

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007

Please use the following citation format:

Denis Auroux. *18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007*. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). <http://ocw.mit.edu> (accessed MM DD, YYYY). License: Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Note: Please use the actual date you accessed this material in your citation.

For more information about citing these materials or our Terms of Use, visit:
<http://ocw.mit.edu/terms>

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>



18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 25 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề Các và trụ
Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

So -- OK, so first of all, about the exam, so you have some statistics up there. The class median was 84. So, most of you did pretty well. Passing was 65. If you want to know roughly speaking where you stand, I'd say that 90 or above corresponds to an A. 80 or above corresponds to a B. 65 or above corresponds to a C. But, again, I mean, nothing is set in stone. That depends a lot on how you do on homework, and things like that. So, don't take these values too seriously. If you got less than 65, then you should definitely take and make up, and also if you were absent for some reason yesterday.

So, I have solutions here. If you don't have them yet, and you can just pick them up at the end of class. I also have spare copies of problem sets, and solutions. But you should have got them yesterday. So, all right, so the past few weeks, we've been looking at double integrals and the plane, line integrals in the plane, and will we are going to do now from now on basically until the end of the term, will be very similar stuff, but in space. (Bỏ) So, we are going to learn how to do triple integrals in space, flux in space, work in space, divergence, curl, all that.

Vì vậy, chúng ta sẽ học cách tính tích phân ba lớp trong không gian, thông lượng trong không gian, công trong không gian, divergence, curl, tất cả mọi thứ.

So, that means, basically, if you were really on top of what we've been doing these past few weeks, then it will be just the same with one more coordinate. And, you will see there are some differences. But, conceptually, it's pretty similar. There are a few tricky things, though. Now, that also means that if there is stuff that you are not sure about in the plane, then I encourage you to review the material that we've done over the past few weeks to make sure that everything in the plane is completely clear to you because it will be much harder to understand stuff in space if things are still shaky in the plane. OK, so the plan is we're going to basically go through the same stuff, but in space.

Vì vậy, có nghĩa là, về cơ bản, nếu bạn đã thông thạo những gì chúng ta đã học trong vài tuần qua, thì đây sẽ chỉ như là sự thêm vào một tọa độ. Và, bạn sẽ thấy có một số sự khác biệt. Tuy nhiên, về mặt khái niệm, nó khá đẹp. Mặc dù, có vài thứ phức tạp. Bây giờ, điều đó cũng có nghĩa là nếu bạn chưa vững phần nào về giải tích trong mặt phẳng, thì tôi khuyên bạn xem lại những tài liệu mà chúng ta đã học trong vài tuần trước phải chắc chắn bạn đã nắm kĩ mọi thứ trong mặt phẳng bởi vì các thứ trong không gian sẽ khó tiếp thu hơn nhiều nếu bạn chưa vững các thứ trong mặt phẳng. Vâng, vì vậy về cơ bản kế hoạch là chúng ta sẽ xét các thứ tương tự, nhưng trong không gian.

So, it shouldn't be surprising that we will start today with triple integrals. OK, so the way triple integrals work is if I give you a function of three variables, x , y , z , and I give you some region in space, so, some solid, then I can take the integral over this region over function f dV where dV stands for the volume element. OK, so what it means is we will just take every single little piece of our solid, take the value of f there, multiply by the small volume of each little piece, and sum all these things together.

Vì vậy, không có gì ngạc nhiên khi hôm nay chúng ta bắt đầu học tích phân ba lớp. Vâng, nguyên tắc tính tích phân ba lớp là nếu tôi cho bạn một hàm ba biến, x , y , z , và tôi cho

bạn vùng nào đó trong không gian, vâng, vật rắn nào đó, thì tôi có thể lấy tích phân của hàm f dV trên vùng này ở đây dV chỉ yếu tố thể tích. Vâng, vì vậy ý nghĩa của nó là chúng ta sẽ lấy mỗi miếng nhỏ của vật rắn, lấy giá trị của f ở đó, nhân với thể tích của mỗi miếng nhỏ, và cộng tất cả những thứ này với nhau.

And, so this volume element here, well, for example, if you are doing the integral in rectangular coordinates, that will become $dx dy dz$ or any permutation of that because, of course, we have lots of possible orders of integration to choose from. So, rather than bore you with theory and all sorts of complicated things, let's just do examples. And, you will see, basically, if you understand how to set up iterated integrals into variables, that you basically understand how to do them in three variables. You just have to be a bit more careful. And, there's one more step. OK, so let's take our first triple integral to be on the region.

Và, do đó yếu tố thể tích ở đây, vâng, ví dụ, nếu bạn đang tính tích phân trong hệ tọa độ Đề Các, sẽ trở thành $dx dy dz$ hoặc hoán vị nào đó của nó bởi vì, tất nhiên, có nhiều khả năng lựa chọn thứ tự tính tích phân khác nhau. Vì vậy, thay vì nhồi nhét vào đầu bạn lí thuyết và đủ các thứ phức tạp, chúng ta hãy xét một ví dụ. Và, bạn sẽ thấy, về cơ bản, nếu bạn hiểu cách thiết lập tích phân lặp bên trong các biến, thì về cơ bản bạn sẽ hiểu được cách tính chúng theo ba biến. Bạn chỉ cần phải cẩn thận hơn một chút. Và, có thêm một bước. Vâng, vì vậy chúng ta hãy tính tích phân ba lớp của chúng ta trên một vùng.

So, of course, there's two different things as always. There is the region of integration and there's the function we are integrating. Now, the function we are integrating, well, it will come in handy when you actually try to evaluate the integral. But, as you can see, probably, the new part is really hard to set it up. So, the function won't really matter that much for me. So, in the examples I'll do today, functions will be kind of silly. So, for example, let's say that we want to look at the region between two paraboloids, one given by $z = x^2 + y^2$.

Vì vậy, tất nhiên, có hai thứ khác nhau như mọi khi. Có vùng lấy tích phân và có hàm lấy tích phân. Bây giờ, hàm mà chúng ta sẽ lấy tích phân, vâng, nó sẽ được cho cụ thể khi bạn tính tích phân. Nhưng, như bạn có thể thấy, có lẽ, phần mới thực sự khó để thiết lập. Vì vậy, hàm sẽ không thực sự quan trọng lắm. Vì vậy, trong các ví dụ tôi sẽ làm hôm nay, các hàm phần nào ngớ ngẩn. Vâng, ví dụ, giả sử rằng chúng ta muốn xét vùng giữa hai paraboloid, cái được cho bởi

The other is $z = 4 - x^2 - y^2$. And, so, I haven't given you, yet, the function to integrate. OK, this is not the function to integrate. This is what describes the region where I will integrate my function. And, let's say that I just want to find the volume of this region, which is the triple integral of just one dV . OK, similarly, remember, when we try to find the area of the region in the plane, we are just integrating one dA . Here we integrate one dV . that will give us the volume. Now, I know that you can imagine how to actually do this one as a double integral. But, the goal of the game is to set up the triple integral. It's not actually to find the volume.

Cái kia là Và, do đó, tôi đã chưa cho bạn, hàm lấy tích phân. Vâng, đây không phải là hàm lấy tích phân. Đây là vùng mà trên đó tôi sẽ lấy tích phân hàm của tôi. Và, giả sử rằng tôi chỉ muốn tìm thể tích của vùng này, đó là tích phân ba lớp của một mình dV . Vâng, tương tự như vậy, hãy nhớ, khi chúng ta tìm diện tích của vùng trong mặt phẳng, chúng ta chỉ lấy tích phân một mình dA . Ở đây chúng ta lấy tích phân một mình dV . Kết quả sẽ là thể tích. Bây giờ, tôi biết rằng bây giờ có thể bạn đang nghĩ sẽ tính cái này như tích phân kép. Tuy nhiên, mục đích của trò chơi là thiết lập tích phân ba lớp. Không chỉ là tìm thể tích.

So, what does that look like? Well, $z = x^2 + y^2$, that's one of our favorite paraboloids. That's something that looks like a parabola with its bottom at the origin that you spin about the z axis. And, z equals four minus x squared minus y squared, well, that's also a paraboloid. But, this one is pointing down, and when you take x equals y equals zero, you get z equals four. So, it starts at four, and it goes down like that. OK, so the solid that we'd like to consider is what's in between in here. So, it has a curvy top which is this downward paraboloid, a curvy bottom which is the other paraboloid.

Vâng, nó có dạng như thế nào? Vâng, $z = x^2 + y^2$, đó là một trong những paraboloid yêu thích của chúng ta. Nó giống như một parabol với đáy tại gốc tọa độ và quay quanh trục z . Và, z bằng bốn trừ x bình trừ y bình, vâng, đó cũng là một paraboloid. Nhưng, cái này hướng xuống, và khi bạn lấy x bằng y bằng không, kết quả bằng bốn. Vì vậy, nó bắt đầu tại bốn, và nó đi xuống giống như thế này. Vâng, vì vậy vật rắn mà chúng ta muốn xét nằm giữa đây. Vì vậy, nó có một đầu cong là paraboloid hướng xuống này, đáy cong là paraboloid kia.

And, what about the sides? Well, do you have any idea what we get here? Yeah, it's going to be a circle because entire picture is invariant by rotation about the z axis. So, if you look at the picture just, say, in the yz plane, you get this point and that point. And, when you rotate everything around the z axis, you will just get a circle here. OK, so our goal is to find the volume of this thing, and there's lots of things I could do to simplify the calculation, or even not do it as a triple integral at all.

Và, thế còn các mặt bên thì sao? Vâng, bạn có tưởng tượng được hình dạng của nó không? Vâng, nó sẽ là một đường tròn bởi vì toàn bộ hình bất biến khi quay quanh trục z . Vì vậy, nếu bạn xét hình, giả sử, trong mặt phẳng yz , bạn sẽ nhận được điểm này và điểm đó. Và, khi bạn quay mọi thứ xung quanh trục z , bạn sẽ nhận được đúng một đường tròn ở đây. Vâng, vì vậy mục tiêu của chúng ta là tìm thể tích của cái này, và tôi

có thể làm nhiều thao tác để đơn giản hóa tính toán, hoặc thậm chí không cần tính nó bằng tích phân ba lớp.

But, I want to actually set it up as a triple integral just to show how we do that. OK, so the first thing we need to do is choose an order of integration. And, here, well, I don't know if you can see it yet, but hopefully soon that will be intuitive to you. I claim that I would like to start by integrating first over z . What's the reason for that? Well, the reason is if I give you x and y , then you can find quickly, what's the bottom and top values of z for that choice of x and y ? OK, so if I have x and y given, then I can find above that: what is the bottom z and the top z corresponding to the vertical line above that point? The portion of it that's inside our solid, so somehow, there's a bottom z and a top z .

Nhưng, tôi muốn tính nó như là tích phân ba lớp để cho bạn thấy cách làm nó. Vâng, vì vậy điều đầu tiên chúng ta cần làm là chọn thứ tự của tích phân. Và, ở đây, vâng, tôi không biết bạn thấy nó chưa, nhưng hy vọng sẽ nhanh chóng trực giác đối với bạn. Tôi muốn bắt đầu bằng cách lấy tích phân theo z . Lý do cho điều đó là gì? Vâng, lý do là nếu tôi cho bạn x và y , thì bạn có thể nhanh chóng tìm được, giá trị dưới và trên của z đối với sự lựa chọn x và y đó là gì? Vâng, vì vậy nếu tôi có x và y cho trước, thì tôi có thể tìm trên đó: z dưới và z trên bằng bao nhiêu tương ứng với đường thẳng đứng bên trên điểm đó? Các phần của nó ở bên trong vật rắn, vì vậy bằng cách nào đó, có z dưới và z trên.

And, so the top z is actually on the downward paraboloid. So, it's four minus x squared minus y squared. The bottom value of z is x squared plus y squared. OK, so if I want to start to set this up, I will write the triple integral. And then, so let's say I'm going to do it dz first, and then, say, $dy dx$. It doesn't really matter. So then, for a given value of x and y , I claim z goes from the bottom surface. The bottom face is z equals x squared plus y squared. The top face is four minus x squared minus y squared. OK, is that OK with everyone? Yeah?

Và, thực sự z trên ở trên paraboloid hướng xuống. Vì vậy, nó là bốn trừ x bình trừ y bình. Giá trị dưới cùng của z là x bình cộng y bình. Vâng, do đó nếu tôi muốn bắt đầu thiết lập cái này, tôi sẽ viết tích phân ba lớp. Và sau đó, vâng giả sử rằng tôi sẽ tính dz trước, và sau đó là, $dy dx$. Nó không thực sự quan trọng. Vì vậy sau đó, đối với một giá trị cho trước của x và y , tôi khẳng định z đi từ mặt dưới. Mặt dưới là z bằng x bình phương cộng với y bình phương. Mặt trên là bốn trừ x bình trừ y bình. Vâng, mọi người đồng ý chứ? Rồi?

Any questions so far? Yes? Why did I start with z ? That's a very good question. So, I can choose whatever order I want, but let's say I did x first. Then, to find the inner

integral bounds, I would need to say, OK, I've chosen values of, see, in the inner integral, you've fixed the two other variables, and you're just going to vary that one. And, you need to find bounds for it. So, if I integrate over x first, I have to solve, answer the following question.

Cho đến lúc này có câu hỏi gì không? Sao? Tại sao tôi bắt đầu với z ? Đó là một câu hỏi rất hay. Vâng, tôi có thể chọn bất cứ thứ tự nào, nhưng giả sử rằng tôi chọn x trước. Sau đó, để tìm các cận tích phân bên trong, tôi sẽ nói, vâng, tôi đã chọn giá trị của, xem nào, trong tích phân bên trong, bạn giữ hai biến còn lại không đổi, và bạn chỉ cần thay đổi cái đó. Và, bạn cần tìm các cận cho nó. Vì vậy, nếu tôi lấy tích phân x trước, tôi phải giải quyết, trả lời câu hỏi sau đây.

Say I'm given values of y and z . What are the bounds for x ? So, that would mean I'm slicing my solid by lines that are parallel to the x axis. And, see, it's kind of hard to find, what are the values of x at the front and at the back? I mean, it's possible, but it's easier to actually first look for z at the top and bottom. Yes? $dy dx$, or $dx dy$? No, it's completely at random. I mean, you can see x and y play symmetric roles. So, if you look at it, it's reasonably clear that z should be the easiest one to set up first **for what comes next**. xy or yx , it's the same. Yes? Yes, it will be easier to use cylindrical coordinates. I'll get to that just as soon as I'm done with this one. OK, so let's continue a bit with that. And, as you mentioned, actually we don't actually want to do it with xy in the end.

Giả sử rằng giá trị của y và z đã biết. Cận của x là gì? Vì vậy, điều đó có nghĩa là tôi đang cắt vật rắn của tôi bằng các đường song song với trục x . Và, thấy không, nó hơi khó tìm, giá trị của x ở phía trước và phía sau là gì? Ý tôi là, có thể làm, nhưng tìm z ở trên và z ở dưới trước sẽ dễ hơn. Sao? $dy dx$, hoặc $dx dy$? Không, nó hoàn toàn ngẫu nhiên. Ý tôi là, bạn có thể xem như vai trò của x và y đối xứng. Vì vậy, nếu bạn xét nó, rõ ràng z sẽ là cái dễ thiết lập nhất **và theo đó những cái sao cũng được tính dễ**. xy hay yx , nó giống nhau. Sao? Đúng, dùng hệ tọa độ trụ sẽ dễ tính hơn. Chúng ta sẽ học vấn đề đó ngay sau khi học xong cái này. Vâng, vì vậy hãy tiếp tục chút nữa với điều đó. Và, như bạn đã đề cập, thực sự chúng ta không muốn thực hiện nó với xy cuối cùng.

In a few minutes, we will actually switch to cylindrical coordinates. But, for now, we don't even know what they are. OK, so I've done the inner integral by looking at, you know, if I slice by vertical lines, what is the top? What is the bottom for a given value of x and y ? So, the bounds in the inner integral depend on both the middle and outer variables. Next, I need to figure out what values of x and y I will be interested in. And, the answer for that is, well, the values of x and y that I want to look at are all those that are in the shade of my region. So, in fact, to set up the middle and outer bounds, what I want to do is project my solid. So, my solid looks like this kind of thing.

Trong vài phút nữa, chúng ta sẽ chuyển sang tọa độ trụ. Tuy nhiên, bây giờ, thậm chí chúng ta không cần biết chúng là gì. Vâng, vì vậy tôi đã thực hiện tích phân bên trong bằng cách xét, nếu tôi cắt bằng các đường thẳng đứng, z trên là gì? z dưới là gì đối với một giá trị cho trước của x và y ? Vâng, các cận trong tích phân bên trong phụ thuộc vào các biến giữa và bên ngoài. Tiếp theo, tôi cần phải tìm ra giá trị nào của x và y mà tôi sẽ quan tâm. Và, câu trả lời cho điều đó là, vâng, giá trị của x và y mà tôi muốn xét là tất cả những cái nằm trong vùng gạch sọc. Vì vậy, trên thực tế, để thiết lập các cận giữa và bên ngoài, tôi chiếu vụn của tôi. Vâng, vật rắn của tôi trông như thế này.

And, I don't really know how to call it. But, what's interesting now is I want to look at the shadow that it casts in the xy plane. OK, and, of course, that shadow will just be the disk that's directly below this disk here that's separating the two halves of the solid. And so, now I will want to integrate over, I want to look at all the xy 's, x and y , in the shadow. So, now I'm left with, actually, something we've already done, namely setting up a double integral over x and y . So, if it helps, here, we don't strictly need it, but if it helps, it could be useful to actually draw a picture of this shadow in the xy plane.

Và, tôi không thực sự biết cách gọi nó. Nhưng, bây giờ điều lí thú là tôi muốn xét vùng

được chiếu xuống trên mặt phẳng xy . Vâng, và, tất nhiên, vùng chiếu đó chính là một hình tròn ngay bên dưới hình tròn tách hai nửa vật rắn. Và như vậy, bây giờ tôi muốn tính tích phân trên, tôi muốn xét tất cả các của xy , x và y , trong hình chiếu. Vì vậy, bây giờ tôi còn lại, thực sự, cái gì đó mà chúng ta đã làm rồi, cụ thể là thiết lập tích phân kép trên x và y . Vì vậy, nếu nó không có ích cho bạn, ở đây, bạn không cần vẽ nó, nhưng nếu cảm thấy cần thiết, bạn có thể phát họa sơ lược hình chiếu trong mặt phẳng xy .

So, here it would just look, again, like a disk, and set it up. Now, the question is, how do we find the size of this disk, the size of the shadow? Well, basically we have to figure out where our two paraboloids intersect. There's nothing else. OK, so, one way how to find the shadow in the xy plane -- well, here we actually know the answer a priori, but even if we didn't, we could just say, well, our region lives wherever the bottom surface is below the top surface, OK, so we want to look at things wherever bottom value of z is less than the top value of z , I mean, less or less than or equal, that's the same thing.

Vâng, một lần nữa, ở đây nó giống như một hình tròn, và thiết lập nó. Bây giờ, vấn đề đặt ra là, chúng ta tìm kích thước của hình tròn như thế nào, kích thước của hình chiếu? Vâng, về cơ bản chúng ta phải chỉ ra nơi giao nhau của hai paraboloid. Không có gì nữa. Được rồi, vì vậy, một cách để tìm hình chiếu trong mặt phẳng xy - - vâng, ở đây chúng ta thực sự biết trước câu trả lời, nhưng nếu không, chúng ta chỉ cần nói, vâng, vùng của chúng ta nằm ở bất cứ bề mặt dưới nào bên dưới bề mặt trên, vâng, vì vậy chúng ta muốn xét bất cứ giá trị nào của z nhỏ hơn giá trị trên của z , ý tôi là, nhỏ hơn hoặc bằng, điều đó tương tự.

So, if the bottom value of z is $x^2 + y^2$ should be less than $4 - x^2 - y^2$, and if you solve for that, then you will get, well, so let's move these guys over here. You'll get $2x^2 + 2y^2 < 4$. That becomes $x^2 + y^2 < 2$. So, that means that's a disk of radius square root of two, OK? So, we kind of knew in advance it was going to be a disk, but what we've learned now is that this radius is square root of two.

Vì vậy, nếu giá trị dưới của z là $x^2 + y^2$ nhỏ hơn bốn trừ $x^2 + y^2$, và nếu bạn giải cái đó, thì bạn sẽ nhận được, vâng, chúng ta hãy di chuyển sang những thẳng ở đây. Bạn sẽ được hai $x^2 + y^2$ nhỏ hơn bốn. Tương đương $x^2 + y^2$ nhỏ hơn hai. Vì vậy, có nghĩa là đó là một hình tròn bán kính bằng căn hai, đúng không? Vì vậy, chúng ta đã biết trước nó là một hình tròn, nhưng bây giờ chúng ta biết được bán kính này là căn hai.

So, if we want to set up, if we really want to set it up using $dy dx$ like they started, then we can do it because we know, so, for the middle integral, now, we want to fix a value of x . And, for that fixed value of x , we want to figure out the bounds for y . Well, the answer is y goes from here to here. What's here? Well, here, y is square root of two minus x squared. And, here it's negative square root of two minus x squared.

Vì vậy, nếu chúng ta muốn thiết lập, nếu chúng ta thực sự muốn thiết lập nó dùng $dy dx$ như chúng bắt đầu, thì chúng ta có thể thực hiện nó vì chúng ta biết, vâng, đối với tích phân giữa, bây giờ, chúng ta muốn giữ nguyên giá trị của x . Và, đối với giá trị cố định đó của x , chúng ta cần chỉ ra các cận của y . Vâng, câu trả lời là y đi từ đây đến đây. Có gì ở đây? Vâng, ở đây, y bằng căn bậc hai của hai trừ x bình. Và, ở đây nó là trừ căn bậc hai của hai trừ x bình.

So, y will go from negative square root of two minus x squared to positive square root. And then, x will go from negative root two to root two. OK, if that's not completely clear to you, then I encourage you to go over how we set up double integrals again. OK, does that make sense, kind of? Yeah? Well, so, when we set up, remember, we are setting up a double integral, $dy dx$ here. So, when we do it $dy dx$, it means we slice this region of a plane by vertical line segments. So, this middle guy would be what used to be the inner integral. So, in the inner, remember, you fix the value of x , and you ask yourself, what is the range of values of y in my region? So, y goes from here to here, and what here and here depends on the value of x .

Vì vậy, y sẽ đi từ trừ căn bậc hai của hai trừ x bình đến cộng căn bậc hai. Và sau đó, x sẽ đi từ trừ căn hai đến căn hai. Vâng, nếu bạn chưa rõ điều đó, thì tôi đề nghị bạn xem lại cách tính tích phân kép. Vâng, điều đó có rõ ràng không? Vâng? Vâng, vì vậy, khi chúng ta thiết lập, hãy nhớ, chúng ta sẽ thiết lập một tích phân kép, $dy dx$ ở đây. Vì vậy, khi chúng ta thực hiện nó $dy dx$, điều đó có nghĩa là chúng ta cắt vùng này của mặt phẳng bằng những đoạn đường thẳng thẳng đứng. Vì vậy, thẳng ở giữa này sẽ được dùng như là tích phân bên trong. Vì vậy, trong tích phân bên trong, hãy nhớ, bạn giữ nguyên giá trị của x , và bạn tự hỏi, khoảng giá trị của y trong vùng của tôi là gì? Vâng, y đi từ đây đến đây, và những gì ở đây và ở đây phụ thuộc vào giá trị của x .

How? Well, we have to find the relation between x and y at these points. These points are on the circle of radius root two. So, if you want this circle maybe I should have written, is x squared plus y squared equals two. And, if you solve for y , given x , you get plus minus root of two minus x squared, OK? Yes? Is there a way to compute this with symmetry? Well, certainly, yeah, this solid looks sufficiently symmetric, but actually you could certainly, if you don't want to do the whole disk, you could just do quarter disks, and multiply by four. You could even just look at the lower half of the solid, and multiply them by two, so, total by eight.

Cụ thể thế nào? Vâng, chúng ta phải tìm mối quan hệ giữa x và y tại những điểm này. Những điểm này ở trên đường tròn bán kính căn hai. Vì vậy, nếu bạn muốn đường tròn này có lẽ tôi nên viết, là x bình cộng với y bình bằng hai. Và, nếu bạn tìm y , x đã biết, bạn được cộng trừ căn hai trừ x bình, đúng không? Sao? Có cách nào để tính cái này tận dụng tính đối xứng không? Vâng, chắc chắn, ồ, vật rắn này khá đối xứng, nhưng thực tế bạn có thể chắc chắn, nếu bạn không muốn làm toàn bộ hình tròn, bạn chỉ cần làm một phần tư đĩa, và sau đó nhân bốn. Thậm chí bạn có thể chỉ cần xét nửa dưới của vật rắn, và sau đó nhân hai, vâng, tổng cộng là nhân 8.

So, yeah, certainly there's lots of ways to make it slightly easier by using symmetry. Now, the most spectacular way to use symmetry here, of course, is to use that we have this rotation symmetry and switch, actually, not do this guy in xy coordinates but instead in polar coordinates. So -- So, the smarter thing to do would be to use polar coordinates instead of x and y . Of course, we want to keep z . I mean, we are very happy with z the way it is. But, we'll just change x and y to $R \cos \theta$, $R \sin \theta$, OK, because, well, let's see actually how we would evaluate this guy.

Vâng, đúng rồi, chắc chắn có rất nhiều cách để làm cho nó dễ hơn một chút bằng cách sử dụng tính đối xứng. Bây giờ, cách ngoạn mục nhất là sử dụng tính đối xứng ở đây,

tất nhiên, là sử dụng cái mà chúng ta có đối xứng quay và dịch chuyển này, trên thực tế, không làm thẳng này trong tọa độ xy mà trong tọa độ cực. Vâng, - Vâng, cách thông minh hơn là dùng hệ tọa độ cực thay vì x và y. Tất nhiên, chúng ta muốn giữ z. Ý tôi là, chúng ta rất hài lòng với z như vậy. Tuy nhiên, chúng ta chỉ cần thay đổi x và y thành $R \cos \theta$, $R \sin \theta$, vâng, bởi vì, vâng, hãy xét cách tính thẳng này.

So, well actually, let's not. It's kind of boring. So, let me just point out one small thing here, sorry, before I do that. So, if you start computing the inner integral, OK, so let me not do that yet, sorry, so if you try to compute the inner integral, you'll be integrating from $x^2 + y^2$ to $4 - x^2 - y^2$ dz. Well, that will integrate to z between these two bounds. So, you will get $4 - x^2 - y^2$. Now, when you put that into the remaining ones, you'll get something that's probably not very pleasant of $4 - x^2 - y^2$ dy dx.

Vì vậy, vâng thực sự, chúng ta sẽ không làm. Nó khá nhàm chán. Vì vậy, hãy để tôi chỉ ra một điều nhỏ ở đây, xin lỗi, trước khi tôi làm điều đó. Vâng, nếu bạn bắt đầu tính tích phân bên trong, vâng, vì vậy tôi sẽ chưa làm điều đó, sao, vậy nếu bạn thử tính tích phân bên trong, bạn sẽ tính tích phân từ x bình cộng y bình đến bốn trừ x bình trừ y bình dz. Vâng, đó sẽ là tích phân theo z giữa hai cận này. Vâng, bạn sẽ được bốn trừ hai x bình trừ hai y bình. Bây giờ, khi bạn đặt nó vào những cái còn lại, bạn sẽ nhận được cái gì đó mà có lẽ không dễ chịu của bốn trừ hai x bình trừ hai y bình dy dx.

And here, you see that to evaluate this, you would switch to polar coordinates. Oh, by the way, so if your initial instincts had been to, given that you just want the volume, you could also have found the volume just by doing a double integral of the height between the top and bottom. Well, you would just have gotten this, right, because this is the height between top and bottom. So, it's all the same. It doesn't really matter. But with this, of course, we will be able to integrate all sorts of functions, not just one over the solid. So, we will be able to do much more than just volumes. OK, so let's see, how do we do it with polar coordinates instead? Well, so --

Và ở đây, bạn thấy rằng để tính cái này, bạn sẽ chuyển sang hệ tọa độ cực. Oh, nhân đây, vì vậy nếu bạn đã có sẵn kĩ năng, chỉ là yêu cầu bạn tính thể tích, bạn cũng có thể thấy rằng thể tích bằng tích phân kép của độ cao giữa đỉnh và đáy. Vâng, bạn đã quên cái này, đúng, bởi vì đây là độ cao giữa đỉnh và đáy. Vì vậy, tất cả như nhau. Nó không thực sự quan trọng. Nhưng với cái này, tất nhiên, chúng ta có thể tính tích phân mọi loại hàm, không chỉ là hàm f bằng 1. Vì vậy, chúng ta có thể tính nhiều thứ khác chứ không phải thể tích. Vâng, do đó, chúng ta hãy xét, chúng ta làm nó với tọa độ cực như thế nào? Vâng, như vậy -

Well, that would become, so let's see. So, I want to keep dz . But then, dx dy or dy dx would become $r dr d\theta$. And, if I try to set up the bounds, well, I probably shouldn't keep this $x^2 + y^2$ around. But, $x^2 + y^2$ is easy in terms of r and θ . That's just r^2 . OK, I mean, in general I could have something that depends also on θ . That's perfectly legitimate. But here, it simplifies, and this guy up here, $4 - x^2 - y^2$ becomes $4 - r^2$.

Vâng, nó sẽ trở thành, vì vậy xem nào. Vì vậy, tôi muốn giữ dz . Nhưng lúc này, dx dy hoặc dy dx sẽ trở thành $r dr d\theta$. Và, nếu tôi cố gắng thiết lập các cận, vâng, có lẽ tôi không nên giữ cái này $x^2 + y^2$ bình phương cộng với y^2 bình phương. Nhưng, $x^2 + y^2$ bình phương cộng với y^2 bình phương dễ theo r và θ . Đó chỉ là r^2 bình phương. Vâng, ý tôi là, nói chung tôi có thể có cái gì đó cũng phụ thuộc vào θ . Điều đó hoàn toàn hợp lý. Nhưng ở đây, nó đơn giản hoá, và thẳng này trên đây, bốn trừ x^2 bình phương trừ y^2 bình phương sẽ trở thành bốn trừ r^2 bình.

And now, the integral that we have to do over r and θ , well, we look again at the shadow. The shadow is still a disk of radius $\sqrt{2}$. That hasn't changed. And now, we know how to set up this integral in polar coordinates. r goes from zero to $\sqrt{2}$, and θ goes from zero to 2π . OK, and now it becomes actually easier to evaluate. OK, so now we have actually a name for this because we're doing it in space. So, these are called, actually, cylindrical coordinates. So, in fact, you already knew about cylindrical coordinates even if you did not know the name.

Và bây giờ, chúng ta phải lấy tích phân theo r và θ , vâng, chúng ta lại xét hình chiếu. hình chiếu vẫn là hình tròn bán kính bằng căn hai. Điều đó không thay đổi. Và bây giờ, chúng ta biết cách tính tích phân này trong tọa độ cực. r đi từ không đến căn hai, và θ đi từ không đến hai pi. Vâng, và bây giờ nó trở nên dễ tính hơn. Vâng, vậy bây giờ chúng ta đã thực sự có một tên gọi cho cái này bởi vì chúng ta đã thực hiện nó trong không gian. Vì vậy, thực sự, đây được gọi là, tọa độ trụ. Vì vậy, thực sự, bạn đã biết về hệ tọa độ trụ cho dù bạn chưa biết tên.

OK, so the idea of cylindrical coordinates is that instead of x , y , and z , to locate a point in space, you will use three coordinates. One of them is basically how high it is above the xy plane. So, that will be z . And then, you will use polar coordinates for the projection of your point on the xy plane. So, r will be the distance from the z axis. And θ will be the angle from the x axis counterclockwise. So, the one thing to be careful about is because of the usual convention, that we make the x axis point toward us. $\theta = 0$ is no longer to the right. Now, $\theta = 0$ is to the front, and the angle is measured from the front counterclockwise.

Vâng, vì vậy ý tưởng về hệ tọa độ trụ là thay vì x , y , và z , để xác định vị trí một điểm trong không gian, bạn sẽ sử dụng ba tọa độ khác. Một trong số chúng là độ cao so với mặt phẳng xy . Vâng, đó chính là z . Và sau đó, bạn sẽ sử dụng hệ tọa độ cực để chiếu điểm của bạn trên mặt phẳng xy . Vâng, r sẽ là khoảng cách từ trục z . Và θ sẽ là góc từ trục x ngược chiều kim đồng hồ. Vì vậy, một điều phải cẩn thận là do quy ước thông thường, trục x hướng về chúng ta. θ bằng không không còn ở bên phải nữa. Bây giờ, θ bằng không ở phía trước, và góc được đo từ phía trước ngược chiều kim đồng hồ.

OK, so, and of course, if you want to know how to convert between x , y , z and r θ z , well, the formulas are just the same as in usual polar coordinates. $R \cos \theta$, $r \sin \theta$, and z remain z . OK, so why are these called cylindrical coordinates, by the way? Well, let's say that I gave you the equation $r = a$, where a is some constant. Say $r = 1$, for example. So, $r = 1$ in 2D, that used to be just a circle of radius one. Now, in space, a single equation actually defines a surface, not just a curve anymore. And, the set of points where $r = a$, well, that's all the points that are distance a from the z axis. So, in fact, what you get this way is a cylinder of radius a centered on the z axis.

Vâng, như vậy, và dĩ nhiên, nếu bạn muốn biết cách chuyển giữa x , y , z và r θ z , vâng, các công thức tương tự như trong tọa độ cực thông thường. $R \cos \theta$, $r \sin \theta$, và z vẫn là z . Vâng, tại sao những cái này được gọi là tọa độ trụ? Vâng, giả sử

rằng tôi cho bạn phương trình r bằng a , ở đây a là hằng số nào đó. Giả sử r bằng một hằng số. Vì vậy, r bằng một trong hai chiều, nó thường chỉ là đường tròn bán kính bằng một. Bây giờ, trong không gian, một phương trình xác định một bề mặt, không chỉ là đường cong nữa. Và, tập hợp các điểm trong đó r bằng a , vâng, đó là tất cả những điểm cách trục z một khoảng a . Vì vậy, trên thực tế, trong trường hợp này những gì bạn nhận được là một hình trụ trục nằm dọc theo z .

OK, so that's why they are called cylindrical coordinates. By the way, so now, similarly, if you look at the equation θ equals some given value, well, so that used to be just a ray from the origin. Now, that becomes a vertical half plane. For example, if I set the value of θ and let r and z vary, well, r is always positive, but basically that means I am taking a vertical plane that comes out in this direction.

Vâng, vì vậy đó là lý do tại sao chúng được gọi là hệ tọa độ trụ. Bằng cách này, vâng bây giờ, tương tự, nếu bạn xét phương trình θ bằng giá trị nào đó, vâng, đó thường là một tia từ gốc tọa độ. Bây giờ, nó sẽ trở thành nửa mặt phẳng thẳng đứng. Ví dụ, nếu tôi cố định giá trị của θ và để cho r và z thay đổi, vâng, r luôn luôn dương, nhưng về cơ bản điều đó có nghĩa là tôi sẽ lấy một mặt phẳng thẳng đứng đi ra theo hướng này.

OK, any questions about cylindrical coordinates? Yes? Yeah, so I'm saying when you fix θ , you get only a half plane, not a full plane. I mean, it goes all the way up and down, but it doesn't go back to the other side of the z axis. Why? That's because r is always positive by convention. So, for example, here, we say θ is zero. At the back, we say θ is π . We don't say θ is zero and r is negative. We say r is positive and θ is π . It's a convention, largely. But, sticking with this convention really will help you to set up the integrals properly. I mean, otherwise there is just too much risk for mistakes. Yes?

Vâng, có bất kỳ câu hỏi nào về hệ tọa độ trụ không? Xin mời? Đúng rồi, vâng tôi nói khi bạn cố định θ , bạn nhận được chỉ nửa mặt phẳng, không phải là toàn bộ mặt phẳng. Ý tôi là, nó đi theo mọi đường lên và xuống, nhưng nó không quay lại phía bên kia của trục z . Tại sao? Đó là bởi vì r luôn luôn dương theo quy ước. Vì vậy, ví dụ, ở đây, chúng ta nói θ bằng không. Ở phía sau, chúng ta nói θ bằng π . Chúng ta không nói θ bằng không và r âm. Chúng ta nói r dương và θ bằng π . Thực ra đó là một quy ước. Tuy nhiên, gắn bó với quy ước này thực sự sẽ giúp bạn thiết lập tích phân thích hợp. Ý tôi là, nếu làm ngược lại sẽ có nhiều nguy cơ phạm sai lầm. Xin mời?

Well, so the question is if I were to use symmetry to do this one, would I multiply by four or by two? Well, it depends on how much symmetry you are using. So, I mean, it's your choice. You can multiply by two, by four, by eight depending on how much

you cut it. So, it depends on what symmetry you use, if you use symmetry between top and bottom you'd say, well, the volume is twice the lower half. If you use the left and right half, you would say it's twice each half. If you cut it into four pieces, and so on.

Vâng, vì vậy câu hỏi là nếu tôi dùng đối xứng để làm cái này, tôi sẽ nhân bốn hay nhân hai? Vâng, nó phụ thuộc vào việc bạn tận dụng tính đối xứng ở mức độ nào. Vâng, ý tôi là, đó là sự lựa chọn của bạn. Bạn có thể nhân hai, nhân bốn, nhân tám tùy thuộc vào việc bạn cắt nó thành bao nhiêu phần. Vâng, nó phụ thuộc vào mức độ bạn tận dụng tính đối xứng, nếu bạn sử dụng tính đối xứng giữa trên và dưới, vâng, thì thể tích bằng hai lần nửa dưới. Nếu bạn sử dụng nửa trái và nửa phải, thì nó bằng hai lần của mỗi nửa. Nếu bạn cắt nó thành bốn phần, và v.v...

So, and again, you don't have to use the symmetry. If you don't think of using polar coordinates, then it can save you from doing, you know, you can just start at zero here and here, and simplify things a tiny bit. But, OK, yes? So, to define a vertical full plane, well, first of all it depends on whether it passes through the z axis or not. If it doesn't, then you'd have to remember how you do in polar coordinates. I mean, basically the answer is, if you have a vertical plane, so, it doesn't depend on z. The equation does not involve z. It only involves r and theta. And, how it involves r and theta is exactly the same as when you do a line in polar coordinates in the plane. So, if it's a line passing through the origin, you say, well, theta is either some value or the other one.

Vì vậy, và một lần nữa, bạn không phải sử dụng tính đối xứng. Nếu bạn nghĩ đến việc dùng các tọa độ cực, thì nó có thể tiết kiệm công sức cho bạn, bạn biết, bạn chỉ cần bắt đầu tại không ở đây và đến đây, và đơn giản hóa các thứ một chút. Nhưng, Vâng, xin mời? Vâng, để xác định toàn bộ mặt phẳng thẳng đứng, vâng, trước hết nó phụ thuộc vào việc nó có đi qua trục z hay không. Nếu không, thì bạn phải nhớ cách bạn làm nó trong tọa độ cực. Tôi muốn nói là, về cơ bản câu trả lời là, nếu bạn có một mặt phẳng thẳng đứng, vâng, nó không phụ thuộc vào z. Phương trình không liên quan đến z. Nó chỉ liên quan đến r và theta. Và, cách thức nó liên quan đến r và theta giống hệt như khi bạn làm một đường thẳng trong các hệ tọa độ cực trong mặt phẳng. Vì vậy, nếu nó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ, bạn nói, vâng, theta hoặc bằng giá trị nào đó hoặc bằng giá trị kia.

If it's a line that doesn't pass through the origin, but it's more tricky. But hopefully you've seen how to do that. OK, let's move on a bit. So, one thing to know, I mean, basically, the important thing to remember is that the volume element in cylindrical coordinates, well, $dx dy dz$ becomes $r dr d\theta dz$. And, that shouldn't be surprising because that's just $dx dy$ becomes $r dr d\theta$. And, dz remains dz . I mean, so, the way to think about it, if you want, is that if you take a little piece of solid in space, so it has some height, Δz , and it has a base which has some area ΔA , then the small volume, Δv , is equal to the area of a base times the height.

Nếu nó là một đường thẳng không đi qua gốc tọa độ, nhưng nó phức tạp hơn. Nhưng hy vọng bạn biết cách làm điều đó. Vâng, chúng ta hãy chuyển chủ đề. Vâng, một điều cần biết, tôi muốn nói là, về cơ bản, điều quan trọng cần ghi nhớ là yếu tố thể tích trong tọa độ trụ, vâng, $dx dy dz$ trở thành $r dr d\theta dz$. Và, điều đó không có gì lạ bởi vì đó chỉ là $dx dy$ trở thành $r dr d\theta$. Và, dz vẫn là dz . Ý tôi là, như vậy, cách để nghĩ về nó, nếu bạn muốn, là nếu bạn lấy một yếu tố nhỏ của vật rắn trong không gian, vâng, nó có độ cao nào đó, Δz , và nó có đáy có diện tích ΔA , thế thì thể tích nhỏ, Δv , bằng diện tích đáy nhân chiều cao.

So, now, when you make the things infinitely small, you will get dV is dA times dz , and you can use whichever formula you want for area in the xy plane. OK, now in practice, you choose which order you integrate in. As you have probably seen, a favorite of mine is z first because very often you'll know what the top and bottom of your solid look like, and then you will reduce to just something in the xy plane.

Vì vậy, bây giờ, khi bạn làm cho các thứ nhỏ vô cùng, bạn sẽ được dV bằng dA nhân dz , và bạn có thể sử dụng bất cứ công thức nào mà bạn muốn để tính diện tích trong mặt phẳng xy. Vâng, bây giờ trong thực tế, bạn chọn thứ tự nào mà bạn tính tích phân. Như bạn có

thể thấy, cái yêu thích của tôi là z trước bởi vì thông thường chúng ta biết trên cùng và dưới cùng của vật rắn sẽ có dạng như thế nào, và sau đó bạn sẽ đưa các thứ xuống mặt phẳng xy .

But, there might be situations where it's actually easier to start first with $dx dy$ or $dr d\theta$, and then save dz for last. I mean, if you seen how to, in single variable calculus, the disk and shell methods for finding volumes, that's exactly the dilemma of shells versus disks. One of them is you do z first. The other is you do z last. OK, so what are things we can do now with triple integrals? Well, we can find the volume of solids by just integrating dV . And, we've seen that. We can find the mass of a solid. OK, so if we have a density, δ , which, remember, δ is basically the mass divided by the volume.

Tuy nhiên, có thể có trường hợp mà ở đó bắt đầu trước với $dx dy$ hoặc $rd r d\theta$ sẽ dễ hơn, và sau đó làm dz cuối cùng. Tôi muốn nói là, nếu bạn đã thấy cách, trong giải tích hàm một biến, hình tròn và phương pháp bao để tìm thể tích, đó đúng là vấn đề nan giải của phương pháp này cho các hình tròn. Một trong số chúng là bạn làm z đầu tiên. Cái kia là làm z cuối cùng. Vâng, bây giờ chúng ta có thể làm gì với tích phân ba lớp? Vâng, chúng ta có thể tìm thể tích của vật rắn bằng cách chỉ lấy tích phân dV . Và, chúng ta đã thấy điều đó. Chúng ta có thể tìm khối lượng của vật rắn. Vâng, vậy nếu chúng ta có mật độ, δ , trong đó, hãy nhớ rằng, δ về cơ bản là khối lượng chia cho thể tích.

OK, so the small mass element, maybe I should have written that as dm , the mass element, is density times dV . So now, this is the real physical density. If you are given a material, usually, the density will be in grams per cubic meter or cubic inch, or whatever. I mean, there is tons of different units. But, so then, the mass of your solid will be just the triple integral of density, dV because you just sum the mass of each little piece. And, of course, if the density is one, then it just becomes the volume. OK, now, it shouldn't be surprising to you that we can also do classics that we had seen in the plane such as the average value of a function, the center of mass, and moment of inertia.

Vâng, thế thì yếu tố khối lượng nhỏ, có lẽ tôi sẽ viết nó là dm , yếu tố khối lượng, bằng mật độ nhân dV . Vì vậy, bây giờ, đây là mật độ vật lý thật sự. Nếu bạn được cho một loại vật liệu, thông thường, mật độ sẽ là gam trên mét khối hoặc inch mũ ba, hay gì đó. Ý tôi là, có rất nhiều đơn vị khác nữa. Nhưng, vâng khối lượng của vật rắn của bạn sẽ chỉ là tích phân ba lớp của mật độ, dV bởi vì bạn chỉ lấy tổng khối lượng của từng phần cực kì nhỏ. Và, tất nhiên, nếu mật độ bằng một, thì nó trở thành thể tích. Vâng, bây giờ, không có gì ngạc nhiên khi cũng có những lí luận tương tự với những thứ chúng ta đã từng gặp trong mặt phẳng chẳng hạn như giá trị trung bình của hàm, tâm khối, và moment quán tính.

OK, so the average value of the function f of x, y, z in the region, r , that would be \bar{f} , would be one over the volume of the region times the triple integral of $f dV$. Or, if we have a density, and we want to take a weighted average -- Then we take one

over the mass where the mass is the triple integral of the density times the triple integral of f density dV . So, as particular cases, there is, again, the notion of center of mass of the solid. So, that's the point that somehow right in the middle of the solid. That's the point mass by which there is a point at which you should put point mass so that it would be equivalent from the point of view of dealing with forces and translation effects, of course, not for rotation. But, so the center of mass of a solid is just given by taking the average values of x , y , and z .

Vâng, vì vậy giá trị trung bình của hàm $f(x, y, z)$ trong vùng, R , sẽ là f gạch, sẽ là một trên thể tích của vùng nhân tích phân ba lớp của $f dV$. Hoặc, nếu chúng ta có mật độ, và chúng ta muốn tính trung bình có trọng số - Thì chúng ta lấy một trên khối lượng trong đó khối lượng là tích phân ba lớp của mật độ nhân tích phân ba lớp của f mật độ dV . Vì vậy, đó thường là một điểm nằm ngay giữa vật rắn. Đó là chất điểm mà qua đó có một điểm mà tại đó bạn sẽ đặt chất điểm để cho nó tương đương từ quan điểm khi xét với các lực và hiệu ứng tịnh tiến, tất nhiên, không phải chuyển động quay. Nhưng, vâng khối tâm của vật rắn được tính bằng giá trị trung bình của x , y , và z .

OK, so there is a special case where, so, \bar{x} is one over the mass times triple integral of x density dV . And, same thing with y and z . And, of course, very often, you can use symmetry to not have to compute all three of them. For example, if you look at this solid that we had, well, I guess I've erased it now. But, if you remember what it looked, well, it was pretty obvious that the center of mass would be in the z axis. So, no need to waste time considering \bar{x} and \bar{y} .

Vâng, do đó, có một trường hợp đặc biệt, vâng, \bar{x} gạch là một trên khối lượng nhân tích phân ba lớp của x mật độ dV . Và, tương tự với y và z . Và, tất nhiên, rất thường xuyên, bạn có thể sử dụng tính đối xứng để không cần tính cả ba cái. Ví dụ, nếu bạn xét vật rắn mà chúng ta có, vâng, tôi đoán tôi đã xóa nó rồi. Nhưng, nếu bạn nhớ hình dạng của nó, vâng, tất nhiên khối tâm sẽ nằm trên trục z . Vì vậy, không cần phải lãng phí thời gian để xét \bar{x} gạch và \bar{y} gạch.

And, in fact, you can also find \bar{z} by symmetry between the top and bottom, and let you figure that out. Of course, symmetry only works, I should say, symmetry only works if the density is also symmetric. If I had taken my guy to be heavier at the front than at the back, then it would no longer be true that \bar{x} would be zero. OK, next on the list is moment of inertia. Actually, in a way, moment of inertia in 3D is easier conceptually than in 2D. So, why is that? Well, because now the various flavors that we had come together in a nice way. So, the moment of inertia of an axis, sorry, with respect to an axis would be, again, given by the triple integral of the distance to the axis squared times density, times dV .

Và, trên thực tế, bạn cũng có thể tìm \bar{z} gạch qua sự đối xứng giữa trên và dưới, và các bạn hãy tự suy nghĩ. Tất nhiên, đối xứng chỉ áp dụng được, tôi sẽ nói, đối xứng chỉ áp dụng được nếu mật độ cũng đối xứng. Nếu ở đây tôi chọn phía trước nặng hơn phía sau, thì nó sẽ không còn đúng \bar{x} gạch không bằng không. Vâng, tiếp theo danh sách là moment quán tính. Trong thực tế, theo cách nào đó, về mặt khái niệm moment quán tính trong không gian ba chiều dễ hơn hai chiều. Vâng, tại sao vậy? Vâng, bởi vì bây giờ các khái niệm mà chúng ta đang có khá hòa hợp. Vâng, moment quán tính của một trục, xin lỗi, đối với một trục sẽ là, một lần nữa, là tích phân ba lớp của khoảng cách đến trục bình phương nhân mật độ, nhân dV .

And, in particular, we have our solid. And, we might skewer it using any of the coordinate axes and then try to rotate it about one of the axes. So, we have three different possibilities, of course, the x , y , or z axis. And, so now, rotating about the z axis actually corresponds to when we were just doing things for flat objects in the xy plane. That corresponded to rotating about the origin. So, secretly, we were saying we were rotating about the point. But actually, it was just rotating about the z axis. Just I didn't want to introduce the z coordinate that we didn't actually need at the time. So -

Và, đặc biệt, chúng ta có vật rắn của chúng ta. Và, chúng ta có thể dùng bất cứ trục tọa

độ nào xuyên qua nó và sau đó thử quay nó quanh một trục. Vì vậy, chúng ta có ba khả năng khác nhau, tất nhiên, trục x, y, hoặc z. Và, như vậy bây giờ, quay quanh trục z tương ứng với chúng ta thực hiện các thử đối với các vật thể phẳng trong mặt phẳng xy. Điều đó tương ứng với quay quanh gốc tọa độ. Vì vậy, bí mật, chúng ta đang nói chúng ta quay quanh một điểm. Nhưng trên thực tế, nó đang quay quanh trục z. Tôi đã không đưa vào hệ tọa độ z vì thực sự chúng ta không cần nó vào lúc này. Vì vậy -

[APPLAUSE] OK, so moment of inertia about the z axis, so, what's the distance to the z axis? Well, we've said that's exactly r. That's the cylindrical coordinate, r. So, the square of a distance is just r squared. Now, if you didn't want to do it in cylindrical coordinates then, of course, r squared is just x squared plus y squared. Square of distance from the z axis is just x squared plus y squared. Similarly, now, if you want the distance from the x axis, well, that will be y squared plus z squared.

Vâng, vì vậy moment quán tính xung quanh trục z, vâng, khoảng cách đến trục z là gì? Vâng, chúng ta đã nói nó chính là r. Đó là tọa độ trụ, r. Vì vậy, bình phương khoảng cách chỉ là r bình phương. Bây giờ, nếu bạn không muốn làm điều đó trong hệ tọa độ trụ thì, tất nhiên, r bình chỉ là x bình cộng y bình. Bình phương khoảng cách từ trục z chỉ là x bình cộng y bình. Tương tự như vậy, bây giờ, nếu bạn muốn khoảng cách từ trục x, vâng, đó sẽ là y bình cộng z bình.

OK, try to convince yourselves of the picture, or else just argue by symmetry: you know, if you change the positions of the axis. So, moment of inertia about the x axis is the double integral of y squared plus z squared delta dV. And moment of inertia about the y axis is the same thing, but now with x squared plus z squared. And so, now, if you try to apply these things for flat solids that are in the xy plane, so where there's no z to look at, well, you see these formulas become the old formulas that we had.

Vâng, cố gắng tự thuyết phục bằng hình, hoặc lí luận qua tính đối xứng: bạn biết, nếu bạn thay đổi vị trí của trục. Vâng, moment quán tính xung quanh trục x là tích phân kép của y bình cộng z bình delta dV. Và moment quán tính xung quanh trục y tương tự, nhưng bây giờ là x bình cộng z bình. Và như vậy, bây giờ, nếu bạn thử áp dụng những thứ này cho các vật rắn phẳng trong mặt phẳng xy, do đó ở đó không có z để xét, vâng, bạn thấy các công thức này trở thành các công thức cũ mà chúng ta đã có.

But now, they all fit together in a more symmetric way. OK, any questions about that? No? OK, so these are just formulas to remember. So, OK, let's do an example. Was there a question that I missed? No? OK, so let's find the moment of inertia about the z axis of a solid cone -- -- between z equals a times r and z equals b. So,

just to convince you that it's a cone, so, z equals a times r means the height is proportional to the distance from the z axis. So, let's look at what we get if we just do it in the plane of a blackboard. So, if I go to the right here, r is just the distance from the x axis.

Nhưng bây giờ, tất cả đều phù hợp với nhau theo cách đối xứng hơn. Được rồi, có ai hỏi gì về điều đó không? Không có? Được rồi, vì vậy đây chính là các công thức cần nhớ. Vì vậy, vâng, hãy xét một ví dụ. Hình như có bạn nào hỏi? Không à? Được rồi, vâng hãy tìm moment quán tính của một nón quanh trục z - - giữa z bằng a nhân r và z bằng b . Vâng, chỉ để thuyết phục bạn rằng đó là một nón, vâng, z bằng a nhân r có nghĩa là chiều cao tỷ lệ thuận với khoảng cách từ trục z . Vì vậy, hãy xét những gì chúng ta nhận được nếu chúng ta chỉ xét nó trong mặt phẳng bảng đen. Vì vậy, nếu tôi đi sang phải ở đây, r chính là khoảng cách từ trục x .

The height should be proportional with proportionality factor A . So, that means I take a line with slope A . If I'm on the left, well, it's the same story except distance to the z axis is still positive. So, I get the symmetric thing. And, in fact, it doesn't matter which vertical plane I do it in. This is the same if I rotate about. See, there's no θ in here. So, it's the same in all directions. So, I claim it's a cone where the slope of the rays is A .

Chiều cao sẽ tỉ lệ với hệ số tỉ lệ A . Vâng, điều đó có nghĩa là tôi chọn đường với hệ số góc bằng A . Nếu tôi ở bên trái, vâng, nó tương tự ngoại trừ khoảng cách với trục z vẫn dương. Vì vậy, tôi nhận được những thứ đối xứng. Và, trên thực tế, tôi thực hiện nó trong mặt phẳng thẳng đứng nào không quan trọng. Cái này giống như tôi quay. Vì vậy, không có θ ở đây. Vâng, nó giống nhau theo mọi hướng. Vì vậy, tôi cho rằng nó là một nón trong đó hệ số góc của các tia bằng A .

OK, and z equals b . Well, that just means we stop in our horizontal plane at height b . OK, so that's solid cone really just looks like this. That's our solid. OK, so it has a flat top, that circular top, and then the point is at v . The tip of it is at the origin. So, let's try to compute its moment of inertia about the z axis. So, that means maybe this is like the top that you are going to spin. And, it tells you how hard it is to actually spin that top. Actually, that's also useful if you're going to do mechanical engineering because if you are trying to design gears, and things like that that will rotate, you might want to know exactly how much effort you'll have to put to actually get them to spin, and whether you're actually going to have a strong enough engine, or whatever, to do it.

Vâng, và z bằng b . Vâng, điều đó chỉ có nghĩa là chúng ta dừng trong mặt phẳng nằm ngang của chúng ta ở độ cao b . Vâng, vì vậy đó là một nón giống như thế này. Đó là vật rắn của chúng ta. Vâng, do đó nó có một đầu phẳng, đầu tròn chứ, và các điểm nằm trên hình chữ V. Mũi của nó nằm tại gốc tọa độ. Vâng, chúng ta hãy thử tính moment quán tính xung quanh trục z . Vì vậy, có nghĩa là cái này giống như đỉnh mà bạn sẽ quay. Và, nó sẽ cho bạn biết quay đỉnh đó khó như thế nào. Trên thực tế, điều đó cũng hữu ích khi chúng ta thực hiện kỹ thuật cơ khí bởi vì nếu bạn đang thiết kế các bánh răng, và những vật quay tương tự thế, bạn có thể cần phải biết chính xác bạn dùng bao nhiêu sức lực để làm cho chúng quay, và bạn có động cơ đủ mạnh, hoặc thứ gì đó, để làm nó hay không.

OK, so what's the moment of inertia of this guy? Well, that's the triple integral of, well, we have to choose x squared plus y squared or r squared. Let's see, I think I want to use cylindrical coordinates to do that, given the shape. So, we use r squared. I might have a density that let's say the density is one. So, I don't have density. I still have dV . Now, it will be my choice to choose between doing the dz first or doing $r dr d\theta$ first. Just to show you how it goes the other way around, let me do it $r dr d\theta dz$ this time. Then you can decide on a case-by-case basis which one you like best. OK, so if we do it in this direction, it means that in the inner and middle integrals, we've fixed a value of z .

Vâng, vậy moment quán tính của thẳng này là gì? Vâng, đó là tích phân ba lớp của, vâng, chúng ta phải chọn x bình phương cộng với y bình phương hoặc r bình phương. Xem nào,

tôi nghĩ rằng tôi muốn sử dụng hệ tọa độ trụ để làm điều đó, hình dạng đã biết. Vì vậy, chúng ta sử dụng r bình. Có thể có mật độ giả sử rằng mật độ bằng một. Vì vậy, tôi không có mật độ. Tôi vẫn còn có dV . Bây giờ, nó sẽ là lựa chọn của tôi để chọn giữa làm dz trước hoặc làm $r dr d\theta$ trước. Chỉ để cho bạn thấy cách nó đi theo đường khác, hãy để tôi làm nó với $r dr d\theta dz$ lúc này. Thế thì, bạn có thể quyết định trường hợp cụ thể nào bạn thích nhất. Vâng, vì vậy nếu chúng ta làm nó theo hướng này, có nghĩa là trong các tích phân bên trong và giữa, chúng ta đã cố định một giá trị của z .

And, for that particular value of z , we'll be actually slicing our solid by a horizontal plane, and looking at what we get, OK? So, what does that look like? Well, I fixed a value of z , and I slice my solid by a horizontal plane. Well, I'm going to get a circle certainly. What's the radius, well, a disk actually, what's the radius of the disk? Yeah, the radius of the disk should be z over a because the equation of that cone, we said it's z equals ar . So, if you flip it around, so, maybe I should switch to another blackboard. So, the equation of a cone is z equals ar , or equivalently r equals z over a .

Và, đối với giá trị đặc biệt đó của z , chúng ta sẽ thực sự cắt vật rắn của chúng ta bằng một mặt phẳng ngang, và xét những gì chúng ta nhận được, đúng không? Vì vậy, nó có dạng thế nào? Vâng, tôi cố định một giá trị của z , và tôi cắt vật rắn của tôi bởi một mặt phẳng nằm ngang. Vâng, tất nhiên tôi sẽ được đường tròn. Bán kính là gì, vâng, một hình tròn thực sự, bán kính của hình tròn là gì? Vâng, bán kính của hình tròn sẽ là z trên a vì phương trình của nón đó, chúng ta đã nói là z bằng ar . Vì vậy, nếu bạn quay nó xung quanh, vâng, có lẽ tôi nên chuyển sang bảng khác. Vì vậy, phương trình của nón là z bằng ar , hoặc tương đương r bằng z trên a .

So, for a given value of z , I will get, this guy will be a disk of radius z over a . OK, so, moment of inertia is going to be, well, we said r squared, $r dr d\theta dz$. Now, so, to set up the inner and middle integrals, I just set up a double integral over this disk of radius z over a . So, it's easy. r goes from zero to z over a . θ goes from zero to 2π . OK, and then, well, if I set up the bounds for z , now it's my outer variable. So, the question I have to ask is what is the first slice? What is the last slice? So, the bottommost value of z would be zero, and the topmost would be b .

Vì vậy, đối với giá trị cho trước của z , tôi sẽ nhận được, thẳng này sẽ là đĩa bán kính z bằng a . Vâng, vì vậy, moment quán tính sẽ là, vâng, chúng ta đã nói r bình, $r dr d\theta dz$. Bây giờ, do đó, để thiết lập các tích phân bên trong và tích phân giữa, tôi chỉ cần thiết lập tích phân kép trên đường tròn bán kính z bằng a này. Vâng, thật dễ dàng. r đi từ không đến z trên a . θ đi từ không đến 2π . Vâng, và sau đó, vâng, nếu tôi thiết lập các cận cho z , bây giờ nó là biến bên ngoài của tôi. Vì vậy, các câu hỏi mà tôi phải trả lời là mặt cắt thứ nhất là gì? Mặt cắt cuối cùng là gì? Vì vậy, giá trị dưới cùng của z sẽ bằng không, và trên cùng sẽ là b .

And so, that's it I get. So, exercise, it's not very hard. Try to set it up the other way around with dz first and then $r dr d\theta$. It's pretty much the same level of difficulty. I'm sure you can do both of them. So, and also, if you want to practice

calculations, you should end up getting pi b to the five over 10a to the four if I got it right. OK, let me finish with one more example. I'm trying to give you plenty of practice because in case you haven't noticed, Monday is a holiday. So, you don't have recitation on Monday, which is good. But it means that there will be lots of stuff to cover on Wednesday. So -

Và như vậy, đó là những gì tôi nhận được. Vì vậy, bài tập thực hành, nó không phải khó. Hãy thử thiết lập nó theo cách khác với dz trước và sau đó r dr d theta. Mức độ khó gần như nhau. Tôi chắc rằng bạn có thể làm cả hai. Vì vậy, và tương tự, nếu bạn muốn thực hành tính toán, kết quả là pi b đến năm trên 10a đến bốn nếu tôi không sai. Vâng, hãy để tôi kết thúc với một ví dụ nữa. Tôi sẽ cố gắng cho bạn nhiều bài thực hành phòng khi hôm nay bạn không chú ý, thứ hai bạn có thể tự làm vì nó là ngày nghỉ. Vì vậy, bạn không có buổi trả lời câu hỏi miệng vào Thứ hai, điều đó tốt. Nhưng có nghĩa là sẽ có rất nhiều thứ phải đề cập vào thứ tư. Vì vậy -

Thank you. OK, so third example, let's say that I want to just set up a triple integral for the region where z is bigger than one minus y inside the unit ball centered at the origin. So, the unit ball is just, you know, well, stay inside of the unit sphere. So, its equation, if you want, would be x squared plus y squared plus z squared less than one. OK, so that's one thing you should remember. The equation of a sphere centered at the origin is x squared plus y squared plus z squared equals radius squared. And now, we are going to take this plane, z equals one minus y.

Cảm ơn bạn. Vâng, do đó ví dụ thứ ba, giả sử rằng tôi muốn thiết lập tích phân kép đối với vùng z lớn hơn một trừ y bên trong quả cầu đơn vị tâm tại gốc tọa độ. Vì vậy, quả cầu đơn vị chỉ là, bạn biết, vâng, ở bên trong mặt cầu đơn vị. Vì vậy, phương trình của nó, nếu bạn muốn, sẽ là x bình phương cộng với y bình phương cộng z bình phương nhỏ hơn một. Vâng, vì vậy đó là cái bạn cần nhớ. Phương trình của một mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ là x bình phương cộng với y bình phương cộng với z bình phương bằng bán kính bình phương. Và bây giờ, chúng ta sẽ chọn mặt phẳng này, z bằng một trừ y.

So, if you think about it, it's parallel to the x axis because there's no x in its coordinate in its equation. At the origin, the height is one. So, it starts right here at one. And, it slopes down with y with slope one. OK, so it's a plane that comes straight out here, and it intersects the sphere, so here and here, but also at other points in between. Any idea what kind of shape this is? Well, it's an ellipse, but it's even more than that. It's also a circle. If you slice a sphere by a plane, you always get a circle. But, of course, it's a slanted circle. So, if you look at it in the xy plane, if you project it to the xy plane, that you will get an ellipse. OK, so we want to look at this guy in here.

Vì vậy, nếu bạn nghĩ về nó, nó song song với trục x vì không có x trong phương trình của nó. Tại gốc tọa độ, chiều cao bằng một. Vì vậy, nó bắt đầu ngay đây tại một. Và, nó dốc xuống với y với độ dốc bằng một. Vâng, vì vậy nó là mặt phẳng đi thẳng ra ngoài đây, và nó cắt mặt cầu, ở đây và ở đây, và còn tại các điểm khác ở giữa. Có ai biết cái này hình gì không? Vâng, đó là elip, nhưng vẫn còn thiếu. Nó còn là một hình tròn. Nếu bạn cắt hình cầu bằng một mặt phẳng, bạn luôn luôn nhận được một hình tròn. Nhưng, tất nhiên, đó là một đường tròn nằm xiên. Vì vậy, nếu bạn nhìn nó trong mặt phẳng xy, nếu bạn chiếu nó trên mặt phẳng xy, thì bạn sẽ nhận được một elip. Vâng, vì vậy chúng ta muốn xét thẳng này tại đây.

So, how do we do that? Well, so maybe I should actually draw quickly a picture. So, in the yz plane, it looks just like this, OK? But, if I look at it from above in the xy plane, then its shadow, well, see, it will sit entirely where y is positive. So, it sits entirely above here, and it goes through here and here. And, in fact, when you project that slanted circle, now you will get an ellipse.

Vâng, chúng ta làm điều đó như thế nào? Vâng, như vậy có lẽ tôi thực sự cần phải vẽ nhanh một hình. Vì vậy, trong mặt phẳng yz, nó có dạng như thế này, đúng không? Nhưng, nếu tôi nhìn nó từ phía trên trong mặt phẳng xy, thì hình chiếu của nó, vâng, thấy không, nó sẽ nằm toàn bộ trong phần y dương. Vì vậy, nó nằm hoàn toàn trên đây, và nó đi qua đây và đây. Và, trên thực tế, khi bạn chiếu hình tròn nghiêng đó, bây

giờ bạn sẽ nhận được một hình elip.

And, well, I don't really know how to draw it well, but it should be something like this. OK, so now if you want to try to set up that double integral, sorry, the triple integral, well, so let's say we do it in rectangular coordinates because we are really evil. [LAUGHTER] So then, the bottom surface, OK, so we do it with z first. So, the bottom surface is the slanted plane. So, the bottom value would be z equals one minus y . The top value is on the sphere. So, the sphere corresponds to z equals square root of one minus x squared minus y squared. So, you'd go from the plane to the sphere. And then, to find the bounds for x and y , you have to figure out what exactly, what the heck is this region here?

Và, vâng, tôi không thực sự biết cách vẽ nó chính xác, nhưng nó gần giống như thế này. Vâng, vậy bây giờ nếu bạn muốn thử thiết lập tích phân kép, xin lỗi, tích phân ba lớp, vâng, vâng giả sử rằng chúng ta làm nó trong hệ tọa độ Đề Các vì chúng ta thực sự ác. [Cười] Vì vậy thế thì, mặt dưới, vâng, vâng chúng ta làm nó với z trước. Vâng, mặt dưới là mặt phẳng bị nghiêng. Vâng, giá trị dưới sẽ là z bằng với một trừ y . Giá trị trên ở trên mặt cầu. Vâng, mặt cầu tương ứng với z bằng căn bậc hai của một trừ x bình trừ y bình. Vì vậy, bạn muốn đi từ mặt phẳng đến mặt cầu. Và sau đó, để tìm ra các cận cho x và y , bạn phải tìm ra chính xác, vùng ở đây là gì?

So, what is this region? Well, we have to figure out, for what values of x and y the plane is below the ellipse. So, the condition is that, sorry, the plane is below the sphere. OK, so, that's when the plane is below the sphere. That means one minus y is less than square root of one minus x squared minus y squared. So, you have to somehow manipulate this to extract something simpler. Well, probably the only way to do it is to square both sides, one minus y squared should be less than one minus x squared minus y squared. And, if you work hard enough, you'll find quite an ugly equation. But, you can figure out what are, then, the bounds for x given y , and then set up the integral? So, just to give you a hint, the bounds on y will be zero to one.

Vâng, vùng này là gì? Vâng, chúng ta phải chỉ ra, đối với giá trị nào của x và y mặt phẳng nằm dưới elip. Vì vậy, điều kiện là, xin lỗi, mặt phẳng nằm dưới mặt cầu. Vâng, như vậy, đó là khi mặt phẳng nằm dưới mặt cầu. Điều đó có nghĩa là một trừ y nhỏ hơn căn bậc hai của một trừ x bình trừ y bình. Vì vậy, bạn phải xử lí cái này để làm mọi thứ đơn giản hơn. Vâng, có thể cách duy nhất để làm nó là bình phương cả hai vế, một trừ y bình sẽ nhỏ hơn một trừ x bình trừ y bình. Và, nếu bạn làm việc chăm chỉ, bạn sẽ tìm được một phương trình khá xấu xí. Tuy nhiên, bạn có thể tìm ra, sau đó, các cận đối với $x - y$ cho trước, và sau đó thiết lập tích phân? Vâng, đó là hướng dẫn, các cận là y sẽ bằng không đến một.

The bounds on x , well, I'm not sure you want to see them, but in case you do, it will be from negative square root of $2y$ minus $2y$ squared to square root of $2y$ minus $2y$ squared. So, exercise, figure out how I got these by starting from that. Now, of

course, if we just wanted the volume of this guy, we wouldn't do it this way. We do symmetry, and actually we'd rotate the thing so that our spherical cap was actually centered on the z axis because that would be a much easier way to set it up. But, depending on what function we are integrating, we can't always do that.

Các cận của x, vâng, tôi không chắc chắn rằng bạn muốn thấy chúng, nhưng trong trường hợp bạn làm, nó sẽ đi từ trừ căn hai của 2y trừ 2y bình đến căn hai của 2y trừ 2y bình. Vì vậy, thực hành, chỉ ra cách tôi nhận được những thẳng này bằng cách bắt đầu từ đó. Bây giờ, tất nhiên, nếu chúng ta chỉ muốn thể tích của thẳng này, chúng ta sẽ không làm nó theo cách này. Chúng ta thực hiện đối xứng, và thực sự chúng ta muốn xoay cái để cho chóp cầu của chúng ta thực sự có tâm trên trục z vì đó sẽ là một cách dễ hơn để thiết lập nó. Tuy nhiên, tùy thuộc vào chúng ta muốn lấy tích phân hàm nào, chúng ta không thể luôn luôn làm điều đó.

OK, so have a nice, long weekend, and I'll see you on Tuesday.

Vâng, do đó, chúc một ngày cuối tuần dài, đẹp, và tôi sẽ gặp bạn vào Thứ ba.