Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Ứng dụng

Giải tích hàm nhiều biến

Chương 2: Đạo hàm riêng và vi phân

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (2/2008)*

dangvvinh@hcmut.edu.vn

Nội dung

0.1 – Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

0.2 – Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

0.3 – Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

0.4 – Đạo hàm theo hướng

0.5 – Công thức Taylor, Maclaurint

0.6 – Ứng dụng của đạo hàm riêng

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Định nghĩa đạo hàm riêng theo x.

Cho hàm hai biến f = f(x,y) với điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến F(x) = f(x,y_0) theo biến x.

Đạo hàm của hàm một biến F(x) tại x_0 được gọi là đạo hàm riêng theo x của f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x_0, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Định nghĩa đạo hàm riêng theo y.

Cho hàm hai biến f = f(x,y) với điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến F(y) = f(x_0,y) theo biến y.

Đạo hàm của hàm một biến F(y) tại y_0 được gọi là đạo hàm riêng theo y của f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

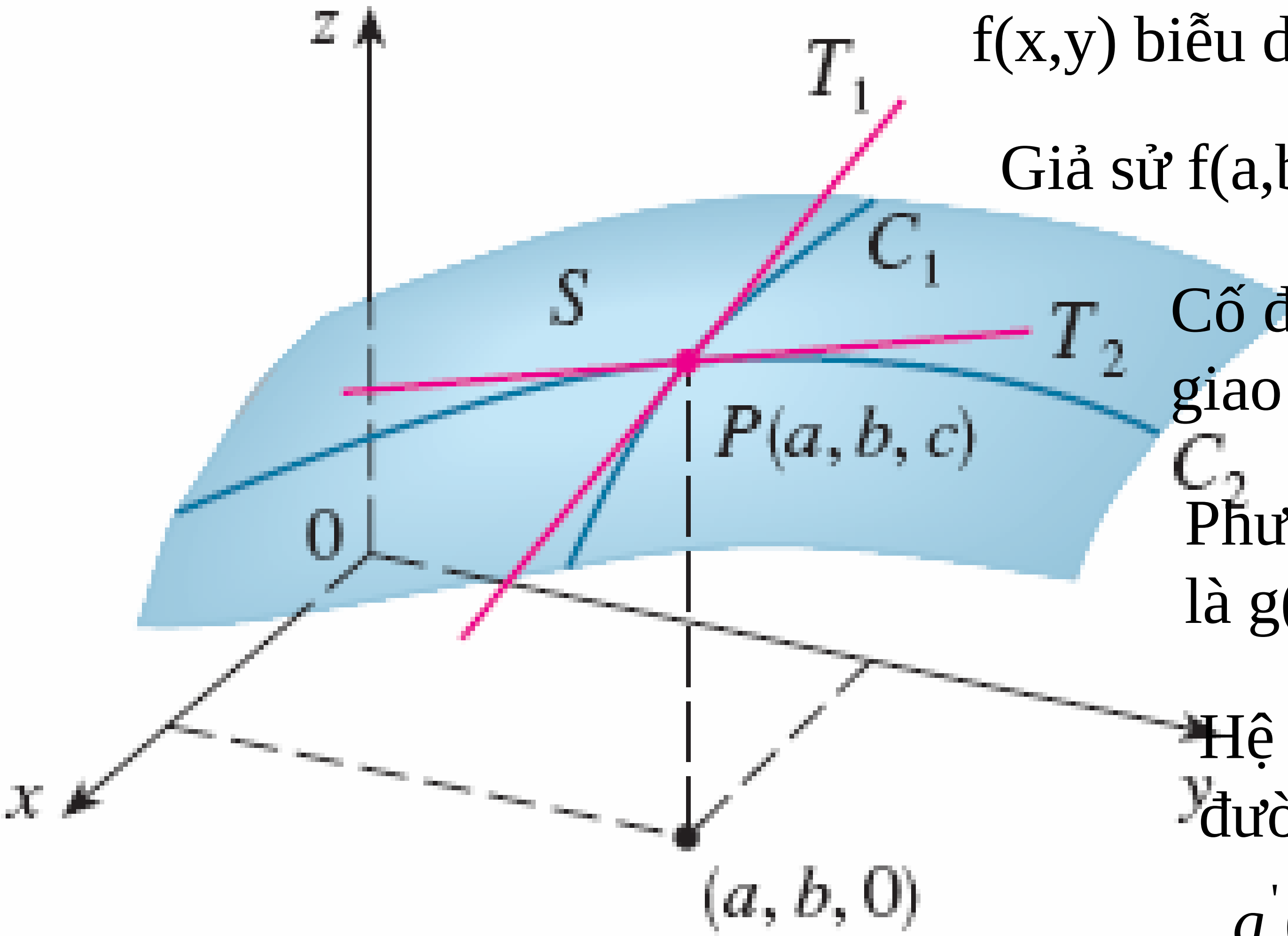
Ghi nhớ.

Đạo hàm riêng của f = f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$ theo x là đạo hàm của hàm một biến f = f(x,y_0).

Đạo hàm riêng của f = f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$ theo y là đạo hàm của hàm một biến f = f(x_0,y).

Qui tắc tìm đạo hàm riêng.

Để tìm đạo hàm riêng của f theo biến x, ta coi f là hàm một biến x, biến còn lại y là hằng số.



f(x,y) biểu diễn bởi mặt S (màu xanh)

Giả sử f(a,b) = c, nên điểm P(a,b,c) ∈

Cố định y = b. Đường cong C_1 giao của S và mặt phẳng y = b.

Phương trình của đường cong là g(x) = f(x, b).

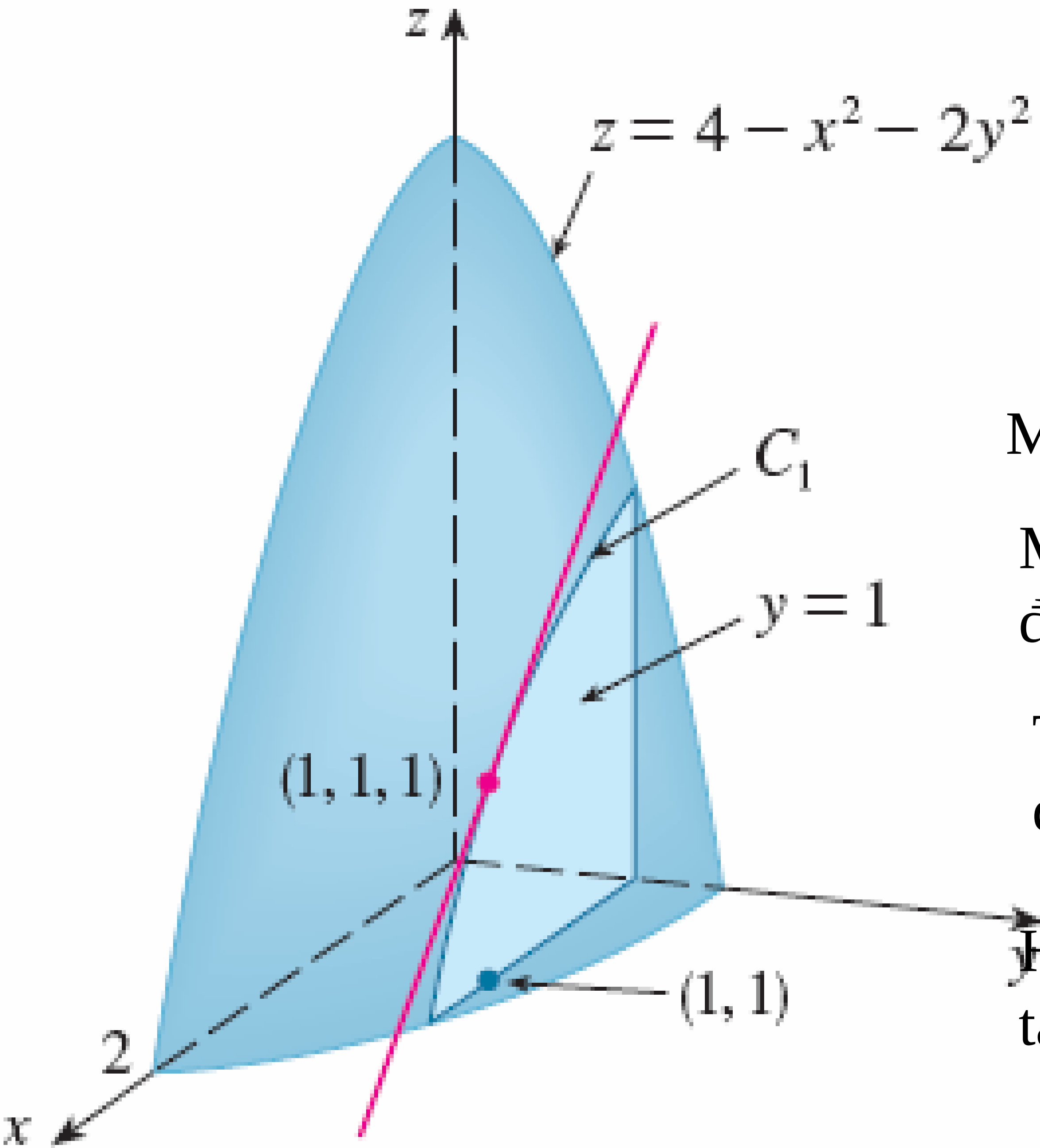
Hệ số góc của tiếp tuyến T_1 đường cong C_1 là

$$g'(a) = f'_x(a,b)$$

Đạo hàm riêng theo x của f = f(x,y) là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đườn cong C_1 tại P(a,b,c).

Tương tự, đạo hàm riêng theo y của f = f(x,y) là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong C_2 tại P(a,b,c).

lụ. Cho hàm $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f'_x(1,1)$ và biễu diễn hình học của hàm riêng này.



$$f'_x(x,y) = (4 - x^2 - 2y^2)'_x = -2x$$

$$\Rightarrow f'_x(1,1) = -2.1 = -2$$

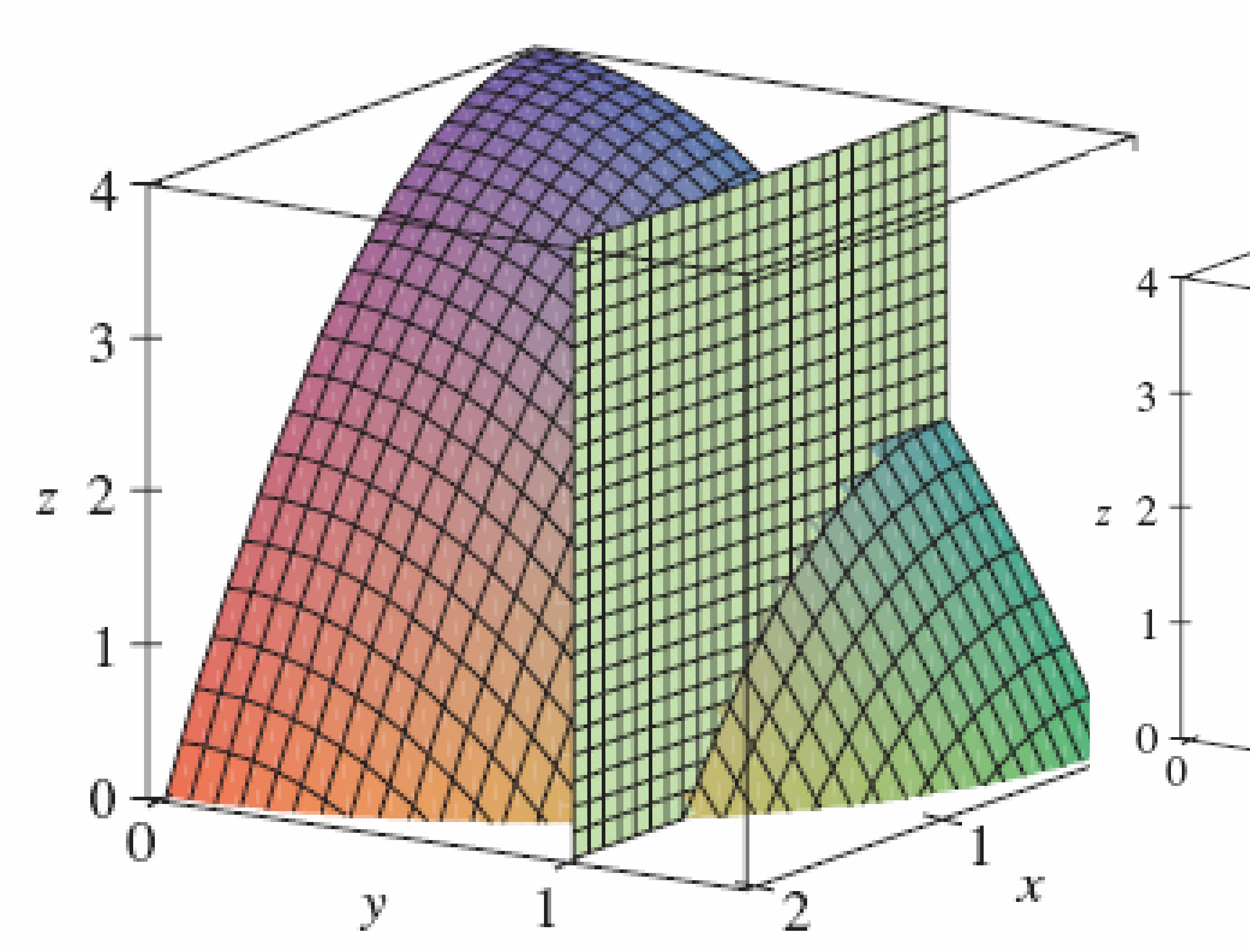
Mặt bậc hai f = f(x,y) màu xanh.

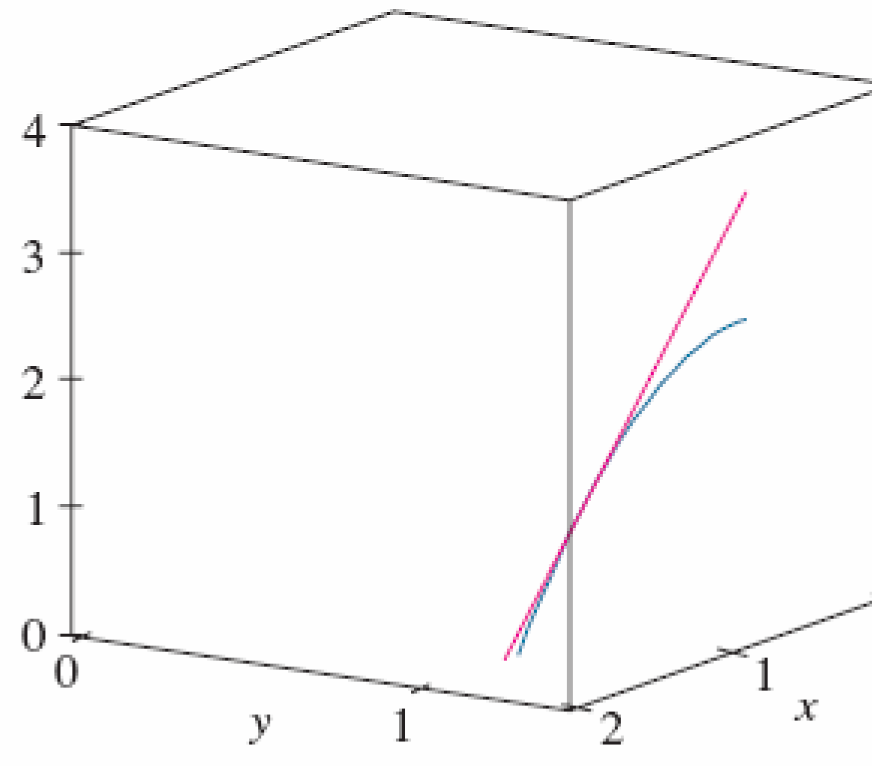
Mặt phẳng y = 1 cắt ngang được đường cong C_1.

Tiếp tuyến với C_1 tại (1,1,1) là đường thẳng màu hồng.

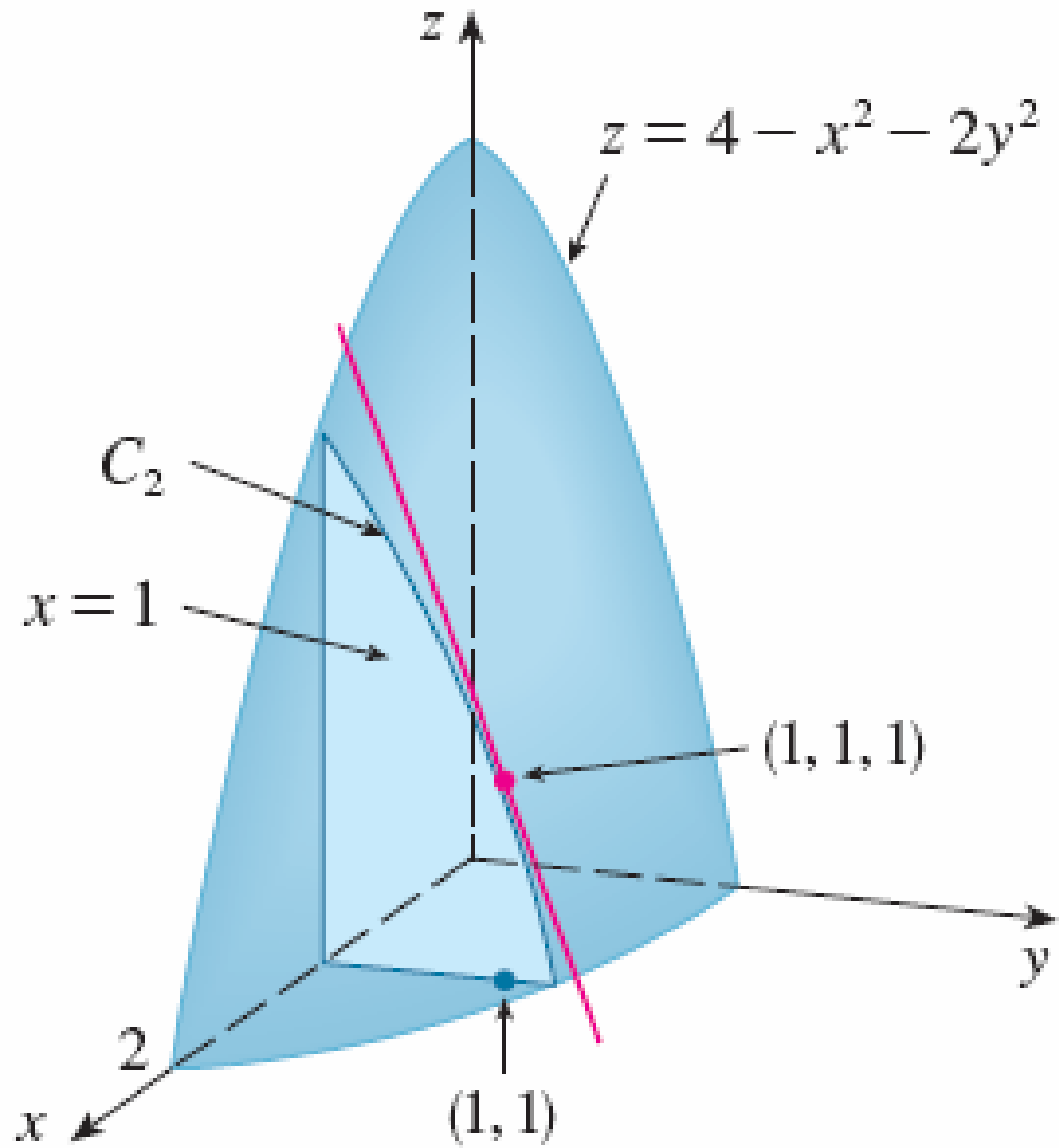
Hệ số góc của tiếp tuyến với tại (1,1,1) là đạo hàm riêng cần tìı

Biễu diễn hình học của $f_x^{'}(1,1)$ vôi $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$





lụ. Cho hàm $f(x,y)=4-x^2-2y^2$. Tìm $f_y^{'}(1,1)$ và biễu diễn hình học của
hàm riêng này.



$_y^{'}(x,y) = (4 - x^2 - 2y^2)_y^{'} = -4y$

$\Rightarrow f_y^{'}(1,1) = -4.1 = -4$

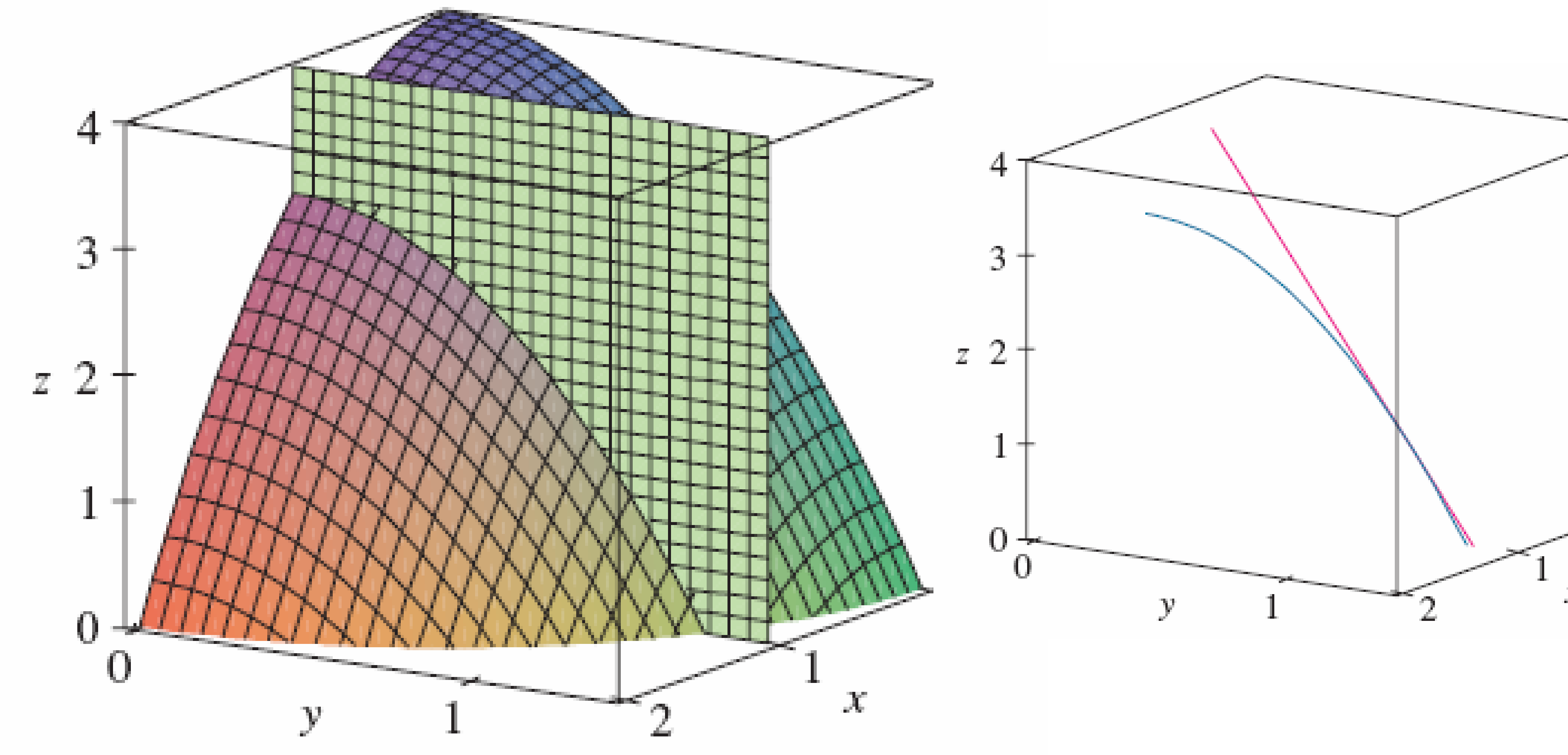
Iặt bậc hai f = f(x,y) màu xanh.

Mặt phẳng x = 1 cắt ngang được
đường cong C_2.

Tiếp tuyến với C_2 tại (1,1,1) là
đường thẳng màu hồng.

Hệ số góc của tiếp tuyến với
ại (1,1,1) là đạo hàm riêng cần tìi

Biễu diễn hình học của $f_y^{'}(1,1)$ vôi $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$



I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Tính chất của đạo hàm riêng

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên tính chất của đạo hàm riêng cũng là tính chất của đạo hàm của hàm một biến.

1) $(\alpha f)'_x = \alpha f'_x$

2) $(f+g)'_x = f'_x + g'_x$

3) $(f \cdot g)'_x = f'_x \cdot g + f \cdot g'_x$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'_x = \frac{g f'_x - f g'_x}{g^2}$

Hàm một biến: hàm liên tục tại x_0 khi và chỉ khi hàm có đạo hàm cấp 1 tại x_0

Hàm nhiều biến: Tồn tại hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (x_0,y_0) nhưng không liên tục tại điểm này. Giải thích!

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2),\ f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2)$

Giải.

$$f'_x(x,y) = \left(\ln(x^2 + 2y^2)\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2 + 2y^2} \qquad \Rightarrow f'_x(1,2) = \frac{2}{9}$$

$$f'_y(x,y) = \left(\ln(x^2 + 2y^2)\right)'_y$$

$$f'_y(x,y) = \frac{4y}{x^2 + 2y^2} \qquad \Rightarrow f'_y(1,2) = \frac{8}{9}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2),\ f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = (x+2y)^y$

Giải.

$$f'_x(x,y) = \left((x+2y)^y\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = y(x+2y)^{y-1} \Rightarrow f'_x(1,2) = 10$$

$$\ln f = y\ln(x+2y)$$

Đạo hàm riêng hai vế theo y, ta có $\dfrac{f'_y}{f} = \ln(x+2y) + y\cdot\dfrac{2}{x+2y}$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = (x+2y)^y\left[\ln(x+2y) + y\cdot\frac{2}{x+2y}\right]$$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = 25(\ln 5 + \frac{4}{5})$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$.

1) Tìm $f_x'(1,1)$ 2) Tìm $f_x'(0,0)$ 3) Tìm $f_y'(0,0)$

Giải. 1) $f_x'(x,y) = \left(\sqrt{x^2 + y^3}\right)_x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} \Rightarrow f_x'(1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) Không thể thay (0,0) vào công thức để tìm $f_x'(0,0)$. Ta sử dụng định ng

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Không tồn tại giới hạn này vì giới hạn trái và giới hạn phải không bằng nha

Tương tự $f_y'(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{\sqrt{(\Delta y)^3} - 0}{\Delta y} = 0$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \int_{1}^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt$

Tìm $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y).$

Giải.

$$f'_x(x,y) = \left(\int_{1}^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt \right)'_x = e^{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2} \right)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Vì biểu thức đối xứng đối với x và y nên, đổi chỗ x và y cho nhau ta được đạo hàm riêng theo y.

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & \text{neu } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{neu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Tìm $f'_x(0,0)$.

Giải.

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\Delta x}$, suy ra $t \to \infty$.

$$\Rightarrow f'_x(0,0) = \lim_{t \to \infty} t e^{-t^2} = 0$$ (sử dụng qui tắc Lopital)

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Cho hàm hai biến f = f(x,y).

Đạo hàm riêng theo x và theo y là những hàm hai biến x và y:

Ta có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_x^{'}(x,y)$:

$$\left(f_x^{'}(x,y) \right)_x^{'} = f_{xx}^{''}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad \left(f_x^{'}(x,y) \right)_y^{'} = f_{xy}^{''}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x$$

Tương tự có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_y^{'}(x,y)$:

$$\left(f_y^{'}(x,y) \right)_x^{'} = f_{yx}^{''}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \qquad \left(f_y^{'}(x,y) \right)_y^{'} = f_{yy}^{''}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,$$

Tiếp tục quá trình, ta có khái niệm các đạo hàm cấp cao.

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên việc tính đạo hàm riêng cấp cao cũng tương tự tính đạo hàm cấp cao của hàm một biến: dùng công thức Leibnitz và các đạo hàm cấp cao thông dụng.

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Chú ý.

Nói chung $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, nên khi lấy đạo hàm riêng cấp cao ta phải chú ý đến thứ tự lấy đạo hàm.

Định lý

Cho hàm f(x,y) và các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0) và liên tục tại điểm này. Khi đó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Chứng minh:

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $f(x,y) = e^x \sin y$ thỏa phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Giải. $f'_x(x,y) = e^x \sin y$ $\qquad f''_{xx} = e^x \sin y$

$f'_y(x,y) = e^x \cos y$ $\qquad f''_{yy} = -e^x \sin y$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

Hàm f = f(x,y) thỏa phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa.

Hàm điều hòa đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết fluid flow, hea
conduction, electric potential,….

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $u(x,t) = \sin(x - at)$ thỏa phương trình sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Giải. $u'_t(x,t) = -a\cos(x - at)$ $\qquad u''_{tt} = -a^2 \sin(x - at)$

$u'_x(x,t) = \cos(x - at)$ $\qquad u''_{xx} = -\sin(x - at)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(x - at)$$

Phương trình sóng mô tả sự chuyển động của các loại sóng: sóng biển, sóng âm thanh hay sóng chuyển động dọc theo một sợi dây rung.

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Chứng tỏ rằng $u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$ thỏa phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Giải. $u'_x(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)} \cdot \left(\frac{-2x}{4a^2 t)} \right) \Rightarrow u''_{xx}(x,t) = \frac{x^2 - 2a^2 t}{8a^5 t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)} \right)'_t \quad = \frac{x^2 - 2a^2 t}{8a^3 t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{neu } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{neu } x^2+y^2=0\end{cases}$$

Tìm $f''_{xx}(0,0)$.

Giải.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$\Rightarrow h(x,y)=f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{neu } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{neu } x^2+y^2=0\end{cases}$$

Tìm đạo hàm riêng cấp hai

$$f''_{xx}(0,0) = h'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(0+\Delta x,0) - h(0,0)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f''_{xx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

Tương tự tìm được $f''_{yy}(0,0) = 0$ và $\nexists f''_{xy}(0,0)$; $\nexists f''_{yx}(0,0)$

Chú ý. Để tìm đạo hàm riêng cấp hai tại (x_0, y_0) ta phải tìm đạo hàm riêng cấp một $f'_x(x,y)$ tại mọi điểm (tức là tìm hàm $f'_x(x,y)$).

Hàm này có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (0,0) nhưng không liên tục tại đây.

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho hàm $u(x,y) = (2x+3y)\ln(x+2y)$. Tìm $\dfrac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(1,2).$

Giải. Sử dụng công thức Leibnitz, coi *f*(*x*,*y*) là hàm một biến theo *x*.

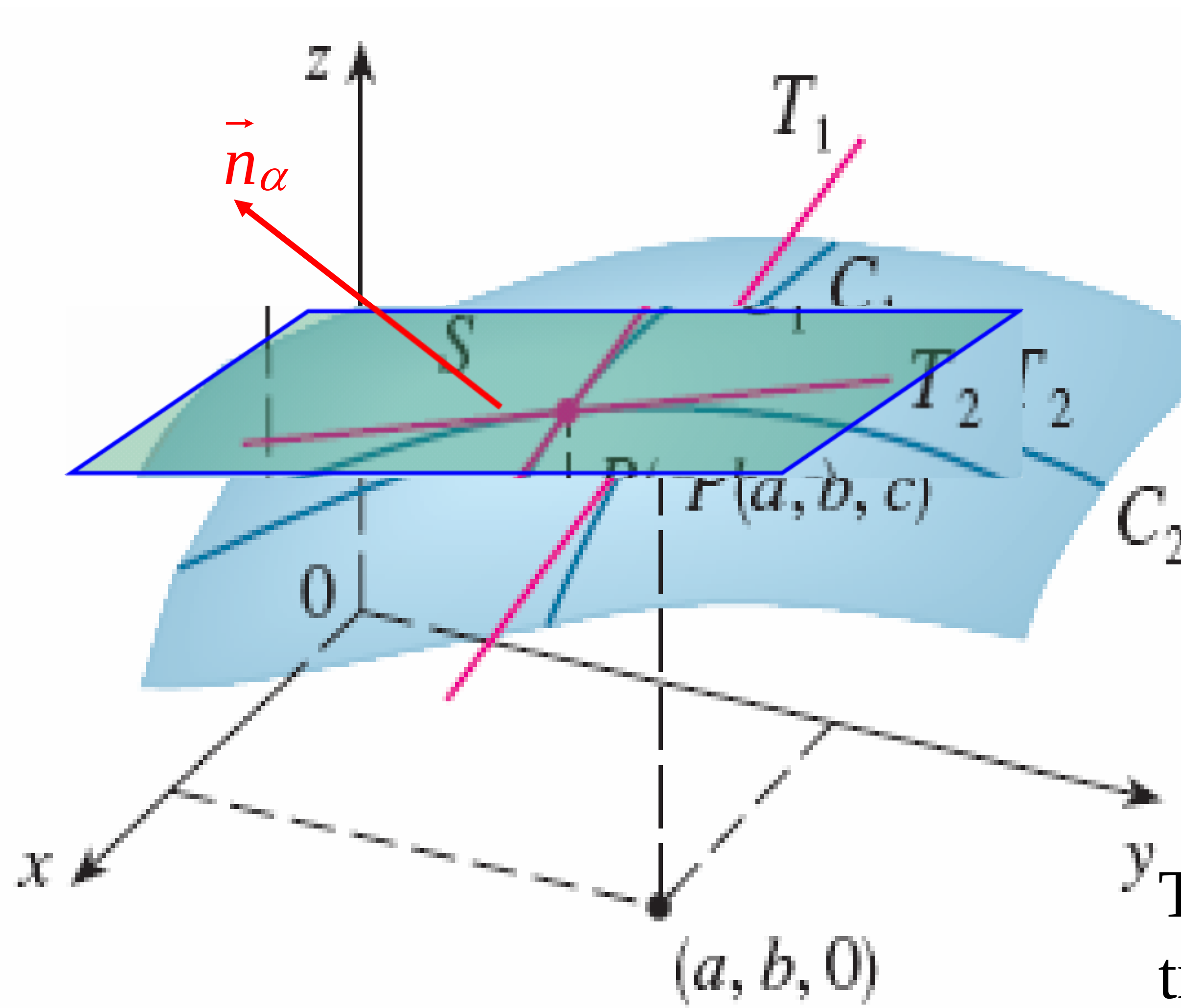
Đặt $u = f.g;\ f(x,y) = 2x+3y;\ g(x,y) = \ln(x+2y)$

$$\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(x,y) = C_{100}^{0} f_x^{(0)} g_x^{(100)} + C_{100}^{1} f_x^{'} g_x^{(99)} + C_{100}^{2} f_x^{''} g_x^{(98)} + \ldots$$

$$f_x^{'} = 2;\ f_{xx}^{''} = 0;\quad g_x^{(n)} = \left(\ln(x+2y)\right)_x^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+2y)^n}$$

$$\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(x,y) = C_{100}^{0}(2x+3y)\cdot\frac{(-1)^{99}\cdot 99!}{(x+2y)^{100}} + C_{100}^{1}\,2\cdot\frac{(-1)^{98}\cdot 98!}{(x+2y)^{99}} + 0$$

Cho f có các đạo hàm riêng cấp 1 liên



C_1 và C_2 là hai đường cong
nên do hai mặt y = b và x =a cắ

Điểm P nằm trên cả hai đường n
Giả sử T_1 và T_2 là hai tiếp tu
với hai đường cong C_1 và C_2 tại

Mặt phẳng (α) chứa T_1 và T_2 gọ
mặt phẳng tiếp diện với mặt S tạ

Tiếp tuyến với mọi đường cong
trong S, qua P đều nằm trong (α).

hương trình mặt tiếp diện với S tại (x_0, y_0, z_0) là:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện với paraboloid elliptic

$z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $(1,1,3)$.

Giải. $f'_x = 4x \Rightarrow f'_x(1,1) = 4.$

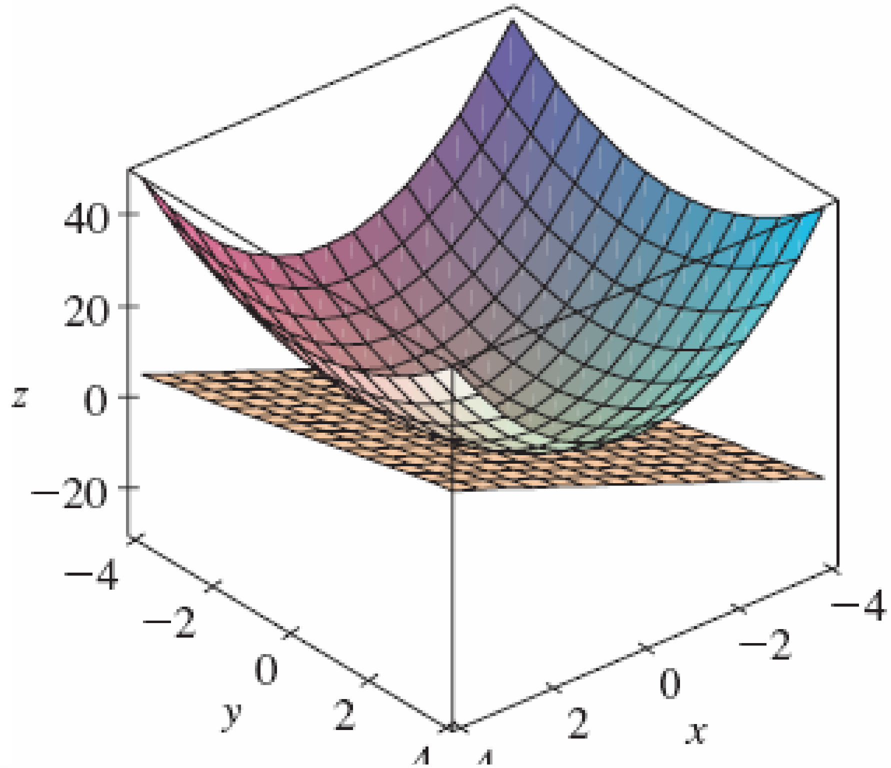
$f'_y = 2y \Rightarrow f'_y(1,1) = 2.$

Phương trình mặt phẳng tiếp diện:

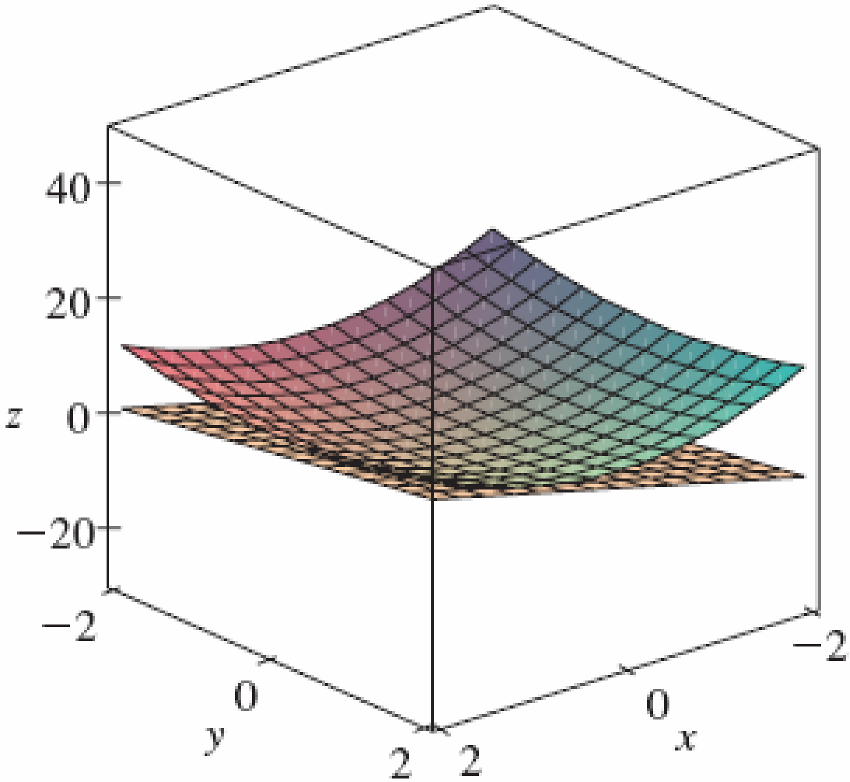
$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

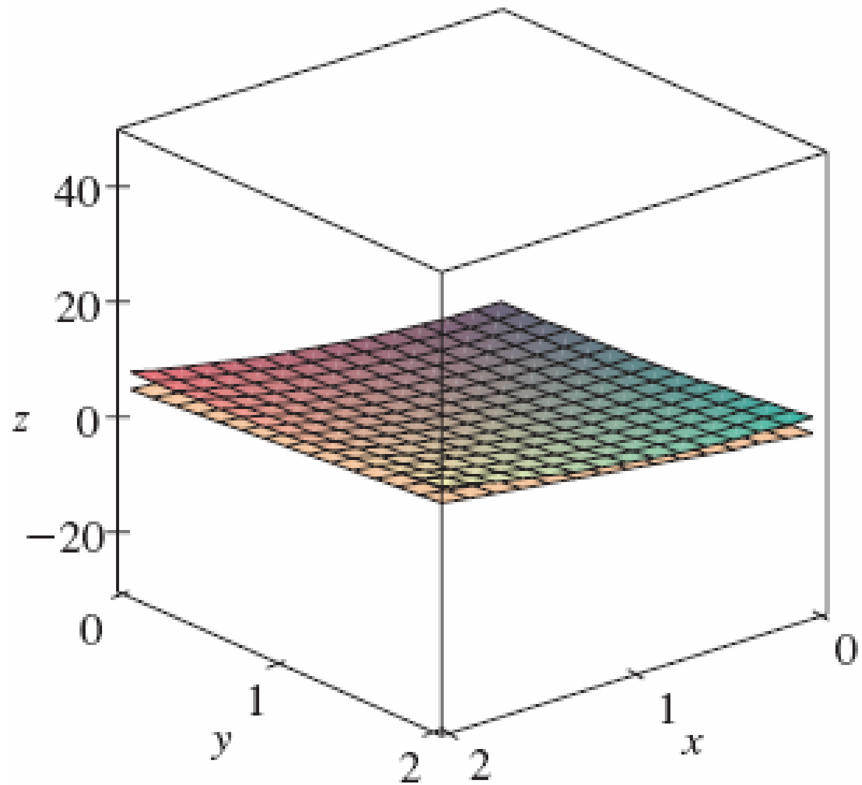
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z = 4x + 2y - 3 = L(x, y)$$



Nếu tại điểm tiếp xúc ta phó
to lên thì mặt paraboloid g
trùng với mặt phẳng tiếp diện





àm tuyến tính L(x,y) = 4x +2y – 3 là hàm xấp xỉ tốt cho f = $2x^2 + y^2$

ni mà (x,y) gần với điểm (1,1).

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

$(1.1, 0.95) \quad \Rightarrow f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$

Gần bằng với giá trị thực: $f(1.1, 0.5) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$

Nếu ta chọn điểm xa điểm (1,1) thì kết quả không còn đúng nữa.

$(2, 3) \quad \Rightarrow f(2, 3) \approx 4(2) + 2(3) - 3 = 11$

Khác xa với giá trị thực: $f(2, 3) = 2(2)^2 + (3)^2 = 17$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

ịnh nghĩa

ho hàm f = f(x,y) và (x_0, y_0) là điểm trong của miền xác định.

àm f được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần

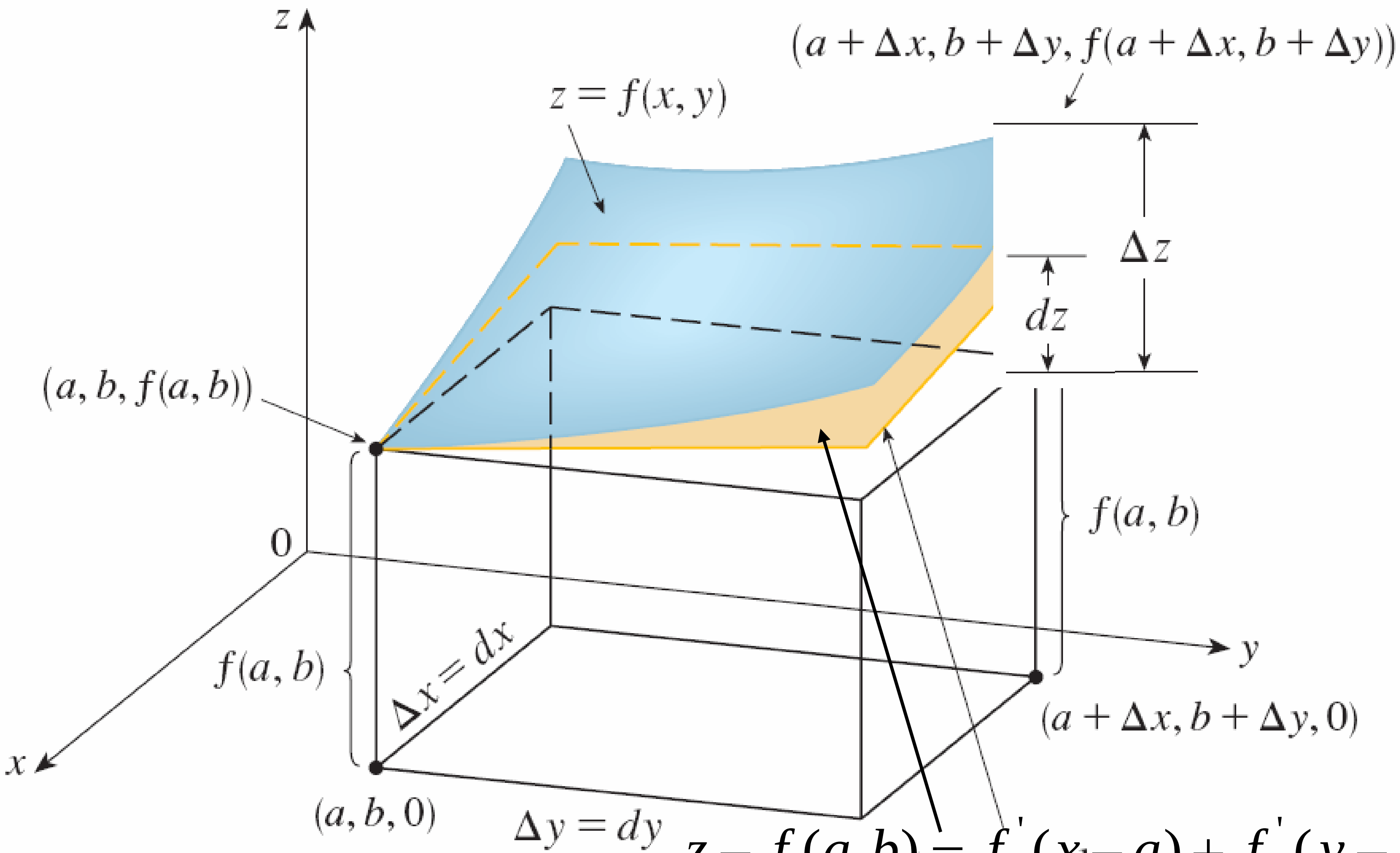
$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

ó thể biễu diễn được ở dạng $\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

rong đó A, B là các hằng số, $\alpha, \beta \to 0,$ khi $\Delta x, \Delta y \to 0.$

nh nghĩa

ại lượng $df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$ gọi là vi phân của hàm f = f(x,y) tại (x_0,y_0).



$$z - f(a,b) = f_x^{'}(x-a) + f_y^{'}(y-b)$$

Mặt tiếp diện

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

ịnh lý (điều kiện cần khả vi)

ếu hàm $f = f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0), thì:

) f liên tục tại (x_0, y_0),

f có các đạo hàm riêng cấp một tại (x_0,y_0) và $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$

ứng minh.

nh lý (điều kiện đủ)

Nếu hàm f(x,y) xác định trong một lân cận của (x_0,y_0) và có các đạo hàm riên

f'_x, f'_y liên tục tại (x_0,y_0), thì hàm f(x,y) khả vi tại (x_0,y_0).

Chứng minh.

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

----

hi nhớ

i phân cấp 1 của f(x,y) tại (x_0,y_0): $df(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_0, y_0)dy$

nh chất của vi phân

Cho f(x,y) và g(x,y) khả vi tại (x_0,y_0). Khi đó

1) $d(\alpha f) = \alpha df$

2) $d(f+g) = df + dg$

3) $d(fg) = gdf + fdg$

4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

ùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

ho hàm f(x,y) khả vi tại (x_0,y_0). Khi đó ta có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy \quad (1)$$

Công thức (1) dùng để tính gần đúng giá trị của f tại (x,y).

ông thức (1) có thể viết lại: $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$

hay ta có: $\Delta f \approx df$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

---

ui tắc dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

ể tính gần đúng giá trị của hàm f tại điểm cho trước (x,y). Ta thực hiện

) Chọn một điểm (x_0,y_0) gần với điểm (x,y) sao cho $f(x_0,y_0)$ được tính dễ dàng

2) Tính giá trị $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.

) Sử dụng công thức:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (1)$$

hú ý: Nếu điểm (x_0,y_0) xa với điểm (x,y) thì giá trị tính được không phù hợp.

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

í dụ

hứng tỏ $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0). Sử dụng kết quả này để tính gần đúng giá
ị $f(1.1, -0.1)$

ải.

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy};\ f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$$

Các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên R^2, nên liên tục trong lân cận củ
(1,0). Theo định lý (đk đủ khả vi) $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0).

Chọn $x_0 = 1; y_0 = 0 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1.1 - 1.0 = 0.1$

$$\Delta y = y - y_0 = -0.1 - 0 = -0.1$$

$$f(1.1, -0.1) \approx f(1,0) + f_x'(1,0)\Delta x + f_y'(1,0)\Delta y = 1 + 1(0.1) + 1(-0.1) = 1$$

So sánh với giá trị thực: $f(1.1, -0.1) = (1.1)e^{-0.11} \approx 0.98542$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

1) Tìm $df(x,y)$

2) Khi x thay đổi từ 2 đến 2.05, y thay đổi từ 3 đến 2.96, so sánh df và Δf

Giải. 1) $df(x,y) = f'_x dx + f'_y dy \quad \Leftrightarrow df(x,y) = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$

2) Cho $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ $\Rightarrow \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.04, x = 2.05, y = 2.96$

$$df(2,3) = (2.2 + 3.3)0.05 + (3.2 - 2.3)(-0.04) = 0.65$$

$$\Delta f(2,3) = f(2.05, 2.96) - f(2,3)$$

$$\Delta f(2,3) = \left[2.05)^2 + 3\cdot(2.5)\cdot(2.96) - (2.96)^2\right] - \left[2^2 + 3\cdot 2\cdot 3 - 3^2\right] = 0.6449$$

Ta thấy hai giá trị gần giống nhau nhưng df tính dễ hơn.

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Định nghĩa vi phân cấp cao

Cho hàm f = f(x,y) khi đó df(x,y) cũng là một hàm hai biến x, y.

Vi phân (nếu có) của vi phân cấp 1 được gọi là vi phân cấp 2.

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x dx) + d(f'_y dy)$$

$$= dx\, d(f'_x) + dy\, d(f'_y) = dx\left[(f'_x)'_x dx + (f'_x)'_y dy\right] + dy\left[(f'_y)'_x dx + (f'_y)'_y dy\right]$$

$$= f''_{xx} dx dx + f''_{xy} dx dy + f''_{yx} dx dy + f''_{yy} dy dy$$

$$\Leftrightarrow d^2 f(x,y) = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

Một cách hình thức, có công thức tính vi phân cấp n. Sử dụng nhị thức Newton

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

Ví dụ

Công thức vi phân cấp 3 của hàm f = f(x,y)

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 f + 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right) f + 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

Công thức vi phân cấp 4: $d^4 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^4 f$

$$C_4^0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + C_4^1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} dx^3 dy + C_4^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 + C_4^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} dx dy^3 + C_4^4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Tìm vi phân cấp hai $d^2 f(1,1)$, biết

$$f(x,y) = e^{xy}$$

Giải. $f'_x = ye^{xy} \Rightarrow f''_{xx} = y^2 e^{xy}, \; f''_{xy} = e^{xy}(1+xy)$

$$f'_y = xe^{xy} \Rightarrow f''_{yy} = x^2 e^{xy}.$$

Vi phân cấp hai

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2$$

$$d^2 f(x,y) = e^{xy}\left(y^2 dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2 dy^2\right)$$

$$d^2 f(1,1) = e\left(dx^2 + 4dxdy + dy^2\right)$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Tìm vi phân cấp hai $d^2 f(1,1)$, biết

$$f(x,y) = \frac{y}{x}$$

Giải. $f'_x = \frac{-y}{x^2} \Rightarrow f''_{xx} = \frac{2y}{x^3},\ f''_{xy} = \frac{-1}{x^2}$

$$f'_y = \frac{1}{x} \Rightarrow f''_{yy} = 0.$$

Vi phân cấp hai

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2$$

$$d^2 f(x,y) = \frac{-y}{x^2} dx^2 + \frac{4y}{x^3} dxdy + 0dy^2$$

$$d^2 f(1,1) = -dx^2 + 4dxdy$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Dùng vi phân cấp 1, tính gần đúng

$$A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3}$$

Giải. Chọn hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$

Chọn giá trị gần với 1.03, 1.98: $x_0 = 1, y_0 = 2$

$$\Rightarrow dx = \Delta x = x - x_0 = 1.03 - 1 = 0.03 \quad dy = \Delta y = y - y_0 = 1.98 - 2 = -0.02$$

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx df = f'_x dx + f'_y dy = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^3}} dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}} dy$$

$$f(1.03, 1.98) \approx f(1,2) + f'_x(1,2).(0.03) + f'_y(1,2)(-0.02)$$

$$A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3} = f(1.03, 1.98) \approx 3 + \frac{2}{3}(0.03) + \frac{3.4}{2.3}(-0.02) = 2.98$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Hàm một biến

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Hàm hai biến: trường hợp 1

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x, y) \end{cases} \Rightarrow f'_x = f'(u) \cdot u'_x;\ f'_y = f'(u) \cdot u'_y$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} f = f(u, v) \\ u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = f'_u \cdot u'(x) + f'_v \cdot v'(x)$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm các đạo hàm riêng của hàm hợp $f = f(u) = e^{u^2}, u = \sin(xy)$

Giải. $f = f(x,y) = e^{\sin^2(xy)}$

$$f'_x = f'(u)\cdot u'_x = 2ue^{u^2}.y\cos(xy) = 2\sin(xy)e^{\sin^2(xy)}.y\cos(xy)$$

$$f'_y = f'(u)\cdot u'_y = 2ue^{u^2}.x\cos(xy) = 2\sin(xy)e^{\sin^2(xy)}.x\cos(xy)$$

Ví dụ

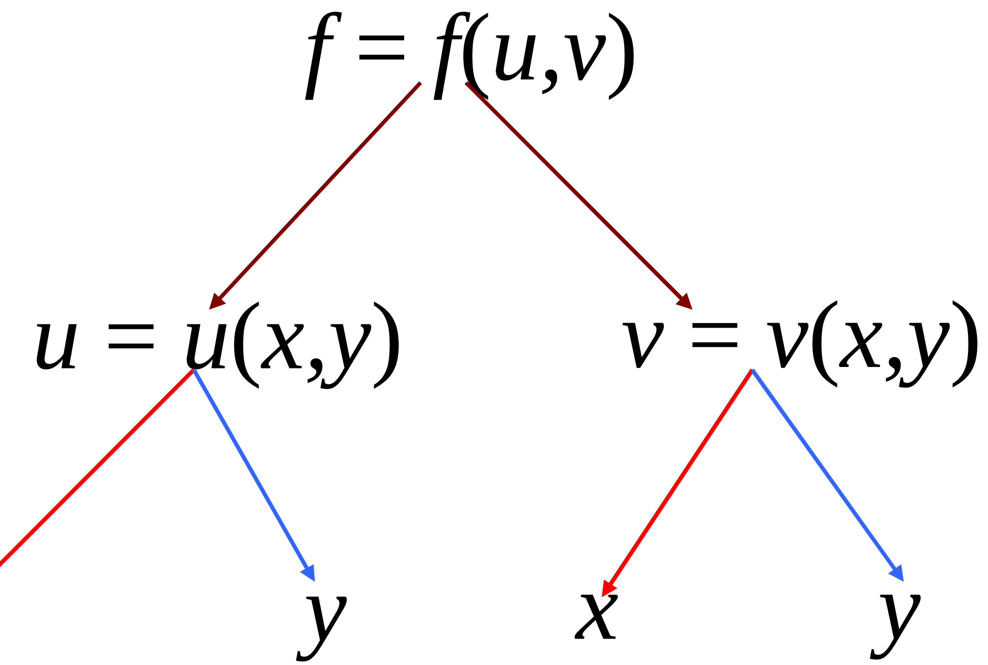
Tìm f'_x, biết $f = f(u,v) = u^3v + \ln(uv), u = e^x, v = \sin^2 x$

Giải. $$\frac{df}{dx} = f'(x) = f'_u\cdot u'(x) + f'_v\cdot v'(x) = \left(3u^2v + \frac{1}{u}\right)e^x + \left(u^3 + \frac{1}{v}\right)\sin(2x)$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Trường hợp 3

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f'_x &= f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \\ f'_y &= f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \end{aligned}$$



f'_x

f'_y

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f'_x, f'_y của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = x^2 + y^2, v(x,y) = xy$

Giải. $f = f(x,y) = e^{(x^2+y^2)xy}$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = ve^{uv}.2x + ue^{uv}.y$$

$$f'_x = xye^{(x^2+y^2)xy}.2x + (x^2 + y^2)e^{(x^2+y^2)xy}.y$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = ve^{uv}.2y + ue^{uv}.x$$

$$f'_y = xye^{(x^2+y^2)xy}.2y + (x^2 + y^2)e^{(x^2+y^2)xy}.x$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Trường hợp 4

$$\begin{cases} f = f(x, y) \\ y = y(x) \end{cases}$$

$f = f$(x,y) là một hàm hai biến theo x và y. Khi đó ta có khái niệm đạo hàm riêng theo x:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Thay y = y(x) vào ta được hàm một biến theo x:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Trong trường hợp này vừa tồn tại đạo hàm $\frac{df}{dx}$ của f theo x như là đạo hàm của hàm một biến x, vừa tồn tại đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ của f theo x.

Ví dụ

Tìm $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{df}{dx}$ của hàm $f = f(x,y) = e^{xy} + x^2 y, y = y(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(e^{xy} + x^2 y\right)'_x = ye^{xy} + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(e^{xy} + x^2 y\right)'_y = xe^{xy} + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = ye^{xy} + 2xy + (xe^{xy} + x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Đạo hàm cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$$f_x' = f_u' \cdot u_x' + f_v' \cdot v_x'$$

$$f_{xx}'' = \left(f_x' \right)_x' = \left(f_u' \cdot u_x' + f_v' \cdot v_x' \right)_x'$$

f_u' là hàm hợp hai biến u,v

$$= \left(f_u' \cdot u_x' \right)_x' + \left(f_v' \cdot v_x' \right)_x' \quad = \left(f_u' \right)_x' \cdot u_x' + f_u' \left(u_x' \right)_x' + \left(f_v' \right)_x' \cdot v_x' + f_v' \left(v_x' \right)_x'$$

$$\left[\left(f_u' \right)_u' \cdot u_x' + \left(f_u' \right)_v' \cdot v_x' \right] \cdot u_x' + f_u' \cdot u_{xx}'' + \left[\left(f_v' \right)_u' \cdot u_x' + \left(f_v' \right)_v' \cdot v_x' \right] \cdot v_x' + f_v' \cdot v_{xx}''$$

$$f_{uu}'' \cdot \left(u_x' \right)^2 + f_{uv}'' \cdot v_x' \cdot u_x' + f_u' \cdot u_{xx}'' + f_{vu}'' \cdot v_x' \cdot u_x' + f_{vv}'' \cdot \left(v_x' \right)^2 + f_v' \cdot v_{xx}''$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u,v) = u^2 + 2v, u(x,y) = xy^2, v(x,y) = x + 3y$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2u.y^2 + 2.1 \quad \Rightarrow f''_{xy} = \left(f'_x \right)'_y = \left(2u.y^2 + 2 \right)'_y$$

$$f''_{xy} = \left(2u.y^2 \right)'_y = 2u'_y.y^2 + 2u.2y$$

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = xy + y^2, v(x,y) = 2x + y$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = ve^{uv}.y + ue^{uv}.2 \quad \Rightarrow f''_{xy} = \left(ve^{uv}.y + ue^{uv}.2 \right)'_y$$

$$= e^{uv}.y + v\left(e^{uv}\right)'_y.y + ve^{uv} + 2(x+2y)e^{uv} + 2u\left(e^{uv}\right)'_y$$

$$\left(e^{uv}\right)'_y = \left(e^{uv}\right)'_u.u'_y + \left(e^{uv}\right)'_v.v'_y \quad = ve^{uv}.(x+2y) + ue^{uv}.1$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Đạo hàm cấp hai của hàm hợp

$f'(u)$ là hàm hợp một biến u

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad f'_x = f'(u)\cdot u'_x$$

$$f''_{xx} = \left(f'_x\right)'_x = \left(f'(u)\cdot u'_x\right)'_x = \left(f'(u)\right)'_x \cdot u'_x + f'(u)\cdot\left(u'_x\right)'_x$$

$$= \left[\left(f'(u)\right)'(u)\cdot u'_x\right]\cdot u'_x + f'(u)\cdot u''_{xx} = f''(u)\cdot\left(u'_x\right)^2 + f'(u)\cdot u''_{xx}$$

$$f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \left(f'(u)\cdot u'_x\right)'_y = \left(f'(u)\right)'_y \cdot u'_x + f'(u)\cdot\left(u'_x\right)'_y$$

$$= \left[\left(f'(u)\right)'(u)\cdot u'_y\right]\cdot u'_x + f'(u)\cdot u''_{xy} = f''(u)\cdot u'_x\cdot u'_y + f'(u)\cdot u''_{xy}$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(u) = \ln u, u(x,y) = xy^2 + e^y$

$$f'_x = f'(u) \cdot u'_x = \frac{1}{u}.y^2 \qquad \Rightarrow f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = \left(\frac{1}{u}.y^2\right)'_y$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{1}{u}\right)'_y.y^2 + \frac{1}{u}.2y \quad = -\frac{1}{u^2}(2xy + e^y).y^2 + \frac{1}{u}.2y$$

Ví dụ

Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f = f(x^2 + e^y)$

Đặt $u(x,y) = x^2 + e^y \qquad \Rightarrow f'_x = f'(u) \cdot u'_x = f'(u).2x$

$$f''_{xy} = \left(f'(u).2x\right)'_y \quad = 2x.f''(u).e^y$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp một của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

u, v là hai biến hàm, x và y là hai biến độc lập.

Khi thay u(x,y), v(x,y) vào ta được hàm f theo hai biến x, y độc lập.

$$df = f'_x dx + f'_y \cdot dy = \left(f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \right) dx + \left(f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y \right) dy$$

$$= f'_u \left(u'_x dx + u'_y dy \right) + f'_v \left(v'_x dx + v'_y dy \right) = f'_u du + f'_v dv$$

$$df = f'_u du + f'_v dv \quad (1)$$

$$df = f'_x dx + f'_y dy \quad (2)$$

Tùy theo bài toán mà ta dùng công thức (1) hoặc (2). Thường dùng công thức số (1)

Hai công thức giống nhau. Trong (1) là biến hàm, trong (2) là biến độc lập. Nên ta nói: vi phân cấp một có tính bất biến.

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm df của hàm hợp $f = f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = xy^2; v(x,y) = 2x + 3y$

$$df = f'_u du + f'_v dv \qquad du = y^2 dx + 2xydy \qquad dv = 2dx + 3dy$$

$$df = ve^{uv}(y^2dx + 2xydy) + ue^{uv}(2dx + 3dy) = e^{uv}(vy^2 + 2u)dx + e^{uv}(2vxy + 3u)$$

Ví dụ

Tìm df của hàm hợp $f = f(u) = \frac{1}{u}, u(x,y) = \ln(x + 2y)$

$$df = f'(u)du = -\frac{1}{u^2}\left(u'_x dx + u'_y dy\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{x+2y}dx + \frac{2}{x+2y}dy\right)$$

Chú ý: Trong hai ví dụ này ta đều có thể dùng $df = f'_x dx + f'_y dy$

nhưng việc tính toán phức tạp hơn.

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm df của hàm hợp $f = f(x^2 + 2y, e^{xy})$

Đặt $u = x^2 + 2y; v = e^{xy}$

Ta có $f = f(u,v); u(x,y) = x^2 + 2y, v(x,y) = e^{xy}$

$du = 2xdx + 2dy \qquad dv = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

$df = f'_u du + f'_v dv$

$df = f'_u(2xdx + 2dy) + f'_v(ye^{xy}dx + xe^{xy}dy)$

Chú ý: Có thể dùng $df = f'_x dx + f'_y dy$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u,v) \\ u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad d^2 f = d(df) = d(f'_u du + f'_v dv)$$

$$= d\left(f'_u du\right) + d\left(f'_v dv\right)$$

Chú ý ở đây u, v là biến hàm nên *du*, *dv* không là hằng số

$$d^2 f = d\left(f'_u\right)\cdot du + f'_u \cdot d(du) + d\left(f'_v\right)\cdot dv + f'_v \cdot d(dv)$$

f'_u, f'_v là những hàm hợp hai biến

$$d\left(f'_u\right) = \left(f'_u\right)'_u du + \left(f'_u\right)'_v dv \qquad d\left(f'_v\right) = \left(f'_v\right)'_u du + \left(f'_v\right)'_v dv$$

$$d(du) = d^2u, d(dv) = d^2v$$

Vi phân cấp hai không còn tính bất biến.

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Vi phân cấp hai của hàm hợp

$$\begin{cases} f = f(u) \\ u = u(x,y) \end{cases} \qquad d^2 f = d(df) \quad = d(f'(u)du)$$

$$= d\left(f'(u)\right)\cdot du + f'(u)\cdot d\left(du\right)$$

$$d^2 f = \left(f'(u)\right)'(u)\cdot du\cdot du + f'(u)d^2u \quad = f''(u)\cdot du^2 + f'(u)d^2u$$

Tóm lại:

Để tìm đạo hàm riêng (vi phân) cấp hai của hàm hợp ta lấy đạo hàm (vi phân) của đạo hàm (vi phân) cấp một và phải biết phân biệt là hàm hợp mấy biến.

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm $d^2 f$ của hàm hợp

$$f = f(u,v) = 2u + v^2; u(x,y) = xy + 2x; v(x,y) = x^2 + y^2$$

$$df = f'_u du + f'_v dv = 2[(y+2)dx + xdy] + 2v[2xdx + 2ydy]$$

$$d^2 f = d(df) = d\left[2[(y+2)dx + xdy] + 2v[2xdx + 2ydy]\right]$$

$$d^2 f = d\left[2\left((y+2)dx + xdy\right)\right] + d\left[2v\left(2xdx + 2ydy\right)\right]$$

$$d^2 f = 2d\left((y+2)dx\right) + 2d\left(xdy\right) + 2\left(2xdx + 2ydy\right)dv + 2vd\left(2xdx + 2ydy\right)$$

$\bullet d((y+2)dx) = dxd(y+2) = dxdy$ $\qquad\qquad$ $\bullet d(xdy) = dxdy$

$\bullet d\left(2xdx + 2ydy\right) = d(2xdx) + d(2ydy) = 2dx^2 + 2dy^2$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

Ví dụ

Tìm $d^2 f$ của hàm hợp $f = f(x^2 + 3y)$

Đặt $u = x^2 + 3y$

Ta có $f = f(u); u(x, y) = x^2 + 3y$

$$df = f'(u)du = f'(u)(2xdx + 3dy)$$

$$d^2 f = d(df) = d(f'(u)(2xdx + 3dy))$$

$$d^2 f = (2xdx + 3dy) \cdot d(f'(u)) + f'(u) \cdot d(2xdx + 3dy)$$

$$\bullet d(f'(u)) = f''(u)du = f''(u) \cdot (2xdx + 3dy)$$

$$\bullet d(2xdx + 3dy) = d(2xdx) + d(3dy) = 2dxdx + 0 = 2dx^2$$

III. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Giả sử phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hàm ẩn $y=y(x)$

sao cho $F(x,y(x))=0$ với mọi x thuộc miền xác định của *f*.

Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=-\frac{F_x'}{F_y'}}$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $y'(x)$ biết y = y(x) là hàm ẩn xác định từ phương trình

$$xy + x^2 + y^2 = e^{xy}$$

Cách 1. Đạo hàm hai vế phương trình, chú ý *y* là hàm theo *x*.

$$y + x \cdot y' + 2x + 2y \cdot y' = e^{xy}(y + x \cdot y') \Rightarrow y'(x) = \frac{ye^{xy} - 2x - y}{x + 2y - xe^{xy}}$$

Cách 2. Sử dụng công thức. Chú ý ở đây sử dụng đạo hàm riêng!

$$F(x,y) = xy + x^2 + y^2 - e^{xy} \equiv 0$$

$$F'_x = y + 2x - ye^{xy}; F'_y = x + 2y - xe^{xy}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y + 2x - ye^{xy}}{x + 2y - xe^{xy}}$$

Chú ý. Cần phân biệt đạo hàm theo x ở hai cách. Cách 1, đạo hàm hai vế co
à hàm theo x. Cách 2, đạo hàm riêng của F theo x, coi y là hằng.

III. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Giả sử phương trình $F(x, y, z) = 0$ xác định một hàm ẩn $z = z(x, y)$.

sao cho $F(x, y, z(x, y)) = 0$ với mọi (x,y) thuộc miền xác định của z.

Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp, chú ý x, y là hai biến độc l
là hàm theo x, y

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{F'_x}{F'_z}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

Ví dụ

Tìm z'_x, biết z = z(x,y) là hàm ẩn xác định từ phương trình

$$x + y - z = e^{z-x-y}$$

Cách 1. Đạo hàm hai vế phương trình theo x, chú ý y là hằng, z là hàm theo

$$1 - z'_x = e^{z-x-y}(z'_x - 1) \qquad \Rightarrow z'_x = \frac{1+e^{z-x-y}}{1+e^{z-x-y}} = 1$$

Cách 2. Sử dụng công thức. Chú ý ở đây x là biến, y và z là hằng!

$$F(x,y,z) = x + y - z - e^{z-x-y} \equiv 0$$

$$F'_x = 1 + e^{z-x-y}; F'_z = -1 - e^{z-x-y}$$

$$\Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1+e^{z-x-y}}{-1-e^{z-x-y}} = 1$$

Tương tự tìm đạo hàm riêng của z theo y.

III. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Định lý (về hàm ẩn) .

Cho hàm $F(x,y)$ thỏa các điều kiện sau:

1) Xác định, liên tục trong hình tròn mở $B(M_0,r)$ tâm $M_0(x_0,y_0)$ bán kính r

2) $F((x_0,y_0))=0$ 3) $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$

4) Tồn tại trong $B(M_0,r)$ các đạo hàm riêng liên tục $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$

Khi đó $F(x,y)=0$ xác định trong lân cận U của x_0 một hàm $y=y(x)$ thỏa

$y_0 = y(x_0)$ và $F(x,y(x))=0$ trong U. Ngoài ra $y=y(x)$ khả vi, liên tục trong

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Chứng minh.

III. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Đạo hàm riêng cấp hai của hàm ẩn: z = z(x,y)

1) Tìm đạo hàm riêng cấp 1 (bằng 1 trong hai cách)

2) $z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)'_y$. Chú ý: x là hằng, y là biến, z là hàm theo y.

Vi phân cấp 1 của hàm ẩn: z = z(x,y): $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Vi phân cấp 2 của hàm ẩn: z = z(x,y)

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$$

Chú ý. Vì z = z(x,y) là hàm hai biến độc lập x và y. Nên vi phân cấp một, cấp hai hoặc cấp cao của hàm ẩn cũng giống như vi phân cấp 1 và cấp hai của hàm f = f(x,y) trong phần I.

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $dz(1,1)$, biết z = z(x,y) là hàm ẩn xác định từ phương trình

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0, \quad z(1,1) = -2.$$

$$F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 \equiv 0$$

$$F'_x = 3x^2 - 3yz \qquad F'_y = 6y^2 - 3xz + 2 \qquad F'_z = 3z^2 - 3xy$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy} \quad \Rightarrow z'_x(1,1) = \frac{1.(-2) - 1.1}{4 - 1} = -1$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6y^2 - 3xz + 2}{3z^2 - 3xy} \quad \Rightarrow z'_y(1,1) = -\frac{14}{9}$$

Vi phân cấp 1: $\quad dz = z'_x dx + z'_y dy = -dx - \frac{14}{9} dy$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm z''_{xy}, biết z = z(x,y) là hàm ẩn xác định từ phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z}$$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - e^{x+y+z} \equiv 0$$

$$F'_x = 2x - e^{x+y+z} = 2x - x^2 - y^2 - z^2 \qquad F'_z = 2z - e^{x+y+z} = 2z - x^2 - y^2 - z^2$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}$$

Đạo hàm theo y, coi x là hằng, y là biến, z là hàm theo y!

$$z''_{xy} = \left(\frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}\right)'_y$$

$$= \frac{(-2y - 2z \cdot z'_y) \cdot \text{maiu} - \text{töi} \cdot (2y + 2z \cdot z'_y - 2 \cdot z'_y)}{\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2z\right)^2}$$

II. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, biết z = z(x,y) là hàm ẩn xác định từ phương trình

$$xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$$

$$F(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 - 2z + 3 \equiv 0$$

$$F'_x = yz + 2x \qquad F'_y = xz + 2y \qquad F'_z = xy - 2$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz+2x}{xy-2} = \frac{yz+2x}{2-xy}$$

Coi x là hằng, y là biến,
z là hàm theo y

$$z''_{xy} = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)'_y = \left(\frac{yz+2x}{2-xy}\right)'_y$$

$$= \frac{(z+yz'_y)\cdot(2-xy)-(yz+2x)\cdot(-x)}{(2-xy)^2}$$

II. Bài tập

1. Tìm đạo hàm riêng của các hàm sau.

a. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; f_{xy}

b. $f(x,y) = e^{xy^2}$; $f_{xx}; f_{xy}$

c. $f(x,y) = e^{x^2-y}$; f_{xy}

d. $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$; $f_{xy}; f_{xx}$

e. $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$; $f_{xy}(1,0)$

f. $f(x,y) = \ln(x^2+y)$; $f_{xy}(0,1); f_{xx}(1,0)$

g. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; $f_{xy}(0,0)$;

h. $f(x,y) = e^{2x+3y}$; $f_{xxy}; f_{xyx}$

i. $f(x,y) = \ln(2x+3y)$; $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^{10}}$

j. $f(x,y) = (2x+1)e^{x+2y}$; $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^{10}}$

II. Bài tập

1. Tính $\frac{dz}{dt}$

   a. $z = \sin x \cos y;\ x = \pi t, y = \sqrt{t}$

   b. $z = x\ln(x+2y);\ x = \sin t, y = \cos t$

   c. $z = xe^{\frac{y}{x}};\ x = t^2, y = 1-t, z = 1+2t$

   d. $z = z(te^t, t^2 + \sin t)$

2. Tính các đạo hàm tương ứng:

   a. $f(u,v) = \frac{u}{v} + e^{uv};\ u = x^2y + 2x;\ v = ye^{xy}$. Tính f_x, f_y

   b. $f = \arctan(\sqrt{u});\ u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Tìm f_x, f_y

   c. $f = e^{xy} + \ln(xy);\ y = \sin^3 x$. Tìm $\frac{df}{dx}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$

   d. $f = f(3x+4y, xy+e^y)$. Tìm f_x, f_y

   e. $f = f(2x+y)$. Tìm f_{xx}, f_{xy}

   f. $f = f(2x^2+y, xy)$. Tìm f_{xx}, f_{xy}

   g. $\begin{cases} f = f(u) = u^3 + \sin u; \\ u = 2xy + e^x \end{cases}$. Tìm f_{xx}, f_{xy}

II. Bài tập

1. Tính các đạo hàm của các hàm ẩn sau

a) $e^{x+y} + x^2 = y^2 + 2x$

b) $\cos(xy) + 2x - y^2 = 2$

c) $\cos(x - y) = xe^y$

d) $xy + x\sin y = y^3$

e) $e^{x+y+z} + 2x - 3y = z^2 + 1$

f) $xe^y + yz + ze^x = 0$

g) $xyz = \sin(x + y + z)$

h) $\ln(x + yz) = x^2 + y^2 - z$

i) $xy + x - 2y = e^{2x+3y}$; $y''(x)$

j) $x^3 + xy = y^2 - 2y$; $y''(x)$

k) $xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

l) $e^{x+y+z} = x + 2y - 3z$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$