MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 14

Chương 14: Các biến không độc lập

Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK, so first of all there used to be, is the sound system working? Can you hear me in the back? Can anyone here in the back? No? Can we make it a bit louder? Oh, yeah, OK, it should be good now. So there used to be problem set solutions, new problem sets, practice exams. I'm pretty much out of everything. It will all be on the Web. The practice exams have been on the webpage for a while.
Vâng, do đó trước hết thường là, hệ thống âm thanh đang hoạt động chứ? Những bạn ngồi phía sau có nghe được không? Các bạn nghe được không? Không à? Chúng ta tăng âm lượng lên một chút nhé? Oh, vâng, được rồi, bây giờ có vẻ tốt rồi đó. Vâng, thường có các bài giải cho các xấp bài tập, các xấp bài tập mới, các bài kiểm tra thử. Tôi đưa ra rất nhiều thứ. Tất cả được đưa lên trang web. Các bài kiểm tra thử mới vừa được đưa lên trang web.
So, you can get it there. So -- OK, some information about the exam: so the next test in this class is on Tuesday, and it will be in the same place as last time. OK, so some of you go to Walker Memorial third floor. Some of you come here. The basic rule is you go to the same place as last time, namely, if your last name starts with A-R or if you're left handed, then you go to Walker. If your last name starts with S-Z and you're right handed, then you come here. And if you're confused, you go to wherever you can make it. As usual, no documents, no calculators allowed. And, as usual, we will be discussing the practice exams in lecture and recitation.
Vì vậy, bạn có thể lên đó tải về. Vâng, - Được rồi, một số thông tin về bài kiểm tra: vâng bài kiểm tra kế tiếp của môn này là vào ngày thứ ba, và địa điểm thi như lần trước. Vâng, nghĩa là, một số bạn sẽ đi đến tầng thứ ba Walker Memorial. Một số bạn đến đây. Nói chung là các bạn đi vào phòng thi giống như lần trước, cụ thể là, nếu tên của bạn bắt đầu từ A đến R, hoặc nếu bạn đang ở bên trái, thì bạn thi ở dãy Walker. Nếu tên của bạn bắt đầu từ S đến Z và bạn đang ở bên phải, thì bạn đến đây. Và nếu bạn đang bối rối, bạn đi đến bất cứ phòng nào để xem danh sách. Như thường lệ, không được dùng tài liệu, không được dùng máy tính khi làm bài. Và, như thường lệ, chúng ta sẽ thảo luận về các bài kiểm tra thử trong bài giảng và các buổi trả lời câu hỏi miệng.

So, tomorrow basically will be a review session. We'll go over practice 2A. So, please bring it back tomorrow. And, practice 2B will be discussed in recitation on Monday. So, before that, we have one more topic to cover. So, today we'll learn about some new cool stuff about partial derivatives with constraints. OK, so this will be actually on the exam also, but it's the last topic that will be of the exam. And, the new problem set is only due next Thursday. So, in principle, you don't need to start working on it until after the exam. I would still like you encourage you to actually have a look at it because basically you can do all of it today. And, it's actually not that hard. It's actually good practice on the topic that we're going to see today. So, if you want practice on that, then you should look at the p-set.
Vì vậy, về cơ bản ngày mai sẽ là phần ôn tập. Chúng ta sẽ làm bài thực hành 2A. Vì vậy, hãy mang nó theo vào ngày mai. Và, bài thực hành 2B sẽ được thảo luận trong buổi kiểm

tra miệng vào ngày thứ hai. Vì vậy, trước đó, chúng ta sẽ học thêm một bài nữa. Vì vậy, hôm nay chúng ta sẽ học về một số nội dung mát mẻ mới về đạo hàm riêng với những điều kiện ràng buộc. Được rồi, vâng, cái này cũng sẽ có trong bài thi, nhưng đó là bài cuối cùng thuộc nội dung thi. Và, xấp bài tập mới đến hạn nộp vào thứ Năm tuần tới. Vì vậy, về nguyên tắc, bạn không cần phải làm nó cho đến sau khi thi. Tôi vẫn muốn khuyến khích bạn xem nó bởi vì về cơ bản bạn có thể làm toàn bộ nó vào hôm nay. Và, nó thực sự không khó. Nó thực sự là bài thực hành tốt cho bài mà chúng ta học hôm nay. Vì vậy, nếu bạn muốn thực hành nó, thì bạn hãy nhìn vào p-set.

OK, so we're going to continue looking at what happens when we have non-independent variables. So, I'm afraid we don't take deliveries during class time, sorry. Please take a seat, thanks. [LAUGHTER] [APPLAUSE] OK, so Jason, you please claim your package at the end of lecture. OK, so last time we saw how to use Lagrange multipliers to find the minimum or maximum of a function of several variables when the variables are not independent. And, today we're going to try to figure out more about relations between the variables, and how to handle functions that depend on several variables when they're related. So, just to give you an example, in physics, very often, you have functions that depend on pressure, volume, and temperature where pressure, volume, and temperature are actually not independent.

Vâng, do đó, chúng ta sẽ tiếp tục xét những gì xảy ra khi chúng ta có các biến không độc lập. Vâng, tôi e rằng chúng ta không nhường nhịn nhau trong suốt buổi học,xin lỗi. Hãy dành một chỗ ngồi, cảm ơn. [Cười] [vỗ tay] Vâng, do đó Jason, bạn hãy xác nhận gói hàng của bạn ở cuối bài giảng. Được rồi, vâng lần trước chúng ta đã thấy cách dùng nhân tử Lagrange để tìm cực tiểu hoặc cực đại của hàm nhiều biến khi các biến không độc lập. Và, hôm nay chúng ta sẽ cố gắng tìm hiểu thêm về mối quan hệ giữa các biến, và cách xử lý các hàm phụ thuộc vào nhiều biến khi chúng có liên quan. Vì vậy, chỉ để cho bạn một ví dụ, trong vật lý, rất thường xuyên, bạn có các hàm phụ thuộc vào áp suất, thể tích và nhiệt độ trong đó áp suất, thể tích, và nhiệt độ thực sự không độc lập.

But they are related, say, by $PV=nRT$. So, of course, then you can substitute and expressed a function in terms of two of them only, but very often it's convenient to keep all three. But then we have to figure out, what are the rates of change with respect to t, with respect to each other, the rate of change of f with respect to these variables, and so on. So, we have to figure out what we mean by partial derivatives again.

Mà chúng có liên quan nhau, giả sử, theo hệ thức $PV = nRT$. Vì vậy, tất nhiên, thế thì bạn có thể thay thế và biểu diễn hàm theo hai trong số chúng, nhưng rất thường xuyên sẽ thuận tiện nếu giữ cả ba. Nhưng sau đó chúng ta phải chỉ ra, tốc độ biến thiên theo t là gì, đối với nhau, tốc độ biến thiên của f đối với các biến này, và v.v…. Vì vậy, một lần nữa, chúng ta phải chỉ ra những gì chúng ta muốn nói qua đạo hàm riêng.

So, OK, more generally, let's say just for the sake of notation, I'm going to think of a function of three variables, x, y, z, where the variables are related by some equation, but I will put in the form g of x, y, z equals some constant. OK, so that's the same kind of setup as we had last time, except now we are not just looking for minima and maxima. We are trying to understand partial derivatives.
Vì vậy, vâng, nói chung, giả sử vì lợi ích của kí hiệu, tôi sẽ nghĩ về hàm ba biến, x, y, z, ở đó các biến có hệ với nhau qua phương trình nào đó, nhưng tôi sẽ đặt dưới dạng g x, y, z bằng một hằng số nào đó. Vâng, cách thiết lập hơi giống với lần trước, ngoại trừ bây giờ chúng ta chỉ tìm cực tiểu và cực đại. Chúng ta đang cố gắng để hiểu các đạo hàm riêng.

So, the first observation is that if x, y, and z are related, then that means, in principle, we could solve for one of them, and express it as a function of the two others. So, in particular, can we understand even without solving? Maybe we can not solve. Can we understand how the variables are related to each other? So, for example, z, you can think of z as a function of x and y. So, we can ask ourselves, what are the rates of change of z with respect to x, keeping y constant, or with respect to y keeping x constant? And, of course, if we can solve, that we know the formula for this.
Vì vậy, nhận xét đầu tiên là nếu x, y, và z có liên quan, thì điều đó có nghĩa là, về nguyên tắc, chúng ta có thể giải để tìm một trong số chúng, và biểu diễn nó như hàm theo hai cái còn lại. Vì vậy, đặc biệt, chúng ta có thể hiểu ngay cả khi không giải không? Có lẽ chúng ta không thể giải. Chúng ta có thể biết các biến có liên quan với nhau như thế nào không? Vì vậy, ví dụ, z, bạn có thể xem z như hàm của x và y. Vì vậy, chúng ta có thể tự hỏi, tốc độ biến thiên của z theo x là gì, y giữ không đổi, hay đối với y giữ x không đổi? Và, tất nhiên, nếu chúng ta có thể giải, chúng ta biết công thức cho cái này.

And then we can compute these guys. But, what if we can't solve? So, how do we find these things without solving? Well, so let's do an example. Let's say that my relation is x^2 yz z^3=8. And, let's say that I'm looking near the point (x, y, z) equals (2, 3, 1). So, let me check 2^2 plus three times one plus 1^3 is indeed eight. OK, but now, if I change x and y a little bit, how does z change? Well, of course I could solve for z in here. It's a cubic equation. There is actually a formula. But that formula is quite complicated. We actually don't want to do that. There's an easier way.
Và sau đó chúng ta có thể tính những thằng này. Nhưng, nếu chúng ta không thể giải được thì sao? Vì vậy, làm thế nào để chúng ta tìm được những cái này mà không cần giải? Vâng, vì vậy hãy xét một ví dụ. Giả sử rằng mối quan hệ của tôi là x ^ 2 yz z ^ 3 = 8. Và, giả sử rằng tôi đang xét gần điểm (x, y, z) bằng (2, 3, 1). Vì vậy, hãy để tôi kiểm tra 2 ^ 2 cộng với ba nhân một cộng 1 ^ 3 đúng là bằng tám. Vâng, nhưng bây giờ, nếu tôi thay đổi x và y một chút, z thay đổi như thế nào? Vâng, tất nhiên tôi có thể giải để tìm z tại đây. Đó là một phương trình bậc ba. Thật sự có một công thức. Nhưng công thức đó khá phức tạp. Chúng ta thực sự không muốn làm điều đó. Có một cách dễ dàng hơn.

So, how can we do it? Well, let's look at the differential -- -- of this constraint quantity. OK, so if we called this g, let's look at dg. So, what's the differential of this? So, the differential of x^2 is 2x dx plus, I think there's a zdy. There's a ydz, and there's also a 3z^2 dz. OK, you can get this either by implicit differentiation and the product rule, or you could get this just by putting here, here, and here the partial derivatives of this with respect to x, y, and z.
Vậy, chúng ta có thể làm điều đó như thế nào? Vâng, hãy xét vi phân - - của đại lượng ràng buộc này. Vâng, vì vậy nếu chúng ta gọi g này, hãy xét dg. Vậy, vi phân của cái này là gì? Vâng, vi phân của x ^ 2 bằng 2x dx cộng, tôi nghĩ rằng có zdy. Có một ydz, và cũng có một 3z ^ 2 dz. Vâng, bạn có thể nhận được điều này, hoặc bằng cách lấy vi phân hàm hợp và quy tắc tích, hoặc bạn có thể nhận được điều này chỉ bằng cách đặt ở đây, ở đây, và ở đây đạo hàm riêng của cái này đối với x, y, và z.

OK, any questions about how I got this? No? OK. So, now, what do I do with this? Well, this represents, somehow, variations of g. But, well, I've set this thing equal to eight. And, eight is a constant. So, it doesn't change. So, in fact, well, we can set this to zero because, well, they call this g. Then, g equals eight is constant. That means we set dg equal to zero. OK, so, now let's just plug in some values at this point.
Vâng, có thắc mắc về cách tôi nhận được điều này không? Không có à? Được rồi. Vì vậy, bây giờ, tôi phải làm gì với cái này?Vâng, cái này biểu diễn, bằng cách nào đó, sự biến thiên của g. Tuy nhiên, à, tôi đã đặt cái này bằng tám. Và, tám là một hằng số. Vì vậy, nó không thay đổi. Vì vậy, quả thực, à, chúng ta có thể thiết lập cái này bằng không bởi vì, à, chúng ta gọi cái này là g. Thế thì, g bằng tám là một hằng số. Điều đó có nghĩa là chúng ta đặt dg bằng không. Vâng, vì vậy, bây giờ chúng ta hãy thế vào một số giá trị tại điểm này.

That tells us, well, so if x equals two, that's 4dx plus z is one. So, dy plus y 3z^2 should be 6dz equals zero. And now, this equation, here, tells us about a relation between the changes in x, y, and z near that point. It tells us how you change x and y, well, how z will change. Or, it tells you actually anything you might want to know about the relations between these variables so, for example, you can move dz to that side, and then express dz in terms of dx and dy. Or, you can move dy to that side and express dy in terms of dx and dz, and so on. It tells you at the level of the derivatives how each of the variables depends on the two others.
Điều đó cho chúng ta biết, à, vâng nếu x bằng hai, nó bằng 4dx cộng với z bằng một. Vì vậy, dy cộng y 3z ^ 2 sẽ bằng 6dz bằng không. Và bây giờ, phương trình này, ở đây, cho chúng ta biết mối quan hệ giữa những thay đổi của x, y, và z gần điểm đó. Nó cho chúng ta biết khi bạn thay đổi x và y, à, z sẽ thay đổi như thế nào. Hoặc, nó cho bạn biết bất cứ điều gì bạn muốn biết về quan hệ giữa các biến này vì vậy, ví dụ, bạn có thể di chuyển dz đến phía đó, và sau đó biểu diễn dz theo dx và dy. Hoặc, bạn có thể di chuyển dy về phía đó và biểu diễn dy theo dx và dz, và v.v…. Nó cho bạn biết mức của đạo hàm mỗi biến phụ thuộc vào hai biến còn lại như thế nào.

OK, so, just to clarify this: if we want to view z as a function of x and y, then what we will do is we will just move the dz's to the other side, and it will tell us dz equals minus one over six times 4dx plus dy. And, so that should tell you that partial z over partial x is minus four over six. Well, that's minus two thirds, and partial z over partial y is going to be minus one sixth. OK, another way to think about this: when we compute partial z over partial x, that means that actually we keep y constant. OK, let me actually add some subtitles here.

Vâng, vâng, chỉ để làm rõ điều này: nếu chúng ta muốn xem z là hàm của x và y, thì những gì chúng ta sẽ làm là chúng ta sẽ chỉ di chuyển các dz sang vế còn lại, và nó sẽ cho chúng ta biết dz bằng trừ một trên sáu nhân 4dx cộng dy. Và, do đó điều đó sẽ cho bạn biết rằng đạo hàm riêng của z theo x bằng trừ bốn trên sáu. Vâng, nó tương đương với hai phần ba, và đạo hàm riêng của z theo y sẽ bằng trừ 1 / 6. Vâng, một cách khác để nghĩ về điều này: khi chúng ta tính toán đạo hàm riêng z theo x, điều đó có nghĩa là chúng ta thực sự giữ y không đổi. Vâng, hãy để tôi thêm một số phụ đề ở đây.

So, here that means we keep y constant. And so, if we keep y constant, another way to think about it is we set dy to zero. We set dy equals zero. So if we do that, we get dx equals negative four sixths dx. That tells us the rate of change of z with respect to x. Here, we set x constant. So, that means we set dx equal to zero. And, if we set dx equal to zero, then we have dz equals negative one sixth of dy. That tells us the rate of change of z with respect to y. OK, any questions about that?

Vì vậy, ở đây có nghĩa là chúng ta giữ cho y không đổi. Và như vậy, nếu chúng ta giữ y không đổi, một cách khác để nghĩ về nó là chúng ta đặt dy bằng không. Chúng ta đặt dy bằng không. Vì vậy, nếu chúng ta làm điều đó, chúng ta nhận được dx bằng trừ 4 / 6 dx. Điều đó cho chúng ta biết tốc độ biến thiên của z đối với x. Ở đây, chúng ta đặt x không đổi. Vì vậy, điều đó có nghĩa là chúng ta đặt dx bằng không. Và, nếu chúng tôi đặt dx bằng không, thì chúng ta có dz bằng trừ một phần sáu dy. Nó cho chúng ta biết tốc độ biến thiên của z đối với y. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về điều đó không?

No? What, yes? Yes, OK, let me explain that again. So we found an expression for dz in terms of dx and dy. That means that this thing, the differential, is the total differential of z viewed as a function of x and y. OK, and so the coefficients of dx and dy are the partials. Or, another way to think about it, if you want to know partial z partial x, it means you set y to be constant. Setting y to be constant means that you will put zero in the place of dy.

Không có? Sao, đúng? Đúng, vâng, để tôi giải thích lại lần nữa. Vâng, chúng ta tìm một biểu thức của dz theo dx và dy. Điều đó có nghĩa là cái này, vi phân, là vi phân toàn phần của z được xem như là một hàm của x và y. Vâng, và do đó các hệ số của dx và dy là các đạo hàm riêng. Hoặc, một cách khác để nghĩ về nó, nếu bạn muốn biết đạo hàm riêng z theo x, có nghĩa là bạn thiết lập y không đổi. Cho y không đổi có nghĩa là bạn đặt 0 vào vị trí của dy.

So, you will be left with dz equals minus four sixths dx. And, that will give you the rate of change of z with respect to x when you keep y constant, OK? So, there are various ways to think about this, but hopefully it makes sense. OK, so how do we think about this in general? Well, if we know that g of x, y, z equals a constant, then dg, which is gxdx gydy gzdz should be set equal to zero. OK, and now we can solve for whichever variable we want to express in terms of the others. So, for example, if we care about z as a function of x and y –

Vì vậy, bạn sẽ còn lại với dz bằng trừ 4 / 6 dx. Và, nó sẽ cho bạn tốc độ biến thiên của z đối với x khi bạn giữ y không đổi, đúng không? Vì vậy, có rất nhiều cách khác nhau để nghĩ về điều này, nhưng hy vọng nó có ý nghĩa. Vâng, vậy làm thế nào để chúng ta nghĩ về điều này trong trường hợp tổng quát? Vâng, nếu chúng ta biết rằng g x, y, z bằng một hằng số, thì dg, bằng gxdx gydy gzdz sẽ được cho bằng không. Vâng, và bây giờ chúng ta có thể giải để tìm bất kì biến nào mà chúng ta muốn để biểu diễn theo những biến kia. Vì vậy, ví dụ, nếu chúng ta quan tâm đến z như hàm của x và y -

-- we'll get that dz is negative gx over gz dx minus gy over gz dy. And, so if we want partial z over partial x, so, well, so one way is just to say that's going to be the coefficient of dx in here, or just to write down the other way. We are setting y equals constant. So, that means we set dy equal to zero. And then, we get dz equals

negative gx over gz dx. So, that means partial z over partial x is minus gx over gz.
- Chúng ta sẽ nhận được dz bằng trừ gx trên gz dx trừ gy trên gz dy. Và, do đó, nếu chúng ta muốn đạo hàm riêng z theo x, do đó, vâng, vâng chỉ là một cách để nói nó sẽ là hệ số của dx tại đây, hoặc chỉ để viết ra theo cách khác. Chúng ta đang thiết lập y bằng hằng số. Vì vậy, điều đó có nghĩa là chúng ta cho dy bằng không. Và rồi, chúng ta nhận được dz bằng trừ gx trên gz dx. Vì vậy, điều đó có nghĩa là đạo hàm riêng của z theo x bằng trừ gx trên gz.

And, see, that's a very counterintuitive formula because you have this minus sign that you somehow probably couldn't have seen come if you hadn't actually derived things this way. I mean, it's pretty surprising to see that minus sign come out of nowhere the first time you see it. OK, so now we know how to find the rate of change of constrained variables with respect to each other. You can apply the same to find, if you want partial x, partial y, or any of them, you can do it. Any questions so far? No? OK, so, before we proceed further, I should probably expose some problem with the notations that we have so far.
Và, xem nào, đó là một công thức rất phi trực giác bởi vì bạn có dấu trừ này mà bằng cách nào đó có lẽ bạn đã không thể thấy xuất hiện nếu bạn không thực sự rút ra các thứ theo cách này. Ý tôi là, hơi ngạc nhiên khi thấy dấu trừ xuất hiện từ hư không lần đầu tiên bạn thấy nó. Vâng, vậy bây giờ chúng ta biết cách tìm tốc độ biến thiên của các biến ràng buộc đối với nhau. Bạn có thể áp dụng tương tự để tìm, nếu bạn muốn đạo hàm riêng theo x, đạo hàm riêng theo y, hoặc bất kỳ cái nào trong chúng, bạn có thể làm điều đó. Đến đây có câu hỏi nào không? Không có? Được rồi, vì vậy, trước khi chúng ta tiến xa hơn, có lẽ tôi nên biểu diễn một số vấn đề với các ký hiệu mà chúng ta có cho đến bây giờ.

So, let me try to get you a bit confused, OK? So, let's take a very simple example. Let's say I have a function, f of x, y equals x y. OK, so far it doesn't sound very confusing. And then, I can write partial f over partial x. And, I think you all know how to compute it. It's going to be just one. OK, so far we are pretty happy. Now let's do a change of variables. Let's set x=u and y=u v. It's not very complicated change of variables. But let's do it.
Vì vậy, hãy để tôi thử làm cho bạn bối rối một chút, được chứ? Vì vậy, chúng ta hãy lấy một ví dụ rất đơn giản. Giả sử rằng tôi có một hàm f x, y bằng x y. Vâng, bây giờ nó không có vẻ khó hiểu. Và sau đó, tôi có thể viết đạo hàm riêng của f theo x. Và, tôi nghĩ rằng tất cả các bạn đều biết tính nó. Nó sẽ chỉ bằng một. Vâng, cho đến bây giờ chúng ta khá hạnh phúc. Bây giờ tôi sẽ đổi biến. Hãy đặt x = u và y = u v. Nó không phải là phép đổi biến quá phức tạp. Nhưng hãy làm điều đó.

Then, f in terms of u and v, well, so f, remember f was x y becomes u plus u plus v. That's twice u plus v. What's partial f over partial u? It's two. So, x and u are the same thing. Partial f over partial x, and partial f over partial u, well, unless you believe that one equals two, they are really not the same thing, OK? So, that's an interesting, slightly strange phenomenon. x equals u, but partial f partial x is not the same as partial f partial u.
Do đó, f theo u và v, vâng, do đó, f, hãy nhớ f bằng xy trở thành u cộng u cộng v. Bằng hai lần u cộng v. Đạo hàm riêng của f theo u bằng cái gì? Bằng hai. Vì vậy, x và u giống nhau. Đạo hàm riêng f theo x, và đạo hàm riêng f theo u, vâng, nếu bạn không tin một bằng hai, chúng thực sự không giống nhau, phải không? Vì vậy, đó là một hiện tượng hơi lạ, thú vị. x bằng u, nhưng đạo hàm riêng của f theo x không giống như đạo hàm riêng của f theo u.

So, how do we get rid of this contradiction? Well, we have to think a bit more about what these notations mean, OK? So, when we write partial f over partial x, it means that we are varying x, keeping y constant. When we write partial f over partial u, it means we are varying u, keeping v constant. So, varying u or varying x is the same thing. But, keeping v constant, or keeping y constant are not the same thing.
Vì vậy, làm thế nào chúng ta loại bỏ mâu thuẫn này? Vâng, chúng ta phải suy nghĩ thêm một chút về ý nghĩa của những ký hiệu này, đúng không? Vì vậy, khi chúng ta viết đạo hàm riêng của f theo x, có nghĩa là chúng ta đang thay đổi x, giữ y không đổi. Khi chúng ta viết đạo hàm riêng của f theo u, có nghĩa là chúng ta thay đổi u, giữ v không đổi. Vì vậy, thay đổi u hoặc thay đổi x là giống nhau. Nhưng, giữ v không đổi, hoặc giữ y không đổi không giống nhau.

If I keep y constant, then when I change x, so when I change u, then v will also have to change so that their sum stays the same. Or, if you prefer the other way around, when I do this one I keep v constant. If I keep v constant and I change u, then y will change. It won't be constant. So, that means, well, life looked quite nice and easy with these notations. But, what's dangerous about them is they are not making explicit what it is exactly that we are keeping constant.
Nếu tôi giữ y không đổi, thì khi tôi thay đổi x, vâng khi tôi thay đổi u, thì v cũng sẽ phải thay đổi sao cho tổng của chúng vẫn còn giống nhau. Hoặc, nếu bạn thích theo cách khác, khi tôi làm điều này tôi giữ v không đổi. Nếu tôi giữ v không đổi và tôi thay đổi u, thì y sẽ thay đổi. Nó sẽ không là hằng số. Vì vậy, điều đó có nghĩa là, vâng, cuộc sống nhìn khá đẹp và dễ với những ký hiệu này. Nhưng, chúng nguy hiểm ở chổ là chúng không làm rõ cái mà chúng ta gi ữ không đổi chính xác là gì.

OK, so just to write things, so here we change u and x that are the same thing. But we keep y constant, while here we change u, which is still the same thing as x. But, what we keep constant is v, or in terms of x and y, that's y minus x constant. And, that's why they are not the same. So, whenever there's any risk of confusion, OK, so not in the cases that we had before because what we've done until now, we didn't really have a problem. But, in a situation like this, to clarify things, we'll actually say explicitly what it is that we want to keep constant.
Vâng, do đó, chỉ để viết các thứ, vì vậy ở đây chúng ta thay đổi u và x là tương tự. Nhưng chúng ta giữ y không đổi, trong khi ở đây chúng ta thay đổi u, nó vẫn còn giống như x. Nhưng, những gì chúng ta giữ không đổi là v, hoặc theo x và y, đó là y trừ x không đổi. Và, đó là lý do tại sao chúng không giống nhau. Vì vậy, bất cứ khi nào có bất kỳ nguy cơ gây nhầm lẫn, vâng, vì vậy, không phải trong các trường hợp mà chúng ta đã có trước đây vì những gì chúng ta đã thực hiện cho đến bây giờ, chúng ta đã không thực sự có vấn đề. Nhưng, trong trường hợp giống như thế này, để làm rõ các thứ, chúng ta thực sự sẽ phải nói rõ ràng những gì mà chúng ta muốn giữ không đổi.

OK, so what's going to be our new notation? Well, so it's not particularly pleasant because it uses, now, a subscript not to indicate what you are differentiating, but rather what you were holding constant. So, that's quite a conflict of notation with what we had before. I think I can safely blame it on physicists or chemists. OK, so this one means we keep y constant, and partial f over partial u with v held constant, similarly.
Vâng, vì vậy ký hiệu mới của chúng ta là gì? Vâng, vì vậy nó không đặc biệt dễ chịu vì nó dùng, hiện tại, một chỉ số dưới không phải để chỉ ra bạn đang lấy vi phân cái g ì, mà là bạn đang giữ cái gì không đổi. Vì vậy, đó là sự xung đột ký hiệu với những gì chúng ta đã có trước đây. Tôi nghĩ rằng tôi có thể đổ lỗi cho các nhà vật lý hoặc hóa học một cách an toàn. Vâng, vì vậy, cái này có nghĩa là chúng ta giữ y không đổi, và đạo hàm riêng của f theo u với v được giữ không đổi, tương tự như vậy.

OK, so now what happens is we no longer have any contradiction. We have partial f over partial x with y constant is different from partial f over partial x with v constant, which is the same as partial f over partial u with v constant. OK, so this guy is one. And these guys are two. So, now we can safely use the fact that x equals u if we are keeping track of what is actually held constant, OK? So now, that's going to be particularly important when we have variables that are related because, let's say now that I have a function that depends on x, y, and z. But, x, y, and z are related. Then, it means that I look at, say, x and y as my independent variables, and z as a function of x and y.

Được rồi, vậy bây giờ những gì xảy ra là chúng ta không còn có bất kỳ mâu thuẫn nào nữa. Chúng ta có đạo hàm riêng của f theo x với y không đổi khác với đạo hàm riêng của f theo x với v không đổi, nó giống như đạo hàm riêng của f theo u với v không đổi. Vâng, do đó, thằng này bằng một. Và những thằng này bằng hai. Vì vậy, bây giờ chúng ta có thể an toàn sử dụng sự kiện là x bằng u nếu chúng ta theo dõi những gì đang thực sự được giữ không đổi, đúng không? Vì vậy, bây giờ, điều đó sẽ đặc biệt quan trọng khi chúng ta có các biến có liên quan bởi vì, bây giờ chúng ta giả sử rằng tôi có hàm phụ thuộc vào x, y, và z. Nhưng, x, y, và z có liên quan với nhau. Thế thì, nó có nghĩa là tôi xem, giả sử, x và y như các biến độc lập của tôi, và z là hàm của x và y.

Then, it means that when I do partials, say, with respect to x, I will hold y constant. But, I will let z vary as a function of x and y. Or, I could do it the other way around. I could vary x, keep z constant, and let y be a function of x and z. And so, I will need to use this kind of notation to indicate which one I mean. OK, any questions? No? All right, so let's try to do an example where we have a function that depends on variables that are related. OK, so I don't want to do one with PV=nRT because probably, I mean, if you've seen it, then you've seen too much of it.

Do đó, nó có nghĩa là khi tôi lấy đạo hàm riêng, giả sử, theo x, tôi sẽ giữ y không đổi. Nhưng, tôi sẽ cho z biến đổi như hàm của x và y. Hoặc, tôi có thể làm nó theo cách khác. Tôi có thể thay đổi x, giữ z không đổi, và đặt y là hàm của x và z. Và như vậy, tôi sẽ cần sử dụng loại ký hiệu này để chỉ ra tôi muốn nói cái nào. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào không? Không có à? Được rồi, vì vậy hãy thử xét một ví dụ ở đó chúng ta có hàm phụ thuộc vào các biến có liên quan nhau. Vâng, vì vậy tôi không muốn làm cái với PV = nRT bởi vì có lẽ, ý tôi là, nếu bạn đã từng gặp nó, thì bạn đã hiểu nó quá nhiều.

And, if you haven't seen it, then maybe it's not the best example. So, let's do a geometric example. So, let's look at the area of the triangle. So, let's say I have a triangle, and my variables will be the sides a and b. And the angle here, theta. OK, so what's the area of this triangle? Well, its base times height over two. So, it's one half of the base is a, and the height is b sine theta. OK, so that's a function of a, b, and theta. Now, let's say, actually, there is a relation between a, b, and theta that I didn't tell you about, namely, actually, I want to assume that it's a right triangle, OK?

Và, nếu bạn chưa từng gặp nó, thì có lẽ nó không là ví dụ tốt nhất. Vì vậy, chúng ta hãy xét một ví dụ hình học. Vì vậy, chúng ta hãy xét diện tích của tam giác. Vì vậy, giả sử rằng tôi có một tam giác, và các biến của tôi sẽ là các cạnh a và b. Và góc ở đây, theta. Vâng, vậy diện tích của tam giác này là gì? Vâng, nó bằng cạnh đáy nhân chiều cao trên hai. Vì vậy, nó là một phần hai cạnh đáy bằng a, và chiều cao là b sin theta. Vâng, vì vậy đó là một hàm của a, b, và theta. Bây giờ, giả sử rằng, thực sự, có mối quan hệ giữa a, b, và theta mà tôi đã không cho bạn biết, cụ thể là, trên thực tế, tôi muốn giả sử rằng nó là một góc vuông, phải không?

So, let's now assume it's a right triangle with, let's say, the hypotenuse is b. So, we have the right angle here, actually. So, a is here. b is here. Theta is here. So, saying it's a right triangle is the same thing as saying that b equals sine theta, OK? So that's our constraint. That's the relation between a, b, and theta. And, this is a function of a, b, and theta. And, let's say that we want to understand how the area depends on theta. OK, what's the rate of change of the area of this triangle with respect to theta? So, I claim there's various answers. I can think of at least three possible answers.

Vì vậy, bây giờ chúng ta hãy giả sử rằng nó là một tam giác vuông với, giả sử, cạnh huyền là b. Vì vậy, chúng ta thực sự có góc vuông ở đây. Vâng, a ở đây. b ở đây. Theta ở đây. Vì vậy, giả sử nó là tam giác vuông giống như giả sử rằng b bằng sin theta, đúng không? Vì vậy, đó là điều kiện ràng buộc của chúng ta. Đó là mối quan hệ giữa a, b, và theta. Và, đây là một hàm của a, b, và theta. Và, giả sử rằng chúng ta muốn biết diện tích phụ thuộc vào theta như thế nào. Vâng, tốc độ biến thiên của diện tích của tam giác này đối với theta là gì? Vì vậy, tôi cho rằng có những câu trả lời khác nhau. Tôi có thể nghĩ ra ít nhất ba câu trả lời có thể.

So, what can we possibly mean by the rate of change of A with respect to theta? So, these are all things that we might want to call partial A partial theta. But of course, we'll have to actually use different notations to distinguish them. So, the first way that we actually already know about is if we just forget about the fact that the variables are related, OK? So, if we just think of little a, b, and theta as independent variables, and we just change theta, keeping a and b constant –

Vì vậy, chúng ta muốn nói gì qua tốc độ biến thiên của A đối với theta? Vì vậy, đây chính là đạo hàm riêng của A theo theta. Nhưng tất nhiên, chúng ta sẽ phải thực sự sử dụng các ký hiệu khác để phân biệt chúng. Vì vậy, cách đầu tiên mà chúng ta thực sự đã biết là chúng ta có quên việc các biến có liên quan với nhau không? Vì vậy, nếu chúng ta xem a nhỏ, b, và theta như các biến độc lập, và chúng ta chỉ cần thay đổi theta, giữ a và b không đổi -

So, that's exactly what we meant by partial A, partial theta, right? I'm not putting any constraints. So, just to use some new notation, that would be the rate of change of A with respect to theta, keeping a and b fixed at the same time. Of course, if we are keeping a and b fixed, and we are changing theta, it means we completely ignore this property of being a right triangle. So, in fact, it corresponds to changing the area by changing the angle, keeping these lengths fixed. And, of course, we lose the right angle.

Vì vậy, đó chính xác là những gì chúng ta muốn nói qua đạo hàm riêng theo A, đạo hàm riêng theo theta, đúng không? Tôi sẽ không đặt bất kỳ ràng buộc nào. Vì vậy, chỉ cần sử dụng một số ký hiệu mới, đó sẽ là tốc độ biến thiên của A đối với theta, giữ a và b không đổi cùng một lúc. Tất nhiên, nếu chúng ta giữ a và b cố định, và chúng ta thay đổi theta, có nghĩa là chúng ta hoàn toàn bỏ qua tính chất của tam giác vuông này. Vì vậy, quả thực, nó tương ứng với sự thay đổi diện tích bằng cách thay đổi góc, giữ những độ dài này cố định. Và, tất nhiên, chúng ta mất góc vuông.

When we rotate this side here, but the angle doesn't stay at a right angle. And that

one, we know how to compute, right, because it's the one we've been computing all along. So, that means we keep a and b fixed. And then, so let's see, what's the derivatives of A with respect to theta? It's one half ab cosine theta. OK, now that one we know. Any questions? No? OK, the two other guys will be more interesting. So far, I'm not really doing anything with my constraint. Let's say that actually I do want to keep the right angle.
Khi chúng ta quay cạnh này ở đây, nhưng góc không còn vuông. Và cái đó, chúng ta biết cách tính, đúng, bởi vì nó là cái mà chúng ta đã tính hết rồi. Vì vậy, điều đó có nghĩa là chúng ta giữ cho a và b cố định. Và sau đó, vâng thử xem, đạo hàm của A đối với theta là gì? Nó bằng một phần hai ab cosin theta. Vâng, bây giờ cái đó chúng ta biết. Có câu hỏi nào không? Không à? Vâng, hai thằng còn lại sẽ lí thú hơn. Cho đến bây giờ, tôi thực sự đã không làm bất cứ điều gì với điều kiện ràng buộc của tôi. Giả sử rằng thực sự tôi muốn giữ góc vuông.

Then, when I change theta, there's two options. One is I keep a constant, and then of course b will have to change because if this width stays the same, then when I change theta, the height increases, and then this side length increases. The other option is to change the angle, keeping b constant. So, actually, this side stays the same length. But then, a has to become a bit shorter. And, of course, the area will change in different ways depending on what I do. So, that's why I said we have three different answers. So, the next one is keep, I forgot which one I said first. Let's say keep a constant. And, that means that b will change. b is going to be some function of a and theta.
Sau đó, khi tôi thay đổi theta, có hai tùy chọn. Một là tôi giữ a không đổi, và sau đó tất nhiên b sẽ phải thay đổi bởi vì nếu độ rộng này giữ nguyên, thì khi tôi thay đổi theta, chiều cao tăng, và sau đó chiều dài cạnh này tăng. Tùy chọn còn lại là thay đổi góc, giữ b không đổi. Vì vậy, thực sự, cạnh này giữ nguyên chiều dài. Nhưng sau đó, a phải ngắn hơn một chút. Và, tất nhiên, diện tích sẽ thay đổi theo cách khác phụ thuộc vào những gì tôi làm. Vì vậy, đó là lý do tại sao tôi nói chúng ta có ba câu trả lời khác nhau. Vì vậy, cái tiếp theo là giữ, tôi quên tôi đã nói cái nào trước. Giả sử giữ a không đổi. Và, điều đó có nghĩa là b sẽ thay đổi. b sẽ là hàm nào đó của a và theta.

Well, in fact here, we know what the function is because we can solve the constraint, namely, b is a over cosine theta. But we don't actually need to know that so that the triangle, so that the right angle, so that we keep a right angle. And, so the name we will have for this is partial a over partial theta with a held constant, OK? And, the fact that I'm not putting b in my subscript there means that actually b will be a dependent variable. It changes in whatever way it has to change so that when theta changes, a stays the same while b changes so that we keep a right triangle.
Vâng, thực sự ở đây, chúng ta biết hàm bằng bao nhiêu bởi vì chúng ta có thể giải điều kiện ràng buộc, cụ thể là, b bằng a trên cosinie theta. Nhưng chúng ta thực sự không cần biết điều đó để cho tam giác, để cho góc vuông, để chúng ta giữ một góc vuông. Và, vì vậy đây chính là là đạo hàm riêng của a theo theta với a được giữ không đổi, đúng không? Và, quả thực tôi không đặt b trong chỉ số dưới của tôi ở đó nghĩa là b sẽ thực sự là biến phụ thuộc. Nó thay đổi theo bất cứ cách nào mà nó có thể thay đổi để khi theta thay đổi, a vẫn giữ nguyên trong khi b thay đổi để chúng ta giữ một tam giác vuông.

And, the third guy is the one where we actually keep b constant, and now a, we think a as a function of b and theta, and it changes so that we keep the right angle. So actually as a function of b and theta, it's given over there. A equals b cosine theta. And so, this guy is called partial a over partial theta with b held constant. OK, so we've just defined them. We don't know yet how to compute these things. That's what we're going to do now. That is the definition, and what these things mean.
Và, thằng thứ ba là cái mà ở đó chúng ta thực sự giữ b không đổi, và bây giờ a, chúng ta xem a như hàm của b và theta, và nó thay đổi sao cho chúng ta giữ góc vuông. Vì vậy, thực sự với vai trò là hàm của b và theta, nó được cho ở đằng kia. a bằng b côsin theta. Và như vậy, thằng này được gọi là đạo hàm riêng của a theo theta với b được giữ không đổi. Vâng, vì vậy chúng ta chỉ cần xác định chúng. Chúng ta chưa biết cách tính những thằng này. Đó là những gì chúng ta sẽ làm bây giờ. Đó là định nghĩa, và ý nghĩa của những thứ này.

Is that clear to everyone? Yes, OK. Yes? OK, so the second answer, again, so one way to ask ourselves, how does the area depend on theta, is to say, well, actually look at the area of the right triangle as a function of a and theta only by solving for b. And then, we'll change theta, keep a constant, and ask, how does the area change? So, when we do that, when we change theta and keep a the same, then b has to change so that it stays a right triangle, right, so that this relation still holds. That requires us to change b. So, when we write partial a over partial theta with a constant, it means that, actually, b will be the dependent variable.
Các bạn đã rõ chưa? Đúng, vâng. Sao? Vâng, do đó câu trả lời thứ hai, một lần nữa, do đó, một cách để tự hỏi, diện tích phụ thuộc vào theta như thế nào, là nói, vâng, thực sự xem diện tích của tam giác vuông là một hàm của a và theta chỉ bằng cách giải tìm b. Và sau đó, chúng ta sẽ thay đổi theta, giữ a không đổi, và hỏi, diện tích thay đổi như thế nào? Vì vậy, khi chúng ta làm điều đó, khi chúng ta thay đổi theta và giữ nguyên a, thì b phải thay đổi để cho nó giữ lại tam giác vuông, đúng, để cho mối quan hệ này được giữ lại. Điều đó đòi hỏi chúng ta phải thay đổi b. Vì vậy, khi chúng ta viết đạo hàm riêng của a theo theta với a không đổi, có nghĩa là, thực sự, b sẽ là biến phụ thuộc.

It depends on a and theta. And so, the area depends on theta, not only because theta is in the formula, but also because b changes, and b is in the formula. Yes? No, no, we don't keep theta constant. We vary theta, right? The goal is to see how things change when I change theta by a little bit. OK, so if I change theta a little bit in this one, if I change theta a little bit and I keep a the same, then b has to change also in some way. There's a right triangle. And then, because theta and b change, that causes the area to change. OK, so maybe I should re-explain that again. So, theta changes.
Nó phụ thuộc vào a và theta. Và như vậy, diện tích phụ thuộc vào theta, không chỉ vì theta ở trong công thức, mà còn vì b thay đổi, và b ở trong công thức. Sao? Không, không, chúng ta không giữ theta không đổi. Chúng ta thay đổi theta, đúng không? Mục đích là xem các thứ thay đổi như thế nào khi tôi thay đổi theta một ít. Vâng, vậy nếu tôi thay đổi theta một chút trong cái này, nếu tôi thay đổi theta một chút và tôi giữ nguyên a, thì b cũng phải thay đổi theo cách nào đó. Đó là một tam giác vuông. Và thế thì, bởi vì theta và b thay đổi, điều đó làm cho diện tích thay đổi. Vâng, như vậy có lẽ tôi nên giải thích lại điều đó một lần nữa. Vâng, theta thay đổi.

A is constant. But, we have the constraint, a equals be plus sine theta. That means that b changes. And then, the question is, how does A change? Well, it will change in part because theta changes, and in part because b changes. But, we want to know how it depends on theta in this situation. Yes? Ah, that's a very good question. So, what about, I don't keep a and b constant? Well, then there's too many choices. So I have to decide actually how I'm going to change things. See, if I just say I have this relation, that means I have two independent variables left, whichever two of the three I want. But, I still have to specify two of them to say exactly which triangle I mean. So, I cannot ask myself just how will it change if I change theta and do random things with a and b?

a là hằng số. Tuy nhiên, chúng ta có điều kiện ràng buộc, a bằng be cộng sine theta. Điều đó có nghĩa là b thay đổi. Và thế thì, câu hỏi là, A thay đổi như thế nào? Vâng, nó sẽ thay đổi một phần vì theta thay đổi, và một phần vì b thay đổi. Tuy nhiên, chúng ta muốn biết nó phụ thuộc vào theta như thế nào trong trường hợp này. Sao? Ah, đó là một câu hỏi rất hay. Vâng, thế còn, tôi giữ a và b không đổi thì sao? Vâng, thì có quá nhiều chọn lựa. Vì vậy, tôi phải quyết định thực sự tôi sẽ thay đổi các thứ như thế nào. Xem nào, nếu tôi chỉ có mối quan hệ này, có nghĩa là tôi còn lại hai biến độc lập, tùy theo hai trong số ba mà tôi muốn. Nhưng, tôi vẫn còn phải xác định hai trong số đó để nói chính xác tôi muốn nói tam giác nào. Vì vậy, tôi không thể tự hỏi nó sẽ thay đổi như thế nào nếu tôi thay đổi theta và làm những điều ngẫu nhiên với a và b?

It depends what I do with a and b. Of course, I could choose to change them simultaneously, but then I have to specify how exactly I'm going to do that. Ah, yes, if you wanted to, indeed, we could also change things in such a way that the third side remains constant. And that would be, yet, a different way to attack the problem. I mean, we don't have good notation for this, here, because we didn't give it a name. But, yeah, I mean, we could. We could call this guy c, and then we'd have a different formula, and so on. So, I mean, I'm not looking at it for simplicity. But, you could have many more.

Nó phụ thuộc vào những gì tôi làm với a và b. Tất nhiên, tôi có thể chọn để thay đổi chúng cùng một lúc, nhưng sau đó tôi phải xác định tôi sẽ làm điều đó chính xác như thế nào. À, vâng, nếu bạn muốn, thật vậy, chúng ta cũng có thể thay đổi mọi thứ theo cách nào đó để cạnh thứ ba giữ không đổi. Và đó sẽ là, một cách khác để khảo sát bài toán. Ý tôi là, chúng ta không có ký hiệu tốt cho cái này, ở đây, bởi vì chúng tôi đã không cho nó một tên. Nhưng, vâng, ý tôi là, chúng ta có thể. Chúng ta có thể gọi thằng này là c, và sau đó chúng ta muốn có một công thức khác, và v.v…. Vì vậy, ý tôi là, tôi không xét nó để cho đơn giản. Tuy nhiên, bạn có thể có nhiều hơn nữa.

I mean, in general, you will want, once you have a set of nice, natural variables, you will want to look mostly at situations where one of the variables changes. Some of them are held fixed, and then some dependent variable does whatever it must so that the constraint keeps holding. OK, so let's try to compute one of them. Let's say I decide that we will compute this one. OK, let's see how we can compute partial a, partial theta with a held fixed.

Ý tôi là, nói chung, bạn sẽ muốn, một khi bạn có một tập hợp, biến tự nhiên đẹp, bạn sẽ muốn xem xét chủ yếu các trường hợp trong đó một trong các biến thay đổi. Một số trong chúng được giữ cố định, và sau đó một số biến phụ thuộc làm bất cứ thứ gì nó phải làm để cho điều kiện ràng buộc được giữ nguyên. Vâng, vì vậy hãy thử tính một trong số chúng. Giả sử rằng chúng ta sẽ tính cái này. Vâng, hãy xem chúng ta có thể tính đạo hàm riêng của a theo theta với a được giữ không đổi như thế nào.

[APPLAUSE] OK, so let's try to compute partial A, partial theta with a held constant. So, let's see three different ways of doing that. So, let me start with method zero. OK, it's not a real method. That's why I'm not getting a positive number. So, that one is just, we solve for b, and we remove b from the formulas. OK, so here it works well because we know how to solve for b. But I'm not considering this to be a real method because in general we don't know how to do that. I mean, in the beginning I had this relation that was an equation of degree three. You don't really want to solve your equation for the dependent variable usually. Here, we can. So, solve for b and substitute.
[Vỗ tay] Vâng, vì vậy hãy thử tính đạo hàm riêng của A theo theta với a được giữ không đổi. Vì vậy, chúng ta hãy xét ba cách khác nhau để làm điều đó. Vì vậy, hãy để tôi bắt đầu với phương pháp số không. Vâng, nó không phải là một phương pháp thực tế. Đó là lý do tại sao tôi không cho nó tứ tự dương. Vì vậy, cái đó chỉ là, chúng ta giải tìm b, và chúng ta loại bỏ b từ các công thức. Vâng, do đó ở đây nó hoạt động tốt bởi vì chúng ta biết cách tìm b. Nhưng tôi không xem đây là một phương pháp thực tế bởi vì nói chung chúng ta không biết cách để làm điều đó. Ý tôi là, lúc bắt đầu tôi đã có hệ thức này là một phương trình bậc ba. Bạn không thực sự muốn giải phương trình của bạn cho biến phụ thuộc thông thường. Ở đây, chúng ta có thể. Vì vậy, giải tìm b và thế.

So, how do we do that? Well, the constraint is a=b cosine theta. That means b is a over cosine theta. Some of you know that as a secan theta. That's the same. And now, if we express the area in terms of a and theta only, A is one half of ab cosine, sorry, ab sine theta is now one half of a^2 sine theta over cosine theta. Or, if you prefer, one half of a^2 tangent theta. Well, now that it's only a function of a and theta, I know what it means to take the partial derivative with respect to theta, keeping a constant. I know how to do it.
Vậy, chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, điều kiện ràng buộc là a=b cos theta. Điều đó có nghĩa là b bằng a trên cô sin theta. Một số bạn biết biết nó như là một secan theta. Cái đó tương tự. Và bây giờ, nếu chúng ta biểu diễn diện tích chỉ theo a và theta, A bằng một phần hai ab cosine, xin lỗi, ab sin theta bây giờ bằng một phần hai của a^2 sin theta trên cosin theta. Hoặc, nếu bạn thích, một phần hai của a^ 2 tang theta. Vâng, bây giờ nó chỉ là một hàm của a và theta, tôi biết ý nghĩa của việc lấy đạo hàm riêng đối với theta, giữ a không đổi. Tôi biết cách làm điều đó.

So, partial A over partial theta, a held constant, well, if a is a constant, then I get this one half a^2 coming out times, what's the derivative of tangent? Secan squared, very good. If you're European and you've never heard of secan, that's one over cosine. And, if you know the derivative as one plus tangent squared, that's the same thing. And, it's also correct. OK, so, that's one way of doing it. But, as I've already said, it doesn't get us very far if we don't know how to solve for b. We really used the fact that we could solve for b and get rid of it. So, there's two systematic methods, and let's say the basic rule is that you should give both of them a chance.
Vâng, đạo hàm riêng của A theo theta, a được giữ không đổi, vâng, nếu a là một hằng số, thì tôi nhận được cái này một phần hai a^ 2 hiện ra nhân, đạo hàm của tang là gì? Secan bình phương, rất tốt. Nếu bạn là người châu Âu và bạn chưa bao giờ nghe nói về secan, nó chính là một trên cosin. Và, nếu bạn biết đạo hàm bằng một cộng tang bình, nó giống tương tự. Và, nó cũng chính xác. Vâng, vì vậy, đó là một cách để làm nó. Nhưng, như tôi đã nói, nó không đưa chúng ta đi xa được nếu chúng ta không biết giải phương trình để tìm b. Thực sự chúng ta đã sử dụng việc chúng ta có thể giải tìm b và loại bỏ nó. Vì vậy, có hai phương pháp có hệ thống, và nguyên tắc cơ bản là bạn nên cho cả hai một cơ hội.

You should see which one you prefer, and you should be able to use one or the other on the exam. OK, most likely you'll actually have a choice between one or the other. It will be up to you to decide which one you want to use. But, you cannot use solving in substitution. That's not fair. OK, so the first one is to use differentials. By the way, in the notes they are called also method one and method two. I'm not promising that

I have the same one, am I? I mean, I might have one and two switched. It doesn't really matter. So, how do we do things using differentials? Well, first, we know that we want to keep a fixed, and that means that we'll set da equal to zero, OK?
Bạn nên xét cái nào bạn thích, và bạn sẽ có thể sử dụng một cái hoặc cái còn lại khi thi. Vâng, bạn phải có sự chọn lựa giữa cái này hoặc cái kia. Tùy bạn quyết định bạn muốn sử dụng cái nào. Tuy nhiên, bạn không thể sử dụng phép giải thế. Điều đó không đúng. Vâng, vì vậy cái đầu tiên là dùng vi phân. À, trong các note chúng được gọi là phương pháp một và phương pháp hai. Tôi không chắc rằng tôi có cái tương tự, phải không nhỉ? Ý tôi là, tôi có thể có một và hai bị chuyển rồi. Nó không thực sự quan trọng. Vì vậy, chúng ta thực hiện các thứ dùng vi phân như thế nào? Vâng, đầu tiên, chúng ta biết rằng chúng tôi muốn giữ a cố định, và điều đó có nghĩa là chúng ta sẽ đặt da bằng không, đúng không?

The second thing that we want to do is we want to look at the constraint. The constraint is a equals b cosine theta. And, we want to differentiate that. Well, differentiate the left-hand side. You get da. And, differentiate the right-hand side as a function of b and theta. You should get, well, how many db's? Well, that's the rate of change with respect to b. That's cosine theta db minus b sine theta d theta.
Điều thứ hai mà chúng ta muốn làm là chúng ta muốn xét điều kiện ràng buộc. Điều kiện ràng buộc là a bằng cosin theta. Và, chúng ta muốn tính vi phân nó. Vâng, lấy vi phân vế trái. Bạn nhận được da. Và, lấy vi phân vế phải như hàm của b và theta. Bạn sẽ nhận được, vâng, có bao nhiêu db? Vâng, đó là tốc độ biến thiên đối với b. Đó là cosin theta db trừ b sin theta d theta.

That's a product rule applied to b times cosine theta. So -- Well, now, if we have a constraint that's relating da, db, and d theta, OK, so that's actually what we did, right, that's the same sort of thing as what we did at the beginning when we related dx, dy, and dz. That's really the same thing, except now are variables are a, b, and theta. Now, we know that also we are keeping a fixed. So actually, we set this equal to zero. So, we have zero equals da equals cosine theta db minus b sine theta d theta. That means that actually we know how to solve for db.
Đó là một quy tắc tích được áp dụng cho b nhân cô sin theta. Vì vậy, - Vâng, bây giờ, nếu chúng ta có điều kiện ràng buộc thể hiện mối quan hệ giữa da, db, và d theta, vâng, đó thực sự là những gì chúng ta đã làm, đúng rồi, đó là điều tương tự như những gì chúng ta đã làm ban đầu khi chúng ta thiết lập mối quan hệ giữa dx, dy, và dz. Nó thực sự tương tự, ngoại trừ bây giờ các biến là a, b, và theta. Bây giờ, chúng ta biết rằng chúng ta cũng đang giữ a cố định. Vì vậy, trên thực tế, chúng ta đặt cái này bằng không. Vì vậy, chúng ta có không bằng da bằng cosin theta db trừ b sin theta d theta. Điều đó có nghĩa là thực sự chúng ta biết cách giải phương trình tìm db.

OK, so cosine theta db equals b sine theta d theta or db is b tangent theta d theta. OK, so in fact, what we found, if you want, is the rate of change of b with respect to theta. Why do we care? Well, we care because let's look, now, at dA, the function that we want to look at. OK, so the function is A equals one half ab sine theta. Well, then, dA, so we had to use the product rule carefully, or we use the partials.

Vâng, vì vậy cô sin theta db bằng b sin theta d theta hoặc db bằng b tang theta d theta. Vâng, vì vậy trên thực tế, những gì chúng ta tìm, nếu bạn muốn, là tốc độ biến thiên của b đối với theta. Tại sao chúng ta quan tâm? Vâng, chúng ta quan tâm vì chúng ta hãy xem xét, bây giờ, tại dA, hàm mà chúng ta muốn xét. Vâng, do đó hàm là A bằng một phần hai ab sin theta. Vâng, do đó, dA, vâng chúng ta đã phải sử dụng các quy tắc tích cẩn thận, hoặc chúng ta sử dụng các đạo hàm riêng.

So, the coefficient of d little a will be partial with respect to little a. That's one half b sine theta da plus coefficient of db will be one half a sine theta db plus coefficient of d theta will be one half ab cosine theta d theta. But now, what do I do with that? Well, first I said a is constant. So, da is zero. Second, well, actually we don't like b at all, right? We want to view a as a function of theta. So, well, maybe we actually want to use this formula for db that we found in here. OK, and then we'll be left only with d thetas, which is what we want.

Vì vậy, hệ số d a nhỏ sẽ bằng đạo hàm riêng đối với a nhỏ. Bằng một phần hai b sin theta da cộng hệ số db sẽ bằng một phần hai a sin theta db cộng hệ số d theta sẽ bằng một phần hai ab cô sin theta d theta. Nhưng bây giờ, tôi phải làm gì với điều đó?Vâng, đầu tiên tôi đã nói a là hằng số. Vì vậy, da bằng không. Thứ hai, vâng, thực sự chúng ta không thích b gì cả, đúng không? Chúng ta muốn xem a như một hàm của theta. Vì vậy, vâng, có lẽ chúng ta thực sự muốn sử dụng công thức này cho db mà chúng ta đã tìm được ở đây. Vâng, và sau đó chúng ta sẽ chỉ còn lại các d theta, là những gì chúng ta muốn.

So, if we plug this one into that one, we get da equals one half a sine theta times b tangent theta d theta plus one half ab cosine theta d theta. And, if we collect these things together, we get one half of ab times sine theta times tangent theta plus cosine theta d theta. And, if you know your trig, but you'll see that this is sine squared over cosine plus cosine squared over cosine. That's the same as secan theta. So, now you have expressed da as something times d theta. Well, that coefficient is the rate of change of A with respect to theta with the understanding that we are keeping a fixed, and letting b vary as a dependent variable.

Vì vậy, nếu chúng ta thế cái vào cái đó, chúng ta được da bằng với một phần hai a sine theta nhân b tang theta d theta cộng một phần hai ab cô sin theta d theta. Và, nếu chúng ta gom những cái này lại với nhau, chúng ta nhận được một phần hai ab nhân sine theta nhân tang theta cộng cosin theta d theta. Và, nếu bạn biết lượng giác, bạn sẽ thấy rằng đây là sin bình phương trên cô sin cộng với cô sin bình phương trên cô sin. Nó giống như secan theta. Vì vậy, bây giờ bạn đã biểu diễn da như cái gì đó theo d theta. Vâng, hệ số đó là tốc độ biến thiên của A đối với theta được hiểu là chúng ta giữ a không đổi, và cho b thay đổi như một biến phụ thuộc.

Not enough space: sorry. OK, in case it's clearer for you, let's think about it backwards. So, we wanted to find how A changes. To find how A changes, we write da. But now, this tells us how A depends on little a, little b, and theta. Well, we know actually we want to keep little a constant. So, we set this to be zero. Theta, well, we are very happy because we want to express things in terms of theta.

Không đủ chổ viết: xin lỗi. Vâng, trong trường hợp nó rõ ràng hơn cho bạn, hãy suy nghĩ về nó ngược lại. Vâng, chúng ta muốn tìm xem A thay đổi như thế nào. Để tìm A thay đổi như thế nào, chúng ta viết da. Nhưng bây giờ, điều này cho chúng ta biết A phụ thuộc vào a nhỏ, b nhỏ, và theta như thế nào. Vâng, chúng ta biết thực sự chúng ta muốn giữ a nhỏ không đổi. Vì vậy, chúng ta cho cái này bằng không. Theta, vâng, chúng ta rất hạnh phúc bởi vì chúng ta muốn biểu diễn các thứ theo theta.

Db we want to get rid of. How do we get rid of db? Well, we do that by figuring out how b depends on theta when a is fixed. And, we do that by differentiating the constraint equation, and setting da equal to zero. OK, so -- I guess to summarize the

method, we wrote dA in terms of da, db, d theta. Then, we say that a is constant means we set da equals zero. And, the third thing is that because, well, we differentiate the constraint.
Db chúng ta muốn bỏ. Chúng ta bỏ db bằng cách nào? Vâng, chúng ta làm điều đó bằng cách tìm ra b phụ thuộc vào theta như thế nào khi a không đổi. Và, chúng ta làm điều đó bằng cách lấy vi phân phương trình ràng buộc, và cho da bằng không. Vâng, vì vậy - tôi đoán để tóm tắt phương pháp, chúng ta đã viết dA theo da, db, d theta. Thế thì, chúng ta nói rằng a là hằng số có nghĩa là chúng ta đặt da bằng không. Và, điều thứ ba là bởi vì, vâng, chúng ta lấy vi phân điều kiện ràng buộc.

And, we can solve for db in terms of d theta. And then, we plug into dA, and we get the answer. OK, oops. So, here's another method to do the same thing differently is to use the chain rule. So, we can use the chain rule with dependent variables, OK? So, what does the chain rule tell us? The chain rule tells us, so we will want to differentiate -- -- the formula for a with respect to theta holding a constant. So, I claim, well, what does the chain rule tell us? It tells us that, well, when we change things, a changes because of the changes in the variables. So, part of it is that A depends on theta and theta changes. How fast does theta change?
Và, chúng ta có thể giải để tìm db theo d theta. Và sau đó, chúng ta thế vào dA, và chúng ta nhận được câu trả lời. Vâng, oops. Vì vậy, đây là một phương pháp khác để thực hiện tương tự đó là dùng quy tắc dây chuyền. Vâng, chúng ta có thể sử dụng quy tắc dây chuyền với các biến phụ thuộc, đúng không? Vâng, nội dung của quy tắc dây chuyền là gì? Nó nói rằng, vâng chúng ta muốn lấy vi phân -- --công thức của a đối với theta giữ a không đổi. Vâng, vì vậy tôi cho rằng, à, nội dung của quy tắc dây chuyền là gì? Nó nói rằng, vâng, khi chúng ta thay đổi cái gì đó, a thay đổi do sự thay đổi của các biến. Vì vậy, một phần của nó là A phụ thuộc vào theta và theta thay đổi. Theta thay đổi nhanh như thế nào?

Well, you could call that the rate of change of theta with respect to theta with a constant. But of course, how fast does theta depend to itself? The answer is one. So, that's pretty easy. Plus, then we have the partial derivative, formal partial derivative, of A with respect to little a times the rate of change of a in our situation. Well, how does little a change if a is constant? Well, it doesn't change. And then, there is Ab, the formal partial derivative times, sorry, the rate of change of b. OK, and how do we find this one? Well, here we have to use the constraint.
Vâng, bạn có thể gọi đó là tốc độ biến thiên của theta đối với theta với một hằng số. Nhưng tất nhiên, theta phụ thuộc vào chính nó nhanh như thế nào? Câu trả lời là một. Vì vậy, điều đó khá dễ. Cộng, thế thì chúng ta có đạo hàm riêng, đạo hàm riêng hình thức, của A đối với a nhỏ nhân tốc độ biến thiên của a trong trường hợp của chúng ta. Vâng, a nhỏ thay đổi như thế nào nếu a là hằng số? Vâng, nó không thay đổi. Và sau đó, có Ab, đạo hàm riêng hình thức nhân, xin lỗi, tốc độ biến thiên của b. Vâng, và chúng ta tìm cái này như thế nào? Vâng, ở đây chúng ta phải sử dụng điều kiện ràng buộc.

OK, and we can find this one from the constraint as we've seen at the beginning either by differentiating the constraint, or by using the chain rule on the constraint. So, of course the calculations are exactly the same. See, this is the same formula as

the one over there, just dividing everything by partial theta and with subscripts little a. But, if it's easier to think about it this way, then that's also valid.
Vâng, và chúng ta có thể tìm cái này từ điều kiện ràng buộc như chúng ta đã thấy ban đầu bằng cách lấy vi phân điều kiện ràng buộc, hoặc bằng cách dùng quy tắc dây chuyền trên điều kiện ràng buộc. Vì vậy, tất nhiên các tính toán giống hệt nhau. Xem nào, đây là công thức giống như ở đằng kia, chỉ cần chia mọi thứ cho theta riêng phần và với chỉ số dưới a nhỏ. Nhưng, nếu nghĩ về nó theo cách này sẽ dễ hơn, thì điều đó cũng hợp lệ.

OK, so tomorrow we are going to review for the test, so I'm going to tell you a bit more about this also as we go over one practice problem on that.
Vâng, ngày mai chúng ta sẽ ôn tập chuẩn bị thi, do đó, tôi sẽ cho bạn biết thêm một chút về nội dung ôn tập đồng thời chúng ta sẽ làm một số bài tập thực hành.