

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007

Please use the following citation format:

Denis Auroux. *18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007*. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). <http://ocw.mit.edu> (accessed MM DD, YYYY). License: Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Note: Please use the actual date you accessed this material in your citation.

For more information about citing these materials or our Terms of Use, visit:
<http://ocw.mit.edu/terms>

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 26



Hệ tọa độ cầu, diện tích bề mặt

Xem bài giảng tại đây:

http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

OK, let's start. So, last week we learned how to do triple integrals in rectangular and cylindrical coordinates. And, now we have to learn about spherical coordinates, which you will see are a lot of fun. So, what's the idea of spherical coordinates? Well, you're going to represent a point in space using the distance to the origin and two angles. So, in a way, you can think of these as a space analog of polar coordinates because you just use distance to the origin, and then you have to use angles to determine in which direction you're going.

Vâng, chúng ta hãy bắt đầu buổi học. Vâng, tuần trước chúng ta đã học cách tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ Đề Các và hệ tọa độ trụ. Và, bây giờ chúng ta sẽ học về hệ tọa độ cầu, một chủ đề lí thú. Vâng, ý tưởng của hệ tọa độ cầu là gì? Vâng, bạn sẽ biểu diễn một điểm trong không gian dùng khoảng cách đến gốc tọa độ và hai góc. Vì vậy, bạn có thể xem những cái này như là sự tương tự trong không gian của hệ tọa độ cực vì bạn chỉ dùng khoảng cách đến gốc tọa độ, và sau đó bạn phải sử dụng góc để xác định hướng mà bạn sẽ đi.

So, somehow they are more polar than cylindrical coordinates. So, how do we do that? So, let's say that you have a point in space at coordinates x, y, z . Then, instead of using x, y, z , you will use, well, one thing you'll use is the distance from the origin. OK, and that is denoted by the Greek letter which looks like a curly p , but actually it's the Greek R . So -- That's the distance from the origin. And so, that can take values anywhere between zero and infinity. Then, we have to use two other angles. And, so for that, let me actually draw the vertical half plane that contains our point starting from the z axis.

Vì vậy, chúng ta nhiều cực hơn so với hệ tọa độ trụ. Vâng, chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, giả sử rằng bạn có một điểm trong không gian có tọa độ x, y, z . Thế thì, thay vì sử dụng x, y, z , bạn sẽ dùng, vâng, khoảng cách từ gốc tọa độ. Vâng, và nó được ký hiệu bằng chữ Hy Lạp trông giống như p xoắn, nó tương ứng với kí tự R của chúng ta. Vâng - Đó là khoảng cách từ gốc tọa độ. Và như vậy, nó có thể lấy bất kì giá trị nào giữa không và vô cùng. Sau đó, chúng ta sẽ sử dụng hai góc khác. Và, vì vậy để làm điều đó, chúng ta hãy vẽ nửa mặt phẳng thẳng đứng chứa điểm chúng ta đang xét từ trục z .

OK, so then we have two new angles. Well, one of them is not really new. One is new. That's ϕ is the angle downwards from the z axis. And the other one, θ , is the angle counterclockwise from the x axis. OK, so ϕ , let me do it better. So, there's two ways to draw the letter ϕ , by the way. And, I recommend this one because it doesn't look like a ρ . So, that's easier. That's the angle that you have to go down from the positive z axis.

Vâng, do đó chúng ta có hai góc mới. Vâng, một trong số chúng không thực sự mới. Cái mới. Đó là ϕ là góc đi xuống từ trục z . Và cái kia, θ , là góc ngược chiều kim đồng hồ từ trục x . Vâng, do đó ϕ , hãy để tôi làm cho nó tốt hơn. Vâng, nhân đây, có hai cách để vẽ kí tự ϕ . Và, tôi đề nghị cái này bởi vì nó không giống ρ . Vì vậy, nó dễ hơn. Đó là góc mà bạn phải đi xuống từ trục z dương.

And, so that angle varies from zero when you're on the z axis, increases, increase to π over two when you are on the xy plane all the way to π or 180° when you are on

the negative z axis. It doesn't go beyond that. OK, so -- Phi is always between zero and pi. And, finally, the last one, theta, is just going to be the same as before. So, it's the angle after you project to the xy plane. That's the angle counterclockwise from the x axis. OK, so that's a little bit overwhelming not just because of the new letters, but also because there is a lot of angles in there. So, let me just try to, you know, suggest two things that might help you a little bit.

Và, do đó góc đó thay đổi từ không khi bạn ở trên trục z, tăng, tăng đến pi trên hai khi bạn ở trong mặt phẳng xy rồi tăng đến pi hoặc 180 ° khi bạn ở trục z âm. Nó không vượt khỏi giá trị đó. Vâng, vì vậy - Phi luôn luôn nằm giữa không và pi. Và, cuối cùng, cái cuối cùng, theta, sẽ giống như trước. Vì vậy, đó là góc sau khi bạn chiếu xuống mặt phẳng xy. Nó là góc ngược chiều kim đồng hồ từ trục x. Vâng, vì vậy các quy ước này hơi áp đặt không chỉ bởi vì các kí tự mới, mà còn bởi vì có nhiều góc ở đó. Vì vậy, hãy để tôi thử, bạn biết, đề nghị hai thứ để giúp bạn một chút.

So, one is, these are called spherical coordinates because if you fix the value of rho, then you are moving on a sphere centered at the origin. OK, so let's look at what happens on a sphere centered at the origin, so, with equation rho equals a. Well, then phi measures how far south you are going, measures the distance from the North Pole. So, if you've learned about latitude and longitude in geography, well, phi and theta you can think of as latitude and longitude except with slightly different conventions. OK, so, phi is more or less the same thing as latitude in the sense that it measures how far north or south you are. The only difference is in geography, latitude is zero on the equator and becomes something north, something south, depending on how far you go from the equator.

Vì vậy, nó là, đây được gọi là các tọa độ cầu bởi vì nếu bạn giữ giá trị rho không đổi, thì bạn sẽ di chuyển một hình cầu tâm tại gốc tọa độ. Vâng, chúng ta hãy xét những gì xảy ra trên hình cầu tâm tại gốc tọa độ, vâng, với phương trình rho bằng a. Vâng, thế thì phi đo bạn đi về hướng nam xa bao nhiêu, đo khoảng cách từ Bắc Cực. Vâng, nếu bạn đã học về vĩ độ và kinh độ trong địa lý, vâng, bạn có thể xem phi và theta là vĩ độ và kinh độ, ngoại trừ với một chút khác nhau về mặt quy ước. Vâng, vì vậy, phi ít nhiều giống như vĩ độ theo nghĩa là nó đo bạn ở xa bao nhiêu từ phía bắc hay phía nam. Sự khác biệt duy nhất là trong địa lý, vĩ độ bằng không trên đường xích đạo và cái gì ở phía bắc, cái gì ở phía nam phụ thuộc vào bạn ở xa bao nhiêu từ xích đạo.

Here, you measure a latitude starting from the North Pole which is zero, increasing all the way to the South Pole, which is at π . And, theta or you can think of as longitude, which measures how far you are east or west. So, the Greenwich Meridian would be here, now, the one on the x axis. That's the one you use as the origin for longitude, OK? Now, if you don't like geography, here's another way to think about it. So -

Ở đây, bạn đo vĩ độ bắt đầu từ Bắc Cực bằng không, tăng theo mọi đường đến Cực Nam, vĩ độ bằng π . Và, theta hoặc bạn có thể xem như kinh độ, nó đo bạn đang ở phía đông hoặc tây xa bao nhiêu. Vì vậy, đài thiên văn Greenwich sẽ ở đây, bây giờ, cái trên trục x. Đó là cái bạn dùng như gốc cho kinh độ, đúng không? Bây giờ, nếu bạn không thích địa lý, đây là một cách khác để xét nó. Vâng-

Let's start again from cylindrical coordinates, which hopefully you're kind of comfortable with now. OK, so you know about cylindrical coordinates where we have the z coordinates stay z, and the xy plane we do R and theta polar coordinates. And now, let's think about what happens when you look at just one of these vertical planes containing the z axis. So, you have the z axis, and then you have the direction away from the z axis, which I will call r, just because that's what r measures. Of course, r goes all around the z axis, but I'm just doing a slice through one of these vertical half planes, fixing the value of theta.

Lại bắt đầu từ hệ tọa độ trụ, hệ tọa độ mà có lẽ bây giờ bạn đã quen thuộc. Vâng, vì vậy bạn biết trong hệ tọa độ trụ chúng ta vẫn có z là z, và mặt phẳng xy chúng ta làm các tọa độ cực R và theta. Và bây giờ, hãy xét những gì xảy ra khi chúng ta chỉ xét một trong những mặt phẳng thẳng đứng chứa trục z. Vì vậy, bạn có trục z, và sau đó bạn có hướng ra xa từ trục z, tôi sẽ gọi là r, vì r đo cái đó. Tất nhiên, r đi mọi đường xung quanh trục z, nhưng tôi chỉ làm một mặt cắt qua một trong số các nửa mặt phẳng thẳng đứng này, cố định giá trị của theta.

Then, r of course is a polar coordinate seen from the point of view of the xy plane. But here, it looks more like you have rectangular coordinates again. So the idea of spherical coordinate is you're going to polar coordinates again in the rz plane. OK, so if I have a point here, then rho will be the distance from the origin. And phi will be the angle, except it's measured from the positive z axis, not from the horizontal axis. Sau đó, r tất nhiên là một tọa độ cực được nhìn từ điểm nhìn của mặt phẳng xy. Nhưng ở đây, có vẻ như bạn lại có các tọa độ Đề Các. Vì vậy, ý tưởng của tọa độ cầu là bạn sẽ lại đến các tọa độ cực trong mặt phẳng rz. Vâng, do đó, nếu tôi có một điểm ở đây, thì rho sẽ là khoảng cách từ gốc tọa độ. Và phi sẽ là góc, ngoại trừ nó được tính từ trục z dương, không phải từ trục nằm ngang.

But, the idea in here, see, let me put that between quotes because I'm not sure how correct that is, but in a way, you can think of this as polar coordinates in the rz plane. So, in particular, that's the key to understanding how to switch between spherical coordinates and cylindrical coordinates, and then all the way to x, y, z if you want, right, because this picture here tells us how to express z and r in terms of rho and phi.

Tuy nhiên, ý tưởng ở đây, thấy không, chúng ta hãy đặt cái đó giữa những dấu ngoặc kép vì tôi không chắc nó chính xác bao nhiêu, nhưng theo cách nào đó, bạn có thể nghĩ cái này như các tọa độ cực trong mặt phẳng rz. Vì vậy, đặc biệt, đó là chìa khóa để hiểu cách chuyển giữa hệ tọa độ cầu và hệ tọa độ trụ, và sau đó là hệ tọa độ Đề Các nếu bạn muốn, đúng, bởi vì hình ở đây cho chúng ta biết cách biểu diễn z và r theo rho và phi.

So, let's see how that works. If I project here or here, so, this line is z. But, it's also rho times cosine phi. So, I get z equals rho cos phi. And, if I look at r, it's the same thing, but on the other side. So, r will be rho sine phi. OK, so you can use this to switch back and forth between spherical and cylindrical. And of course, if you remember what x and y were in terms of r and theta, you can also keep doing this to figure out, oops.

Vâng, chúng ta hãy xét quy luật của nó. Nếu tôi chiếu ở đây và ở đây, vâng, đường này là

z. Tuy nhiên, nó cũng là rho nhân cos phi. Vì vậy, tôi được z bằng rho cos phi. Và, nếu tôi xét r, nó tương tự, nhưng ở phía bên kia. Vì vậy, r sẽ là rho sine phi. Vâng, vì vậy bạn có thể sử dụng cái này để chuyển đổi qua lại giữa cầu và trụ. Và dĩ nhiên, nếu bạn nhớ x và y là gì theo r và theta, bạn cũng có thể tiếp tục làm như thế này để chỉ ra, oops.

So, x is $r \cos \theta$. That becomes $\rho \sin \phi \cos \theta$. Y is $r \sin \theta$. So, that becomes $\rho \sin \phi \sin \theta$. And z is $\rho \cos \phi$. But, basically you don't really need to remember these formulas as long as you remember how to express r in terms of rho sine phi, and x equals $r \cos \theta$. So, now, of course, we're going to use spherical coordinates in situations where we have a lot of symmetry, and in particular, where the z axis plays a special role. Actually, that's the same with cylindrical coordinates.

Vâng, x bằng $r \cos \theta$. Cái đó trở thành rho sin phi cos theta. Y bằng $r \sin \theta$. Vì vậy, nó trở thành rho sin phi sin theta. Và z bằng rho cos phi. Tuy nhiên, về cơ bản bạn không thực sự cần phải nhớ các công thức này miễn là bạn vẫn còn nhớ cách biểu diễn r theo rho sine phi, và x bằng $r \cos \theta$. Vì vậy, bây giờ, tất nhiên, chúng ta sẽ sử dụng hệ tọa độ cầu trong các bài toán có tính đối xứng cao, và đặc biệt, ở đây trục z đóng vai trò đặc biệt. Trên thực tế, nó giống với hệ tọa độ trụ.

Cylindrical and spherical coordinates are set up so that the z axis plays a special role. So, that means whenever you have a geometric problem, and you are not told how to choose your coordinates, it's probably wiser to try to center things on the z axis. That's where these coordinates are the best adapted. And, in case you ever need to switch backwards, I just want to point out, so, rho is the square root of $r^2 + z^2$, which means it's the square root of $x^2 + y^2 + z^2$.

Các tọa độ trụ và cầu được thiết lập để trục z đóng một vai trò đặc biệt. Vì vậy, điều đó có nghĩa là bất cứ khi nào bạn có một bài toán hình học, và bạn không nói cách chọn tọa độ của bạn, có lẽ là khôn ngoan để thử tập trung các thứ trên trục z. Đó là nơi mà các tọa độ này phù hợp tốt nhất. Và, trong trường hợp bạn cần chuyển đổi ngược trở lại, tôi chỉ muốn chỉ ra, vâng, rho bằng căn bậc hai của r bình cộng với z bình, có nghĩa là nó bằng căn bậc hai của x bình cộng y bình cộng z bình.

OK, so that's basically all the formulas about spherical coordinates. OK, any questions about that? OK, let's see, who had seen spherical coordinates before just to see? OK, that's not very many. So, I'm sure for, one of you saw it twice. That's great. Sorry, oops, OK, so let's just look quickly at equations of some of the things. So, as I've said, if I set rho equals a, that will be just a sphere of radius a centered at the origin.

Vâng, do đó về cơ bản đó là tất cả các công thức về tọa độ cầu. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về điều đó không? Vâng, xem nào, ai đã từng thấy các tọa độ cầu trước rồi? Vâng, không nhiều. Vì vậy, tôi chắc chắn, một số bạn đã thấy nó hai lần. Thật tuyệt. Xin lỗi, oops, được rồi, vì vậy chúng ta hãy xét nhanh những phương trình của một vài thứ. Vâng, như tôi đã nói, nếu tôi đặt rho bằng a, đó sẽ chỉ là một hình cầu bán kính a tâm tại gốc tọa độ.

More interesting things: let's say I give you phi equals pi over four. What do you think that looks like? Actually, let's take a quick poll on things. OK, yeah, everyone seems to be saying it's a cone, and that's indeed the correct answer. So, how do we see that? Well, remember, phi is the angle downward from the z axis. So, let's say that I'm going to look first at what happens if I'm in the right half of a plane of a blackboard, so, in the yz plane. Then, phi is the angle downward from here. So, if I want to get pi over four, that's 45°. That means I'm going to go diagonally like this. Of course, if I'm in the left half of a plane of a blackboard, it's going to be the same. I also take pi over four.

Thêm vài điều thú vị: giả sử tôi cho bạn phi bằng pi trên bốn. Bạn nghĩ nó trông như thế nào? Chúng ta hãy thăm dò ý kiến nhanh vài thứ. Đúng rồi, vâng, mọi người nói là có thể là một nón, và đó thực sự là câu trả lời đúng. Vậy, làm thế nào để chúng ta thấy điều đó? Vâng, hãy nhớ rằng, phi là góc hướng xuống từ trục z. Vì vậy, giả sử rằng trước hết tôi sẽ xét những gì xảy ra nếu tôi ở nửa phải của mặt phẳng bảng đen, vâng, trong mặt phẳng yz. Thế thì, phi là góc hướng xuống từ đây. Vì vậy, nếu tôi muốn nhận được pi trên bốn, tức là 45°. Điều đó có nghĩa là tôi sẽ đi theo đường chéo như thế này. Tất nhiên, nếu tôi ở trong nửa trái của mặt phẳng bảng đen, nó sẽ là như nhau. Tương tự, tôi cũng lấy pi trên bốn.

And, I get the other half. And, because the equation does not involve theta, it's all the same if I rotate my vertical plane around the z axis. So, I get the same picture in any of these vertical half planes, actually. OK, now, so this is phi equals pi over four. And, just in case, to point out to you what's going on, when phi equals pi over four, cosine and sine are equal to each other. They are both one over root two. So, you can find, again, the equation of this thing in cylindrical coordinates, which I'll remind you was z equals r. OK, in general, phi equals some given number, or z equals some number times r. That will be a cone centered on the z axis. OK, a special case: what if I say phi equals pi over two?

Và, tôi nhận được nửa còn lại. Và, bởi vì phương trình không liên quan đến theta, tất cả tương tự như tôi quay mặt phẳng thẳng đứng của tôi xung quanh trục z. Vì vậy, tôi nhận được cùng một hình trong bất kỳ cái nào trong số những nửa mặt phẳng thẳng đứng này. Vâng, bây giờ, vì vậy đây là phi bằng pi trên bốn. Và, chỉ trong trường hợp, để chỉ ra cho bạn những gì đang xảy ra, khi phi bằng pi trên bốn, cos và sin bằng nhau. Cả hai đều bằng một trên căn hai. Vì vậy, một lần nữa, bạn có thể tìm, phương trình của cái này trong tọa độ trụ, tôi nhắc bạn nó là z bằng r. Vâng, nói chung, phi bằng một số cho trước nào đó, hoặc z bằng một số nào đó nhân r. Đó sẽ là một nón có tâm trên trục z. Vâng, một trường hợp đặc biệt: Phi bằng pi trên hai sẽ có dạng như thế nào?

Yeah, it's just going to be the xy plane. OK, that's the flattest of all cones. OK, so phi equals pi over two is going to be just the xy plane. And, in general, if phi is less than pi over two, then you are in the upper half space. If phi is more than pi over two, you'll be in the lower half space. OK, so that's pretty much all we need to know at this point. So, what's next? Well, remember we were trying to do triple integrals. So now we're going to triple integrals in spherical coordinates. And, for that, we first need to understand what the volume element is. What will be dV? OK, so dV will be something, d rho, d phi, d theta, or in any order that you want.

À, nó chính là mặt phẳng xy. Vâng, đó là cái phẳng nhất trong tất cả các nón. Vâng, do đó, phi bằng pi trên hai sẽ chỉ là mặt phẳng xy. Và, nói chung, nếu phi nhỏ hơn pi trên hai, thì bạn ở nửa phần không gian cao hơn. Nếu phi lớn hơn pi trên hai, bạn sẽ ở nửa phần không gian thấp hơn. Vâng, vì vậy có khá nhiều thứ mà tất cả chúng ta cần biết vào lúc này. Vâng, còn gì nữa? Vâng, hãy nhớ chúng ta đã thử tính tích phân ba lớp. Vâng, bây giờ chúng ta sẽ tính tích phân ba lớp trong tọa độ cầu. Và, để làm điều đó, trước hết chúng ta cần biết yếu tố thể tích. dV là gì? Vâng, do đó, dV sẽ là cái gì đó, $d\rho$, $d\phi$, $d\theta$, hoặc có thể theo bất kì thứ tự nào mà bạn muốn.

But, this one is usually the most convenient. So, to find out what it is, well, we should look at how we are going to be slicing things now. OK, so if you integrate $d\rho$, $d\phi$, $d\theta$, it means that you are actually slicing your solid into little pieces that live, somehow, if you set an interval of rows, OK, sorry, maybe I should, so, if you first integrate over ρ , it means that you will actually choose first the direction from the origin even by ϕ and θ .

Tuy nhiên, thông thường cái này sẽ thuận tiện nhất. Vì vậy, để tìm nó là gì, vâng, bây giờ chúng ta sẽ xét cách chúng ta sẽ cắt các thứ. Vâng, vậy nếu bạn lấy tích phân $d\rho$, $d\phi$, $d\theta$, có nghĩa là bạn đang thực sự cắt vật rắn của bạn thành những miếng nhỏ nằm, bằng cách nào đó, nếu bạn thiết lập khoảng cách của các hàng, vâng, xin lỗi, có lẽ tôi nên, vâng, nếu đầu tiên bạn lấy tích phân trên ρ , có nghĩa là trước hết bạn chọn hướng từ gốc tọa độ qua cả ϕ và θ .

And, in that direction, you will try to figure out, how far does your region extend? And, of course, how far that goes might depend on ϕ and θ . Then, you will vary ϕ . So, you have to know, for a given value of θ , how far down does your solid extend? And, finally, the value of θ will correspond to, in which directions around the z axis do we go? So, we're going to see that in examples. But before we can do that, we need to get the volume element. So, what I would like to suggest is that we need to figure out, what is the volume of a small piece of solid which corresponds to a certain change, $\Delta\rho$, $\Delta\phi$, and $\Delta\theta$?

Và, theo hướng đó, bạn sẽ thử chỉ ra, vùng của bạn mở rộng bao xa? Và, tất nhiên, điều đó phụ thuộc vào ϕ và θ . Thế thì, bạn sẽ thay đổi ϕ . Vì vậy, bạn phải biết, đối với một giá trị nhất định của θ , vật rắn của bạn mở rộng xuống dưới bao xa? Và, cuối cùng, giá trị của θ sẽ tương ứng với, chúng ta đi quanh trục z theo hướng nào? Vì vậy, chúng ta sẽ thấy điều đó trong các ví dụ. Nhưng trước khi chúng ta làm điều đó, chúng ta cần biết yếu tố thể tích. Vâng, những gì tôi muốn đề nghị là chúng ta cần phải tìm ra, thể tích của một phần nhỏ của vật rắn tương ứng với sự thay đổi nhất định của, $\Delta\rho$, $\Delta\phi$, và $\Delta\theta$ là gì?

So, delta rho means that you have two concentric spheres, and you are looking at a very thin shell in between them. And then, you would be looking at a piece of that spherical shell corresponding to small values of phi and theta. So, because I am stretching the limits of my ability to draw on the board, here's a picture. I'm going to try to reproduce on the board, but so let's start by looking just at what happens on the sphere of radius a, and let's try to figure out the surface area elements on the sphere in terms of phi and theta. And then, we'll add the rho direction. And then we'll add the rho direction. OK, so -

Vì vậy, delta rho có nghĩa là bạn có hai mặt cầu đồng tâm, và bạn xét một vỏ rất mỏng ở giữa chúng. Và sau đó, bạn sẽ xét một mảnh nhỏ vỏ cầu đó tương ứng với giá trị nhỏ của phi và theta. Vì vậy, bởi vì tôi kéo dài giới hạn khả năng của mình để vẽ trên bảng, đây là hình vẽ. Tôi sẽ cố gắng sao chép lại trên bảng, nhưng vâng chúng ta hãy bắt đầu xét những gì xảy ra trên hình cầu bán kính a, và chúng ta hãy cố gắng tìm ra các yếu tố diện tích bề mặt trên hình cầu theo phi và theta. Và sau đó, chúng ta sẽ thêm vào hướng rho. Và sau đó chúng ta sẽ thêm vào hướng rho. Vâng, vì vậy -

So, let me say, let's start by understanding surface area on a sphere of radius a. So, that means we'll be looking at a little piece of the sphere corresponding to angles delta phi and in that direction here delta theta. OK, so when you draw a map of the world on a globe, that's exactly what the grid lines form for you. So, what's the area of this guy? Well, of course, all the sides are curvy. They are all on the sphere. None of them are straight. But still, if it's small enough and it looks like a rectangle, so let's just try to figure out, what are the sides of your rectangle?

Vâng, hãy để tôi nói, chúng ta hãy bắt đầu bằng cách xét diện tích bề mặt trên hình cầu bán kính a. Vâng, có nghĩa là chúng ta sẽ xét một phần nhỏ của hình cầu tương ứng với góc delta phi và theo hướng đó ở đây delta theta. Vâng, vì vậy khi bạn vẽ bản đồ thế giới trên một quả địa cầu, đó chính là những đường lưới hình thành cho bạn. Vì vậy, diện tích của thặng này là gì? Vâng, tất nhiên, tất cả các mặt là cong. Tất cả chúng ở trên hình cầu. Không cái nào trong chúng thẳng. Nhưng vẫn còn, nếu nó đủ nhỏ và giống một hình chữ nhật, vì vậy hãy thử chỉ ra, các cạnh của hình chữ nhật là gì?

OK, so, let's see, well, I think I need to draw a bigger picture of this guy. OK, so this guy, so that's a piece of what's called a parallel in geography. That's a circle that goes east-west. So now, this parallel as a circle of radius, well, the radius is less than a because if your vertical is to the North Pole, it will be actually much smaller. So, that's why when you say you're going around the world it depends on whether you do it at the equator or the North Pole. It's much easier at the North Pole. So, anyway, this is a piece of a circle of radius, well, the radius is what I would call r because that's the distance from the z axis. OK, that's actually pretty hard to see now.

Vâng, vì vậy, xem nào, vâng, tôi nghĩ tôi biết vẽ hình lớn hơn của thặng này. Vâng, do đó thặng này, vì vậy đó là một phần của những gì được gọi là vĩ tuyến trong địa lý. Đó là một đường tròn đi về phía đông-tây. Vì vậy bây giờ, vĩ tuyến này như một đường tròn bán kính, vâng, bán kính nhỏ hơn a vì nếu chiều dọc của bạn đến Bắc Cực, nó sẽ thực sự nhỏ hơn nhiều. Vì vậy, đó là lý do tại sao khi bạn nói rằng khi bạn đi vòng quanh thế giới nó phụ thuộc vào bạn làm điều đó tại đường xích đạo hay Bắc Cực. Nó dễ hơn nhiều ở Bắc Cực. Vì vậy, dù sao đi nữa, đây là một phần của đường tròn bán kính, vâng, tôi gọi bán kính là r vì đó là khoảng cách từ trục z. Vâng, bây giờ nó thực sự khó thấy.

So if you can see it better on this one, then so this guy here, this length is r. And, r is just rho, well, what was a times sine phi. Remember, we have this angle phi in here. I should use some color. It's getting very cluttered. So, we have this phi, and so r is going to be rho sine phi. That rho is a. So, let me just put a sine phi. OK, and the corresponding angle is going to be measured by theta. So, the length of this is going to be a sine phi delta theta.

Vì vậy, nếu bạn có thể thấy nó tốt hơn trên cái này, thì thặng này ở đây cũng vậy, chiều

dài là r . Và, r chỉ là ρ , vâng, đó là a nhân $\sin \phi$. Hãy nhớ rằng, chúng ta có góc ϕ này tại đây. Tôi nên dùng màu nào đó. Nó trở nên quá lộn xộn. Vâng, chúng ta có ϕ này, và do đó r sẽ là $\rho \sin \phi$. ρ đó bằng a . Vì vậy, hãy để tôi chỉ đặt một $\sin \phi$. Vâng, và góc tương ứng sẽ được đo theo θ . Vì vậy, chiều dài của cái này sẽ là $\sin \phi \, d\theta$.

That's for this side. Now, what about that side, the north-south side? Well, if you're moving north-south, it's not like east-west. You always have to go all the way from the North Pole to the South Pole. So, that's actually a great circle meridian of length, well, I mean, well, the radius is the radius of the sphere. Total length is $2\pi a$. So, this is a piece of a circle of radius a . And so, now, the length of this one is going to be a $\Delta \phi$. OK, so, just to recap, this is a $\sin \phi \, \Delta \theta$. And, this guy here is a $\Delta \phi$.

Đó là cho bên này. Bây giờ, bên đó thì sao, phía bắc-nam? Vâng, nếu bạn di chuyển theo hướng bắc-nam, nó không giống như Đông-Tây. Bạn luôn luôn phải đi tất cả mọi đường từ Bắc Cực đến Nam Cực. Vì vậy, đó thực sự là một kinh tuyến tròn lớn có chiều dài, vâng, ý tôi là, vâng, bán kính là bán kính của hình cầu. Chiều dài tổng cộng là $2\pi a$. Vì vậy, đây là một phần của đường tròn bán kính a . Và như vậy, bây giờ, chiều dài của cái này sẽ là $\Delta \phi$. Vâng, vì vậy, chỉ để tóm tắt, đây là $\sin \phi \, \Delta \theta$. Và, thẳng này ở đây là $\Delta \phi$.

So, you can't read it because it's -- And so, that tells us if I take a small piece of the sphere, then its surface area, Δs , is going to be approximately a $\sin \phi \, \Delta \theta \, \Delta \phi$, which I'm going to rewrite as a squared $\sin \phi \, \Delta \theta \, \Delta \phi$. So, what that means is, say that I want to integrate something just on the surface of a sphere. Well, I would use ϕ and θ as my coordinates. And then, to know how big a piece of a sphere is, I would just take a squared $\sin \phi \, d\theta$.

Vâng, bạn không thể đọc nó bởi vì nó - Và như vậy, nó cho chúng ta biết rằng nếu tôi lấy một mảnh nhỏ của hình cầu, thì diện tích bề mặt của nó, Δs , sẽ gần bằng $a \sin \phi \, \Delta \theta \, \Delta \phi$, tương đương a bình $\sin \phi \, \Delta \theta \, \Delta \phi$. Vì vậy, điều đó có nghĩa là, giả sử rằng tôi muốn lấy tích phân cái gì đó chỉ trên mặt cầu. Vâng, tôi sẽ sử dụng ϕ và θ như tọa độ của tôi. Và sau đó, để biết mảnh nhỏ của hình cầu lớn như thế nào, tôi chỉ cần lấy a bình $\sin \phi \, d\theta$.

OK, so that's the surface element in a sphere. And now, what about going back into the third dimension, so, adding some depth to these things? Well, I'm not going to try to draw a picture because you've seen that's slightly tricky. Well, let me try

anyway just you can have fun with my completely unreadable diagrams. So anyway, if you look at, now, something that's a bit like that piece of sphere, but with some thickness to it. The thickness will be $\delta\rho$, and so the volume will be roughly the area of the thing on the sphere times the thickness.

Vâng, vậy đó là yếu tố bề mặt trong một hình cầu. Và bây giờ, thế còn quay lại chiều thứ ba thì sao, vâng, thêm một độ sâu nào đó cho những cái này? Vâng, tôi sẽ không vẽ hình bởi vì bạn thấy nó hơi khó. Vâng, dù sao đi nữa hãy để tôi thử xem bạn có hài lòng với đồ thị hoàn toàn khó nhìn của tôi không. Vâng dù sao đi nữa, nếu bạn xét, bây giờ, thứ gì đó giống như một mảnh của hình cầu, nhưng với chiều dài nào đó của nó. Độ dày sẽ là $\delta\rho$, và do đó thể tích sẽ gần bằng diện tích của cái trên hình cầu nhân độ dày.

So, I claim that we will get basically the volume element just by multiplying things by $d\rho$. So, let's see that. So now, if I have a sphere of radius ρ , and another one that's slightly bigger of radius $\rho + \delta\rho$, and then I have a little box in here. Then, I know that the volume of this thing will be essentially, well, its thickness, the thickness is going to be $\delta\rho$ times the area of its base, although it doesn't really matter, which is what we've called δs .

Vì vậy, tôi cho rằng về cơ bản chúng ta sẽ có được yếu tố thể tích chỉ bằng cách nhân các thứ với $d\rho$. Vâng, hãy xét điều đó. Vì vậy bây giờ, nếu tôi có hình cầu bán kính ρ , và cái khác có bán kính hơi lớn hơn ρ cộng $\delta\rho$, và sau đó tôi có một hộp nhỏ ở đây. Thế thì, tôi biết rằng thể tích của cái này về cơ bản sẽ là, vâng, độ dày của nó, độ dày sẽ là $\delta\rho$ nhân diện tích đáy của nó, mặc dù nó không quan trọng, chúng ta gọi nó là δs .

OK, so we will get, sorry, a becomes ρ now. Square sine ϕ , $\delta\rho$, $\delta\phi$, $\delta\theta$, and so out of that we get the volume element and spherical coordinates, which is $\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$. And, that's a formula that you should remember. OK, so whenever we integrate a function, and we decide to switch to spherical coordinates, then $dx dy dz$ or $r dr d\theta dz$ will become $\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$. OK, any questions on that? No? OK, so let's -

Vâng, vì vậy chúng ta sẽ nhận được, xin lỗi, bây giờ a trở thành ρ . Bình sin ϕ , $\delta\rho$, $\delta\phi$, $\delta\theta$, và vì vậy do cái đó chúng ta nhận được yếu tố thể tích và tọa độ cầu, đó là $\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$. Và, đó là một công thức mà bạn nên nhớ. Vâng, do đó, bất cứ khi nào bạn lấy tích phân một hàm, và chúng ta chuyển sang hệ tọa độ cầu, thì $dx dy dz$ hoặc $r dr d\theta dz$ sẽ trở thành $\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$. Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về điều đó không? Không có? Vâng, vì vậy chúng ta hãy -

Let's see how that works. So, as an example, remember at the end of the last lecture, I tried to set up an example where we were looking at a sphere sliced by a slanted plane. And now, we're going to try to find the volume of that spherical cap again, but using spherical coordinates instead. So, I'm going to just be smarter than last time. So, last time, we had set up these things with a slanted plane that was cutting things diagonally. And, if I just want to find the volume of this cap, then maybe it makes more sense to rotate things so that my plane is actually horizontal, and things are going to be centered on the z axis.

Hãy xét quy luật hoạt động của nó. Vì vậy, như là một ví dụ, hãy nhớ ở phần cuối của bài giảng cuối cùng, tôi đã cố gắng thiết lập một ví dụ trong đó chúng ta đang tìm một hình cầu được cắt bởi một mặt phẳng nghiêng. Và bây giờ, chúng ta sẽ thử tìm thể tích của chóp cầu đó, nhưng thay vào đó dùng hệ tọa độ cầu. Vì vậy, tôi sẽ thông minh hơn lúc trước. Vì vậy, lần trước, chúng ta đã thiết lập những điều này với một mặt phẳng nghiêng đang cắt các thứ theo đường chéo. Và, nếu tôi chỉ muốn tìm thể tích của chóp này, thì sẽ dễ hơn nếu quay các thứ sao cho mặt phẳng của tôi thực sự nằm ngang và các thứ sẽ có tâm trên trục z .

So, in case you see that it's the same, then that's great. If not, then it doesn't really matter. You can just think of this as a new example. So, I'm going to try to find the volume of a portion of the unit sphere -- -- that lies above the horizontal plane, z

equals one over root two. OK, one over root two was the distance from the origin to our slanted plane. So, after you rotate, that say you get this value. Anyway, it's not very important. You can just treat that as a good example if you want. OK, so we can compute this in actually pretty much any coordinate system.

Vì vậy, trong trường hợp bạn thấy rằng nó giống nhau, thì điều đó thật tuyệt vời. Nếu không, thì nó không thực sự quan trọng. Bạn chỉ cần xem cái này như là một ví dụ mới. Vâng, tôi sẽ thử tìm thể tích của một phần hình cầu đơn vị - - nằm trên mặt phẳng nằm ngang, z bằng một trên căn hai. Vâng, một trên căn hai là khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng nghiêng của chúng ta. Vì vậy, sau khi bạn xoay, bạn nhận được giá trị này. Dù sao đi nữa, nó không phải quá quan trọng. Bạn có thể xem nó như là một ví dụ tốt nếu bạn muốn. Vâng, vì vậy chúng ta có thể tính cái này khá nhiều trong bất cứ hệ tọa độ nào.

And also, of course, we can set up not only the volume, but we can try to find the moment of inertia about the central axis, or all sorts of things. But, we are just doing the volume for simplicity. So, actually, this would go pretty well in cylindrical coordinates. But let's do it in spherical coordinates because that's the topic of today. A good exercise: do it in cylindrical and see if you get the same thing. So, how do we do that? Well, we have to figure out how to set up our triple integral in spherical coordinates.

Và cũng có thể, tất nhiên, chúng ta có thể thiết lập không chỉ thể tích, nhưng chúng ta có thể thử tìm moment quán tính quanh trục trung tâm, hoặc tất cả các thứ. Nhưng, chúng ta chỉ làm thể tích cho đơn giản. Vì vậy, trên thực tế, điều này sẽ khá tốt trong tọa độ trụ. Nhưng chúng ta hãy làm nó trong hệ tọa độ cầu bởi vì đó là chủ đề của ngày hôm nay. Một bài tập thực hành tốt: làm nó trong tọa độ trụ và xem thử có ra kết quả tương tự không. Vâng, chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, chúng ta phải tìm ra cách thiết lập tích phân ba lớp trong hệ tọa độ cầu.

So, remember we'll be integrating one dV . So, dV will become rho squared sin phi d rho d phi d theta. And, now as we start, we're already facing some serious problem. We want to set up the bounds for rho for a given, phi and theta. So, that means we choose latitude/longitude. We choose which direction we want to aim for, you know, which point of the sphere we want to aim at. And, we are going to shoot a ray from the origin towards this point, and we want to know what portion of the ray is in our solid. So --

Vì vậy, hãy nhớ rằng chúng ta sẽ lấy tích phân trên một dV . Vì vậy, dV sẽ trở thành rho bình sin phi d rho d phi d theta. Và, bây giờ khi chúng ta bắt đầu, chúng ta phải đối mặt với một số vấn đề nghiêm trọng. Chúng ta muốn thiết lập các cận của rho khi phi và theta cố định. Vì vậy, điều đó có nghĩa là chúng ta chọn vĩ độ / kinh độ. Chúng ta chọn hướng nào mà chúng ta muốn nhắm, bạn đã biết, điểm nào của hình cầu mà chúng ta muốn nhắm vào. Và, chúng ta sẽ bắn một tia từ gốc tọa độ hướng về điểm này, và chúng ta muốn biết phần nào của tia ở trong vật rắn. Vì vậy -

We are going to choose a value of phi and theta. And, we are going to try to figure out what part of our ray is inside this side. So, what should be clear is at which point we leave the solid, right? What's the value of rho here? It's just one. The sphere is rho equals one. That's pretty good. The question is, where do we enter the region? So, we enter the region when we go through this plane. And, the plane is z equals one over root two.

Chúng ta sẽ chọn giá trị của phi và theta. Và, chúng ta sẽ thử chỉ ra phần nào của tia của chúng ta ở bên trong phía này. Vì vậy, những gì cần phải rõ ràng là chúng ta rời khỏi vật rắn này ở điểm này, phải không? Giá trị của rho là gì ở đây? Nó chỉ là một. Hình cầu là rho bằng một. Điều đó khá tốt. Vấn đề đặt ra là, chúng ta đi vào vùng ở đâu? Vâng, chúng ta đi vào vùng khi chúng ta đi qua mặt phẳng này. Và, mặt phẳng là z bằng một trên căn hai.

So, what does that tell us about rho? Well, it tells us, so remember, z is rho cosine phi. So, the plane is z equals one over root two. That means rho cosine phi is one over root two. That means rho equals one over root two cosine phi or, as some of you know it, one over root two times second phi. OK, so if we want to set up the bounds, then we'll start with one over root two second phi all the way to one. Now, what's next? Well, so we've done, I think that's basically the hardest part of the job. Next, we have to figure out, what's the range for phi? So, the range for phi, well, we have to figure out how far to the north and to the south our region goes.

Vì vậy, điều đó cho chúng ta biết gì về rho? Vâng, nó cho chúng ta biết, nên nhớ, z bằng rho cosin phi. Vì vậy, mặt phẳng là z bằng một trên căn hai. Điều đó có nghĩa là rho cosin phi bằng một trên căn hai. Điều đó có nghĩa là rho bằng một trên căn hai cosin phi hoặc, như một số bạn đã biết, một trên căn hai nhân secan phi. Vâng, vậy nếu chúng ta muốn thiết lập các cận, thì chúng ta sẽ bắt đầu với một trên căn hai secan phi đi theo mọi đường đến một. Bây giờ, tiếp theo là gì? Vâng, vì vậy chúng ta đã thực hiện, tôi nghĩ rằng về cơ bản đó là phần khó nhất của công việc. Tiếp theo, chúng ta phải chỉ ra, phạm vi của phi là gì? Vâng, phạm vi của phi, vâng, chúng ta phải chỉ ra vùng của chúng ta cách xa cực nam và cực bắc bao nhiêu.

Well, the lower bound for phi is pretty easy, right, because we go all the way to the North Pole direction. So, phi starts at zero. The question is, where does it stop? To find out where it stops, we have to figure out, what is the value of phi when we hit the edge of the region? OK, so maybe you see it. Maybe you don't. One way to do it geometrically is to just, it's always great to draw a slice of your region. So, if you slice these things by a vertical plane, or actually even better, a vertical half plane, something to delete one half of the picture. So, I'm going to draw these r and z directions as before. So, my sphere is here. My plane is here at one over root two. And, my solid is here.

Vâng, cận dưới của phi khá dễ, phải không, bởi vì chúng ta đi theo mọi đường đến hướng Bắc Cực. Vâng, phi bắt đầu tại không. Câu hỏi là, nó dừng ở đâu? Để tìm nơi nó dừng, chúng ta phải chỉ ra, giá trị của phi là gì khi chúng ta chạm biên vùng? Vâng, như vậy có lẽ bạn thấy nó. Có lẽ bạn không. Một cách để làm điều đó về mặt hình học là chỉ cần, sẽ rất tốt để vẽ một mặt cắt của vùng của bạn. Vâng, nếu bạn cắt những thứ này bằng một mặt phẳng thẳng đứng, hoặc thực sự tốt hơn, một nửa mặt phẳng thẳng đứng, một cái gì đó để xóa một nửa hình. Vâng, tôi sẽ vẽ hướng r và z như trước. Vì vậy, hình cầu của tôi ở đây. Mặt phẳng của tôi ở đây là một trên căn hai. Và, vật rắn của tôi ở đây.

So now, the question is what is the value of phi when I'm going to stop hitting the region? And, if you try to figure out first what is this direction here, that's also one over root two. And so, this is actually 45° , also known as pi over four. The other way to think about it is at this point, well, rho is equal to one because you are on the sphere. But, you are also on the plane. So, rho cos phi is one over root two. So, if you plug rho equals one into here, you get cos phi equals one over root two which gives you phi equals pi over four. That's the other way to do it. You can do it either by calculation or by looking at the picture.

Vì vậy bây giờ, câu hỏi là giá trị của phi là gì khi tôi dừng chạm vùng? Và, nếu bạn cố gắng

trước hết chỉ ra hướng này ở đây là gì, nó cũng là một trên căn hai. Và như vậy, cái này thực sự là 45° , tức là π trên bốn. Cách khác để xét nó là tại điểm này, vâng, rho bằng một bởi vì bạn đang ở trên mặt cầu. Tuy nhiên, bạn cũng ở trên mặt phẳng. Vì vậy, rho cos phi là một trên căn hai. Vì vậy, nếu bạn thế rho bằng một vào đây, bạn sẽ được cos phi bằng một trên căn hai tương đương phi bằng π trên bốn. Đó là cách khác để làm điều đó. Bạn có thể làm nó hoặc bằng cách tính toán hoặc bằng cách nhìn hình vẽ.

OK, so either way, we've decided that phi goes from zero to π over four. So, this is π over four. Finally, what about theta? Well, because we go all around the z axis we are going to go just zero to 2π . OK, any questions about these bounds? OK, so note how the equation of this horizontal plane in spherical coordinates has become a little bit weird. But, if you remember how we do things, say that you have a line in polar coordinates, and that line does not pass through the origin, then you also end up with something like that. You get something like r equals a second theta or a cos second theta for horizontal or vertical lines. And so, it's not surprising you should get this. That's in line with the idea that we are just doing again, polar coordinates in the rz directions.

Vâng, do đó một trong hai cách, chúng ta đã quyết định rằng phi đi từ không đến π trên bốn. Vì vậy, đây là π trên bốn. Cuối cùng, còn theta thì sao? Vâng, bởi vì chúng ta đi trọn một vòng quanh trục z chúng ta sẽ đi từ không đến 2π . Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về các cận này không? Vâng, vì vậy chú ý cách phương trình mặt phẳng ngang này trở thành hơi lạ một chút như thế nào. Nhưng, nếu bạn nhớ cách chúng ta làm các thứ, giả sử rằng bạn có một đường thẳng trong tọa độ cực, và đường thẳng đó không đi qua gốc tọa độ, thì bạn cũng kết thúc với thứ gì đó như thế kia. Bạn nhận được thứ gì đó có dạng r bằng a secan theta hoặc cos secan theta cho các đường ngang và thẳng đứng. Và như vậy, không có gì ngạc nhiên khi bạn nhận được cái này. Đó là đường thẳng với ý tưởng mà chúng ta đang làm lại, các tọa độ cực theo hướng rz.

So of course, in general, things can be very messy. But, generally speaking, the kinds of regions that we will be setting up things for are no more complicated or no less complicated than what we would do in the plane in polar coordinates. OK, so there's, you know, a small list of things that you should know how to set up. But, you won't have some really, really strange thing. Yes? D rho? Oh, you mean the bounds for rho? Yes. So, in the inner integral, we are going to fix values of phi and theta. So, that means we fix in advance the direction in which we are going to shoot

a ray from the origin. So now, as we shoot this ray, we are going to hit our region somewhere. And, we are going to exit, again, somewhere else. OK, so first of all we have to figure out where we enter, where we leave.

Vì vậy, tất nhiên, nói chung, các thứ có thể rất bừa bộn. Nhưng, nói chung, các loại vùng mà chúng ta sẽ thiết lập các thứ không quá khó hoặc quá dễ hơn so với những gì chúng ta sẽ làm trong mặt phẳng trong các tọa độ cực. Vâng, vì vậy có, bạn đã biết, một danh sách nhỏ các thứ mà bạn cần biết cách thiết lập. Tuy nhiên, bạn sẽ không có một số thứ thực sự, thực sự lạ. Xin mời? $d\rho$? Oh, ý bạn có phải là các cận của ρ ? Vâng. Vì vậy, trong tích phân bên trong, chúng ta giữ giá trị của ϕ và θ không đổi. Vì vậy, có nghĩa là chúng ta cố định trước hướng mà chúng ta sẽ bắn tia từ gốc tọa độ. Vì vậy, bây giờ, khi chúng ta bắn tia này, chúng ta sẽ chạm vùng của chúng ta ở đâu đó. Và, một lần nữa, chúng ta sẽ thoát, ở một nơi khác. Vâng, vì vậy trước hết chúng ta phải chỉ ra nơi chúng ta vào, nơi chúng ta ra.

Well, we enter when the ray hits the flat face, when we hit the plane. And, we would leave when we hit the sphere. So, the lower bound will be given by the plane. The upper bound will be given by the sphere. So now, you have to get spherical coordinate equations for both the plane and the sphere. For the sphere, that's easy. That's ρ equals one. For the plane, you start with z equals one over root two. And, you switch it into spherical coordinates.

Vâng, chúng ta vào khi tia chạm mặt phẳng, khi chúng ta chạm mặt phẳng. Và, chúng ta sẽ rời khỏi khi chúng ta chạm mặt cầu. Vì vậy, cận dưới sẽ được cho bởi mặt phẳng. Cận trên được cho bởi mặt cầu. Vì vậy bây giờ, bạn phải nhận được các phương trình tọa độ cầu cho cả mặt phẳng và mặt cầu. Đối với hình cầu, điều đó dễ. Đó là ρ bằng một. Đối với mặt phẳng, bạn bắt đầu với z bằng một trên căn hai. Và, bạn chuyển nó sang hệ tọa độ cầu.

And then, you solve for ρ . And, that's how you get these bounds. Is that OK? All right, so that's the setup part. And, of course, the evaluation part goes as usual. And, since I'm running short of time, I'm not going to actually do the evaluation. I'm going to let you figure out how it goes. Let me just say in case you want to check your answers, so, at the end you get 2π over three minus 5π over six root two.

Và sau đó, bạn giải để tìm ρ . Và, đó là cách bạn nhận được những cận này. Điều đó ổn chứ? Được rồi, vì vậy đó là phần thiết lập. Và, tất nhiên, phần tính toán như bình thường. Và, vì mục đích tiết kiệm thời gian, tôi sẽ không làm phần tính toán. Tôi sẽ để cho bạn làm. Hãy để tôi cho bạn biết trong trường hợp bạn muốn kiểm tra câu trả lời của bạn, vì vậy, kết quả cuối cùng là 2π trên ba trừ 5π trên sáu căn hai.

Yes, it looks quite complicated. That's basically because you get one over, well, you get a second square when you integrate C . When you integrate ρ squared, you will get ρ cubed over three. But that ρ cubed will give you a second cube for the lower bound. And, when you integrate sine ϕ second cubed ϕ , you do a substitution. You see that integrates to one over second squared with a factor in front.

Đúng, nó trông khá phức tạp. Về cơ bản đó là bởi vì bạn có một trên, vâng, bạn có a secan bình khi bạn lấy tích phân C . Khi bạn lấy tích phân ρ bình, bạn sẽ nhận được ρ mũ ba trên ba. Nhưng ρ mũ ba đó sẽ cho bạn một secan mũ ba đối với cận dưới. Và, khi bạn lấy tích phân sin ϕ secan mũ ba ϕ , bạn làm phép thế. Bạn thấy rằng tích phân của nó bằng một trên secan bình với một hệ số ở phía trước.

So, in the second square, when you plug in, no, that's not quite all of it. Yeah, well, the second square is one thing, and also the other bound you get sine ϕ which integrates to cosine ϕ . So, anyways, you get lots of things. OK, enough about it. So, next, I have to tell you about applications. And, of course, well, there's the same applications that we've seen that last time, finding volumes, finding masses, finding average values of functions.

Vì vậy, trong secan bình, khi bạn thế vào, không, đó không hoàn toàn là tất cả của nó. À,

vàng, secan bình là một thứ, và tương tự còn lại bạn nhận được sin phi là tích phân của cos phi. Vì vậy, dù sao đi nữa, bạn nhận được rất nhiều thứ. Vàng, đủ về nó. Vàng, tiếp theo, tôi phải cho bạn biết về các ứng dụng. Và, tất nhiên, vàng, có các ứng dụng tương tự mà chúng ta đã thấy lần trước, tìm thể tích, tìm khối lượng, tìm giá trị trung bình của hàm.

In particular, now, we could say to find the average distance of a point in this solid to the origin. Well, spherical coordinates become appealing because the function you are averaging is just rho while in other coordinate systems it's a more complicated function. So, if you are asked to find the average distance from the origin, spherical coordinates can be interesting. Also, well, there's moments of inertia, preferably the one about the z axis because if you have to integrate something that involves x or y, then your integrand will contain that awful rho sine phi sine theta or rho sine phi cosine theta, and then it won't be much fun to evaluate. So, that anyway, there's the usual ones. And then there's a new one. So, in physics, you've probably seen things about gravitational attraction.

Đặc biệt, hiện nay, chúng ta có thể nói để tìm khoảng cách trung bình của một điểm trong chất rắn này đến gốc tọa độ. Vàng, tọa độ cầu trở thành hấp dẫn bởi vì hàm mà bạn lấy trung bình chỉ là rho trong khi các hệ tọa độ khác nó là hàm phức tạp hơn. Vì vậy, nếu bạn được yêu cầu tìm khoảng cách trung bình từ gốc tọa độ, các tọa độ cầu có thể thú vị. Tương tự, vàng, có moment quán tính, được ưa thích hơn cái quanh trục z bởi vì nếu bạn phải lấy tích phân cái gì đó liên quan đến x hoặc y, thì biểu thức dưới dấu tích phân sẽ chứa rho sin phi sin theta khủng khiếp hoặc rho sine phi cosine theta, và thế thì sẽ không vui khi tính. Như vậy, cái đó dù sao đi nữa, có những cái thông thường. Và sau đó có một cái mới. Vì vậy, trong vật lý, bạn đã có thể đã gặp những thứ liên quan đến sức hút hấp dẫn.

If not, well, it's what causes apples to fall and other things like that as well. So, anyway, physics tells you that if you have two masses, then they attract each other with a force that's directed towards each other. And in intensity, it's proportional to the two masses, and inversely proportional to the square of the distance between them. So, if you have a given solid with a certain mass distribution, and you want to know how it attracts something else that you will put nearby, then you actually have to, the first approximation will be to say, well, let's just put a point mass at its center of mass. But, if your solid is actually not homogenous, or has a weird shape, then that's not actually the exact answer. So, in general, you would have to just take every single piece of your object and figure out how it attracts you, and then compute the sum of these.

Nếu không, vàng, nó là những gì làm cho quả táo rơi xuống và các thứ khác giống như thế nữa. Vì vậy, dù sao đi nữa, vật lý cho chúng ta biết rằng nếu bạn có hai khối lượng, thì chúng hút nhau với một lực hướng về nhau. Và cường độ, của nó tỉ lệ thuận với hai khối lượng, và tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Vì vậy, nếu bạn có một vật rắn với phân bố khối lượng nào đó, và bạn muốn biết nó hút cái mà bạn sẽ đặt gần nó như thế nào, vàng, hãy để tôi đặt chất điểm tại khối tâm của nó. Nhưng, nếu chất rắn của bạn không thực sự đồng nhất, hoặc có hình dạng kỳ lạ, thì đó không phải là câu trả lời chính xác. Vì vậy, nói chung, bạn sẽ phải lấy mỗi miếng của vật thể và chỉ ra nó hút bạn như thế nào, và sau đó tính tổng của những cái này.

So, for example, if you want to understand why anything that you drop in this room will fall down, you have to understand that Boston is actually attracting it towards Boston. And, Somerville's attracting it towards Somerville, and lots of things like that. And, China, which is much further on the other side is going to attract towards China. But, there's a lot of stuff on the other side of the Earth. And so, overall, it's supposed to end up just going down. OK, so now, how to find this out, well, you have to just integrate over the entire Earth.

Vì vậy, ví dụ, nếu bạn muốn biết tại sao bất cứ thứ gì mà bạn thả ra trong phòng bạn cũng sẽ rơi xuống, bạn phải hiểu rằng Boston thực sự hút nó về hướng Boston. Và, Somerville đang hút nó về hướng Somerville, và nhiều thứ tương tự khác. Và, Trung Quốc, ở xa hơn phía bên kia sẽ hút về hướng Trung Quốc. Tuy nhiên, có rất nhiều thứ ở phía bên kia của Trái Đất. Và như vậy, toàn bộ, nó được cho là chỉ hướng xuống. Vâng, vậy bây giờ, làm thế nào để tìm thấy cái này, vâng, bạn phải lấy tích phân trên toàn bộ Trái Đất.

OK, so let's try to see how that goes. So, the setup that's going to be easiest for us to do computations is going to be that we are going to be the test mass that's going to be falling. And, we are going to put ourselves at the origin. And, the solid that's going to attract us is going to be wherever we want in space. You'll see, putting yourself at the origin is going to be better. Well, you have to put something at the origin.

Vâng, vì vậy hãy thử xem nó đi như thế nào. Vì vậy, thiết lập sẽ dễ nhất đối với chúng ta để tính toán sẽ là chúng ta sẽ là khối lượng thử đang rơi. Và, chúng ta sẽ tự đặt mình tại gốc tọa độ. Và, vật rắn sẽ hút chúng ta sẽ ở bất cứ nơi đâu chúng ta muốn trong không gian. Bạn sẽ thấy, tự đặt mình tại gốc tọa độ sẽ tốt hơn. Vâng, bạn phải đặt cái gì đó tại gốc tọa độ.

And, the one that will stay a point mass, I mean, in my case not really a point, but anyway, let's say that I'm a point. And then, I have a solid attracting me. Well, so then if I take a small piece of it with the mass delta M, then that portion of the solid exerts a force on me, which is going to be directed towards it, and we'll have intensity. So, the gravitational force -- -- exerted by the mass delta M at the point of x, y, z in space on a mass at the origin. Well, we know how to express that.

Và, cái sẽ nằm tại một chất điểm, ý tôi là, trong trường hợp của tôi không thực sự là một điểm, nhưng dù sao đi nữa, giả sử rằng tôi ở một điểm. Và sau đó, tôi có một vật rắn hút tôi. Vâng, thế thì nếu tôi lấy một phần nhỏ của nó khối lượng là delta M, thì phần đó của vật rắn tác dụng lực lên tôi, lực sẽ hướng về phía nó, và chúng ta sẽ có cường độ. Vì vậy, lực hấp dẫn -- tác dụng bởi khối lượng delta M tại điểm x, y, z trong không gian lên một khối lượng đặt tại gốc tọa độ. Vâng, chúng ta biết cách làm sao để biểu diễn nó.

Physics tells us that the magnitude of this force is going to be, well, G is just a constant. It's the gravitational constant, and its value depends on which unit system you use. Usually it's pretty small, times the mass delta M, times the test mass little m , divided by the square of the distance. And, the distance from U to that thing is conveniently called ρ since we've been introducing spherical coordinates. So, that's the size, that's the magnitude of the force. We also need to know the direction of the force. And, the direction is going to be towards that point. So, the direction of the force is going to be that of x, y, z .

Vật lý cho chúng ta biết rằng độ lớn của lực này sẽ là, vâng, G chỉ là một hằng số. Nó là hằng số hấp dẫn, và giá trị của nó phụ thuộc vào hệ thống đơn vị mà bạn sử dụng. Thông thường nó khá nhỏ, nhân khối lượng delta M, nhân khối lượng thử m nhỏ, chia cho bình phương của khoảng cách. Và, khoảng cách từ U đến cái đó được gọi là ρ bởi vì chúng ta đã đưa vào các tọa độ cầu. Vì vậy, đó là kích cỡ, đó là độ lớn của lực. Chúng ta cũng cần phải biết hướng của lực. Và, hướng sẽ chỉ về hướng đó. Vì vậy, hướng của lực sẽ là cái đó x, y, z .

But if I want a unit vector, then I should scale this down to length one. So, let me divide this by ρ to get a unit vector. So, that means that the force I'm getting from this guy is actually going to be $G \delta M m$ over ρ^2 times x, y, z . I'm just

multiplying the magnitude by the unit vector in the correct direction. OK, so now if I have not just that little p is ΔM , but an entire solid, then I have to sum all these guys together. And, I will get the vector that gives me the total force exerted, OK? So, of course, there's actually three different calculations in one because you have to sum the x components to get the x components of a total force.

Nhưng nếu tôi muốn một vectơ đơn vị, thì tôi sẽ lấy tỉ lệ cái này xuống độ dài bằng một. Vì vậy, hãy để tôi chia cái này cho ρ để nhận một vector đơn vị. Vì vậy, điều đó có nghĩa là lực mà tôi nhận được từ thặng này thực sự sẽ là $G \Delta M$ m trên ρ mũ ba nhân x, y, z . Tôi chỉ nhân độ lớn với vectơ đơn vị theo hướng chính xác. Vâng, vậy bây giờ nếu tôi có không chỉ p nhỏ đó là ΔM , mà toàn bộ vật rắn, thì tôi phải lấy tổng tất cả những thặng này với nhau. Và, tôi sẽ nhận được vector cho tôi lực toàn phần đã tác dụng, đúng không? Vì vậy, tất nhiên, thực sự có ba sự tính toán khác nhau trong một bởi vì bạn phải lấy tổng các thành phần x để nhận được các thành phần x của lực toàn phần.

Same with the y , and same with the z . So, let me first write down the actual formula. So, if you integrate over the entire solid, oh, and I have to remind you, well, what's the mass, ΔM of a small piece of volume ΔV ? Well, it's the density times the volume. So, the mass is going to be, sorry, density is ρ . There is a lot of Greek letters there, times the volume element. So, you will get that the force is the triple integral over your solid of $G m_x, y, z$ over ρ cubed, ΔV .

Tương tự với y , và với z . Vì vậy, trước hết hãy để tôi viết ra công thức thực tế. Vì vậy, nếu bạn lấy tích phân trên toàn bộ vật rắn, oh, và tôi phải nhắc nhở bạn, vâng, khối lượng là gì, ΔM của một phần thể tích nhỏ ΔV ? Vâng, nó là mật độ nhân thể tích. Vì vậy, khối lượng sẽ là, xin lỗi, mật độ là ρ . Có rất nhiều chữ Hy Lạp ở đó, nhân yếu tố thể tích. Vì vậy, bạn sẽ thấy rằng lực bằng tích phân ba lớp của $G m_x, y, z$ trên ρ mũ ba, ΔV trên chất rắn.

Now, two observations about that. So, the first one, well, of course, these are just constants. So, they can go out. The second observation, so here, we are integrating a vector quantity. So, what does that mean? I just mean the x component of a force is given by integrating $G m_x$ over ρ cubed ΔV . The y components, same thing with y . The z components, same thing with z . OK, there's no, like, you know,

just integrate component by component to get each component of the force. So, now we could very well do this in rectangular coordinates if we want. But the annoying thing is this rho cubed. Rho cubed is going to be $x^2 + y^2 + z^2$ squared to the three halves.

Bây giờ, hai nhận xét về điều đó. Vâng, cái đầu tiên, vâng, tất nhiên, đây chỉ là các hằng số. Vì vậy, chúng có thể ra ngoài. Nhận xét thứ hai, vì vậy ở đây, chúng ta lấy tích phân một đại lượng vector. Vâng, điều đó có nghĩa là gì? Tôi chỉ muốn nói là thành phần x của lực là tích phân $G m x$ trên rho mũ ba delta dV . Các thành phần y, tương tự với y. Các thành phần z, tương tự với z. Vâng, không có, như, bạn đã biết, chỉ là lấy tích phân theo từng thành phần để nhận được mỗi thành phần của lực. Vì vậy, bây giờ chúng ta có thể rất tốt về điều này trong hệ tọa độ Đề Các nếu chúng ta muốn. Nhưng thứ gây phiền nhiễu là rho mũ ba này. Rho mũ ba sẽ là $x^2 + y^2 + z^2$ bình phương rồi nhân với rho mũ ba phần hai.

That's not going to be a very pleasant thing to integrate. So, it's much better to set up these integrals in spherical coordinates. And, if we're going to do it in spherical coordinates, if we're going to do it in spherical coordinates, then probably we don't want to bother too much with x and y components because those would be unpleasant. It would give us rho sine phi cos theta or sine theta.

Đó sẽ không là thứ dễ chịu để tính tích phân. Vì vậy, thiết lập những tích phân này trong các hệ tọa độ cầu sẽ tốt hơn. Và, nếu chúng ta sẽ làm điều đó trong tọa độ cầu, nếu chúng ta làm điều đó trong tọa độ cầu, thì có lẽ chúng ta không cần bận tâm nhiều với các thành phần x và y bởi vì những cái này khó chịu. Nó sẽ cho chúng ta rho sin phi cos theta hoặc sin theta.

So, the actual way we will set up things, set things up, is to place the solid so that the z axis is an axis of symmetry. And, of course, that only works if the solid has some axis of symmetry. Like, if you're trying to find the gravitational attraction of the Pyramid of Giza, then you won't be able to set up so that it has rotational symmetry. Well, that's a tough fact of life, and you have to actually do it in x, y, z coordinates. But, if at all possible, then you're going to place things. Well, I guess even then, you could center it on the z axis. But anyway, so you're going to mostly place things so that your solid is actually centered on the z-axis. And, what you gain by that is that by symmetry, the gravitational force will be directed along the z axis. Vì vậy, cách thực tế mà chúng ta sẽ thiết lập các thứ, thiết lập các thứ, là đặt vật rắn để trục z là trục đối xứng. Và, tất nhiên, điều đó chỉ đúng nếu vật rắn có trục đối xứng nào đó. Giống như, nếu bạn thử tìm sức hút hấp dẫn của kim tự tháp Giza, thì bạn sẽ không thể thiết lập để cho nó có đối xứng quay. Vâng, đó là một thực tế khó khăn của cuộc sống, và bạn phải làm điều đó trong tọa độ x, y, z. Nhưng, nếu có thể, thì bạn sẽ đặt các thứ. Vâng, tôi đoán thậm chí sau đó, bạn có thể cho tâm nó trên trục z. Nhưng dù sao đi nữa, do đó, bạn sẽ chủ yếu đặt các thứ sao cho vật rắn của bạn có tâm trên trục z. Và, những gì bạn thu được qua việc đó là bằng tính đối xứng, lực hấp dẫn hướng theo trục z.

So, you will just have to figure out the z component. So, then the force will be actually, you know in advance that it will be given by zero, zero, and some z component. And then, you just need to compute that component. And, that component will be just G times m times triple integral of z over rho cubed delta dV . OK, so that's the first simplification we can try to do. The second thing is, well, we have to choose our favorite coordinate system to do this. But, I claim that actually spherical coordinates are the best -

Vâng, bạn chỉ sẽ phải tìm thành phần z. Vâng, thế thì lực sẽ là, bạn biết trước rằng nó sẽ là không, không, và thành phần z nào đó. Và sau đó, bạn chỉ cần tính thành phần đó. Và, thành phần đó sẽ chỉ là G nhân m nhân tích phân ba lớp của z trên rho mũ ba delta dV . Vâng, đó là sự đơn giản hóa đầu tiên mà chúng ta có thể làm. Điều thứ hai là, vâng, chúng ta phải chọn hệ tọa độ yêu thích của chúng ta để làm điều này. Nhưng, tôi cho rằng hệ tọa độ cầu là tốt nhất -

-- because let's see what happens. So, G times mass times triple integral, well, a z in spherical coordinates becomes rho cosine phi over rho cubed. Density, well, we can't

do anything about density. And then, dV becomes $\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$. Well, so, what happens with that? Well, you see that you have a ρ , a ρ^2 , and a ρ^3 that cancel each other. So, in fact, it simplifies quite a bit if you do it in spherical coordinates.

- bởi vì chúng ta hãy xem những gì sẽ xảy ra. Vâng, G nhân khối lượng nhân tích phân ba lớp, vâng, az trong các tọa độ cầu sẽ trở thành $\rho \cos \phi$ trên ρ^2 . Mật độ, vâng, chúng ta không làm bất cứ điều gì về mật độ. Và thế thì, dV trở thành $\rho \sin \phi d\rho d\phi d\theta$. Vâng, như vậy, điều gì xảy ra với cái đó? Vâng, bạn thấy rằng bạn có a ρ , a ρ^2 , và a ρ^3 triệt tiêu nhau. Vì vậy, trên thực tế, nó đơn giản hơn một chút nếu bạn làm nó trong hệ tọa độ cầu.

OK, so the z component of the force, sorry, I'm putting a z here to remind you it's the z component. That is not a partial derivative, OK? Don't get things mixed up, just the z component of the force becomes Gm triple integral of $\cos \phi \sin \phi d\rho d\phi d\theta$. And, so this thing is not dV , of course. dV is much bigger, but we've somehow canceled out most of dV with stuff that was in the integrand.

Vâng, do đó thành phần z của lực, xin lỗi, tôi sẽ đặt az ở đây để nhắc nhở bạn nó là thành phần z . Đó không phải là đạo hàm riêng, đúng không? Không nhận được những thứ hỗn hợp, chỉ thành phần z của lực trở thành Gm tích phân ba lớp của $\cos \phi \sin \phi d\rho d\phi d\theta$. Và, do đó cái này không phải là dV , tất nhiên. dV lớn hơn nhiều, nhưng chúng ta đã bằng cách nào đó triệt tiêu dV với các thứ trong biểu thức dưới dấu tích phân.

And see, that's actually suddenly much less scary. OK, so just to give you an example of what you can prove it this way, you can prove Newton's theorem, which says the following thing. It says the gravitational attraction -- -- of a spherical planet, I should say with uniform density, or actually it's enough for the density to depend just on distance to the center. But we just simplify the statement is equal to that of a point mass --

Và thấy không, cái đó thực sự ít đáng sợ hơn nhiều. Vâng, như vậy chỉ để cho bạn có một ví dụ về những gì bạn có thể chứng minh nó theo cách này, bạn có thể chứng minh định lý Newton, nội dung như sau. Nó nói sức hút hấp dẫn -- của một hành tinh hình cầu, tôi nên nói với mật độ đều, hoặc mật độ chỉ phụ thuộc vào khoảng cách đến tâm. Nhưng chúng ta chỉ cần đơn giản hóa phát biểu tương đương với phát biểu cho chất điểm --

-- with the same total mass at its center. OK, so what that means is that, so the way we would set it up is you would be sitting here and your planet would be over here. Or, if you're at the surface of it, then of course you just put it tangent to the xy plane here. And, you would compute that quantity. Computation is a little bit annoying if a

sphere is sitting up there because, of course, you have to find bounds, and that's not going to be very pleasant. The case that we actually know how to do fairly well is if you are just at the surface of the planet. But then, what the theorem says is that the force that you're going to feel is exactly the same as if you removed all of the planet and you just put an equivalent point mass here.

- Với khối lượng tổng cộng tại tâm của nó. Vâng, vì vậy điều đó có nghĩa là, do đó cách chúng ta sẽ thiết lập nó là u sẽ nằm ở đây và hành tinh của bạn sẽ nằm ở đây. Hoặc, nếu bạn đang ở bề mặt của nó, thì dĩ nhiên bạn chỉ cần đặt nó tiếp xúc với mặt phẳng xy ở đây. Và, bạn sẽ tính toán đại lượng đó. Tính toán ít phiền nhiễu nếu hình cầu nằm trên đó vì, tất nhiên, bạn phải tìm các cận, và nó sẽ không dễ chịu. Trường hợp chúng ta thực sự biết cách làm khá tốt là nếu bạn chỉ ở bề mặt của hành tinh. Nhưng thế thì, những gì định lý nói là lực mà bạn sẽ cảm thấy giống như thể bạn bỏ toàn bộ hành tinh đi và bạn đặt một chất điểm tương đương ở đây.

So, if the earth collapsed to a black hole at the center of the earth with the same mass, well, you wouldn't notice the difference immediately, or, rather, you would, but at least not in terms of your weight. OK, that's the end for today.

Vì vậy, nếu trái đất bị sụp đổ thành một lỗ đen ở tâm của trái đất với cùng khối lượng, vâng, bạn sẽ không nhận thấy sự khác biệt ngay lập tức, hoặc, thay vào đó, bạn sẽ, nhưng ít nhất không phải theo trọng lượng của bạn. Vâng, hôm nay chỉ vậy thôi.