụng để giải các bài toán giá Cauchy khác.

#### Đ4. Bài toán hỗn hợp thuần nhất

##### **Bài toán HP1a**

Cho các miền  $D = [0, 1]$ ,  $H = D \times [0, T]$  và hàm  $g \in C(D, 3)$

Tìm hàm  $u \in C(H, 3)$  thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{với } (x, t) \in H_0 \quad (8.4.1)$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x) \quad (8.4.2)$$

và điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (8.4.3)$$

- Tìm nghiệm của bài toán HP1a dạng tách biến

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Thế vào phương trình (8.4.1) và điều kiện biên (8.4.3) đưa về hệ phương trình vi phân

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (8.4.4)$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (8.4.5)$$

$$X(0) = X(1) = 0 \quad \text{với } \lambda \in \mathbb{R} \quad (8.4.6)$$

Lập luận tương tự như bài toán HH1a, tìm nghiệm riêng không tầm thường của hệ phương trình (8.4.4) và (8.4.6), nhận được họ nghiệm riêng trực giao trên đoạn  $[0, 1]$

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{1} x \quad \text{với } A_k \in \mathbb{R} \text{ và } \lambda_k = \left( \frac{k\pi}{1} \right)^2, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Thay vào phương trình (8.4.5) tìm được họ nghiệm riêng độc lập

$$T_k(t) = B_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \text{ với } B_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra họ nghiệm riêng độc lập của bài toán HP1

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x \text{ với } a_k = A_k B_k, k \in \mathbb{Z}^*$$

- Tìm nghiệm tổng quát của bài toán HP1 dạng chuỗi hàm

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (8.4.7)$$

Thay vào điều kiện ban đầu (8.4.2)

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x)$$

Nếu hàm  $g$  có thể khai triển thành chuỗi Fourier thì

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (8.4.8)$$

**Định lý** Cho hàm  $g \in C^1(D, \mathbb{R})$  thoả mãn  $g(0) = g(l) = 0$ . Chuỗi hàm (8.4.7) với các hệ số  $a_k$  tính theo công thức (8.4.8) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán HP1a.

**Chứng minh**

- Hàm  $g$  theo giả thiết thoả mãn điều kiện Diriclet và do đó khai triển được thành chuỗi Fourier hội tụ đều trên đoạn  $[0, l]$ .

Do đó chuỗi hàm (8.4.7) với các hệ số  $a_k$  tính theo công thức (8.4.8) là hội tụ đều và có thể đạo hàm từng từ theo  $x$  hai lần, theo  $t$  một lần trên miền  $H$ . Kiểm tra trực tiếp thấy rằng chuỗi hàm (8.4.7) và các chuỗi đạo hàm riêng của nó thoả mãn phương trình (8.4.1) và các điều kiện (8.4.2), (8.4.3)

- Lập luận tương tự như bài toán CP1 suy ra tính ổn định và duy nhất nghiệm.  $\blacktriangleright$

**Ví dụ** Giải bài toán  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  với  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$

$$u(x, 0) = x(1 - x) \text{ và } u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Theo công thức (8.4.8) ta có

$$a_k = 2 \int_0^1 x(1-x) \sin k\pi x dx = 4 \frac{1 - (-1)^k}{k^3 \pi^3} = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ \frac{8}{(2n+1)^3 \pi^3} & k = 2n+1 \end{cases}$$

Thế vào công thức (8.4.7) suy ra nghiệm của bài toán

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t} \sin(2n+1)\pi x$$

Đ5. Bài toán hỗn hợp không thuần nhất

**Bài toán HP1b**

Cho các miền  $D = [0, 1]$ ,  $H = D \times [0, T]$ , các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$  và  $g \in C(D, \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in H_0$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0$$

và các điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

• Tìm nghiệm bài toán HP1b dạng chuỗi hàm

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{1} x \quad (8.5.1)$$

Khai triển Fourier hàm  $f(x, t)$  đoạn  $[0, 1]$ , thế vào bài toán HP1b

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( T_k'(t) + \left( \frac{k\pi a}{1} \right)^2 T_k(t) \right) \sin \frac{k\pi}{1} x = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{1} x$$

$$\text{với } f_k(t) = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{1} dx \quad \text{và} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi}{1} x = 0$$

Đưa về họ phương trình vi phân hệ số hằng

$$T_k'(t) + \left( \frac{k\pi a}{1} \right)^2 T_k(t) = f_k(t), \quad T_k(0) = 0 \quad (8.5.2)$$

Giải họ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng (8.5.2) tìm các hàm  $T_k(t)$  thế vào công thức (8.5.1) suy ra nghiệm của bài toán.

**Định lý** Cho hàm  $f \in C(H, \mathbb{R}) \cap C^1(D, \mathbb{R})$ . Chuỗi hàm (8.5.1) với các hàm  $T_k(t)$  xác định bởi hệ phương trình (8.5.2) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán HP1b.

**Bài toán HPI**

Cho các miền  $D = [0, 1]$ ,  $H = D \times [0, T]$ , các hàm  $f \in C(H, \mathbb{R})$ ,  $g \in C(D, \mathbb{R})$  và các hàm  $p, q \in C([0, T], \mathbb{R})$ . Tìm hàm  $u \in C(H, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in H_0$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = g(x)$$

và các điều kiện biên

$$u(0, t) = p(t), \quad u(1, t) = q(t)$$

- Tìm nghiệm bài toán HP1 dưới dạng

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + p(t) + \frac{x}{l}(q(t) - p(t)) \quad (8.5.3)$$

Trong đó hàm  $v(x, t)$  là nghiệm của bài toán HP1a

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$v(x, 0) = g(x) - p(0) - \frac{x}{l}(q(0) - p(0)) = g_1(x)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0 \quad (8.5.4)$$

với điều kiện biên

$$g_1(0) = g_1(l) = 0 \Leftrightarrow g(0) = p(0), g(l) = q(0)$$

Hàm  $w(x, t)$  là nghiệm của bài toán HP1b

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) - p'(t) - \frac{x}{l}(q'(t) - p'(t)) = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(x, t)$$

$$w(x, 0) = 0$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0 \quad (8.5.5)$$

- Giải các bài toán (8.5.4) và (8.5.5) tìm hàm  $v(x, t)$  và hàm  $w(x, t)$  thế vào công thức (8.5.3) suy ra nghiệm của bài toán.

**Định lý** Cho các hàm  $f \in C(H, 3) \cap C^1(D, 3)$ ,  $g \in C^2(D, 3)$  và  $p, q \in C^1([0, T], 3)$  thỏa mãn  $g(0) = p(0)$ ,  $g(l) = q(0)$

Hàm  $u(x, t)$  xác định theo công thức (8.5.3) với hàm  $v(x, t)$  và hàm  $w(x, t)$  là nghiệm của các bài toán (8.5.4) và (8.5.5) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán HP1.

**Ví dụ** Giải bài toán  $\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  với  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$

$$u(x, 0) = x \text{ và } u(0, t) = 0, u(1, t) = e^{-t}$$

- Tìm nghiệm của bài toán dưới dạng  $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + xe^{-t}$  với hàm  $v(x, t)$  là nghiệm của bài toán HP1a với  $g_1(x) = 0$  còn hàm  $w(x, t)$  là nghiệm của bài toán HP1b với  $f_1(x, t) = xe^{-t}$ .

Bài toán HP1a có nghiệm  $v(x, t) = 0$

Giải bài toán HP1b

$$f_k(t) = 2e^{-t} \int_0^1 x \sin k\pi x dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} e^{-t} \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Giải hệ phương trình vi phân hệ số hằng

$$T_k'(t) + (2k\pi)^2 T_k(t) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} e^{-t}, T_k(0) = 0$$

Tìm được các hàm

$$T_k(t) = \frac{2(-1)^k}{k\pi(4k^2\pi^2 - 1)} \left( e^{-(2k\pi)^2 t} - e^{-t} \right) \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra nghiệm của bài toán

$$u(x, t) = xe^{-t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{k\pi(4k^2\pi^2 - 1)} \left( e^{-(2k\pi)^2 t} - e^{-t} \right) \sin k\pi x$$

Nhận xét Bằng cách kéo dài liên tục, các công thức trên vẫn sử dụng được trong trường hợp các hàm  $f$  và  $g$  có đạo hàm liên tục từng khúc.

## Đ6. Bài toán Dirichlet trong hình tròn

- Xét toán tử vi phân Laplace trong mặt phẳng

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Đổi biến tọa độ cực  $x = r\cos\varphi$ ,  $y = r\sin\varphi$

Theo công thức đạo hàm hàm hợp

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \cos\varphi \sin\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \cos\varphi \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \sin^2\varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cos\varphi \sin\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \cos\varphi \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cos^2\varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cos^2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Suy ra biểu thức tọa độ cực của toán tử Laplace

$$\Delta u(r, \varphi) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

### Bài toán DE1a

Cho miền  $D = [0, R] \times [0, 2\pi]$  và hàm  $g \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình Laplace

$$\Delta u(r, \varphi) = 0 \text{ với } (r, \varphi) \in D_0 \tag{8.6.1}$$

và điều kiện biên

$$u(R, \theta) = g(\theta) \tag{8.6.2}$$

- Tìm nghiệm của bài toán DE1a dạng tách biến

$$u(r, \varphi) = V(r)\Phi(\varphi)$$

Thế vào phương trình (8.6.1) nhận được hệ phương trình vi phân

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \quad (8.6.3)$$

$$r^2V''(r) + rV'(r) - \lambda V(r) = 0, \text{ với } \lambda \in \mathbb{Z} \quad (8.6.4)$$

Phương trình (8.6.3) có họ nghiệm riêng trực giao, tuần hoàn chu kỳ  $T = 2\pi$

$$\Phi_k(x) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi, \lambda_k = k^2 \text{ với } A_k, B_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

Thay vào phương trình (8.6.4) tìm họ nghiệm riêng độc lập và bị chặn

$$V_k(r) = C_k r^k \text{ với } C_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

Suy ra họ nghiệm riêng độc lập của bài toán DE1a

$$u_0 = a_0, u_k(r, \varphi) = r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \text{ với } a_k = C_k A_k, b_k = C_k B_k, k \in \mathbb{Z}^*$$

- Tìm nghiệm tổng quát của bài toán DE1a dạng chuỗi hàm

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (8.6.5)$$

Thế vào điều kiện biên (8.6.2)

$$u(R, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} R^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = g(\theta)$$

Nếu hàm  $g$  có thể khai triển thành chuỗi Fourier thì

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, a_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos k\theta d\theta, b_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin k\theta d\theta \quad (8.6.6)$$

**Định lý** Cho  $g \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$  thỏa mãn  $g(0) = g(2\pi)$ . Chuỗi hàm (8.6.5) với các hệ số  $a_k$  và  $b_k$  tính theo công thức (8.6.6) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán DE1a.

Chứng minh

Lập luận tương tự như bài toán CP1

►►

**Ví dụ** Giải bài toán DE1  $\Delta u = 0$  với  $u(R, \theta) = 2R \sin \theta$

Hàm  $g(\theta) = 2R \sin \theta$  thỏa mãn các điều kiện của định lý. Theo công thức (8.6.6)

$$a_k = 0 \text{ và } b_k = 2R \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin k\theta d\theta = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra nghiệm của bài toán  $u(r, \varphi) = 2r \sin \varphi \equiv 2y$

- Kí hiệu

$$u(z) = u(r, \varphi) \text{ với } z = re^{i\varphi} \in D_0$$

Theo kết quả ở Đ8, chương 3 suy ra bài toán DE1a có nghiệm theo công thức sau đây.

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} F(\zeta) d\zeta = \operatorname{Re} I(z) \quad (8.6.7)$$



Giả sử trong hình tròn  $B(0, R)$  hàm  $g$  có các cực điểm khác không  $a_k$  với  $k = 1..n$  Theo công thức tính tích phân Cauchy (4.7.6) ta có

$$I(z) = \text{Res}F(z) + \text{Res}F(0) + \sum_{k=1}^n \text{Re} sF(a_k) \quad (8.6.8)$$

**Ví dụ** Giải bài toán DE1  $\Delta u = 0$  với  $u(R, \theta) = 2R \sin \theta$

Chuyển qua tọa độ phức

$$g(\zeta) = 2R \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{i} \frac{\zeta^2 - R^2}{\zeta^2} \text{ và } F(\zeta) = \frac{1}{i} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{\zeta^2 - R^2}{\zeta^2}$$

Ta có

$$I(z) = \text{Res}[f, z] + \text{Res}[f, 0] = \frac{2(z^2 - R^2)}{iz} + \frac{2R^2}{iz} = -2iz$$

Suy ra nghiệm của bài toán

$$u(z) = \text{Re}(-2iz) = 2y$$

### **Bài toán DE1b**

Cho miền  $D = [\rho, R] \times [0, 2\pi]$  và các hàm  $g, h \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình Laplace

$$\Delta u(r, \varphi) = 0 \text{ với } (r, \varphi) \in D_0 \quad (8.6.9)$$

và điều kiện biên

$$u(\rho, \theta) = g(\theta), u(R, \theta) = h(\theta) \quad (8.6.10)$$

- Lập luận tương tự bài toán DE1a, tìm nghiệm của bài toán DE1b dạng tách biến

$$u(r, \varphi) = V(r)\Phi(\varphi)$$

Thay vào phương trình (8.6.9) nhận được họ nghiệm riêng độc lập

$$u_0 = a_0 + b_0 \ln r$$

$$u_k(r, \varphi) = (a_k r^k + b_k r^{-k}) \cos k\varphi + (c_k r^k + d_k r^{-k}) \sin k\varphi \text{ với } a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^*$$

- Tìm nghiệm tổng quát của bài toán DE1b dạng chuỗi hàm

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} [(a_k r^k + b_k r^{-k}) \cos k\varphi + (c_k r^k + d_k r^{-k}) \sin k\varphi] \quad (8.6.11)$$

Thế vào điều kiện biên (8.6.10)

$$u(\rho, \theta) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{+\infty} [(a_k \rho^k + b_k \rho^{-k}) \cos k\theta + (c_k \rho^k + d_k \rho^{-k}) \sin k\theta] = g(\theta)$$

$$u(R, \theta) = a_0 + b_0 \ln R + \sum_{k=1}^{+\infty} [(a_k R^k + b_k R^{-k}) \cos k\theta + (c_k R^k + d_k R^{-k}) \sin k\theta] = h(\theta)$$

Nếu hàm  $g$  có thể khai triển thành chuỗi Fourier thì

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 \ln \rho &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta & a_0 + b_0 \ln R &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta \\ a_k \rho^k + b_k \rho^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos k\theta d\theta & a_k R^k + b_k R^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos k\theta d\theta \\ c_k \rho^k + d_k \rho^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin k\theta d\theta & c_k R^k + d_k R^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin k\theta d\theta \end{aligned} \quad (8.6.12)$$

**Định lý** Cho các hàm  $g, h \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$  thoả mãn  $g(0) = g(2\pi), h(0) = h(2\pi)$ . Chuỗi hàm (8.6.11) với các hệ số  $a_k, b_k, c_k$  và  $d_k$  xác định từ hệ phương trình (8.6.12) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán DE1b.

### Đ7. Bài toán Dirichlet trong hình chữ nhật

#### **Bài toán DE2a**

Cho miền  $D = [0, 1] \times [0, d]$  và hàm  $g_a \in C([0, 1], \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{với } (x, y) \in D_0 \quad (8.7.1)$$

và điều kiện biên

$$u(x, 0) = g_a(x), u(x, d) = u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad (8.7.2)$$

- Tìm nghiệm của bài toán DE2a dạng tách biến

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Thay vào phương trình (8.7.1) đưa về hệ phương trình vi phân

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

$$X(0) = X(1) = Y(d) = 0 \quad \text{với } \lambda \in \mathbb{R} \quad (8.7.3)$$

Bài toán (8.7.3) có họ nghiệm riêng độc lập

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{1} x, Y_k(y) = B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{1} (d-y), \lambda_k = \left( \frac{k\pi}{1} \right)^2 \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}^*$$

Suy ra có họ nghiệm riêng độc lập của bài toán DE2a

$$u_k(x, y) = a_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{1} (d-y) \sin \frac{k\pi}{1} x \quad \text{với } a_k = A_k B_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^*$$

- Tìm nghiệm tổng quát của bài toán DE2a dạng chuỗi hàm

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{l} (d-y) \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (8.7.4)$$

Thế vào điều kiện biên (8.7.2)

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \operatorname{sh} \frac{k\pi d}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x = g_a(x)$$

Nếu hàm  $g_a$  có thể khai triển thành chuỗi Fourier trên đoạn  $[0, l]$  thì

$$a_k = \frac{2}{l \operatorname{sh} \frac{k\pi d}{l}} \int_0^l g_a(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (8.7.5)$$

**Định lý** Cho hàm  $g_a \in C^1([0, l], \mathbb{R})$  thoả mãn  $g_a(0) = g_a(l) = 0$ . Chuỗi hàm (8.7.4) với hệ số  $a_k$  tính theo công thức (8.7.5) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán DE2a.

• Lập luận tương tự như trên, chúng ta giải các bài toán sau đây.

### **Bài toán DE2b**

Cho miền  $D = [0, l] \times [0, d]$  và hàm  $g_b \in C([0, d], \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ với } (x, y) \in D_0$$

và điều kiện biên

$$u(l, y) = g_b(y), u(x, d) = u(0, y) = u(x, 0) = 0$$

**Định lý** Cho hàm  $g_b \in C^1([0, d], \mathbb{R})$  thoả mãn  $g_b(0) = g_b(d) = 0$ . Bài toán DE2b có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} x \sin \frac{k\pi}{d} y \text{ với } b_k = \frac{2}{d \operatorname{sh} \frac{k\pi l}{d}} \int_0^d g_b(y) \sin \frac{k\pi}{d} y dy \quad (8.7.6)$$

### **Bài toán DE2c**

Cho miền  $D = [0, l] \times [0, d]$  và hàm  $g_c \in C([0, l], \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ với } (x, y) \in D_0$$

và điều kiện biên

$$u(x, d) = g_c(x), u(0, x) = u(x, 0) = u(l, y) = 0$$

**Định lý** Cho hàm  $g_c \in C^1([0, l], \mathbb{R})$  thoả mãn  $g_c(0) = g_c(l) = 0$ . Bài toán DE2c có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{l} y \sin \frac{k\pi}{l} x \text{ với } c_k = \frac{2}{l \operatorname{sh} \frac{k\pi d}{l}} \int_0^l g_c(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (8.7.7)$$

**Bài toán DE2d**

Cho  $D = [0, 1] \times [0, d]$  và hàm  $g_d \in C([0, d], \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ với } (x, y) \in D_0$$

và điều kiện biên

$$u(0, y) = g_d(y), u(x, 0) = u(x, d) = 0$$

**Định lý** Cho hàm  $g_d \in C^1([0, d], \mathbb{R})$  thoả mãn  $g_d(0) = g_d(d) = 0$ . Bài toán DE2d có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (1-x) \sin \frac{k\pi}{d} y$$

$$\text{với } d_k = \frac{2}{\operatorname{dsh} \frac{k\pi l}{d}} \int_0^d g_d(y) \sin \frac{k\pi}{d} y dy \quad (8.7.8)$$

**Bài toán DE2**

Cho miền  $D = [0, 1] \times [0, d]$ , các hàm  $g_1, g_3 \in C([0, 1], \mathbb{R})$  và  $g_2, g_4 \in C([0, d], \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ với } (x, y) \in D_0$$

và điều kiện biên

$$u(x, 0) = g_1(x), u(1, y) = g_2(y), u(x, d) = g_3(x), u(0, y) = g_4(y)$$

- Tìm nghiệm của bài toán DE2 dưới dạng

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_a(x, y) + u_b(x, y) + u_c(x, y) + u_d(x, y)$$

Trong đó  $u_\alpha(x, y)$  là nghiệm của bài toán DE2 $\alpha$ .

Hàm

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy \quad (8.7.9)$$

là nghiệm của bài toán DE sao cho  $u_\alpha(x, y)$  triệt tiêu tại các đỉnh của hình chữ nhật.

Do tính liên tục của hàm  $u(x, y)$  trên biên  $\partial D$

$$u(0, 0) = g_4(0) = g_1(0) = A$$

$$u(1, 0) = g_1(1) = g_2(0) = A + B$$

$$u(1, d) = g_2(d) = g_3(1) = A + B + Cd + Dd$$

$$u(0, d) = g_3(0) = g_4(d) = A + Cd$$

Giải hệ phương trình trên suy ra

$$A = g_4(0) = g_1(0), B = \frac{g_1(1) - g_1(0)}{1}, C = \frac{g_4(d) - g_4(0)}{d}$$

$$D = \frac{g_3(1) - g_3(0) - g_1(1) + g_1(0)}{ld} = \frac{g_2(d) - g_2(0) - g_4(d) + g_4(0)}{ld} \quad (8.7.10)$$

- Thế vào điều kiện biên suy ra

$$\begin{aligned}g_a(x) &= u_a(x, 0) = g_1(x) - g_1(0) - \frac{x}{l}(g_1(l) - g_1(0)) \\g_c(x) &= u_c(x, d) = g_3(x) - g_3(0) - \frac{x}{l}(g_3(l) - g_3(0)) \\g_b(y) &= u_b(l, y) = g_2(y) - g_2(0) - \frac{y}{d}(g_2(d) - g_2(0)) \\g_d(y) &= u_d(0, y) = g_4(y) - g_4(0) - \frac{y}{d}(g_4(d) - g_4(0))\end{aligned}\quad (8.7.11)$$

- Kết hợp các công thức (8.7.4) - (8.7.8) nhận được công thức

$$\begin{aligned}u(x, y) &= u_0(x, y) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( a_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{l}(d-y) + c_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{l}y \right) \sin \frac{k\pi}{l}x \\&\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}x + d_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(1-x) \right) \sin \frac{k\pi}{d}y\end{aligned}\quad (8.7.12)$$

**Định lý** Cho các hàm  $g_1, g_3 \in C^1([0, l], \mathbb{R})$  và  $g_2, g_4 \in C^1([0, d], \mathbb{R})$  thỏa mãn

$$g_4(0) = g_1(0), \quad g_1(l) = g_2(0), \quad g_2(d) = g_3(l), \quad g_3(0) = g_4(d)$$

Chuỗi hàm (8.7.12) với hàm  $u_0(x, y)$  xác định theo các công thức (8.7.9) - (8.7.10) và các hệ số  $a_k, b_k, c_k$  và  $d_k$  xác định theo các công thức (8.7.5) - (8.7.8) trong đó các hàm  $g_a, g_b, g_c$  và  $g_d$  xác định theo công thức (8.7.11) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán DE2.

## Đ8. Bài toán Neumann

### **Bài toán NE1**

Cho miền  $D = [0, R] \times [0, 2\pi]$  và hàm  $h \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thỏa mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{với } (r, \varphi) \in D_0 \quad (8.8.1)$$

và điều kiện biên

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = h(\theta) \quad (8.8.2)$$

- Tìm nghiệm của bài toán NE1 dạng tách biến

$$u(r, \varphi) = V(r)\Phi(\varphi)$$

Thay vào phương trình (8.8.1) nhận được hệ phương trình vi phân

$$\begin{aligned} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) &= 0 \\ r^2 V''(r) + rV'(r) - \lambda V(r) &= 0, \lambda \in 3 \end{aligned} \quad (8.8.3)$$

Bài toán (8.8.3) có họ nghiệm riêng độc lập

$$u_0 = a_0, u_k(r, \varphi) = r^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \text{ với } a_k = C_k A_k, b_k = C_k B_k, k \in \mathbb{Z}^*$$

• Tìm nghiệm tổng quát của bài toán NE1 dạng chuỗi hàm

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (8.8.4)$$

Thế vào điều kiện biên (8.8.2)

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} kR^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = h(\theta)$$

Nếu hàm  $h$  có thể khai triển thành chuỗi Fourier thì

$$\begin{aligned} a_0 &= u(0, \theta) \\ a_k &= \frac{1}{k\pi R^{k-1}} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos k\theta d\theta, b_k = \frac{1}{k\pi R^{k-1}} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin k\theta d\theta \end{aligned} \quad (8.8.5)$$

**Định lý** Cho  $h \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$  thoả mãn  $h(0) = h(2\pi)$ . Chuỗi hàm (8.8.4) với các hệ số  $a_k$  và  $b_k$  tính theo công thức (8.8.5) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán NE1.

• Lập luận tương tự như các bài toán DE2 chung ta giải các bài toán sau đây

**Bài toán NE2b**

Cho miền  $D = [0, 1] \times [0, d]$  và hàm  $h_b \in C([0, d], \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ với } (x, y) \in D_0$$

và các điều kiện biên

$$u(x, d) = u(0, y) = u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = h_b(y)$$

**Định lý** Cho hàm  $h_b \in C^1([0, d], \mathbb{R})$ . Bài toán NE2b có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} x \sin \frac{k\pi}{d} y \text{ với } b_k = \frac{2}{k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi l}{d}} \int_0^d h_b(y) \sin \frac{k\pi}{d} y dy \quad (8.8.6)$$

**Bài toán NE2d**

Cho miền  $D = [0, 1] \times [0, d]$  và hàm  $h_d \in C([0, d], \mathbb{R})$ .

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ với } (x, y) \in D_0$$

và các điều kiện biên

$$u(x, 0) = u(1, y) = u(x, d) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h_d(y)$$

**Định lý** Cho hàm  $h_d \in C^1([0, d], \mathbb{R})$ . Bài toán NE2d có nghiệm duy nhất và ổn định xác định theo công thức

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (1-x) \sin \frac{k\pi}{d} y$$

$$\text{với } d_k = \frac{-2}{k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi l}{d}} \int_0^d h_d(y) \sin \frac{k\pi}{d} y dy \quad (8.8.7)$$

**Bài toán NE2**

Cho miền  $D = [0, 1] \times [0, d]$  và các hàm  $g_1, g_3 \in C([0, 1], \mathbb{R})$  và  $h_2, h_4 \in C([0, d], \mathbb{R})$

Tìm hàm  $u \in C(D, \mathbb{R})$  thoả mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ với } (x, y) \in D_0$$

và các điều kiện biên

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u(x, d) = g_3(x) \text{ và } \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = h_2(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = h_4(y)$$

• Tìm nghiệm của bài toán NE2 dưới dạng

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_a(x, y) + u_b(x, y) + u_c(x, y) + u_d(x, y) \quad (8.8.8)$$

Trong đó các hàm  $u_a(x, y)$  và  $u_c(x, y)$  là nghiệm của bài toán DE2a và DE2c, các hàm  $u_b(x, y)$  và  $u_d(x, y)$  là nghiệm của bài toán NE2b và NE2d, còn hàm

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy \quad (8.8.9)$$

là nghiệm của bài toán DE sao cho  $u_\alpha(x, y)$  triệt tiêu tại các đỉnh của hình chữ nhật

• Lập luận tương tự như bài toán DE2 suy ra

$$\begin{aligned} A &= g_1(0) & B &= \frac{g_1(1) - g_1(0)}{1} \\ C &= \frac{g_3(0) - g_1(0)}{d} & D &= \frac{g_3(1) - g_1(1) - g_3(0) + g_1(0)}{ld} \end{aligned} \quad (8.8.10)$$

Thế vào điều kiện biên suy ra

$$\begin{aligned}
 g_a(x) &= g_1(x) - g_1(0) - \frac{x}{l}(g_1(l) - g_1(0)) \\
 g_c(x) &= g_3(x) - g_3(0) - \frac{x}{l}(g_3(l) - g_3(0)) \\
 h_b(y) &= h_2(y) - (B + Dy) \\
 &= h_2(y) - \frac{g_1(l) - g_1(0)}{l} - \frac{y}{d} \frac{g_3(l) - g_1(l) - g_3(0) + g_1(0)}{l} \\
 h_d(y) &= h_4(y) - (B + Dy) \\
 &= h_4(y) - \frac{g_1(l) - g_1(0)}{l} - \frac{y}{d} \frac{g_3(l) - g_1(l) - g_3(0) + g_1(0)}{l} \tag{8.8.11}
 \end{aligned}$$

- Kết hợp các công thức (8.7.4), (8.7.6), (8.8.6), (8.8.7) và (8.8.8) suy ra công thức

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( a_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{l}(d-y) + c_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{l}y \right) \sin \frac{k\pi}{l}x \\
 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}x + d_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(1-x) \right) \sin \frac{k\pi}{d}y \tag{8.8.12}
 \end{aligned}$$

**Định lý** Cho các hàm  $g_1, g_3 \in C^1([0, l], \mathbb{R})$  và  $g_2, g_4 \in C^1([0, d], \mathbb{R})$  thoả mãn

$$g'_a(0) = h_d(0), \quad g'_a(l) = h_b(0) \quad \text{và} \quad g'_c(0) = h_d(d), \quad g'_c(l) = h_b(d)$$

Chuỗi hàm (8.8.12) với hàm  $u_0(x, y)$  xác định theo các công thức (8.8.9) - (8.8.10) và các hệ số  $a_k$  và  $c_k$  xác định theo các công thức (8.7.5) và (8.7.7) còn các hệ số  $b_k$  và  $d_k$  xác định theo các công thức (8.8.6) và (8.8.7) với các hàm  $g_a, g_c, h_b$  và  $h_d$  xác định theo công thức (8.8.11) là nghiệm duy nhất và ổn định của bài toán NE2.

## Bài tập chương 8

- Giải các bài toán Cauchy

1.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$   $u|_{t=0} = xe^{-x^2}$
2.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3xt^2$   $u|_{t=0} = \sin x$
3.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-t}$   $u|_{t=0} = \cos x$
4.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + te^{-x}$   $u|_{t=0} = \sin x$



• Giải các bài toán giá Cauchy

5.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin t$        $u|_{t=0} = \sin x, u(0, t) = 0$
6.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x$        $u|_{t=0} = x \cos x, u(0, t) = e^t$
7.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + te^{-x}$        $u|_{t=0} = \cos x, \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sin t$
8.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-t}$        $u|_{t=0} = \sin x, \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \cos t$

• Giải các bài toán hỗn hợp sau đây

9.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$        $u|_{t=0} = x(1-x), u(0, t) = u(1, t) = 0$
10.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x$        $u|_{t=0} = \sin x, u(0, t) = u(1, t) = 0$
11.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \cos x$        $u|_{t=0} = \cos x, u(0, t) = 0, u(1, t) = t$
12.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3xt^2$        $u|_{t=0} = 0, u(0, t) = 0, u(1, t) = A \sin \omega t$
13.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-x)e^t$        $u|_{t=0} = 1, u(0, t) = e^t, u(1, t) = 0$
14.  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^t$        $u|_{t=0} = 2x, u(0, t) = 0, u(1, t) = e^t$

• Giải bài toán Dirichlet trong hình tròn

15.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$  và  $u|_{r=2} = x^2 - xy + 2$
16.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$  và  $u(2, \varphi) = A + B \sin \varphi$
17.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$  và  $u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi$
18.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$  và  $u(1, \varphi) = \cos^4 \varphi$
19.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$  và  $u(R, \varphi) = 0$

• Giải bài toán Dirichlet trong hình vành khăn

20.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [1, 2] \times [0, 2\pi]$  và  $u(1, \varphi) = A, u(2, \varphi) = B$
21.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [1, 2] \times [0, 2\pi]$  và  $u(1, \varphi) = 1 + \cos^2 \varphi, u(2, \varphi) = \sin^2 \varphi$
22.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, \pi]$  và  $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, u(R, \varphi) = A\varphi$

• Giải bài toán Dirichlet trong hình chữ nhật

23.  $\Delta u = 0$  với  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$

$$u(0, y) = Ay(b - y), u(a, y) = 0, u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, u(x, b) = 0$$

24.  $\Delta u = 0$  với  $(x, y) \in [0, \pi] \times [-1, 1]$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, u(x, -1) = u(x, 1) = \sin 2x$$

25.  $\Delta u = 0$  với  $(x, y) \in [0, a] \times [0, +\infty)$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, u(x, 0) = A(1 - \frac{x}{a}), u(x, +\infty) = 0$$

• Giải bài toán Neuman trong hình tròn

26.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$  và  $\frac{\partial u}{\partial r}(2, \varphi) = A\varphi$

27.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$  và  $\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) = 2\cos\varphi$

29.  $\Delta u = 0$  với  $(r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$  và  $\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) = -\sin\varphi$

• Giải bài toán hỗn hợp trong hình chữ nhật

29.  $\Delta u = 0$  với  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$

$$u(0, y) = A, u(a, y) = By, \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0$$

30.  $\Delta u = 0$  với  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$

$$u(0, y) = A, u(a, y) = By, \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0$$

31.  $\Delta u = 0$  với  $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$

$$u(x, 0) = A, u(x, \pi) = Bx, \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \cos y, \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \sin y$$

32.  $\Delta u = -2$  với  $(x, y) \in [0, a] \times [-b, b]$

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$$

## Tài Liệu Tham Khảo

---

- [1] Đặng Đình Ang - Trần Lưu Cường - Huỳnh Bá Lân - Nguyễn Văn Nhân (2001)  
*Biến đổi tích phân*, NXB Giáo dục, Hà nội
- [2] Đạu Thế Cấp (1999)  
*Hàm một biến phức*, NXB Giáo dục, Hà nội
- [3] Dương Tôn Đảm (1992)  
*Phương trình vật lý - toán*, NXB Đại học & GDCN, Hà nội
- [4] G.M Fichtengon (1972)  
*Cơ sở giải tích toán học, Tập 2*, NXB Đại học & THCN, Hà nội
- [5] Phan Bá Ngọc (1980)  
*Hàm biến phức và phép biến đổi Laplace*, NXB Đại học & THCN, Hà nội
- [6] B.V Sabat (1979)  
*Nhập môn giải tích phức, Tập 1*, NXB Đại học & THCN, Hà nội
- [7] Nguyễn Thủy Thanh (1985)  
*Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*, NXB Đại học & THCN, Hà nội
- [8] Nguyễn Đình Trí - Nguyễn Trọng Thái (1977)  
*Phương trình vật lý - toán*, NXB Đại học & THCN, Hà nội
- [9] A.V Oppenheim & A.S Willsky (1997)  
*Signals & Systems*, Prentice Hall, New Jersey
- [10] J. Monier (1997)  
*Analyse 3 et Analyse 4*, Dunod, Paris
- [11] W. Rudin (1998)  
*Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris
- [12] H.П Pиcкoвский (1978)  
Pиcкoвский H.П. Pиcкoвский Pиcкoвский, Tập 2, H.П. Pиcкoвский, Pиcкoвский

# Mục lục

---

Lời nói đầu .....	6
Chương 1. Số phức.....	5
Đ1. Trường số phức .....	5
Đ2. Dạng đại số của số phức .....	6
Đ3. Dạng lượng giác của số phức .....	7
Đ4. Các ứng dụng hình học phẳng.....	10
Đ5. Dãy trị phức .....	12
Đ6. Hàm trị phức .....	14
Đ7. Tập con của tập số phức.....	16
Bài tập chương 1 .....	19
Chương 2. Hàm biến phức .....	22
Đ1. Hàm biến phức.....	22
Đ2. Giới hạn và liên tục.....	23
Đ3. Đạo hàm phức .....	25
Đ4. Hàm giải tích .....	27
Đ5. Hàm lũy thừa .....	28
Đ6. Hàm mũ .....	30
Đ7. Hàm lượng giác.....	31
Đ8. Biến hình bảo giác .....	32
Đ9. Hàm tuyến tính và hàm nghịch đảo .....	34
Đ10. Hàm phân tuyến tính và hàm Jucop.....	36
Đ11. Các ví dụ biến hình bảo giác.....	37
Bài tập chương 2 .....	40
Chương 3. Tích Phân Phức .....	43
Đ1. Tích phân phức.....	43
Đ2. Các tính chất của tích phân phức .....	44
Đ3. Định lý Cauchy .....	46
Đ4. Công thức tích phân Cauchy .....	48
Đ5. Tích phân Cauchy .....	50
Đ6. Định lý trị trung bình.....	52
Đ7. Hàm điều hoà.....	54
Bài tập chương 3 .....	57
Chương 4. CHUỖI hàm PHỨC và Thặng dư.....	59
Đ1. Chuỗi hàm phức.....	59
Đ2. Chuỗi lũy thừa phức.....	61
Đ3. Chuỗi Taylor.....	63
Đ4. Không điểm của hàm giải tích.....	64
Đ5. Chuỗi Laurent .....	66
Đ6. Phân loại điểm bất thường .....	67
Đ7. Thặng dư.....	69
Đ8. Thặng dư Loga.....	71
Đ9. Các ứng dụng thặng dư .....	73
Bài tập chương 4 .....	76
Chương 5. Biến đổi fourier và Biến đổi laplace .....	79
Đ1. Tích phân suy rộng .....	79
Đ2. Các bổ đề Fourier.....	81

Đ3. Biến đổi Fourier.....	83
Đ4. Tính chất của biến đổi Fourier .....	85
Đ5. Tìm ảnh, gốc của biến đổi Fourier .....	87
Đ6. Biến đổi Laplace.....	91
Đ7. Biến đổi Laplace ngược.....	92
Đ8. Tính chất của Biến đổi Laplace .....	94
Đ9. Tìm ảnh, gốc của biến đổi Laplace.....	96
Bài tập chương 5.....	99
Chương 6. Lý thuyết trường .....	101
Đ1. Trường vô hướng .....	101
Đ2. Gradient.....	102
Đ3. Trường vectơ .....	103
Đ4. Thông lượng .....	104
Đ5. Hoàn lưu.....	106
Đ6. Toán tử Hamilton .....	107
Đ7. Trường thế.....	108
Đ8. Trường ống.....	110
Bài tập chương 6.....	111
Chương 7. Phương trình truyền sóng.....	113
Đ1. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2.....	113
Đ2. Phương trình vật lý - toán.....	116
Đ3. Các bài toán cơ bản .....	118
Đ4. Bài toán Cauchy thuận nhất.....	120
Đ5. Bài toán Cauchy không thuận nhất.....	122
Đ6. Bài toán giả Cauchy.....	124
Đ7. Bài toán hỗn hợp thuận nhất.....	126
Đ8. Bài toán hỗn hợp không thuận nhất.....	128
Bài tập chương 7.....	131
Chương 8. Phương trình truyền nhiệt.....	133
Đ1. Bài toán Cauchy thuận nhất.....	133
Đ2. Bài toán Cauchy không thuận nhất.....	135
Đ3. Bài toán giả Cauchy.....	137
Đ4. Bài toán hỗn hợp thuận nhất.....	140
Đ5. Bài toán hỗn hợp không thuận nhất.....	142
Đ6. Bài toán Dirichlet trong hình tròn.....	144
Đ7. Bài toán Dirichlet trong hình chữ nhật .....	147
Đ8. Bài toán Neumann.....	150
Bài tập chương 8.....	153
Tài Liệu Tham Khảo.....	156
Mục lục.....	157