18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 5: Phương trình tham số của đường thẳng

Đây là phần ghi chép trên lớp. Về bài giảng, các bạn có thể xem tại: http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK, let's start. So -- So, yesterday we learned about the questions of planes and how to think of 3x3 linear systems in terms of intersections of planes and how to think about them geometrically. And, that in particular led us to see which cases actually we don't have a unique solution to the system, but maybe we have no solutions or infinitely many solutions because maybe the line at intersection of two of the planes happens to be parallel to the other plane.
Vâng, hãy bắt đầu. À, - À, ngày hôm qua chúng ta đã học về vấn đề mặt phẳng và cách nghĩ các hệ phương trình tuyến tính 3x3 theo sự giao nhau của các mặt phẳng và làm thế nào để xét chúng ở phương diện hình học. Và, cụ thể điều đó đã dẫn chúng ta đến những trường hợp mà thực sự chúng ta không có một nghiệm duy nhất cho hệ, nhưng cũng có thể không có nghiệm hoặc có vô số nghiệm vì có thể đường giao nhau của hai mặt phẳng song song với mặt phẳng còn lại.

So, today, we'll start by looking at the equations of lines. And, so in a way it seems like something which we've already seen last time because we have seen that we can think of a line as the intersection of two planes. And, we know what equations of planes look like. So, we could describe a line by two equations telling us about the two planes that intersect on the line. But that's not the most convenient way to think about the line usually, though, because when you have these two questions, have you solve them? Well, OK, you can, but it takes a bit of effort. So, instead, there is another representation of a line.
Vì vậy, hôm nay, chúng ta bắt đầu xét các phương trình đường thẳng. Và, cũng giống như cách mà chúng ta đã gặp lần trước bởi vì chúng ta đã thấy rằng chúng ta có thể xem đường thẳng như giao tuyến của hai mặt phẳng. Và, chúng ta biết dạng của phương trình mặt phẳng. Vì vậy, chúng ta có thể mô tả đường thẳng bởi hai phương trình của hai mặt phẳng giao nhau qua đường thẳng đó. Nhưng đó không phải cách thuận tiện nhất để nghĩ về đường thẳng thường, mặc dù, bởi vì khi bạn có hai câu hỏi này, bạn có giải chúng không? Vâng, vâng, bạn có thể, nhưng phải mất một chút công sức. Vì vậy, thay vào đó, có một cách khác để biểu diễn đường thẳng.

So, if you have a line in space, well, you can imagine may be that you have a point on it. And, that point is moving in time. And, the line is the trajectory of a point as time varies. So, think of a line as the trajectory of a moving point. And, so when we think of the trajectory of the moving point, that's called a parametric equation. OK, so we are going to learn about parametric equations of lines.
Vì vậy, nếu bạn có một đường thẳng trong không gian, à, bạn có thể tưởng tượng rằng có thể bạn có một điểm trên đó. Và, điểm đó đang di chuyển theo thời gian. Và, đường thẳng là quỹ đạo của điểm khi thời gian biến đổi. Vì vậy, hãy nghĩ về đường thẳng như quỹ đạo của một điểm đang di chuyển. Và, do đó, khi chúng ta xét quỹ đạo của điểm chuyển động,

đó được gọi là phương trình tham số. Vâng, vì vậy chúng ta sẽ tìm hiểu về phương trình tham số của đường thẳng.

So, let's say for example that we are looking at the line. So, to specify a line in space, I can do that by giving you two points on the line or by giving you a point and a vector parallel to the line. For example, so let's say I give you two points on the line: (-1,2,2), and the other point will be (1,3,-1). So, OK, it's pretty good because we have two points in that line. Now, how do we find all the other points? Well, the other points in between these guys and also on either side.
Vâng, ví dụ chúng ta xét đường thẳng. À, để xác định một đường thẳng trong không gian, tôi có thể làm điều đó bằng cách cho bạn hai điểm trên đường thẳng hoặc một điểm và một vector song song với đường thẳng. Ví dụ, giả sử tôi cho bạn hai điểm trên đường thẳng: (-1,2,2), và điểm còn lại sẽ là (1,3, -1). Vì vậy, vâng, nó khá tốt bởi vì chúng ta có hai điểm trên đường thẳng đó. Bây giờ, làm thế nào để chúng ta tìm tất cả các điểm còn lại? Vâng, các điểm còn lại ở giữa những thằng này và cũng có thể ở hai bên.

Let's imagine that we have a point that's moving on the line, and at time zero, it's here at Q0. And, in a unit time, I'm not telling you what the unit is. It could be a second. It could be an hour. It could be a year. At t=1, it's going to be at Q1. And, it moves at a constant speed. So, maybe at time one half, it's going to be here. Times two, it would be over there. And, in fact, that point didn't start here. Maybe it's always been moving on that line. At time minus two, it was down there. So, let's say Q(t) is a moving point, and at t=0 it's at Q0.
Hãy tưởng tượng rằng chúng ta có một điểm đang di chuyển trên đường thẳng, và vào thời điểm không, nó ở đây tại Q0. Và, trong một đơn vị thời gian, tôi không nói cho bạn đơn vị là gì. Nó có thể là giây. Nó có thể là giờ. Nó có thể là năm. Tại t = 1, nó sẽ ở tại Q1. Và, nó di chuyển với tốc độ không đổi. Vì vậy, có thể ở thời điểm một phần hai, nó sẽ ở đây. Nhân hai, nó sẽ ở đó. Và, trên thực tế, điểm đó không bắt đầu ở đây. Có lẽ nó luôn luôn di chuyển trên đường thẳng đó. Tại thời điểm trừ hai, nó đi xuống đó. Vì vậy, giả sử Q(t) là một điểm đang di chuyển, và tại t = 0 nó ở tại Q0.

And, let's say that it moves. Well, we couldn't make it move in any way we want. But, probably the easiest to find, so our role is going to find formulas for a position of this moving point in terms of t. And, we'll use that to say, well, any point on the line is of this form where you have to plug in the current value of t depending on when it's hit by the moving point. So, perhaps it's easiest to do it if we make it move at a constant speed on the line, and that speed is chosen so that at time one, it's at Q1.
Và, giả sử rằng nó di chuyển. Vâng, chúng ta không thể làm nó di chuyển theo bất cứ cách nào mà chúng ta muốn. Nhưng, có lẽ dễ nhất để tìm, do đó, nhiệm vụ của chúng ta là tìm công thức cho vị trí của điểm di chuyển này theo t. Và, chúng ta sẽ sử dụng điều đó để nói, vâng, bất kỳ điểm nào trên đường thẳng thuộc dạng này ở đó bạn phải thế vào giá trị hiện tại của t tùy thuộc vào khi nào nó bị chạm bởi điểm di chuyển. Vì vậy, có lẽ dễ nhất để làm nó là nếu chúng ta làm nó di chuyển với một tốc độ không đổi trên đường thẳng, và tốc độ đó được chọn sao cho tại thời điểm một, nó ở Q1.

So, the question we want to answer is, what is the position at time t, so, the point Q(t)? Well, to answer that we have an easy observation, which is that the vector from Q0 to Q of t is proportional to the vector from Q0 to Q1. And, what's the proportionality factor here? Yeah, it's exactly t. At time one, Q0 Q is exactly the same. Maybe I should draw another picture again. I have Q0. I have Q1, and after time t, I'm here at Q of t where this vector from Q0 Q(t) is actually going to be t times the vector Q0 Q1. So, when t increases, it gets longer and longer.

Vì vậy, câu hỏi mà chúng ta muốn trả lời là, vị trí tại thời điểm t là gì, vâng, điểm Q (t)? Vâng, để trả điều đó chúng ta có dễ thấy, đó là vector từ Q0 đến Q(t) tỷ lệ thuận với vector từ Q0 đến Q1. Và, hệ số tỷ lệ ở đây là gì? Ô, nó chính là t. Tại thời điểm một, Q0 Q chính xác giống nhau. Có lẽ tôi nên vẽ lại hình khác. Tôi có Q0. Tôi có Q1, và sau thời điểm t, tôi ở đây tại Q (t) nơi mà vector từ Q0 Q (t) thực sự sẽ là nhân vector Q0 Q1. Vì vậy, khi t tăng, nó ngày càng dài hơn.

So, does everybody see this now? Is that OK? Any questions about that? Yes? OK, so I will try to avoid using blue. Thanks for, that's fine. So, OK, I will not use blue anymore. OK, well, first let me just make everything white just for now. This is the vector from Q0 to Q(t). This is the point Q(t). OK, is it kind of visible now? OK, thanks for pointing it out. I will switch to brighter colors. So, OK, so apart from that, I claim now we can find the position of its moving point because, well, this vector, Q0Q1 we can find from the coordinates of Q0 and Q1.

Vì vậy, bây giờ mọi người thấy điều này chưa? Ổn chứ? Có câu hỏi nào về vấn đề đó không? Sao? Vâng, do đó, tôi sẽ cố gắng tránh sử dụng màu xanh lam. Cảm ơn bạn, điều đó tốt. Vì vậy, vâng, tôi sẽ không sử dụng màu xanh nữa. Được rồi, à, bây giờ trước hết chúng ta hãy làm cho mọi thứ màu trắng. Đây là vector từ Q0 đến Q(t). Đây là điểm Q (t). Vâng, nó phần nào dễ thấy phải không? Vâng, cám ơn đã chỉ ra nó. Tôi sẽ chuyển sang màu sáng hơn. Vì vậy, vâng, ngoại trừ việc đó, bây giờ tôi xác nhận rằng chúng ta có thể tìm vị trí điểm chuyển động của nó bởi vì, vâng, vector này, Q0Q1 chúng ta có thể tìm từ các tọa độ của Q0 và Q1.

So, we just subtract the coordinates of Q0 from those of Q1 will get that vector Q0 Q1 is <2, 1, -3> OK, so, if I look at it, well, so let's call x(t), y(t), and z(t) the coordinates of the point that's moving on the line. Then we get x of t minus, well, actually plus one equals t times two. I'm writing the components of Q0Q(t). And here, I'm writing t times Q0Q1. y(t) minus two equals t, and z(t) minus two equals -3t. So, in other terms, the more familiar way that we used to write these equations, let me do it that way instead, minus one plus 2t, y(t) = 2 t, z(t) = 2 - 3t.

Vì vậy, chúng ta chỉ cần trừ tọa độ của Q1 cho Q0 sẽ nhận được rằng vector Q0Q1 là <2, 1, -3> vâng, vì vậy, nếu tôi xét nó, vâng, vì vậy hãy gọi x (t), y (t), và z (t) tọa độ của điểm di chuyển trên đường thẳng. Thì chúng ta nhận được x(t) trừ, vâng, thực sự cộng một bằng t nhân hai. Tôi sẽ viết các thành phần của Q0Q (t). Và ở đây, tôi sẽ viết t nhân Q0Q1. y (t) trừ hai bằng t, và z (t) trừ hai bằng -3t. Vì vậy, các số hạng khác, cách quen thuộc hơn mà chúng ta đã sử dụng để viết những phương trình này, hãy để tôi thực hiện nó theo cách đó , trừ một cộng 2t, y (t) = 2 t, z (t) = 2 – 3t.

And, if you prefer, I can just say Q(t) is Q0 plus t times vector Q0Q1. OK, so that's our first parametric equation of a line in this class. And, I hope you see it's not extremely hard. In fact, parametric equations of lines always look like that. x, y, and z are functions of t but are of the form a constant plus a constant times t. The coefficients of t tell us about a vector along the line. Here, we have a vector, Q0Q1, which is <2,1,-3>. And, the constant terms tell us about where we are at t=0. If I plug t=0 these guys go away, I get minus 1, 2, 2. That's my starting point.

Và, nếu bạn thích, tôi chỉ có thể nói Q (t) là Q0 cộng t nhân vector Q0Q1. Vì vậy, đó là phương trình tham số của một đường thẳng. Và, tôi hy vọng bạn thấy nó không phải rất khó. Trong thực tế, các phương trình tham số của đường thẳng luôn luôn trong có vẻ như thế. x, y, và z là hàm của t nhưng có dạng một hằng số cộng với một hằng số nhân t. Các hệ số của t cho chúng ta biết về một vector dọc theo đường thẳng. Ở đây, chúng ta có một vectơ, Q0Q1, nó là <2,1, -3>. Và, các số hạng hằng số cho chúng ta biết chúng ta ở đâu tại t = 0. Nếu tôi thế t = 0 vào đây, tôi nhận được trừ 1, 2, 2. Đó là điểm bắt đầu của tôi.

OK, so, any questions about that? No? OK, so let's see, now, what we can do with these parametric equations. So, one application is to think about the relative position of a line and a plane with respect to each other. So, let's say that we take still the same line up there, and let's consider the plane with the equation x 2y 4z = 7. OK, so I'm giving you this plane. And, the questions that we are going to ask ourselves are, well, does the line intersect the plane? And, where does it intersect the plane?
Vâng, vì vậy, có bất kỳ câu hỏi nào về điều đó không? Không à? Vâng, do đó, hãy xem, bây giờ, chúng ta có thể làm gì với các phương trình tham số. À, một ứng dụng là để suy nghĩ về các vị trí tương đối của một đường thẳng với mặt phẳng. Vâng, giả sử rằng chúng ta chọn cùng một đường thẳng hướng lên đó, và chúng ta hãy xét mặt phẳng với phương trình x 2y 4z = 7. Vâng, vì vậy tôi sẽ cho bạn mặt phẳng này. Và, những câu hỏi mà chúng ta sẽ tự hỏi là, vâng, đường thẳng có cắt mặt phẳng không? Và, nếu có thì nó cắt ở đâu?

So, let's start with the first primary question that maybe we should try to understand. We have these points. We have this plane, and we have these points, Q0 and Q1. I'm going to draw them in completely random places. Well, are Q0 and Q1 on the same side of a plane or on different sides, on opposite sides of the planes? Could it be that maybe one of the points is in the plane? So, I think I'm going to let you vote on that. So, is that readable? Is it too small? OK, so anyway, the question says, relative to the plane, x 2y 4z = 7. This point, Q0 and Q1, are they on the same side, on opposite sides, is one of them on the plane, or we can't decide?
Vì vậy, chúng ta hãy bắt đầu với câu hỏi chính đầu tiên mà có lẽ chúng ta nên cố gắng hiểu. Chúng ta có những điểm này. Chúng ta có mặt phẳng này, và chúng ta có những điểm này, Q0 và Q1. Tôi sẽ vẽ chúng ở những nơi hoàn toàn ngẫu nhiên. Vâng, Q0 và Q1 ở cùng một phía của mặt phẳng hay ở các phía khác nhau, trên các phía đối diện của những mặt phẳng? Có thể nào một trong những điểm ở trong mặt phẳng không? Vì vậy, tôi nghĩ rằng tôi sẽ để cho bạn bình chọn điều đó. Vì vậy, điều đó dễ hiểu không? Nó quá nhỏ phải không? Vâng, vì vậy dù sao đi nữa, câu hỏi là, liên quan đến mặt phẳng, x 2y 4z = 7. Điểm này, Q0 và Q1, chúng ở cùng một phía, hay các phía đối diện, một trong số chúng có ở trên mặt phẳng không, hoặc chúng ta không thể quyết định?

OK, that should be better. So, I see relatively few answers. OK, it looks like also a lot of you have forgotten the cards and, so I see people raising two fingers, I see people raising three fingers. And, I see people raising four fingers. I don't see anyone answering number one. So, the general idea seems to be that either they are on opposite sides. Maybe one of them is on the plane. Well, let's try to see.
Vâng, điều đó sẽ tốt hơn. Vâng, tôi thấy tương đối ít câu trả lời. Vâng, có vẻ như nhiều bạn đã quên các thẻ và, vì vậy tôi thấy có người giơ hai ngón tay, tôi thấy có người giơ ba ngón tay. Và, tôi thấy có người giơ bốn ngón tay. Tôi không thấy ai trả lời số một. Vì vậy, ý tưởng chung dường như là hoặc chúng ở các phía đối diện. Hoặc một trong số chúng ở trên mặt phẳng. Vâng, chúng ta hãy thử xem.

Is one of them on the plane? Well, let's check. OK, so let's look at the point, sorry. I have one blackboard to use here. So, I take the point Q0, which is at (-1,2,2). Well, if I plug that into the plane equation, so, x 2y 4z will equal minus one plus two times two plus four times two. That's, well, four plus eight, 12 minus one, 11. That, I think, is bigger than seven. OK, so Q0 is not in the plane. Let's try again with Q1. (1, 3, -1) well, if we plug that into x 2y 4z, we'll have one plus two times three makes seven. But, we add four times negative one. We add up with three less than seven. Well, that one is not in the plane, either.
Một trong số chúng ở trên mặt phẳng phải không? Vâng, hãy kiểm tra. Vâng, vì vậy hãy xét điểm, xin lỗi. Tôi có một bảng đen để sử dụng ở đây. Vì vậy, tôi chọn điểm Q0, có tọa độ (-1,2,2). Vâng, nếu tôi thế cái đó vào phương trình mặt phẳng, do đó, x 2y 4z sẽ bằng trừ một cộng với hai nhân hai cộng với bốn nhân hai. Bằng, à, bốn cộng tám, 12 trừ một, 11. Tôi nghĩ rằng cái đó lớn hơn bảy. Vâng, vì vậy, Q0 không thuộc mặt phẳng. Hãy thử lại với Q1. (1, 3, -1) à, nếu chúng ta thế nó vào x 2y 4z, chúng ta sẽ có một cộng hai nhân ba bằng bảy. Tuy nhiên, chúng ta cộng bốn nhân trừ một. Chúng ta được kết quả ba nhỏ hơn bảy. Vâng, điểm đó cũng không ở trong mặt phẳng.

So, I don't think, actually, that the answer should be number three. So, let's get rid of answer number three. OK, let's see, in light of this, are you willing to reconsider your answer? OK, so I think now everyone seems to be interested in answering number two. And, I would agree with that answer. So, let's think about it. So, let's think about it. These points are not in the plane, but they are not in the plane in different ways. One of them somehow overshoots; we get 11. The other one we only get 3. That's less than seven.
Vì vậy, trên thực tế, tôi không nghĩ câu trả lời sẽ là số ba. Vì vậy, chúng ta hãy từ bỏ câu trả lời số ba. Rồi, hãy xem, dưới sự soi sáng này, bạn có sẵn sàng xem xét lại câu trả lời của bạn không? Vâng, vì vậy tôi nghĩ rằng bây giờ tất cả mọi người có vẻ quan tâm đến câu trả lời số hai. Và, tôi sẽ đồng ý với câu trả lời đó. Vì vậy, hãy xét nó. Vì vậy, hãy suy nghĩ về nó. Những điểm này không ở trong mặt phẳng, nhưng chúng không ở trong mặt phẳng theo những cách khác nhau. Bằng cách nào đó, một trong số chúng hơi quá; chúng ta nhận được 11. Cái còn lại chúng ta chỉ nhận được 3. Nhỏ hơn bảy.

If you think about how a plan splits space into two half spaces on either side, well, one of them is going to be the point where x 2y 4z is less than seven. And, the other one will be, so, that's somehow this side. And, that's where Q1 is. And, the other side is where x 2y 4z is actually bigger than seven. And, to go from one to the other, well, x 2y 4z needs to go through the value seven. If you're moving along any path from Q0 to Q1, this thing will change continuously from 11 to 3. At some time, it has to go through 7. Does that make sense? So, to go from Q0 to Q1 we need to cross P at some place.
Nếu bạn nghĩ về cách thức một mặt phẳng tách không gian thành hai nửa không gian ở hai bên, vâng, một trong số chúng sẽ là điểm mà ở đó x 2y 4z nhỏ hơn bảy. Và, cái còn lại sẽ là, vâng, cái đó ở phía này. Và, đó là vị trí của Q1. Và, phía bên kia là nơi x 2y 4z thực sự lớn hơn bảy. Và, để đi từ cái này đến cái kia, vâng, x 2y 4z cần đi qua giá trị bảy. Nếu bạn di chuyển dọc theo bất kỳ đường nào từ Q0 đến Q1, cái này sẽ thay đổi liên tục từ 11 đến 3. Tại thời điểm nào đó, nó đi qua 7. Điều đó có nghĩa không? Vì vậy, để đi từ Q0 đến Q1 chúng ta cần đi qua P tại nơi nào đó.

So, they're on opposite sides. OK, now that doesn't quite finish answering the question that we had, which was, where does the line intersect the plane? But, why can't we do the same thing? Now, we know not only the points Q0 and Q1, we know actually any point on the line because we have a parametric equation up there telling us, where is the point that's moving on the line at time t? So, what about the moving point, Q(t)? Well, let's plug its coordinates into the plane equation.
Vì vậy, chúng ở các phía đối diện. Vâng, bây giờ chúng ta chưa làm rõ hoàn toàn những câu hỏi trước đây, đó là, đường thẳng giao với mặt phẳng ở đâu? Nhưng, tại sao chúng ta

không thể làm điều tương tự? Bây giờ, chúng ta biết không chỉ các điểm Q0 và Q1, thực sự chúng ta biết bất kỳ điểm nào trên đường thẳng vì chúng ta có phương trình tham số lên đến đó cho chúng ta biết, điểm đang di chuyển trên đường thẳng tại thời gian t ở đâu? Vì vậy, còn về điểm đang di chuyển thì sao, Q (t)? Vâng, chúng ta hãy thế tọa độ của nó vào phương trình mặt phẳng.

So, we'll take x(t) 2y(t) 4z(t). OK, that's equal to, well, (-1 2t) 2(2 t) 4(2 - 3t). So, if you simplify this a bit, you get 2t 2t -12t. That should be -8t. And, the constant term is minus one plus four plus eight is 11. OK, and we have to compare that with seven. OK, the question is, is this ever equal to seven? Well, so, Q(t) is in the plane exactly when -8t 11 equals seven. And, that' the same.

Vì vậy, chúng ta sẽ chọn x (t) 2y (t) 4z (t). Vâng, nó bằng, vâng, (-1 2t) 2 (2 t) 4 (2 - 3T). Vì vậy, nếu bạn đơn giản hóa cái này một chút, bạn sẽ có được 2t 2t-12t. Kết quả bằng -8t. Và, số hạng hằng số sẽ là trừ một cộng với bốn cộng với tám bằng 11. Vâng, chúng ta phải so sánh kết quả đó với bảy. Vâng, câu hỏi là, có bao giờ cái này bằng bảy? Vâng, vì vậy, Q (t) đúng là ở trong mặt phẳng khi -8t 11 bằng bảy. Và, cái đó tương tự.

If you manipulate this, you will get t equals one half. In fact, that's not very surprising. If you look at these values, 11 and three, you see that seven is actually right in between. It's the average of these two numbers. So, it would make sense that it's halfway in between Q0 and Q1, but we will get seven. OK, and that at that time, Q at time one half, well, let's plug the values. So, minus one plus 2t will be zero. Two plus t will be two and a half of five halves, and two minus three halves will be one half, OK?

Nếu bạn thao tác với cái này, bạn sẽ nhận được t bằng một phần hai. Trong thực tế, điều đó không đáng ngạc nhiên. Nếu bạn xét những giá trị này, 11 và ba, bạn thấy rằng bảy thực sự ở giữa. Nó là trung bình của hai số này. Vì vậy, nó sẽ có nghĩa là nó ở giữa đường nối Q0 và Q1, nhưng chúng ta sẽ nhận được bảy. Vâng, và tại thời điểm đó, Q ở thời điểm một phần hai, vâng, hãy thế vào những giá trị này. Vì vậy, trừ một cộng 2t bằng không. Hai cộng t sẽ bằng hai và một phần hai của năm một phần hai, và hai trừ đi ba một phần hai sẽ bằng một phần hai, đúng không?

So, this is where the line intersects the plane. So, you see that's actually a pretty easy way of finding where a line on the plane intersects each other. If we can find a parametric equation of a line and an equation of a plane, but we basically just plug one into the other, and see at what time the moving point hits the plane so that we know where this. OK, other questions about this? Yes? Sorry, can you say that?

Vì vậy, đây là nơi đường thẳng giao với mặt phẳng. Vì vậy, bạn thấy rằng thực sự đó là cách khá dễ để tìm nơi giao nhau giữa đường thẳng và mặt phẳng. Nếu chúng ta có thể tìm phương trình tham số của đường thẳng và phương trình mặt phẳng, nhưng về cơ bản chúng ta thế cái này vào cái còn lại, và xem thời điểm nào điểm chuyển động chạm mặt phẳng để chúng ta biết cái này ở đâu. Vâng, còn câu hỏi nào về điều này không? Sao? Xin lỗi, bạn nhắc lại được không?

Yes, so what if we don't get a solution? What happens? So, indeed our line could have been parallel to the plane or maybe even contained in the plane. Well, if the line is parallel to the plane then maybe what happens is that what we plug in the positions of the moving point, we actually get something that never equals seven because maybe we get actually a constant. Say that we had gotten, I don't know, 13 all the time.
Vâng, vì vậy nếu không có nghiệm thì sao? Điều gì xảy ra? Vì vậy, thực sự đường thẳng của chúng ta có thể song song với mặt phẳng hoặc thậm chí nằm trong mặt phẳng. Vâng, nếu đường thẳng song song với mặt phẳng thì có lẽ những gì sẽ xảy ra là những gì chúng ta thế vào vị trí của điểm di chuyển, chúng ta không thể nhận đ ược kết quả bằng bảy bởi vì có lẽ chúng ta thực sự có được một hằng số. Giả sử rằng chúng ta đã có, 13 mọi lúc.

Well, when is 13 equal to seven? The answer is never. OK, so that's what would tell you that the line is actually parallel to the plane. You would not find a solution to the equation that you get at the end. Yes? So, if there's no solution at all to the equation that you get, it means that at no time is the traveling point going to be in the plane. That means the line really does not have the plane ever. So, it has to be parallel outside of it. On the other hand, if a line is inside the plane, then that means that no matter what time you choose, you always get seven. OK, that's what would happen if a line is in the plane. You always get seven. So, maybe I should write this down.
Vâng, khi nào 13 bằng bảy? Câu trả lời là không bao giờ. Vâng, vì vậy, đó là những gì sẽ cho bạn biết rằng đường thẳng thực sự song song với mặt phẳng. Bạn sẽ không tìm được nghiệm của phương trình mà bạn nhận được cuối cùng. Sao ạ? Vì vậy, nếu không có nghiệm của phương trình mà bạn nhận, có nghĩa là không có lúc nào mà điểm chuyển động ở trong mặt phẳng. Điều đó có nghĩa là đường thẳng không bao giờ ở trong mặt phẳng. Vì vậy, nó phải song song bên ngoài nó. Mặt khác, nếu đường thẳng ở trong mặt phẳng, thì điều đó có nghĩa là thời gian mà bạn chọn không quan trọng, bạn luôn luôn nhận được bảy. Vâng, đó là những gì sẽ xảy ra nếu đường thẳng thuộc mặt phẳng. Bạn luôn luôn nhận được bảy. Vì vậy, có lẽ tôi nên viết điều này ra.

So, if a line is in the plane then plugging x(t), y(t), z(t) into the equation, we always get, well, here in this case seven or whatever the value should be for the plane, OK? If the line is parallel to the plane -- -- in fact, we, well, get, let's see, another constant. So, in fact, you know, when you plug in these things, normally you get a quantity that's of a form, something times t plus a constant because that's what you plug into the equation of a plane. And so, in general, you have an equation of the form, something times t plus something equals something. And, that usually has a single solution. And, the special case is if this coefficient of t turns out to be zero in the end, and that's actually going to happen, exactly when the line is either parallel or in the plane.
Vì vậy, nếu đường thẳng nằm trong mặt phẳng thì thế x (t), y (t), z (t) vào phương trình, chúng ta luôn luôn nhận được, vâng, ở đây trong trường hợp này bảy hoặc bất cứ giá trị nào đối với mặt phẳng, đúng không? Nếu đường thẳng song song với mặt phẳng - - trên thực tế, chúng ta, vâng, nhận được, xem nào, hằng số khác. Vì vậy, trên thực tế, bạn biết, khi bạn thế vào những thứ này, thông thường bạn nhận được một đại lượng có dạng, một cái gì đó nhân t cộng với một hằng số bởi vì đó là những gì bạn thế vào phương trình mặt phẳng. Và như vậy, nói chung, bạn có một phương trình dạng, cái gì đó nhân t cộng cái gì đó bằng cái gì đó. Và, thường cái đó có một nghiệm duy nhất. Và, trường hợp đặc biệt là nếu hệ số này của t cuối cùng bằng không, và điều đó thực sự sẽ xảy ra, chính xác khi đường thẳng hoặc song song hoặc nằm trong mặt phẳng.

In fact, if you think this through carefully, the coefficient of t that you get here, see, it's one times two plus two times one plus four times minus three. It's the dot product between the normal vector of a plane and the vector along the line. So, see, this coefficient becomes zero exactly when the line is perpendicular to the normal vector. That means it's parallel to the plane. So, everything makes sense. OK, if you're confused about what I just said, you can ignore it. OK, more questions? No?

OK, so if not, let's move on to linear parametric equations. So, I hope you've seen here that parametric equations are a great way to think about lines.
Quả thực, nếu bạn nghĩ về điều này một cách cẩn thận, các hệ số của t mà bạn nhận được ở đây, xem này, đó là một nhân hai cộng với hai nhân một cộng với bốn nhân trừ ba. Đó là tích vô hướng giữa vector pháp tuyến của mặt phẳng và vectơ dọc theo đường thẳng. Vì vậy, xem này, hệ số này chính xác bằng không khi đường thẳng vuông góc với vector pháp tuyến. Điều đó có nghĩa là nó song song với mặt phẳng. Vì vậy, mọi thứ có nghĩa. Vâng, nếu bạn đang phân vân về những gì tôi vừa nói, bạn có thể bỏ qua nó. Vâng, còn câu hỏi nào nữa? Không có? Vâng, vì vậy, nếu không, hãy chuyển sang phương trình tham số tuyến tính. Vì vậy, tôi hy vọng ở đây bạn đã thấy các phương trình tham số là một cách tuyệt vời để nghĩ về các đường thẳng.

There are also a great way to think about actually any curve, any trajectory that can be traced by a moving point. So -- -- more generally, we can use parametric equations -- -- for arbitrary motions -- -- in the plane or in space. So, let's look at an example. Let's take, so, it's a famous curve called a cycloid. A cycloid is something that you can actually see sometimes at night when people are biking If you have something that reflects light on the wheel. So, let me explain what's the definition of a cycloid.
Ngoài ra còn có một cách tuyệt vời để suy nghĩ về bất kỳ đường cong nào, bất kỳ quỹ đạo nào có thể được truy tìm bằng một điểm di chuyển. Vì vậy, - - nói chung, chúng ta có thể sử dụng các phương trình tham số - - cho chuyển động tùy ý - - trong mặt phẳng hoặc trong không gian. Vì vậy, chúng ta hãy xét một ví dụ. Hãy chọn, vâng, nó là một đường cong nổi tiếng được gọi là một đường cycloid. Đường cycloid là cái mà thỉnh thoảng bạn thấy ban đêm khi người ta đi xe đạp. Nếu bạn có cái gì đó phản xạ ánh ánh sáng trên bánh xe. Vì vậy, hãy để tôi giải thích định nghĩa của đường cycloid.

So, I should say, I've seen a lecture where, actually, the professor had a volunteer on a unicycle to demonstrate how that works. But, I didn't arrange for that, so instead I will explain it to you using more conventional means. So, let's say that we have a wheel that's rolling on a horizontal ground. And, as it's rolling of course it's going to turn. So, it's going to move forward to a new position. And, now, let's mention that we have a point that's been painted red on the circumference of the wheel.
Vì vậy, tôi sẽ nói, tôi đã từng thấy một bài giảng ở đó, quả thực, giáo sư đã có một tình nguyện viên ngồi trên một bánh xe đạp để trình diễn xem cái đó hoạt động ra sao. Nhưng, tôi đã không sắp xếp cho điều đó, vì vậy, thay vào đó tôi sẽ giải thích cho bạn bằng cách sử dụng phương tiện truyền thống hơn. Vì vậy, giả sử rằng chúng ta một bánh xe đang lăn trên mặt đất nằm ngang. Và, nó sẽ di chuyển đến vị trí mới. Vì vậy, bây giờ, chúng ta hãy đề cập đến việc chúng ta có một điểm được sơn màu đỏ trên chu vi của bánh xe.

And, initially, that point is here. So, as the wheel stops rotating, well, of course, it moves forward, and so it turns on itself. So, that point starts falling back behind the point of contact because the wheel is rotating at the same time as it's moving forward. And so, the cycloid is the trajectory of this moving point. OK, so the cycloid is obtained by considering, so we have a wheel, let's say, of radius a. So, this height here is (a) rolling on the floor which is the x axis. And, let's –
Và, ban đầu, điểm đó ở đây. Vì vậy, khi bánh xe dừng quay, vâng, tất nhiên, nó di chuyển về phía trước, và vì vậy nó quay về chính nó. Vì vậy, điểm đó bắt đầu quay lại phía sau những điểm tiếp xúc vì bánh xe đang quay cùng một lúc khi nó di chuyển về phía trước. Và như vậy, đường cycloid là quỹ đạo của điểm di chuyển này. Vâng, vì vậy đường cycloid thu được bằng cách xét, vì vậy chúng ta có bánh xe, giả sử, bán kính a. Vì vậy, ở đây chiều cao này là (a) lăn trên sàn nhà là trục x. Và, chúng ta hãy -

And, we have a point, P, that's painted on the wheel. Initially, it's at the origin. But, of course, as time goes by, it moves on the wheel. P is a point on the rim of the wheel, and it starts at the origin. So, the question is, what happens? In particular, can we find the position of this point, x(t), y(t), as a function of time? So, that's the reason why I have this computer. So, I'm not sure it will be very easy to visualize, but so we have a wheel, well, I hope you can vaguely see that there's a circle that's moving. The wheel is green here. And, there's a radius that's been painted blue in it. And, that radius rotates around the wheel as the wheel is moving forward. So, now, let's try to paint, actually, the trajectory of a point.
Và, chúng ta có một điểm, P, được vẽ trên bánh xe. Ban đầu, nó ở tại gốc tọa độ. Nhưng, tất nhiên, khi thời gian trôi qua, nó di chuyển trên bánh xe. P là một điểm trên vành của bánh xe, và nó bắt đầu tại gốc tọa độ. Vì vậy, câu hỏi là, điều gì xảy ra? Đặc biệt, chúng ta có thể tìm thấy vị trí của điểm này, x (t), y (t), như hàm theo thời gian không? Vì vậy, đó là lý do tại sao tôi có máy tính này. Vì vậy, tôi không chắc chắn nó sẽ rất dễ dàng để hình dung, nhưng như vậy chúng ta có một bánh xe, vâng, tôi hy vọng bạn mơ hồ hiểu rằng có một vòng tròn đang di chuyển. Bánh xe màu xanh lá cây ở đây. Và, có một bán kính được sơn màu xanh trong nó. Và, bán kính đó xoay quanh bánh xe khi bánh xe đang chuyển động về phía trước. Vì vậy, bây giờ, chúng ta hãy thử sơn, trên thực tế, quỹ đạo của một điểm.

[LAUGHTER] OK, so that's what the cycloid looks like. [APPLAUSE] OK, so -- So the cycloid, well, I guess it doesn't quite look like what I've drawn. It looks like it goes a bit higher up, which will be the trajectory of this red point. And, see, it hits the bottom once in a while. It forms these arches because when the wheel has rotated by a full turn, then you're basically back at the same situation, except a bit further along the route.
[Cười] Vâng, vì vậy cycloid trông như thế đó. [Vỗ tay] Vâng, như vậy - Vì vậy, các đường cycloid, vâng, tôi đoán nó không hoàn toàn giống như những gì tôi đã vẽ. Dường như nó đi lên hơi cao hơn một chút, nó sẽ là quỹ đạo của điểm màu đỏ này. Và, xem nào, thỉnh thoảng nó chạm phía dưới cùng. Nó tạo thành những vòm này bởi vì khi bánh xe đã quay đủ một vòng, thì về cơ bản bạn trở lại trường hợp tương tự, ngoại trừ xa hơn một chút nữa dọc theo tuyến đường.

So, if we do it once more, you see the point now is at the top, and now it's at the bottom. And then we start again. It's at the top, and then again at the bottom. OK. No. [LAUGHTER] OK, so the question that we want to answer is what is the position x(t), y(t), of the point P? OK, so actually, I'm writing x(t), y(t). That means that I have, maybe I'm expressing the position in terms of time. Let's see, is time going to be a good thing to do?
Vì vậy, nếu chúng ta làm điều đó một lần nữa, bây giờ bạn sẽ thấy điểm ở trên đỉnh, và bây giờ nó ở phía dưới đáy. Và sau đó chúng ta bắt đầu lại. Nó ở trên đỉnh, và sau đó lại xuống đáy. Vâng. Không [cười] VÂNG, vì vậy câu hỏi mà chúng ta muốn trả lời là vị trí x (t), y (t), của điểm P là gì? Vâng, vì vậy, thực sự, tôi đang viết x (t), y (t). Điều đó có

nghĩa là tôi có, có lẽ tôi sẽ thể hiện vị trí theo thời gian. Xem nào, thời gian sẽ là một điều tốt để làm phải không?

Well, suddenly, the position changes over time. But doesn't actually matter how fast the wheel is rolling? No, because I can just play the motion fast-forward. The wheel will be going faster, but the trajectory is still the same. So, in fact, time is not the most relevant thing here. What matters to us now is how far the wheel has gone. So, we could use as a parameter, for example, the distance by which the wheel has moved. We can do even better because we see that, really, the most complicated thing that happens here is really the rotation. So, maybe we can actually use the angle by which the wheel has turned to parameterize the motion. So, there's various choices. You can choose whichever one you prefer. But, I think here, we will get the simplest answer if we parameterize things by the angle.

Vâng, đột nhiên, vị trí thay đổi theo thời gian. Nhưng bánh xe lăn nhanh như thế nào thực sự không quan trọng? Không, vì tôi chỉ có thể thực hiện chuyển động nhanh về phía trước. Các bánh xe sẽ đi nhanh hơn, nhưng quỹ đạo vẫn tương tự. Vì vậy, quả thực, thời gian không phải là thứ thõa đáng nhất ở đây. Điều quan trọng đối với chúng ta bây giờ là bánh xe đã đi xa bao nhiêu. Vì vậy, chúng ta có thể sử dụng như một tham số, ví dụ, khoảng cách mà theo đó bánh xe đã di chuyển. Chúng ta thậm chí có thể làm tốt hơn bởi vì chúng ta thấy rằng, thực sự, điều phức tạp nhất xảy ra ở đây thực sự là quay. Vì vậy, có lẽ chúng ta thực sự có thể sử dụng góc mà bánh xe đã quay để tham số hóa chuyển động. Vì vậy, có nhiều sự lựa chọn khác nhau. Bạn có thể chọn bất cứ cái nào bạn thích. Nhưng, tôi nghĩ rằng ở đây, chúng ta sẽ nhận được câu trả lời đơn giản nhất nếu chúng ta tham số hóa các thứ qua góc.

So, in fact, instead of t I will be using what's called theta as a function of the angle, theta, by which the wheel has rotated. So, how are we going to do that? Well, because we are going to try to use our new knowledge, let's try to do it using vectors in a smart way. So, let me draw a picture of the wheel after things have rotated by a certain amount. So, maybe my point, P, now, is here. And, so the wheel has rotated by this angle here. And, I want to find the position of my point, P, OK? So, the position of this point, P, is going to be the same as knowing the vector OP from the origin to this moving point. So, I haven't really simplify the problem yet because we don't really know about vector OP.

Vì vậy, trên thực tế, thay vì t tôi sẽ sử dụng những gì được gọi là theta là hàm của góc, theta, qua đó bánh xe đã quay. Vì vậy, chúng ta sẽ làm điều đó như thế nào? Vâng, bởi vì chúng ta sẽ cố gắng sử dụng kiến thức mới của chúng ta, chúng ta hãy cố gắng để làm điều đó bằng cách sử dụng các vector một cách thông minh. Vì vậy, hãy để tôi vẽ hình của bánh xe sau khi mọi thứ đã quay một lượng nhất định. Vì vậy, vị trí của điểm này, P, bây giờ, là ở đây. Và, vậy, bánh xe đã quay góc này ở đây. Và, tôi muốn tìm vị trí của điểm của tôi, P, phải không? Vì vậy, vị trí của điểm này, P, sẽ giống như biết vector OP từ gốc tọa độ đến điểm đang di chuyển này. Vì vậy, tôi thực sự chưa đơn giản hóa vấn đề được nêu ra bởi vì chúng ta không thực sự biết về vector OP.

But, maybe we know about simpler vectors where some will be OP. So, let's see, let's give names to a few of our points. For example, let's say that this will be point A. A is the point where the wheel is touching the road. And, B will be the center of the wheel. Then, it looks like maybe I have actually a chance of understanding vectors like maybe OA doesn't look quite so scary, or AB doesn't look too bad.
Nhưng, có lẽ chúng ta biết về các vectơ đơn giản hơn mà một số sẽ là OP. Vì vậy, xem nào, hãy đặt tên một vài điểm của chúng ta. Ví dụ, giả sử rằng đây sẽ là điểm A. A là điểm mà tại đó bánh xe chạm vào đường. Và, B sẽ là tâm của bánh xe. Thì có vẻ như tôi đã thực sự có cơ hội hiểu về các vectơ chẳng hạn như OA không đáng sợ, hay AB không quá tệ.

BP doesn't look too bad. And, if I sum them together, I will obtain OP. So, let's do that. So, now we've greatly simplified the problem. We had to find one vector that we didn't know. Now we have to find three vectors which we don't know. But, you will see each of them as fairly easy to think about. So, let's see. Should we start with vector OA, maybe? So, OA has two components. One of them should be very easy. Well, the y component is just going to be zero, OK? It's directed along the x axis. What about the x component?
BP không trông quá xấu. Và, nếu tôi cộng chúng với nhau, tôi sẽ thu được OP. Vì vậy, hãy để tôi làm điều đó. Vì vậy, bây giờ chúng ta đã đơn giản hóa vấn đề. Chúng ta phải tìm một vector mà chúng ta không biết. Bây giờ chúng ta phải tìm ba vectơ mà chúng ta không biết. Tuy nhiên, bạn sẽ thấy mỗi cái trong số chúng khá dễ dàng để xem xét. Vì vậy, chúng ta hãy xét. Chúng ta nên bắt đầu với vector OA, có thể chứ? Vâng, OA có hai thành phần. Một trong số chúng sẽ rất dễ. Vâng, thành phần y sẽ bằng không, phải không? Nó được hướng dọc theo trục x. Còn về thành phần x thì sao?

So, OA is the distance by which the wheel has traveled to get to its current position. Yeah. I hear a lot of people saying R theta. Let me actually say a(theta) because I've called a the radius of the wheel. So, this distance is a(theta). Why is it a(theta)? Well, that's because the wheel, well, there's an assumption which is that the wheel is rolling on something normal like a road, and not on, maybe, ice, or something like that. S
Vì vậy, OA là khoảng cách mà bánh xe đã di chuyển đến vị trí hiện tại của nó. Vâng. Tôi nghe nhiều người nói rằng R theta. Hãy để tôi thực sự nói a (theta) vì tôi đã gọi a là bán kính của bánh xe. Vì vậy, khoảng cách này là a (theta). Tại sao nó là a (theta)?Vâng, đó là bởi vì bánh xe, vâng, có một giả định đó là bánh xe lăn trên cái gì đó bình thường như con đường, chứ không phải, có thể, nước đá, hoặc thứ gì đó giống như vậy. S

So, it's rolling without slipping. So, that means that this distance on the road is actually equal to the distance here on the circumference of the wheel. This point, P, was there, and the amount by which the things have moved can be measured either here or here. These are the same distances. OK, so, that makes it a(theta), and maybe I should justify by saying amount by which the wheel has rolled, has moved,

is equal to the, so, the distance from O to A is equal to the arc length on the circumference of the circle from A to P. And, you know that if you have a sector corresponding to an angle, theta, then its length is a times theta, provided that, of course, you express the angel in radians. That's the reason why we always used radians in math. Now, let's think about vector AB and vector BP. OK, so AB is pretty easy, right, because it's pointing straight up, and its length is a. So, it's just zero, a. Now, the most serious one we've kept for the end. What about vector BP? So, vector BP, we know two things about it. We know actually its length, so, the magnitude of BP –
Vì vậy, nó lăn mà không trượt. Vì vậy, điều đó có nghĩa là khoảng cách này trên đường thực sự bằng với khoảng cách ở đây trên chu vi của bánh xe. Điểm này, P, ở đó, và lượng mà các thứ đã di chuyển có thể được đo hoặc ở đây hoặc tại đây. Những cái này cùng khoảng cách. Vâng, vì vậy, điều đó tạo ra nó a (theta), và có lẽ tôi nên biện minh bằng

cách nói rằng lượng mà bánh xe đã lăn, đã di chuyển, bằng, vâng, khoảng cách từ O đến A bằng chiều dài cung trên chu vi của vòng tròn từ A đến P. Và, bạn biết rằng nếu bạn có một hình quạt tương ứng với một góc, theta, thì chiều dài của nó là theta lần, với điều kiện, tất nhiên, bạn biểu diễn góc theo radian. Đó là lý do tại sao chúng ta luôn luôn sử dụng radian trong toán học. Bây giờ, hãy suy nghĩ về vector AB và vector BP. Vâng, vì vậy, AB khá dễ, phải không, bởi vì nó chỉ thẳng lên, và chiều dài của nó là a. Vì vậy, nó chỉ là không, a. Bây giờ, một thứ nghiêm trọng nhất mà chúng ta đã giữ đến cuối cùng. Còn về vector BP thì sao? Vâng, vector BP, chúng ta biết hai điều về nó. Thực sự, chúng ta biết chiều dài của nó, vâng, độ lớn của BP -

-- a. And, we know it makes an angle, theta, with the vertical. So, that should let us find its components. Let's draw a closer picture. Now, in the picture I'm going to center things at B. So, I have my point P. Here I have theta. This length is A. Well, what are the components of BP? Well, the X component is going to be? Almost. I hear people saying things about a, but I agree with a. I hear some cosines. I hear some sines. I think it's actually the sine. Yes. It's a(sin(theta)), except it's going to the left. So, actually it will have a negative a(sin(theta)).

- a. Và, chúng ta biết nó tạo một góc, theta, với phương thẳng đứng. Vì vậy, điều đó sẽ giúp chúng ta tìm được các thành phần của chúng. Hãy vẽ một hình gần hơn. Bây giờ, trong hình tôi sẽ lấy tâm những cái này tại B. Vì vậy, tôi có điểm P của tôi. Ở đây tôi có theta. Chiều dài này bằng A. Vâng, thành phần của BP là gì? Vâng, thành phần X sẽ là gì? Hầu như. Tôi nghe mọi người nói những điều về a, nhưng tôi đồng ý với a. Tôi nghe một số nói cosin. Tôi nghe một số nói sin. Tôi nghĩ rằng thực sự nó là sin. Vâng. Đó là a (sin(theta)), ngoại trừ nó sẽ ở bên trái. Vì vậy, thực sự sẽ có trừ a(sin(theta)).

And, the vertical component, well, it will be a(cos(theta)), but also negative because we are going downwards. So, it's negative a(cos(theta)). So, now we can answer the initial question because vector OP, well, we just add up OA, AB, and BP. So, the X component will be a(theta) - a(sin(theta)). And, a-a(cos(theta)). OK. So, any questions about that? OK, so, what's the answer? Because this thing here is the x coordinate as a function of theta, and that one is the y coordinate as a function of theta. So, now, just to show you that we can do a lot of things when we have a parametric equation, here is a small mystery.

Và, thành phần thẳng đứng, vâng, nó sẽ là a (cos (theta)), nhưng cũng âm bởi vì chúng ta đang đi xuống phía dưới. Vì vậy, nó là trừ a (cos (theta)). Vì vậy, bây giờ chúng ta có thể trả lời câu hỏi ban đầu bởi vì vector OP, vâng, chúng ta chỉ cần cộng OA, AB, và BP. Vì vậy, thành phần X sẽ là a(theta) - a (sin(theta)). Và, a-a (cos (theta)). Vâng. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về điều đó không? Vâng, vì vậy, câu trả lời là gì? Bởi vì cái này ở đây là tọa độ x như một hàm của theta, và cái đó là y như hàm của theta. Vì vậy, bây giờ, chỉ cần để cho bạn thấy rằng chúng ta có thể làm rất nhiều thứ khi chúng ta có phương trình tham số, đây là một bí ẩn nhỏ.

So, what happens exactly near the bottom point? What does the curve look like? The computer tells us, well, it looks like it has some sort of pointy thing, but isn't that something of a display? Is it actually what happens? So, what do you think happens near the bottom point? Remember, we had that picture. Let me show you once more, where you have these corner-like things at the bottom. Well, actually, is it indeed a corner with some angle between the two directions? Does it make an angle? Or, is it actually a smooth curve without any corner, but we don't see it because it's too small to be visible on the computer screen? Does it actually make a loop?
Vì vậy, chính xác những gì xảy ra gần điểm đáy? Đường cong như thế nào? Máy tính cho chúng ta biết, vâng, có vẻ như nó có một số loại vật nhọn, nhưng đó không phải là một cái gì đó của màn hình phải không? Nó thực sự là những gì xảy ra? Vì vậy, bạn nghĩ điều gì sẽ xảy ra gần điểm đáy? Hãy nhớ rằng, chúng ta có hình đó. Hãy để tôi chỉ cho bạn một lần nữa, nơi mà bạn có những thứ giống như góc này ở phía dưới. Vâng, thực sự, nó một góc với góc nào đó giữa hai hướng phải không? Nó tạo ra một góc phải không? Hoặc, nó thực sự là một đường cong trơn không có bất kỳ góc nào, nhưng chúng ta không nhìn thấy nó bởi vì nó quá nhỏ để được nhìn thấy trên màn hình máy tính? Liệu nó có thực sự tạo ra một vòng không?

Does it actually come down and then back up without going to the left or to the right and without making an angle? So, yeah, I see the majority votes for answers number two or four. And, well, at this point, we can't quite tell. So, let's try to figure it out from these formulas. The way to answer that for sure is to actually look at the formulas. OK, so question that we are trying to answer now is what happens near the bottom point?
Liệu nó có thực sự đi xuống và sau đó trở lại mà không đi sang trái hoặc sang phải và không tạo ra một góc? Vì vậy, vâng, tôi thấy đa số phiếu bầu cho câu trả lời số hai hoặc bốn. Và, vâng, vào thời điểm này, chúng ta không thể hoàn toàn nói. Vì vậy, chúng ta hãy thử suy ra nó từ các công thức này. Cách để trả lời cho điều đó chắc chắn là thực sự nhìn vào công thức. Vâng, vì vậy câu hỏi mà chúng tôi đang cố trả lời bây giờ là những gì sẽ xảy ra gần điểm đáy?

OK, so how do we answer that? Well, we should probably try to find simpler formulas for these things. Well, to simplify, let's divide everything by a. Let's rescale everything by a. If you want, let's say that we take the unit of length to be the radius of our wheel. So, instead of measuring things in feet or meters, we'll just measure them in radius. So, take the length unit to be equal to the radius. So, that means we'll have a=1. Then, our formulas are slightly simpler. We get x(theta) is theta - sin(theta), and y equals 1 - cos (theta). OK, so, if we want to understand what these things look like, maybe we should try to take some approximation.
Vâng, vậy làm thế nào để chúng ta trả lời điều đó? Vâng, có lẽ chúng ta nên cố gắng tìm các công thức đơn giản hơn cho những thứ này. Vâng, để đơn giản hóa, chúng ta hãy chia mọi thứ cho a. Nếu bạn muốn, giả sử rằng chúng ta lấy đơn vị chiều dài là bán kính của bánh xe của chúng ta. Vì vậy, thay vì đo các thứ theo feet hay mét, chúng ta sẽ đo chúng theo bán kính. Vì vậy, hãy lấy đơn vị chiều dài bằng bán kính. Vì vậy, điều đó có nghĩa là chúng ta sẽ có a = 1. Thì, công thức của chúng ta khá đơn giản. Chúng ta được x (theta) bằng theta - sin (theta), và y bằng 1 - cos (theta). Vâng, vì vậy, nếu chúng ta muốn hiểu những cái này sẽ giống như thế nào, có lẽ chúng ta nên cố gắng thực hiện phép gần đúng nào đó.

OK, so what about approximations? Well, probably you know that if I take the sine of a very small angle, it's close to the actual angle itself if theta is very small. And, you know that the cosine of an angle that's very small is close to one. Well, that's pretty good. If we use that, we will get theta minus theta, one minus one, it looks like it's not precise enough. We just get zero and zero. That's not telling us much about what happens. OK, so we need actually better approximations than that. So –
Vâng, vì vậy, phép xấp xỉ là gì? Vâng, có lẽ bạn biết rằng nếu tôi lấy sin của một góc rất

nhỏ, nó gần bằng chính góc đó nếu theta rất nhỏ. Và, bạn biết rằng cô sin của một góc rất nhỏ gần bằng một. Vâng, điều đó khá tốt. Nếu chúng ta dùng điều đó, chúng ta sẽ được theta trừ theta, một trừ một, có vẻ như nó không đủ chính xác. Chúng ta chỉ nhận được không và không. Điều đó không cho chúng ta biết nhiều về những gì xảy ra. Vâng, vì vậy chúng ta cần một phép gần đúng thực sự tốt hơn cái đó. Vì vậy -

So, hopefully you have seen in one variable calculus something called Taylor expansion. That's [GROANS]. I see that -- OK, so if you have not seen Taylor expansion, or somehow it was so traumatic that you've blocked it out of your memory, let me just remind you that Taylor expansion is a way to get a better approximation than just looking at the function, its derivative. So -- And, here's an example of where it actually comes in handy in real life. So, Taylor approximation says that if t is small, then the value of the function, f(t), is approximately equal to, well, our first guess, of course, would be f(0). That's our first approximation.
Vì vậy, hy vọng rằng bạn đã gặp trong giải tích một biến cái được gọi là khai triển Taylor. Đó là. Tôi thấy rằng -Vâng, vậy nếu bạn chưa học khai triển Taylor, hoặc nó quá đau buồn đến nỗi bạn đã chặn nó khỏi bộ nhớ của bạn, hãy để tôi nhắc nhở bạn rằng khai triển Taylor là một cách để có được một phép gần đúng tốt hơn chỉ bằng cách xét hàm, đạo hàm của nó. Vì vậy, - Và, đây là một ví dụ về sự có ích của nó trong thực tế. À, phép gần đúng Taylor nói rằng nếu t là nhỏ, thì giá trị của hàm, f (t), gần bằng, vâng, dự đoán đầu tiên của chúng ta, tất nhiên, sẽ là f (0). Đó là phép gần đúng bậc nhất của chúng ta.

If we want to be a bit more precise, we know that when we change by t, well, t times the derivative comes in, that's for linear approximation to how the function changes. Now, if we want to be even more precise, there's another term, which is t^2 over two times the second derivative. And, if we want to be even more precise, you will have t^3 over six times the third derivative at zero. OK, and you can continue, and so on. But, we won't need more. So, if you use this here, it tells you that the sine of a smaller angle, theta, well, yeah, it looks like theta. But, if we want to be more precise, then we should add minus theta cubed over six. And, cosine of theta, well, it's not quite one. It's close to one minus theta squared over two.
Nếu chúng ta muốn chính xác hơn một chút, chúng ta biết rằng khi chúng ta thay đổi t, vâng, t nhân đạo hàm thành, đó là phép xấp xỉ tuyến tính để hàm thay đổi như thế nào. Bây giờ, nếu chúng ta muốn chính xác hơn nữa, có số hạng khác, đó là t ^ 2 trên hai nhân đạo hàm bậc hai. Và, nếu chúng tôi muốn chính xác hơn nữa, bạn sẽ có t ^ 3 trên sáu nhân với đạo hàm bậc ba tại không. Vâng, và bạn có thể tiếp tục, và v.v. Tuy nhiên, chúng ta sẽ không cần nhiều thêm nữa. Vì vậy, nếu bạn sử dụng cái này ở đây, nó cho bạn biết rằng sine của một góc nhỏ hơn, theta, vâng, vâng, có vẻ như theta. Nhưng, nếu chúng ta muốn được chính xác hơn, thì chúng ta nên thêm trừ theta mũ ba trên sáu. Và, cô sin theta, vâng, nó không hoàn toàn là một. Nó gần bằng một trừ theta bình trên hai.

OK, so these are slightly better approximations of sine and cosine for small angles. So, now, if we try to figure out, again, what happens to our x of theta, well, it would be, sorry, theta minus theta cubed over six. That's theta cubed over six. And y, on the other hand, is going to be one minus that. That's about theta squared over two. So, now, which one of them is bigger when theta is small? Yeah, y is much larger. OK, if you take the cube of a very small number, it becomes very, very, very small. So, in fact, we can look at that. So, x, an absolute value, is much smaller than y.
Vâng, do đó, đây là phép xấp xỉ hơi tốt hơn của sin và cô sin cho các góc nhỏ.Vì vậy, bây giờ, nếu chúng ta thử suy nghĩ, một lần nữa, điều gì xảy ra với x theta của chúng ta, vâng, nó sẽ bằng, xin lỗi, theta trừ theta mũ ba trên sáu. Đó là theta mũ ba trên sáu. Và y, mặt khác, sẽ là một trừ cái đó. Đó là về theta bình trên hai. Vì vậy, bây giờ, cái nào trong số chúng lớn hơn khi theta nhỏ? Vâng, y lớn hơn nhiều. Vâng, nếu bạn lấy mũ ba của một số rất nhỏ, nó trở nên rất, rất, rất nhỏ. Vì vậy, trên thực tế, chúng ta có thể nhìn vào đó. Vì vậy, x, giá trị tuyệt đối, nhỏ hơn nhiều so với y.

And, in fact, what we can do is we can look at the ratio between y and x. That tells us the slope with which we approach the origin. So, y over x is, well, let's take the ratio of this, too. That gives us three divided by theta. That tends to infinity when theta approaches zero. So, that means that the slope of our curve, the origin is actually infinite. And so, the curve picture is really something like this. So, the instantaneous motion, if you had to describe what happens very, very close to the origin is that your point is actually not moving to the left or to the right along with the wheel.
Và, trên thực tế, những gì chúng ta có thể làm là chúng ta xét tỷ số giữa y và x. Điều đó cho chúng ta biết hệ số góc mà tại đó chúng ta tiệm cận với gốc tọa độ. Vì vậy, y trên x bằng, vâng, hãy lấy tỷ lệ của cái này, nữa. Kết quả là ba chia cho theta. Cái đó có khuynh hướng tiến đến vô cùng khi theta tiến đến không. Vì vậy, điều đó có nghĩa là hệ số góc của đường cong của chúng ta, gốc tọa độ ở vô cùng. Và như vậy, hình vẽ của đường cong thực sự giống như thế này. Vì vậy, chuyển động tức thời, nếu bạn phải mô tả những gì xảy ra rất, rất gần với gốc tọa độ là điểm đó của bạn thực sự không di chuyển sang trái hoặc sang phải cùng với bánh xe.

It's moving down and up. I mean, at the same time it is actually moving a little bit forward at the same time. But, the dominant motion, near the origin is really where it goes down and back up, so answer number four, you have vertical tangent. OK, I think I'm at the end of time. So, have a nice weekend. And, I'll see you on Tuesday. So, on Tuesday I will have practice exams for next week's test.
Nó di chuyển lên, xuống. Ý tôi là, đồng thời nó thực sự di chuyển một ít về phía trước cùng một lúc. Tuy nhiên, chuyển động chiếm ưu thế, gần gốc tọa độ thực sự là nơi nó đi xuống và trở lại, do đó, câu trả lời số bốn, bạn có tiếp tuyến thẳng đứng. Vâng, tôi nghĩ rằng đã hết giờ. Vì vậy, chúc ngày cuối tuần vui vẻ. Và, hẹn gặp lại các bạn vào thứ ba. Vì vậy, vào thứ ba tôi sẽ có bài kiểm tra thực hành chuẩn bị cho bài kiểm tra tuần tới.