MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 18

Đổi biến trong tích phân kép
Bài giảng xin xem tại:
http://mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

This week's problem set is kind of long. It's longer than the last one, certainly. So, if you haven't started yet, then now would be a good time to start. OK, so far we've learned how to do double integrals in terms of xy coordinates, also how to switch to polar coordinates. But, more generally, there's a lot of different changes of variables that you might want to do. OK, so today we're going to see how to change variables, if you want, how to do substitutions in double integrals. OK, so let me start with a simple example.

Xấp bài tập của tuần này khá dài. Chắc chắn nó dài hơn lần trước. Vì vậy, nếu bạn chưa bắt đầu, thì bây giờ sẽ là thời điểm tốt để bắt đầu. Vâng, cho đến bây giờ chúng ta đã học được cách tính tích phân kép theo các tọa độ xy , cũng như cách để chuyển sang các hệ tọa độ cực. Nhưng, nói chung, còn có một thủ thuật nữa gọi là đổi biến. Vâng, vì vậy hôm nay chúng ta sẽ học cách đổi biến, nếu bạn muốn, hay còn gọi là cách thực hiện phép thế trong tích phân kép. Vâng, vì vậy hãy để tôi bắt đầu với một ví dụ đơn giản.

Let's say that we want to find the area of an ellipse with semi-axes a and b. OK, so that means an ellipse is just like a squished circle. And so, there's a and there's b. And, the equation of that ellipse is x over a squared plus y over b squared equals one. That's the curve, and the inside region is where this is less than one. OK, so it's just like a circle that where you have rescaled x and y differently. So, let's say we want to find the area of it. Maybe you know what the area is. But let's do it as a double integral.

Giả sử rằng chúng ta muốn tìm diện tích của elip với các bán trục a và b. Vâng, như vậy điều đó có nghĩa là một elip giống như một đường tròn bị bóp lại. Và như vậy, có a và có b. Và, phương trình của elip là x trên a bình cộng y trên b bình bằng một. Đó là đường cong, và vùng bên trong là nơi cái này nhỏ hơn một. Vâng, vì vậy nó chỉ giống như một đường tròn ở đó bạn lấy lại tỉ lệ x và y khác nhau. Vì vậy, giả sử rằng chúng ta muốn tìm diện tích của nó. Có lẽ bạn đã biết diện tích của nó là gì. Nhưng tôi sẽ tính lại diện tích đó dùng tích phân kép.

So, you know, if you find that the area is too easy, you can integrate any function other than ellipse, if you prefer. But, let's do it just with area. So, we know that we want to integrate just the area element, let's say, dx dy over the origin inside the ellipse. That's x over a2 plus y over b2 less than 1. Now, we can try to set this up in terms of x and y coordinates, you know, set up the bounds by solving for first four x as a function of y if we do it this order and, well, do the usual stuff. That doesn't look very pleasant, and it's certainly not the best way to do it. OK, if this were a circle, we would switch to polar coordinates. Well, we can't quite do that yet. But, you know, an ellipse is just a squished circle. So, maybe we want to actually first rescale x and y by a and b.

Vâng, như bạn đã biết, có lẽ bạn cảm thấy tính diện tích quá dễ, bạn có thể lấy tích phân bất kì hàm nào chứ không chỉ elip, nếu bạn thích. Nhưng, hãy làm điều đó chỉ với diện tích. Vì vậy, chúng ta biết rằng chúng ta muốn tính tích phân chỉ yếu tố diện tích, giả sử, dx dy trên gốc tọa độ bên trong elip. Đó là x trên a2 y trên b2 nhỏ hơn 1. Bây giờ, chúng ta thử thiết lập cái này theo các tọa độ x và y, bạn đã biết cách tìm các cận bằng cách đầu tiên giải tìm x theo y nếu chúng ta tính tích phân theo thứ tự này và, vâng, làm các thứ bình thường. Điều đó có vẻ không dễ chịu, và chắc chắn đó không phải là cách tốt nhất để làm điều đó. Vâng, nếu đây là đường tròn, chúng ta sẽ chuyển sang hệ tọa độ cực. Vâng, không cần làm vậy. Nhưng, bạn đã biết, một elip chỉ là một đường tròn bị bóp méo. Vì vậy, có lẽ chúng ta muốn lấy lại tỉ lệ x và y theo a và b.

So, to do that, what we'd like to do is set x over a to be u, and y over b be v. So, we'll have two new variables, u and v, and we'll try to redo our integral in terms of u and v. So, how do we do the substitution? So, in terms of u and v, the condition, the region that we are integrating on will become u^2 v^2 is less than 1, which is arguably nicer than the ellipse. That's why we are doing it. But, we need to know what to do with dx and dy. Well, here, the answer is pretty easy because we just change x and y separately. We do two independent substitutions. OK, so if we set u equals x over a, that means du is one over adx.
Vì vậy, để làm điều đó, chúng ta sẽ đặt x trên a bằng u, và y trên b bằng v. Vì vậy, chúng ta sẽ có hai biến mới, u và v, và chúng ta sẽ thử tính lại tích phân theo u và v. Vâng, chúng ta thực hiện phép thế như thế nào? Vì vậy, theo u và v, điều kiện, vùng mà chúng ta sẽ lấy tích phân sẽ trở thành u ^ 2 v ^ 2 nhỏ hơn 1, rõ ràng nó đẹp hơn elip. Đó là lý do tại sao chúng ta sẽ dùng nó. Nhưng, chúng ta cần phải biết xử lí dx và dy. Vâng, ở đây, câu trả lời khá dễ bởi vì chúng ta chỉ thay đổi x và y một cách riêng biệt. Chúng ta thực hiện hai phép thế độc lập. Vâng, vì vậy nếu chúng ta đặt u bằng x trên a, có nghĩa là du bằng một trên adx.

And here, dv is one over bdy. So, it's very tempting to write, and here we actually can write, in this particular case, that dudv is (1/ab)dxdy, OK? So, let me rewrite that. OK, so I get dudv equals (1/ab)dxdy, or equivalently dxdy is ab times dudv. OK, so in my double integral, I'm going to write (ab)dudv. OK, so now, my double integral becomes, well, the double integral of a constant in terms of u and v. So, I can take the constant out. I will get ab times double integral over u^2 v^2<1 of du dv. And, that is an integral that we know how to do. Well, it's just the area of a unit circle.

Và ở đây, dv bằng một trên bdy. Vì vậy, thật là hấp dẫn để viết, và ở đây chúng ta thực sự có thể viết, trong trường hợp cụ thể này, dudv bằng (1/ab) dxdy, đúng không? Vì vậy, hãy để tôi viết lại cái đó. Vâng, vì vậy tôi được dudv bằng (1/ab) dxdy, hoặc tương đương dxdy bằng ab nhân dudv. Vâng, vì vậy trong tích phân kép của tôi, tôi sẽ viết (ab) dudv. Vâng, vậy bây giờ, tích phân kép của tôi bằng, vâng, tích phân kép của hằng số theo u và v. Vì vậy, tôi có thể mang nó ra ngoài. Tôi được ab nhân tích phân kép của u ^ 2 v ^ 2 <1 của dudv. Và, chúng ta đã biết tính tích phân đó. Vâng, nó chính là diện tích của đường tròn đơn vị.

So, we can just say, this is ab times the area of the unit disk, which we know to be pi, or if somehow you had some function to integrate, then you could have somehow switched to polar coordinates, you know, setting u equals r times cos(theta), v equals r times sin(theta), and then doing it in polar coordinates. OK, so here the substitution worked pretty easy. The question is, if we do a change of variables where the relation between x and y and u and v is more complicated, what can we do? Can we still do this, or do we have to be more careful? And, actually, we have to be more careful. So, that's what we are going to see next. Any question about this, first?
Vì vậy, chúng ta có thể nói, đây là ab nhân diện tích của đĩa đơn vị, bằng pi, hoặc nếu bạn đã có một hàm nào đó để lấy tích phân, thì có thể bạn đã chuyển sang các tọa độ cực, bạn biết, đặt u bằng r nhân cos (theta), v bằng r nhân sin (theta), và sau đó tính nó trong tọa độ cực. Vâng, vì vậy ở đây phép thế được thực hiện khá dễ. Vấn đề đặt ra là, nếu chúng ta đổi biến trong đó mối quan hệ giữa x , y và u , v phức tạp hơn, chúng ta sẽ thực hiện như thế nào? Chúng ta còn có thể làm điều này không, hay chúng ta phải cẩn thận hơn? Và, thực sự, chúng ta phải cẩn thận hơn. Vì vậy, đó là những gì chúng ta sẽ thấy sau đây. Có câu hỏi nào về điều này không?

No? OK. OK, so, see the general problem when we try to do this is to figure out what is the scale factor? What's the relation between dxdy and dudv? We need to find the scaling factor. So, we need to find dxdy versus dudv. So, let's do another example that's still pretty easy, but a little bit less easy. OK, so let's say that for some reason, we want to do the change of variables: u equals 3x-2y, and v equals x y. Why would we want to do that? Well, that might be to simplify the integrand because we are integrating a function that happens to be actually involving these guys rather than x and y.
Không à? Vâng. Vâng, do đó, vấn đề nảy sinh khi chúng ta thực hiện điều này là chỉ ra hệ số tỉ lệ là gì? Mối quan hệ giữa dxdy và dudv là gì? Chúng ta cần phải tìm hệ số tỉ lệ. Vì vậy, chúng ta cần tìm dxdy theo dudv. Vì vậy, hãy xét một ví dụ khác vẫn còn khá dễ, nhưng hơi khó hơn ví dụ vừa rồi. Vâng, giả sử rằng vì một lí do nào đó, chúng ta muốn đổi biến: u bằng 3x-2y, và v bằng x y. Tại sao chúng ta muốn làm điều đó? Vâng, có thể là để đơn giản hóa biểu thức dưới dấu tích phân bởi vì tình cờ chúng ta đang lấy tích phân của hàm liên quan đến những thằng này chứ không phải x và y.

Or, it might be to simplify the bounds because maybe we are integrating over a region whose equation in xy coordinates is very hard to write down. But, it becomes much easier in terms of u and v. And then, the bounds would be much easier to set up with u and v. Anyway, so, whatever the reason might be, typically it would be to simplify the integrant or the bounds. Well, how do we convert dxdy to dudv? So, we want to understand, what's the relation between, let's call dA the area element in xy coordinates. So, dA is dxdy, maybe dydx depending on the order. And, the area element in uv coordinates, let me call that dA prime just to make it look different.
Hoặc, có thể là để đơn giản hóa các cận bởi vì chúng ta đang lấy tích phân trên vùng mà các phương trình của nó rất khó viết ra trong tọa độ xy. Tuy nhiên, nó sẽ trở nên dễ hơn khi viết theo u và v. Và thế thì, các cận sẽ dễ hơn nhiều khi đổi sang biến u và v. Dù sao đi nữa, vâng, dù là bất kì lí do nào, thông thường sẽ là để đơn giản hóa biểu thức dưới dấu tích phân hoặc các cận. Vâng, chúng ta chuyển dxdy sang dudv như thế nào? Vì vậy, chúng ta muốn biết, mối quan hệ là gì giữa, gọi dA là yếu tố diện tích trong các tọa độ xy. Vì vậy, dA bằng dxdy, có thể dydx tùy thuộc vào thứ tự. Và, yếu tố diện tích trong hệ tọa độ uv, hãy gọi đó là dA phẩy để phân biệt.

So, that would just be dudv, or dvdu depending on which order I will want to set it up in. So, to find this relation, it's probably best to draw a picture to see what happens. Let's consider a small piece of the xy plane with area delta(A) corresponding to just a box with sides delta(y) and delta(x). OK, and let's try to figure out what it will look like in terms of u and v. And then, we'll say, well, when we integrate, we're really summing the value of the function of a lot of small boxes times their area.

Vì vậy, nó sẽ bằng dudv, hoặc dvdu phụ thuộc vào thứ tự mà tôi muốn thiết lập. Vì vậy, để tìm mối quan hệ này, cách tốt nhất là vẽ hình. Hãy xét một mảnh nhỏ của mặt phẳng xy với diện tích delta (A) tương ứng với một hộp với các cạnh delta (y) và delta (x). Vâng, và chúng ta hãy thử tìm ra nó sẽ trông như thế nào theo u và v. Và sau đó, chúng ta sẽ nói, vâng, khi chúng ta lấy tích phân, thực sự chúng ta lấy tổng giá trị của hàm của nhiều hộp nhỏ nhân diện tích của chúng.

But, the problem is that the area of the box in here is not the same as the area of the box in uv coordinates. There, maybe it will look like, actually, if you see that these are linear changes of variables, you know that the rectangle will become a parallelogram after the change of variables. So, the area of a parallelogram delta(A) prime, well, we will have to figure out how they are related so that we can decide what conversion factor, what's the exchange rate between these two currencies for area?
Tuy nhiên, vấn đề là diện tích của hộp ở đây không giống như diện tích của hộp trong tọa độ uv. Ở đó, có thể nó sẽ giống như, thực sự, bạn sẽ thấy rằng nếu đây là những phép đổi biến tuyến tính, thì hình vuông sẽ trở thành hình bình hành sau khi đổi biến. Vì vậy, diện tích của hình bình hành delta(A) phẩy, vâng, chúng ta sẽ phải chỉ ra chúng liên hệ với nhau như thế nào để chúng ta có thể xác định hệ số chuyển đổi, tỉ lệ chuyển đổi giữa hai cái hiện tại của diện tích là gì?

OK, any questions at this point? No? Still with me mostly? I see a lot of tired faces. Yes? Why is delta(A) prime a parallelogram? That's a very good question. Well, see, if I look at the side of a rectangle, say there's a vertical side, it means I'm going to increase y, keeping x the same. If I look at the formulas for u and v, they are linear formulas in terms of x and y. So, if I just increase y, see that u is going to decrease at a rate of two. v is going to increase at a rate of one at constant rates. And, it doesn't matter whether I was looking at this site or at that site. So, basically straight lines become straight lines. And if they are parallel, they stay parallel.

Vâng, đến đây có câu hỏi nào không? Không có à? Chủ yếu vẫn là tôi? Tôi thấy nhiều khuôn mặt mệt mỏi. Sao? Tại sao delta(A) phẩy là hình bình hành? Đó là một câu hỏi rất hay. Vâng, xem này, nếu tôi xét cạnh của một hình chữ nhật, giả sử rằng có một cạnh thẳng đứng, có nghĩa là tôi sẽ tăng y, giữ x không đổi. Nếu tôi xét các công thức cho u và v, chúng là các công thức tuyến tính theo x và y. Vì vậy, nếu tôi chỉ tăng y, rõ ràng u sẽ thay đổi với tốc độ là hai. v là sẽ tăng với tốc độ không đổi bằng một. Và, tôi xét cạnh này hay cạnh đó không quan trọng. Vì vậy, về cơ bản các đường thẳng trở thành đường thẳng. Và nếu chúng song song, thì chúng vẫn còn song song.

So, if you just look at what the transformation, from xy to uv does, it does this kind of thing. Actually, this transformation here you can express by a matrix. And, remember, we've seen what matrices do the pictures. We just take straight lines to straight lines. They keep the notion of being parallel, but of course they mess up lengths, angles, and all that. OK, so let's see. So, let's try to figure out, what is the area of this guy?
Vì vậy, nếu bạn chỉ xét những gì biến đổi, từ xy đến uv, nó làm điều này. Thực sự, biến đổi này bạn có thể biểu diễn bằng một ma trận. Và, hãy nhớ rằng, chúng ta đã học ma trận rồi. Chúng ta chỉ lấy đường thẳng chuyển thành đường thẳng. Chúng giữ nguyên tính chất song song, nhưng tất nhiên chúng làm thay đổi chiều dài, góc, và tất cả cái đó. Vâng, do đó, chúng ta hãy xét. Vì vậy, hãy thử chỉ ra, diện tích của thằng này là gì?

Well, in fact, what I've been saying about this transformation being linear, and transforming all of the vertical lines in the same way, all the horizontal lines in the same way, it tells me, also, I should have a constant scaling factor, right, because how much I've scaled my rectangle doesn't depend on where my rectangle is. If I move my rectangle to somewhere else, I have a rectangle of the same size, same shape, it will become a parallelogram of the same size, same shape somewhere else.
Vâng, thực sự, phép biến đổi này là tuyến tính, và chuyển đổi tất cả các đường thẳng đứng theo cùng một cách, tất cả các đường nằm ngang theo cùng một cách, nó cho ta biết, tương tự, tôi sẽ có một hệ số tỉ lệ không đổi, đúng, bởi vì tôi lấy tỉ lệ hình vuông của tôi bao nhiêu không phụ thuộc vào vị trí của hình chữ nhật. Nếu tôi di chuyển hình chữ nhật của tôi đến một nơi khác, tôi có một hình chữ nhật cùng kích thước, cùng hình dạng, nó sẽ trở thành một hình bình hành có cùng kích thước, cùng hình dạng ở một nơi khác.

So, in fact, I can just take the simplest rectangle I can think of and see how its area changes. And, if you don't believe me, then try with any other rectangle. You will see it works exactly the same way. OK, so I claim that the area scaling factor -- -- here in this case doesn't depend on the choice of the rectangle. And I should say that because we are actually doing a linear change of variables –
Vì vậy, thực sự, tôi chỉ có thể chọn hình chữ nhật đơn giản nhất tôi có thể nghĩ ra và xem diện tích của nó thay đổi như thế nào. Và, nếu bạn không tin tôi, hãy thử với bất kì hình chữ nhật nào khác. Bạn sẽ thấy nó cũng đúng. Vâng, vì vậy tôi cho rằng hệ số tỉ lệ diện tích - - ở đây trong trường hợp này không phụ thuộc vào sự lựa chọn hình chữ nhật. Và lí do là vì chúng ta đang thực hiện phép đổi biến tuyến tính -

So, you know, somehow, the exchange rate between uv and xy is going to be the same everywhere. So, let's try to see what happens to the simplest rectangle I can think of, namely, just the unit square. And, you know, if you don't trust me, then while I'm doing this one, do it with a different rectangle. Do the same calculation, and see that you will get the same conversion ratio. So, let's say that I take a unit square –
Vì vậy, bạn đã biết, bằng cách nào đó, tỷ lệ chuyển đổi giữa uv và xy sẽ là tương tự ở mọi nơi. Vì vậy, chúng ta hãy thử xem điều gì xảy ra với hình chữ nhật đơn giản nhất mà tôi nghĩ ra, cụ thể là, hình vuông đơn vị. Và, bạn biết, nếu bạn không tin tôi, thì trong khi tôi làm điều này, bạn hãy làm với một hình chữ nhật khác. Thực hiện tính toán tương tự, và thấy rằng bạn sẽ nhận tỷ lệ chuyển đổi tương tự. Vì vậy, giả sử rằng tôi chọn hình vuông đơn vị -

-- so, something that goes from zero to one both in x and y directions. OK, and let's try to figure out what it looks like on the other side. So, here the area is one. Let's try to draw it in terms of u and v coordinates, OK? So, here we have x equals 0, y equals 0. Well, that tells us u and v are going to be 0. Next, let's look at this corner. Well, in xy coordinates, this is one zero. If you plug x equals 1, y equals 0, you get u equals 3; v equals 1. So, that goes somewhere here. And so, this edge of the square will become this line here, OK?
- Vì vậy, cái gì đó đi từ không đến một theo cả hai hướng x và y. Vâng, và chúng ta hãy thử xác định xem nó trông như thế nào ở phía bên kia. Vì vậy, ở đây diện tích bằng một. Hãy

thử vẽ nó theo các tạo độ u và v, đúng không? Vì vậy, ở đây chúng ta có x bằng 0, y bằng 0. Vâng, điều đó có nghĩa là u và v sẽ bằng 0. Tiếp theo, hãy nhìn vào góc này. Vâng, tại tọa độ xy, cái này bằng một không. Nếu bạn thế x bằng 1, y bằng 0, bạn được u bằng 3; v bằng 1. Vì vậy, nó đi mọi nơi ở đây. Và như vậy, cạnh của hình vuông này sẽ trở thành đường này ở đây, đúng không?

Next, let's look at that point. So that point here was (0,1). If I plug x equals zero y equals one I will get (-2,1). So, this edge goes here. Then, if you put x equals one, y equals one, you will get u equals 1, v equals 2. So, I want (1,2). And, these edges will go to these edges here. And, you see, it does look like a parallelogram. OK, so now what the area of this parallelogram? Well, we can get that by taking the determinant of these two vectors. So, one of them is <3,1>, and the other one is <-2,1>. That will be 3 2. That's 5. OK, this parallelogram is apparently five times the size of this square. Here, it looks like it's less because I somehow changed my scale. I mean, my unit length is smaller here than here.
Tiếp theo, hãy xét điểm đó. Vì vậy điểm đó ở đây là (0,1). Nếu tôi thế x bằng không y bằng một tôi sẽ nhận được (-2,1). Vâng, cạnh này tại đây. Sau đó, nếu bạn đặt x bằng một, y bằng một, bạn sẽ nhận được u bằng 1, v bằng 2. Vì vậy, tôi muốn (1,2). Và, những cạnh này sẽ chuyển thành những cạnh này ở đây. Và, bạn thấy, nó trông giống như hình bình hành. Vâng, do đó,bây giờ diện tích của hình bình hành này là gì? Vâng, chúng ta có thể nhận được kết quả bằng cách lấy định thức của hai vector này. Vâng, một trong số chúng là <3,1>, và cái còn lại là <-2,1>. Nó sẽ bằng 3 2. Bằng 5. Vâng, rõ ràng hình bình hành này bằng năm lần kích thước của hình chữ nhật này. Ở đây, có vẻ nó không đúng tỉ lệ vì tôi đã thay đổi tỉ lệ của tôi. Ý tôi là, đơn vị chiều dài của tôi nhỏ hơn ở đây.

But, it should be a lot bigger than that. OK, and if you do the same calculations not with zero and one, but with x and x plus delta x, and so on, you will still find that the area has been multiplied by five. So, that tells us, actually for any other rectangle, area is also multiplied by five. So, that tells us that dA prime, the area element in uv coordinate is worth five times more than the area element in the xy coordinate.
Tuy nhiên, nó sẽ lớn hơn nhiều. Vâng, và nếu bạn thực hiện tính toán tương tự không phải với không và một, mà với x và x cộng với delta x, và v.v.., bạn vẫn sẽ thấy rằng diện tích đã được nhân năm. Vì vậy, điều đó cho chúng ta biết, thực sự đối với bất kỳ hình chữ nhật nào, diện tích cũng được nhân năm. Vì vậy, điều đó cho chúng ta biết dA phẩy, yếu tố diện tích trong hệ tọa độ uv lớn hơn năm lần yếu tố diện tích trong hệ tọa độ xy.

So, that means du dv is worth five times dx dy. What's so funny? What? Oh. [LAUGHTER] OK, rectangle. OK, is that OK now? Did I misspell other words? No? OK,

it's really hard to see when you are up close. It's much easier from a distance. OK, so yeah, so we've said our transformation multiplies areas by five. And so, dudv is five times dxdy. So, if I'm integrating some function, dx dy, then when I switch to uv coordinates, I will have to replace that by one fifth dudv. OK, and of course I would also, here my function would probably involve x and y. I will replace them by u's and v's. And, the bounds, well, the shape of my origin in the xy coordinates I will have to switch to some shape in the uv coordinates.
Vì vậy, điều đó có nghĩa là du dv bằng năm lần dx dy. Có gì buồn cười à? Sao? Oh.[Cười] Vâng, hình chữ nhật. Vâng, bây giờ ổn rồi đúng không? Tôi còn viết sai từ nào không? Không à? Vâng, vì tôi đứng quá gần nên nhìn hơi khó. Nhìn từ xa dễ hơn. Vâng, vì vậy vâng, vì vậy chúng ta đã nói chuyển đổi của chúng ta sẽ nhân diện tích lên năm lần. Và vì vậy, dudv bằng năm lần dxdy. Vì vậy, nếu tôi lấy tích phân hàm nào đó, dx dy, thì khi tôi chuyển sang tọa độ uv, tôi sẽ phải thay nó bằng một phần năm dudv. Vâng, và tất nhiên tôi sẽ, ở đây hàm của tôi có thể liên quan đến x và y. Tôi sẽ thay thế chúng bằng các u và các v. Và, các cận, vâng, hình dạng ban đầu của miền lấy tích phân của tôi trong hệ tọa độ xy tôi sẽ phải chuyển sang hình dạng nào đó trong hệ tọa độ uv.

And, that's also something that might be easy or might be tricky depending on what origin we are looking at. So, usually we will do changes of variables to actually simplify the region so it becomes easier to set up the bounds. So, anyway, so this is kind of an illustration of a general case. And, why is that? Well, here it looks very easy. We are just using linear formulas, and somehow the relation between dx dy and du dv is the same everywhere. If you take actually more complicated changes of variables that's not true because usually you will expect that there are some places where the rescaling is enlarging things, and some of other places where things are shrunk, so, certainly the exchange rate between dudv and dxdy will fluctuate from point to point. It's the same as if you're trying to change dollars to euros.
Và, nó có thể dễ hoặc khó phụ thuộc vào miền lấy tích phân mà chúng ta đang xét. Vì vậy, thông thường chúng ta sẽ đổi biến để đơn giản hóa miền lấy tích phân tức là dễ tìm các cận hơn. Vì vậy, đây là sự minh họa cho trường hợp tổng quát. Và, tại sao vậy? Vâng, ở đây nó có vẻ rất dễ. Chúng ta chỉ sử dụng các công thức tuyến tính, và hệ thức giữa dx dy và du dv giống nhau ở mọi nơi. Nếu bạn thực sự chọn phép đổi biến phức tạp hơn thì nó không đúng bởi vì thường bạn sẽ hi vọng rằng có một số nơi lấy lại tỉ lệ thì các thứ mở rộng, và một số nơi khác thì các thứ lại co lại, vì vậy, chắc chắn tỷ lệ chuyển đổi giữa dudv và dxdy sẽ dao động từ điểm này đến điểm khác. Tương tự như việc bạn đổi đô la sang euro.

It depends on where you do it. You will get a better rate or a worse one. So, of course, we'll get a formula where actually this scaling factor depends on x and y or on u and v. But, if you fix a point, then we have linear approximation. And, linear approximation tells us, oh, we can do as if our function is just a linear function of x and y. So then, we can do it the same way we did here. OK, so let's try to think about that.
Nó phụ thuộc vào nơi bạn làm điều đó. Bạn sẽ nhận được một tỷ lệ tốt hơn hoặc tồi tệ hơn. Vì vậy, tất nhiên, chúng ta sẽ có được một công thức mà thực sự hệ số tỉ lệ này phụ thuộc vào x và y hay u và v. Nhưng, nếu bạn cố định một điểm, thì chúng ta có phép gần đúng tuyến tính. Và, phép gần đúng tuyến tính cho chúng ta biết, oh, chúng ta có thể làm như thể hàm của chúng ta chỉ là tuyến tính theo x và y. Vì vậy, sau đó, chúng ta có thể làm nó giống như cách chúng ta đã làm ở đây. Vâng, vì vậy hãy thử nghĩ về điều đó.

So, in the general case, well, that means we will replace x and y by new coordinates, u and v. And, u and v will be some functions of x and y. So, well, we'll have an approximation formula which tells us that the change in u, if I change x or y a little bit, will be roughly (u sub x times change in x) (u sub y times change in y). And, the change in v will be roughly (v sub x delta x) (v sub y delta y). Or, the other way to say it, if you want in matrix form is delta u delta v is, sorry, approximately equal to matrix |u sub x, u sub y, v sub x, v sub y| times matrix |delta x, delta y|, OK?
Vì vậy, trong trường hợp tổng quát, vâng, điều đó có nghĩa là chúng ta sẽ thay thế x và y

bằng các tọa độ mới, u và v. Và, u và v sẽ là hàm nào đó của x và y. Vì vậy, vâng, chúng ta sẽ có một công thức gần đúng cho chúng ta biết sự thay đổi theo u , nếu tôi thay đổi x hoặc y một chút, sẽ gần bằng (u x nhân sự thay đổi của x) (u y nhân sự thay đổi của y). Và, sự thay đổi của v sẽ gần bằng (v x delta x) (v y delta y). Hoặc, cách khác là nói rằng, nếu bạn muốn dưới dạng ma trận là delta u delta v bằng, xin lỗi, gần bằng ma trận |u x, u y, v x, v y | nhân ma trận | delta x, delta y |, đúng không ?

So, if we look at that, what it tells us, in fact, is that if we take a small rectangle in xy coordinates, so that means we have a certain point, x, y, and then we have a certain width. This is going to be too small. Well, so, I have my width, delta x. I have my height, delta y. This is going to correspond to a small uv parallelogram. And, what the shape and the size of the parallelogram are depends on the partial derivatives of u and v. So, in particular, it depends on at which point we are. But still, at a given point, it's a bit like that. And, so if we do the same argument as before, what we will see is that the scaling factor is actually the determinant of this transformation.
Vì vậy, nếu chúng ta xét nó, thực sự, những gì nó cho chúng ta biết, là nếu chúng ta chọn một hình chữ nhật nhỏ trong hệ tọa độ xy, thì điều đó có nghĩa là chúng ta có một điểm nào đó, x, y, và sau đó chúng ta có một chiều rộng nhất định. Cái này sẽ quá nhỏ. Vâng, vì vậy, chiều rộng của tôi là delta x. Chiều cao của tôi là delta y. Điều này sẽ tương ứng với một hình bình hành uv nhỏ. Và, hình dạng và kích thước của hình bình hành là gì phụ thuộc vào các đạo hàm riêng của u và v. Vì vậy, đặc biệt, nó phụ thuộc vào chúng ta đang ở điểm nào. Nhưng vẫn còn, tại một điểm nhất định, nó hơi giống như thế. Và, vì vậy nếu chúng ta lí luận tương tự như trước, những gì chúng ta sẽ thấy là hệ số tỉ lệ thực sự là định thức của phép biến đổi này.

So, that's one thing that maybe we didn't emphasize enough when we did matrices at the beginning of a semester. But, when you have a linear transformation between variables, the determinant of that transformation represents how it scales areas. OK, so one way to think about it is just to try it and see what happens. Take this side. This side in x, y coordinates corresponds to delta x and zero. And, now, if you take the image of that, if you see what happens to delta u and delta v, that will be basically u sub x delta x and v sub x delta x. There's no delta y. For the other side, OK, so maybe I should do it actually. So, you know, if we move in the x, y

coordinates by delta x and zero, then delta u and delta v will be approximately u sub x delta x, and v sub x delta x.
Vì vậy, đó là một điều mà có lẽ chúng tôi chưa nhấn mạnh khi dạy về ma trận ở đầu học kì. Tuy nhiên, khi bạn có một biến đổi tuyến tính giữa các biến, định thức của phép biến đổi đó biểu diễn nó lấy tỉ lệ các diện tích như thế nào. Vâng, như vậy chúng ta có thể nghĩ về nó như là thử nó và xem điều gì xảy ra. Chọn cạnh này. Cạnh này trong hệ tọa độ x, y tương ứng với delta x và không. Và, bây giờ, nếu bạn lấy hình của nó, nếu bạn xem điều gì xảy ra cho delta u và delta v, về cơ bản nó sẽ là u x delta x và v x delta x. Không có delta y. Đối với cạnh kia, vâng, vì vậy có lẽ tôi nên làm nó. Vì vậy, bạn đã biết, nếu chúng ta di chuyển trong các tọa độ x, y một lượng delta x và không, thì delta u và delta v sẽ gần bằng u x delta x, và v x delta x.

And, on the other hand, if you move in the other direction along the other side of your rectangle, zero and delta y, then the change in u and the change in v will correspond to, well, how does u change? That's u sub y delta y, and v changes by v sub y delta y. And so, now, if you take the determinant of these two vectors, OK, so these are the sides of your parallelogram up here. And, if you take these sides to get the area of the parallelogram, you'll need to take the determinant. And, the determinant will be the determinant of this matrix times delta x times delta y.
Và, mặt khác, nếu bạn di chuyển theo hướng khác dọc theo cạnh kia của hình chữ nhật, không và delta y, thì sự thay đổi của u và sự thay đổi của v sẽ tương ứng với, vâng, u thay đổi như thế nào? Đó là u y delta y, và v thay đổi vy delta y. Và như vậy, bây giờ, nếu bạn chọn định thức của hai vector này, vâng, do đó, đây là các cạnh của hình bình hành trên đây. Và, nếu bạn chọn những cạnh này để tính diện tích hình bình hành, bạn sẽ cần lấy định thức. Và, định thức sẽ là định thức của ma trận này nhân delta x nhân delta y.

So, the area in uv coordinates will be the determinant of a matrix times delta x, delta y. And so, what I'm trying to say is that when you have a general change of variables, du dv versus dx dy is given by the determinant of this matrix of partial derivatives. It doesn't matter in which order you write it. I mean, you can put in rows or columns. If you transpose a matrix, that doesn't change the determinant. It's just any sensible matrix that you can write will have the correct determinant.
Vì vậy, diện tích trong các tọa độ uv sẽ là định thức của ma trận nhân delta x nhân delta y. Và như vậy, những gì tôi sẽ nói là khi bạn thực hiện phép đổi biến trong trường hợp tổng quát, du dv theo dx dy được cho bởi định thức của ma trận của các đạo hàm riêng này. Bạn viết theo thứ tự nào không quan trọng. Ý tôi là, bạn có thể đặt trong hàng hoặc cột. Nếu bạn chuyển vị một ma trận, việc đó không làm thay đổi định thức. Nó chỉ là bất kì ma trận nào mà bạn có thể viết sẽ có định thức chính xác.

OK, so what we need to know is the following thing. So, we define something called the Jacobian of a change of variables and used the letter J, or maybe a more useful notation is partial of u, v over partial of x, y. That's a very strange notation. I mean, that doesn't mean that we are actually taking the partial derivatives of anything. OK, it's just a notation to remind us that this has to do with the ratio between dudv and dxdy.
Vâng, vì vậy những gì chúng ta cần biết là điều sau đây. Vâng, chúng ta định nghĩa Jacobi của phép đổi biến và dùng kí tự J, hoặc có thể một kí hiệu hữu dụng hơn là đạo hàm riêng của u, v theo x, y. Đó là một ký hiệu rất lạ. Ý tôi là, điều đó không có nghĩa là chúng ta thực sự lấy đạo hàm riêng của bất cứ thứ gì. Vâng, nó chỉ là một ký hiệu để nhắc nhở chúng ta rằng điều này phải được thực hiện với tỉ số giữa dudv và dxdy.

And, it's obtained using the partial derivatives of u and v with respect to x and y. So, it's the determinant of the matrix |u sub x, u sub y, v sub x, v sub y|, the matrix that I had up there. OK, and what we need to know is that du dv is equal to the absolute value of J dx dy. Or, if you prefer to see it in the easier to remember version, it's (absolute value of d of (u, v) over partial xy) times dx dy. OK, so this is just what you need to remember, and it says that the area in uv coordinates is worth, well, the ratio to the xy coordinates is given by this Jacobian determinant

except for one small thing.
Và, nó thu được bằng cách sử dụng đạo hàm riêng của u và v theo x và y. Vì vậy, nó là định thức của ma trận | u x, u y, v x, v y |, ma trận mà tôi đã có trên đó. Vâng, và những gì chúng ta cần biết là du dv bằng giá trị tuyệt đối của J dx dy. Hoặc, nếu bạn muốn dễ nhớ hơn, nó là (giá trị tuyệt đối của d (u, v) theo xy) nhân dx dy. Vâng, do đó, đây là những gì chúng ta cần nhớ, và nội dung của nó là diện tích trong hệ tọa độ uv bằng tỉ số của các tọa độ xy được cho bởi định thức Jacobi này ngoại trừ một việc nhỏ.

It's given by, actually, the absolute value of this guy. OK, so what's going on here? What's going on here is when we are saying the determinant of the transformation tells us how the area is multiplied, there's a small catch. Remember, the determinants are equal to areas up to sine. Sometimes, the determinant is negative because of reversing the orientation of things. But, the area is still the same. Area is always positive. So, the area elements are actually related by the absolute value of this guy. OK, so if you find -10 as your answer, then du dv is still ten times dx dy.
Thực sự, nó bằng giá trị tuyệt đối của thằng này. Vâng, vì vậy điều gì đang xảy ra ở đây? Những gì xảy ra ở đây là khi chúng ta nói định thức của phép chuyển đổi cho chúng ta biết diện tích được nhân như thế nào, có một cái bẫy nhỏ. Hãy nhớ rằng, các định thức bằng diện tích lên đến sin. Đôi khi, định thức âm bởi vì sự ngược hướng của các thứ. Tuy nhiên, diện tích này vẫn không đổi. Diện tích luôn luôn dương. Vì vậy, các yếu tố diện tích thực sự liên quan nhau bởi giá trị tuyệt đối của thằng này. Vâng, vậy nếu bạn tìm thấy -10 khi tính toán, thì du dv vẫn là mười nhân dx dy.

OK, so I didn't put it all together because then you would have two sets of vertical bars. See, this is a vertical bar for absolute value. This is vertical bar for determinant. They're not the same. That's the one thing to remember. OK, any questions about this? No? OK. So, actually let's do our first example of that. Let's check what we had for polar coordinates. Last time I told you if we have dx dy we could switch it to r dr d theta. And, we had some argument for that by looking at the area of a small circular sector. But, let's check again using this new method. So, in polar coordinates I'm setting x equals r cosine theta, y equals r sine theta.
Vâng, vì vậy tôi không đặt tất cả với nhau bởi vì như thế thì bạn sẽ có hai cột thẳng đứng. Thấy không, đây là cột thẳng đúng cho giá trị tuyệt đối. Đây là cột thẳng đứng cho định thức. Chúng không giống nhau. Đó là một điều cần nhớ. Vâng, có ai hỏi gì về điều này không? Không có à? Được rồi. Vâng, chúng ta hãy xét ví dụ đầu tiên. Hãy kiểm tra những gì chúng ta có vừa học cho tọa độ cực. Lần trước tôi đã bảo bạn nếu chúng ta có dxdy chúng ta có thể chuyển nó thành r dr d theta. Và, chúng ta đã xét sơ lược điều đó bằng cách xét diện tích của một phần đường tròn nhỏ. Nhưng, hãy kiểm tra lại bằng cách sử dụng phương pháp mới này. Vì vậy, trong tọa độ cực tôi cho x bằng r cô sin theta, y bằng r sin theta.

So, the Jacobian for this change of variables, so let's say I'm trying to find the partial derivatives of x, y with respect to r, theta. Well, what is, OK, let me actually write

them here again for you. And, so what does that become? Partial x over partial r is just cosine theta. Partial x over partial theta is negative r sine theta. Sorry, I guess I'm going to run out of space here. So, let me do it underneath. So, we said x sub r is cosine theta; x sub theta is negative r sine theta.
Vì vậy, Jacobi cho phép đổi biến này, vì vậy giả sử rằng tôi sẽ tìm đạo hàm riêng của x, y theo r, theta. Vâng, nó bằng, vâng, hãy để tôi viết chúng lại cho bạn. Và, do đó, cái đó trở thành cái gì? Đạo hàm riêng của x theo r chính là cô sin theta. Đạo hàm riêng của x theo theta là trừ r sin theta. Xin lỗi, tôi đoán tôi sẽ viết ra ngoài vùng này. Vì vậy, hãy để tôi làm điều đó bên dưới. Vì vậy, chúng ta đã nói x r bằng cô sin theta; x theta bằng trừ r sin theta.

y sub r is sine; y sub theta is r cosine. And now, if we compute this determinant, we'll get (r cosine squared theta) (r sine squared theta). And, that simplifies to r. So, dx dy is, well, absolute value of r dr d theta. But, remember that r is always positive. So, it's r dr d theta. OK, so that's another way to justify how we did double integrals in polar coordinates. OK, any questions on that? Where? Yeah, OK.
y r bằng sin; y theta bằng r cô sin. Và bây giờ, nếu chúng ta tính định thức này, chúng ta sẽ nhận được (r cosin bình theta) (r sin bình phương theta). Và, nó được đơn giản hóa thành r. Vì vậy, dx dy bằng, vâng, giá trị tuyệt đối của r dr d theta. Nhưng, hãy nhớ rằng r luôn luôn dương. Vì vậy, nó bằng r dr d theta. Vâng, vì vậy đó là một cách khác để chứng minh cách chúng ta thực hiện tích phân kép trong hệ tọa độ cực . Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào không? Ở đâu? Vâng, Vâng.

Yeah, so this one seems to be switching. Well, it depends what you do. So, OK, actually here's an important thing that I didn't quite say. So, I said, you know, we are going to switch from xy to uv. We can also switch from uv to xy. And, this conversion ratio, the Jacobian, works both ways. Once you have found the ratio between du dv and dx dy, then it works one way or it works the other way. I mean, here, of course, we get the answer in terms of r. So, this would let us switch from xy to r theta. But, we can also switch from r theta to xy. Just, we'd write dr d theta equals (1 over r) times dx dy. And then we'd have, of course, to replace r by its formula in xy coordinates.
Vâng, vì vậy cái này dường như sẽ chuyển. Vâng, nó phụ thuộc vào những gì bạn làm. Vì vậy, vâng, thực sự đây là thứ quan trọng mà tôi đã chưa nói. Vì vậy, tôi đã nói, bạn đã biết, chúng ta sẽ chuyển từ xy sang uv. Chúng ta cũng có thể chuyển đổi từ uv sang xy. Và, tỷ lệ chuyển đổi này, Jacobi, đúng trong cả hai cách. Một khi bạn đã tìm được tỷ lệ giữa du dv và dy dx, thì nó sẽ đúng theo cách này hoặc cách khác. Ý tôi là, ở đây, tất nhiên, chúng ta nhận được câu trả lời theo r. Vì vậy, điều này sẽ cho chúng ta chuyển từ xy sang r theta. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể chuyển từ r theta sang xy. Chỉ cần, chúng ta viết dr d theta bằng (1 trên r) nhân dx dy. Và sau đó chúng ta muốn có, tất nhiên, để thay thế r bằng công thức của nó trong tọa độ xy.

Usually, we don't do that. Usually, we actually start with xy and switch to polar. But, so in general, when you have this formula relating du dv with dx dy, you can use it both ways, either to switch from du dv to dx dy or the other way around. And, the thing that I'm not telling you that now I should probably tell you is I could define two Jacobians because if I solve for xy in terms of uv instead of uv in terms of xy, then I can compute two different Jacobians.
Thông thường, chúng ta không làm như thế. Thông thường, chúng ta bắt đầu với xy và chuyển sang tọa độ cực. Tuy nhiên, vì vậy nói chung, khi bạn có công thức này liên quan giữa du dv với dx dy, bạn có thể sử dụng cả hai cách, hoặc chuyển từ du dv sang dx dy hoặc cách khác. Và, điều mà tôi chưa nói cho bạn bây giờ tôi sẽ nói là tôi có thể định nghĩa hai Jacobi bởi vì nếu tôi giải cho xy theo uv thay vì uv theo xy, thì tôi có thể tính hai Jacobi khác nhau.

I can compute partial uv over partial xy, or I can compute partial xy over partial uv if I have the formulas both ways. Well, the good news is these guys are the inverse of

each other. So, the two formulas that you might get are consistent. OK, so useful remark -- So, say that you can compute both -- -- these guys. Well, then actually, the product will just be 1. So, they are the inverse of each other. So, it doesn't matter which one you compute. You can compute whichever one is the easiest to compute no matter which one of the two you need.
Tôi có thể tính đạo hàm riêng uv theo xy, hoặc tôi có thể tính đạo hàm riêng xy theo uv nếu tôi có công thức cả hai cách. Vâng, tin tốt là những thằng này là nghịch đảo của nhau. Vì vậy, hai công thức mà bạn nhận được là phù hợp. Vâng, vì vậy nhận xét có ích - Vì vậy, giả sử rằng bạn có thể tính cả hai - - những thằng này. Vâng, thế thì thực sư, tích đúng bằng một. Vì vậy, chúng là nghịch đảo của nhau. Vì vậy, bạn tính cái nào không quan trọng. Bạn có thể tính bất cứ cái nào dễ nhất, cái nào trong hai cái cũng được.

And, one way to see that is that, in fact, we're looking at the determinant of these matrices that tell us the relation in variables. So, if one of them tells you how delta u delta v relate to delta x delta y, the other one does the opposite thing. It means they are the inverse matrices. And, the determinant of the inverse matrix is the inverse of the determinant. So, they are really interchangeable. I mean, you can just compute whichever one is easiest. So here, if you wanted, dr d theta in terms of dx dy, it's easier to do this and then move the r over there than to first solve for r and theta as functions of x and y and then do the entire thing again. But, you can do it if you want. I mean, it works.
Và, một cách để thấy điều đó là, thực sự, chúng ta xét định thức của những ma trận này cho chúng tôi biết mối quan hệ giữa các biến. Vì vậy, nếu một trong số chúng cho bạn biết delta u delta v liên hệ với delta x delta y như thế nào, thì cái kia làm điều ngược lại. Điều đó có nghĩa là chúng là các ma trận nghịch đảo. Và, định thức của ma trận nghịch đảo là nghịch đảo của định thức. Vì vậy, chúng có thể hoán đổi cho nhau. Ý tôi là, bạn chỉ cần tính cái nào dễ nhất. Vì vậy, ở đây, nếu bạn muốn, dr d theta theo dx dy, làm cái này dễ hơn và sau đó bỏ r ở đằng kia chứ thay vì đầu tiên giải tìm r và theta như hàm của x và y và sau đó lại làm lại toàn bộ. Tuy nhiên, bạn có thể làm điều đó nếu bạn muốn. Ý tôi là, nó cũng đúng.

Oh yeah, the other useful remark, so, I mentioned it, but let me emphasize again. So, now, the ratio between du dv and dx dy, it's not a constant anymore, although there it used to be five. But now, it's become r, or anything. In general, it will be a function that depends on the variables. So, it's not true that you can just say, oh, I'll put a constant times du dv. Yes? It would still work the same. You could imagine drawing a picture where r and theta are the Cartesian coordinates, and your picture would be completely messed up. It would be a very strange thing to do to try to

draw, you know, I'm going to do it, but don't take notes on that. You could try to draw picture like that, and then a circle would start looking like, you know, a disk would look like that. It would be very counterintuitive. But, you could do it. And that would be equivalent to what we did with a previous change of variables.
Oh vâng, những nhận xét hữu ích khác, vì vậy, tôi đã đề cập đến nó, nhưng hãy để tôi nhấn mạnh một lần nữa. Vì vậy, bây giờ, tỷ lệ giữa du dv và dy dx, nó không phải là một hằng số nữa, mặc dù trên đó nó được sử dụng là năm. Nhưng bây giờ, nó trở thành r, hoặc bất cứ thứ gì. Nói chung, nó sẽ là một hàm phụ thuộc vào các biến. Vì vậy, nếu bạn chỉ nói tôi sẽ đặt một hằng số nhân du dv là không đúng. Sao? Nó vẫn sẽ tương tự. Bạn có thể vẽ tưởng tượng một hình trong đó r và theta là các tọa độ Đề Các, và hình vẽ của bạn sẽ rối tung lên. Nó sẽ là một hình rất lạ nếu vẽ thử, bạn đã biết, tôi sẽ làm điều đó, nhưng đừng ghi chép. Bạn có thể thử vẽ hình ảnh như thế, và sau đó một vòng tròn sẽ trông giống, bạn đã biết, một đĩa sẽ trông như thế. Nó sẽ không trực giác. Tuy nhiên, bạn có thể làm điều đó. Và nó sẽ tương đương với những gì chúng ta đã làm với phép đổi biến trước đây.

So, in this case, certainly you would never draw a picture like that. But, you could do it. OK, so now let's do a complete example to see how things fit together, how we do everything. So, let's say that we want to compute, so I have to warn you, it's going to be a very silly example. It's an example where it's much easier to compute things without the change of variables. But, you know, it's good practice in the sense that we're going to make it so complicated that if we can do this one, then we can do that one. So, let's say that we want to compute this. And, of course, it's very easy to compute it directly.
Vì vậy, trong trường hợp này, chắc chắn bạn sẽ không bao giờ vẽ hình như thế. Tuy nhiên, bạn có thể làm nó. Vâng, vậy bây giờ chúng ta hãy làm một ví dụ hoàn chỉnh để xem các thứ khớp nhau như thế nào, làm thế nào để chúng ta làm mọi thứ. Vì vậy, giả sử rằng chúng ta muốn tính, vâng tôi phải cảnh báo bạn, nó sẽ là một ví dụ rất ngớ ngẩn. Đây là một ví dụ mà ở đó sẽ dễ dàng hơn nhiều để tính toán các thứ mà không cần đổi biến. Nhưng, bạn biết, nó là bài thực hành tốt theo nghĩa là chúng ta sẽ làm cho nó phức tạp đến nỗi nếu chúng ta có thể làm được bài này, thì chúng ta có thể làm bài đó. Vì vậy, giả sử rằng chúng ta muốn tính cái này. Và, tất nhiên, tính nó trực tiếp rất dễ.

But let's say that for some evil reason we want to do that by changing variables to u equals x and v equals xy. OK, that's a very strange idea, but let's do it anyway. I mean, normally, you would only do this kind of substitution if either it simplifies a lot the function you are integrating, or it simplifies a lot the region on which you are integrating. And here, neither happens. But anyway, so the first thing we have to do here is figure out what we are going to be integrating. OK, so to do that, we should figure out what dx dy will become in terms of u and v. So, that's what we've just seen using the Jacobian. OK, so the first thing to do is find the area element. And, for that, we use the Jacobian. So, well, let's see, the one that we can do easily is partials of u and v with respect to x and y.
Nhưng giả sử rằng vì một lí do nào đó chúng ta muốn đổi biến u bằng x và v bằng xy. Vâng, đó là một ý tưởng rất lạ, nhưng dù sao đi nữa hãy làm điều đó. Ý tôi là, thông thường, bạn sẽ chỉ làm loại phép thế này nếu hoặc là nó đơn giản hóa hàm lấy tích phân của bạn đi nhiều, hoặc là nó đơn giản vùng lấy tích phân. Và ở đây, cả hai không xảy ra. Nhưng dù sao đi nữa, do đó điều đầu tiên chúng ta phải làm ở đây là tìm ra những gì chúng ta sẽ lấy tích phân. Vâng, vậy để làm điều đó, chúng ta sẽ tìm ra dx dy sẽ trở thành cái gì theo u và v. Vì vậy, đó là những gì chúng ta đã gặp dùng Jacobi. Vâng, do đó, điều đầu tiên cần làm là tìm yếu tố diện tích. Và, để làm điều đó, chúng ta sử dụng Jacobi. Vì vậy, vâng, xem nào, cái mà chúng ta có thể làm dễ dàng là đạo hàm riêng của u và v đối với x và y.

I mean, the other one is not very hard because here you can solve easily. But, the one that's given to you is partial of u and v with respect to x and y, so partial u partial x is one. Partial u partial y is zero. Partial v partial x is y. And partial v partial y is x. So that's just x. So, that means that du dv is x dx dy. Well, it would be absolute value of x, but x is positive in our origin. So, at least we don't have to worry

about that.
Ý tôi là, cái kia không quá khó bởi vì ở đây bạn có thể giải dễ dàng. Tuy nhiên, cái được cho bạn là đạo hàm riêng của u và v theo x và y, vâng đạo hàm riêng của u theo x bằng một. Đạo hàm riêng của u theo y bằng không. Đạo hàm riêng của v theo x bằng y. Và đạo hàm riêng của v theo y bằng x. Vì vậy, nó chỉ là x. Vì vậy, điều đó có nghĩa là du dv bằng x dx dy. Vâng, nó sẽ là giá trị tuyệt đối của x, nhưng x dương trong miền chúng ta đang xét. Vì vậy, ít nhất là chúng ta không cần phải lo lắng về điều đó.

OK, so now that we have that, we can try to look at the integrand in terms of u and v. OK, so we were integrating x squared y dx dy. So, let's switch it. Well, let's first switch the dx dy that becomes one over x du dv. So, that's actually xy du dv. And, what is xy in terms of u and v? Well, here at least we had a little bit of luck. xy is just v. So, that's v du dv. So, in fact, what we'll be computing is a double integral over some mysterious region of v du dv.
Vâng, vậy bây giờ chúng ta có cái đó, chúng ta có thể thử xét biểu thức dưới dấu tích phân theo u và v. Vâng, vì vậy chúng ta sẽ lấy tích phân x bình y dx dy. Vì vậy, chúng ta hãy chuyển đổi nó. Vâng, trước hết chúng ta hãy chuyển dx dy trở thành một trên x du dv. Vì vậy, đó thực sự là xy dv du. Và, xy theo u và v là gì? Vâng, ở đây ít nhất chúng ta đã có một chút may mắn. xy là chỉ là v. Vì vậy, đó là v du dv. Vì vậy, trên thực tế, những gì chúng ta sẽ tính là tích phân kép trên vùng bí ẩn nào đó của v du dv.

Now, last but not least, we'll have to find what are the bounds for u and v in the new integral so that we know how to evaluate this. In fact, well, we could do it du dv or dv du. We don't know yet. Oh, amazing. It went all the way down this time. OK, so it could be dv du if that's easier. So, let's try to find the bounds. In this case, that's the hardest part. OK, so let me draw a picture in xy coordinates and try to understand things using that. OK, so x and y go from zero to one. The region that we want to integrate over was just this square.
Bây giờ, điều cuối cùng nhưng không kém quan trọng, chúng ta sẽ phải tìm cận của u và v là gì trong tích phân mới để chúng ta biết cách tính cái này. Trong thực tế, vâng, chúng ta có thể tính nó du dv hay dv du. Chúng ta chưa biết. Oh, tuyệt vời. Nó đã đi xuống hết đường lúc này. Vâng, vì vậy nó có thể là dv du nếu cái đó dễ hơn. Vì vậy, chúng ta hãy thử tìm các cận. Trong trường hợp này, đó là phần khó nhất. Vâng, vì vậy hãy để tôi vẽ một hình trong tọa độ xy và thử hiểu các thứ theo cái đó. Vâng, do đó, x và y đi từ không đến một. Vùng mà chúng ta muốn lấy tích phân là hình vuông này.

Let's try to figure out how u and v vary there. So, let's say that we're going to do it du dv. OK, so What we want to understand is how u and v vary in here. What's going to happen? So, the way we can think about it is we try to figure out how we are slicing our origin. OK, so here, we are integrating first over u. That means we start by keeping u constant, no, by keeping v constant as u changes. OK, so u changes as v is constant. What does it mean that I'm keeping v constant. Well, what is v? v is xy.

Hãy thử tìm u và v thay đổi như thế nào ở đó. Vì vậy, giả sử rằng chúng ta sẽ làm nó du dv. Vâng, do đó, những gì chúng ta muốn biết là u và v thay đổi như thế nào tại đây. Điều gì đang xảy? Vì vậy, cách mà chúng ta có thể nghĩ về nó là chúng ta thử nghĩ xem chúng ta cắt cái ban đầu của chúng ta như thế nào. Vâng, vì vậy ở đây, trước hết chúng ta sẽ tính tích phân theo u. Điều đó có nghĩa là chúng ta bắt đầu bằng cách giữ u không đổi, không, bằng cách giữ v không đổi khi u thay đổi. Vâng, do đó, u thay đổi khi v không đổi. Tôi giữ v không đổi có nghĩa là sao? Vâng, v bằng gì? v bằng xy.

So, that means I keep xy equals constant. What does the curve xy equals constant look like? Well, it's just a hyperbola. y equals constant over x. So, if I look at the various values of v that I can take, for each value of v, if I fix a value of v, I will be moving on one of these red curves. OK, and u, well, u is the same thing as x. So, that means u will increase. Here, maybe it will be 0.1 and it will increase all the way to one here. OK, so we are just traveling on each of these slices. Now, so the question we must answer here is for a given value of v, what are the bounds for u? So, I'm traveling on my curve, v equals constant, and trying to figure out, when do I enter my origin? When do I leave it?

Vì vậy, điều đó có nghĩa là tôi giữ xy không đổi. Đường cong xy bằng hằng số có dạng như thế nào? Vâng, nó chỉ là một hyperbol. y bằng hằng số trên x. Vì vậy, nếu tôi xét các giá trị khác nhau của v mà tôi có thể chọn, đối với mỗi giá trị của v, nếu tôi giữ giá trị của v không đổi, tôi sẽ di chuyển trên một trong những đường cong màu đỏ này.Vâng, và u, vâng, u giống như x. Vì vậy,điều đó có nghĩa là u sẽ tăng. Ở đây, có thể nó sẽ là 0.1 và nó sẽ tăng theo mọi hướng đến một ở đây. Vâng, vì vậy chúng ta chỉ di chuyển trên mỗi mặt cắt này. Bây giờ, do đó, câu hỏi mà chúng ta phải trả lời ở đây là đối với một giá trị nhất định của v, các cận của u là gì? Vì vậy, tôi sẽ di chuyển trên đường cong của tôi, v bằng hằng số, và cố gắng tìm ra, khi nào tôi vào miền lấy tích phân của tôi? Khi nào tôi rời khỏi nó?

Well, I enter it when I go through this side. So, the question is, what's the value of u here? Well, we don't know that very easily until we look at these formulas. So, u equals x, OK, but we don't know what x is at that point. v equals x and v equals xy. What do we go here? Well, we don't know x, but we know y certainly. OK, so let's forget about trying to find u. And, let's say, for now, we know y equals one. Well, if we set y equals one, that tells us that u and v are both equal to x. So, in terms of u and v, the equation of this uv coordinate is u equals v.

Vâng, tôi vào nó khi tôi đi qua bên này. Vì vậy, câu hỏi là, giá trị của u ở đây là gì? Vâng, chúng ta không biết rằng điều đó rất dễ cho đến khi chúng ta nhìn vào các công thức này. Vì vậy, u bằng x, vâng, nhưng chúng ta không biết x là gì tại điểm đó. v bằng x và v bằng xy. Chúng ta đi đến đâu? Vâng, chúng ta không biết x, nhưng chắc chắn chúng ta biết y. Vâng, vì vậy hãy quên đi việc tìm u. Và, giả sử rằng, bây giờ, chúng ta biết y bằng một. Vâng, nếu chúng ta đặt y bằng một, điều đó cho chúng ta biết rằng cả u và v đều bằng x. Vì vậy, theo u và v, phương trình của tọa độ uv này là u bằng v.

OK, I mean, the other way to do it is, say that you know you want y equals one. You want to know what is y in terms of u and v. Well, it's easy. y is v over u. So, let me actually add an extra step in case that's, so, we know that y is v over u equals one. So, that means u=v is my equation. OK, so when I'm here, when I'm entering my region, the value of u at this point is just v, u equals v.

Vâng, ý tôi là, cách khác để làm điều đó là, giả sử rằng bạn biết bạn muốn y bằng một. Bạn muốn biết y là gì theo u và v. Vâng, thật dễ dàng. y bằng v trên u. Vì vậy, hãy để tôi thêm một bước phụ trong trường hợp đó là, vâng, chúng ta biết rằng y bằng v trên u bằng một.Vì vậy, điều đó có nghĩa là u = v là phương trình của tôi. Vâng, do đó, khi tôi đang ở đây, khi tôi vào vùng của tôi, giá trị của u tại điểm này chỉ là v, u bằng v.

That's the hard part. Now, we need to figure out, so, we started u equals v. u increases, increases, increases. Where does it exit? It exits one when we are here.

What's the value of u here? One. That one is easier, right? This side here, so, this side here is x equals one. That means u equals one. So, we start at u equals one.
Đó là phần cứng. Bây giờ, chúng ta cần phải tìm ra, vâng, chúng ta bắt đầu với u bằng v. u tăng, tăng, tăng. Nó tồn tại ở đâu? Nó thoát khỏi một khi chúng ta ở đây. Giá trị của u ở đây là gì? Một. Cái đó dễ, đúng không? Cạnh này ở đây, vâng, cạnh này ở đây là x bằng một. Điều đó có nghĩa là u bằng một. Vì vậy, chúng ta bắt đầu tại u bằng một.
Now, we've done the inner integral. What about the outer? So, we have to figure out, what is the first and what is the last value of v that we'll want to consider? Well, if you look at all these hyperbola's, xy equals constant. What's the smallest value of xy that we'll ever want to look at in here?
Bây giờ, chúng ta đã tính tích phân bên trong.Thế còn tích phân bên ngoài? Vâng, chúng ta phải chỉ ra, giá trị đầu tiên và cuối cùng của v mà chúng ta muốn xét? Vâng, nếu bạn xét tất cả các hyperbol này, xy bằng hằng số. Giá trị nhỏ nhất của xy mà chúng ta sẽ muốn xét ở đây là gì?

Zero, OK. Let me actually, where's my yellow chalk? Is it, no, ah. So, this one here, that's actually v=0. So, we'll start at v equals zero. And, what's the last hyperbola we want to look at? Well, it's the one that's right there in the corner. It's this one here. And, that's v equals one. So, v goes from zero to one. OK, and now, we can compute this. I mean, it's not particularly easier than that one, but it's not harder either. How else could we have gotten these bounds, because that was quite evil. So, I would like to recommend that you try this way in case it works well. Just try to picture, what are the slices in terms of u and v, and how you travel on them, where you enter, where you leave, staying in the xy picture. If that somehow doesn't work well, another way is to draw the picture in the uv coordinates.
Không, đúng. Hãy để tôi thực sự, phấn vàng đâu rồi nhỉ? Kìa, không, ah. Vì vậy, cái này ở đây, nó thực sự là v = 0. Vì vậy, chúng ta sẽ bắt đầu với v bằng không. Và, hyperbol cuối cùng mà chúng ta muốn xét là gì? Vâng, nó là cái ngay ở đó trong góc. Nó là cái này ở đây. Và, đó là v bằng một. Vì vậy, v đi từ không đến một. Vâng, và bây giờ, chúng ta có thể tính cái này. Ý tôi là, nó không đặc biệt dễ hơn cái đó, nhưng nó cũng không khó hơn. Chúng ta có thể nhận được những cận này bằng cách nào nữa, bởi vì nó khá tệ. Vì vậy,tôi muốn khuyên bạn nên thử làm theo cách này trong trường hợp nó phù hợp. Chỉ cần thử vẽ hình, các mặt cắt theo u và v là gì, và bạn đi trên chúng như thế nào, nơi bạn vào, ở đây bạn ra, vẫn trên hình xy. Nếu điều đó không phù hợp, cách khác là vẽ hình trong tọa độ uv.

So, switch to a uv picture. So, what do I mean by that? Well, we had here a picture in xy coordinates where we had our sides. And, we are going to try to draw what it looks like in terms of u and v. So, here we said this is x equals one. That becomes u equals one. So, we'll draw u equals one. This side we said is y equals one becomes u equals v. That's what we've done over there. OK, so u equals v. Now, we have the two other sides to deal with.

Vì vậy, chuyển sang hình uv. Vâng, tôi muốn nói gì qua việc đó? Vâng, ở đây chúng ta đã có một hình trong tọa độ xy ở đó chúng ta có các cạnh của chúng ta. Và, chúng ta sẽ thử vẽ xem nó có dạng như thế nào theo u và v. Vì vậy, ở đây chúng ta đã nói đây là x bằng một. Cái đó trở thành u bằng một. Vì vậy, chúng ta sẽ vẽ u bằng một. Cạnh này chúng ta đã nói là y bằng một trở thành u bằng v. Đó là những gì chúng tôi đã thực hiện trên đó. Vâng, do đó, u bằng v. Bây giờ, chúng ta có hai cạnh khác cần xét.

Well, let's look at this one first. So, that was x equals zero. What happens when x equals zero? Well, both u and v are zero. So, this side actually gets squished in the change of variables. It's a bit strange, but it's a bit the same thing as when you switch to polar coordinates at the origin, r is zero but theta can be anything. It's not always one point is one point. So anyway, this is the origin, and then the last side, y equals zero, and x varies just becomes v equals zero.
Vâng, đầu tiên hãy xét cái này. Vì vậy, đó là x bằng không. Điều gì xảy ra khi x bằng không? Vâng, cả u và v bằng không. Vì vậy, thực sự cạnh này bị biến dạng khi đổi biến. Nó hơi lạ, nhưng nó hơi giống như khi bạn chuyển sang tọa độ cực lúc đầu, r bằng không nhưng theta bằng bao nhiêu cũng được. Nó không phải luôn luôn một điểm sang một điểm. Vì vậy, dù sao đi nữa, đây là ban đầu, và sau đó cạnh cuối, y bằng không, và x thay đổi trở thành v bằng không.

So, somehow, in the change of variables, this square becomes this triangle. And now, if we want to integrate du dv, it means we are going to slice by v equals constant. So, we are going to integrate over slices like this, and you see for each value of v, we go from u equals v to u equals one. And, v goes from zero to one. OK, so you get the same bounds just by drawing a different picture. So, it's up to you to decide whether you prefer to think on this picture or draw that one instead. It depends on which problems you're doing.
Vì vậy, bằng cách nào đó, trong khi đổi biến, hình vuông này trở thành hình tam giác này. Và bây giờ, nếu chúng ta muốn lấy tích phân du dv, có nghĩa là chúng ta sẽ cắt bởi v bằng hằng số. Vì vậy, chúng ta sẽ lấy tích phân trên các mặt cắt như thế này, và bạn thấy đối với mỗi giá trị của v, chúng ta đi từ u bằng v tới u bằng một. Và, v đi từ không đến một. Vâng, vì vậy bạn sẽ có được các cận tương tự chỉ bằng cách vẽ một hình khác. Vì vậy, nó đưa bạn đến quyết định bạn thích xét trên hình này hay vẽ cái đó. Nó tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể.