MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 8

Chương 8: Đường đồng mức; đạo hàm riêng; phép gần đúng mặt phẳng tiếp tuyến

Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

So, silence please. OK, so a few announcements about the exam. So, you will get your exam back in recitation tomorrow. The solutions you should now have. Otherwise, they're on the webpage. So, how do scores work? So, basically you've got a score out of 100. And, if you've got a 65 or more, it means that you passed the exam. Everything is fine. We don't actually give letter grades for each of them. What we'll do is we'll add together all of your scores.

At the end of the term, we will give you a letter grade. If you want to know, roughly speaking, how you are doing so far. Then 85 or more is what I would consider to be roughly at the level of an A assuming that you perform at the same level on other tests and on homework and on the final. 72 or more on this test would correspond roughly to a B. 65 or more would correspond roughly to a C. Now, if you got, you know, 66, it doesn't mean that you will not get a B. It just means you have to work a little bit harder to get a slightly better score on the next exams.

If you got less than 65, it doesn't mean that you are failing the class, OK? It just means that you need to work a bit harder to improve that score, maybe like taking a makeup and then you'll be fine. It just means that you should try to work on improving it. In particular, if you got less than 65, then you will have received an e-mail telling you about makeup exams. Taking a makeup is not a punishment or something like that. I know it's kind of hard; it's your first test at MIT and you didn't do so well. You get used to having A's in high school, and you got maybe a C. Maybe you got less than 65. It's not the end of the world, and it doesn't mean that you are at risk of anything, yet. But, it means certainly that your understanding of the material is not perfect. And so, you should review it again and get a chance to do better.

And so, that's what makeups are about. Basically, it's about giving you a chance to go over the material again and improve your score. There's no risk in taking a makeup. You cannot decrease your score by taking a makeup, I should say. You can only increase your score up to 65, but you cannot decrease your score. So, it's really a risk-free thing. And, you can take it in any of those times. I would still like to advise that not everybody go on Thursday because it's going to be crowded there otherwise.

So, again, if you are disappointed by your score, it's not the end of the world. I should say, if the exam was a little bit harder than anticipated, and that also hurt in some cases. So, 65 is the standard passing score on tests in this class, and it was left at that very use so basically you get the chance to review things and try to do better next time. But, it doesn't mean if you got 63 or 62, it doesn't mean that you're actually failing a class. Don't worry about that. But, maybe you still need to review the material a bit more, OK? The other piece of news is that tomorrow I will not be in town, and so unfortunately I won't have office hours.

So, to make up for that, basically this afternoon I'll try to be available as long as I can stay. So, normally I have office hours 2:00-3:00. I'll stay until at least 4:00, maybe 5:00. So, if you need help, you can come see me later today. OK, so, now let's move on and talk about new stuff. So, so far, we've seen things about vectors, equation of planes, motions in space, and so on. Basically we've done geometry in space. But, calculus, really, is about studying functions. Now, we're going to actually move on to studying functions of several variables. So, this new unit, what we'll do over the next three weeks or so will be about functions of several variables and their derivatives.

Vâng, vì vậy, bây giờ hãy tiếp tục và nói về vấn đề mới. Vì vậy, cho đến bây giờ, chúng ta đã học về các vectơ, phương trình mặt phẳng, chuyển động trong không gian, và v.v… Về cơ bản đó là hình học không gian. Tuy nhiên, giải tích, thực sự, nghiên cứu về các hàm. Bây giờ, chúng ta sẽ chuyển sang nghiên cứu các hàm nhiều biến. Vì vậy, bài học mới này, cũng như các bài học trong ba tuần tiếp theo chúng ta sẽ học về các h àm nhiều biến và đạo hàm của chúng.

OK, so first of all, we should try to figure out how we are going to think about functions. So, remember, if you have a function of one variable, that means you have a quantity that depends on one parameter. Maybe f depends on the variable x. And, for example, a function that you all know is f of x equals sin(x). And, the way we would represent that is maybe just by plotting the graph of the function. So, the graph of a function, we plot y = f(x). And, the graph of a sine function that looks like this. OK, so now, let's say that we had, actually, a function of two variables.

Vâng, vì vậy, trước hết, chúng ta hãy thử suy nghĩ về việc chúng ta sẽ nghiên cứu các hàm như thế nào. Vâng, nhớ rằng, nếu bạn có hàm một biến, có nghĩa là bạn có một đại lượng phụ thuộc vào một tham số. Có thể là f phụ thuộc vào biến x. Và, ví dụ, một hàm mà tất cả các bạn đều biết là f(x) bằng sin (x). Và, chúng ta biểu diễn nó bằng cách vẽ đồ thị của nó. Vâng, đồ thị hàm số, chúng ta vẽ đồ thị y = f (x). Và, đồ thị của một hàm sin có dạng như thế này. Vâng, vậy bây giờ, giả sử rằng chúng ta có, một hàm hai biến.

So, that means that the value of F depends actually on two different parameters, say, if the variables are x and y, or they can have any names you want. So, given values of the two parameters, x and y, the function will give us a number that we'll call f(x, y). That depends on x and y according to some formula, OK, not very surprising so far. So, for example, I can give you the function f(x, y) = x^2 y^2. And, of course, as with functions of one variable, we don't need things to be defined everywhere.

Vì vậy, điều đó có nghĩa là giá trị của f thực sự phụ thuộc vào hai tham số khác nhau, giả sử, nếu các biến là x và y, hoặc chúng có thể có tên bất kì nào đó tùy theo bạn đặt. Vì vậy, với các giá trị cho trước của hai tham số, x và y, hàm sẽ cho chúng ta một số mà chúng ta sẽ gọi là f (x, y). Nó phụ thuộc vào x và y theo một công thức nào đó, vâng, cho đến bây giờ chưa có gì lạ. Vì vậy, ví dụ, tôi cho bạn hàm f (x, y) = x ^ 2 y ^ 2. Và, tất nhiên, cũng giống như với hàm một biến, hàm không nhất thiết phải xác định ở mọi nơi.

Sometimes there is the domain of definition. So, this one is defined all the time. But, if I tell you, say, f of x, y equals square root of y, well, this is only defined if y is nonnegative. If I tell you f(x, y) equals one over x y, that's only defined if x y is not zero, and so on. Now, so these are mathematical examples given by explicit formulas. And, of course, there's physical examples. For example, so examples coming from real life, so for example, you can look at the temperature at the certain point on the surface of the earth. So, you use maybe longitude and latitude; that's x and y. And then you have f(x, y) equals the temperature at that point.

Đôi khi có miền xác định. Vâng, hàm này luôn xác định. Tuy nhiên, nếu tôi cho bạn hàm khác, giả sử là, f (x, y) bằng căn bậc hai của y, vâng, hàm này chỉ xác định nếu y không âm. Nếu tôi cho bạn f (x, y) bằng với một trên xy, hàm đó chỉ xác định khi cả x và y khác không, và v.v….. Bây giờ, do đó, đây là những hàm toán học được cho bởi các công thức tường minh. Và, tất nhiên, có các hàm vật lý. Ví dụ, hãy lấy ví dụ từ thực tế cuộc sống, do đó, ví dụ, bạn có thể xét nhiệt độ ở điểm nào đó trên bề mặt trái đất. À, bạn có thể sử dụng kinh độ và vĩ độ; đó là x và y. Và rồi bạn có f (x, y) bằng với nhiệt độ tại điểm đó.

In fact, because temperature depends also may be on how high up you are. It depends on elevation. So, it's actually a function of maybe x, y, z. And, it also depends on time. So, in fact, maybe it's a function of t in x y z coordinates in space. So, you see that real-world functions can depends on a lot of variables. So, our goal will be to understand how to deal with that. OK, so now you will see very soon, but actually it's already tricky enough to picture a function of two variables. So, we are going to focus on the case of functions of two variables. And then, we'll see that if we have more than two variables, then it's harder to plot the function. We cannot draw with the graph looks like anymore.
Đúng là như vậy, bởi vì nhiệt độ cũng có thể phụ thuộc vào độ cao. Nó phụ thuộc vào độ cao. Vì vậy, nó có thể là hàm của x, y, z. Và, nó cũng phụ thuộc vào thời gian. Vì vậy, quả thực, có thể nó là một hàm theo t tại một điểm xyz trong không gian. Vì vậy, bạn thấy rằng các hàm trong thế giới thực có thể phụ thuộc vào nhiều biến. Vì vậy, mục tiêu của chúng ta sẽ là tìm hiểu cách khảo sát nó. Vâng, vậy bây giờ bạn sẽ thấy ngay, nhưng thực sự vẽ hàm hai biến đã phức tạp lắm rồi. Vì vậy, chúng ta sẽ tập trung vào trường hợp hàm hai biến. Và sau đó, chúng ta sẽ thấy rằng nếu chúng có nhiều hơn hai biến, thì vẽ đồ thị sẽ khó hơn. Chúng ta không thể vẽ đồ thị giống như thế này nữa.

But, the tools are the same, the notion of partial derivatives, grade and vector, and so on, all the tools that we will develop work exactly the same way no matter how many variables you have. So, I'll say, for simplicity -- -- we'll focus mostly on two or sometimes three variables. But, it works the same in any number of variables. OK, so the first question is how to visualize a function of two variables.
Tuy nhiên, các công cụ đều giống nhau, khái niệm về đạo hàm riêng, grad và vector, và v.v…, tất cả các công cụ và phương pháp mà chúng ta sắp xây dựng ở đây có thể áp dụng cho hàm có bất kì biến. Vì vậy, tôi sẽ nói, để cho đơn giản - - chúng ta sẽ chủ yếu tập trung vào hai hoặc đôi khi ba biến. Nhưng, nó vẫn áp dụng được cho hàm có số biến bất kì. Vâng, vì vậy câu hỏi đầu tiên là chúng ta hình dung hàm hai biến như thế nào.

So, the first thing we can do is try to draw the graph of f. So, maybe I should say f -- which is a function of two variables. So, the first answer will be, we can try to look at

it's graph. And, the idea is the same as with one variable, namely, we look at all the possible values of the parameters, x and y, and for each of them, we plot a point whose height is the value of a function at these parameters. So, we'll plot, let's say, z equals f(x, y).
Vì vậy, điều đầu tiên chúng ta có thể làm là thử vẽ đồ thị của f. Vì vậy, có lẽ tôi nên nói f – là hàm hai biến. Vì vậy, câu trả lời đầu tiên sẽ là, chúng ta có thể thử xét đồ thị của nó. Và, ý tưởng cũng giống như đối với hàm một biến, cụ thể là, chúng ta xét tất cả các giá trị có thể có của các tham số, x và y, và đối với mỗi giá trị x và y, chúng ta vẽ một điểm mà chiều cao của nó là giá trị của hàm tại những tham số này. Vì vậy, chúng ta sẽ vẽ đồ thị, giả sử rằng, z bằng f (x, y).

And, now that will become, actually, a surface in space. OK, so for each value of x and y, yeah, we have x, y in the x, y plane, then we'll plot the point in space at position x, y. And, z equals f of x, y. OK, and if we take all of these points together, they will give us some surface that sits in space. Yes? Oh, a function of two variables, shorthand. Well, let's say how to visualize a function of two variables. OK, so, how do we do that concretely? Say that I give you a formula for f. How do we try to represent it?
Và, bây giờ nó sẽ trở thành, thực sự là, một mặt trong không gian. Vâng, vì vậy, đối với mỗi giá trị của x và y, vâng, chúng ta có x, y trong mặt phẳng x, y, thì chúng ta sẽ vẽ đồ thị các điểm trong không gian tại vị trí x, y. Và, z bằng f (x, y). Vâng, và tập hợp tất cả các điểm này sẽ cho chúng ta bề mặt trong không gian. Đúng không? Oh, một hàm hai biến, cách diễn đạt ngắn gọn. Vâng, chúng ta hãy nói về cách hình dung hàm hai biến. Vâng, như vậy, làm thế nào để chúng ta làm điều đó một cách cụ thể? Giả sử rằng tôi cho bạn một công thức của f. Làm thế nào để chúng ta biểu diễn nó?

So, let's do our first example. Let's say I give you a function f(x, y) = -y. OK, so it looks a little bit silly because it doesn't depend on x. But, that's not the problem. It's still a valid function of x and y. It just happens to be constant with respect to x. So, to draw the graph we look at the surface in space defined by z equals y. What kind of surface is that? It's a plane, OK? And, if we want to draw it, z equals minus y will look, well, let's put y axis. Let's put x axis. Let's put z axis. If I look at what happens in the y, z plane in the plane of a blackboard, it will just look like a line that goes downward with slope one.
Vâng, hãy xét ví dụ đầu tiên. Giả sử rằng tôi cho bạn một hàm f (x, y) =-y. Vâng, do đó, nó có vẻ hơi ngớ ngẩn bởi vì nó không phụ thuộc vào x. Nhưng, điều đó không quan trọng. Nó vẫn là một hàm hai biến hợp lệ. Nó chỉ ngẫu nhiên không đổi đối với x. Vì vậy, để vẽ đồ thị chúng ta xét bề mặt trong không gian được xác định bởi z bằng y. Đó là loại bề mặt nào? Đó là một mặt phẳng, đúng không? Và, nếu chúng ta muốn vẽ nó, z bằng trừ y sẽ có dạng, vâng, giả sử đây là trục y. Đây là trục x. Đây là trục z. Nếu tôi nhìn vào những gì sẽ xảy ra trong mặt phẳng y, z trong mặt phẳng bảng đen, nó sẽ có dạng một đường thẳng đi xuống với hệ số góc bằng một.

OK, so it will be this. And, what happens if I change x? Well, if I change x, nothing happens because x doesn't appear in this equation. So, in fact, if instead of setting x equal to zero I set x equal to one, I'm in front of the blackboard, or minus one at the back. Well, it still looks exactly the same. So, I have this plane that actually contains the x axis and slopes downwards with slope one.
Vâng, vì vậy, nó sẽ là cái này. Và, những gì xảy ra nếu tôi thay đổi x? Vâng, nếu tôi thay đổi x, không có gì xảy ra vì x không xuất hiện trong phương trình này. Vì vậy, trên thực tế, nếu thay vì cho x bằng không tôi đặt x bằng một, tôi ở phía trước bảng đen, hoặc trừ một ở phía sau. Vâng, nó vẫn trông giống hệt nhau. Vì vậy, tôi có mặt phẳng này thực sự chứa trục x và dốc xuống với hệ số góc bằng một.

It's kind of hard to draw. Now, you see immediately what the big problem with graphs will be. But, these pictures are hard to read. But that's our first graph. OK, a question so far? OK, so let's say that we have a slightly more complicated function. How do we see it? So, let's draw another example. Let's say I give you f(x, y) = 1 - x^2-y^2. So, we should try to picture what the surface z=1- x^2-y^2 looks like. So, how do we do that? Well, maybe you are very fast and figured out what it looks like. But, if not, then we need to work piece by piece.

Nó phần nào khó vẽ. Bây giờ, ngay lập tức bạn thấy có vấn đề lớn với các đồ thị. Những hình này khó nhìn. Nhưng đó là đồ thị đầu tiên của chúng ta. Vâng, cho đến bây giờ một câu hỏi là? Vâng, giả sử rằng chúng ta có một hàm hơi phức tạp hơn. Chúng ta khảo sát nó như thế nào? Vâng, chúng ta hãy xét một ví dụ khác. Giả sử rằng tôi cho bạn f (x, y) = 1 - x ^ 2-y ^ 2. Vì vậy, chúng ta hãy thử vẽ bề mặt z = 1 - x ^ 2-y ^ 2. Vâng, chúng ta sẽ thực hiện việc đó như thế nào? Vâng, có lẽ bạn rất nhanh và suy ra được nó có dạng như thế nào. Nhưng, nếu không, thì chúng ta cần làm từ từ.

So, maybe it will help if we understand first what it does in the plane of the blackboard. So, if we look at it in the y, z plane, that means we set x equal to zero. And then, z becomes 1 - y^2. What is that? It's a parabola pointing downwards, and starting at one. So, we should draw maybe this downward parabola. It starts at one and it cuts the y axis at one. When y is one, that gives us zero. So, we might have an idea of what it might look like, or maybe not. Let's get more slices.

Vì vậy, có thể sẽ có ích nếu trước hết chúng ta biết nó như thế nào trong mặt phẳng bảng đen. Vì vậy, nếu chúng ta xét nó trong mặt phẳng y, z, điều đó có nghĩa là chúng ta cho x bằng không. Và do đó, z trở thành 1 - y ^ 2. Đó là gì? Đó là một parabol lồi, và bắt đầu tại một. Vì vậy, chúng ta nên vẽ parabol lồi này. Nó bắt đầu tại một và nó cắt trục y tại một. Khi y bằng một, nó bằng không. Vì vậy, chúng ta có thể hình dung ra nó có dạng như thế nào, hoặc có thể không. Hãy xét thêm những mặt khác.

Let's see what it does in the x, z plane, this other vertical plane that's coming towards us. So, in the x, z plane, if we set y equal to zero, we get z equals one minus x^2. It's, again, a parabola going downwards. OK, so I'm going to try to draw a parabola that goes downward, but now to the front and to the back. So, we are starting to have a slightly better idea but we still don't know whether the cross section of this thing might be round, square, something else. So, it wants more confirmation. We might want to also figure out where the surface intersects the x, y plane.

Hãy xem nó sẽ như thế nào trong mặt phẳng x, z, mặt phẳng thẳng đứng khác này đang hướng về phía chúng ta. Vì vậy, trong mặt phẳng x, z, nếu chúng ta đặt y bằng không, chúng ta nhận được z bằng một trừ x ^ 2. Một lần nữa, nó là một parabol lồi. Vâng, vì vậy tôi sẽ cố gắng vẽ một parabol lồi, nhưng bây giờ từ trước ra sau. Vì vậy, chúng ta đang bắt đầu có một ý tưởng tốt hơn một chút nhưng chúng ta vẫn không biết mặt cắt của cái này sẽ là tròn, vuông, hay cái gì khác. Vì vậy, cần nhiều chứng cớ hơn. Chúng ta cũng có thể cần biết bề mặt giao với mặt phẳng x,y ở đâu .

So, we hit the x, y plane when z equals zero. That means 1-x^2-y^2 should be 0, that becomes x^2 y^2 = 1. That is a circle of radius 1. That's the unit size. So, that means that here, we actually have the unit circle. And now, you should imagine that you have this thing that when you slice it by a vertical plane, looks like a downwards parabola. And, it's actually a surface of revolution. You can rotate it around the z axis, OK? Now, if you stare long enough at that equation, you'll actually see that, yes, we know that it had to be like that. But, see, so these are useful ways of trying to guess what the graph looks like. Of course, the other way is to just ask your computer to do it.
Vì vậy, chúng ta chạm mặt phẳng x, y khi z bằng không. Điều đó có nghĩa là 1-x ^ 2-y ^ 2 sẽ bằng 0, tương đương x ^ 2 y ^ 2 = 1. Đó là một vòng tròn bán kính 1. Nó có kích thước đơn vị. Vì vậy, điều đó có nghĩa là ở đây, chúng ta thực sự có vòng tròn đơn vị. Và bây giờ, bạn nên tưởng tượng rằng bạn có cái này khi bạn cắt nó bằng một mặt phẳng thẳng đứng, có dạng parabol lồi. Và, nó thực sự là một bề mặt xoay vòng. Bạn có thể xoay nó quanh trục z, đúng không? Bây giờ, nếu bạn nhìn kĩ phương trình đó, bạn thực sự thấy điều đó, vâng, chúng ta biết rằng nó phải giống như thế. Nhưng, thấy không, vì vậy, đây là cách hữu ích để đoán dạng đồ thị. Tất nhiên, cách khác là sử dụng máy tính.

And then, you know, you will get that kind of formula. OK, well, I can leave it on if you want. No, because I plotted a different function that I will show you later. So, it goes this way. I mean, if you want, it's really going downward. Yes, I agree that the sheet is upside down. That's because I plotted something else. OK, so, in fact, so I plotted in my computer was actually x^2 y^2 that looks like that. See, it's the same with a parabola going upwards. If you want to see more examples, I have various examples to show, well, here's the graph, y^2-x^2. See, so that one is kind of interesting.
Và do đó, bạn biết, bạn sẽ nhận được đồ thị dạng này. Vâng, vâng, tôi có thể để lại nó nếu bạn muốn. Không, vì tôi đã vẽ một hàm khác mà tôi sẽ chỉ cho bạn sau. Vì vậy, nó đi theo hướng này. Ý tôi là, nếu bạn muốn, nó thực sự đi xuống. Vâng, tôi đồng ý rằng tờ giấy bị lộn ngược. Đó là bởi vì tôi vẽ cái gì khác. Vâng, vì vậy, trên thực tế, tôi đã vẽ trong máy tính của tôi thực sự x ^ 2 y ^ 2 có dạng như thế. Xem nào, nó có dạng parabol lõm. Nếu bạn muốn xét thêm ví dụ, tôi có nhiều ví dụ khác nhau để chứng tỏ, vâng, đây là đồ thị, y ^ 2-x ^ 2. Xem này, vì vậy cái đó phần nào thú vị.

It looks like a saddle. If you look at it in the y, z plane, then it's a parabola going up, z = y^2. And, that's what we see to the left and to the right. But, if you put it in the x, z plane, then that's a parabola going downwards, z = - x^2. So, we have a parabola going downwards in one direction, upwards in the other one. And together, they form this surface. And of course, you can plot much more complicated functions. So, this one, well, if you can read very small things, you can see the formula. It doesn't matter, just to show you that you can put a formula into a computer: it will show you a picture.
Nó giống như một yên ngựa. Nếu bạn xét nó trong mặt phẳng y, z, thì nó là một parabol lõm, z = y ^ 2. Và, đó là những gì chúng ta thấy bên trái và bên phải. Nhưng, nếu bạn đặt nó trong mặt phẳng x, z, thì đó là một parabol lồi, z = - x ^ 2. Vì vậy, chúng ta có một parabol lồi theo một hướng, lõm theo hướng còn lại. Và chúng cùng nhau tạo thành bề mặt này. Và dĩ nhiên, bạn có thể vẽ đồ thị các hàm phức tạp hơn nhiều. Vì vậy, cái này, vâng, nếu bạn có thể đọc những thứ rất nhỏ, bạn có thể thấy công thức. Nó không quan trọng, chỉ là để cho bạn thấy rằng bạn có thể đặt một công thức vào máy tính: nó sẽ cho bạn một đồ thị.

OK, so that's pretty good. I mean, you can see that it can get a bit cluttered because maybe those features that are hidden behind, or maybe we have trouble seeing if we don't have a computer, that looks very readable. But, this is kind of hard to visualize sometimes. So, there is another way to plot the functions of two variables. And, let's call it the contour plot. So, the contour plot is a very elegant solution to the problem that it's difficult to draw to space pictures on a sheet of paper or on a blackboard. So, instead, let's try to represent the function of two variables by just the map, you know, the same way that when you walk around, you have actually geographical maps that fit on a piece of paper that tell you about what the real world looks like. So, what contour plot looks something like this?

Vâng, vì vậy điều đó khá tốt. Ý tôi là, bạn có thể thấy rằng nó có thể trở nên lộn xộn bởi vì có thể những tính chất này bị ẩn phía sau, hoặc có thể chúng ta nhìn hơi khó nếu chúng ta không có một máy tính, cái đó có vẻ rất dễ đọc. Tuy nhiên, điều này đôi khi khó hình dung. Vì vậy, có một cách khác để vẽ đồ thị hàm hai biến. Và, chúng ta hãy gọi nó là đồ thị contour. Vì vậy, đồ thị contour là một phương pháp tinh tế cho vấn đề khó vẽ các ảnh không gian trên một tờ giấy hoặc trên bảng đen. Vì vậy, thay vào đó, hãy cố gắng biểu diễn hàm hai biến bằng bản đồ, như bạn đã biết, giống như khi bạn đi dạo, bạn có bản đồ địa lý vẽ trên mảnh giấy cho bạn biết thế giới thực như thế nào. Vậy, đồ thị contour có dạng như thế nào?

So, it's an x, y plot. And, that, you have a bunch of curves. And, what the curves represent are the elevations on the graph. So, for example, this curve might correspond to all the points where f(x, y) = 1. And, that curve might be all the points where f=2 and f=3 and so on, OK? So, when you see you this kind of plot, you're supposed to think that the graph of the function sits somewhere in space above that. It's like a map telling you how high things are. And, what you would want to do with the function, really, is be able to tell quickly what's the value at a given point? Well, let's say I want to look at that point. I know that f is somewhere between 1 and 2.

Vì vậy, nó là một đồ thị x, y. Và, ở đó, bạn có một loạt các đường cong. Và, các đường cong này biểu diễn các hình chiếu thẳng đứng trên đồ thị. Vì vậy, ví dụ, đường cong này có thể tương ứng với tất cả các điểm f (x, y) = 1. Và, đường cong đó có thể là tất cả các điểm ở đó f = 2 và f = 3 và v.v.., đúng không? Vì vậy, khi bạn thấy loại đồ thị này, bạn sẽ suy ra được đồ thị của hàm nằm ở đâu đó trong không gian trên đó. Nó giống như bản vẽ cho bạn biết các thứ cao bao nhiêu. Và, những gì bạn muốn thực hiện với hàm, thực sự, là có thể cho biết một cách nhanh chóng giá trị tại một điểm cho trước? Vâng, giả sử tôi muốn xét điểm đó. Tôi biết rằng f ở đâu đó giữa 1 và 2.

Actually, it's much faster to read than the graph. On the graph I might have to look carefully, and then measure things, and so on. Here, I can just raise the value of f by comparing with the nearby lines. OK, so let me try to make that more precise. So, it shows all the points -- -- where f(x, y) equals some fixed values, some fixed constants. And, these constants typically are chosen at regular intervals. For example, here I chose one, two, three, and they could continue with zero minus one, and so on. So, one way to think about it, how does this relate to the graph?

Trên thực tế, nó nhanh hơn nhiều để đọc so với đồ thị. Trên đồ thị có thể tôi phải xem xét cẩn thận, và rồi đo các thứ, v.v… Ở đây, tôi nhận được giá trị của f đơn giản bằng cách so sánh với các đường thẳng bên cạnh. Vâng, vì vậy hãy để tôi cố gắng làm điều đó chính xác hơn. Vì vậy, nó cho thấy tất cả các điểm - - ở đó f (x, y) bằng các giá cố định, một hằng số xác định nào đó. Và, các hằng số này thường được chọn tại những khoảng cách đều nhau. Ví dụ, ở đây tôi chọn một, hai, ba, và chúng có thể tiếp tục với không trừ một, và v.v... Vì vậy, một cách để nghĩ về nó, cái này liên quan đến đồ thị như thế nào?

Well, that's the same thing as cutting, I mean, we slice the graph by horizontal planes. So, horizontal planes have equations of a form z equals some constant, z equals zero, z equals one, z equals two, and so on. So, maybe the graph of my function will be some sort of plot out there. And, if I slice it by the plane z equals one, then I will get the level curve, which is the point where f(x, y) = 1, and so, that's called a level curve of f.

Vâng, điều đó giống như cắt, ý tôi là, chúng ta cắt đồ thị bằng các mặt phẳng ngang. Vì vậy, các mặt phẳng ngang có phương trình dạng z bằng hằng số nào đó, z bằng không, z bằng một, z bằng hai, và v.v…. Vì vậy, có thể đồ thị hàm của tôi sẽ có dạng nào đó ngoài đó. Và, nếu tôi cắt nó bằng mặt phẳng z bằng một, thì tôi sẽ nhận được đường đồng mức, là điểm mà tại đó f (x, y) = 1, và vì vậy, đó được gọi là đường đồng mức của f.

OK, and so we repeat the process with maybe z equals two, and we get another level curve, and so on. And, then we squish all of them up, and that's how we get the contour plot. OK, so each of these lines, imagine that this is like some mountain or something that you are hiking on. Each of these lines tells you how you could move to stay at a constant height if you want to get to the other side of the mountain but without ever going up or down.

Vâng, và vì vậy chúng ta lặp lại quá trình với z bằng hai, và chúng ta nhận được đường đồng mức khác, và v.v... Và, sau đó chúng ta bốc tất cả chúng lên, và đó là cách chúng ta nhận được đồ thị contour. Vâng, do đó, mỗi đường thẳng này, hình dung rằng cái này giống như núi hay cái gì đó mà bạn đang đi bộ trên nó. Mỗi đường thẳng này cho bạn biết cách làm sao để có thể di chuyển để ở tại một chiều cao không đổi nếu bạn muốn đến phía bên kia núi mà không bao giờ đi lên hoặc xuống.

You would just walk along that path, and it will get you there without effort. So, in fact, if you have been talking about hiking on mountains, well, that's exactly what a topographical map is about. So, I need to zoom a bit. So, a topographic map, this one from the US geological survey shows you, basically, all the level curves of an altitude function on a piece of land. So, you know that if you walk right along these curves, you will stay along the same height. And you know that if you walk towards, these don't have numbers.

Bạn sẽ chỉ đi bộ dọc theo con đường đó, và nó sẽ giúp bạn đến đó mà không cần nỗ lực. Vì vậy, quả thực, nếu bạn đang nói về việc đi bộ trên núi, vâng, đó chính xác là những gì bản đồ địa hình đang nói. Vì vậy, tôi cần phải phóng to một chút. Vì vậy, bản đồ địa hình, cái này từ khảo sát địa chất Mỹ cho thấy, về cơ bản, tất cả các đường đồng mức của một hàm cao độ trên một mảnh đất. Vì vậy, bạn biết rằng nếu bạn đi bộ dọc theo những đường cong này, bạn sẽ ở tại cùng một chiều cao. Và bạn biết rằng nếu bạn đi bộ hướng tới, những cái này không có các con số.

Let me find a place with numbers. Here, there is a 500 in the middle. So, you know that if you walk on the line that says 500, you stay always at 500 meters in elevation. If you walk towards the mountain that I think is below it, then you will go

up, and so on. So, you can see, for example, here there's a peak, and here there is a valley with the river in it, and the altitudes go down, and then back up again on the other side.
Hãy để tôi tìm một nơi với những con số. Ở đây, có 500 ở giữa. Vì vậy, bạn biết rằng nếu bạn đi bộ trên đường giả sử là 500, bạn luôn ở tại độ cao 500 mét. Nếu bạn đi bộ về phía ngọn núi mà tôi nghĩ là dưới nó, thì bạn sẽ đi lên, và v.v…. Vì vậy, bạn có thể thấy, ví dụ, ở đây có một đỉnh, và ở đây có một thung lũng với con sông ở đó, v à các cao độ đi xuống, và sau đó trở lên lại ở phía bên kia.

OK, so that's an example of a contour plot of a function. Of course, we don't have a formula for that function, but we have a contour plot, and that's what we need actually to understand what's going on there. OK, any questions? No? OK, so another example of contour plots, well, you've probably seen various versions of these temperature maps. So, that's supposed to be how warm it is right now. So, this one is color-coded. Instead of having curves, it has all these colors. But, the effect is the same. If you look at the separations between consecutive colors, these are the level curves of a function that tells you the temperature at a given point. OK, so these are examples of contour plots in real life.
Vâng, vì vậy đó là một ví dụ về đồ thị contour của một hàm. Tất nhiên, chúng ta không có công thức cho hàm đó, nhưng chúng ta có một đồ thị contour, và đó là những gì chúng ta thực sự cần hiểu những gì đang xảy ra ở đó. Vâng, bất kỳ câu hỏi nào không? Không có? Vâng, do đó, một ví dụ khác về đồ thị contour, vâng, có thể bạn đã nhìn thấy các phiên bản khác nhau của các bản đồ nhiệt độ. V ì vậy, cái đó được giữ sử là cách để nó được làm ấm ngay bây giờ. Vì vậy, cái này được mã hoá màu. Thay vì có những đường cong, nó có tất cả các màu sắc. Tuy nhiên, hiệu ứng giống nhau. Nếu bạn nhìn vào khoảng cách giữa các màu liên tiếp, đây là những đường đồng mức của một hàm cho bạn biết nhiệt độ tại một điểm cho tr ước. Vâng, vì vậy đây là những ví dụ về các đồ thị contour trong cuộc sống thực.

OK, no questions? No? OK, so basically, one of the goals that one should try to achieve at this point is becoming familiar with the contour plot, the graph, and how to view and deal with functions. [APPLAUSE] OK, so -- Let's do an example. Well, let's do a couple of examples. So, let's start with f(x,y) = - y. And, I'm going to take the same two examples as there to start with so that we see the relation between the graph and the contour plots.
OK, không có câu hỏi nào à? Không có? Vâng, do đó, về cơ bản, một trong những mục ti êu mà chúng ta nên cố gắng đạt được vào thời điểm này là làm quen với các đồ thị contour, biểu đồ, và làm thế nào để hiển thị và khảo sát các hàm. Vâng, như vậy - Hãy để tôi làm một ví dụ. Vâng, chúng ta hãy làm m ột vài ví dụ. Vì vậy, chúng ta hãy bắt đầu với f (x, y) = - y. Và, tôi sẽ lấy hai ví dụ tương tự như ở đó để bắt đầu để chúng ta hiểu được mối quan hệ giữa đồ thị và các đồ thị contour.

So, let's try to plot it. So, we are asked for the level curve, f equals 0 for this one? Well, f is zero when y is zero. So, that's the x axis. OK, so that's the level, zero. Where's the level one? Well, f is one when negative y is one. That means when y is negative one. So, you go to minus one, and that will be where my level one is, and

so on. f is two when y is negative two. F is negative one when y is one, and so on. Is that convincing? Do you see how we got that? OK, let me do it again. I don't see anybody nodding, so that's kind of bad news. So, if I want to know, where is the level curve, say, one, I try to set f equals to one.
Vì vậy, chúng ta hãy thử vẽ đồ thị nó. Vì vậy, chúng ta được hỏi về các đường đồng mức, f bằng 0 cho cái này? Vâng, f bằng không khi y bằng không. Vì vậy, đó là trục x. Vâng, do đó, đó là mức, không. Mức một ở đâu? Vâng, f bằng một khi trừ y bằng một. Điều đó có nghĩa là khi y bằng trừ một. Vì vậy, bạn đến trừ một, và đó sẽ là mức một của tôi, và v.v… f bằng hai khi y bằng trừ hai. f bằng trừ một khi y bằng một, và v.v…. Điều đó có thuyết phục không? Bạn có thấy chúng ta nhận được điều đó như thế nào không? Vâng, hãy để tôi làm điều đó một lần nữa. Tôi không thấy ai gật đầu, vì vậy đó là thông điệp xấu. Vì vậy, nếu tôi muốn biết, đường đồng mức ở đâu, giả sử, một, tôi cố gắng thiết lập f bằng một.

Let's do this one. f equals one means that negative y is one means that y is minus one, and y equals minus one is this horizontal line on this chart. OK, and same with the others. So, you can see on the map that the value of a function doesn't depend on x. If you move parallel to the x axis, nothing happens. If you move in the y direction, it decreases at a constant rate. That's why the contours are evenly spaced. How spaced out they are tells you, actually, how steep things are. So, that corresponds exactly to that picture, except that here we draw x coming to the front, and y to the right. So, you have to rotate the map by 90° to get to that. It's an unfortunate consequence of the usual way of plotting things in space.
Hãy làm cái này. f bằng một có nghĩa là trừ y bằng một có nghĩa là y bằng trừ một, và y bằng trừ một là đường nằm ngang trên biểu đồ này. Vâng, và tương tự cho những cái khác. Vì vậy, bạn có thể thấy trên bản đồ rằng giá trị của hàm không phụ thuộc vào x. Nếu bạn di chuyển song song với trục x, không có gì xảy ra. Nếu bạn di chuyển theo hướng y, nó giảm với một tốc độ không đổi. Đó là lý do tại sao các đường contour cách đều nhau. Qua sự cách đều nhau đó chúng cho bạn biết các thứ dốc như thế nào. Vì vậy, điều đó tương ứng chính xác với hình vẽ đó, ngoại trừ ở đây chúng ta vẽ x hướng đến phía trước, và y hướng sang bên phải. Vì vậy, bạn cần phải xoay bản đồ 90 ° để đến đó. Đây là một hệ quả không may của cách vẽ đồ thị thông thường trong không gian.

OK, so these horizontal lines here correspond actually to horizontal lines here. OK, second example. Let's do 1-x^2-y^2. OK, or maybe I will write it as 1 - (x^2 y^2). It's really the same thing. So, x, y, let's see, where is this function equal to zero? Well, we said f is zero in the unit circle. OK, so, the zero level, well, let's say that this is my unit. That's where it's at zero. What about f equals one? Well, that's when x^2 y^2 = 0. Well, that's only going to be here.
Vâng, do đó, những đường nằm ngang ở đây thực sự tương ứng với đường nằm ngang ở đây. Vâng, ví dụ thứ hai. Hãy xét 1-x ^ 2-y ^ 2. Vâng, hoặc có thể tôi sẽ viết nó là 1 - (x ^ 2 y ^ 2). Thực sự, chúng giống nhau. Vì vậy, x, y, xem nào, hàm này bằng không ở đâu? Vâng, chúng ta nói f bằng không trong vòng tròn đơn vị. Vâng, vì vậy, mức không, vâng, giả sử rằng đây là đơn vị của tôi. Đó là nơi nó bằng không. Còn về f bằng một thì sao? Vâng, đó là khi x ^ 2y ^ 2 = 0. Vâng, điều đó chỉ có được ở đây.

So, that's just a single point. What about f equals minus one? That's when x^2 y^2 =2. That's a circle of radius square root of two, which is about 1.4. So, it's somewhere here. Then, minus two, similarly, will be x^2 y^2 = 3. Square root of three is about 1.7. And then, minus three will be of radius two, and so on. So, what I want to show here is that they are getting closer and closer apart, OK? So, first it's concentric circles that tells us that we have a shape that's a solid of the graph is going to be a surface of revolution.
Vì vậy, đó chỉ là một điểm duy nhất. Còn về f bằng trừ một thì sao? Đó là khi x ^ 2 y ^ 2= 2. Đó là một vòng tròn bán kính bằng căn bậc hai của hai, bằng khoảng 1,4. Vì vậy, nó ở

một nơi nào đó ở đây. Rồi, trừ hai, tương tự, sẽ là x ^ 2 y ^ 2 = 3. Căn bậc hai của ba cỡ 1,7. Và rồi, trừ ba sẽ có bán kính hai, và v.v.. Vì vậy, những gì tôi muốn chỉ ra ở đây là chúng đang ngày càng cách nhau gần hơn, đúng không? Vì vậy, đầu tiên nó là các vòng tròn đồng tâm cho chúng ta biết rằng chúng ta có hình dạng đó là đường liền nét của đồ thị sẽ là một mặt xoay.

Things don't change if I rotate. And second, the level curves are getting closer and closer to each other. That means it's getting steeper and steeper because I have to travel a shorter distance if I want my altitude to change by one. OK, so, this top here is kind of flat. And then it gets steeper and steeper. And, that's what we observe on that picture there. OK, so just to show you a few more, where did I put my, so, for x^2 y^2, the contour plot looks like this. Maybe actually I'll make it. OK, so it looks exactly the same as this one. But, the difference is if you can see the numbers which are not there, so you can see them, then you would know that instead of decreasing as we move out, this one is increasing as we go out.

Các thứ không thay đổi nếu tôi xoay. Và thứ hai, các đường đồng mức ngày càng gần nhau hơn. Điều đó có nghĩa là nó ngày càng dốc hơn vì tôi phải đi một khoảng cách ngắn hơn nếu tôi muốn độ cao của tôi thay đổi một. Vâng, vì vậy, ở đây đỉnh này phần nào phẳng. Và sau đó nó ngày càng dốc hơn. Và, đó là những gì chúng ta quan sát trên hình vẽ đó ở đó. Vâng, như vậy chỉ để cho bạn thấy một vài chi tiết, ở đó tôi đặt, vì vậy, đối với x^2 y^2, đồ thị contour có dạng như thế này. Có lẽ thực sự tôi sẽ tạo ra nó. Vâng, vì vậy nó trông giống hệt như cái này. Tuy nhiên, sự khác biệt là nếu bạn thấy những con số không ở đó, vì vậy bạn có thể nhìn thấy chúng, thì bạn biết rằng thay vì giảm khi chúng ta di chuyển ra ngoài, cái này sẽ tăng khi chúng ta đi ra ngoài.

OK, so that's where we use, actually, the labels on the level curves that tell us whether things are going up or down. But, the contour plots look exactly the same. For the next one I had, I think, was y^2-x^2. So, the contour plot, well, let me actually zoom out. So, the contour plot looks like that. So, the level curve corresponding to zero is actually two diagonal lines. And, if you look on the plot, say that you started at the saddle point in the middle and you try to stay at the same level. So, it looks like a mountain pass, right? Well, there's actually four directions from that point that you can go staying at the same height. And actually, on the map, they look exactly like this, too, these crossing lines. OK, so, these are things that go on the side of the two mountains that are to the left and right, and stay at the same height as the mountain pass.

Vâng, vì vậy đó là nơi chúng ta sử dụng, trên thực tế, kí hiệu trên các đường đồng mức cho chúng ta biết các thứ đang đi lên hay xuống. Tuy nhiên, các đồ thị contour trông giống hệt nhau. Cái tiếp theo mà chúng ta sẽ xét, tôi nghĩ là, y ^ 2-x ^ 2. Vì vậy, đồ thị contour, vâng, hãy để tôi thu nhỏ lại. Vì vậy, đồ thị contour trông như thế. Vì vậy, đường đồng mức tương ứng với không thực sự là hai đường chéo. Và, nếu bạn nhìn vào đồ thị, giả sử rằng bạn bắt đầu tại điểm yên ngựa ở giữa và bạn thử ở lại cùng mức. Vì vậy, nó trông giống như một đèo, phải không? Vâng, thực sự có bốn hướng từ điểm đó mà bạn có thể ở tại cùng một chiều cao. Và trên thực tế, trên bản đồ, chúng cũng trông giống như thế này, các đường chéo này. Vâng, vì vậy, đây là các thứ đi về phía của hai dãy núi bên trái và bên phải, và ở tại cùng một độ cao như đèo.

On the other hand, if you go along the y direction, to the left or to the right, then you go towards positive values. And, if you go along the x axis, then you get towards negative values. OK, the equation for, the function was y^2-x^2. So, you can try to plot them by hand and confirmed that it does look like that. But, I trust my computer. And, finally, this one, well, so the contour plot looks a bit complicated. But, you can see two things. In the middle, you can see these two origins with these concentric circles which are not really circles, but, you know, these closed curves that are concentric.
Mặt khác, nếu bạn đi theo hướng y, về bên trái hoặc bên phải, thì bạn hướng về các giá trị dương. Và, nếu bạn đi dọc theo trục x, thì bạn hướng tới các giá trị âm. Vâng, phương trình của hàm là y ^ 2-x ^ 2. Vì vậy, bạn có thể thử vẽ đồ thị chúng bằng tay và xác nhận rằng nó trông như thế. Nhưng, tôi tin vào máy tính của tôi. Và, cuối cùng, điều này, vâng, vì vậy đồ thị contour có vẻ hơi phức tạp. Tuy nhiên, bạn có thể thấy hai điều. Ở giữa, bạn có thể thấy hai gốc tọa độ với những vòng tròn đồng tâm này thực sự không tròn, nhưng, bạn biết, những đường cong khép kín này đồng tâm.

And, they correspond to the two mountains. And then, at some point in the middle, we have a mountain pass. And there, we see the two crossing lines again, like, on the plot of y^2-x^2. And so, at this saddle point here, if we go north or south, then we go down on either side to the Valley. And, if we go east or west, then we go towards the mountains. We'll go up. OK, does that make sense a little bit? OK, so, reading plots is not easy, but hopefully we'll get used to it very soon.
Và, chúng tương ứng với hai dãy núi. Và rồi, tại điểm nào đó ở giữa, chúng ta có một đèo. Và ở đó, chúng ta lại thấy hai đường chéo, giống như, trên đồ thị y ^ 2-x ^ 2. Và như vậy, tại điểm yên ngựa này ở đây, nếu chúng ta đi về phía bắc hay phía nam, thì chúng ta đi xuống ở hai bên đến Thung lũng. Và, nếu chúng ta đi về phía đông hoặc phía tây, thì chúng ta đi về phía núi. Chúng ta sẽ đi lên. Vâng, điều đó có một chút ý nghĩa nào không? Vâng, vì vậy, đọc các đồ thị không phải dễ dàng, nhưng hy vọng chúng ta sẽ sớm quen với nó.

OK, so actually let's say, well, OK, so, I want to point out one thing. The contour plot tells us, actually, what happens when we move, when we change x and y. So, if I change the value of x and y, that means I'm moving east-west or north-south on the map. And then, I can ask myself, is the value of the function increase or decrease in each of these situations? Well, that's the kind of thing that the contour plot can tell me very quickly.
Vâng, do đó, thực sự chúng ta hãy nói, vâng, vì vậy, tôi muốn chỉ ra một điều. Thực sự, các đồ thị contour cho chúng ta biết những gì xảy ra khi chúng ta di chuyển, khi chúng ta thay đổi x và y. Vì vậy, nếu tôi thay đổi giá trị của x và y, điều đó có nghĩa tôi đang di chuyển theo hướng đông-tây hoặc nam-bắc trên bản đồ. Và sau đó, tôi có thể tự hỏi, giá trị của hàm tăng hay giảm trong từng tình huống này? Vâng, đó là những thứ mà đồ thị contour sẽ cho chúng ta biết rất nhanh.

So -- OK, so say, for example, that I have a piece of contour plot. That looks, you know, like that. Maybe this is f equals one, and this is f equals two. And here, this is f equals zero. And, let's say that I start at the point, say, at this point. OK, so here I have (x0, y0). And, the question I might ask myself is if I change x or y, how does f change? Well, the contour plot tells me that if x increases, and I keep y constant, then what happens to f(x, y)? Well, it will increase because if I move to the right, then I go from one to a value bigger than one.
Vì vậy, - vâng, giả sử, ví dụ, rằng tôi có một mảnh đồ thị contour. Nó có dạng, bạn đã biết, như thế này. Có lẽ đây là f bằng một, và đây là f bằng hai. Và ở đây, đây là f bằng không. Và, giả sử rằng tôi bắt đầu tại điểm, giải sử, tại điểm này. Vâng, vì vậy ở đây tôi có (x0, Y0). Và, câu hỏi mà tôi có thể tự hỏi là nếu tôi thay đổi x hoặc y, f sẽ thay đổi như thế nào? Vâng, đồ thị contour sẽ cho chúng ta biết rằng nếu x tăng, và tôi giữ cho

y không đổi, thì điều gì xảy ra với f (x, y)? Vâng, nó sẽ tăng bởi vì nếu tôi chuyển sang bên phải, thì tôi đi từ một đến giá trị lớn hơn một.

I don't know exactly how much, but I know that somewhere between one and two, it's more than one. If x decreases, then f decreases. And, similarly, I can tell that if y increases, then f, well, it looks like if I increase y, then f will also increase. And, if y decreases, then f decreases. And, that's the kind of qualitative analysis that we can do easily from the contour plot. But, maybe we'd like to actually be more precise in that, and tell how fast f changes if I change x or y. OK, so to find the rate of change, that's exactly where we use derivatives. So –
Tôi không biết chính xác bao nhiêu, nhưng tôi biết rằng ở đâu đó giữa một và hai, nó lớn hơn một. Nếu x giảm, thì f giảm. Và, tương tự như vậy, tôi có thể nói rằng nếu y tăng, thì f, vâng, có vẻ như nếu tôi tăng y, thì f cũng sẽ tăng. Và, nếu y giảm, thì f giảm. Và, đó là loại phân tích định tính mà chúng ta có thể làm dễ dàng từ đồ thị contour. Nhưng, có lẽ chúng ta thực sự muốn được chính xác hơn ở đó, và biết f thay đổi nhanh như thế nào nếu tôi thay đổi x hoặc y. Vâng, vậy để tìm tốc độ thay đổi, chúng ta phải dùng đạo hàm. Vì vậy -

So, we are going to have to deal with partial derivatives. So, I will explain to you soon why partial. So, let me just remind you first, if you have a function of one variable, then so let's say f of x, then you have a derivative, f prime of x is also called df/dx. And, it's defined as a limit when delta x goes to zero of the change in f. Sorry, it's not going to fit. I have to go to the next line. It's going to be the limit as delta x goes to zero of the rate of change. So, the change in f between x and x plus delta x divided by delta x.
Vì vậy, chúng ta sẽ khảo sát đạo hàm riêng. Vì vậy, tôi sẽ giải thích cho bạn ngay tại sao riêng. Vì vậy, tôi sẽ nhắc nhở bạn trước hết, nếu bạn có hàm một biến, thì giả sử rằng f(x), thì bạn có đạo hàm, f phẩy x cũng được gọi là df / dx. Và, nó được định nghĩa như giới hạn khi delta x tiến tới không của sự thay đổi trong f. Xin lỗi, nó không vừa. Tôi sẽ sang dòng kế tiếp. Nó sẽ là giới hạn khi delta x tiến tới không của tốc độ thay đổi. Vì vậy, sự thay đổi của f trong khoảng x và x cộng delta x chia cho delta x.

Sometimes you write delta f for the change in f divided by delta x. And then, you take the limit of this rate of increase as delta x goes to zero. Now, of course, if you have a formula for f, then you know, at least you should know, I suspect most of you know how to actually take the derivative of a function from its formula. So -- Now, how do we do that? Sorry, and I should also tell you what this means on the graph. So, if I plot the graph of a function, and to have my point, x, and here I have f of x, how do I see the derivative? Well, I look at the tangent line to the graph, and the slope of the tangent line is f prime of x, OK?

Đôi khi bạn viết delta f chỉ sự thay đổi của f chia cho delta x. Và sau đó, bạn lấy giới hạn của tốc độ tăng này khi delta x tiến đến không. Bây giờ, tất nhiên, nếu bạn có công thức cho f, thì như bạn biết, ít nhất bạn sẽ biết, tôi nghĩ đa số các bạn biết cách lấy đạo hàm của hàm từ biểu thức của nó. Vì vậy - Bây giờ, chúng ta thực hiện điều đó như thế nào? Xin lỗi, và tôi cũng sẽ cho bạn biết điều này có nghĩa là gì trên đồ thị. Vì vậy, nếu tôi vẽ đồ thị của một hàm, và có điểm của tôi, x, và ở đây tôi có f (x),

làm thế nào để tôi thấy đạo hàm? Vâng, tôi xét đường tiếp tuyến của đồ thị, và hệ số góc của tiếp tuyến là f phẩy x, đúng không?

And, not every function has a derivative. You have functions that are not regular enough to actually have a derivative. So, in this class, we are not going to actually worry too much about differentiability. But, it's good, at least, to be aware that you can't always take the derivative. So, yes, and what else do I want to remind you of? Well, they also have an approximation formula -- -- which says that, you know, if we have the value of f at some point, x0, and that we want to find the value at a nearby point, x close to x0, then our best guess is that it's f of x0 plus the derivative f prime at x0 times delta x, or if you want, x minus x0, OK?

Và, không phải mọi hàm đều có đạo hàm. Có những hàm không đủ đều đặn để có đạo hàm. Vì vậy, trong môn này, chúng ta sẽ không thực sự lo lắng quá nhiều về tính khả vi. Tuy nhiên, rất tốt, ít nhất, để nhận thức rằng không phải luôn luôn lúc nào cũng có thể lấy đạo hàm. Vì vậy, vâng, và tôi còn muốn nhắc bạn điều gì nữa? Vâng, chúng cũng có một công thức gần đúng - - bạn đã biết, nó phát biểu rằng, nếu chúng ta có giá trị của f tại điểm nào đó, x0, và chúng ta muốn tìm giá trị ở điểm lân cận, x gần bằng x0, thì suy đoán tốt nhất của chúng ta là nó bằng f của x0 cộng với đạo hàm của f phẩy tại x0 nhân delta x, hoặc nếu bạn muốn, x trừ x0, đúng không?

Is this kind of familiar to you? Yeah, I mean, maybe with different notations. Maybe you called that delta x or something. Maybe you called that x0 plus h or something. But, it's the usual approximation formula using the derivative. If you put more terms, then you get the dreaded Taylor approximation that I know you guys don't like. So, the question is how do we do the same for a function of two variables, f(x, y)? So, the difficulty there is we can change x, or we can change y, or we can change both. And, presumably, the manner in which f changes will be different depending on whether we change x or y. So, that's why we have several different notions of derivative.

Điều này có quen thuộc với bạn không? Vâng, ý tôi là, có thể với ký hiệu khác. Có lẽ bạn gọi là delta x hoặc cái gì đó. Có lẽ bạn gọi cái đó là x0 cộng h hoặc cái gì đó. Nhưng, đó là công thức gần đúng bình thường dùng đạo hàm. Nếu bạn đặt nhiều số hạng hơn, thì bạn sẽ có được xấp xỉ Taylor đáng sợ mà tôi biết các bạn không thích. Vì vậy, vấn đề đặt ra là làm thế nào chúng ta làm tương tự cho hàm hai biến, f (x, y)? Vì vậy, khó khăn ở đó là chúng ta có thể thay đổi x, hoặc chúng ta có thể thay đổi y, hoặc chúng ta có thể thay đổi cả hai. Và, có lẽ, theo kiểu mà trong đó sự thay đổi của f sẽ khác nhau tuỳ thuộc vào việc chúng ta thay đổi x hoặc y. Vì vậy, đó là lý do tại sao chúng ta có một số kí hiệu đạo hàm khác nhau.

So, OK, we have a notation. OK, so this is a curly d, and it is not a straight d, and it is not a delta. It's a d that kind of curves backwards like that. And, this symbol is partial. OK, so it's a special notation for partial derivatives. And, essentially what it means is we are going to do a derivative where we care about only one variable at a time. That's why it's partial. It's missing the other variables. So, a function of several variables doesn't have the usual derivative. It has only partial derivatives for each variable.

Vì vậy, vâng, chúng ta có một ký hiệu. Vâng, do đó, đây là một d xoăn, chứ không phải d thẳng, và nó không phải là delta. Đó là d cong ngược lại giống như thế này. Và, biểu tượng này là riêng phần. Vâng, vì vậy nó là ký hiệu đặc biệt cho đạo hàm riêng. Và, về cơ bản nó có nghĩa là chúng ta sẽ lấy đạo hàm ở đó chúng ta chỉ quan tâm một biến một lần. Đó là lý do tại sao nó là riêng. Nó thiếu các biến khác. Vì vậy, hàm nhiều biến không có đạo hàm bình thường. Nó chỉ có đạo hàm riêng cho mỗi biến.

So, the partial derivative, the partial f partial x at (x0, y0) is defined to be the limit when I take a small change in x, delta x, of the change in f -- -- divided by delta x. OK, so here I'm actually not changing y at all. I'm just changing x and looking at the rate of change with respect to x. And, I have the same with respect to y. Partial f partial y is the limit, so I should say, at a point x0 y0 is the limit as delta y turns to zero. So, this time I keep x the same, but I change y.
Vì vậy, đạo hàm riêng, đạo hàm riêng của f theo x tại (x0, y0) được định nghĩa là giới hạn khi tôi lấy một thay đổi nhỏ trong x, delta x, của sự thay đổi trong f - - chia cho delta x. Vâng, vì vậy ở đây tôi thực sự không thay đổi y gì cả. Tôi chỉ thay đổi x và xét tốc độ thay đổi đối với x. Và, tôi có sự giống nhau đối với y. Đạo hàm riêng của f theo y là giới hạn, vì vậy tôi nên nói, tại một điểm x0 y0 là giới hạn khi delta y tiến tới không. Vì vậy, lần này tôi giữ x như vậy, nhưng tôi thay đổi y.

OK, so that's the definition of a partial derivative. And, we say that a function is differentiable if these things exist. OK, so most of the functions we'll see are differentiable. And, we'll actually learn how to compute their partial derivatives without having to do this because we'll just have the usual methods for computing derivatives. So, in fact, I claim you already know how to take partial derivatives. So, let's see what it means geometrically.
Vâng, do đó, đó là định nghĩa đạo hàm riêng. Và, chúng ta nói rằng một hàm khả vi nếu những cái này tồn tại. Vâng, do đó, hầu hết các hàm mà chúng ta sẽ gặp là khả vi. Và, chúng ta sẽ thực sự tìm hiểu cách tính đạo hàm riêng của chúng mà không cần phải làm điều này bởi vì chúng ta sẽ chỉ có các phương pháp thông thường để tính đạo hàm. Vì vậy, trên thực tế, tôi khẳng định rằng bạn đã biết cách lấy đạo hàm riêng. Vì vậy, quả thực, chúng ta hãy xem ý nghĩa hình học của nó là gì.

So, geometrically, my function can be represented by this graph, and I fix some point, (x0, y0). And then, I'm going to ask myself what happens if I change the value of, well, x, keeping y constant. So, if I keep y constant and change x, it means that I'm moving forwards or backwards parallel to the x axis. So, that determines for me the vertical plane parallel to the x, z plane when I fix y equals constant.
Vì vậy, về mặt hình học, hàm của tôi có thể được biểu diễn bởi đồ thị này, và tôi cố định điểm nào đó, (x0, y0). Và sau đó, tôi sẽ tự hỏi điều gì sẽ xảy ra nếu tôi thay đổi giá trị của, vâng, x, giữ y không đổi. Vâng, nếu tôi giữ y không đổi và thay đổi x, có nghĩa là tôi sẽ di chuyển tới hay lùi song song với trục x. Vì vậy, điều đó xác định cho tôi mặt phẳng thẳng đứng song song với với mặt phẳng x, z khi tôi cố định y bằng hằng số.

And now, if I slice the graph by that, I will get some curve that goes, it's a slice of the graph of f. And now, what I want to find is how f depends on x if I keep y constant. That means it's the rate of change if I move along this curve. So, in fact, if

I look at the slope of this thing. So, if I draw the tangent line to this slice, then the slope will be partial f of partial x. I think I have a better picture of that somewhere. Yes, here it is. OK, that's the same picture, just with different colors. So, I take the graph. I slice it by a vertical plane. I get the curve, and now I take the slope of that curve, and that gives me the partial derivative.

Và bây giờ, nếu tôi cắt đồ thị bằng cách đó, tôi sẽ nhận được đường cong nào đó đi qua, đó là một lát của đồ thị của f. Và bây giờ, những gì tôi muốn tìm là f phụ thuộc vào x như thế nào nếu tôi giữ y không đổi. Điều đó có nghĩa là đó là tốc độ thay đổi nếu tôi di chuyển dọc theo đường cong này. Vì vậy, trên thực tế, nếu tôi xét hệ số góc của thẳng này. Vì vậy, nếu tôi vẽ đường tiếp tuyến với nhát cắt này, thì độ dốc sẽ là đạo hàm riêng của f đối với x. Tôi nghĩ rằng tôi có một hình vẽ của cái đó tốt hơn ở đâu đó. Vâng, đây rồi. Vâng, đó là bức ảnh tương tự, chỉ với các màu khác nhau. Vì vậy, tôi lấy đồ thị. Tôi cắt nó bằng một mặt phẳng thẳng đứng. Tôi nhận được đường cong, và bây giờ tôi lấy hệ số góc của đường cong đó, và điều đó mang lại cho tôi đạo hàm riêng.

And, to finish, let me just tell you how, and I should say, partial f partial y is the same thing but slicing now by your plane that goes in the y, z directions. OK, so I fix x equals constant. That means that I slice by a plane that's parallel to the blackboard. I get a curve, and I looked at the slope of that curve. OK, so it's just a matter of formatting one variable, setting it constant, and looking at the other one. So, how to compute these things, well, we actually, to find, well, there's a piece of notation I haven't told you yet. So, another notation you will see, I think this is what one uses a lot in physics. And, this is what one uses a lot in applied math, which is the same thing as physics but with different notations.

Và, để kết thúc, hãy để tôi chỉ cho bạn biết làm thế nào, và tôi nên nói, đạo hàm riêng theo y giống tương tự nhưng bây giờ cắt bằng mặt phẳng theo hướng y, z. Vâng, vì vậy tôi cố định x bằng hằng số. Điều đó có nghĩa là tôi cắt bởi một mặt phẳng song song với bảng đen. Tôi nhận được một đường cong, và tôi xét hệ số góc của đường cong đó. Vâng, do đó, chỉ là vấn đề định dạng một biến, thiết lập nó không đổi, và xét thằng còn lại. Vì vậy, làm thế nào để tính những thứ này, vâng, chúng tôi thực sự, tìm, vâng, có một ký hiệu mà tôi chưa cho bạn biết. Vì vậy, một ký hiệu khác mà bạn sẽ thấy, tôi nghĩ rằng đây là những gì người ta sử dụng rất nhiều trong vật lý. Và, đây là những gì người ta dùng rất nhiều trong toán học ứng dụng, đó là thứ tương tự như vật lí nhưng với các ký hiệu khác.

OK, so it just too different notations: partial f partial x, or f subscript x. And, they are the same thing. Well, we just treat y as a constant, and x as a variable. And, vice versa if we want to find partial with aspect to y. So, let me just finish with one quick example. Let's say that they give you f of x, y equals x^3y y^2, then partial f partial x. Well, let's take the derivative. So, here it's x^3 times a constant. Derivative of x^3 is 3x^2 times the constant plus what's the derivative of y^2? Zero, because it's a constant. If you do, instead, partial f partial y, then this is actually a constant times y.

Vâng, vì vậy nó chỉ là các ký hiệu quá khác nhau: đạo hàm riêng của f đối với x, hoặc f chỉ số dưới x. Và, chúng là thứ tương tự. Vâng, chúng ta chỉ khảo sát y như một hằng số, và x như một biến. Và, ngược lại nếu chúng ta muốn tìm đạo hàm riêng đối với y. Vì vậy, hãy để tôi kết thúc với một ví dụ nhỏ. Giả sử rằng họ cho bạn hàm f (x, y) bằng x ^ 3y y ^ 2, thì đạo hàm riêng của f đối với x. Vâng, chúng ta hãy lấy đạo hàm. Vì vậy, ở đây nó là x ^ 3 nhân hằng số nào đó. Đạo hàm của x ^ 3 là 3x ^ 2 nhân hằng số cộng đạo hàm của y ^ 2 là gì? Không, bởi vì nó là một hằng số. Thay vào đó, nếu bạn tính, đạo hàm riêng theo y, thì đây thực sự là một hằng số nhân y.

The derivative of y is one. So, that's just x^3. And, the derivative of y^2 is 2y. OK, so it's fairly easy. You just have to keep remembering which one is a variable, and which one isn't. OK, so more about this next time, and we will also learn about maxima and minima in several variables.

Đạo hàm của y bằng một. Vì vậy, đó chỉ là x ^ 3. Và, đạo hàm của y ^ 2 là 2y. Vâng, do đó, nó khá dễ. Bạn chỉ cần cố để nhớ cái nào là biến và cái nào không phải. Vâng, do đó, thêm về điều này lần tới, và chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về cực đại và cực tiểu theo nhiều biến.